Acad. M. NICOLESCU

N. DINCULEANU S. MARCUS

ANALIZĂ MATEMATICĂ

VOL. I

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
BUCUREŞTI – 1966

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A TREIA

Ediția a treia a volumului I al manualului de analiză matematică nu prezintă modificări structurale față de ediția precedentă. Am ținut totuși să îndreptăm pe cît posibil atît erorile și scăpările datorite autorilor, cît și erorile de tipar.

Am profitat de acest prilej ca să simplificăm prezentarea unor capitole, precum și unele demonstrații. În același timp am căutat să aplicăm mai consecvent și mai adîncit conceptul general de funcție introdus chiar la începutul manualului la studiul aplicațiilor lui R sau R^2 în R^2 sau R^3, privite ca spații vectoriale, adică la studiul așa-numitelor funcții vectoriale.

Era natural ca să dăm și în acest caz, ca și în cazul aplicațiilor numerice, o interpretare fizică derivatei întîi și derivatei a doua. În acest mod, studentul este mai bine pregătit să abordeze studiile ulterioare de geometrie sau de mecanică.

Este probabil că în această ediție se vor strecura alte erori. Vom fi recunoscători colegilor care ne vor semnala lipsurile de orice fel, ajutîndu-ne astfel să ne îmbunătățim continuu prezentarea manualului.

AUTORII

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A DOUA

Intervalul de timp foarte scurt la care această ediție urmează primei ediții nu ne-a îngăduit să reflectăm prea mult asupra tuturor îmbunătățirilor ce s-ar fi putut aduce în redactarea și prezentarea materialului din acest volum și nici nu ne-a permis să culegem observațiile făcute de cititori. Cu toate acestea, am procedat la unele modificări pe care le-am crezut absolut necesare pentru mai buna înțelegere a fenomenelor matematice prezentate. Astfel, studiul șirurilor convergente se prezintă mai sistematic dacă este precedat de studiul șirurilor care converg către zero. Am introdus în noua ediție acest studiu preliminar.

De asemenea, studiul funcțiilor integrabile Riemann a fost completat cu teorema de echivalență a lui Lebesgue. Prezentarea acestui criteriu are un interes științific deosebit: pe de o parte, cititorul capătă o informație precisă asupra structurii funcțiilor integrabile Riemann; pe de altă parte, criteriul lui Lebesgue delimitează exact domeniul de integrare cu metoda Riemann. În fapt, după ce Lebesgue, în jurul anului 1900, a obținut teorema sa de caracterizare a integrabilității în sensul lui Riemann, a trebuit să se gîndească la un alt *procedeu pentru a extinde integrala Riemann; și astfel a ajuns la integrala care-i poartă numele.*

Din punct de vedere metodologic, criteriul lui Lebesgue permite să se dea demonstrații mult mai simple tuturor proprietăților privind funcțiile integrabile Riemann și calculul cu aceste funcții. Aceste demonstrații figurează în ediția de față.

În afară de aceste modificări mai importante, s-au mai adus, de-a lungul întregului curs, unele mici îndreptări și modificări pe care nu le mai enumerăm aici.

Toate îndreptările, adăugirile și chiar suprimările făcute cu scopul ameliorării atît a formei cît și a conținutului nu modifică linia generală a manua-

lului. De aceea ne menținem rugămintea către colegii noștri de specialitate și către toți cititorii de a ne semnala erorile eventuale scăpate și de a ne trimite toate observațiile susceptibile de a contribui la o și mai bună prezentare a acestui manual.

Decembrie, 1962 AUTORII

PREFAȚĂ LA EDIȚIA ÎNTÎI

Cartea de față reprezintă, în cea mai mare măsură a sa, fructul experienței didactice a autorilor săi, precum și al unor repetate dezbateri, în ședințele de colectiv ale catedrei, asupra celor mai bune mijloace de prezentare a noțiunilor de bază ale analizei.

Întreaga teorie a integralei, ca și teoria curbelor rectificabile, pentru a nu da decît aceste două exemple, poartă pecetea, așa cum sînt redactate aici, a discuțiilor fructuoase purtate în colectivul amintit mai sus.

În consecință, manualul de față, care are ca punct de plecare un manual mai vechi al unuia dintre autori[1]*, se deosebește în mod sensibil de acesta.*

Există, în primul rînd, o deosebire în ordonarea materiei, care a urmat, în manualul de față, în mod strict, programa analitică.

Această programă este diferită de programa din 1949, ca și de cea din 1953. Ca urmare, conținutul însuși al actualului manual este mai cuprinzător decît al vechiului manual.

În anii regimului democrat-popular a avut loc o înflorire fără precedent a cercetării matematice, care a cuprins sectoare din ce în ce mai largi ale acestei discipline. În particular, s-a creat o școală puternică de analiză funcțională și topologie, prin eforturile reunite ale catedrelor care constituie astăzi secția de analiză a Facultății de matematică și fizică a Universității din București.

[1] Miron Nicolescu: 1° Calcul diferențial și integral, 1949; 2° Analiză matematică, vol. II, 1953.

În dezvoltarea acestei școli, cursul de analiză matematică (calculul diferențial și integral) a jucat și va trebui să continue să joace un rol de bază. Iată de ce am considerat necesar să dăm o orientare corespunzătoare acestui curs, ținînd — bineînțeles — seama de tradiția creată și verificată prin experiența de atîția ani de la catedra de calcul diferențial și integral.

Am ținut, de asemenea, seama de locul din ce în ce mai important pe care algebra abstractă îl joacă în cercetarea matematică actuală. Metodele algebrei au pătruns astăzi în aproape toate celelalte discipline matematice. Din acest motiv, demarcarea precisă între diversele sectoare ale activității matematice devine o operație din ce în ce mai grea. O astfel de demarcare, dacă este prea net subliniată, este chiar dăunătoare ideii de unitate pe care cercetătorul începător trebuie să o capete din studiul diverselor discipline matematice.

Toți factorii enumerați mai sus și-au adus contribuția lor în înfățișarea actuală a cursului. O consecință a acestui fapt o constituie, de exemplu, punerea în acord a terminologiei utilizate în curs cu terminologia în uz în cercetarea actuală, precum și utilizarea frecventă a limbajului vectorial, care are dublu avantaj: de a simplifica prezentarea și de a înlesni drumul spre analiza funcțională.

Volumul acestui curs poate apărea prea mare față de numărul de ore atribuit analizei matematice prin programa actuală.

Am fi putut foarte bine să prezentăm acest curs ca o reproducere fidelă a lecțiilor orale, lucru care ar fi micșorat (nu prea mult, totuși) volumul acestui curs. Considerăm însă că dacă această metodă se poate susține cu argumente valabile, pentru un curs de specializare, ea devine de-a dreptul dăunătoare, în cazul unui curs fundamental. Dacă profesorul, din lipsă de timp sau pentru motive de ordin pedagogic, găsește cu cale să prezinte, într-o lecție vorbită, numai liniile generale ale unui raționament, studentul trebuie să poată găsi în manual raționamentul expus în toate detaliile. Mai mult decît atît, un adevărat manual consacrat unei materii fundamentale trebuie să poată servi studentului și după trecerea examenelor respective, ca o carte de referință, analogă unui „dicționar politehnic" pentru un inginer.

Întrucît această carte este destinată studenților, autorii sînt interesați în cea mai mare măsură să cunoască rezultatele experienței făcute cu manualul de față la celelalte instituții de învățămînt superior; ei vor primi cu recunoștință toate observațiile care vor contribui la îmbunătățirea eventualelor ediții următoare.

AUTORII

Capitolul I

MULŢIMI ŞI FUNCŢII

§ 1. Apartenenţă, incluziune, părţile unei mulţimi

Vom adopta aşa-numitul *punct de vedere naiv* în expunerea noţiunilor din teoria mulţimilor, adică vom da noţiunilor fundamentale, mulţime, relaţie, proprietate, corespondenţă etc., înţelesul pe care-l au în limbajul obişnuit.

1. Exemple de mulţimi

Denumirile mulţime, grămadă, ansamblu, colecţie sînt sinonime. Iată cîteva exemple de mulţimi concrete:

1) Mulţimea oamenilor de pe glob.
2) Mulţimea literelor alfabetului latin.
3) Mulţimea punctelor de pe un cerc.
4) Mulţimea moleculelor dintr-un corp.
5) Mulţimea numerelor naturale* 1, 2, 3, 4, ...
6) Mulţimea numerelor 1, 3, 7.
7) Mulţimea formată numai din numărul 2.

2. Elementele unei mulţimi

Obiectele din care este alcătuită o mulţime se numesc *elemente* ale mulţimii. Elementele unei mulţimi pot fi obiecte de orice natură, fie obiecte concrete, fie obiecte ale gîndirii. Pentru studiu, problema esenţială este posibilitatea de a distinge între ele aceste obiecte.

* Vom presupune cunoscute numerele întregi, pentru exemplificarea noţiunilor din acest capitol. Teoria mulţimilor nu necesită însă cunoaşterea conceptului de număr, ci, dimpotrivă, construirea numerelor necesită cunoaşterea teoriei mulţimilor.

Cărțile unei biblioteci constituie la un loc o mulțime. O carte din bibliotecă este un element al mulțimii. Elementele (cărțile) acestei mulțimi pot fi deosebite între ele, fie prin conținut, fie prin format, fie prin locul pe care îl ocupă în spațiu.

Mulțimile și elementele sînt notate în raționamente prin litere (ale diverselor alfabete), prin alte simboluri grafice sau prin combinații de litere și alte semne. De obicei, mulțimile se notează cu litere mari, iar elementele cu litere mici.

Pentru simplificarea limbajului se spune de cele mai multe ori „mulțimea A" sau „elementul x" în loc de „mulțimea *notată* prin litera A" sau „elementul *notat* prin litera x".

O literă poate indica fie un element *determinat*, fie un element *arbitrar*, nedeterminat, al unei mulțimi. Un element arbitrar este de asemenea numit *variabilă*, sau *argument*, sau element *generic* al mulțimii.

Dacă într-o proprietate, sau într-o relație relativă la elementele unei mulțimi, se înlocuiește un element arbitrar x printr-un element determinat x_0, se spune că se dă lui x valoarea x_0.

Se spune că o proprietate sau o relație în care intervin elemente arbitrare este o *identitate*, dacă ea devine o propoziție adevărată, oricare ar fi valorile date elementelor arbitrare (argumentelor).

3. Moduri de definire a mulțimilor

O mulțime se consideră definită (precizată, dată) dacă avem un criteriu după care să putem deosebi elementele mulțimii de celelalte obiecte care nu fac parte din mulțime. În acest sens, o mulțime poate fi definită fie numind individual elementele sale, fie specificînd o proprietate pe care o au toate elementele sale și pe care nu o au alte obiecte.

O mulțime definită prin enumerarea elementelor sale se notează scriind între acolade aceste elemente. De exemplu, mulțimile din exemplele 5, 6 și 7 se notează, respectiv: $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{2\}$.

Vom face distincție între mulțimea $\{2\}$ și elementul 2 al acestei mulțimi.

O mulțime definită prin specificarea unei proprietăți caracteristice P a elementelor sale se notează scriind între acolade această proprietate. De exemplu, mulțimea punctelor (x, y) din plan care aparțin cercului cu centrul în origine și raza 1 se notează:

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

4. Relația de egalitate

Dacă două litere, x și y, *reprezintă același element* al unei mulțimi E, se scrie $x = y$ și se citește „x este egal cu y". Dacă x și y *nu* reprezintă același element se scrie $x \neq y$ și se citește „x nu este egal cu y" sau „x este

diferit de y". Semnul $=$ se numește *semn de egalitate*. Se verifică imediat că relația de egalitate are următoarele proprietăți*:

1) $x = x$ (egalitatea este reflexivă);

2) $x = y \Longrightarrow y = x$ (egalitatea este simetrică);

3) $x = y$ și $y = z \Longrightarrow x = z$ (egalitatea este tranzitivă) (x, y și z sînt elemente arbitrare ale lui E).

5. Relația de apartenență

Dacă a este un element al unei mulțimi A (mai precis, dacă litera a *reprezintă* un element al mulțimii *indicate* prin litera A), se scrie $a \in A$ și se citește „a aparține mulțimii A". Dacă b *nu* este element al mulțimii A, se scrie $b \notin A$ și se citește „b nu aparține lui A". Semnul $\in$ se numește *semn de apartenență*.

Am definit astfel *relația de apartenență* între elementele unei mulțimi și mulțimea însăși.

În loc de $a \in A$ se poate scrie $A \ni a$.

Exemple. $5 \in \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$; $3 \in \{1, 3, 7\}$; $2 \in \{2\}$; $-1 \notin \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\notin \{1, 3, 7\}$; $3 \notin \{2\}$; $\{1, 3, 7,\} \ni 7$; $\{1, 3, 7\} \not\ni 5$.

6. Părțile unei mulțimi

Fie E o mulțime. O proprietate P, care se referă la elementele lui E (pe care unele elemente o pot avea, iar alte elemente pot să nu o aibă), definește o mulțime formată din *acele* elemente ale lui E care *au* proprietatea P. O astfel de mulțime formată din elemente ale lui E se numește *parte* a lui E sau *submulțime* a lui E.

Proprietatea „$x = x$" este adevărată pentru toate elementele $x \in E$, este o identitate. Partea definită de această proprietate se numește *partea plină* a lui E și este formată din *toate* elementele lui E. Așadar E este o parte sau o submulțime (improprie) a sa însăși.

Dacă $a \in E$, mulțimea $\{a\}$ formată numai din elementul a este o parte a lui E. Această parte poate fi definită ca mulțimea punctelor $x \in E$ care au proprietatea $x = a$.

---

* $\Longrightarrow$ este semnul *implicației logice*. De exemplu, $x = y \Longrightarrow y = x$ se citește „$x = y$ implică (atrage) $y = x$", sau, „dacă $x = y$, atunci $y = x$", sau încă, „din $x = y$ rezultă $y = x$". Semnul $\Longrightarrow$ se poate citi, de asemenea: deci, așadar, prin urmare.

$\Longleftrightarrow$ este semnul *echivalenței logice*. De exemplu, $y = x \Longleftrightarrow y = x$ se citește: „$x = y$ este echivalent cu $y = x$", sau, $x = y$ dacă și numai dacă $y = x$" sau „$x = y$ atunci și numai atunci cînd $y = x$" sau încă „pentru ca $x = y$ este necesar și suficient ca $y = x$". Semnul $\Longleftrightarrow$ se poate citi, de asemenea: adică, înseamnă că, este același lucru cu etc.

Dacă o submulțime A a lui E nu coincide cu E, atunci A se numește o submulțime *proprie* sau *strictă* a lui E.

Printre părțile lui E se consideră și *partea vidă a lui* E, care se notează $\emptyset$ și care nu conține nici un element. Partea vidă poate fi definită, de exemplu, ca mulțimea elementelor $x \in E$ care au proprietatea $x \neq x$.

Părțile mulțimii E pot fi considerate ca elemente ale unei noi mulțimi, numită *mulțimea părților lui* E, și notată $\mathcal{P}(E)$. Printre elementele mulțimii $\mathcal{P}(E)$ a părților lui E, se află părțile E, $\emptyset$ și $\{a\}$ dacă $a \in E$. Putem deci scrie $E \in \mathcal{P}(E)$, $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$, $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$.

Dacă două părți A și B ale lui E sînt formate din aceleași elemente, se scrie $A = B$. Mai precis, $A = B$ înseamnă că literele A și B *desemnează aceeași parte* a lui E (sau același element al mulțimii părților $\mathcal{P}(E)$).

7. Relația de incluziune

Fie E o mulțime A și B două părți ale sale. Dacă fiecare element al lui A aparține și lui B, se scrie $A \subset B$ și se citește „A este *conținută* în B" sau „A este *inclusă* în B". În loc de $A \subset B$ se scrie de asemenea $B \supset A$ și se citește „B conține (sau include) pe A" (fig. 1). Dacă A *nu este*

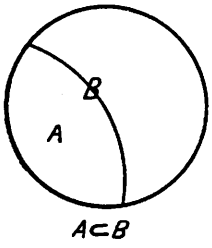
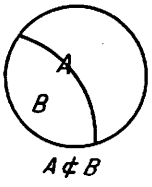


Fig. 1



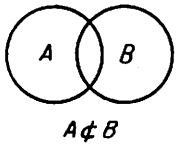


Fig. 2

inclusă în B, se scrie $A \not\subset B$ sau $B \not\supset A$ și se citește respectiv „A nu este inclusă în B" sau „B nu include pe A" (fig. 2). Vom face convenția $\emptyset \subset A$, oricare ar fi partea A a lui E.

Am definit astfel *relația de incluziune* între părțile lui E (sau între elementele mulțimii părților $\mathcal{P}(E)$).

Se verifică imediat că relația de incluziune are proprietățile următoare:

1) $A \subset A$ (este reflexivă);
2) $A \subset B$ și $B \subset A \Longrightarrow A = B$ (este antisimetrică);
3) $A \subset B$ și $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$ (este tranzitivă)

(A, B și C fiind părți arbitrare ale lui E).

Relația de incluziune este o *relație de ordine* *în mulțimea părților $\mathcal{P}(E)$.

Exemple $\{1,3,7\}\subset\{1,3,7\}$; $\{1,7\}\subset\{1,3,7\}$; $\{1,7\}\subset\{1,7\}$; $\{3\}\subset\{1,3,7\}$; $\varnothing\subset\{3\}$; $\varnothing\subset\{3,7\}$; $\{1,7\}\not\subset\{1,3\}$; $\{1,3\}\not\subset\{1,7\}$; $\{7\}\not\subset\{1,3\}$; $\{1\}\not\subset\varnothing$.

Două părți A și B sînt *comparabile* dacă sau $A\subset B$ sau $B\subset A$. De exemplu $\{1,3\}$ și $\{1,3,7\}$ sînt comparabile deoarece $\{1,3\}\subset\{1,3,7\}$. Dacă nici una din părțile A și B *nu* este inclusă în cealaltă, se spune că A și B sînt *incomparabile*. De exemplu $\{1,3\}$ și $\{1,7\}$ sînt incomparabile deoarece $\{1,3\}\not\subset\{1,7\}$ și $\{1,7\}\not\subset\{1,3\}$.

Legătura dintre relația de apartenență și relația de incluziune este exprimată de următoarele proprietăți:

1) $a\in A$ și $A\subset B\Longrightarrow a\in B$;

2) $a\in A\Longleftrightarrow\{a\}\subset A$.

Observație. Proprietatea 2 a relației de ordine (antisimetria) constituie procedeul obișnuit de demonstrație a egalității a două mulțimi A și B (sau, mai precis, literele A și B *reprezintă aceeași mulțime*): se arată întîi că $x\in A\Longrightarrow x\in B$ (deci $A\subset B$) și apoi se arată că $x\in B\Longrightarrow x\in A$ (deci $B\subset A$), de unde rezultă $A=B$.

§ 2. Operații cu mulțimile

1. Reuniunea și intersecția

Fie E o mulțime, A și B două părți ale ei.

Mulțimea elementelor care aparțin *cel puțin uneia* din mulțimile A și B se numește *reuniunea* lui A și B și se notează $A\cup B$ (se citește A reunit cu B) (fig. 3). Așadar:

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ sau } x\in B\}.$$

Semnul $\cup$ se numește *semn de reuniune*.

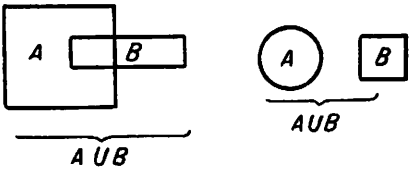


Fig. 3

Exemplu. $\{1,2,5\}\cup\{-1,0,2\}=\{-1,0,1,2,5\}$.

---

* O relație $x\leqslant y$ definită pentru unele perechi ordonate (x,y) de elemente ale unei mulțimi M se numește *relație de ordine* dacă este *reflexivă* ($x\leqslant x$ oricare ar fi $x\in M$), *antisimetrică* ($x\leqslant y$ și $y\leqslant x\Longrightarrow x=y$) și *tranzitivă* ($x\leqslant y$ și $y\leqslant z\Longrightarrow x\leqslant z$). Fie $x\leqslant y$ o relație de ordine; să definim relația „$x<y$“ ca fiind echivalentă cu „$x\leqslant y$ și $x\neq y$“. Relația $x<y$ este *ireflexivă* ($x<x$ nu are loc pentru nici un element $x\in M$) și *tranzitivă* ($x<y$ și $y<z\Longrightarrow x<z$). Relația $x<y$ se numește relație de ordine strictă.

Reciproc, dîndu-se o relație de ordine strictă $x<y$ (ireflexivă și tranzitivă), obținem o relație de ordine $x\leqslant y$ reflexivă, antisimetrică și tranzitivă dacă definim „$x\leqslant y$“ ca fiind echivalentă cu „$x<y$ sau $x=y$“.

O relație de ordine între elementele unei mulțimi M definește pe M o *structură de ordine* sau, mai simplu, o *ordine*. Mulțimea M împreună cu o ordine definită pe ea se numește *mulțime ordonată*. Mulțimea M este total ordonată, dacă oricare ar fi elementele $x\neq y$ din M avem sau $x<y$, sau $y<x$.

Mulțimea elementelor care aparțin *și lui A și lui B* se numește *intersecția* lui A și B și se notează $A \cap B$ (se citește: A intersectat cu B) (fig. 4). Așadar:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Dacă A și B nu au nici un element comun, atunci intersecția lor este vidă: $A \cap B = \varnothing$. În acest caz se spune că A și B sînt *disjuncte* (fig. 5).

Exemple. $\{1, 2, 5\} \cap \{0,2,5\} = \{2,5\}$; $\{1,2,5\} \cap \{2,7\} = \{2\}$; $\{1,2,5\} \cap \{3,7\} = \varnothing$.

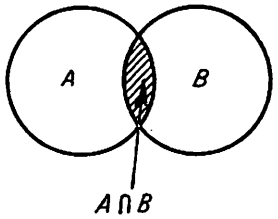


Fig. 4

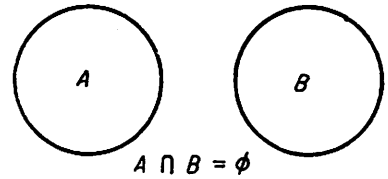


Fig. 5

Am definit astfel operațiile de reuniune și intersecție, prin care fiecărei perechi (A,B) de părți ale lui E i se asociază mulțimea $A \cup B$, respectiv $A \cap B$.

Cele două operații cu mulțimile au următoarele proprietăți:

1) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$ (idempotența),
2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativitatea),
3) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea),
4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivitatea),
5) $A \cup \varnothing = A$; $A \cap E = A$,
6) $A \cup E = E$; $A \cap \varnothing = \varnothing$

(A, B și C fiind părți arbitrare ale lui E).

Legătura dintre relația de incluziune și operațiile de reuniune și intersecție este exprimată de următoarele proprietăți:

7) $A \subset A \cup B$; $A \cap B \subset A$,
8) $A \subset B \iff A \cup B = B$; $A \subset B \iff A \cap B = A$,
9) $A \subset B \Longrightarrow A \cup C \subset B \cup C$; $A \subset B \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap C$,
10) $A \subset C$ și $B \subset C \Longrightarrow A \cup B \subset C$; $C \subset A$ și $C \subset B \Longrightarrow C \subset A \cap B$

(A, B și C fiind părți arbitrare ale lui E).

Se definesc în mod asemănător reuniunea și intersecția mai multor mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, notate respectiv

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \text{ sau } \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

2. Diferența. Complementara

Fie E o mulțime, A și B două părți ale ei. Mulțimea elementelor lui A care *nu* aparțin lui B se numește *diferența* dintre A și B și se notează $A - B$ (se citește A minus B) (fig. 6). Așadar:

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

Diferența $A - B$ se obține eliminînd din A elementele care aparțin și lui B.

Dacă A și B sînt disjuncte, atunci $A - B = A$; dacă $A \subset B$ atunci $A - B = \varnothing$.

Diferența $E - A$ se numește *complementara* lui A și se notează $\complement A$. Așadar:

$$\complement A = \{(x \mid x \in E,\ x \notin A\}.$$

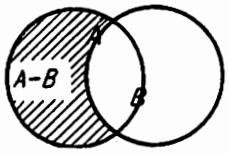


Fig. 6

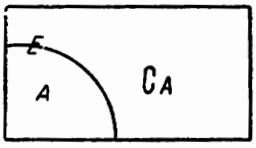


Fig. 7

Complementara lui A este formată din toate elementele lui E care nu aparțin lui A.

Următoarele proprietăți se deduc imediat:

1) $\complement E = \varnothing$; $\complement\varnothing = E$,

2) $\complement(\complement A) = A$,

3) $A \cup \complement A = E$; $\quad A \cap \complement A = \varnothing$,

4) $\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$; $\quad \complement(A \cap B) = (\complement A) \cup (\complement B)$,

5) $A \subset B \Longleftrightarrow \complement A \supset \complement B$

(A și B fiind părți arbitrare ale lui E).

Din proprietățile 3 rezultă că:

$$x \in A \Longleftrightarrow x \notin \complement A \quad \text{și} \quad x \in \complement A \Longleftrightarrow x \notin A.$$

3. Produs cartezian

Fie E și F două mulțimi distincte sau nu. Putem forma perechi ordonate (x, y) cu elementele celor două mulțimi, cu primul element x din E și al doilea element y din F.

Să considerăm *toate* perechile (x, y) de acest fel. Mulțimea tuturor perechilor (x, y), considerate ca elemente, se numește *produsul cartezian* al lui E cu F și se notează $E \times F$. Așadar:

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E,\ y \in F\}.$$

E și F se numesc factorii produsului cartezian $E \times F$; E este primul factor, iar F este al doilea factor.

x și y se numesc *coordonatele* sau *proiecțiile* elementului (x, y); x este prima coordonată sau prima proiecție, iar y este a doua coordonată sau a doua proiecție.

Exemplu. $E = \{a_1, a_2\}$, $F = \{b_1, b_2\}$, $E \times F = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$.

Se poate considera produsul cartezian $F \times E$ al lui F cu E, ale cărui elemente sînt perechile (x, y) cu $y \in F$ și $x \in E$;

$$F \times E = \{(y, x) \mid y \in F, x \in E\}.$$

Dacă $E \neq F$, vom face distincție între $E \times F$ și $F \times E$. În exemplul precedent, avem:

$$F \times E = \{(b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_2, a_1), (b_2, a_2)\}.$$

Dacă $E = F$, evident $E \times F = F \times E$. În acest caz, în loc de $E \times E$ vom scrie E^2. Astfel,

$$E^2 = \{(x, y) \mid x \in E, y \in E\}.$$

Exemplu. $E = \{a_1, a_2\}$, $E^2 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$.

Două elemente (x, y) și (x', y') ale produsului cartezian sînt egale dacă și numai dacă $x = x'$ și $y = y'$.

Se poate defini produsul cartezian $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ a n mulțimi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ca fiind mulțimea tuturor grupelor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ unde $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$. Așadar:

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ se numesc factorii produsului cartezian, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc coordonatele sau proiecțiile elementului $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Dacă $E_1 = E_2 = \ldots = E_n$, se scrie E^n în loc de $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ factori}}$.

§ 3. Funcții

1. Definiția funcției

Fie E și F două mulțimi distincte sau nu.

Definiție. Dacă, printr-un procedeu oarecare, facem să corespundă fiecărui element $x \in E$ un element și unul singur $y \in F$, spunem că am definit o funcție pe E cu valori în F.

Prin *funcție* se înțelege ansamblul format din: mulțimea E, mulțimea F și corespondența $x \to y$ de la E la F.

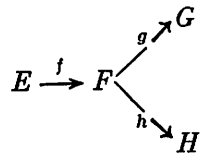
E se numește *mulțimea de definiție* (sau domeniul de definiție) al funcției, iar F se numește *mulțimea în care funcția ia valori.*

O funcție se notează cu o literă, de exemplu f (se pot folosi și alte litere, g, h, F, φ, Φ etc.).

Dacă f este o funcție definită pe E cu valori în F, se spune de asemenea că f este o *aplicație a lui E în F.*

Vom folosi adesea notația $f: E \to F$ care se citește: funcția f definită pe E cu valori în F, sau, aplicatia f a lui E în F.

Dacă într-un raționament intervin două sau mai multe funcții, vom folosi diagrame de forma următoare:



unde printr-un grup de semne ca $E \xrightarrow{f} F$ se înțelege că f este o aplicație a lui E în F.

Dacă printr-o funcție $f: E \to F$, unui element $a \in E$ îi corespunde elementul (unic) $b \in F$, se spune că b *este valoarea funcției* f în „punctul" a, și se notează $f(a)$. Așadar:

$$b = f(a).$$

Se spune, de asemenea, că b este *imaginea* lui a prin funcția f, sau că b este *transformatul* lui a prin funcția f, sau că funcția f *transformă* pe a în b.

Uneori, se folosește în loc de $f(a)$ *notația indicială* f_a.

Un element oarecare x al mulțimii de definiție E se numește de asemenea *variabilă* sau *argument* al funcției f. Funcția f se reprezintă de asemenea prin notația simbolică

$$x \to f(x), \quad x \in E.$$

Se poate spune, de exemplu: fie funcția f care fiecărui număr real x face să-i corespundă x^2; sau, fie funcția f definită pe mulțimea numerelor reale prin corespondența $x \to x^2$ (sau prin egalitatea $f(x) = x^2$).

Observație. Trebuie făcută distincție între funcția f (care reprezintă corespondența de la E la F, în ansamblul ei) și elementul $f(x)$ din F (care reprezintă *valoarea* funcției f în x). Totuși, funcția se notează adesea cu $f(x)$ în loc de $x \to f(x)$, ceea ce constituie un abuz de limbaj foarte frecvent și de foarte multe ori necesar. De exemplu, funcția exponențială $x \to 2^x$, definită pe mulțimea numerelor reale, va fi notată, mai simplu, 2^x.

Aplicațiile f ale unei mulțimi E într-o mulțime F sînt elementele unei mulțimi, *mulțimea aplicațiilor lui E în F*, care se notează F^E.

Exemple. 1) Fie $E = \{u, v, w\}$ și $F = \{a, b, c\}$. Corespondența indicată în figura 8 prin săgeți definește o funcție $f: E \to F$.

Avem: $f(u) = b, \qquad f(v) = a, \qquad f(w) = b.$

Pe acest exemplu se constată că:

a) o funcție poate avea *valori egale* în *puncte diferite* (de exemplu, $f(u) = f(w) = b$);

b) în mulțimea F pot exista elemente care să nu fie valori ale funcției (de ex. c nu este valoare a funcției f).

2) O funcție f: $E \to F$ este *constantă* dacă are *aceeași valoare*, $f(x) = a$, în toate punctele $x \in E$.

În figura 9 avem un exemplu de funcție constantă.

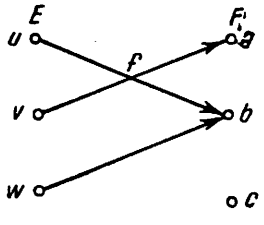


Fig. 8

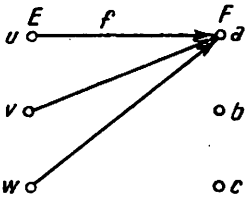


Fig. 9

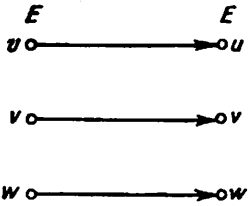


Fig. 10

Pentru fiecare element $a \in F$ se poate defini o aplicație constantă $f(x) \equiv a$ (și numai una) a lui E în F. Pentru mulțimile E și F din figura 9, putem defini trei funcții constante: $f(x) \equiv a$, $f(x) \equiv b$ și $f(x) \equiv c$.

3) Se numește *aplicație identică a unei mulțimi E în ea însăși funcția* i: $E \to E$ definită prin corespondența $x \to x$ (sau prin egalitatea $i(x) = x$). Aplicația identică a mulțimii $E = \{u, v, w\}$ în ea însăși este reprezentată în figura 10.

2. Graficul unei funcții

Fie funcția f: $E \to F$. Corespondența $x \to f(x)$ stabilită de funcția f se poate reprezenta prin perechi ordonate $(x, f(x))$. O astfel de pereche este un element al produsului cartezian $E \times F$, deoarece $x \in E$ și $f(x) \in F$.

Mulțimea G_f a *tuturor* perechilor de forma $(x, f(x))$ cu $x \in E$ se numește graficul funcției f. Așadar:

$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

Graficul funcției f este o parte a produsului cartezian $E \times F$ și este caracterizat de următoarele proprietăți:

1) *fiecare* element $x \in E$ face parte dintr-o pereche (x, y) a graficului G_f, și *numai* din una;

2) în fiecare pereche (x, y) a graficului, cele două coordonate x și y verifică egalitatea $y = f(x)$; pentru orice altă pereche (x, y) care *nu* aparține graficului, avem $x \neq f(x)$.

Egalitatea

$$y = f(x),$$

verificată de toate elementele (x, y) ale graficului și numai de acestea, se numește *ecuația graficului funcției f*.

Fie acum G o submulțime a produsului cartezian $E \times F$, care are proprietatea că *fiecare* element $x \in E$ face parte dintr-o pereche $(x, y) \in G$ și *numai* din una. Putem atunci defini o funcție f: $E \to F$, făcînd să corespundă *fiecărui* element $x \in E$, elementul *unic* $y \in F$, pentru care $(x, y) \in G$ adică punînd $f(x) = y$ pentru fiecare pereche $(x, y) \in G$.

Mulțimea G este graficul funcției f astfel definite.

Exemplu. Graficul aplicației identice a mulțimii E în ea însăși este mulțimea perechilor (x, x) cu $x \in E$. Graficul aplicației identice se numește *diagonala* produsului cartezian E^2.

Observații. 1° Graficul unei funcții f: $E \to F$ coincide cu produsul cartezian $E \times F$, dacă și numai dacă mulțimea F este formată dintr-un singur element.

2° O submulțime $K \subset E \times F$ care conține două perechi (x, y) și (x, y'), cu același prim element x, dar cu $y \neq y'$, nu este graficul unei funcții, deoarece în corespondența stabilită de mulțimea K, lui x i se asociază două elemente *diferite*, y și y'.

De exemplu, mulțimea punctelor (x, y) din plan, care verifică ecuația $x^2 + y^2 = 4$ (cercul cu centrul în origine și raza 2) *nu* este graficul unei funcții, deoarece pentru $x = \sqrt{2}$, există două numere *diferite*, $y = \sqrt{2}$ și $y' = -\sqrt{2}$, care verifică această ecuație.

3° Din cauza corespondenței dintre o funcție f și *ecuația* $y = f(x)$ a graficului său G_f, se folosește uneori, pentru funcție, notația $y = f(x)$.

3. Familii. Șiruri

În anumite cazuri este util să concepem o funcție f: $I \to E$ ca o familie de elemente din E; în acest caz, se folosește notația indicială f_i pentru valoarea funcției într-un punct i. Mulțimea de definiție I se numește atunci *mulțimea indicilor*; orice element $i \in I$ se numește *indice*, iar f_i se numește element al familiei, cu indicele i. Elementele familiei pot coincide (dacă f nu este biunivocă).

O asemenea familie se notează:

$$(f_i)_{i \in I}.$$

De obicei, dacă pentru elementele mulțimii E se folosește o literă a, o familie de elemente ale lui E se notează $(a_i)_{i \in I}$.

Dacă mulțimea indicilor este mulțimea $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ a numerelor naturale, o familie $(a_n)_{n \in N}$ de elemente ale mulțimii E se numește *șir*. Așadar, un șir de elemente din E este o funcție $n \to a_n$ definită pe mulțimea N a numerelor naturale, cu valori în E.

4. Reuniuni și intersecții de familii

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de părți (distincte sau nu) ale unei mulțimi E.

Mulțimea elementelor $x\in E$ — care au proprietatea că aparțin cel puțin unei mulțimi A_i din familie — se numește reuniunea familiei și se notează

$$\bigcup_{i\in I} A_i.$$

Mulțimea elementelor $x\in E$ — care aparțin tuturor mulțimilor din familie — se numește intersecția familiei și se notează

$$\bigcap_{i\in I} A_i.$$

Dacă $(A_n)_{n\in N}$ este un șir de părți ale lui E, reuniunea și intersecția acestui șir se notează și astfel:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{sau} \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$$

respectiv

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{sau} \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$$

Dacă $I = \varnothing$, obținem o familie vidă de părți ale lui E. Se face convenția ca reuniunea familiei vide să fie $\varnothing$, iar intersecția familiei vide să fie mulțimea E. Cu această convenție, au loc totdeauna egalitățile

$$\mathbf{C}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathbf{C}A_i \quad \text{și} \quad \mathbf{C}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathbf{C}A_i$$

oricare ar fi familia $(A_i)_{i\in I}$.

5. Restricții și extensiuni de funcții

Din definiția dată noțiunii de funcție rezultă că două funcții f și g sînt egale dacă sînt definite pe aceeași mulțime E, au valori în aceeași mulțime F și dacă stabilesc aceeași corespondență, adică dacă

$$f(x) = g(x) \text{ pentru orice } x\in E.$$

Altfel exprimat: funcțiile f și g sînt egale dacă și numai dacă au același grafic.

Așadar, două funcții f și g sînt *diferite*, fie dacă *nu* sînt definite pe aceeași mulțime, fie, în cazul cînd sînt definite pe aceeași mulțime E, dacă au valori diferite *cel puțin* într-un punct $x_0 \in E$:

$$f(x_0) \neq g(x_0).$$

Fie funcția f: $E \to F$ și A o parte a lui E. Să considerăm corespondența $x \to f(x)$ stabilită de funcția f *numai* pentru elementele $x \in A$. Această

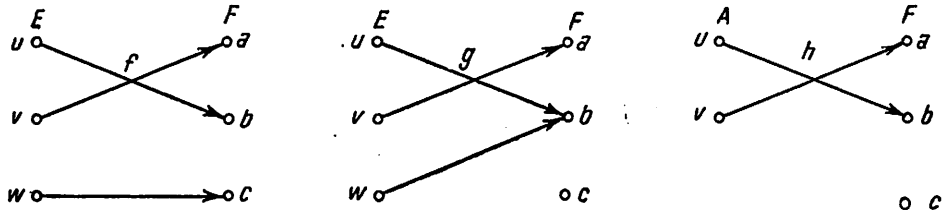


Fig. 11

corespondență de la A la F definește o aplicație a lui A în F, care se numește *restricția funcției f la mulțimea A*, și se notează, de obicei, cu f_A (sau $f|A$). Așadar: funcția f_A: $A \to F$ este definită prin egalitatea

$$f_A(x) = f(x) \qquad \text{pentru } x \in A.$$

Funcția f: $E \to F$ este, prin definiție, o *extensiune* sau o *prelungire* la mulțimea E a funcției f_A. Dîndu-se o funcție f: $E \to F$ și o mulțime $A \subset E$, există o singură restricție a lui f la A. Două funcții *diferite* f: $E \to F$ și g: $E \to F$ au însă *aceeași* restricție la A dacă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$.

Așadar o funcție h: $A \to F$ are în general mai multe prelungiri la mulțimea E (funcția h are o prelungire *unică* la E dacă și numai dacă F este formată dintr-un singur element).

Exemplu. $E = \{u, v, w\}$, $F = \{a, b, c\}$, $A = \{u, v\}$. Funcția h din figura 11 este restricția funcțiilor f și g.

6. Funcții compuse

Fie f: $E \to F$ și g: $F \to G$ două funcții.

Un element oarecare $x \in E$ este transformat de funcția f în elementul (unic) $f(x) \in F$; mai departe, elementul $f(x) \in F$ este transformat de funcția g în elementul (unic) $g(f(x)) \in G$. În acest mod putem stabili o corespondență $x \to g(f(x))$ direct de la E la G:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \\ x & & & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}$$

Definiție. **Funcția definită pe E cu valori în G prin corespondența $x \to g(f(x))$ se numește funcția compusă a funcției g și f, în această ordine și se notează $g \circ f$:**

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{pentru } x \in E$$

($g \circ f$ se citește g compus cu f).

Funcția compusă $g \circ f$ este definită pe mulțimea E ca și funcția f scrisă la dreapta în notația $g \circ f$ și are valori în G ca și funcția g scrisă la stînga în notația $g \circ f$.

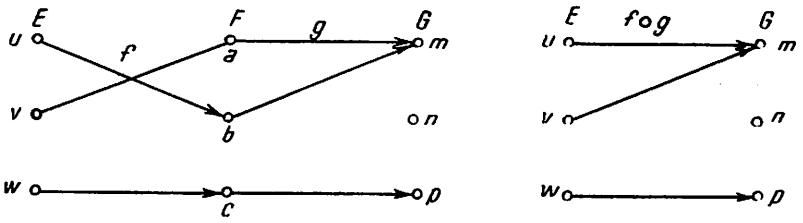


Fig. 12

Este de observat că pentru a obține funcția compusă $g \circ f$, se aplică *întîi* funcția f și *apoi* funcția g.

Exemplu (fig. 12).

Operația de compunere este asociativă:

Dacă $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ și $h\colon G \to H$ sînt trei funcții, avem, după cum se poate ușor verifica,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

De aceea funcția definită de ambii membri se notează $h \circ g \circ f$ și se numește funcția compusă a funcțiilor h, g și f, în ordinea indicată:

$$\begin{array}{l} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H \\ x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x)) \longrightarrow h(g(f(x))) \\ x \longrightarrow h(g(f(x))). \end{array}$$

Se definește în mod analog funcția compusă a mai multor funcții.

Observații. 1° Fie $f\colon E \to F$ și $g\colon F \to G$ două funcții. În general funcția $f \circ g$ nu poate fi definită. În adevăr, un element $y \in F$ este transformat de funcția g în elementul $g(y) \in G$, și dacă $g(y) \notin E$, nu-i putem aplica funcția f.

2° Dacă $f\colon E \to F$ și $g\colon F \to E$ atunci se pot defini ambele funcții compuse: $g \circ f$ și $f \circ g$

$$\begin{array}{l} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} E \\ x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x)) \\ x \longrightarrow g(f(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{l} F \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} F \\ y \longrightarrow g(y) \longrightarrow f(g(y)) \\ y \longrightarrow f(g(y)). \end{array}$$

Cele două funcții compuse $g \circ f$ și $f \circ g$ sînt în general diferite, deoarece prima este definită pe E, iar a doua este definită pe F. Așadar operația de compunere a funcțiilor nu este comutativă.

Dacă $f: E \to E$ şi $g: E \to E$, atunci funcţiile $g \circ f$ şi $f \circ g$ sînt definite pe aceeaşi mulţime E. Chiar în acest caz cele două funcţii compuse sînt în general diferite, cum se constată din exemplul dat în figura 13.

3° Fie funcţia $f: E \to F$.

Dacă i este aplicaţia identică a lui E în E ($i(x) = x$ pentru $x \in E$), atunci

$$f \circ i = f.$$

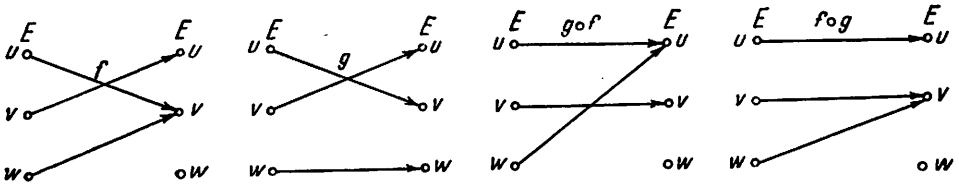


Fig. 13

În adevăr, pentru orice $x \in E$ avem $(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x)$. Funcţiile $f \circ i$ şi f sînt definite amîndouă pe mulţimea E şi stabilesc aceeaşi corespondenţă, deci sînt egale.

De asemenea, dacă j este aplicaţia identică a lui F în $F(j(y) = y$ pentru orice $y \in F)$, atunci

$$j \circ f = f.$$

În adevăr, pentru orice $x \in E$ avem $f(x) \in F$ şi

$$(j \circ f)(x) = j(f(x)) = f(x).$$

Să observăm că funcţiile $i \circ f$ şi $f \circ j$ pot fi amîndouă definite dacă şi numai dacă $E = F$. În acest caz, $i = j$, deci $i \circ f = f \circ i = f$. Aplicaţia identică i a lui E în E este deci element neutru (are efect nul) pentru operaţia de compunere a funcţiilor $f: E \to E$.

4° Fie funcţiile $f: E \to F$ şi $g: G \to H$. Să notăm $E_1 = \{x \mid x \in E, f(x) \in G\}$. Mulţimea E_1 poate fi vidă. Dacă $E_1 \neq \emptyset$, să considerăm restricţia f_1 a lui f la E_1. Aşadar: $f_1: E_1 \to G$. Atunci putem considera funcţia compusă $g \circ f_1: E_1 \to H$. Pentru orice $x \in E_1$ avem

$$(g \circ f_1)(x) = g(f_1(x)) = g(f(x)).$$

De aceea, prin abuz de limbaj, funcţia compusă $g \circ f_1$, se notează adesea $g \circ f$.

§ 4. Aplicaţii biunivoce. Funcţii inverse

1. Imagini directe de mulţimi printr-o funcţie. Aplicaţie pe o mulţime

Fie funcţia $f: E \to F$ şi A o parte a lui E. Mulţimea valorilor luate de funcţia f pe A se numeşte *imaginea directă a lui A prin funcţia f* sau, mai simplu, imaginea lui A prin f şi se notează $f(A)$. Aşadar:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Mulţimea $f(A)$ este o parte a mulţimii F (deoarece $f(x) \in F$ pentru orice $x \in A$), şi se numeşte de asemenea transformata mulţimii A prin funcţia f.

Așadar, $y \in f(A)$ dacă și numai dacă există (cel puțin) un element $x \in A$, astfel ca $y = f(x)$.

Imaginea $f(E)$ a întregii mulțimi de definiție se numește *mulțimea valorilor funcției f*.

Mulțimea valorilor, $f(E)$, poate fi diferită de mulțimea F în care funcția ia valori, adică pot exista elemente $y \in F$ care să nu fie imaginea nici unui element $x \in E$ (fig. 8). În acest caz avem $f(E) \subset F$, cu $f(E) \neq F$.

Dacă $f(E) = F$, se spune că f este o aplicație a lui E pe F. Aceasta înseamnă că *orice* element $y \in F$ este imaginea a (cel puțin) unui element $x \in F$. Trebuie să facem distincție între „aplicație a lui E *în* F" și „aplicație a lui E *pe* F".

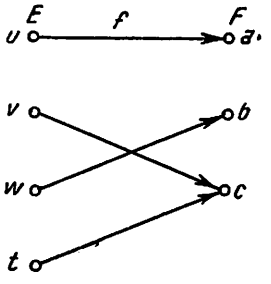


Fig. 14

Exemplu (fig. 14). $f(E) = F$; $f(\{u, v\}) = \{a, c\}$; $f(\{t\}) = \{c\}$; $f(\{v, w, t\}) = \{b, c\}$.

Din definiția funcției deducem următoarele proprietăți:

1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3) Dacă $A \subset E$ și $A \neq \varnothing$ atunci $f(A) \neq \varnothing$.

4) Dacă $A \subset E$ este formată numai dintr-un element, $A = \{x\}$, atunci $f(A)$ este formată numai dintr-un element, $f(A) = \{f(x)\}$, adică

$$f(\{x\}) = \{f(x)\}.$$

2. Imagini reciproce de mulțimi printr-o funcție. Aplicații biunivoce

Fie funcția f: $E \to F$ și B o parte a lui F. Mulțimea tuturor elementelor $x \in E$ ale căror imagini prin funcția f aparțin lui B se numește *imagine reciprocă* (sau inversă) a lui B prin funcția f și se notează $\overset{-1}{f}(B)$:

$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \mid x \in E, f(x) \in B\};$$

$\overset{-1}{f}(B)$ este o parte a mulțimii E. Așadar, $x \in \overset{-1}{f}(B)$ dacă și numai dacă $f(x) \in B$.

Evident, $\overset{-1}{f}(F) = E$ și de asemenea $\overset{-1}{f}(f(E)) = E$.

Avem:

1) $\overset{-1}{f}(A \cup B) = \overset{-1}{f}(A) \cup \overset{-1}{f}(B)$

2) $\overset{-1}{f}(A \cap B) = \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)$

3) $\overset{-1}{f}(A - B) = \overset{-1}{f}(A) - \overset{-1}{f}(B)$.

Exemplu (fig. 15). $\overset{-1}{f}(\{b, c\}) = \{v, w, t\}$; $\overset{-1}{f}(\{a, b\}) = \{u, w\}$; $\overset{-1}{f}(\{c\}) = \{v, t\}$; $\overset{-1}{f}(\{d\}) = \varnothing$.

Pe acest exemplu se constată că:

a) mulțimea $B \subset F$ poate fi nevidă și totuși imaginea sa reciprocă $f^{-1}(B)$ poate fi vidă;

b) mulțimea $B \subset F$ poate fi formată dintr-un singur element, și totuși imaginea reciprocă $f^{-1}(B)$ poate fi formată din două sau mai multe elemente.

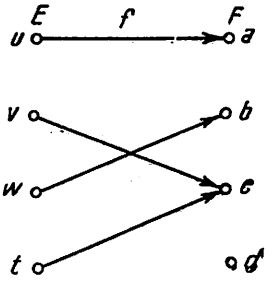


Fig. 15

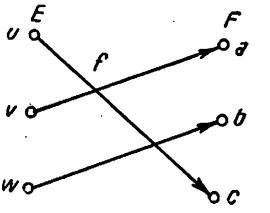


Fig. 16

Se constată ușor că: imaginea reciprocă a oricărei mulțimi nevide $B \subset F$ este de asemenea nevidă, dacă și numai dacă $f(E) = F$, adică dacă și numai dacă f este o aplicație a lui E *pe* F.

Dacă f este o aplicație a lui E *pe* F, atunci imaginile reciproce verifică și ele proprietatea 1) a imaginilor directe:

Dacă $B \subset F$ și $B \neq \varnothing$, atunci $f^{-1}(B) \neq \varnothing$.

Definiție. Se spune că funcția $f: E \to F$ este biunivocă, dacă oricare ar fi elementele $x' \neq x''$ din E, avem $f(x') \neq f(x'')$ (adică dacă elemente diferite din E au imagini diferite în F).

Se verifică ușor că f este biunivocă dacă și numai dacă $f(x') = f(x'') \Longrightarrow x' = x''$.

Exemplu (fig. 16).

O formulare echivalentă a definiției unei funcții biunivoce este următoarea:

Funcția f: $E \to F$ este biunivocă dacă și numai dacă, oricare ar fi $y \in F$, imaginea reciprocă a mulțimii $\{y\}$ conține cel mult un element (putînd fi eventual vidă). Lăsăm pe seama cititorului, ca exercițiu, verificarea echivalenței diferitelor formulări ale definiției unei funcții biunivoce.

Dacă f este o aplicație *biunivocă* a lui E *pe* F, atunci imaginile reciproce au aceleași proprietăți ca și imaginile directe:

1) dacă $B \subset F$ și $B \neq \varnothing$ atunci $f^{-1}(B) \neq \varnothing$;

2) dacă $B \subset F$ și B este formată dintr-un singur element, $B = \{y\}$, atunci $f^{-1}(B)$ este formată numai dintr-un singur element, x, pentru care $f(x) = y$.

3. Funcții inverse

Fie f o aplicație *biunivocă* a lui E *pe* F. Aceasta înseamnă că $f(E) = F$ și $x' \neq x'' \Longrightarrow f(x') \neq f(x'')$, $(x', x'' \in E)$.

În acest caz, pentru *orice* element $y \in F$, există un element și *unul singur* $x \in E$, astfel ca $f(x) = y$.

În acest mod putem stabili o corespondență $f(x) \to x$ de la elementele lui F la elementele lui E, care definește o aplicație *biunivocă* a lui F *pe* E, și care se numește *aplicația reciprocă* (sau funcția inversă) a funcției f și se notează $\overset{-1}{f}$. Așadar:

Definiție. Se numește funcție inversă (sau reciprocă) a funcției f funcția $\overset{-1}{f}$ prin care fiecărui element $y \in F$ îi corespunde acel element (unic) $x \in E$ pentru care $f(x) = y$.

Egalitățile $f(x) = y$ și $x = \overset{-1}{f}(y)$ sînt echivalente.

Funcția $\overset{-1}{f}$ este la rîndul său o aplicație *biunivocă* a lui F *pe* E și deci admite o funcție inversă care este f. Funcțiile f și $\overset{-1}{f}$ sînt deci inverse una alteia:

$$E \underset{\overset{-1}{f}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} F.$$

Din egalitățile echivalente $f(x) = y$ și $x = \overset{-1}{f}(y)$, deducem

$$\overset{-1}{f}(f(x)) = x \text{ pentru orice } x \in E,$$

$$f(\overset{-1}{f}(y)) = y \text{ pentru orice } y \in F.$$

Exemplu (fig. 17). $f(u) = c$, $\overset{-1}{f}(c) = u$; $f(v) = a$, $\overset{-1}{f}(a) = v$; $f(w) = b$, $\overset{-1}{f}(b) = w$; $\overset{-1}{f}(f(u)) = \overset{-1}{f}(c) = u$; $\overset{-1}{f}(f(v)) = \overset{-1}{f}(a) = v$; $\overset{-1}{f}(f(w)) = \overset{-1}{f}(b) = w$; $f(\overset{-1}{f}(a)) = f(v) = a$; $f(\overset{-1}{f}(b)) = f(w) = b$; $f(\overset{-1}{f}(c)) = f(u) = c$.

Observații. 1°. Numai aplicațiile *biunivoce* ale lui E *pe* F admit funcții inverse.

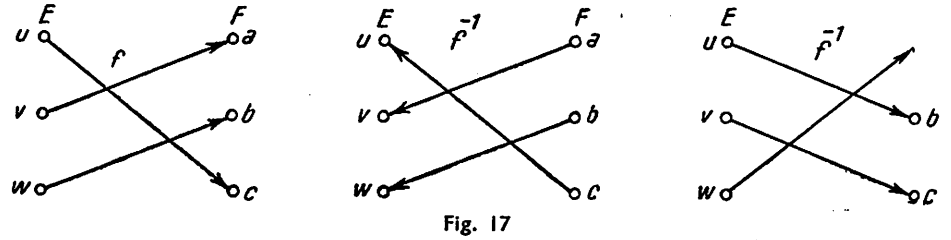


Fig. 17

Dacă funcția f: $E \to F$ este *biunivocă* și dacă $f(E) \neq F$, atunci se consideră f ca o aplicație biunivocă a lui E pe $f(E)$, și deci admite o funcție inversă $\overset{-1}{f}$: $f(E) \to E$.

2° Practic, după ce s-a verificat că f: $E \to F$ este o aplicație *biunivocă* a lui E pe F, funcția inversă $\overset{-1}{f}$ se obține rezolvînd în raport cu x ecuația

$$y = f(x), \qquad (x \in E,\ y \in F).$$

Pentru fiecare $y \in F$, se obține soluția unică în E

$$x = \overset{-1}{f}(y).$$

3° Fie f: $E \to F$ o aplicație *biunivocă* și fie $\overset{-1}{f}$: $F \to E$ funcția sa inversă. Dacă i este aplicația identică a lui E în E, ($i(x) = x$ pentru orice $x \in E$) avem

$$\overset{-1}{f} \circ f = i.$$

În adevăr $(\overset{-1}{f} \circ f)(x) = \overset{-1}{f}(f(x)) = x = i(x)$ pentru orice $x \in E$.

Dacă j este aplicația identică a lui F în F ($j(y) = y$ pentru orice $y \in F$), avem

$$f \circ \overset{-1}{f} = j.$$

4° O aplicație *biunivocă* a unei mulțimi E pe ea însăși se numește *permutare*. Aplicația identică i a lui E în E este o permutare.

Fie f: $E \to E$ o permutare și $\overset{-1}{f}$: $E \to E$ permutarea inversă. Avem:

$$\overset{-1}{f} \circ f = i \text{ și } f \circ \overset{-1}{f} = i.$$

Așadar mulțimea permutărilor f: $E \to E$ este grup* (necomutativ) pentru operația de compunere.

---

* Fie E o mulțime. O aplicație a produsului cartezian $E \times E$ în mulțimea E se numește operație de compunere în E. Așadar, o operație de compunere în mulțimea E face să corespundă fiecărei perechi (x, y) de elemente din E, un element din E pe care-l vom nota, în general, $x \circ y$.

1) O operație $x \circ y$ este asociativă dacă

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \text{ oricare ar fi } x, y, z \in E.$$

2) Un element $e \in E$ se numește *element neutru* pentru operația $x \circ y$ dacă

$$e \circ x = x \circ e = x \text{ oricare ar fi } x \in E.$$

3) Dacă e este element neutru pentru operația $x \circ y$, se spune că un element $x \in E$ are invers (sau este inversabil) pentru această operație dacă există un element $y \in E$ astfel ca

$$x \circ y = y \circ x = e,$$

y se numește inversul lui x; y este de asemenea inversabil și inversul său este x. Inversul lui x se notează x^{-1}. Așadar $y = x^{-1}$, $x = y^{-1}$.

4) O operație $x \circ y$ este comutativă dacă

$$x \circ y = y \circ x \text{ oricare ar fi } x \in y \in E.$$

§ 5. Mulțimi numărabile

1. Corespondența biunivocă a două mulțimi

Fie $f\colon E \to F$ o aplicație biunivocă a lui E pe F, și fie $f^{-1}\colon F \to E$ funcția sa inversă.

Se spune că funcțiile f și f^{-1} realizează o *corespondență biunivocă* între mulțimile E și F, sau că E și F sînt puse în corespondență biunivocă prin aceste funcții.

Orice mulțime E poate fi pusă în corespondență biunivocă cu ea însăși, de exemplu prin aplicația identică a lui E pe E.

Dacă două mulțimi pot fi puse în corespondență biunivocă prin funcțiile f și f^{-1}, atunci pot exista și alte funcții care să le pună în corespondență biunivocă.

În adevăr, dacă p este o permutare oarecare a lui E și g o permutare oarecare a lui F, funcția compusă

$$g \circ f \circ p\colon E \to F$$

este de asemenea o aplicație biunivocă a lui E pe F, deci această aplicație și aplicația sa reciprocă realizează de asemenea o corespondență biunivocă între E și F.

Se spune că două mulțimi E și F sînt *echivalente*, și se scrie $E \sim F$, dacă pot fi puse în corespondență biunivocă (adică dacă există o aplicație biunivocă a lui E *pe* F).

2. Mulțimi numărabile

Se spune că o mulțime A este *numărabilă* dacă este echivalentă cu mulțimea N a numerelor naturale, adică dacă poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale.

Așadar, mulțimea A este numărabilă dacă și numai dacă *toate* elementele sale pot fi așezate într-un șir

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

O mulțime E în care s-a definit o operație asociativă se numește *semigrup*. Dacă există element neutru, E se numește semigrup cu unitate.

Un semigrup cu unitate în care fiecare element este inversabil se numește *grup*.

Un semigrup sau grup în care operația este comutativă se numește semigrup, respectiv grup comutativ, sau abelian.

Pentru o operație comutativă, se folosește mai ales notația aditivă $x + y$; în acest caz elementul neutru este numit „zero" și este notat 0; inversul unui element x este numit *opusul* lui x și este notat $-x$.

Altă notație uzuală pentru operații este notația multiplicativă $x \cdot y$ sau xy; în acest caz elementul neutru este numit element unitate, sau „unu".

Dacă E este grup, condiția necesară și suficientă ca o submulțime $E' \subset E$ să fie grup, este ca $x \circ y \in E'$ și $x^{-1} \in E'$, oricare ar fi $x, y \in E'$.

Se spune că o mulțime B este finită și are n elemente dacă este echivalentă cu mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ a primelor n numere naturale.

Orice mulțime care *nu* este finită se numește mulțime *infinită*. O mulțime numărabilă este infinită.

Se spune că o mulțime este *cel mult numărabilă*, dacă este finită sau numărabilă.

Exemple. 1) Mulțimea numerelor naturale este numărabilă (deoarece $N \sim N$).

2) Mulțimea numerelor pare

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$

este numărabilă, deoarece *toate* elementele sale pot fi așezate într-un șir. Corespondența biunivocă cu mulțimea numerelor naturale este $n \longleftrightarrow 2n$.

3) Mulțimea numerelor impare

$$1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots$$

este numărabilă.

O b s e r v a ț i e. Două mulțimi finite A și B sînt echivalente dacă și numai dacă au același număr de elemente.

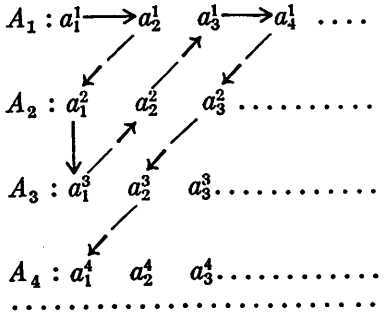
În adevăr, fie n numărul elementelor lui A. Aceasta înseamnă $A \sim \{1, 2, 3, \ldots, n\}$; dar $A \sim B$, deci $B \sim \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, deci B are tot n elemente. Reciproc, dacă A și B au n elemente atunci $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ și $B \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ deci $A \sim B$.

O mulțime *finită* nu poate fi deci echivalentă cu o submulțime strictă a sa.

Din exemplele precedente se vede că o mulțime infinită poate fi echivalentă cu o submulțime strictă a sa. Așadar, pentru mulțimile infinite „numărul" de elemente nu mai are același înțeles ca pentru mulțimile finite.

P r o p o z i ț i e. Reuniunea unui șir $(A_n)_{n \in N}$ de mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă.

Pentru demonstrație, vom presupune că mulțimile din șir sînt disjuncte două cîte două: $A_n \cap A_m = \emptyset$ dacă $n \neq m$. În caz contrar, dacă un element se repetă în mai multe mulțimi din șir îl menținem numai în prima mulțime în care apare, iar în celelalte îl înlăturăm. Să așezăm în cîte un șir elementele fiecărei mulțimi A_n:



Să formăm acum șirul următor

$$a_1^1;\ a_2^1,\ a_1^2;\ a_1^3,\ a_2^2,\ a_3^1;\ a_4^1,\ a_3^2,\ a_2^3,\ a_1^4;\ldots$$

Orice ar fi mulțimea A_n și oricare ar fi elementul său a_m^n, el face parte din acest șir; așadar, acest șir conține *toate* elementele reuniunii $\bigcup_{n\in N} A_n$, deci această reuniune este numărabilă.

O b s e r v a ț i e. Se poate arăta că mulțimea numerelor *raționale* și mulțimea numerelor *algebrice* sînt mulțimi numărabile, și că mulțimea numerelor reale nu este numărabilă.

§ 6. Despre negație

În matematică se folosește adesea raționamentul „prin reducere la absurd" pentru demonstrația unei proprietăți P. Acest raționament constă în faptul că, presupunînd „prin absurd" că proprietatea P nu este adevărată, se trag consecințe contradictorii.

Pentru a putea folosi în raționamente propoziția negativă „proprietatea P nu este adevărată", trebuie s-o transformăm într-o propoziție echivalentă afirmativă.

Transcrierea proprietății „non P" într-o formulare echivalentă afirmativă se numește, în mod obișnuit, negarea proprietății P.

Dacă proprietatea P are o formulare mai lungă, negarea sa este adesea anevoioasă și poate fi făcută incorect.

În acest paragraf se dă o regulă de negare simplă și sigură.

Pentru aceasta vom considera mai întîi propoziții simple, universal afirmative, sau particular afirmative.

O propoziție simplă universal afirmativă afirmă că toate elementele unei mulțimi E au o proprietate P, și deci se poate formula astfel:

orice $x\in E$ are proprietatea P

sau

oricare ar fi $x\in E$, x are proprietatea P.

O propoziție simplă particular afirmativă afirmă că unele elemente ale unei mulțimi E (eventual toate elementele lui E) au o proprietate P, adică, mulțimea elementelor din E care au proprietatea P nu este vidă; o asemenea propoziție se poate formula astfel:

există cel puțin un element $x\in E$ care are proprietatea P.

De cele mai multe ori se omite „cel puțin" dar se subînțelege totdeauna, astfel încît o propoziție particular afirmativă se scrie

există $x\in E$ cu proprietatea P.

Observăm că, formal, cele două feluri de propoziții se deosebesc între ele prin faptul că unele încep cu „oricare", iar altele cu „există".

Prin negare, o propoziție simplă universal afirmativă se transformă într-una particular afirmativă, o propoziție simplă particular afirmativă se transformă într-una universal afirmativă, iar proprietatea P se transformă în contrariul ei non P.

Să plecăm de la propoziție simplă universal afirmativă:

orice x din E are proprietatea P,

și s-o negăm. Forma directă a negării este următoarea:

nu este adevărat că orice x din E are proprietatea P.

Aceasta înseamnă că există, sigur, cel puțin un element din E care nu are proprietatea P, deci care are proprietatea contrară non P; așadar:

există $x \in E$ care are proprietatea non P.

Să plecăm acum de la o propoziție simplă particular afirmativă:

există (cel puțin) un element $x \in E$ care are proprietatea P,

și s-o negăm:

nu este adevărat că există un element x din E cu proprietatea P.

Aceasta înseamnă că nici un element din E nu are proprietatea P, sau:

oricare ar fi elementul $x \in E$, x nu are proprietatea P, ci proprietatea contrară, non P;

așadar:

oricare ar fi $x \in E$, x are proprietatea non P.

De aici deducem următoarea regulă practică:

prin negare, „oricare" se transformă în „există", „există" se transformă în „oricare", iar proprietatea P în non P.

Această regulă se păstrează pentru orice propoziție, nu numai pentru cele simple, deoarece negarea unei propoziții complexe se reduce la negarea succesivă a unor propoziții simple.

Într-adevăr, o propoziție complexă o putem scrie ca o propoziție simplă, înlocuind o parte din ea cu P. Prin negare, P se transformă în non P și, deci, trebuie să negăm propoziția P; dacă P nu este simplă, o scriem ca o propoziție simplă, înlocuind o parte din ea cu Q. Prin negare, Q se transformă în non Q, ș.a.m.d. De fiecare dată, prin negare, „există" se transformă în „oricare" și „oricare" se transformă în „există". Pînă la urmă vom ajunge la o propoziție simplă în care figurează proprietatea finală din propoziția inițială, care, prin negare, se transformă în contrariul ei.

Pentru a putea aplica această tehnică de negare unei propoziții ea trebuie formulată cu ajutorul cuvintelor „oricare" și „există". Aceasta se poate realiza ușor pentru fiecare propoziție în parte, observînd dacă elementele care intervin în propoziție sînt arbitrare sau nu. Dacă sînt arbitrare, se scrie în fața lor „oricare ar fi", sau „pentru orice", iar dacă nu sînt arbitrare se scrie în fața lor „există".

Va trebui să observăm de fiecare dată că:

un element despre care se afirmă că „există" depinde de (este funcție de) elementele scrise în propoziție înaintea sa și despre care se afirmă că sînt arbitrare (au înainte „oricare") și nu depinde de elementele scrise după el în propoziție.

Ne dăm astfel seama de importanța pe care o are ordinea în care sînt scrise cuvintele într-o propoziție. Schimbarea ordinii cuvintelor într-o propoziție poate să-i schimbe foarte mult înțelesul, s-o transforme într-o propoziție *diferită* sau, uneori, chiar într-o propoziție fără sens.

De asemenea, va trebui să observăm că după fiecare element despre care se afirmă că „există" trebuie să adăugăm expresia „cu proprietatea că" sau „astfel încît".

În logica matematică se folosesc notațiile $\exists$ și $\forall$ pentru „există" și „oricare". Noi vom folosi prescurtările următoare: „or" pentru „oricare" și „ex" pentru „există".

Capitolul II

MULȚIMI DE NUMERE REALE. FUNCȚII REALE

§ 1. Numere reale

Vom presupune cunoscute numerele reale și proprietățile lor, pe care le rezumăm mai jos.

Construirea numerelor reale și demonstrarea proprietăților lor se fac în detaliu la cursul de aritmetică și sînt expuse în tratatul de analiză matematică (vol. I) al academicianului Miron Nicolescu.

1. Structura algebrică a numerelor reale

Mulțimea numerelor reale va fi notată cu R.

Cu numerele reale se pot efectua două operații: adunarea și înmulțirea. Operația de *adunare* face să corespundă fiecărei perechi (x, y) de numere reale un număr real notat cu $x + y$ și numit *suma* lui x cu y.

Operația de *înmulțire* face să corespundă fiecărei perechi (x, y) de numere reale un număr real notat $x \cdot y$ sau xy și numit *produsul* lui x cu y.

Aceste operații au următoarele proprietăți:

1) $x + y = y + x$ (adunarea este comutativă);
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (adunarea este asociativă);
3) $x + 0 = x$ (0 este element neutru pentru adunare);
4) $x + (-x) = 0$ (orice număr x are un opus $-x$);

Mulțimea R a numerelor reale este, deci, *grup* comutativ pentru operația de adunare.

5) $xy = yx$ (înmulțirea este comutativă);
6) $(xy)z = x(yz)$ (înmulțirea este asociativă);
7) $1 \cdot x = x$ (1 este element neutru, sau element unitate pentru înmulțire);
8) Dacă $x \neq 0$, $xx^{-1} = 1$ (orice număr $x \neq 0$ are invers pentru înmulțire).

0 este singurul număr care nu are invers (pentru înmulțire).

Mulțimea numerelor *diferite de* 0 este *grup* pentru operația de înmulțire.

9) $x(y+z) = xy + xz$ (înmulțirea este distributivă față de adunare).

Așadar, mulțimea R a numerelor reale este corp* (pentru operațiile de adunare și înmulțire).

Suma $x + (-y)$ dintre x și opusul lui y se scrie, mai simplu, $x - y$ și se numește *diferența* dintre x și y. Operația de scădere se reduce astfel la aceea de adunare: $x - y = x + (-y)$.

Inversul x^{-1} al unui număr $x \neq 0$ se mai notează $\frac{1}{x}$; așadar, $xx^{-1} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$. Produsul $x \cdot \frac{1}{y}$ dintre un număr x și inversul unui număr $y \neq 0$ se mai scrie $\frac{x}{y}$ și se numește *câtul* dintre x și y. Operația de împărțire (prin care unei perechi de numere (x, y) cu $y \neq 0$ i se asociază câtul lor $\frac{x}{y}$) se reduce astfel la aceea de înmulțire: $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.

Împărțirea cu 0 nu se poate efectua, deoarece 0 nu are invers. Nu dăm nici un înțeles împărțirii cu 0, nu o definim. Spunem că împărțirea cu 0 este o operație fără sens.

Din proprietățile de mai sus rezultă încă următoarele proprietăți:
1) Numărul 0 este singurul element neutru pentru adunare.
2) Numărul 1 este singurul element unitate pentru înmulțire.
3) Un număr real are un singur opus. Opusul lui 0 este 0.
4) Un număr real diferit de 0 are un singur invers. Inversul lui 1 este 1.
5) $x = y \Longrightarrow x + z = y + z$ (și $x - z = y - z$) oricare ar fi $z \in R$;

$x + z = y + z$ (sau $x - z = y - z$) $\Longrightarrow x = y$.

6) $x = y \Longrightarrow xz = yz$ oricare ar fi $z \in R$; $x = y \Longrightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{z}$ oricare ar fi $z \neq 0$;

dacă $z \neq 0$, atunci $xz = yz$ (sau $\frac{x}{z} = \frac{y}{z}$) $\Longrightarrow x = y$.

---

* Fie E o mulțime pe care s-au definit două operații, una notată aditiv $x+y$, și alta notată multiplicativ xy. Mulțimea E este *inel* pentru aceste două operații dacă:
1) este grup *comutativ* pentru adunare;
2) este semigrup pentru înmulțire (înmulțirea este asociativă);
3) înmulțirea este distributivă față de adunare.
Dacă înmulțirea este comutativă, E se numește inel comutativ.
Dacă înmulțirea are element unitate, E se numește inel cu unitate.
Un inel cu unitate, E, în care fiecare element $x \neq 0$ are invers pentru înmulțire se numește *corp*. Dacă înmulțirea este comutativă, E se numește corp comutativ. Așadar, un corp este un inel în care mulțimea elementelor diferite de 0 este *grup* pentru înmulțire.

7) $0x = 0$ oricare ar fi $x \in R$.
8) $x(y - z) = xy - xz$ (înmulțirea este distributivă față de scădere).
9) Ecuația $a + x = b$ are totdeauna o soluție unică, $x = b - a$.
10) Dacă $a \neq 0$, ecuația $ax = b$ are totdeauna o soluție unică, $x = \frac{b}{a}$.

2. Clase de numere reale

Numerele naturale sînt*:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Mulțimea numerelor naturale va fi notată cu N.

Suma $m + n$ și produsul mn a două numere naturale m și n sînt de asemenea numere naturale.

Opusul unui număr natural nu mai este număr natural. Inversul unui număr natural n nu mai este număr natural decît dacă $n = 1$.

Mulțimea N a numerelor naturale este semigrup comutativ pentru adunare, și semigrup comutativ cu unitate pentru înmulțire.

Principiul inducției complete (sau al recurenței). Fie P o proprietate care se referă la numerele naturale. *Dacă:*

1) *proprietatea este adevărată pentru numărul natural* 1;

2) *presupunînd proprietatea P adevărată pentru un număr natural n, rezultă că ea este adevărată și pentru $n + 1$;*

atunci proprietatea este adevărată pentru toate numerele naturale.

Numerele întregi sînt:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Mulțimea numerelor întregi va fi notată cu Z. Avem $N \subset Z$.

Suma $p + q$ și produsul pq a două numere întregi p și q sînt de asemenea numere întregi.

În plus, dacă p este număr întreg, opusul său $-p$ este de asemenea număr întreg.

Așadar, mulțimea Z a numerelor întregi este grup comutativ pentru adunare. Inversul unui număr întreg p este întreg numai dacă $p = 1$ sau $p = -1$, deci, pentru înmulțire, Z este semigrup (comutativ cu unitate).

Rezultă că mulțimea Z a numerelor întregi este *inel* (comutativ cu unitate).

Numerele raționale se pot reprezenta sub formă de fracție $\frac{m}{n}$, cu m și n întregi și $n \neq 0$.

Două asemenea fracții $\frac{m}{n}$ și $\frac{m'}{n'}$ reprezintă același număr rațional, dacă și numai dacă $mn' = m'n$.

* Unii autori consideră și pe 0 număr natural.

Mulțimea numerelor raționale va fi notată cu Q. O fracție $\frac{m}{n}$ (m și n întregi și $n \neq 0$) este *ireductibilă* dacă m și n sînt prime între ele.

Orice număr rațional se poate reprezenta într-un singur mod ca fracție ireductibilă cu *numitorul număr natural*.

Un număr întreg p se poate scrie ca fracție sub forma $\frac{p}{1}$, deci numerele întregi sînt în același timp numere raționale: $Z \subset Q$.

Suma $r + s$ și produsul $r\,s$ a două numere raționale sînt de asemenea numere raționale. În plus, dacă r este număr rațional, atunci opusul său $-r$ este număr rațional, iar dacă $r \neq 0$, inversul său $\frac{1}{r}$ este de asemenea număr rațional.

Rezultă că mulțimea Q a numerelor raționale este corp (comutativ).

Dacă a și b sînt numere raționale, atunci $b - a$ și $\frac{b}{a}$ (dacă $a \neq 0$) sînt numere raționale, deci ecuațiile $a + x = b$ și $ax = b$ (dacă $a \neq 0$) au soluții în cadrul numerelor raționale.

Ecuația $x^2 = a$ nu mai are însă totdeauna soluție rațională. De exemplu, ecuația $x^2 = 2$ nu are soluție rațională. Într-adevăr:

Nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Să presupunem, prin absurd, că există un număr rațional r astfel ca $r^2 = 2$. Să scriem numărul r ca fracție ireductibilă $r = \frac{p}{q}$, unde p și q sînt numere întregi fără nici un alt divizor comun afară de 1 și -1. Așadar

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \text{sau} \quad \frac{p^2}{q^2} = 2,$$

de unde:

$$p^2 = 2q^2.$$

Rezultă că p^2 este un număr par, deci și p este un număr par*: $p = 2m$. Egalitatea $p^2 = 2q^2$ se scrie atunci:

$$4m^2 = 2q^2,$$

de unde

$$2m^2 = q^2.$$

Rezultă că q^2 este un număr par, deci și q este un număr par: $q = 2n$. Așadar, p și q au pe 2 ca divizor comun și am ajuns astfel la o contradicție, presupunînd că ar exista un număr rațional r cu $r^2 = 2$.

Vom arăta mai departe că, în cadrul numerelor reale, oricare ar fi numărul natural n, și oricare ar fi numărul real *pozitiv* a, ecuația $x^n = a$ are totdeauna soluție.

---

* Dacă p ar fi impar, $p = 2m + 1$, atunci am avea $p^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$, adică și p^2 ar fi impar.

Pe lîngă această deosebire dintre corpul numerelor raționale Q și corpul numerelor reale R, mai există și alte deosebiri, care pot fi considerate, toate, ca diverse aspecte sau diverse consecințe ale unei deosebiri fundamentale care va fi pusă în evidență mai departe*.

Numerele reale care nu sînt raționale se numesc *numere iraționale*.

Se numește *număr algebric* orice număr care este soluție a unei ecuații algebrice de forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

cu coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ numere întregi. Mulțimea numerelor algebrice este numărabilă.

Numerele reale care nu sînt algebrice se numesc *numere transcendente*. Se demonstrează că numerele e și π sînt transcendente.

3. Structura de ordine

Pe mulțimea numerelor reale se definește o relație de ordine „$x < y$" (x este mai mic decît y). În loc de $x < y$ se scrie de asemenea $y > x$ (y este mai mare decît x). Dacă x nu este mai mic decît y, se scrie $x \not< y$ sau $y \not> x$.

Relația „$x < y$" este o relație de ordine *totală*; aceasta înseamnă că, oricare ar fi numerele x și y, avem una și numai una din următoarele trei posibilități: sau $x < y$, sau $x = y$, sau $x > y$.

a) *Proprietățile relației* „$x < y$":

(i) $x \not< x$, oricare ar fi $x \in R$ (este ireflexivă);

(ii) $x < y \Longrightarrow y > x$;

(iii) $x < y$ și $y < z \Longrightarrow x < z$ (este tranzitivă);

(iu) $x < y \Longrightarrow x + z < y + z$ (și $x - z < y - z$) oricare ar fi $z \in R$;

$x + z < y + z$ (sau $x - z < y - z$) $\Longrightarrow x < y$;

(u) $x < y$ și $z > 0 \Longrightarrow xz < yz \left(\text{și } \frac{x}{z} < \frac{y}{z}\right)$;

$z > 0$ și $xz < yz$ $\left(\text{sau } \frac{x}{z} < \frac{y}{z}\right) \Longrightarrow x < y$;

(ui) $x < y \Longrightarrow -x > -y$;

(uii) $0 < x < y \Longrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

* Deosebirea este că R este spațiu complet (orice șir fundamental este convergent) pe cînd Q nu este spațiu complet (există șiruri Cauchy de numere raționale care n-au limită rațională).

Din (u) și (ui) rezultă că:

$$x < y \text{ și } z < 0 \Longrightarrow xz > yz \left(\text{și } \frac{x}{z} > \frac{y}{z}\right);$$

$$z < 0 \text{ și } xz < yz \left(\text{sau } \frac{x}{z} < \frac{y}{z}\right) \Longrightarrow x > y > 0.$$

Numerele $x > 0$ se numesc numere *strict pozitive.*
Numerele $x < 0$ se numesc numere *strict negative.*

Orice număr natural n este strict pozitiv: $n > 0$.

Reținem de asemenea următoarele proprietăți*:

Între două numere reale diferite $x < y$ există cel puțin un număr rațional r și cel puțin un număr irațional α:

$$x < r < y, \quad x < \alpha < y.$$

Rezultă că între două numere reale diferite există oricît de multe numere raționale și oricît de multe numere iraționale.

Axioma lui Arhimede: oricare ar fi numerele reale $x > 0$ și y, există un număr natural n astfel ca $nx > y$.

În particular, luînd $x = 1$, rezultă că:

Oricare ar fi numărul real y, există un număr natural $n > y$.

Dacă $x \not> y$ (x nu este mai mare decît y), atunci sau $x = y$ sau $x < y$, ceea ce vom scrie $x \leqslant y$ (x este mai mic sau egal cu y).

Relația „$x \leqslant y$" este deci echivalentă cu relația „$x < y$ sau $x = y$" și cu relația „$x \not> y$".

De exemplu, $2 \leqslant 3$ deoarece $2 < 3$; $2 \leqslant 2$ deoarece $2 = 2$.

Dacă $x \not< y$ (x nu este mai mic decît y), atunci sau $x = y$ sau $x > y$, ceea ce vom scrie $x \geqslant y$ (x este mai mare sau egal cu y).

Relația „$x \geqslant y$" este echivalentă cu relația „$x > y$ sau $x = y$", cu relația „$x \not< y$", și cu relația „$y \leqslant x$".

Numerele $x \geqslant 0$ se numesc numere *pozitive*; numerele $x \leqslant 0$ se numesc *numere negative.*

Deoarece $x > 0 \Longrightarrow x \geqslant 0$ și $x < 0 \Longrightarrow x \leqslant 0$, rezultă că orice număr strict pozitiv este un număr pozitiv, și orice număr strict negativ este un număr negativ. 0 este în același timp pozitiv și negativ, și este singurul număr cu această proprietate.

* Într-o teorie constructivă a numerelor reale, aceste proprietăți se pot demonstra în mod riguros.

b) *Proprietăţile relaţiei „$x \leqslant y$“:*

(j) $x \leqslant x$ oricare ar fi $x \in R$ (este reflexivă);

(jj) $x \leqslant y$ şi $y \leqslant x \Longrightarrow x = y$ (este antisimetrică);

(jjj) $x \leqslant y$ şi $y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$ (este tranzitivă);

(jv) $x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$ (şi $x - z \leqslant y - z$) oricare ar fi $z \in R$;

$x + z \leqslant y + z$ (sau $x - z \leqslant y - z$) $\Longrightarrow x \leqslant y$;

(v) $x \leqslant y$ şi $z \geqslant 0 \Longrightarrow xz \leqslant yz$; $x \leqslant y$ şi $z > 0 \Longrightarrow \frac{x}{z} \leqslant \frac{y}{z}$;

$z > 0$ şi $xz \leqslant yz \left(\text{sau } \frac{x}{z} \leqslant \frac{y}{z}\right) \Longrightarrow x \leqslant y$;

(vj) $x \leqslant y \Longrightarrow -x \geqslant -y$;

(vjj) $0 \leqslant x \leqslant y \Longrightarrow \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} > 0$.

Din (v) şi (vj) rezultă că

$x \leqslant y$ şi $z \leqslant 0 \Longrightarrow xz \geqslant yz$; $x \leqslant y$ şi $z < 0 \Longrightarrow \frac{x}{z} \geqslant \frac{y}{z}$;

$z < 0$ şi $xz \leqslant yz \left(\text{sau } \frac{x}{z} \leqslant \frac{y}{z}\right) \Longrightarrow x \geqslant y$.

Din proprietăţile celor două relaţii rezultă, încă, următoarele proprietăţi:

1) $x \leqslant y$ şi $y < z \Longrightarrow x < z$; $x < y$ şi $y \leqslant z \Longrightarrow x < z$;

2) $x \leqslant y$ şi $x' \leqslant y' \Longrightarrow x + x' \leqslant y + y'$;

$x < y$ şi $x' \leqslant y' \Longrightarrow x + y' < y + y'$

(adunarea inegalităţilor membru cu membru);

3) $0 \leqslant x \leqslant y$ şi $0 \leqslant x' \leqslant y' \Longrightarrow xx' \leqslant yy'$

(înmulţirea membru cu membru a inegalităţilor de numere pozitive)

Reţinem de asemenea următoarea proprietate (care se poate demonstra riguros):

Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri de numere raţionale care au următoarele două proprietăţi

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$;

2) **pentru orice număr $\alpha > 0$, există un număr natural n, astfel că $b_n - a_n \leqslant \alpha$; atunci există un număr real x_0, şi numai unul astfel încît**

$$a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Observaţie. Condiţia 2) înseamnă că $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$ (v. cap. III).

Fie n numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Cel mai mare (maximul) dintre aceste numere se notează

$$\max \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \text{ sau } \sup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

iar cel mai mic (minimul) dintre aceste numere se notează

$$\min \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \text{ sau } \inf \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Mai departe, aceste numere vor fi interpretate ca margini ale mulțimii $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

4. Modulul

Modulul $|x|$ al unui număr x se definește astfel:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ dacă } x > 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \\ -x \text{ dacă } x < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \begin{cases} x \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ -x \text{ dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$$

sau încă, $|x| = \max \{x, -x\}$.

Proprietățile modulului sînt următoarele:

1) $|x| \geqslant 0$; $|x| > 0$ dacă și numai dacă $x \neq 0$;
2) $|-x| = |x|$;
3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; $\quad |x - y| \leqslant |x| + |y|$;
4) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$; $\quad ||x| - |y|| \leqslant |x + y|$;
5) $|xy| = |x| \cdot |y|$; $\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$. $\quad y \neq 0$;
6) $|x| < \varepsilon$ dacă și numai dacă $-\varepsilon < x < \varepsilon$;
   $|x| \leqslant \varepsilon$ dacă și numai dacă $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

Dacă r este număr rațional, atunci $|r|$ este de asemenea rațional; dacă p este întreg, atunci și $|p|$ este întreg.

Se folosesc următoarele notații

$$x^+ = \sup (x, 0) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ 0, \text{ dacă } x \leqslant 0 \end{cases} \quad x^- = \sup (-x, 0) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$$

x^+ se numește partea pozitivă a numărului x, iar x^- se numește partea negativă a numărului x. Se verifică fără dificultate egalitățile

$$x = x^+ - x^- \qquad x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$$

și

$$|x| = x^+ + x^- \qquad x^- = \frac{1}{2}(|x| - x).$$

De asemenea, avem

$$\sup (x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

$$\inf (x, y) = -\sup (-x, -y)$$

5. Reprezentarea numerelor reale prin puncte pe o dreaptă

Fiind dată o dreaptă d pe care s-a ales o origine O, un sens de parcurgere pozitiv şi o unitate de lungime, se stabileşte o corespondenţă biunivocă între mulţimea numerelor reale şi mulţimea punctelor de pe dreaptă.

Numărul x care corespunde unui punct P se numeşte *abscisa* lui P.

Corespondenţa stabilită păstrează ordinea, adică dacă x şi y sînt abscisele a două puncte P şi Q, avem $x < y$ dacă şi numai dacă P se află la stînga lui Q (adică sensul de la P la Q este pozitiv).

Dacă P şi Q sînt două puncte de abscise, respectiv x şi y, numărul $|x - y|$ se numeşte *distanţa* dintre P şi Q.

Numărul $|x|$ reprezintă distanţa dintre P şi originea O.

În cele ce urmează numerele vor fi adesea identificate cu punctele ce le corespund.

6. Reprezentarea perechilor de numere prin puncte din plan

Fiind date două drepte perpendiculare Ox şi Oy, pe care s-a ales aceeaşi origine O, aceeaşi unitate de lungime şi cîte un sens pozitiv, se stabileşte o corespondenţă biunivocă între punctele P din plan şi perechile ordonate (x, y) de numere reale. Numerele x şi y se numesc *coordonatele* punctului P; x este abscisa lui P, iar y este ordonata lui P (fig. 18).

Datorită acestei corespondenţe biunivoce se identifică un punct P cu perechea coordonatelor sale (x, y).

În loc de „punctul P“ vom spune adesea „punctul (x, y)“.

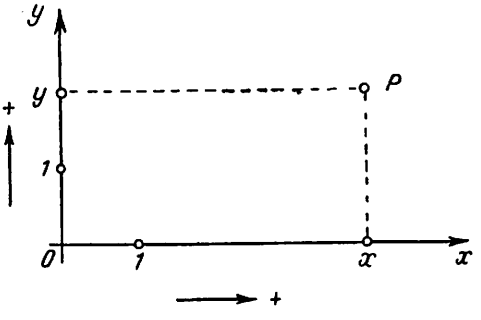


Fig. 18

7. Intervale

Fie $a \leqslant b$ două numere reale oarecare.

1) Mulţimea tuturor punctelor x care verifică inegalităţile $a < x < b$ se numeşte *interval deschis* (fig. 19) şi se notează (a, b):

$$(a, b) = \{x \mid x \in R,\ a < x < b\}.$$

2) Mulţimea tuturor punctelor x care verifică inegalităţile $a \leqslant x \leqslant b$ se numeşte *interval închis* sau *segment* (fig. 20) şi se notează $[a, b]$:

$$[a, b] = \{x \mid x \in R,\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

3) Mulțimea

$$[a, b) = \{x \mid x \in R,\ a \leqslant x < b\}$$

se numește interval închis la stînga și deschis la dreapta (fig. 21).

4) Mulțimea

$$(a, b] = \{x \mid x \in R,\ a < x \leqslant b\}$$

se numește interval deschis la stînga și închis la dreapta (fig. 22).

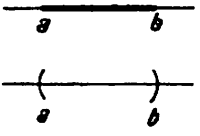


Fig. 19

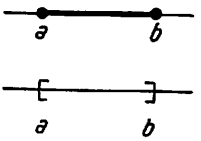


Fig. 20

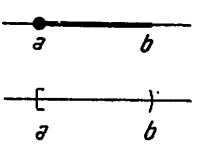


Fig. 21

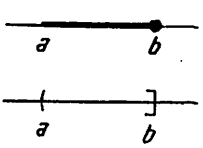


Fig. 22

Intervalele definite mai sus se numesc intervale *mărginite*; a și b se numesc *extremitățile* intervalului: a este extremitatea stîngă, iar b este extremitatea dreaptă.

Avem $(a, b) \subset [a, b) \subset [a, b]$ și $(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b]$.

Dacă $a = b$ atunci $[a, a] = \{a\}$ și $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \varnothing$.

Intervalele închise $[a, b]$ se mai numesc intervale *compacte*.

5) Mulțimea $\{x \mid x \in R, x > a\}$ se numește *semidreaptă deschisă* nemărginită la dreapta (fig. 23) și se notează $(a, +\infty)$.

6) Mulțimea $\{x \mid x \in R,\ x \geqslant a\}$ se numește *semidreaptă închisă* nemărginită la dreapta (fig. 24) și se notează $[a, +\infty)$.

7) Mulțimea $\{x \mid x \in R, x < a\}$ se numește *semidreaptă deschisă* nemărginită la stînga (fig. 25) și se notează $(-\infty, a)$.

8) Mulțimea $\{x \mid x \in R, x \leqslant a\}$ se numește *semidreaptă închisă* nemărginită la stînga (fig. 26) și se notează $(-\infty, a]$.

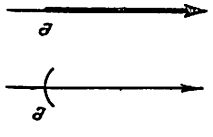


Fig. 23

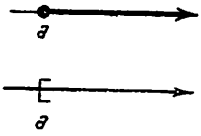


Fig. 24

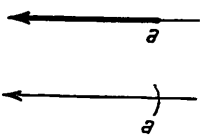


Fig. 25

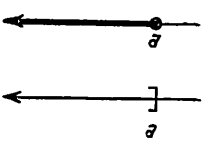


Fig. 26

Punctul a se numește extremitatea semidreptelor.

Dreapta întreagă R se mai notează $(-\infty, +\infty)$.

Semidreptele și dreapta întreagă R se numesc *intervale nemărginite*.

Mai departe (cap. IV) vor fi justificate simbolurile $-\infty$ și $+\infty$ care apar în notația intervalelor nemărginite.

§ 2. Puteri întregi

1. Puteri naturale

Fie a un număr *real* şi n un număr *natural*. Vom scrie:

$$a^1 = a \text{ şi } a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots . a}_{n \text{ ori}} \quad \text{dacă } n > 1.$$

Numărul a^n se numeşte *putere*: numărul a se numeşte *baza* puterii, iar numărul n se numeşte exponentul puterii. Avem: $1^n = 1$, şi $0^n = 0$ oricare ar fi $n \in N$. Dacă $a^n = 0$ atunci $a = 0$; dacă $a > 0$ atunci $a^n > 0$ oricare ar fi $n \in N$.

Puterile cu exponent natural se numesc *puteri naturale*.

Proprietăţile puterilor naturale sînt următoarele:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

2) $(a^n)^m = a^{nm}$.

3) $(ab)^n = a^n b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $b \neq 0$.

4) Dacă $a > 1$ atunci $a^n > 1$, oricare ar fi $n \in N$.

Dacă $0 < a < 1$ atunci $0 < a^n < 1$, oricare ar fi $n \in N$.

Primele trei proprietăţi se verifică imediat, plecînd de la definiţia puterii.

Proprietatea 4) se demonstrează prin recurenţă:

Înmulţind în inegalitatea $a > 1$ cu a (care este strict pozitiv), obţinem $a^2 > a$, deci $a^2 > 1$.

Presupunînd acum inegalitatea $a^n > 1$ adevărată şi înmulţind cu a, obţinem $a^{n+1} > a$, deci $a^{n+1} > 1$. Conform principiului inducţiei complete rezultă că inegalitatea $a^n > 1$ este verificată pentru orice $n \in N$, dacă $a > 1$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $\frac{1}{a} > 1$ şi deci $\left(\frac{1}{a}\right)^n > 1$, adică $\frac{1}{a^n} > 1$ sau $a^n < 1$, oricare ar fi $n \in N$.

Din proprietăţile de mai sus se deduc încă următoarele proprietăţi:

5) Dacă $0 < a < b$ atunci $a^n < b^n$, oricare ar fi $n \in N$.

6) Dacă $n < m$ atunci: $a^n < a^m$ pentru $a > 1$,

$$a^n > a^m \text{ pentru } 0 < a < 1.$$

Într-adevăr, din $0 < a < b$ rezultă $\frac{b}{a} > 1$, deci $\left(\frac{b}{a}\right)^n > 1$ sau $\frac{b^n}{a^n} > 1$, adică $b^n > a^n$ sau $a^n < b^n$, oricare ar fi $n \in N$, ceea ce demonstrează proprietatea 5).

În cazul cînd $a > 1$, avem $a^{m-n} > 1$ (deoarece $m - n$ este natural) şi înmulţind cu a^n (care este strict pozitiv) obţinem $a^n \cdot a^{m-n} > a^n$ sau $a^m > a^n$, adică $a^n < a^m$.

Dacă însă $0 < a < 1$, atunci $a^{m-n} < 1$, şi înmulţind cu a^n obţinem $a^n \cdot a^{m-n} < a^n$, sau $a^m < a^n$ adică $a^n > a^m$. Astfel, proprietatea 6) este de asemenea demonstrată.

2. Puteri întregi

Dacă $a \neq 0$ se definește

$$a^0 = 1 \text{ și } a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Puterile lui 0 cu exponent negativ nu se definesc. Spunem că 0^0 și 0^{-n}, $n \in N$, nu au sens.

În acest fel am definit puterile a^p ale unui număr a *diferit de* 0, cu orice exponent întreg p.

Puterile cu exponent întreg se numesc *puteri întregi.*

Proprietățile puterilor întregi sînt următoarele (ori de cîte ori exponentul este $\leqslant 0$, baza va fi presupusă *diferită de* 0):

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

2) $(a^p)^q = a^{pq}$.

3) $(ab)^p = a^p b^p$; $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

4) $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

5) Dacă $a > 1$ atunci: $a^p > 1$ dacă $p > 0$.
$a^p < 1$ dacă $p < 0$.
Dacă $0 < a < 1$ atunci: $a^p < 1$ dacă $p > 0$.
$a^p > 1$ dacă $p < 0$.

Primele patru proprietăți se deduc imediat din definiția puterilor întregi și din proprietățile corespunzătoare ale puterilor naturale.

Dacă $p > 0$, p este natural și în acest caz proprietatea 5) este adevărată, ca o proprietate a puterilor naturale. Dacă $p < 0$, atunci $-p$ este natural; proprietatea 5) rezultă în acest caz din 4).

3. Inegalitatea lui Bernoulli

Oricare ar fi $a \geqslant -1$ *și* n *natural avem:*

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + na.$$

Pentru $n = 1$ avem $(1 + a)^1 = 1 + a = 1 + 1 \cdot a$, deci inegalitatea este verificată cu egalitate.

Să presupunem acum inegalitatea verificată pentru $n = p$:

$$(1 + a)^p \geqslant 1 + pa$$

și s-o demonstrăm pentru $n = p + 1$.

Deoarece $1 + a \geqslant 0$, înmulțind cu $1 + a$ în inegalitatea precedentă obținem

$$(1 + a)^p (1 + a) \geqslant (1 + pa)(1 + a)$$

sau

$$(1 + a)^{p+1} \geqslant 1 + pa + a + pa^2 = 1 + (1 + p)a + pa^2 \geqslant 1 + (1 + p)a$$

(deoarece $pa^2 > 0$).

Conform principiului inducției complete, inegalitatea este adevărată pentru orice $n \in N$.

Inegalitatea demonstrată se numește inegalitatea lui Bernoulli.

Aplicații. 1) *Dacă* $a \geqslant 2$, *atunci* $a^n \geqslant n + 1$, *oricare ar fi* $n \in N$. Într-adevăr, să notăm $A = a - 1$; deci $A \geqslant 1$ și $a = A + 1$. Atunci:

$$a^n = (1 + A)^n \geqslant 1 + nA \geqslant 1 + n.$$

În particular, $2^n \geqslant n + 1$, $10^n \geqslant n + 1$, oricare ar fi $n \in N$.

2) *Dacă* $a > 1$, *pentru fiecare număr real* α, *există un număr natural* n *astfel ca* $a^n > \alpha$.

Să notăm $A = a - 1$, deci $A > 0$ și $a = 1 + A$.

Există un număr natural $n > \frac{\alpha}{A}$, adică astfel ca $nA > \alpha$ (deoarece $A > 0$). Atunci, pentru numărul natural n obținut avem:

$$a^n = (1 + A)^n \geqslant 1 + nA > 1 + \alpha > \alpha.$$

Rezultă că dacă $a > 1$, atunci $\frac{1}{a^n}$ poate fi făcut oricît de mic dacă se ia n suficient de mare. Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar; să notăm $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$; există atunci un număr n astfel ca $a^n > \alpha$, deci $\frac{1}{a^n} < \frac{1}{\alpha} < \varepsilon$. Să observăm că pentru orice număr $n' > n$ avem $a^{n'} > a^n$, deci $\frac{1}{a^{n'}} < \frac{1}{a^n}$ și deci $\frac{1}{a^{n'}} < \varepsilon$.

Rezultă, de asemenea, că dacă (a_n) și (b_n) sînt două șiruri de numere raționale care au următoarele două proprietăți:

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$;

2) **există un număr** $l > 0$ **astfel ca** $b_n - a_n \leqslant \frac{l}{2^n}$ **pentru orice** $n \in N$, **atunci există un număr unic** x_0 **astfel ca** $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$ **pentru orice** $n \in N$.

Într-adevăr, dacă se dă $\alpha > 0$, există un n astfel ca $\frac{l}{2^n} < \alpha$ și deci $b_n - a_n \leqslant \alpha$ și afirmația rezultă atunci dintr-o proprietate anterioară a numerelor reale.

§ 3. Mulțimi mărginite

1. Mulțimi majorate. Mulțimi minorate. Mulțimi mărginite

Fie A o mulțime de numere reale.

Se spune că A este majorată (sau mărginită superior) dacă există un punct b la dreapta căruia nu se mai află nici un punct din A, adică astfel încît $x \leqslant b$ pentru orice $x \in A$. Numărul b se numește majorant al mulțimii A.

Dacă b este un majorant al lui A și dacă $b < b'$, atunci și b' este un majorant al lui A.

Se spune că mulțimea A este minorată (sau mărginită inferior) dacă există un punct a la stînga căruia nu se mai află nici un punct din A, adică astfel încît $a \leqslant x$ pentru orice $x \in A$. Numărul a se numește minorant al mulțimii A.

Dacă a este un minorant al lui A și $a' < a$ atunci și a' este un minorant al lui A.

Se spune că mulțimea A este mărginită dacă este și majorată și minorată, adică dacă există două numere a și b astfel încît $a \leqslant x \leqslant b$ pentru orice $x \in A$.

Fig. 27

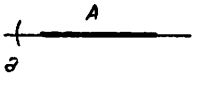


Fig. 28

Observații. În limbajul geometric a spune că A este majorată înseamnă că există o semidreaptă nemărginită la stînga, care conține pe A (fig. 27). De asemenea A este minorată dacă există o semidreaptă nemărginită la dreapta, care conține pe A (fig. 28). A este mărginită dacă există un interval mărginit (închis sau nu) care conține pe A.

Propoziție. O mulțime A este mărginită dacă și numai dacă există un număr $M > 0$ astfel ca $|x| \leqslant M$ pentru orice $x \in A$.

Dacă există $M > 0$ astfel ca $|x| \leqslant M$ pentru orice $x \in A$, atunci $-M \leqslant x \leqslant M$ pentru orice $x \in A$, adică A este conținută în intervalul mărginit $[-M, M]$ și deci A este mărginită. Reciproc, dacă A este mărginită există un interval mărginit (a, b) care o conține: $a \leqslant x \leqslant b$ pentru orice $x \in A$. Să punem $M = \max(|a|, |b|)$. Atunci $b \leqslant |b| \leqslant M$ și $-a \leqslant |a| \leqslant M$ deci $-M \leqslant -|a| \leqslant a$, adică $-M \leqslant a \leqslant b \leqslant M$, de unde $-M \leqslant x \leqslant M$ sau $|x| \leqslant M$ pentru orice $x \in A$.

Exemple. 1) Mulțimea $\{..., -n, ..., -2, -1\}$ este majorată dar nu este minorată, deci nu este mărginită. Orice număr $b \geqslant -1$ este un majorant al ei. Numărul -1 este de asemenea un majorant și anume *cel mai mic majorant*, și face parte din mulțime.

2) Mulțimea $\{1, 2, ..., 4, ...\}$ este minorată dar nu este majorată, deci nu este mărginită; orice număr $a \leqslant 1$ este minorant al său. Numărul 1 este *cel mai mare minorant* și face parte din mulțime.

3) Un interval (a, b) este o mulțime majorată și minorată, deci este mărginită. Orice număr $a' \leqslant a$ este un minorant și orice număr $b' \geqslant b$ este un majorant; a

este cel mai mare minorant, iar b este cel mai mic majorant; a și b nu fac parte din mulțime.

4) Orice mulțime *finită* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este mărginită. Cel mai mic din aceste numere este un minorant, iar cel mai mare din aceste numere este un majorant al mulțimii.

2. Marginile unei mulțimi

Definiție. **Un număr m se numește margine inferioară a unei mulțimi A dacă este cel mai mare minorant al mulțimii A.** Se notează:

$$m = \inf A = \inf_{x \in A} x$$

(se citește „infimum" sau „inferior").

Un număr M se numește margine superioară a unei mulțimi A dacă este cel mai mic majorant al mulțimii A. Se notează:

$$M = \sup A = \sup_{x \in A} x$$

(se citește „supremum" sau „superior").

Marginile unei mulțimi, dacă există, sînt *unice*. Existența marginilor este asigurată de următoarea:

Teoremă. Orice mulțime nevidă minorată are margine inferioară și orice mulțime nevidă majorată are margine superioară.

Vom face demonstrația în cazul unei mulțimi majorate A.

Fie a un număr care *nu este majorant* al lui A, și b un *majorant* al lui A; există deci cel puțin un punct $x \in A$ astfel ca:

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ și } b - a = l > 0$$

(punctele a și b nu aparțin neapărat lui A). În plus, putem alege numerele a și b raționale, deci l este de asemenea rațional. (În caz contrar alegem un număr rațional $a' < a$ și un număr rațional $b' > b$, și b' este majorant, iar a' nu este majorant al lui A.)

Să împărțim segmentul $[a, b]$ în două părți egale. Una din aceste părți are proprietatea că extremitatea stîngă *nu* este majorant, iar extremitatea dreaptă este majorant al lui A; să notăm cu $[a_1, b_1]$ partea care are această proprietate. Numerele a_1 și b_1 sînt raționale, există cel puțin un punct $x \in A$ astfel ca $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, iar $b_1 - a_1 = \frac{l}{2}$.

Să presupunem că am găsit două numere raționale a_n și b_n astfel ca a_n să *nu* fie majorant al lui A, iar b_n să fie majorant al lui A, și $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$.

Să împărțim segmentul $[a_n, b_n]$ în două părți egale și să notăm cu $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ partea pentru care extremitatea stîngă a_{n+1} *nu* este majorant

al lui A, iar extremitatea dreaptă b_{n+1} este majorant al lui A. Numerele a_{n+1} și b_{n+1} sînt raționale,

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n \text{ și } b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{l}{2^{n+1}}.$$

Am demonstrat astfel, prin recurență, că putem găsi două șiruri (a_n) și (b_n) de numere *raționale*, cu următoarele proprietăți:

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$.

2) $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$ pentru oricare $n \in N$.

3) Nici un număr a_n *nu* este majorant al lui A și orice număr b_n *este* majorant al lui A.

Din proprietățile 1) și 2) rezultă că există un număr real α și unul singur astfel încît

$a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$ pentru orice $n \in N$.

Să arătăm că α este cel mai mic majorant al mulțimii A.

1) α este un majorant al lui A, adică $x \leqslant \alpha$ oricare ar fi $x \in A$. Într-adevăr, să presupunem, prin absurd, că ar exista un punct $x_0 \in A$ cu $\alpha < x_0$. Putem alege pe n suficient de mare astfel ca $\frac{l}{2^n} < x_0 - \alpha$; atunci $b_n - a_n < x_0 - \alpha$, deci $b_n < a_n - \alpha + x_0$ și fiindcă $a_n - \alpha \leqslant 0$, rezultă $b_n < x_0$, ceea ce contrazice faptul că b_n este majorant al lui A, conform proprietății 3).

2) α este cel mai mic majorant al lui A. Într-adevăr, să presupunem că ar exista un majorant $\alpha' < \alpha$ al lui A. Putem alege pe n suficient de mare astfel ca $\frac{l}{2^n} < \alpha - \alpha'$ și atunci $b_n - a_n < \alpha - \alpha'$, de unde $-a_n < \alpha - b_n - \alpha'$ și fiindcă $\alpha - b_n \leqslant 0$, rezultă $-a_n < -\alpha'$ sau $\alpha' < a_n$. Deoarece α' este majorant al lui A, deducem că și a_n este majorant al lui A, ceea ce este în contradicție cu proprietatea 3).

Urmează că α este cel mai mic majorant al lui A, adică este marginea superioară a lui A.

Se demonstrează în mod analog existența marginii inferioare a unei mulțimi minorate.

Corolar. Orice mulțime mărginită are margine inferioară și margine superioară.

Într-adevăr, o mulțime mărginită este și minorată și majorată.

Din definiția marginilor unei mulțimi, deducem că:

Un număr m este *marginea inferioară* a unei mulțimi A, dacă și numai dacă verifică următoarele două condiții:

1) $m \leqslant x$ *pentru orice* $x \in A$ (m este minorant al lui A);

2) *oricare ar fi* $\alpha > m$, *există cel puțin un punct* $x \in A$ astfel încît $x < \alpha$ (fig. 29), (nici un număr $\alpha > m$ nu este minorant al lui A, adică m este cel mai mare minorant).

De asemenea, un număr M este *marginea superioară* a unei mulțimi A dacă și numai dacă verifică următoarele două condiții:

1) $x \leqslant M$ *pentru orice* $x \in A$, (M este majorant al lui A);

2) *oricare ar fi* $\alpha < M$, *există cel puțin un punct* $x \in A$ astfel încît $\alpha < x$ (fig. 30) (nici un număr $\alpha < M$ nu este majorant al lui A, adică M este cel mai mic majorant al lui A).

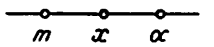


Fig. 29

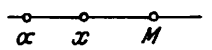


Fig. 30

Dacă A este mărginită, atunci

$$\inf A \leqslant x \leqslant \sup A, \text{ pentru orice } x \in A.$$

Avem $\inf A = \sup A$ dacă și numai dacă mulțimea A este formată dintr-un singur punct.

Marginile unei mulțimi pot să aparțină sau să nu aparțină mulțimii.

Exemple. $\sup \{..., -n, ..., -2, -1\} = -1$; $\inf \{1, 2, ..., n, ...\} = 1$; $\inf (0, 1) = 0$ și $\sup (0, 1) = 1$, dar $0 \notin (0, 1)$ și $1 \notin (0, 1)$; $\inf [0, 1) = 0$ și $0 \in [0, 1)$, $\sup [0, 1) = 1$ și $1 \notin [0, 1)$.

Dacă A posedă un cel mai mic număr m, atunci

$$m = \inf A = \min A \in A.$$

Dacă A posedă un cel mai mare număr M, atunci

$$M = \sup A = \max A \in A.$$

§ 4. Structura topologică pe dreaptă

1. Vecinătățile unui punct pe dreaptă

Fie x_0 un punct pe dreaptă. Vom numi *vecinătate* a lui x_0 orice mulțime V care conține un interval deschis (a, b) care conține pe x_0, adică astfel încît $x_0 \in (a, b) \subset V$. În particular, orice interval deschis (a, b) care conține pe x_0, adică astfel ca $a < x_0 < b$, este o vecinătate a lui x_0 (fig. 31). Vecinătățile de forma

$$(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$$

cu $\alpha > 0$ se numesc *vecinătăți simetrice* ale lui x_0 (fig. 32).

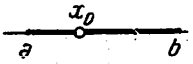


Fig. 31

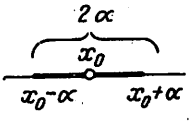


Fig. 32

Orice vecinătate V a lui x_0 conține o vecinătate simetrică a lui x_0.

Într-adevăr, fie (a, b) un interval deschis astfel ca $x_0 \in (a, b) \subset V$. Deoarece $a < x_0 < b$, avem $\alpha = \min (x_0 - a, b - x_0) > 0$ și $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \subset (a, b) \subset V$.

Datorită acestei observații, va fi suficient, mai departe, să considerăm numai vecinătățile de forma (a, b) sau vecinătățile simetrice ale unui punct.

Vecinătățile punctului x_0 au următoarele proprietăți:

1) Orice mulțime U care conține o vecinătate V a lui x_0 este de asemenea o vecinătate a lui x_0.

2) Intersecția a două vecinătăți ale lui x_0 este de asemenea o vecinătate a lui x_0 (fig. 33).

3) Orice vecinătate V a lui x_0 conține pe x_0.

4) Pentru orice vecinătate V a lui x_0 există o vecinătate $W = (a, b)$ a lui x_0, astfel încît V este vecinătatea fiecărui punct $y \in W$.

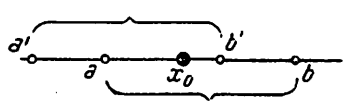


Fig. 33

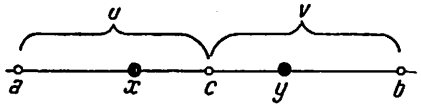


Fig. 34

Prin alegerea vecinătăților fiecărui punct de pe dreaptă, am definit pe dreaptă o *structură topologică* sau o *topologie**. Cu această topologie, dreapta R este un *spațiu topologic* numit *dreapta reală*.

Propoziție. Oricare ar fi punctele $x \neq y$, există o vecinătate U a lui x și o vecinătate V a lui y, fără puncte comune: $U \cap V = \varnothing$.

Să presupunem $x < y$; există un număr c astfel ca $x < c < y$ (fig. 34); luînd $a < x$ și $b > y$, $U = (a, c)$ este o vecinătate a lui x, $V = (c, b)$ este o vecinătate a lui y și $U \cap V = \varnothing$.

Proprietatea enunțată în această propoziție se exprimă spunînd că dreapta reală este un spațiu *separat*.

2. Puncte interioare. Mulțimi deschise

Fie A o mulțime de numere.

Un punct x_0 din A *este punct interior al mulțimii* A dacă există o vecinătate (a, b) a lui x_0, conținută în mulțimea A, adică astfel ca

$$x_0 \in (a, b) \subset A.$$

A spune că x_0 este punct interior al lui A înseamnă deci că A este o vecinătate a lui x_0. Mulțimea punctelor interioare ale mulțimii A se numește

* Fie E o mulțime. Dacă pentru fiecare element $x \in E$ s-a ales o mulțime de părți $\mathcal{V}(x)$, numite *vecinătăți* ale lui x, care îndeplinesc cele patru condiții din text, se zice că s-a definit pe mulțimea E o *structură topologică* sau o *topologie*.

O mulțime E pe care s-a definit o structură topologică se numește *spațiu topologic*, iar elementele sale se numesc puncte.

O mulțime de vecinătăți ale lui x se numește *sistem fundamental de vecinătăți ale lui* x, dacă fiecare vecinătate a lui x conține o vecinătate din sistemul fundamental.

Intervalele (a, b) care conțin un punct x de pe dreaptă formează un sistem fundamental de vecinătăți ale lui x. De asemenea, vecinătățile simetrice ale lui x, de forma $(x - \alpha, x + \alpha)$, sau de forma $[x - \alpha, x + \alpha]$ formează un sistem fundamental de vecinătăți ale lui x.

interiorul lui A și se notează Int A sau $\mathring{A}$. Evident, interiorul lui A este conținut în A:

$$\mathring{A} \subset A.$$

Interiorul mulțimii vide este tot mulțimea vidă.

Mulțimea A se numește *mulțime deschisă* dacă este egală cu interiorul său: $A = \mathring{A}$, adică dacă toate punctele sale îi sînt puncte interioare, sau, ceea ce este același lucru, dacă A este o vecinătate a fiecărui punct al ei. A spune că x_0 *nu* este punct interior lui A, înseamnă că nici o vecinătate a lui x_0 nu este complet conținută în A.

Spunem că un punct $y_0 \in R$ este *punct exterior* lui A, dacă y_0 este punct interior al complementarei lui A, adică dacă există o vecinătate V a lui y_0 cu $V \subset \complement A$, sau, ceea ce este același lucru, cu $V \cap A = \varnothing$.

Exemple. 1) Mulțimea vidă $\varnothing$ este deschisă, deoarece Int $\varnothing = \varnothing$.

2) Dreapta întreagă R este deschisă. În adevăr, orice punct $x_0 \in R$ este punct interior al lui R, deoarece, luînd o vecinătate (a, b) a lui x_0, avem evident

$$x_0 \in (a, b) \subset R.$$

3) Un interval deschis (a, b) este o mulțime deschisă, deoarece orice punct $x_0 \in (a, b)$ este punct interior al intervalului. În adevăr, luînd ca vecinătate a lui x_0 chiar intervalul (a, b), avem:

$$x_0 \in (a, b) \subset (a, b).$$

4) Orice semidreaptă deschisă (nemărginită la dreapta sau la stînga) este o mulțime deschisă.

5) Un interval de forma $[a, b]$ cu $a < b$ *nu* este o mulțime deschisă, deoarece punctul a nu este punct interior al intervalului.

Într-adevăr, oricare ar fi vecinătatea (α, β) a lui a, avem $\alpha < a < \beta$, deci (α, β) nu este conținută în $[a, b]$.

6) Intervalele $[a, b)$, $(a, b]$ cu $a < b$ și semidreptele închise nu sînt mulțimi deschise.

7) O mulțime $\{a\}$ formată dintr-un singur punct nu este deschisă.

Proprietățile mulțimilor deschise sînt următoarele:

1) Reuniunea unei familii *oarecare* de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

2) Intersecția unei familii *finite* de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

3) R și $\varnothing$ sînt mulțimi deschise.

Demonstrație

1) Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie oarecare de mulțimi deschise și $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Fie $x_0 \in A$; există o mulțime A_i din familie care conține pe x_0; dar A_i este deschisă, deci există o vecinătate (a, b) a lui x_0 astfel ca

$$x_0 \in (a, b) \subset A_i$$

și cum $A_i \subset A$, avem

$$x_0 \in (a, b) \subset A,$$

adică x_0 este punct interior al lui A. Cum x_0 a fost ales arbitrar în A, rezultă că orice punct $x \in A$ este punct interior al lui A, deci A este deschisă.

2) Fie $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie finită de mulțimile deschise și $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Fie $x_0 \in A$; atunci $x_0 \in A_1$, $x_0 \in A_2, \ldots$, $x_0 \in A_n$. Dar mulțimile A_i sînt deschise, deci x_0 este punct interior al fiecăreia; există deci intervalele deschise $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ astfel ca:

$$x_0 \in (a_1, b_1) \subset A_1, \quad x_0 \in (a_2, b_2) \subset A_2, \ldots, x_0 \in (a_n, b_n) \subset A_n.$$

Să notăm $a = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ și $b = \min(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Atunci $a < x_0 < b$ deci (a, b) este o vecinătate a lui x_0, și este conținută în toate intervalele (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$, deci cu atît mai mult în toate mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$, și deci și în intersecția lor A:

$$x_0 \in (a, b) \subset A.$$

Așadar x_0 este punct interior al lui A. Cum x_0 a fost ales arbitrar în A, rezultă că orice punct $x \in A$ este punct interior al lui A, deci A este deschisă.

Observații. 1° Intersecția unei familii *infinite* de mulțimi deschise este totdeauna deschisă.

De exemplu, mulțimile $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ sînt deschise, dar intersecția lor $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ nu este deschisă.

2° Se poate demonstra că *orice* mulțime deschisă pe dreaptă se poate pune în mod unic sub forma reuniunii unei familii cel mult numărabile de intervale deschise disjuncte două cîte două.

În adevăr, fie G o mulțime deschisă de puncte ale dreptei R și $x_0 \in G$. Prin definiție, există un interval $(a', b') \subset G$ care conține punctul x_0. Dacă oricare ar fi $b' > x_0$, avem $(x_0, b') \subset G$, atunci $(x_0, \infty) \subset G$. În caz contrar, mulțimea punctelor b' pentru care $(x_0, b') \subset G$ este majorată. Vom nota cu b_0 marginea superioară a acestei mulțimi. Dacă oricare ar fi $a' < x_0$, avem $(a', x_0) \subset G$, atunci $(-\infty, x_0) \subset G$. În caz contrar, mulțimea punctelor a' pentru care $(a', x_0) \subset G$ este minorată. Fie a_0 marginea inferioară a acestei mulțimi.

Fiecărui punct $x_0 \in G$ i se poate atașa în acest mod un interval $(a_0, b_0) \subset G$ care conține punctul x_0, astfel încît orice interval $(a, b) \supset (a_0, b_0)$ nu mai este inclus în G.

Dacă există un punct $x_1 \in G$ astfel încît $x_1 \notin (a_0, b_0)$, atunci, raționînd ca mai sus, găsim un interval maxim $(a_1, b_1) \subset G$, care conține punctul x_1.

Evident $(a_0, b_0) \cap (a_1, b_1) = \varnothing$.

Astfel, o mulțime deschisă $G \subset R$ este o reuniune de intervale disjuncte două cîte două.

Rămîne să arătăm că mulțimea A a acestor intervale este cel mult numărabilă.

Într-adevăr, mulțimea A_1 a intervalelor din A, care au lungimea $\geqslant 1$, este cel mult numărabilă (eventual vidă). Pentru fiecare număr natural $n > 1$, mulțimea A_n a intervalelor din A care au lungimea $\geqslant \frac{1}{n}$ și $< \frac{1}{n-1}$ este de asemenea cel mult numărabilă (eventual vidă). Fiecare interval face parte din una din mulțimile A_n, deci $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ și deci A este cel mult numărabilă, ca reuniune numărabilă de mulțimi cel mult numărabile (eventual unele dintre ele, vide).

3. Puncte aderente. Aderența unei mulțimi. Mulțimi închise

Fie A o mulțime de numere. Un punct $x_0 \in R$ (nu neapărat din A) se numește *punct aderent* al lui A, dacă în orice vecinătate V a lui x_0 există cel puțin un punct din A (eventual numai x_0, dacă $x_0 \in A$), adică dacă $A \cap V \neq \emptyset$.

Mulțimea punctelor aderente ale mulțimii A se numește *aderența* lui A sau *închiderea* lui A și se notează $\bar{A}$.

Orice punct $x_0 \in A$ este punct aderent al lui A, deoarece în orice vecinătate a lui x_0 se găsește cel puțin punctul x_0 din A. Așadar, mulțimea A este conținută în închiderea sa:

$$A \subset \bar{A}.$$

O mulțime poate să aibă și alte puncte aderente care să nu-i aparțină.

O mulțime A se numește *mulțime închisă* dacă este egală cu închiderea sa $A = \bar{A}$.

A spune că $x_0 \notin \bar{A}$, înseamnă că există o vecinătate V a lui x_0 cu $V \cap A = \emptyset$, iar aceasta înseamnă că x_0 este punct exterior al lui A, adică punct interior al mulțimii $\mathbf{C}A$, și reciproc. Avem așadar

$$\mathbf{C}\bar{A} = \operatorname{Int} \mathbf{C}A \text{ și } \mathbf{C}\operatorname{Int} A = \overline{\mathbf{C}A}.$$

Spunem că y_0 este un *punct frontieră* al unei mulțimi A, dacă este aderent și lui A și lui $\mathbf{C}A$, adică dacă aparține mulțimii $\bar{A} \cap \overline{\mathbf{C}A}$.

Mulțimea $\bar{A} \cap \overline{\mathbf{C}A}$ a punctelor frontieră ale lui A se numește *frontiera* mulțimii A și se notează $\operatorname{Fr}A$. Deducem de aici că $\operatorname{Fr}A = \operatorname{Fr}\mathbf{C}A$.

A spune că $y_0 \in \operatorname{Fr}A$ înseamnă că pentru orice vecinătate V a lui y_0 avem $V \cap A \neq \emptyset$ și $V \cap \mathbf{C}A \neq \emptyset$.

Exemple. 1) Închiderea dreptei R este tot R, deoarece alte puncte care să-i fie aderente nu mai există. Dreapta R este o mulțime închisă (în același timp, ea este și o mulțime deschisă).

2) Închiderea mulțimii vide este mulțimea vidă: $\emptyset = \emptyset$. Într-adevăr, nici un punct $x_0 \in R$ nu este aderent lui $\emptyset$, deoarece oricare ar fi vecinătatea V a lui x_0 avem $V \cap \emptyset = \emptyset$. Mulțimea vidă este deci o mulțime închisă (ea este și deschisă).

3) Închiderea unui interval închis $[a, b]$ este tot $[a, b]$, deoarece nici un alt punct dinafara intervalului nu îi este aderent. În adevăr, fie $x_0 \notin [a, b]$. Pentru a face o alegere, să presupunem că $x_0 < a$. Există o vecinătate V a lui x_0 care nu conține pe a, deci $V \cap [a, b] = \emptyset$. Un interval închis este, așadar, o mulțime închisă.

4) Închiderea unei mulțimi $\{x_0\}$ formată numai dintr-un punct este mulțimea însăși: $\{x_0\}$. În adevăr, dacă $x_1 \neq x_0$, există o vecinătate V a lui x_1 care nu conține pe x_0, deci $V \cap \{x_0\} = \emptyset$. Mulțimea formată dintr-un singur punct este deci o mulțime închisă.

5) Dacă $a < b$, avem $\overline{(a, b)} = \overline{[a, b)} = \overline{(a, b]} = [a, b]$.

Într-adevăr a este punct aderent oricăruia din intervalele (a, b), $[a, b)$ și $(a, b]$, deoarece orice vecinătate (α, β) a lui a, $\alpha < a < \beta$, conține puncte de la dreapta lui a,

care se află în fiecare din aceste intervale. La fel se arată că b este punct aderent al intervalelor. Punctele care nu aparțin intervalului închis $[a, b]$ nu sînt puncte aderente ale nici unuia din aceste intervale.

6) Închiderea unei semidrepte se obține adăugînd semidreptei extremitatea sa, care îi este punct aderent.

7) Orice număr real x este aderent mulțimii Q a numerelor raționale: $\bar{Q} = R$. În adevăr, în orice vecinătate (a, b) a lui x există puncte raționale.

8) Orice număr real este aderent mulțimii I a numerelor iraționale, deci închiderea mulțimii numerelor iraționale este toată dreapta. Într-adevăr, în orice vecinătate (a, b) a lui x se află cel puțin un număr irațional.

9) $\overline{\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0\right\}$.

10) $\overline{\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Marginea superioară M a unei mulțimi majorate A este punct aderent al lui A.

Într-adevăr, fie $V = (\alpha, \beta)$ o vecinătate a lui M, adică $\alpha < M < \beta$. Există atunci cel puțin un punct $x \in A$ astfel ca $\alpha < x \leqslant M$, adică astfel ca $x \in (\alpha, \beta)$, deci $V \cap A \neq \emptyset$.

Se arată la fel că *marginea inferioară m a unei mulțimi minorate este punct aderent al acesteia.*

Rezultă că *marginile unei mulțimi mărginite sînt puncte aderente ale acesteia.*

Observații. 1° Dreapta întreagă R și mulțimea vidă sînt și închise și deschise, și sînt singurele mulțimi de numere reale care au această proprietate.

2° Există mulțimi care nu sînt nici închise nici deschise, de exemplu intervalele de forma $(a, b]$ sau $[a, b)$ cu $a<b$.

Legătura dintre mulțimile deschise și cele închise este dată de următoarea

Propoziție. O mulțime A este închisă dacă și numai dacă complementara sa $\complement A$ este deschisă.

Să presupunem întîi că A este închisă și să arătăm că $B = \complement A$ este deschisă, adică orice punct al său este punct interior. Fie $x_0 \in B$ oarecare; atunci $x_0 \notin A$ și deoarece A este închisă, avem $A = \bar{A}$, deci $x_0 \notin \bar{A}$, adică x_0 nu este punct aderent al lui A. Există atunci cel puțin o vecinătate V a lui x_0 astfel ca $V \cap A = \emptyset$. Aceasta înseamnă că $V \subset \complement A$, adică $x_0 \in V \subset B$ și deci x_0 este punct interior al lui B. Cum x_0 a fost ales arbitrar în B, rezultă că toate punctele lui B îi sînt puncte interioare, adică B este deschisă.

Reciproc, să presupunem că B este deschisă și să arătăm că A este închisă, adică $A = \bar{A}$. Fie pentru aceasta x_0 un punct aderent al lui A, adică $x_0 \in \bar{A}$. Dacă x_0 ar aparține lui B, cum B este deschisă ar exista o vecinătate V a lui x_0 conținută în B, $V \subset B$, și atunci $V \cap A = \emptyset$, ceea ce ar contrazice ipoteza că x_0 este punct aderent al lui A. Presupunerea că $x_0 \in B$ ne duce la contradicție, deci $x_0 \notin B$, adică $x_0 \in A$. Cum x_0 a fost ales arbitrar în $\bar{A}$, rezultă că pentru orice $x \in \bar{A}$ avem $x \in A$, adică $\bar{A} \subset A$, și cum avem de asemenea $A \subset \bar{A}$, rezultă $A = \bar{A}$, adică A este închisă.

Corolar. **O mulțime B este deschisă dacă și numai dacă complementara sa $\mathbf{C}B$ este închisă.**

În adevăr, se notează $A = \mathbf{C}B$, deci $B = \mathbf{C}A$ și se aplică propoziția precedentă.

Din proprietățile mulțimilor deschise se deduc proprietățile mulțimilor închise:
1) Intersecția unei familii *oarecare* de mulțimi închise este o mulțime închisă.
2) Reuniunea unei familii *finite* de mulțimi închise este o mulțime închisă.
3) R și $\emptyset$ sînt închise.

Demonstrație.

1) Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie oarecare de mulțimi închise și $A = \bigcap_{i\in I} A_i$. Atunci $\mathbf{C}A_i$ sînt mulțimi deschise și $\bigcup_{i\in I} \mathbf{C}A_i$ este tot o mulțime deschisă. Dar

$$\mathbf{C}A = \mathbf{C}\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \mathbf{C}A_i,$$

deci $\mathbf{C}A$ este deschisă, și deci A este închisă.

2) Fie $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ o familie *finită* de mulțimi închise și $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Atunci $\mathbf{C}A_i$ sînt deschise și $\bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{C}A_i$ este deschisă. Dar

$$\mathbf{C}A = \mathbf{C}\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{C}A_i,$$

deci $\mathbf{C}A$ este deschisă și deci A este închisă.

Observații. 1° Reuniunea unei familii *infinite* de mulțimi închise nu mai este totdeauna o mulțime închisă. De exemplu, mulțimile $A_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $n = 1,2,\ldots$ sînt închise dar reuniunea lor $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1]$ nu este închisă.

2° Orice mulțime finită este închisă. Într-adevăr, o mulțime finită $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este reuniunea familiei finite $\{a_1\}$, $\{a_2\}$,..., $\{a_n\}$ de mulțimi închise (deoarece sînt formate numai din cîte un punct).

3° Se spune că o mulțime A este *densă* într-o mulțime B dacă orice punct al lui B este aderent lui A, adică dacă $B \subset \bar{A}$. De exemplu, intervalele (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ cu $a<b$ sînt dense în intervalul închis $[a, b]$.

Dacă o mulțime A este densă în R, adică dacă $\bar{A} = R$, se mai spune că A este *peste tot densă*. De exemplu, mulțimea numerelor raționale este peste tot densă; mulțimea numerelor iraționale este peste tot densă.

O mulțime *închisă* și majorată A își conține marginea superioară M, deoarece M este punct aderent al lui A.

De asemenea, o mulțime *închisă* și minorată își conține marginea inferioară.

O mulțime *închisă și mărginită* își conține marginea inferioară și marginea superioară.

4. Puncte de acumulare.
Teorema lui Weierstrass-Bolzano

Fie A o mulțime de numere. Un punct $x_0 \in R$ (nu neapărat din A) se numește *punct de acumulare* al lui A, dacă *orice* vecinătate V a lui x_0 conține cel puțin un punct x din A *diferit* de x_0, adică dacă $V \cap A - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Dacă $x_0 \notin A$, evident, condiția ca „x din A să fie diferit de x_0" este verificată de la sine.

Orice punct de acumulare al lui A este punct aderent al lui A, dar pot exista puncte aderente ale lui A care să nu fie puncte de acumulare ale lui A. De exemplu, dacă $A = \{x_0\}$, x_0 este punct aderent al lui A, dar nu este punct de acumulare al lui A, deoarece A nu conține nici un alt punct diferit de x_0 și deci nu poate verifica definiția punctului de acumulare.

Dacă însă x_0 este punct aderent al lui A dar *nu* aparține lui A, atunci x_0 este neapărat punct de acumulare al lui A. Într-adevăr, deoarece x_0 este punct aderent al lui A, în orice vecinătate V al lui A există cel puțin un punct x din A și deoarece $x_0 \notin A$ avem $x \neq x_0$, deci x_0 este punct de acumulare al lui A.

A spune că x_0 nu este punct de acumulare al mulțimii A, înseamnă că există o vecinătate V a lui x_0, care nu mai conține nici un alt punct din A, afară, eventual, de x_0.

Propoziție. Un punct x_0 este punct de acumulare al unei mulțimi A dacă și numai dacă în orice vecinătate V al lui x_0 există o infinitate de puncte din A (adică dacă mulțimea $V \cap A$ este infinită).

Este evident că dacă în orice vecinătate a lui x_0 se află o infinitate de puncte din A, cel mult unul este egal cu x_0, iar celelalte sînt diferite de x_0; așadar, în orice vecinătate a lui x_0 există puncte din A diferite de x_0, deci x_0 este punct de acumulare al lui A.

Reciproc, să presupunem că x_0 este punct de acumulare al lui A. Fie $V = (a, b)$ o vecinătate a lui x_0; să presupunem, prin absurd, că V conține un număr finit de puncte din A diferite de x_0, fie $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *toate* aceste puncte. Putem găsi atunci (fig. 35) o vecinătate (α, β) a lui x_0 conținută în (a,b) și care să nu conțină nici unul din punctele $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Atunci (α, β) nu mai conține nici un punct din A diferit de x_0 (deoarece un asemenea punct s-ar afla în (a, b) și ar fi diferit de $c_1, c_2, \ldots, c_n$). Concluzia la care am ajuns, că (α, β) nu conține nici un punct din A diferit de x_0, contrazice ipoteza că x_0 este punct de acumulare.

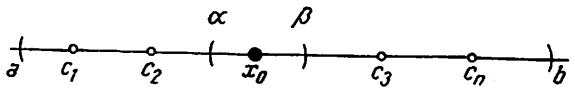


Fig. 35

Presupunerea că vecinătatea aleasă V conține *numai* un număr finit de puncte din A ne duce la contradicție. Așadar, V conține o infinitate de puncte din A. Propoziția este astfel demonstrată.

Corolarul 1. Dacă o mulțime A are un punct de acumulare, ea este infinită.

Corolarul 2. O mulțime finită nu are nici un punct de acumulare.

Observații. 1° Există și mulțimi infinite care nu au nici un punct de acumulare. De exemplu mulțimea N a numerelor naturale este infinită dar nu are nici un punct de acumulare.

2° Dacă o mulțime majorată A nu-și conține marginea superioară M, atunci M este punct de acumulare al lui A, deoarece M este punct aderent al lui A.

De asemenea, dacă o mulțime minorată A nu-și conține marginea inferioară m, atunci m este punct de acumulare al lui A.

Rezultă că dacă o mulțime mărginită A nu-și conține una din margini, aceasta este punct de acumulare al lui A.

Dacă mulțimea A își conține marginile, în unele cazuri marginile sînt puncte de acumulare, iar în alte cazuri nu sînt.

Exemple. 1) $\sup [0, 1] = 1 \in [0, 1]$, $\inf [0, 1] = 0 \in [0, 1]$, iar 0 și 1 sînt puncte de acumulare ale segmentului $[0, 1]$.

2) $\sup \{0, 1, 2\} = 2 \in \{0, 1, 2\}$ și $\inf \{0, 1, 2\} = 0 \in \{0, 1, 2\}$, dar 0 și 2 nu sînt puncte de acumulare ale mulțimii $\{0, 1, 2\}$, deoarece aceasta, fiind finită, nu are nici un punct de acumulare.

Propoziție. O mulțime A este închisă dacă și numai dacă își conține toate punctele sale de acumulare.

Dacă A este închisă, avem $A = \overline{A}$, adică A își conține toate punctele aderente; în particular își conține toate punctele de acumulare, deoarece punctele de acumulare ale lui A sînt puncte aderente ale lui A.

Reciproc, să presupunem că A își conține toate punctele de acumulare. Fie x_0 un punct aderent al lui A; să presupunem, prin absurd, că $x_0 \notin A$; atunci x_0 este punct de acumulare al lui A și deci $x_0 \in A$; am ajuns astfel la o contradicție presupunînd că $x_0 \notin A$. Rezultă că $x_0 \in A$. Cum x_0 a fost arbitrar, deducem că orice punct aderent al lui A aparține lui A, deci $\overline{A} = A$, adică A este închisă.

Teorema lui Weierstrass-Bolzano. Orice mulțime mărginită și infinită are cel puțin un punct de acumulare.

Fie A o mulțime mărginită și infinită, a un minorant al lui A și b un majorant al lui A. Putem alege numerele a și b *raționale*. Fie $l = b - a > 0$; l este de asemenea rațional. Avem $A \subset [a, b]$.

Să împărțim segmentul $[a, b]$ în două părți egale. Deoarece A este infinită, cel puțin una din cele două părți conține o infinitate de puncte din A. Fie $[a_1, b_1]$ una din cele două părți care au această proprietate; a_1 și b_1 sînt raționale și $b_1 - a_1 = \frac{l}{2}$.

Să presupunem că am găsit două numere raționale a_n și b_n astfel ca segmentul $[a_n, b_n]$ să conțină o infinitate de puncte din A și $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$.

Să împărțim segmentul $[a_n, b_n]$ în două părți egale. Deoarece segmentul $[a_n, b_n]$ conține o infinitate de puncte din A, cel puțin una din cele două părți conține de asemenea o infinitate de puncte din A. Să notăm cu $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ una din cele două părți care are această proprietate. Numerele a_{n+1} și b_{n+1} sînt raționale, $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$ și $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{l}{2^{n+1}}$.

Am demonstrat astfel prin inducție completă că putem găsi două șiruri (a_n) și (b_n) de numere *raționale*, cu următoarele proprietăți:

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$.

2) $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$ pentru orice $n \in N$.

3) Segmentul $[a_n, b_n]$ conține o infinitate de puncte din A, oricare ar fi $n \in N$.

Numerele a_n și b_n nu aparțin neapărat mulțimii A. Din proprietățile 1) și 2) deducem că există un număr x_0 astfel încît $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$ oricare ar fi n natural.

Să arătăm că x_0 este punct de acumulare al lui A.

Fie $V = (\alpha, \beta)$ o vecinătate a lui x_0, adică $\alpha < x_0 < \beta$. Putem alege pe n suficient de mare, astfel încît să avem

$$\alpha < a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n < \beta.$$

Dar segmentul $[a_n, b_n]$ conține o infinitate de puncte din A; atunci vecinătatea (α, β) a lui x_0 conține de asemenea o infinitate de puncte din A, deci x_0 este punct de acumulare al lui A.

Observație. Punctul x nu aparține neapărat lui A, dacă A nu este închisă.

5. Mulțimi compacte. Teorema lui Borel-Lebesgue

O mulțime C de numere reale se numește mulțime *compactă* dacă este *închisă* și *mărginită*.

Exemple. 1) O mulțime finită $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este închisă și mărginită, deci este compactă. În particular, o mulțime $\{a\}$ formată numai dintr-un punct este compactă.

2) Un interval închis și mărginit $[a, b]$ este o mulțime compactă. Intervalele $[a, b]$ se numesc *intervale compacte*.

3) O reuniune finită $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ de intervale compacte este o mulțime compactă.

4) Intervalele (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ *nu* sînt compacte deoarece *nu* sînt închise.

5) Semidreptele și dreapta întreagă *nu* sînt compacte deoarece *nu* sînt mărginite.

Vom spune că o familie $(B_\alpha)_{\alpha\in J}$ de mulțimi constituie o *acoperire* a unei mulțimi A, dacă orice punct $x\in A$ aparține cel puțin uneia din mulțimile familiei, adică dacă $A\subset \bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha$.

Dacă familia este formată dintr-un număr finit de mulțimi, vom spune că ea constituie o *acoperire finită* a mulțimii A.

Mulțimile compacte au o proprietate importantă dată de

Teorema lui Borel-Lebesgue. Dacă C este o mulțime compactă, din orice acoperire a sa cu intervale deschise se poate extrage o acoperire finită a sa.

Fie $(I_\alpha)_{\alpha\in I}$ o acoperire a lui C formată din intervale deschise.

Dacă C este *finită*, $C=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, fiecare din aceste puncte este conținut în cîte un interval din familie. Cele n intervale $I_{\alpha_1}, \ldots, I_{\alpha_n}$ constituie o acoperire finită a lui C, și teorema este demonstrată în acest caz.

Să presupunem că C este infinită. Vom raționa prin reducere la absurd: vom presupune că mulțimea C nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie și vom arăta că ajungem la o contradicție.

Deoarece C este compactă, este mărginită. Fie a și b două numere raționale astfel ca $a\leqslant x\leqslant b$ oricare ar fi $x\in C$, adică astfel ca $C\subset[a, b]$.

Să împărțim segmentul $[a, b]$ în două părți egale. În acest fel am împărțit și mulțimea C în două părți C_1 și C_2, și anume C_1 este conținută într-o jumătate a segmentului $[a, b]$, iar C_2 este conținută în a doua jumătate a acestui segment. Avem $C=C_1\cup C_2$. Dacă fiecare din mulțimile C_1 și C_2 ar putea fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie, atunci și C ar putea fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie, ceea ce ar fi în contradicție cu presupunerea făcută. Așadar, cel puțin una din mulțimile C_1 și C_2 *nu* poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie. Să notăm cu $[a_1, b_1]$ una din cele două jumătăți ale segmentului $[a, b]$ care are proprietatea că $[a_1, b_1]\cap C$ *nu* poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie. a_1 și b_1 sînt raționale, și dacă notăm cu $l=b-a$, avem

$$a\leqslant a_1<b_1\leqslant b, \qquad b_1-a_1=\frac{l}{2}.$$

Să presupunem că am găsit două numere raționale a_n și b_n astfel ca $b_n-a_n=\frac{l}{2^n}$ și $[a_n, b_n]\cap C$ nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie.

Să împărțim segmentul $[a_n, b_n]$ în două părți egale, prin punctul $c_n=\frac{b_n-a_n}{2}$. Cel puțin una din mulțimile $[a_n, c_n]\cap C$ sau $[c_n, b_n]\cap C$ nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie. Să notăm cu $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ una din cele două jumătăți ale segmentului $[a, b]$ care are pro-

prietatea că $[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap C$ nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie a_{n+1} și b_{n+1} sînt raționale și avem

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n, \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{l}{2^{n+1}}.$$

Am demonstrat astfel, prin inducție completă, că putem construi două șiruri (a_n) și (b_n) de numere raționale, cu următoarele proprietăți:

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$.

2) $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$ pentru orice $n \in N$.

3) Oricare ar fi $n \in N$, mulțimea $[a_n, b_n] \cap C$ nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie.

Rezultă în particular că $[a_n, b_n] \cap C$ este infinită, oricare ar fi $n \in N$. Din proprietățile 1) și 2) deducem că există un singur punct x_0 astfel ca $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$ pentru orice $n \in N$; x_0 este *punct de acumulare* al mulțimii C. În adevăr, fie $V = (\alpha, \beta)$ o vecinătate a lui x_0, deci $\alpha \leqslant x_0 \leqslant \beta$. Datorită proprietății 2) putem găsi un indice n suficient de mare, astfel ca $\alpha < a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n < \beta$, adică astfel ca $[a_n, b_n] \subset V$. Dar $[a_n, b_n]$ conține o infinitate de puncte din C, deci V conține o infinitate de puncte din C, adică x_0 este punct de acumulare al lui C. Deoarece C este compactă, este închisă, deci $x_0 \in C$. Există atunci un interval deschis I din familie care conține pe x_0, deci care este o vecinătate a lui x_0. Datorită proprietății 2) există un număr n suficient de mare astfel ca $[a_n, b_n] \subset I$ și atunci $[a_n, b_n] \cap C \subset I$, adică mulțimea $[a_n, b_n] \cap C$ poate fi acoperită cu un *singur* interval din familie, ceea ce contrazice proprietatea 3). Am ajuns la o contradicție, și teorema este astfel demonstrată.

Se poate demonstra și o teoremă reciprocă:

Teorema. Dacă din orice acoperire cu intervale deschise, a unei mulțimi C, se poate extrage o acoperire finită, atunci C este compactă.

Fie $y \notin C$ un punct oarecare. Să arătăm că $y \notin \overline{C}$ de unde va rezulta că C este închisă. Pentru orice punct $x \in C$ avem $x \neq y$. Există deci un interval deschis $I_x \ni x$ și un interval deschis $J_x \ni y$, fără puncte comune. (Dacă, de exemplu, $x < y$, se aleg punctele α, β, γ astfel încît $\alpha < x < \gamma < y < \beta$ și se ia $I_x = (\alpha, \gamma)$ și $J_x = (\gamma, \beta)$.) Familia de intervale deschise $(I_x)_{x \in C}$ acoperă mulțimea C. Conform ipotezei, din această acoperire se poate extrage o acoperire finită a lui C, formată din intervalele $I_{x_1}, I_{x_2}, \ldots, I_{x_n}$. Deoarece fiecare interval I_{x_i} este mărginit și $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{x_i}$, urmează în primul rînd că C este o mulțime *mărginită*. Mulțimea $J = \bigcap_{i=1}^{n} J_{x_i}$ este o vecinătate a lui y, disjunctă de fiecare interval I_{x_i}, deci $J \cap C = \emptyset$. Urmează că y este punct exterior al lui C. Din cele de mai sus deducem dacă x este aderent lui C, atunci $x \in C$ (deoarece, în caz contrar, ca mai sus, ar rezulta că x este exterior lui C), deci C este închisă. Fiind și mărginită, C este compactă.

O b s e r v a ț i i. 1° Atît în teorema directă cît și în teorema reciprocă, se pot considera acoperiri formate din mulțimi deschise, nu neapărat din intervale deschise.

Proprietatea enunțată în teorema lui Borel-Lebesgue se ia ca definiție a mulțimilor compacte în spațiile topologice generale.

2° Se poate arăta prin exemple că dacă C nu este închisă, sau nu este mărginită, există acoperiri ale lui C cu intervale deschise, din care nu se poate extrage o acoperire finită.

De asemenea, dacă mulțimile din acoperire nu sînt deschise, este posibil să nu se poată extrage o acoperire finită.

Exemple. 1) $C = (-1, 1)$. Intervalele

$$I_1 = \left(-1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right), \qquad I_2 = \left(-1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right), \ldots,$$

$$I_{n-1} = \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right), \ldots$$

constituie o acoperire a lui C, dar C nu poate fi acoperită cu un număr finit din aceste intervale.

2) $C = [0, +\infty)$. Intervalele

$$I_1 = (-1, 1), I_2 = (0, 2), I_3 = (1, 3), \ldots, I_n = (n-2, n) \ldots$$

constituie o acoperire a lui C, din care nu se poate extrage o acoperire finită a lui C.

3) $C = [0, 1]$. Pentru fiecare $x \in C$ să considerăm mulțimea $B_n = \{x\}$. Familia $(B_x)_{x \in C}$ constituie o acoperire a lui C, din care nu se poate extrage o acoperire finită.

§ 5. Funcții reale

1. Funcții reale, funcții de variabilă reală

Funcțiile $f : E \to F$ în care F este o mulțime de numere reale se numesc *funcții cu valori reale* sau, mai simplu, *funcții reale* sau *funcții numerice*.

Scrierea $f : E \to R$ se citește astfel: funcția reală f definită pe E sau funcția numerică f definită pe E, sau funcția f definită pe E cu valori reale sau numerice.

Funcțiile $f : E \to F$ în care E este o mulțime de numere reale se numesc *funcții de argument real* sau *funcții de variabilă reală*.

Dacă atît E cît și F sînt mulțimi de numere reale, funcțiile $f: E \to F$ se numesc *funcții reale de argument real* sau *funcții reale de variabilă reală*. Acestea vor fi studiate în cea mai mare parte a cărții. De aceea, cînd vom spune „funcție" fără altă specificare, vom înțelege că este vorba de funcție reală de variabilă reală. Printre funcțiile reale de variabilă reală se află funcțiile elementare, studiate în școala medie.

2. Operații cu funcții reale

Fie E o mulțime oarecare, A și B două părți ale lui E, astfel ca $A \cap B \neq \emptyset$, f și g două funcții *reale* definite pe A, respectiv B:

$$f : A \to R, \qquad g : B \to R.$$

Efectuînd operațiile algebrice obișnuite asupra valorilor funcțiilor (care sînt numere), putem stabili noi corespondențe, care definesc funcții noi.

Pentru a putea efectua suma $f(x) + g(x)$ și produsul $f(x)\,g(x)$ este necesar să existe atît $f(x)$ cît și $g(x)$, adică este necesar ca atît funcția f cît și funcția g să fie definite în x; aceasta înseamnă că x trebuie să aparțină atît mulțimii A pe care este definită f cît și mulțimii B pe care este definită g, adică $x \in A \cap B$. Pentru a putea efectua împărțirea $\frac{1}{f(x)}$, trebuie ca $x \in A$ și $f(x) \neq 0$, deoarece împărțirea cu 0 nu are sens.

Putem astfel da următoarele definiții:

1) *Suma $f + g$ a funcțiilor f și g este funcția definită pe mulțimea $A \cap B$ prin egalitatea*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in A \cap B.$$

2) *Produsul αf dintre un număr α și funcția f este funcția definită pe mulțimea A (ca și f) prin egalitatea*

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \qquad x \in A.$$

3) *Produsul fg al funcțiilor f și g este funcția definită pe mulțimea $A \cap B$ prin egalitatea*

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x), \qquad x \in A \cap B.$$

4) *Inversa $\frac{1}{g}$ a funcției g este funcția definită pe mulțimea $B - G_0$, unde $G_0 = \{x \mid x \in B,\ g(x) = 0\}$, prin egalitatea*

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}.$$

În loc de $\frac{1}{g}$ se poate scrie de asemenea g^{-1}.

O b s e r v a ț i e. Nu trebuie confundată inversa față de operația de înmulțire cu funcția inversă față de operația de compunere. Pentru a evita confuziile, funcția inversă față de operația de compunere va fi numită adesea funcție reciprocă.

De asemenea, nu trebuie confundată notația g^{-1} a funcției inverse cu notația $\overset{-1}{g}$ a funcției reciproce.

Luînd $\alpha = -1$ în definiția 3), deducem că:

5) *Funcția $-f$ este definită pe mulțimea A (ca și f) prin egalitatea*

$$(-f)(x) = -f(x), \qquad x \in A.$$

Atunci:

6) *Diferența $f - g = f + (-g)$ dintre funcția f și g este funcția definită pe mulțimea $A \cap B$ prin egalitatea*

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \qquad x \in A \cap B.$$

Din definițiile 3) și 4) deducem:

7) *Câtul* $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ *dintre funcția* f *și funcția* g *este funcția definită pe mulțimea* $A \cap B - G_0$ *prin egalitatea*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Observații. 1° Dacă $A \cap B = \varnothing$, funcțiile $f + g$, $f - g$, fg și $\frac{f}{g}$ nu pot fi definite. De asemenea, dacă $G_0 = A \cap B$, adică dacă $g(x) \equiv 0$ pe $A \cap B$, funcția $\frac{f}{g}$ nu poate fi definită.

2° Să notăm cu $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor reale definite pe părți ale mulțimii E:

$$\mathcal{F} = \{f: A \to R \mid A \subset E\}.$$

Se verifică ușor următoarele proprietăți ale operațiilor definite mai sus:

1) $f + g = g + f$.

2) $(f + g) + h = f + (g + h)$.

3) Funcția identic nulă $\theta(x) \equiv 0$ definită pe E este zero pentru adunare:

$$f + \theta = f.$$

Mulțimea $\mathcal{F}$ este deci *semigrup* comutativ cu element neutru pentru adunare. $\mathcal{F}$ nu este însă grup pentru adunare, deoarece dacă $A \neq E$, și $f: A \to R$, avem $-f: A \to R$ și

$$(f - f)(x) = f(x) - f(x) = 0 \text{ pentru } x \in A.$$

Funcția $f - f$ este definită pe A și este diferită de funcția θ care este definită pe întreaga mulțime E. Așadar, funcția f nu are opus în mulțimea $\mathcal{F}$.

4) $fg = gf$.

5) $(fg)h = f(gh)$.

6) Funcția constantă identic egală cu 1, $e(x) \equiv 1$, definită pe E, este unitate pentru înmulțire:

$$ef = f.$$

Mulțimea $\mathcal{F}$ este *semigrup* comutativ cu unitate și pentru înmulțire.

Înmulțirea este distributivă față de adunare:

7) $f(g + h) = fg + fh$.

Mulțimea $\mathcal{F}$ *nu este inel* pentru cele două operații pentru că nu este grup pentru adunare.

3° Să considerăm acum o mulțime $A \subset E$, și mulțimea $\mathcal{F}(A, R)$ a funcțiilor reale, definite, *toate*, pe A

$$\mathcal{F}(A, R) = \{f: A \to R\}.$$

Dacă f și g sînt definite pe A, atunci $f + g$, $f - g$, αf și fg sînt definite tot pe mulțimea A, deci aparțin tot mulțimii $\mathcal{F}(A, R)$.

Dacă notăm acum cu $\theta(x) \equiv 0$ funcția identic nulă definită pe A și cu $e(x) \equiv 1$ funcția identic egală cu 1 definită tot pe A, avem $\theta \in \mathcal{F}(A, R)$ și $e \in \mathcal{F}(A, R)$. Funcția θ este zero pentru adunarea funcțiilor din $\mathcal{F}(A, R)$, iar funcția e este unitate pentru înmulțirea funcțiilor din $\mathcal{F}(A, R)$. În plus, dacă f este definită pe A atunci $-f$ deci și $f - f$ este definită tot pe A și $f - f = 0$. Rezultă că $-f$ este opusa lui f, deci $\mathcal{F}(A, R)$ este *grup* pentru adunare, și deci este inel pentru adunare și înmulțire.

Iată acum proprietățile înmulțirii cu numere:

(i) $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.
(ii) $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$.
(iii) $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$.
(iu) $1 \cdot f = f$.
(j) $\alpha(fg) = (\alpha f)s = f(\alpha g)$.

Rezultă că mulțimea $\mathcal{F}(A, R)$ este un *spațiu vectorial** pentru operațiile $f + g$ și αf, și este o *algebră*** pentru cele trei operații, $f + g$, αf, fg.

4° Produsul αf dintre numărul α și funcția $f: A \to R$ este egal cu produsul dintre funcția constantă $\alpha(x) = \alpha$ definită pe A și funcția f.

Produsul dintre un număr și o funcție poate fi deci considerat un caz particular de produs a două funcții.

3. Structura de ordine pe mulțimea funcțiilor reale

Fie E o mulțime și $\mathcal{F}(E, R)$ mulțimea funcțiilor reale definite pe E. Folosind ordonarea numerelor reale putem defini o structură de ordine pe mulțimea funcțiilor reale definite pe E.

Dacă f și g sînt două funcții reale definite pe E, vom scrie $f \leqslant g$ sau $g \geqslant f$ dacă $f(x) \leqslant g(x)$ pentru orice $x \in E$.

Dacă $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in E$ spunem că funcția f este *pozitivă* și scriem $f \geqslant 0$.

Dacă $f(x) \leqslant 0$ pentru orice $x \in E$, spunem că f este *negativă* și scriem $f \leqslant 0$.

Dacă E este un spațiu vectorial și dacă o submulțime $E' \subset E$ este închisă față de adunare și înmulțirea cu scalari:

$x + y \in E'$ și $\alpha x \in E'$, pentru orice $x, y \in E'$ și $\alpha \in R$, atunci E' este de asemenea un spațiu vectorial.

---

* O mulțime E pe care s-a definit o operație de adunare $(x, y) \to x + y$ și o operație de înmulțire cu numere $(\alpha, x) \to \alpha x$ se numește *spațiu vectorial* sau *spațiu liniar* dacă:

1) E este grup comutativ pentru adunare;
2) înmulțirea cu numere are proprietățile (i) — (iu) din text.

Elementele unui spațiu vectorial se numesc vectori, iar numerele se numesc scalari. Operația de înmulțire cu numere se numește atunci înmulțire cu scalari.

** O mulțime E pe care s-au definit: o adunare $(x, y) \to x + y$, o înmulțire $(x, y) \to x \cdot y$ și o înmulțire cu numere $(\alpha, x) \to \alpha x$ se numește *algebră* dacă:

1) E este inel pentru adunare și înmulțire;
2) E este spațiu vectorial pentru adunare și înmulțire cu numere;
3) $\alpha(xy) = (\alpha x)\, y = x(\alpha y)$.

Dacă înmulțirea $x \cdot y$ este comutativă, E se numește algebră comutativă; dacă înmulțirea are unitate, E se numește algebră cu unitate.

Dacă E este o algebră și dacă o submulțime $E' \subset E$ este închisă față de adunare, înmulțire și înmulțire cu scalari:

$x + y \in E'$, $xy \in E'$ și $\alpha x \in E'$, oricare ar fi $x, y \in E'$ și $\alpha \in R$, atunci E' este de asemenea o algebră.

Deoarece s-a arătat că $\mathcal{F}(A, R)$ este algebră, deducem că pentru a demonstra că o submulțime de funcții $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}(A, R)$ este o algebră, este suficient să arătăm că cele trei operații, efectuate asupra funcțiilor din $\mathcal{F}'$, ne conduc tot la funcții din $\mathcal{F}'$.

Se verifică ușor că „$f \leqslant g$" este o relație de ordine pe mulțimea $\mathcal{F}(E, R)$, cu următoarele proprietăți:

1) $f \leqslant f$.
2) $d \leqslant g$ și $g \leqslant f \Longrightarrow f = g$.
3) $f \leqslant g$ și $g \leqslant h \Longrightarrow f \leqslant h$.
4) $f \leqslant g \Longrightarrow f + h \leqslant g + h$ (și $f + h \leqslant g + h \Longrightarrow f \leqslant g$).
5) $f \leqslant g$ și $h \geqslant 0$ $f \Longrightarrow fh \leqslant gh$
   $fh \leqslant gh$ și $h(x) > 0$ pentru orice $x \in E \Longrightarrow f \leqslant g$.

Dacă $f(x) > 0$ pentru orice $x \in E$ spunem că funcția f este *strict pozitivă*, iar dacă $f(x) < 0$ pentru orice $x \in E$ spunem că funcția f este *strict negativă*.

Vom nota cu $|f|$ funcția definită pe E prin egalitatea

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), & \text{dacă } f(x) \leqslant 0 \end{cases}, \text{ pentru } x \in E.$$

Funcția $|f|$ va fi numită modulul funcției f.

Fie funcțiile $f, g : E \to R$. Vom nota cu $\sup(f, g)$ funcția reală definită pe E, care în fiecare punct $x \in E$ are drept valoare pe cel mai mare dintre numerele $f(x)$ și $g(x)$:

$$\sup(f, g)(x) = \sup(f(x), g(x)), \qquad x \in E.$$

Se definește de asemenea funcția $\inf(f, g)$, prin egalitatea

$$\inf(f,g)(x) = \inf(f(x), g(x)), \qquad x \in E.$$

Funcțiile $\sup(f, g)$ și $\inf(f,g)$ se numesc, respectiv, anvelopa superioară și anvelopa inferioară a funcțiilor f și g.

Mai general, dacă $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții reale definite pe E, se definesc anvelopa inferioară $\inf\limits_{i \in I} f_i$ și anvelopa superioară $\sup\limits_{i \in I} f_i$ a acestei familii, prin inegalitățile

$$\left(\inf_{i \in I} f_i\right)(x) = \inf_{i \in I} f_i(x) \text{ și } \left(\sup_{i \in I} f_i\right)(x) = \sup_{i \in I} f_i(x).$$

Funcțiile

$$f^+ = \sup(f,0) \text{ și } f^- = \sup(-f, 0)$$

se numesc respectiv partea pozitivă și partea negativă a funcției f.

Avem

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{dacă } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

și

$$f^-x(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), & \text{dacă } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

Se verifică imediat următoarele egalități:

$$f = f^+ - f^- \qquad f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$$

$$|f| = f^+ + f^- = \sup(f, -f) \qquad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

$$\inf(f, g) = -\sup(-f, -g)$$

4. Funcții mărginite

Fie funcția reală $f : E \to R$ definită pe o mulțime oarecare E și fie $A \subset E$.

Se spune că funcția f este *minorată* sau *mărginită inferior pe mulțimea* A dacă imaginea $f(A)$ a lui A prin funcția f este o mulțime minorată, adică *dacă există un număr* $a \in R$, *astfel încît* $a \leqslant f(x)$ *pentru orice* $x \in A$. Marginea inferioară $\inf f(A)$ a mulțimii $f(A)$ se numește *marginea inferioară a funcției* f pe *mulțimea* A și se notează $\inf\limits_{x \in A} f(x)$:

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A).$$

Numărul $m = \inf\limits_{x \in A} f(x)$ este caracterizat de următoarele două proprietăți (care exprimă faptul că m este *cel mai mare minorant al mulțimii* $f(A)$):

1) $m \leqslant f(x)$, oricare ar fi $x \in A$;

2) dacă $m < \alpha$, există $x \in A$ astfel ca $f(x) < \alpha$.

Dacă f este minorată pe domeniul său de definiție E, se spune, mai simplu, că este minorată, fără a mai specifica mulțimea pe care are această proprietate, iar numărul $\inf\limits_{x \in E} f(x)$ se numește *marginea inferioară a funcției* f.

Dacă f este o funcție reală de variabilă reală, a spune că f este minorată înseamnă că graficul său se află în întregime deasupra unei drepte $y = a$ paralele cu axa Ox(fig. 36).

Se spune că funcția f este *majorată sau mărginită superior pe mulțimea* A dacă imaginea $f(A)$ este o mulțime majorată, adică *dacă există un număr* $b \in R$, *astfel încît* $f(x) \leqslant b$, *oricare ar fi* $x \in A$.

Marginea superioară $\sup f(A)$ a mulțimii $f(A)$ se numește *marginea superioară a funcției* f *pe mulțimea* A și se notează $\sup_{x \in A} f(x)$:

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A).$$

Numărul $M = \sup_{x \in A} f(x)$ este caracterizat de următoarele două proprietăți (care exprimă faptul că M este *cel mai mic majorant* al mulțimii $f(A)$:

1) $f(x) \leqslant M$, oricare ar fi $x \in A$;

2) dacă $\alpha < M$, există $x \in A$ astfel ca $\alpha < f(x)$.

Dacă f este majorată pe domeniul său de definiție E, se spune, mai simplu, că f este majorată, fără a mai specifica mulțimea pe care are această proprietate, iar numărul $\sup_{x \in E} f(x)$ se numește *marginea superioară a funcției* f.

Dacă f este o funcție reală de variabilă reală, a spune că este majorată înseamnă că graficul său se află în întregime sub o dreaptă $y = b$ paralelă cu axa Ox (fig. 37).

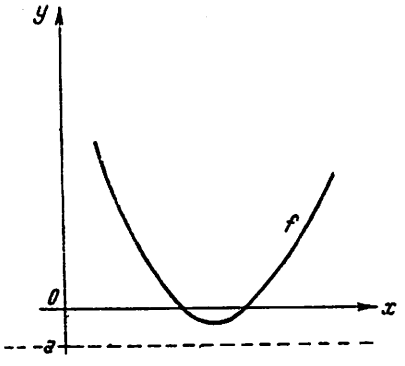


Fig. 36

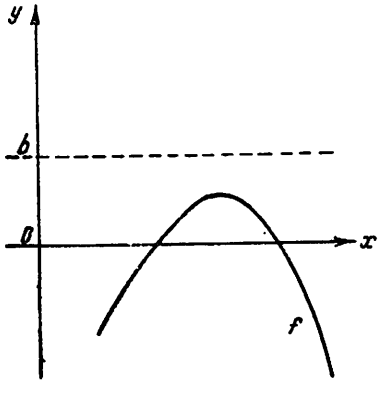


Fig. 37

Se spune că funcția f este *mărginită* pe mulțimea A dacă este și minorată și majorată pe A, adică dacă mulțimea valorilor $f(A)$ este mărginită.

Aceasta înseamnă că *există două numere* a *și* b *astfel încît să avem* $a \leqslant f(x) \leqslant b$ *pentru orice* $x \in A$.

Avem $\inf_{x \in A} f(x) \leqslant \sup_{x \in A} f(x)$; cele două margini sînt egale dacă și numai dacă f este constantă pe A.

Dacă f este mărginită pe mulțimea de definiție E, vom spune, mai simplu, că f este mărginită, fără altă specificare.

Dacă f este o funcție reală de variabilă reală, a spune că f este mărginită înseamnă că graficul său se află în întregime cuprins între două drepte $y = a$ și $y = b$ paralele cu axa Ox (fig. 38).

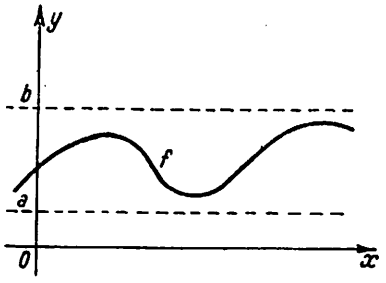


Fig. 38

Propoziție. Funcția $f : E \to R$ este mărginită, dacă și numai dacă există un număr $M > 0$ astfel încît

$$|f(x)| \leqslant M \text{ pentru orice } x \in E.$$

În adevăr, $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$, iar $f(E)$ este mărginită dacă și numai dacă există $M > 0$ astfel ca $|y| \leqslant M$ pentru orice $y \in f(E)$, adică $|f(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in E$.

Rezultă din această propoziție că f este mărginită dacă și numai dacă modulul său $|f|$ este o funcție mărginită.

Se verifică ușor că dacă $f, g : E \to R$ sînt mărginite, funcțiile $f + g$, αf și fg sînt mărginite, deci mulțimea $\mathfrak{M}(E, R)$ a funcțiilor reale mărginite definite pe E este o *algebră*.

Observație. Dacă f și g sînt minorate atunci $f + g$ este minorată și dacă $\alpha \geqslant 0$ atunci αf este minorată. Funcția $-f$ poate însă să nu fie minorată. Mulțimea funcțiilor minorate nu este grup pentru adunare.

Aceleași considerații se pot face pentru funcții majorate.

Funcția f este minorată dacă și numai dacă $-f$ este majorată. În acest caz avem:

$$\inf_{x \in E} f(x) = -\sup_{x \in E} (-f(x)).$$

De asemenea f este majorată dacă și numai dacă $-f$ este minorată și avem:

$$\sup_{x \in E} f(x) = -\inf_{x \in E} (-f(x)).$$

Dăm acum cîteva proprietăți ale funcțiilor mărginite a căror demonstrație este imediată:

1) Dacă $f: E \to R$ este mărginită pe $A \subset E$ și dacă $B \subset A$ atunci f este mărginită pe B și

$$\inf_{x \in B} f(x) \geqslant \inf_{x \in A} f(x), \quad \sup_{x \in B} f(x) \leqslant \sup_{x \in A} f(x).$$

2) Dacă $f: E \to R$ este mărginită pe submulțimile A și B, atunci f este mărginită pe $A \cup B$.

3) Dacă funcțiile $f, g: E \to R$ sînt mărginite și dacă $f \leqslant g$ atunci:

$$\inf_{x \in E} f(x) \leqslant \inf_{x \in E} g(x), \quad \sup_{x \in E} f(x) \leqslant \sup_{x \in E} g(x).$$

4) Dacă funcțiile f și $g: E \to R$ sînt mărginite, atunci

$$\inf_{x \in E} (f(x) + g(x)) \geqslant \inf_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x);$$

$$\sup_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x).$$

5. Funcții monotone

Fie $f : E \to R$ o *funcție reală de variabilă reală* ($E \subset R$) și fie $A \subset E$. Spunem că funcția f este *crescătoare pe* A, dacă, oricare ar fi $x' < x''$ din A, avem $f(x') \leqslant f(x'')$.

Spunem că funcția f este *descrescătoare pe* A, dacă, oricare ar fi $x' < x''$ din A, avem $f(x') \geqslant f(x'')$.

Dacă funcția f este crescătoare (respectiv descrescătoare) pe tot domeniul său de definiție, va fi numită, mai simplu, funcție crescătoare (respectiv descrescătoare) fără a mai specifica mulțimea pe care are loc această proprietate.

Funcțiile crescătoare și funcțiile descrescătoare se numesc funcții *monotone*.

O funcție constantă este și crescătoare și descrescătoare. Reciproc, dacă o funcție este și crescătoare și descrescătoare, atunci ea este constantă.

O b s e r v a ț i e. O funcție crescătoare se caracterizează prin aceea că o inegalitate dintre valorile argumentului se transformă într-o inegalitate de același sens (eventual, egalitate) între valorile funcției. Așadar, o funcție crescătoare se poate defini și cu ajutorul următoarei implicații: $x' > x'' \Longrightarrow f(x') \geqslant f(x'')$.

O funcție descrescătoare transformă o inegalitate dintre valorile argumentului într-o inegalitate de sens contrar (eventual, egalitate) între valorile funcției. Așadar, o funcție descrescătoare se poate caracteriza prin: $x' > x'' \Longrightarrow f(x') \leqslant f(x'')$.

Spunem că funcția f este *strict crescătoare pe* A, dacă, oricare ar fi $x' < x''$ din A, avem $f(x') < f(x'')$.

Orice funcție strict crescătoare este crescătoare deoarece dacă $f(x') < f(x'')$ atunci $f(x') \leqslant f(x'')$.

Spunem că funcția f este *strict descrescătoare pe* A, dacă, oricare ar fi $x' < x''$ din A, avem $f(x') > f(x'')$.

Orice funcție strict descrescătoare este descrescătoare.

Dacă funcția f este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe tot domeniul său de definiție, va fi numită, mai simplu, funcție strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) fără a mai specifica mulțimea pe care are loc această proprietate.

Funcțiile strict crescătoare și strict descrescătoare se numesc *funcții strict monotone*.

Orice funcție strict monotonă este monotonă.

O b s e r v a ț i e. Funcția f este strict crescătoare dacă și numai dacă $x' > x'' \Longrightarrow f(x') > f(x'')$. Funcția f este strict descrescătoare dacă și numai dacă $x' > x'' \Longrightarrow f(x') < f(x'')$.

Următoarele proprietăți se verifică imediat:

1) *Dacă f și g sînt (strict) crescătoare și $\alpha > 0$, atunci $f + g$ și αf sînt (strict) crescătoare.*

Așadar mulțimea funcțiilor reale (strict) crescătoare definite pe o mulțime $E \subset R$ este un *con convex** în spațiul vectorial $\mathcal{F}(E, R)$ al funcțiilor $f: E \to R$.

2) *Dacă f este (strict) crescătoare, atunci — f este (strict) descrescătoare.*

Așadar, mulțimea funcțiilor reale crescătoare definite pe $E \subset R$ *nu* este grup pentru adunare.

3) *Dacă $f(x) > 0$ pentru orice $x \in E$ și dacă f este (strict) crescătoare, atunci funcția $\frac{1}{f}$ este (strict) descrescătoare.*

Dacă în propozițiile de mai sus se înlocuiesc cuvintele „crescător" și „descrescător" unul cu altul, se obțin alte proprietăți ale funcțiilor monotone.

4) Fie $f: A \to B$ și $g: B \to B$, două funcții și $g \circ f: A \to R$, funcția lor compusă.

Dacă f și g sînt ambele (strict) crescătoare sau ambele (strict) descrescătoare, atunci funcția compusă $g \circ f$ este (strict) crescătoare.

Dacă una din funcțiile f și g este (strict) crescătoare și cealaltă este (strict) descrescătoare, atunci funcția compusă $g \circ f$ este (strict) descrescătoare.

Propoziție. O funcție strict monotonă este biunivocă.

În adevăr, fie $f : A \to B$ o funcție strict monotonă, și $x' \neq x''$ două puncte din A. Să presupunem $x' < x''$. Atunci $f(x') < f(x'')$ dacă f este strict crescătoare, sau $f(x') > f(x'')$ dacă f este strict descrescătoare, deci, în orice caz $f(x') \neq f(x'')$, adică f este biunivocă.

Urmează că funcțiile strict monotone admit funcții inverse.

Propoziție. Funcția inversă a unei funcții strict crescătoare este strict crescătoare.

Funcția inversă a unei funcții strict descrescătoare este strict descrescătoare.

Fie f o aplicație *strict crescătoare* a lui A pe B, $f(A) = B$, și fie $f^{-1}: B \to A$ funcția inversă. Fie $y' < y''$; să arătăm că $f^{-1}(y') < f^{-1}(y'')$. Fie x', x'' punctele din A pentru care avem

$$f(x') = y', \qquad f(x'') = y''$$

deci

$$x' = f^{-1}(y'), \qquad x'' = f^{-1}(y'').$$

A arăta că $f^{-1}(y') < f^{-1}(y'')$ revine la a arăta că $x' < x''$.

---

* Fie E un spațiu vectorial. O mulțime $C \subset E$ se numește *con* (cu vîrful în origine) dacă pentru orice $x \in C$ și orice număr $\alpha > 0$ avem $\alpha x \in C$.

Așadar C este con dacă o dată cu un punct x, conține întreaga semidreaptă $\{\alpha x \mid \alpha > 0\}$ cu vîrful în origine, care trece prin x.

Un con $C \subset E$ se numește *con convex* dacă

$$x + y \in C, \quad \text{oricare ar fi } x, y \in C$$

adică, dacă o dată cu două puncte x și y, conține întregul segment care le unește.

Să presupunem, prin absurd, că $x' \geqslant x''$. Deoarece f este strict crescătoare, avem $f(x') \geqslant f(x'')$ sau $y' \geqslant y''$, ceea ce contrazice alegerea $y' < y''$. Așadar, $y' < y'' \Rightarrow f^{-1}(y') < f^{-1}(y'')$, deci f^{-1} este strict crescătoare.

În cazul cînd f este strict descrescătoare, se procedează în mod analog.

Propoziție. Graficele a două funcții reale de variabilă reală, inverse una alteia, sînt simetrice față de prima bisectoare.

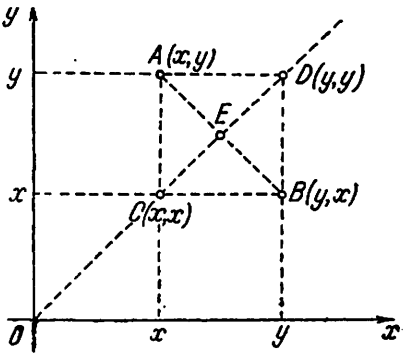


Fig. 39

Fie f o aplicație *biunivocă* a lui A pe B, și f^{-1} aplicația reciprocă a lui B pe A:

$$f : A \to B$$

$$A \leftarrow B : f^{-1}.$$

Avem $y = f(x)$ dacă și numai dacă $x = f^{-1}(y)$, $x \in A$, $y \in B$.

Un punct (x, y) se află pe graficul lui $f(x \in A$, și $y = f(x))$, dacă și numai dacă punctul (y, x) se află pe graficul lui $f^{-1}(y) \in B$, și $x = f^{-1}(y))$. Dar punctele $A(x, y)$ și $B(y, x)$ sînt simetrice față de prima bisectoare.

Într-adevăr (fig. 39), dacă notăm $C(x, x)$ și $D(y, y)$, punctele A, B, C, D sînt vîrfurile unui pătrat, în care CD este o diagonală (de-a lungul primei bisectoare) și AB este cealaltă diagonală. Diagonalele se taie la jumătate, în E. Avem $AE = EB$ și $AB \perp CD$, deci A și B sînt simetrice față de prima bisectoare.

6. Oscilația unei funcții pe o mulțime

Fie $f: E \to R$ o funcție definită pe o mulțime oarecare E și fie $A \subset E$. Dacă funcția f este mărginită pe mulțimea A, are o margine superioară și o margine inferioară pe această mulțime. Diferența dintre aceste margini se numește *oscilația funcției f pe mulțimea A* și se notează $\omega_f(A)$:

$$\omega_f(A) = \sup f(A) - \inf f(A).$$

Din această definiție rezultă că ω_f are următoarele proprietăți pe mulțimile pe care f este mărginită:

1) $\omega_f(A) \geqslant 0$, oricare ar fi $A \subset E$, (ω_f este pozitivă), deoarece $\sup f(A) \geqslant \inf f(A)$;

2) $\omega_f(A) \leqslant \omega_f(B)$ dacă $A \subset B$ (ω_f este crescătoare), deoarece $\sup f(A) \leqslant \sup f(B)$ și $\inf f(A) \geqslant \inf f(B)$;

3) $\omega_f(A) = \sup_{\substack{x' \in A \\ x'' \in A}} (f(x') - f(x''))$.

Într-adevăr,

$$\sup f(A) = \sup_{x' \in A} f(x') \text{ și } \inf f(A) = \inf_{x'' \in A} f(x'') = - \sup_{x'' \in A} (-f(x'')),$$

deci

$$\omega_f(A) = \sup_{x' \in A} f(x') + \sup_{x'' \in A} (-f(x'')) = \sup_{\substack{x' \in A \\ x'' \in A}} (f(x') - f(x'')).$$

Se verifică imediat că dacă mulțimea A este formată dintr-un singur punct x, atunci $\omega_f(\{x\}) = 0$.

De asemenea, dacă funcția f este constantă pe A, atunci $\omega_f(A) = 0$.

7. Oscilația unei funcții într-un punct

Să presupunem acum că $f : E \to R$ este o funcție mărginită definită pe o mulțime de numere reale, $E \subset R$, și fie $x \in E$. Pentru fiecare vecinătate V a lui x să considerăm oscilația $\omega_f(V \cap E)$ a funcției pe mulțimea $V \cap E$ și să notăm

$$\omega_f'(x) = \inf \omega_f(V \cap E),$$

unde marginea inferioară se ia pentru *toate* vecinătățile V ale lui x. Numărul $\omega_f(x)$ se numește *oscilația funcției f în punctul x*.

Pentru definirea oscilației într-un punct ne putem folosi numai de intervalele I care conțin pe x sau care au centrul în x:

$$\omega_f(x) = \inf_{I \ni x} \omega_f(I \cap E),$$

deoarece orice vecinătate V a lui x, conține un interval cu centrul în x.

Dacă x este un punct izolat al lui A, atunci există o vecinătate V a lui x astfel încît $V \cap A = \{x\}$. În acest caz $\omega_f(V \cap A) = \omega_f(\{x\}) = 0$ și deci $\omega_f(x) = 0$.

Oscilația $\omega_f(x)$ este o funcție pozitivă, definită pentru orice x din E. Această funcție poate fi nemărginită, deși funcția f de la care s-a plecat a fost presupusă mărginită. Pentru funcțiile cu oscilația mărginită definite pe mulțimi compacte, avem următoarea propoziție, care va fi folosită pentru demonstrarea criteriului de integrabilitate al lui Lebesgue.

Propoziție. Să presupunem că funcția $f : E \to R$ este definită pe o mulțime compactă E și că oscilația sa $\omega_f(x)$ este mărginită, și să notăm

$$\omega = \sup_{x \in E} \omega_f(x).$$

Atunci pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît oricare ar fi intervalul I de lungime $< \delta(\varepsilon)$, să avem $\omega_f'(I \cap E) < \omega + \varepsilon$.

Prin ipoteză, avem $\omega_f(x) \leqslant \omega$, oricare ar fi $x \in E$. Fie $\varepsilon > 0$ și $x \in E$. Deoarece

$$\omega_f(x) = \inf_{I \ni x} \omega_f(I \cap E),$$

există un interval I_x cu centrul în x, astfel încît să avem

$$\omega_f(I_x \cap E) < \omega_f(x) + \varepsilon \leqslant \omega + \varepsilon.$$

Procedînd astfel pentru fiecare $x \in E$, obținem o familie $(I_x)_{x \in E}$ de intervale deschise, care acoperă pe E, astfel încît pentru fiecare $x \in E$ să avem

$$\omega_f(I \cap E) < \omega + \varepsilon.$$

În fiecare interval I_x să alegem un interval deschis J_x, cu centrul în x, și cu lungimea egală cu jumătatea lungimii lui I_x. Familia de intervale deschise $(J_x)_{x \in E}$ acoperă de asemenea mulțimea compactă E. Conform teoremei lui Borel-Lebesgue, din această acoperire se poate extrage o acoperire finită a lui E:

$$J_{x_1}, J_{x_2}, \ldots, J_{x_n}$$

intervalele fiind așezate în ordinea crescătoare a indicilor:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

Să notăm cu δ lungimea celui mai mic dintre aceste intervale. Numărul δ astfel obținut este numărul căutat. Fie într-adevăr un interval I de lungime $< \delta$. Dacă $I \cap E = \varnothing$, atunci $\omega_f(I \cap E) = 0 < \omega + \varepsilon$. Să presupunem deci că $I \cap E \neq \varnothing$. În acest caz, intervalul I se află conținut în întregime în reuniunea a două intervale consecutive, $J_{x_i} \cup J_{x_{i+1}}$. Presupunînd că intervalul I_{x_i} are lungime mai mare decît $I_{x_{i+1}}$, avem $J_{x_i} \cup J_{x_{i+1}} \subset I_{x_i}$, deci $I \subset I_{x_i}$ și deci

$$\omega_f(I \cap E) \leqslant \omega_f(I_{x_i} \cap E) < \omega + \varepsilon$$

și propoziția este demonstrată.

Capitolul III

ŞIRURI DE NUMERE

§ 1. Generalităţi

1. Denumiri şi notaţii

Amintim că o funcţie reală $n \to a(n)$ definită pe mulţimea N a numerelor naturale se numeşte *şir de numere reale*. Pentru şiruri se obişnuieşte notaţia indicială $n \to a_n$, astfel încît un şir de numere reale este o familie $(a_n)_{n \in N}$ de numere reale, cu indici numerele naturale. Cînd nu va fi pericol de confuzie, un şir va fi notat (a_n) fără a mai specifica mulţimea indicilor, subînţelegîndu-se că aceasta este mulţimea N a numerelor naturale.

Deoarece în continuare vor fi considerate mai ales şiruri de numere reale, acestea vor fi numite, simplu, şiruri.

Să scriem explicit corespondenţa stabilită de funcţia şir:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots, & n, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots\ldots, & a_n, & \ldots \end{array}$$

Înlăturînd mulţimea de definiţie $1, 2, \ldots, n, \ldots$ care se subînţelege, rămîn numai valorile funcţiei şir, în ordinea crescătoare a indicilor:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a, \ldots$$

Aceasta este scrierea obişnuită a şirului, în care, aparent, nu este pus în evidenţă caracterul de funcţie al şirului. La o examinare mai atentă apare însă caracterul de funcţie al şirului, dacă asociem fiecărui indice n numărul a_n.

Numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se numesc *termenii* şirului: a_1 este primul termen, a_2 este al doilea termen etc. Se zice de asemenea că a_1 este termenul de rang 1; a_2 este termenul de rang 2 etc. Un termen a_n al şirului, în care nu se precizează numărul natural n, se numeşte în mod obişnuit *termen general* al şirului.

Atunci cînd se dă un șir concret de numere, în care indicii nu mai sînt scriși, caracterul de funcție al șirului se pune în evidență dacă asociem numărului 1 primul termen din șir, numărului 2 al doilea termen din șir etc.

Doi termeni *diferiți* a_i și a_j, $(i \neq j)$, pot avea aceeași valoare.

Exemple de șiruri:

1) 1, 2, 3, 4,... (șirul numerelor naturale).
2) 2, 4, 6, 8,... (șirul numerelor naturale pare).
3) 1, 3, 5, 7,... (șirul numerelor naturale impare).
4) 2, 1, 4, 3, 6, 5,... (șir de numere naturale).
5) $-1, -2, -3, -4,...$ (șirul numerelor întregi strict negative).
6) 1, 0, 1, 0, 1, 0,...
7) 1, 1, 1, 1,...
8) 0, 0, 0, 0,...

Potrivit egalității a două funcții, două șiruri (a_n) și (b_n) sînt egale dacă și numai dacă au termenii corespunzători aceluiași indice egali:

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ldots,\ a_n = b_n,\ldots$$

Un șir (a_n) este *constant* dacă este o funcție constantă, adică dacă toți termenii au aceeași valoare.

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n = \ldots$$

Dacă notăm cu a valoarea comună a tuturor termenilor, un șir constant se scrie:

$$a,\ a,\ a,\ \ldots,\ a,\ldots$$

Termenii unui șir se pot reprezenta prin puncte pe dreaptă. Dacă doi sau mai mulți termeni au aceeași valoare, ei se reprezintă, evident, prin același punct pe dreaptă. De exemplu, toți termenii unui șir constant se reprezintă prin același punct.

2. Operații cu șiruri

Fie (a_n) și (b_n) două șiruri:

$$(a_n) : a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots\ a_n,\ldots$$

$$(b_n) : b_1,\ b_2,\ b_3,\ldots,\ b_n,\ldots$$

Din definiția operațiilor cu funcțiile se deduc operațiile cu șirurile:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) : a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ldots,\ a_n + b_n,\ldots$$

$$\alpha(a_n) = (\alpha a_n) : \alpha a_1,\ \alpha a_2,\ldots,\ \alpha a_n,\ldots$$

$$(a_n)(b_n) = (a_n\ b_n) : a_1b_1,\ a_2b_2\ldots,\ a_nb_n,\ldots$$

$$\frac{1}{(a_n)} = \left(\frac{1}{a_n}\right) : \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots \text{ (dacă } a_n \neq 0 \text{ pentru orice } n \in N).$$

În particular:

$$-(a_n) = (-a_n) : -a_1, -a_2, \ldots, -a_n, \ldots$$

$$(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n) : a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n, \ldots$$

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right) : \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots, \text{ dacă } b_n \neq 0 \text{ pentru orice } n \in N.$$

Şirul constant 0, 0,..., 0,... este zero pentru adunarea şirurilor, iar şirul constant 1, 1, ..., 1,... este unitate pentru înmulţirea şirurilor. Mulţimea şirurilor de numere reale este o *algebră*.

3. Şiruri mărginite

Un şir (a_n) este *minorat* (sau *mărginit inferior*) dacă există un număr α astfel încît

$$\alpha \leqslant a_n \text{ pentru orice } n \in N.$$

Şirul (a_n) este *majorat* (sau *mărginit superior*) dacă există un număr β astfel încît

$$a_n \leqslant \beta \text{ pentru orice } n \in N.$$

Şirul (a_n) este *mărginit*, dacă există două numere $\alpha < \beta$, astfel încît să avem

$$\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta \text{ pentru orice } n \in N.$$

Consideraţiile din capitolul II, § 5, asupra funcţiilor mărginite, se aplică, în particular, şirurilor numerice:

Propoziţia 1. Un şir (a_n) este mărginit dacă şi numai dacă există un număr $M > 0$ astfel încît să avem

$$|a_n| \leqslant M, \text{ pentru orice } n \in N.$$

În cazul şirurilor însă este suficient ca inegalitatea să fie verificată numai începînd de la un anumit rang:

Propoziţia 2. Dacă există un număr $M > 0$ şi un număr n_0 astfel încît să avem

$$|a_n| \leqslant M, \text{ pentru } n \geqslant n_0$$

atunci şirul (a_n) este mărginit.

Într-adevăr, luînd $M' = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, M)$, avem

$$|a_n| \leqslant M', \quad \text{pentru orice } n \in N,$$

deci (a_n) este mărginit.

Se verifică fără dificultate că dacă (a_n) și (b_n) sînt șiruri mărginite, iar $\alpha \in R$, atunci șirurile $(a_n + b_n)$, (αa_n) și $(a_n b_n)$ sînt de asemenea mărginite, deci: *mulțimea șirurilor mărginite este o algebră.*

Algebra șirurilor mărginite se notează cu litera m.

Ca și pentru funcții, pentru un șir (a_n) se definește marginea inferioară $m = \inf_{n \in N} a_n$, caracterizată de următoarele proprietăți:

1) $m \leqslant a_n$, pentru orice n;
2) pentru orice $\alpha > m$, există un termen $a_n < \alpha$

și marginea superioară $M = \sup_{n \in N} a_n$, caracterizată de următoarele proprietăți:

1) $a_n \leqslant M$, pentru orice n;
2) pentru orice $\alpha < M$, există un termen $a_n > \alpha$.

Exemple. 1) Orice șir constant $a, a, a, \ldots, a, \ldots$ este mărginit (putem lua $\alpha = \beta = a$, deci $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$, pentru orice $n \in N$).

2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, este mărginit $\left(\text{avem } 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1\right)$.

3) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ este mărginit $\left(\text{avem } -5 \leqslant -\frac{1}{n} \leqslant 7\right)$.

4) 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... este mărginit (avem $|a_n| \leqslant 15$).

5) Dacă $0 < a < 1$, avem $0 < a^n < 1$ pentru orice $n \in N$, deci șirul $1, a, a^2, a^3, \ldots, a^n \ldots$ este mărginit. În particular, șirurile următoare sînt mărginite.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots; 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots$$

Șirurile care nu sînt mărginite se numesc șiruri nemărginite. Prin negarea proprietății de mărginire, obținem următoarele definiții:

Un șir (a_n) este nemărginit, dacă și numai dacă, oricare ar fi numărul $M > 0$, există un termen a_n din șir astfel încît $|a_n| > M$.

Sau:

Un șir (a_n) este nemărginit, dacă și numai dacă, oricare ar fi numerele $\alpha < \beta$, există un termen a_n din șir care nu se află cuprins între α și β, deci pentru care avem sau $a_n < \alpha$, sau $\beta < a_n$.

În limbaj geometric, un șir (a_n) este nemărginit dacă în afara oricărui interval mărginit există cel puțin un termen din șir.

Un șir este nemărginit fie dacă nu este majorat, fie dacă nu este minorat, fie dacă nu este nici majorat, nici minorat.

Exemple de șiruri nemărginite. 1) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ este minorat (de 0) dar nu este majorat. În adevăr, oricare ar fi $M > 0$, există un număr natural $n > M$.

2) $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ este majorat (de 0), dar nu este minorat; oricare ar fi $M > 0$, există $n > M$, deci $-n < -M$.

3) $0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3, \ldots, 0{,}n, \ldots$ este minorat.

4) Dacă $a>1$, şirul $1, a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$ este nemărginit. În adevăr, folosind inegalitatea lui Bernoulli, am dedus că oricare ar fi $a>0$, există un număr natural n astfel ca $a^n \geqslant M$, deci şirul nu este majorat.

În particular, şirurile

$$1, 2, 2^2, 2^3, \ldots \qquad 1, 10, 10^2, 10^3, \ldots$$

sînt nemărginite.

5) $1^k, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots$ (k natural) este nemărginit.

Într-adevăr, oricare ar fi $M>0$, există un număr natural $n>M$. Dar $k \geqslant 1$, deci $n^k \geqslant n^1$, şi deci $n^k > M$.

6) Şirul $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$ nu este nici majorat, nici minorat.

4. Şiruri monotone

Consideraţiile din capitolul II, § 5 asupra funcţiilor monotone se aplică, în particular, şirurilor numerice. Astfel:

Un şir (a_n) este *crescător* dacă

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots$$

(fiecare termen este mai mic sau egal cu cel următor).

Un şir (a_n) este *descrescător* dacă

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots$$

(fiecare termen este mai mare sau egal cu cel următor).

Şirurile crescătoare şi şirurile descrescătoare se numesc şiruri *monotone*.

Un şir (a_n) este *strict crescător* dacă

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$$

Orice şir strict crescător este crescător, deoarece, dacă $a_n < a_{n+1}$, atunci $a_n \geqslant a_{n+1}$.

Un şir (a_n) este *strict descrescător* dacă

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots.$$

Orice şir strict descrescător este descrescător. Şirurile strict crescătoare şi şirurile strict descrescătoare se numesc şiruri *strict monotone*.

Orice şir strict monoton este un şir monoton.

Se verifică fără dificultate următoarele propoziţii:

1) *Dacă* (a_n) *şi* (b_n) *sînt crescătoare (respectiv strict crescătoare) şi dacă* $\alpha > 0$, *atunci şirurile* $(a_n + b_n)$ *şi* (αa_n) *sînt crescătoare (strict crescătoare).*

Aşadar mulţimea şirurilor crescătoare (respectiv strict crescătoare) este un *con* în spaţiul vectorial $\mathcal{S}$ al tuturor şirurilor.

2) *Dacă* (a_n) *este crescător (respectiv strict crescător), atunci şirul* $(-a_n)$ *este descrescător (respectiv strict descrescător).*

Aşadar, mulţimea şirurilor crescătoare nu este grup pentru adunare.

3) *Dacă* (a_n) *este un şir crescător (respectiv strict crescător) de numere* >0, *atunci şirul* $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ *este descrescător (respectiv strict descrescător).*

Dacă în proprietățile de mai sus se înlocuiesc unul cu altul cuvintele „crescător" și „descrescător", se obțin alte proprietăți ale șirurilor monotone.

Exemple de șiruri monotone: 1) Orice șir constant

$$a, a, a, \ldots, a, \ldots$$

este și crescător și descrescător. Reciproc, dacă un șir este șir crescător și descrescător atunci este constant.

2) $1, 2, 3, \ldots\ldots, n, \ldots$ este strict crescător.

3) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$ este crescător.

4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ este strict descrescător.

5) Dacă $a>1$, șirul

$$1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$$

este strict crescător. Într-adevăr, deoarece $a>1$ și $n<n+1$ avem: $a^n<a^{n+1}$, oricare ar fi $n\in N$.

În particular, șirurile

$$1, 2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots; \quad 1, 10, 10^2, \ldots\ldots, 10^n, \ldots$$

sînt strict crescătoare.

6) Dacă $0<a<1$, șirul

$$1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$$

este strict descrescător; deoarece $0<a<1$ și $n<n+1$ avem

$$a^n>a^{n+1} \text{ oricare ar fi } n\in N.$$

În particular, șirurile

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots; \quad 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$$

sînt strict descrescătoare.

7) Șirul

$$1^k, 2^k, 3^k, \ldots\ldots, n^k, \ldots \ (k \text{ natural})$$

este strict crescător. Într-adevăr, deoarece $n<n+1$, avem $n^k<(n+1)^k$ oricare ar fi $n\in N$.

Exemple de șiruri care nu sînt monotone. 1) $0, 1, 0, 1, \ldots\ldots, 0, 1, \ldots$

2) $0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots, 0, n, \ldots$

3) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$

5. Subșiruri

Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ un șir. Dacă

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_p < \ldots.$$

este un șir *strict crescător* de numere *naturale*, șirul

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_p}, \ldots$$

se numește *subșir* al șirului inițial.

Dacă $n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 3,\ldots\ n_p = p,\ldots\ldots$ subşirul

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ldots,\ a_{n_p},\ldots$$

coincide cu şirul iniţial.

Exemplu. Fie şirul numerelor naturale $1, 2, 3,\ldots, n,\ldots$ Şirurile $2, 4, 6,\ldots$; $1,3, 5,\ldots$; $1^1, 2^2, 3^3, \ldots, n^n,\ldots$; $1^k, 2^k, 3^k,\ldots, n^k,\ldots$; $2^k, 4^k, 6^k,\ldots$; $1, 2, 2^2,\ldots, 2^n$; $1, 10, 10^2,\ldots, 10^n\ldots$ sînt subşiruri ale sale.

O b s e r v a ţ i i. 1° Fie $n_1<n_2<\ldots n_p<\ldots$ un şir strict crescător de numere naturale. Deoarece $n_2>n_1$, avem $n_2>1$, deci $n_2\geqslant 2$.

Presupunînd că $n_p\geqslant p$, deoarece $n_{p+1}>n_p$ avem $n_{p+1}>p$, deci $n_{p+1}\geqslant p+1$. Aşadar, oricare ar fi p, avem:

$$n_p \geqslant p.$$

2° Un subşir $(a_{n_p})_{p\in N}$ al şirului $(a_n)_{n\in N}$ se obţine prin *compunerea* şirului strict crescător de numere naturale $p\to n_p$ cu şirul $n\to a_n$:

$$p\to n_p\to a_{n_p}.$$

§ 2. Şiruri convergente

1. Un exemplu de şir convergent

Să considerăm şirul

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots\ldots$$

în care $a_n = \frac{1}{n}$, $(n\in N)$. Ne dăm seama, foarte uşor, că termenii acestui şir *descresc necontenit, se apropie tot mai mult de zero.*

Vom încerca să cuprindem într-o formulare matematică precisă această constatare de ordin experimental.

Pentru a verifica matematic că termenii şirului precedent se apropie în adevăr de zero cînd rangul lor creşte, vom proceda astfel: ne vom da un număr pozitiv ε (după voie, îl putem deci presupune oricît de mic voim) şi vom verifica dacă există un rang ν începînd de la care termenii şirului să scadă toţi sub ε. Pentru aceasta trebuie ca $n > \nu$ să implice

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Dar $n>\nu$ este echivalent cu $\frac{1}{n} < \frac{1}{\nu}$. Dacă deci avem:

$$\frac{1}{\nu} < \varepsilon,$$

adică:

$$\nu > \frac{1}{\varepsilon},$$

atunci cu atît mai mult vom avea $\frac{1}{n} < \varepsilon$, *pentru toţi termenii de rang mai mare decît* ν.

Inegalitatea precedentă poate fi verificată, de exemplu, dacă luăm pentru ν cel mai mic număr natural care depăşeşte pe $\frac{1}{\varepsilon}$.

După cum se vede, rangul ν depinde de ε, adică este o funcţie de ε. Îl vom scrie astfel: ν_ε.

Aşadar: *Pentru orice număr* $\varepsilon > 0$ *există un rang* ν_ε *astfel încît* $n > \nu_\varepsilon$ *să implice* $a_n < \varepsilon$.

Această propoziţie constituie constatarea, formulată în termeni matematici, a faptului intuit experimental la început, anume că termenii şirului considerat se apropie tot mai mult de numărul zero.

Dacă la fiecare termen al şirului considerat am adăuga numărul 1, am obţine un alt şir

$$b_1,\ b_2,\ldots,\ b_n,\ldots$$

cu $b_n = \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}$. Din raţionamentul făcut mai sus rezultă că: *Pentru orice număr* $\varepsilon > 0$ *există un rang* ν_ε *astfel încît* $n > \nu_\varepsilon$ *să implice*

$$0 < b_n - 1 < \varepsilon.$$

Această propoziţie constituie constatarea, matematic formulată, a faptului că termenii noului şir se apropie necontenit de numărul 1.

Propoziţiei precedente i se poate da un aspect geometric: Să considerăm vecinătatea $(1 - \varepsilon,\ 1 + \varepsilon)$ a punctului 1. Pentru $n > \nu_\varepsilon$, toţi termenii şirului (b_n) vor aparţine acestei vecinătăţi. În afară va rămîne numai un număr finit de termeni, anume termenii:

$$b_1,\ b_2,\ldots,\ b_{\nu_\varepsilon}.$$

Bineînţeles, numărul acestor termeni, care este totdeauna finit, depinde de ε.

Reciproc, să presupunem că orice vecinătate $(1 - \varepsilon,\ 1 + \varepsilon)$ a punctului 1 lasă în afară un număr finit (depinzînd de ε) de termeni. Dacă b_{ν_ε} este termenul de rang cel mai înalt lăsat afară, pentru $n > \nu_\varepsilon$ toţi termenii şirului se vor afla în intervalul $(1 - \varepsilon,\ 1 + \varepsilon)$.

2. Definiţia limitei

Consideraţiile din exemplul precedent ne conduc la următoarea

D e f i n i ţ i e. Un număr a **este limita unui şir** (a_n) **dacă orice vecinătate a lui** a **conţine toţi termenii şirului, cu excepţia unui număr finit de termeni.**

Cu cît vecinătatea lui a este mai mică, cu atît se vor afla în afara sa mai mulţi termeni, însă tot în număr finit.

În loc de a spune că *a este limita şirului (a_n)* se spune de asemenea că *şirul (a_n) are limita a*, sau că *şirul (a_n) este convergent (sau converge) către a*, sau încă, *şirul (a_n) tinde către a*. În scris:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

(Citit: limită de a_n cînd n tinde către infinit este egal cu a)
sau:

$$\lim_{n} a_n = a$$

(citit: limita de a_n este egală cu a)
sau încă:

$$a_n \xrightarrow[n]{} a, \qquad a_n \longrightarrow a$$

(citit: a_n tinde către a).

Şirurile care au limită se numesc şiruri *convergente*.

Şirurile care nu sînt convergente vor fi numite *şiruri divergente*.

Aşadar, şirul (a_n) este divergent dacă nici un număr real nu este limita sa. Din definiţia limitei unui şir, deducem, prin negare următoarea

P r o p o z i ţ i e. Un şir (a_n) este divergent dacă şi numai dacă, oricare ar fi numărul a, există o vecinătate V a lui a, în afara căreia se află o infinitate de termeni ai şirului.

Exemple. 1) Şirul constant a, a, a,..., a,... este convergent şi are limita a.

Într-adevăr, toţi termenii şirului coincid în reprezentarea pe dreaptă în punctul a, deci orice vecinătate a lui a conţine *toţi* termenii şirului (fără excepţie), adică a este limita şirului.

Aşadar, dacă $a_n = a$ pentru orice $n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Scriem

$$\lim_{n\to\infty} a = a.$$

2) Din exemplul considerat mai sus deducem că şirul $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, are limita 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{1}{n} \to 0.$$

Exemple de şiruri divergente. 1) Şirul numerelor naturale 1, 2, 3, ..., n, ..., este divergent. Fie a un număr oarecare şi vecinătatea sa $V = \left(a - \frac{1}{4}, a + \frac{1}{4}\right)$ de lungime $\frac{1}{2}$. Deoarece distanţa dintre două numere naturale este cel puţin egală cu 1, în această vecinătate se află cel mult un număr natural, deci în afara ei se află

o infinitate de numere naturale. Deducem că a nu este limita acestui şir. Cum a a fost ales arbitrar rezultă că nici un număr nu este limită a acestui şir, deci şirul nu este convergent.

2) Se demonstrează ca mai sus că şirurile

$$-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$$
$$1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$$

sînt divergente.

3) Şirul 0, 1, 0, 1, ..., 0, 1,... este divergent.

Să arătăm întîi că 1 nu este limită a şirului. În adevăr, în afara vecinătăţii $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ a lui 1 se află o infinitate de termeni ai şirului, anume toţi termenii egali cu 0 (fig. 40). Deci 1 nu este limită a şirului.

Se arată la fel că 0 nu este limită a şirului, alegînd vecinătatea $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a lui 0.

Dacă a este un număr oarecare diferit de 0 şi de 1, putem alege o vecinătate V a sa care nu conţine nici pe 0 nici pe 1, şi în afara sa se află *toţi* termenii şirului. Deci nici a nu este limita şirului. Rezultă că şirul nu are nici o limită, adică este divergent.

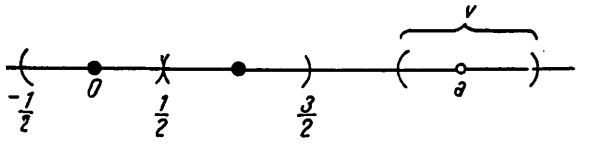


Fig. 40

O b s e r v a ţ i e. Din faptul că într-o vecinătate a lui a se află o infinitate de termeni ai şirului, nu rezultă că în afara acestei vecinătăţi se află neapărat un număr finit de termeni. De exemplu: atît în afara cît şi în interiorul vecinătăţii $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a lui 0 se află cîte o infinitate de termeni ai şirului 0, 1, 0, 1, 0, 1,...

Vom da acum o formulare echivalentă a definiţiei limitei unui şir.

Reamintim că intervalele de forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$ sînt vecinătăţile simetrice ale lui a, şi că orice vecinătate V a lui a conţine o vecinătate simetrică a lui a (cap. II, § 4). A spune că un termen a_n se află într-o vecinătate $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ a lui a, adică $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, înseamnă $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, adică $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, adică $|a_n - a| < \varepsilon$, iar aceasta înseamnă că distanţa dintre a_n şi a este $< \varepsilon$.

Formularea echivalentă a definiţiei limitei unui şir este dată de următoarea

T e o r e m ă. Un număr a este limita unui şir (a_n) dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$, să avem

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Să presupunem întîi că $a = \lim_{n \to \infty} a_n$. Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. După cum am remarcat mai sus, termenii a_n din şir care nu verifică inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$ se află în afara vecinătăţii $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ deci sînt în număr finit; putem găsi deci un termen a_N după care, în şir, nu se mai află nici unul dintre aceştia. Dacă notăm $N(\varepsilon) = N + 1$, atunci oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$

avem $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, adică $|a_n - a| < \varepsilon$ şi prima implicaţie a teoremei este demonstrată.

Reciproc, să presupunem verificată condiţia din enunţul teoremei. Fie V o vecinătate a lui a. După cum am remarcat mai sus, vecinătatea V *conţine* o vecinătate simetrică a lui a, de forma $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$. Conform presupunerii, pentru acest ε există $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $|a_n - a| < \varepsilon$, adică $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$. În afara vecinătăţii V a lui a se află cel mult primii $N(\varepsilon) - 1$ termeni, în număr finit. Urmează că a este limita şirului (a_n) şi cu aceasta şi a doua implicaţie a teoremei este demonstrată.

Din această teoremă, deducem, prin negaţie, următoarea

Propoziţie. **Şirul (a_n) este divergent dacă şi numai dacă, pentru orice număr $a \in R$, există un număr $\varepsilon_0 > 0$ (care depinde de a) cu proprietatea că oricare ar fi N, există un număr $n \geqslant N$ (n depinde de N şi de a) astfel încît să avem**

$$|a_n - a| \geqslant \varepsilon_0.$$

Observaţii. 1° Inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$ din enunţul teoremei poate fi înlocuită cu inegalitatea $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$.

Într-adevăr, dacă $|a_n - a| < \varepsilon$, atunci putem scrie de asemenea $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$.

Reciproc, dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$, inegalitatea $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$ este satisfăcută pentru $n \geqslant N'(\varepsilon)$, atunci avem $|a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n \geqslant N'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ şi deci $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon) = N'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

2° Inegalitatea $n \geqslant N(\varepsilon)$ din enunţul teoremei poate fi înlocuită cu inegalitatea strictă $n > N(\varepsilon)$.

Într-adevăr, dacă $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$, atunci avem $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$.

Reciproc, dacă $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n > N'(\varepsilon)$, atunci, notînd $N(\varepsilon) = N'(\varepsilon) + 1$, avem $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$.

3° Dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $N'(\varepsilon)$ astfel ca

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geqslant N'(\varepsilon),$$

atunci, notînd $N(\varepsilon) = N'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, avem

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon).$$

În general, notînd $N(\varepsilon) = N'(\alpha\varepsilon)$, $\alpha > 0$, avem

$$|a_n - a| < \alpha\varepsilon \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon).$$

4° Dacă $a_n \to a$ şi $b_n \to b$, dacă $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$, atunci pentru fiecare $\varepsilon > 0$ putem găsi acelaşi număr $N(\varepsilon)$ pentru ambele şiruri astfel ca

$$|a_n - a| < \alpha\varepsilon \text{ şi } |b_n - b| < \beta\varepsilon \text{ oricare ar fi } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Fie într-adevăr $\varepsilon > 0$; deoarece $a_n \to a$, pentru acest ε există un număr $N'(\varepsilon)$ astfel ca

$$|a_n - a| < \alpha\varepsilon \text{ pentru orice } n \geqslant N'(\varepsilon).$$

Deoarece $b_n \to b$, pentru același număr ε există un număr $N''(\varepsilon)$ astfel ca

$$|b_n - b| < \beta\varepsilon.$$

Să luăm $N(\varepsilon) = \max N'(\varepsilon), N''(\varepsilon)$; dacă $n \geqslant N(\varepsilon)$, atunci $n \geqslant N'(\varepsilon)$ și $n \geqslant N''(\varepsilon)$, deci

$$|a_n - a| < \alpha\varepsilon \text{ și } |b_n - b| < \beta\varepsilon \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon).$$

5° Condiția ca ε să fie *strict pozitiv* este esențială.
În adevăr, singurele șiruri care îndeplinesc condiția din enunțul teoremei și pentru $\varepsilon = 0$, sînt șirurile care verifică egalitatea $a_n = a$, începînd de la un anumit rang $N(0)$, deci care diferă de un șir constant numai printr-un număr finit de termeni.
6° Vom folosi definiția cu vecinătăți sau definiția cu ε a limitei unui șir, după cum va fi mai convenabil în raționamente.

Criteriu de convergență. Fie (a_n) și (α_n) două șiruri și $a \in R$. Dacă $|a_n - a| \leqslant \alpha_n$ pentru orice n și dacă $\alpha_n \to 0$, atunci $a_n \to a$.

În adevăr, fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\alpha_n \to 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $\alpha_n < \varepsilon$. Atunci, cu atît mai mult $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$, deci $a_n \to a$.

În particular, dacă $|a_n| \leqslant \alpha_n$ și dacă $\alpha_n \to 0$, atunci $a_n \to 0$.

3. Șiruri convergente către 0

Din teorema din numărul precedent, deducem, în particular, luînd $a = 0$,

Propoziția 1. $a_n \to 0$ dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|a_n| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Prin negație, deducem apoi

Propoziția 2. Pentru ca (a_n) să nu aibă limita 0 este necesar și suficient să existe un număr $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că pentru orice număr N există $n > N$ cu $|a_n| \geqslant \varepsilon_0$.

Însemnătatea specială a șirurilor convergente către 0 rezultă din

Propoziția 3. Avem $a_n \to a$, dacă și numai dacă $a_n - a \to 0$.

Într-adevăr, condiția din enunțul teoremei de la numărul precedent: pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încît

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon)$$

înseamnă, în același timp, că $a_n \to a$ și că $a_n - a \to 0$.

Corolar. Avem $a_n \to a$ dacă şi numai dacă şirul (a_n) se poate scrie sub forma

$$a_n = a + \alpha_n$$

cu $\alpha_n \to 0$.

Într-adevăr, notînd $\alpha_n = a_n - a$, avem $a_n = a + \alpha_n$ şi din propoziţia precedentă deducem că $a_n \to a$ dacă şi numai dacă $\alpha_n \to 0$.

Exemple de şiruri convergente către 0 se obţin cu ajutorul propoziţiei următoare

Propoziţia 4. Dacă (a_n) este un şir crescător şi nemărginit de numere > 0, atunci $\frac{1}{a_n} \to 0$.

Fie $\varepsilon > 0$. Să notăm $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Deoarece (a_n) este nemărginit există un termen $a_N > A$. Deoarece (a_n) este crescător, pentru orice $n \geqslant N$ avem $a_n \geqslant a_N$, deci $a_n > A$, de unde $0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{A} < \varepsilon$. Notînd $N(\varepsilon) = N$, avem deci

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon),$$

deci $\frac{1}{a_n} \to 0$.

Propoziţia 5. Dacă $a_n \to 0$ şi dacă $a_n \neq 0$ pentru orice n, atunci şirul $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ este nemărginit.

Într-adevăr fie $M > 0$ un număr oarecare. Să notăm $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$. Deoarece $a_n \to 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $|a_n| < \varepsilon$, deci $\frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon}$, adică $\left|\frac{1}{a_n}\right| > M$, deci şirul $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ este nemărginit.

Transcriem şi criteriul de convergenţă pentru şiruri convergente către 0:

Propoziţia 6. Dacă $|a_n| \leqslant \alpha_n$ şi $\alpha_n \to 0$ atunci $a_n \to 0$.

Exemple de şiruri convergente către 0. 1) Dacă $a > 1$, şirul $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \ldots, \frac{1}{a^n}, \ldots$ are limita 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0 \quad (a > 1),$$

deoarece şirul $1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ este crescător şi nemărginit.

În particular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$.

2) Dacă $0 < a < 1$, șirul $1, a, a^2, \ldots, a^n$ are limita 0:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0, \quad (0 < a < 1)$$

deoarece, notînd $b = \frac{1}{a}$, avem $b > 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = 0$ și deoarece $a^n = \frac{1}{b^n}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

3) Dacă $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\ldots n_p < \ldots\ldots$ este un șir de numere naturale, atunci șirul

$$\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3}, \ldots, \frac{1}{n_p}, \ldots$$

are limita 0:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{n_p} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{1}{n_p} \underset{p}{\to} 0.$$

Într-adevăr, un șir de numere naturale *diferite* este nemărginit, și prin ipoteză șirul $(n_p)_{p\in N}$ este crescător.

În particular, $\lim\limits_{n} \frac{1}{2n} = 0$; $\lim\limits_{n} \frac{1}{2n+1} = 0$; $\lim\limits_{n} \frac{1}{n^k} = 0$.

4. Proprietățile șirurilor convergente

Propoziția 1. Un șir convergent are o singură limită (limita unui șir convergent este unică).

Fie (a_n) un șir convergent către un număr a. Dacă $a' \neq a$, există o vecinătate V a lui a și o vecinătate V' a lui a' fără puncte comune (fig. 41). Deoarece $a_n \to a$ și V este o vecinătate a lui a, în V se află o infinitate de termeni din șir; acești termeni se află în afara lui V'. Așadar, am găsit o vecinătate V', a lui a', în afara căreia se află o infinitate de termeni ai șirului (a_n), deci a' nu este limita acestui șir. Urmează că a este singura limită a șirului (a_n).

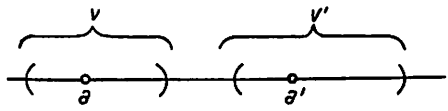


Fig. 41

Propoziția 2. Dacă (a_n) este un șir convergent, atunci șirul $(|a_n|)$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$$

(limita modulului este egală cu modulul limitei).

Să notăm $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Fie $\varepsilon > 0$. Există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Dar

$$\big||a_n| - |a|\big| \leqslant |a_n - a|, \text{ pentru orice } n,$$

deci

$$\big||a_n| - |a|\big| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon)$$

deci $|a_n| \to |a|$:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| = \Big|\lim_{n\to\infty} a_n\Big|$$

O b s e r v a ţ i e. Propoziţia reciprocă nu este adevărată: dacă şirul $(|a_n|)$ este convergent, nu rezultă că şirul (a_n) este convergent.

De exemplu, şirul

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

nu este convergent, iar şirul modulelor

$$1, 1, 1, 1, \ldots$$

este convergent, fiind constant.

Pentru şirurile convergente către zero este adevărată şi propoziţia reciprocă:

P r o p o z i ţ i a 3. Dacă $|a_n| \to 0$, atunci $a_n \to 0$ (şi reciproc).

În adevăr, $|a_n| \to 0$ înseamnă că: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|a_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon),$$

iar aceasta înseamnă că $a_n \to 0$.

Exemplu. Şirurile

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots, \text{şi } 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

au limita 0, deoarece şirul modular

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

are limita 0.

P r o p o z i ţ i a 4. Orice şir convergent este mărginit.

Fie (a_n) un şir convergent şi a limita sa. Luînd $M = |a| + 1$ avem $-M < a < M$, deci intervalul $(-M, M)$ este o vecinătate a lui a.

Deoarece în afara acestei vecinătăți se află un număr finit de termeni, există un număr N astfel încît pentru $n \geqslant N$ să avem $a_n \in (-M, M)$, adică $-M < a_n < M$, deci

$$|a_n| < M, \text{ pentru orice } n \geqslant N.$$

Urmează că șirul (a_n) este mărginit.

Din această propoziție deducem următorul

Corolar. Orice șir nemărginit este divergent.

Propoziția 5. Prin schimbarea ordinii termenilor unui șir convergent se obține un șir convergent către aceeași limită.

În adevăr, poziția pe dreaptă a termenilor nu depinde de rangul lor, ci numai de valoarea lor numerică.

Dacă (a_n) este un șir convergent către a și (b_n) este un șir obținut din (a_n) prin schimbarea ordinii termenilor, atunci în afara fiecărei vecinătăți a lui a se află un număr finit de termeni ai șirului (a_n) și *același* număr finit de termeni ai șirului (b_n), deci și șirul (b_n) are tot limita a.

Propoziția 6. Dacă la un șir convergent se adaugă sau se scoate un număr finit de termeni, șirul obținut este convergent și are aceeași limită:

În adevăr, dacă $a_n \to a$, atunci în afara fiecărei vecinătăți a lui a se află un număr finit de termeni ai șirului (a_n), iar după adăugarea sau scoaterea unui număr finit de termeni, în afara fiecărei vecinătăți a lui a se află tot un număr finit de termeni ai șirului obținut, deci și acesta are limita a.

Propoziția 7. Dacă (a_n) este un șir convergent și dacă există n_0 astfel încît să avem

$$\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta, \text{ pentru } n \geqslant n_0$$

atunci

$$\alpha \leqslant \lim_{n\to\infty} a \leqslant \beta.$$

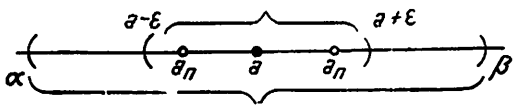


Fig. 42

Să notăm $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ și să arătăm că $\alpha \leqslant a \leqslant \beta$. Să presupunem prin absurd că $a < \alpha$. Luînd $\alpha' < a$, intervalul $V = (\alpha', \alpha)$ este o vecinătate a lui a. Deoarece $a_n \to a$, avem $a_n \in (\alpha', \alpha)$, adică $a_n < \alpha$ pentru toți termenii, cu excepția unui număr finit dintre ei, ceea ce contrazice ipoteza $a_n \geqslant \alpha$ pentru $n \geqslant n_0$. Așadar $\alpha \leqslant a$, și la fel se arată că $a \leqslant \beta$.

Corolar. Dacă (a_n) este un șir convergent de termeni $\geqslant 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$.

Se ia $\alpha = 0$ în propoziția 7.

O b s e r v a ţ i e. Dacă în propoziţiile precedente termenii şirului (a_n) verifică inegalităţi stricte, nu rezultă că limita verifică inegalităţi stricte.

De exemplu, pentru şirul $a_n = \frac{1}{n}$ avem $a_n > 0$, dar $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Propoziţia următoare exprimă o proprietate duală celei din propoziţia 7, însă pentru inegalităţi stricte.

P r o p o z i ţ i a 8. Dacă (a_n) este un şir convergent şi dacă $\alpha < \lim_{n\to\infty} a_n < \beta$, atunci există un număr n_0 astfel încît să avem

$$\alpha < a_n < \beta, \text{ pentru } n \geqslant n_0.$$

Într-adevăr, notînd $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, intervalul $V = (\alpha, \beta)$ este o vecinătate a lui a. Deoarece $a_n \to a$, există un număr n_0 astfel încît pentru $n \geqslant n_0$ să avem $a_n \in V$, adică $\alpha < a_n < \beta$.

C o r o l a r u l 1. Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$, atunci există un număr n_0 astfel încît să avem

$$a_n > 0, \text{ pentru } n \geqslant n_0.$$

Se ia $\alpha = 0$.

C o r o l a r u l 2. Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n < 0$, atunci există un număr n_0, astfel încît să avem

$$a_n < 0, \text{ pentru } n \geqslant n_0.$$

Se ia $\beta = 0$.

C o r o l a r u l 3. Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci există un număr n_0 astfel încît să avem

$$a_n \neq 0, \text{ pentru } n \geqslant n_0.$$

§ 3. Operaţii cu şiruri convergente

Vom arăta că, efectuînd asupra şirurilor convergente operaţiile algebrice obişnuite (adunarea, scăderea, înmulţirea cu scalari, înmulţirea, şi, cu anumite restricţii, împărţirea) se obţin tot şiruri convergente.

1. Operații cu șiruri convergente către zero

Propoziția 1. Dacă $a_n \to 0$ **și** $b_n \to 0$, **atunci**

$$a_n + b_n \to 0$$

$$a_n b_n \to 0$$

$$\alpha a_n \to 0, \text{ pentru orice număr } \alpha \in R.$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $a_n \to 0$ și $b_n \to 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Dar

$$|a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n|,$$

deci

$$|a_n + b_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon),$$

adică $a_n + b_n \to 0$.

Relațiile $a_n b_n \to 0$ și $\alpha a_n \to 0$ se demonstrează în mod asemănător, dar vor rezulta și din următoarea propoziție mai generală.

Propoziția 2. Dacă $a_n \to 0$ **și dacă** (b_n) **este un șir mărginit, atunci** $a_n b_n \to 0$.

Deoarece șirul (b_n) este mărginit, există un număr $M > 0$ astfel încît să avem $|b_n| \leqslant M$, pentru toți termenii b_n, deci

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leqslant M |a_n|, \text{ pentru orice } n.$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece $a_n \to 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Urmează atunci că

$$|a_n b_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geqslant N(\varepsilon),$$

adică $a_n b_n \to 0$.

Corolarul 1. Dacă $a_n \to 0$ **și** (b_n) **este un șir convergent, atunci** $a_n b_n \to 0$.

Într-adevăr, șirul convergent (b_n) este mărginit.

Din acest corolar rezultă în particular că dacă $a_n \to 0$ și $b_n \to 0$, atunci $a_n b_n \to 0$ și că dacă $a_n \to 0$, atunci $\alpha a_n \to 0$, deoarece șirul (αa_n)

poate fi considerat ca produsul dintre şirul (a_n) şi şirul constant (α) care este convergent. În acest fel, şi propoziţia 1 a fost complet demonstrată.

Corolarul 2. Dacă $a_n \to 0$, **atunci** $-a_n \to 0$.

Se ia $\alpha = -1$ în propoziţia 1.

Corolarul 3. Dacă $a_n \to 0$ **şi** $b_n \to 0$ **atunci** $a_n - b_n \to 0$.

Într-adevăr, $-b_n \to 0$ şi $a_n - b_n = a_n + (-b_n) \to 0$.

Prin inducţie completă deducem că suma şi produsul unui număr k de şiruri convergente către zero sînt de asemenea şiruri convergente către zero.

Observaţie. Mulţimea şirurilor convergente către 0 este o *algebră*. Această algebră se notează cu c_0. Din propoziţia 2 rezultă că c_0 este un *ideal** în algebra m a şirurilor mărginite.

Mai departe se va arăta că mulţimea c a şirurilor convergente este de asemenea o algebră. Din corolarul 1 rezultă că c_0 este un ideal şi în algebra c.

2. Operaţii cu şiruri convergente

Propoziţia 1. Dacă (a_n) **şi** (b_n) **sînt două şiruri convergente, iar** $\alpha \in R$, **atunci şirurile** $(a_n + b_n)$, (αa_n) **şi** $(a_n b_n)$ **sînt convergente şi**

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

(limita sumei este egală cu suma limitelor):

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

(limita produsului este egală cu produsul limitelor).

Fie $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ şi $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Şirurile (a_n) şi (b_n) se pot scrie sub forma

$$a_n = a + \alpha_n \quad \text{şi} \quad b_n = b + \beta_n,$$

unde $\alpha_n \to 0$ şi $\beta_n \to 0$. Atunci, notînd $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$, avem

$$a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) = a + b) + \gamma_n,$$

iar $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n \to 0$, deci $a_n + b_n \to a + b$:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

* Fie E o algebră comutativă. O submulţime $I \subset E$ se numeşte *ideal* al algebrei E dacă I este o algebră şi dacă pentru orice $x \in I$ şi orice $y \in E$ avem $xy \in I$.

Avem apoi

$$\alpha a_n = \alpha a + \alpha\alpha_n$$

și $\alpha\alpha_n \to 0$ deci $\alpha a_n \to \alpha a$:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha a = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n.$$

În sfîrșit, notînd $\delta_n = \alpha_n\beta_n + a\beta_n + b\alpha_n$, avem

$$a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n\beta_n + a\beta_n + b\alpha_n = ab + \delta_n.$$

Dar $\alpha_n\beta_n \to 0$, $a\beta_n \to 0$ și $b\alpha_n \to 0$, deci $\delta_n = \alpha_n\beta_n + a\beta_n + b\alpha_n \to 0$ și deci $a_n b_n \to ab$:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Prin inducție completă se demonstrează că suma și produsul unei familii finite de șiruri convergente sînt de asemenea șiruri convergente și limita sumei este egală cu suma limitelor, iar limita produsului este egală cu produsul limitelor.

În particular, luînd k șiruri convergente egale cu (a_n), deducem

$$\lim_{n\to\infty} (a_n^k) = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k.$$

Corolarul 1. Dacă șirul (a_n) este convergent, atunci șirul $(-a_n)$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Se ia $\alpha = -1$ în propoziția 1.

Corolarul 2. Dacă (a_n) și (b_n) sînt două șiruri convergente, atunci șirul $(a_n - b_n)$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n)$$

(limita diferenței este egală cu diferența limitelor).

Într-adevăr, presupunînd că $a_n \to a$ și $b_n \to b$, avem $-b_n \to -b$ și $a_n - b_n = a_n + (-b_n) \to a + (-b) = a - b$.

Exemple: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an + b}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a + b\cdot\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a + \lim\limits_{n\to\infty} b\dfrac{1}{n} =$

$$= a + b \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = a + b0 = a.$$

2) Dacă $0 < q < 1$, atunci

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} q^n.$$

Dar $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Dacă şirurile $(a_n + b_n)$ şi $(a_n b_n)$ sînt convergente, nu rezultă că şirurile (a_n) şi (b_n) sînt convergente.
De exemplu, şirurile

$$1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$$

$$0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$$

nu sînt convergente, deşi suma lor

$$1, 1, 1, 1, \ldots, 1, 1, \ldots$$

şi produsul lor

$$0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots$$

sînt convergente, fiind constante.

2° Mulţimea şirurilor convergente este o *algebră* care conţine algebra c_0 a şirurilor convergente către 0. Algebra şirurilor convergente se notează cu c.

Funcţia care face să corespundă fiecărui şir convergent (a_n) din c limita sa $\lim_{n\to\infty} a_n$ se numeşte *operaţia de trecere la limită**.

Egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

arată că operaţia de trecere la limită este *aditivă*.

Egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n$$

arată că operaţia de trecere la limită este *omogenă*. Aşadar, operaţia de trecere la limită este *liniară*.

---

* Fie E şi F două spaţii vectoriale (eventual algebre). O funcţie $T: E \to F$ — pentru care domeniul de definiţie E şi mulţimea F în care ia valori sînt *spaţii vectoriale* — se numeşte *operaţie*.

O operaţie $T : E \to E$ — pentru care mulţimea de definiţie şi mulţimea în care ia valori, coincid — se numeşte, de obicei, *operator*.

O operaţie $T : E \to R$ — pentru care spaţiul vectorial în care T ia valori, este *dreapta numerică* — se numeşte *funcţională*.

Fie $T : E \to F$ o operaţie. Spunem că T este o operaţie *aditivă* dacă

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \text{ oricare ar fi } x, y \in E.$$

Spunem că T este o operaţie *omogenă* dacă

$$T(\alpha x) = \alpha T(x), \text{ oricare ar fi } x \in E \text{ şi } \alpha \in R.$$

O operaţie aditivă şi omogenă se numeşte operaţie *liniară*.

Dacă E şi F sînt algebre, spunem că operaţia T este *multiplicativă*, dacă

$$T(xy) = T(x)\,T(y), \text{ oricare ar fi } x, y \in E.$$

Operaţia de trecere la limită $T(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$, definită pe spaţiul vectorial $E = c$ al şirurilor convergente, cu valori reale, este de fapt o funcţională. Ea este liniară şi multiplicativă.

Egalitatea

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

arată că operația de trecere la limită este *multiplicativă*

3. Cîtul a două șiruri convergente

Reamintim că dacă un șir (α_n) are limita $\neq 0$, atunci avem $\alpha_n \neq 0$, pentru toți termenii, cu excepția, eventual, a unui număr finit dintre ei, pe care îi putem înlătura, fără a modifica prin aceasta limita.

De aceea în continuare vom presupune că dacă un șir are limita $\neq 0$, atunci toți termenii săi sînt $\neq 0$, chiar dacă acest fapt nu va fi specificat.

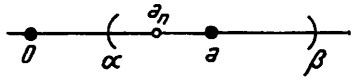


Fig. 43

Vom demonstra mai întîi următoarea

L e m ă. Dacă (b_n) este un șir convergent, cu limita $\neq 0$, atunci șirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este mărginit.

Să notăm $b = \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Atunci putem presupune că toți termenii b_n sînt $\neq 0$, deci șirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este definit.

Să luăm, de exemplu, $\alpha = \frac{|b|}{2} > 0$. Avem $\lim_{n\to\infty} |b_n| = |b| > \alpha$. Urmează că există un rang N începînd de la care avem inegalitatea $|b_n| > \alpha$. Atunci

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{\alpha}, \text{ pentru } n \geqslant N.$$

Luînd $M = \max\left(\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}, \ldots, \frac{1}{|b_N|}, \frac{1}{\alpha}\right)$,

avem

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \leqslant M, \text{ oricare ar fi } n,$$

deci șirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este mărginit.

O b s e r v a ț i e. Dacă $b_n \to 0$, (și $b_n \neq 0$ pentru fiecare n), atunci șirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este nemărginit.

P r o p o z i ț i a. Dacă șirul (b_n) este convergent și dacă $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, atunci șirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Într-adevăr, notînd $b = \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, avem

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n b} = \frac{1}{b_n}\,\frac{1}{b}\,(b - b_n).$$

Dar $b - b_n \to 0$, deci $\frac{1}{b}\,(b - b_n) \to 0$. Din lema precedentă rezultă că şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este mărginit, deci $\frac{1}{b_n}\cdot\frac{1}{b}\,(b - b_n) \to 0$.

Aşadar, $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \to 0$, adică $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Observaţie. Dacă $b_n \to 0$, şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ nu este convergent, deoarece este nemărginit.

Propoziţia. **Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, atunci şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este convergent şi**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

(limita cîtului este egală cu cîtul limitelor).

Într-adevăr, putem scrie şirul cît ca un produs de şiruri

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n},$$

iar şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este convergent. Urmează atunci că şirul produs $\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)$ este convergent, deci şirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este convergent.

Notînd $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Corolar. **Dacă $a_n \to a \neq 0$ şi $k \in N$, atunci $a_n^{-k} \to a^{-k}$.**

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-k} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{-k}$$

Într-adevăr $a_n^k \to a^k \neq 0$, deci $\frac{1}{a_n^k} \to \frac{1}{a^k}$, adică $a_n^{-k} \to a^{-k}$.

Din acest corolar și din observația care urmează propoziția 1 deducem că dacă $a_n \to a \neq 0$, avem

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k, \text{ oricare ar fi } k \text{ } \textit{întreg},$$

iar pentru k *natural*, egalitatea este adevărată chiar dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Mai departe se va arăta că dacă $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$, egalitatea rămîne adevărată pentru orice exponent *real*.

O b s e r v a ț i i. 1° Propoziția reciprocă nu este adevărată: dacă șirul cît este convergent, nu rezultă că cele două șiruri sînt convergente. De exemplu, șirurile egale

$$1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, \ldots$$
$$1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, \ldots$$

nu sînt convergente, în timp ce șirul cît

$$1, 1, 1, 1, \ldots, 1, 1, \ldots$$

este convergent, fiind constant.

2° Dacă $a_n \to a \neq 0$ și $b_n \to 0$, șirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este nemărginit, deci nu este convergent.

Dacă $a_n \to 0$ și $b_n \to 0$, despre șirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu se mai poate afirma nimic. Uneori este convergent, alteori este divergent. Mai mult, oricare ar fi $a \in R$, se poate găsi un șir $a_n \to 0$ și un șir $b_n \to 0$, astfel ca $\frac{a_n}{b_n} \to a$.

Exemple:

1) $(a_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ $\quad a_n \to 0$

$(b_n): a, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4}, \ldots, \frac{a}{n}, \ldots$ $\quad b_n \to 0$

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right): a, a, a, \ldots, a, \ldots$ $\quad \frac{a_n}{b_n} \to a.$

2) $(a_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ $\quad a_n \to 0$

$(b_n): 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$ $\quad b_n \to 0$

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right): 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ crescător și nemărginit

3) $(a_n): -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots \quad a_n \to 0$

$(b_n): 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots \quad b_n \to 0$

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right): -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ descrescător şi nemărginit.

4) $(a_n): 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots, \frac{1}{2n-1}, 0, \ldots \quad a_n \to 0$

$(b_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}, \ldots \quad b_n \to 0$

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right): 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$ nu are limită.

4. Trecerea la limită în inegalităţi

Propoziţia 1. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente şi dacă $a_n \leqslant b_n$ pentru orice $n \in N$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

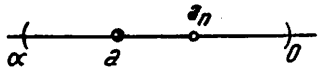


Fig. 44

Într-adevăr, şirul $(b_n - a_n)$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Pe de altă parte, $b_n - a_n \geqslant 0$ pentru orice $n \in N$, deci $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) \geqslant 0$.

Rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n \geqslant 0,$$

adică:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Observaţie. Dacă $a_n < b_n$ pentru orice $n \in N$ nu putem deduce că $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, ci numai că $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$.

Propoziţia următoare este şi un criteriu de convergenţă.

Propoziţia 2. Dacă $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ pentru orice $n \in N$ şi dacă şirurile (a_n) şi (b_n) sînt convergente şi au aceeaşi limită, atunci şirul (x_n) este convergent şi are aceeaşi limită ca şi celelalte două şiruri.

Din inegalităţile $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ deducem $0 \leqslant x_n - a_n \leqslant b_n - a_n$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, pe baza criteriului de convergenţă rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a_n) = 0$.

Atunci

$$x_n = (x_n - a_n) + a_n,$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

O b s e r v a ţ i e. Propoziţiile de mai sus rămîn adevărate chiar dacă inegalităţile sînt verificate doar începînd de la un anumit rang. Într-adevăr, înlăturînd termenii în număr finit care nu verifică inegalităţile, obţinem noi şiruri cu aceleaşi limite, ai căror termeni verifică, toţi, inegalităţile respective.

§ 4. Şiruri fundamentale (Cauchy)

În definiţia limitei unui şir, această limită a intervenit în mod explicit. Pentru a putea verifica pe baza acestei definiţii că un şir este convergent, trebuie să avem o indicaţie asupra limitei înseşi. Pentru un număr restrîns de şiruri, ca $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ etc., intuitiv, ne dăm seama uşor că limita lor este 0. Folosind proprietăţile şirurilor, criteriul de convergenţă şi operaţiile cu şirurile convergente, din convergenţa şirurilor cunoscute putem deduce convergenţa altor şiruri.

Dacă ni se dă un şir (a_n) căruia nu-i putem aplica unul din aceste procedee, în general este foarte greu, uneori chiar imposibil, să precizăm dacă şirul este convergent. Chiar dacă ştim că este convergent, în general nu-i putem determina limita, dacă nu avem vreo indicaţie asupra ei, pentru că nu putem încerca toate numerele reale dacă verifică sau nu definiţia limitei.

Aşadar, definiţia limitei este de un folos practic atunci cînd după puţine încercări reuşim să găsim limita şirului. Importanţa teoretică a acestei definiţii este însă foarte mare, ea stă la baza analizei matematice.

1. Definiţia şirului fundamental

Cauchy a reuşit să dea o definiţie echivalentă a unui şir convergent, în care nu mai intervine limita şirului, ci numai termenii şirului.

D e f i n i ţ i e. Un şir (a_n) se numeşte şir fundamental sau şir Cauchy, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $m \geqslant N(\varepsilon)$ şi $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

În cele ce urmează vom arăta că noţiunile de şir fundamental şi de şir convergent sînt echivalente.

Observaţii. 1° Ca şi în definiţia limitei unui şir, inegalităţile $n \geqslant N(\varepsilon)$ pot fi înlocuite cu $n > N(\varepsilon)$; inegalităţile $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pot fi înlocuite cu $|a_m - a_n| \leqslant \varepsilon$, sau cu $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, sau cu $|a_m - a_n| < \alpha\varepsilon$, unde $\alpha > 0$.

2° Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri fundamentale, $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$, atunci pentru fiecare $\varepsilon > 0$ putem găsi acelaşi $N(\varepsilon)$ astfel ca

$$|a_m - a_n| < \alpha\varepsilon \text{ şi } |b_m - b_n| < \beta\varepsilon, \text{ oricare ar fi } m, n \geqslant N(\varepsilon).$$

Definiţia unui şir fundamental se poate enunţa în formele echivalente date de următoarele două propoziţii:

Propoziţia 1. Un şir (a_n) este fundamental dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \in N$ să avem

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Într-adevăr, dacă în definiţia de mai sus, considerăm $m > n$, avem $m = n + p$ cu $p \geqslant 1$ şi obţinem condiţia din enunţul propoziţiei. Reciproc, din condiţia enunţată în propoziţie se obţine definiţia şirului fundamental punînd $m = n + p$, deoarece dacă $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$, avem de asemenea $m > N(\varepsilon)$ (vezi obs. 1°).

Propoziţia 2. Un şir (a_n) este fundamental dacă şi numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N$ să avem

$$|a_N - a_n| < \varepsilon.$$

Din definiţia şirului fundamental rezultă condiţia din propoziţia 2, luînd $m = N = N(\varepsilon)$.

Reciproc, să presupunem verificată condiţia din enunţul propoziţiei. Fie $\varepsilon > 0$; există un număr N astfel ca $|a_N - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ oricare ar fi, $n \geqslant N$.

Dacă $n, m \geqslant N$ avem deci

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_N + a_N - a_n| \leqslant |a_m - a_N| + |a_N - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Observaţii. 1° Formularea dată în propoziţia 2 se poate folosi mai uşor în raţionamentele prin reducere la absurd.

2° A spune că un şir (a_n) este fundamental revine la a afirma că diferenţa a doi termeni poate fi făcută oricît de mică, dacă rangul celor doi termeni este suficient de mare. Mai precis, dincolo de un anumit rang *care depinde de* ε, diferenţa a doi termeni este mai mică decît ε, oricît de îndepărtaţi ar fi cei doi termeni unul de altul.

2. Subşiruri convergente. Lema lui Cesàro

P r o p o z i ţ i a 1. Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi are aceeaşi limită.

Într-adevăr, dacă $a_n \to a$, în afara oricărei vecinătăţi a lui a se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi deci, cu atît mai mult, un număr finit de termeni ai oricărui subşir al său; deci orice subşir al şirului (a_n) are limita a.

În particular, şirul obţinut dintr-un şir convergent prin suprimarea unui număr finit de termeni este convergent şi tinde către aceeaşi limită ca şirul iniţial.

Exemple. 1) Deoarece şirul $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ are limita 0

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

următoarele subşiruri ale sale

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots; \qquad 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots$$

$$1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{3^k}, \ldots, \frac{1}{n^k}, \ldots \; k \in N; \qquad 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots, \frac{1}{n^n}, \ldots$$

au de asemenea limita 0:

$$\lim_n \frac{1}{2n} = 0; \quad \lim_n \frac{1}{2n-1} = 0; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0; \quad \lim_n \frac{1}{n^n} = 0.$$

2) Deoarece pentru $0 < a < 1$, şirul $1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ are limita 0,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \qquad (0 < a < 1)$$

următoarele subşiruri ale sale

$$1, a^2, a^4, \ldots, a^{2n}, \ldots; \qquad a, a^3, a^5, \ldots, a^{2n-1}, \ldots$$

$$1, a^4, a^9, \ldots, a^{n^2}, \ldots; \qquad a^5, a^{10}, a^{15}, \ldots, a^{5n}, \ldots$$

au de asemenea limita 0.

O b s e r v a ţ i e. Propoziţia reciprocă este de asemenea adevărată: dacă *orice* subşir al şirului (a_n) este convergent, atunci şirul (a_n) este de asemenea convergent, deoarece (a_n) însuşi este unul din subşiruri.

Dacă însă numai *unele* subşiruri sînt convergente, nu rezultă că şirul este convergent; de exemplu, şirul 0, 1, 0, 1, 0, 1,... are subşiruri convergente cum sînt 0, 0, 0, ...; 1, 1, 1, ...; dar şirul iniţial nu este convergent.

De asemenea, şirul 0, 1, 0, 2, 0, 3, ..., 0, n, ... este divergent şi conţine sub şirul convergent 0, 0, 0, ...

O condiţie suficientă pentru ca un şir să conţină subşiruri convergente este dată de

Lema lui Cesàro. Orice şir mărginit conţine un subşir convergent.

Fie (x_n) un şir mărginit. Putem găsi două numere *raţionale* a şi b astfel ca

$$a < x_n < b$$

pentru orice $n \in \mathrm{N}$.

Să împărţim segmentul $[a, b]$ în două părţi egale, prin punctul raţional $c = \frac{b-a}{2}$. Cel puţin unul dintre cele două segmente parţiale conţine o infinitate de termeni ai şirului.

Să notăm cu $[a_1, b_1]$ unul dintre aceste segmente parţiale care conţine o infinitate de termeni ai şirului. Dacă ambele segmente parţiale au această proprietate, convenim — de exemplu — să notăm cu $[a_1, b_1]$ pe cel din stînga. Numerele a_1 şi b_1 sînt raţionale şi avem

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b \qquad \text{şi} \qquad b_1 - a_1 = \frac{l}{2};$$

unde am notat $l = b - a$.

Să presupunem că am găsit un segment $[a_n, b_n]$ care conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n), astfel că a_n şi b_n sînt raţionale şi

$$b_n - a_n = \frac{l}{2^n}.$$

Împărţim segmentul $[a_n, b_n]$ în două părţi egale prin punctul $c_n = \frac{b_n - a_n}{2}$, şi notăm cu $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ unul din cele două segmente parţiale care conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n). Avem:

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n \quad \text{şi} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{l}{2^{n+1}},$$

iar a_{n+1} şi b_{n+1} sînt raţionale.

Am demonstrat astfel prin inducţie completă că putem găsi două şiruri (a_n) şi (b_n) de numere raţionale cu următoarele proprietăţi:

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$.

2) $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$ pentru orice $n \in N$.

3) Fiecare segment $[a_n, b_n]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n).

Din primele două proprietăţi deducem că există un punct x şi numai unul, astfel ca

$$a_n \leqslant x \leqslant b_n \text{ pentru orice } n \in N.$$

Să arătăm că x este limita unui subşir al şirului (x_n).

Să alegem un termen x_{n_1} al şirului (x_n) astfel ca

$$x_{n_1} \in [a_1, b_1].$$

Deoarece segmentul $[a_2, b_2]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n), putem găsi un termen x_{n_2} al şirului astfel ca

$$x_{n_2} \in [a_2, b_2] \text{ şi } n_1 < n_2.$$

Să presupunem că am ales un termen $x_{n_p} \in [a_p, b_p]$. Deoarece $[a_{p+1}, b_{p+1}]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n), putem găsi în şir un termen $x_{n_{p+1}}$ cu $n_p < n_{p+1}$ astfel ca

$$x_{n_{p+1}} \in [a_{p+1}, b_{p+1}].$$

Am demonstrat astfel, prin inducţie completă, că putem găsi un şir (x_{n_p}), $1 \leqslant p < \infty$, astfel ca

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots$$

şi

$$a_p \leqslant x_{n_p} \leqslant b_p \text{ pentru orice } p \in N.$$

Aşadar, (x_{n_p}) este un subşir al şirului (x_n).

Rămîne să arătăm că subşirul (x_{n_p}) este convergent către x.

Din inegalităţile

$$a_p \leqslant x \leqslant b_p,$$
$$a_p \leqslant x_{n_p} \leqslant b_p$$

deducem:

$$|x_{n_p} - x| \leqslant b_p - a_p \leqslant \frac{l}{2^p}$$

pentru fiecare p. Şirul $\left(\frac{l}{2^p}\right)$ este convergent către 0 (deoarece şirul $\frac{2^p}{l}$ este crescător şi nemărginit). Pe baza criteriului de convergenţă deducem că

$$\lim_{n \to \infty} x_{n_p} = x$$

şi lema este demonstrată.

3. Criteriul lui Cauchy

Înainte de a enunța criteriul lui Cauchy, vom demonstra două leme.

Lema 1. Orice şir fundamental este mărginit.

Fie (a_n) un şir fundamental. Luînd $\varepsilon = 1$, găsim un număr natural $N = N(1)$ astfel ca pentru orice $n \geqslant N$ să avem

$$|a_n - a_N| < 1$$

sau

$$-1 < a_n - a_N < 1$$

sau încă

$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1.$$

Dacă notăm

$$m = \min \{a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, a_N - 1\},$$

$$M = \max \{a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, a_N + 1\},$$

atunci pentru orice n natural avem

$$m \leqslant a_n \leqslant M,$$

deci şirul (a_n) este mărginit.

Lema 2. Dacă un şir fundamental conţine un subşir convergent, atunci el este convergent.

Fie (a_n) un şir fundamental şi (a_{n_p}) un subşir al său convergent către un număr a. Să arătăm că şirul (a_n) este de asemenea convergent către a.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece (a_n) este şir fundamental, există un număr natural $N_1(\varepsilon)$ astfel ca

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru } n, m \geqslant N_1(\varepsilon).$$

Deoarece subşirul (a_{n_p}) este convergent către a, există un număr natural $N_2(\varepsilon)$ astfel ca

$$|a_{n_p} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru } p \geqslant N_2(\varepsilon).$$

Să notăm $N(\varepsilon) = \max (N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$. Fie $n > N(\varepsilon)$; să alegem p astfel ca $n_p > N(\varepsilon)$. Atunci $n, n_p \geqslant N_1(\varepsilon)$, deci

$$|a_n - a_{n_p}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi $n_p \geqslant N_2(\varepsilon)$, deci

$$|a_{n_p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aşadar

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_p}| + |a_{n_p} - a| < \varepsilon.$$

Cum n a fost ales arbitrar, rezultă că pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ avem:

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

adică şirul (a_n) este convergent către a.

Criteriul lui Cauchy. Un şir (a_n) este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental.

Să presupunem întîi că (a_n) este un şir convergent, şi fie a limita sa. Să arătăm atunci că (a_n) este şir fundamental.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $a_n \to a$, există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel ca pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, pentru orice $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ avem

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon,$$

adică (a_n) este şir fundamental.

Reciproc, să presupunem acum că (a_n) este şir fundamental şi să arătăm atunci că este convergent. Deoarece (a_n) este şir fundamental, este mărginit, deci, conform lemei lui Cesàro, conţine un subşir convergent. Conform lemei 2, şirul fundamental (a_n) este de asemenea convergent.

Observaţii. 1° Importanţa criteriului lui Cauchy constă în aceea că ne permite să precizăm dacă un şir este convergent, fără a-i cunoaşte limita.

2° Deoarece orice şir fundamental de numere reale este convergent, se spune că mulţimea numerelor reale este un *spaţiu complet*.

Mulţimea numerelor *raţionale* nu este un spaţiu complet, deoarece există şiruri fundamentale de numere *raţionale* care *nu* au limită *raţională* (adică nu sînt convergente în cadrul numerelor raţionale).

Vom construi prin recurenţă un şir fundamental (r_n) de numere raţionale care nu este convergent.

Plecăm de la numerele $a = 1$ şi $b = 2$. Avem

$$a^2 < 2 < b^2 \text{ şi } b - a = 1.$$

Considerăm apoi numerele

$$1, 1 + \frac{1}{10}, 1 + \frac{2}{10}, \ldots, 1 + \frac{9}{10}\ 2$$

şi pătratele lor

$$1^2, \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2, \left(1 + \frac{2}{10}\right)^2, \ldots, \left(1 + \frac{9}{10}\right)^2, 2^2.$$

Numărul 2 se află cuprins între două numere consecutive dintre acestea, anume

$$\left(1+\frac{4}{10}\right)^2<2<\left(1+\frac{5}{10}\right)^2.$$

Notăm $r_1=1+\frac{4}{10}$ şi $s_1=1+\frac{5}{10}$. Avem

$$r_1^2<2<s_1^2 \text{ şi } s_1-r_1=\frac{1}{10}.$$

Să presupunem că am găsit numerele raţionale r_n şi s_n astfel încît:

$$r_n^2\leqslant 2\leqslant s_n^2 \text{ şi } s_n-r_n=\frac{1}{10^n}$$

şi ne propunem să găsim două numere raţionale r_{n+1} şi s_{n+1} astfel încît:

$$r_{n+1}^2\leqslant 2\leqslant s_{n+1}^2 \quad \text{şi } s_{n+1}-r_{n+1}=\frac{1}{10^{n+1}}.$$

Pentru aceasta considerăm numerele

$$r_n,\ r_n+\frac{1}{10^{n+1}},\ r_n+\frac{2}{10^{n+1}},\ \ldots,\ r_n+\frac{9}{10^{n+1}},\ s_n$$

şi pătratele lor

$$r_n^2,\ \left(r_n+\frac{1}{10^{n+1}}\right)^2,\ \left(r_n+\frac{2}{10^{n+1}}\right)^2,\ \ldots,\ \left(r_n+\frac{9}{10^{n+1}}\right),\ s_n^2.$$

Deoarece 2 se află cuprins între r_n^2 şi s_n^2, există două numere consecutive $r_n+\frac{a}{10^{n+1}}$ şi $r_n+\frac{a+1}{10^{n+1}}$, $0\leqslant a\leqslant 9$ astfel ca $\left(r_n+\frac{a}{10^{n+1}}\right)^2\leqslant 2\leqslant\left(r_n+\frac{a+1}{10^{n+1}}\right)^2$.

Notînd $r_{n+1}=r_n+\frac{a}{10^{n+1}}$ şi $s_{n+1}=r_n+\frac{a+1}{10^{n+1}}$, avem $r_n\leqslant r_{n+1}<s_{n+1}\leqslant s_n$;

$r_{n+1}^2\leqslant 2\leqslant s_{n+1}^2$ şi $s_{n+1}-r_{n+1}=\frac{1}{10^{n+1}}$.

În acest fel, prin inducţie completă putem construi două şiruri (r_n) şi (s_n) de numere raţionale astfel încît:

$$r_1\leqslant r_2\leqslant\ldots\leqslant r_n\leqslant\ldots\leqslant s_n\leqslant\ldots\leqslant s_2\leqslant s_1;$$

$$r_n^2\leqslant 2\leqslant s_n^2 \text{ şi } s_n-r_n=\frac{1}{10^n}, \text{ pentru orice } n\in N.$$

Deoarece $s_n\leqslant 2$ şi $r_n\leqslant 2$ pentru orice $n\in N$, avem:

$$0\leqslant 2-r_n^2\leqslant s_n^2-r_n^2=(s_n+r_n)(s_n-r_n)\leqslant 4(s_n-r_n)=\frac{4}{10^n},$$

adică:

$$|r_n^2-2|\leqslant\frac{4}{10^n}.$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{10^n} = 0$, pe baza criteriului de convergenţă deducem că $r_n^2 \to 2$.

Şirul (r_n) *nu* este convergent (către un număr raţional).

Într-adevăr, dacă ar exista un număr *raţional* r astfel ca $r_n \to r$, atunci $r_n^2 \to r^2$; dar $r_n^2 \to 2$ şi cum limita unui şir este unică, avem $r^2 = 2$, ceea ce este absurd, deoarece nu există nici un număr raţional al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Pe de altă parte, şirul (r_n) este fundamental.

Într-adevăr,

$$|r_n - r_m| = \frac{|r_n^2 - r_m^2|}{r_n + r_m} \leqslant |r_n^2 - r_m^2|,$$

deoarece $r_n + r_m \geqslant 1$. Fie $\varepsilon > 0$; deoarece (r_n^2) este convergent, este fundamental, deci există un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca

$$|r_n^2 - r_m^2| < \varepsilon \text{ pentru } n, m \geqslant N(\varepsilon).$$

Atunci, de asemenea

$$|r_n - r_m| < \varepsilon \text{ pentru } n, m \geqslant N(\varepsilon),$$

adică (r_n) este şir fundamental.

§ 5. Şiruri monotone

1. Teorema de convergenţă a şirurilor monotone

S-a arătat mai înainte că orice şir convergent este mărginit. Există însă şiruri mărginite care nu sînt convergente.

Există de asemenea şiruri monotone care nu sînt convergente, de exemplu şirul numerelor naturale. Dacă însă un şir are ambele proprietăţi, atunci el este convergent. Pentru aceasta vom demonstra mai întîi următoarea

Lemă. Limita unui şir crescător şi convergent este mai mare decît toţi termenii şirului.

Fie (a_n) un şir crescător şi convergent şi fie a limita sa. Pentru orice n şi orice $m > n$ avem

$$a_n \leqslant a_m$$

de unde, luînd limita în partea dreaptă, obţinem

$$a_n \leqslant \lim_{m\to\infty} a_m,$$

adică

$$a_n \leqslant a$$

oricare ar fi $n \in N$.

În mod asemănător se arată că:

Limita unui şir descrescător şi convergent este mai mică decît toţi termenii şirului.

Teoremă. Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Fie (a_n) un şir monoton şi mărginit. Pentru a face o alegere să presupunem că este crescător. Vom da două demonstraţii pentru această teoremă.

Prima demonstraţie foloseşte direct lema lui Cesàro. Deoarece (a_n) este mărginit, conţine un subşir (a_{n_p})convergent către un număr a. Se arată prin reducere la absurd că $a_n \leqslant a$ pentru orice n. Deoarece $a_{n_p} \underset{p}{\to} a$, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există p' astfel încît $a - a_{n_{p'}} < \varepsilon$. Luînd $N(\varepsilon) = p'$, pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ avem $a_{N(\varepsilon)} \leqslant a_n \leqslant a$, deci $|a - a_n| < \varepsilon$ şi deci $a_n \to a$.

A doua demonstraţie foloseşte criteriul lui Cauchy. Vom arăta că (a_n) este şir Cauchy, de unde va rezulta că este convergent. Să observăm mai întîi că deoarece (a_n) este şir crescător, dacă $n > m$, avem $a_n \geqslant a_m$, deci $a_n - a_m \geqslant 0$ şi deci $|a_n - a_m| = a_n - a_m$.

Deoarece (a_n) este mărginit, există un număr $M > 0$ astfel încît să avem $|a_n| \leqslant M$ pentru orice n.

Să presupunem, prin absurd, că (a_n) nu este şir Cauchy. Aceasta înseamnă (negînd propoziţia 2 de la nr. 1) că există un număr $\varepsilon_0 > 0$, cu proprietatea că *oricare ar fi* N, există un număr $n > N$ (n depinde de N) cu $|a_n - a_N| > \varepsilon_0$, adică $a_n - a_N > \varepsilon_0$.

Fie p un număr natural astfel încît să avem $p\varepsilon_0 > 2M$ (axioma lui Arhimede). Deoarece N este arbitrar, să-i dăm diferite valori:

Pentru $N = 1$, există $n_1 > 1$ cu $a_{n_1} - a_1 > \varepsilon_0$

Pentru $N = n_1$, există $n_2 > n_1$ cu $a_{n_2} - a_{n_1} > \varepsilon_0$

.....

Pentru $N = n_{p-1}$ există $n_p > n_{p-1}$ cu $a_{n_p} - a_{n_{p-1}} > \varepsilon_0$.

Adunînd aceste p inegalităţi, membru cu membru şi reducînd termenii asemenea, deducem

$$a_{n_p} - a_1 > p\varepsilon_0.$$

Dar

$$a_{n_p} - a_1 = |a_{n_p} - a_1| \leqslant |a_{n_p}| + |a_1| \leqslant 2M,$$

deci $2M > p\varepsilon_0$, ceea ce contrazice inegalitatea $p\varepsilon_0 > 2M$, prin care a fost ales p. Aşadar, afirmaţia că (a_n) n-ar fi şir Cauchy este falsă. Urmează atunci că (a_n) este şir Cauchy, deci este convergent.

Propoziţia 1. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri de numere reale care verifică următoarele două condiţii:

1° $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$,

atunci şirurile (a_n) şi (b_n) sînt convergente şi au aceeaşi limită

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Şirul (a_n) este crescător şi mărginit $(a_1 \leqslant a_n \leqslant b_2)$, deci este convergent; fie c limita sa:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

Atunci

$$b_n = (b_n - a_n) + a_n$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + c = c.$$

Avem:

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n \text{ pentru orice } n \in N.$$

Observaţie. Numărul c este singurul număr care verifică inegalităţile $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ pentru orice $n \in N$.

Într-adevăr, dacă $a_n \leqslant c' \leqslant b_n$ pentru orice n, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant c' \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n \text{ adică, } c \leqslant c' \leqslant c,$$

de unde $c' = c$.

Propoziţia 2. Pentru orice număr real x există două şiruri (r_n) şi (s_n) de numere raţionale, cu următoarele proprietăţi:

1° $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n \ldots \leqslant x \leqslant s_n \leqslant \ldots \leqslant s_2 \leqslant s_1$;

2° $\lim_{n\to\infty} r_n = x = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Într-adevăr, pentru fiecare număr natural n există două numere raţionale α_n şi β_n astfel ca

$$x - \frac{1}{n} < \alpha_n < x < \beta_n < x + \frac{1}{n}.$$

Pentru fiecare n natural să notăm

$$r_n = \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \; s_n = \min(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Numerele r_n şi s_n sînt raţionale şi avem

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots r_n \leqslant \ldots x \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant \ldots \leqslant s_2 \leqslant s_1$$

$$\text{şi } x - \frac{1}{n} \leqslant r_n \leqslant x \leqslant s_n \leqslant x + \frac{1}{n}.$$

Atunci

$$|x - r_n| \leqslant \frac{1}{n}, \quad |x - s_n| \leqslant \frac{1}{n}$$

şi deci, în baza criteriului de convergenţă,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x \text{ şi } \lim_{n\to\infty} s_n = x.$$

2. Numărul e

Fie şirul

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots$$

Vom arăta că acest şir este crescător şi mărginit, de unde va rezulta că este convergent. Pentru aceasta, pentru fiecare $n \in N$ să notăm

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

şi să dezvoltăm membrul drept după formula binomului lui Newton:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)\ (n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} +$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Se observă că

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\ldots\frac{n-k+1}{n}}{1\cdot 2\ldots k} =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

astfel încît

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Efectuînd operaţia de scădere în fiecare paranteză, se obţine un număr > 0, deoarece $k-1 < n$ şi deci $\frac{k-1}{n} < 1$.

Aşadar, membrul drept este o sumă cu termeni strict pozitiv, şi deci această sumă, adică a_n, este mai mare decît suma primilor doi termeni $1+1=2$; deci

$$2 < a_n.$$

Pe de altă parte, în fiecare paranteză numărul obţinut este mai mic decît 1, deci

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2 \ldots n}.$$

Dacă în fiecare fracţie se înlocuiesc cu 2 factorii de la numitor mai mari sau egali cu 2, numitorii fracţiilor se micşorează, deci ele se măresc. Aşadar:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

Aşadar, $2 < a_n < 3$ oricare ar fi $n \in N$, adică şirul (a_n) este *mărginit*.

Să arătăm acum că este crescător. Dezvoltînd termenul a_{n+1} după binomul lui Newton, obţinem

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2 \ldots k}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{1\cdot 2 \ldots n(n+1)}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Avem:

$$\frac{i}{n} > \frac{i}{n+1}, \text{ deci } -\frac{i}{n} < -\frac{i}{n+1}, \text{ de unde:}$$

$$1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}.$$

Aşadar, numărul din fiecare paranteză din dezvoltarea lui a_n este *mai mic* decît numărul din paranteza corespunzătoare din dezvoltarea lui a_{n+1}. Deci fiecare termen al sumei care dă pe a_n este mai mic decît termenul corespunzător al sumei care dă pe a_{n+1}. Deoarece a_{n+1} are în dezvoltarea sa un termen pozitiv (ultimul) în plus faţă de dezvoltarea lui a_n, rezultă cu atît mai mult că $a_n < a_{n+1}$ pentru fiecare $n \in N$, deci şirul (a_n) este *crescător*.

Fiind crescător şi mărginit, şirul (a_n) este convergent. Limita sa se notează cu litera e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

deoarece $2 < a_n < 3$ pentru orice $n \in N$, deducem că $2 \leqslant e \leqslant 3$.

§ 6. Proprietăţi suplimentare ale şirurilor convergente

1. Schimbarea ordinii termenilor unui şir convergent

Propoziţia 1. Dacă $a_n \to a$ şi $a_n < a$ pentru orice $n \in N$, se poate schimba ordinea termenilor astfel încît să obţinem un şir crescător (convergent către a).

În afara vecinătăţii $V_1 = (a-1, a+1)$ a lui a, se află un număr *finit* de termeni (eventual nici unul) şi anume la stînga lui $a-1$. Să-i scriem în ordinea crescătoare

$$b_1, b_2, \ldots, b_{n_1}.$$

Dacă mai mulţi termeni au aceeaşi valoare numerică, îi scriem unul după altul într-o ordine oarecare, de exemplu în ordinea în care apar în şirul iniţial.

În afara vecinătăţii $V_2 = \left(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}\right)$ se află un număr finit de termeni ai şirului şi anume la stînga lui $a-\frac{1}{2}$. Printre aceştia se află şi cei deja scrişi în ordine crescătoare. Termenii nescrişi să-i aşezăm după b_{n_1} tot în ordine crescătoare.

$$b_1, b_2, \ldots, b_{n_1}, b_{n_1+1}, \ldots, b_{n_2}.$$

Să presupunem că am aşezat în ordine crescătoare toţi termenii din afara vecinătăţii $V_p = \left(a-\frac{1}{p}, a+\frac{1}{p}\right)$

$$b_1, \ldots, b_{n_1}, \ldots, b_{n_p}.$$

În afara vecinătăţii $V_{p+1} = \left(a-\frac{1}{p+1}, a+\frac{1}{p+1}\right)$ şi anume la stînga ei se află un număr finit de termeni ai şirului, diferiţi de cei deja aşezaţi în ordine crescătoare; să-i scriem şi pe aceştia după b_{n_p} în ordine crescătoare

$$b_1, \ldots, b_{n_1}, \ldots, b_{n_p}, b_{n_p+1}, \ldots.$$

Am demonstrat deci, prin inducţie completă, că putem forma un şir crescător cu termeni ai şirului (a_n). Acest şir este crescător şi conţine toţi termenii şirului (a_n), deci se obţine din (a_n) prin schimbarea ordinii termenilor.

Într-adevăr, fie a_{n_0} un termen oarecare al şirului (a_n).

Deoarece $a_{n_0} < a$, și deoarece $\lim_{p\to\infty}\left(a-\frac{1}{p}\right) = a$, există un număr natural p_0 astfel că

$$a_{n_0} < a - \frac{1}{p_0} < a.$$

Deci a_{n_0} se află în afara vecinătății $V_{p_0} = \left(a-\frac{1}{p_0},\ a+\frac{1}{p_0}\right)$ și deci la operația de ordin p_0, termenul a_{n_0} va apărea în șirul crescător.

Propoziția 2. Dacă $a_n \to a$ și $a < a_n$ pentru orice $n\in N$, se poate schimba ordinea termenilor astfel încît să obținem un șir descrescător (convergent către a).

Avem $-a_n \to -a$ și $-a_n < -a$; putem deci schimba ordinea termenilor șirului $(-a_n)$ ca să obținem un șir crescător $(-b_n)$. Atunci șirul (b_n) este descrescător, și se poate obține prin schimbarea ordinii termenilor șirului (a_n).

Propoziția 3. Dacă $a_n \to a$ și $a_n \neq a$ pentru orice $n\in N$ și dacă există o infinitate de termeni la stînga lui a și o infinitate de termeni la dreapta lui a, atunci se pot forma cu termenii șirului două șiruri (b_n) și (c_n), primul crescător, al doilea descrescător, ambele convergente către a.

Într-adevăr, fie (a'_n) subșirul lui (a_n) format cu toți termenii de la stînga lui a, $a'_n < a$, și (a''_n) subșirul format cu toți termenii de la dreapta lui a, $a < a''_n$. Deoarece $a_n \to a$, avem $a'_n \to a$ și $a''_n \to a$.

Prin schimbarea convenabilă a termenilor șirului (a'_n) putem obține un șir crescător $b_n \to a$, și, de asemenea, prin schimbarea ordinii termenilor șirului (a''_n) putem obține un șir descrescător $c_n \to a$.

Propoziția 4. Dacă (a_n) și (b_n) sînt două șiruri convergente și au aceeași limită c, orice șir obținut cu termenii celor două șiruri, într-o ordine oarecare, este convergent și are limita c.

Într-adevăr, în afara fiecărei vecinătăți a lui c se află un număr finit de termeni ai șirului (a_n) și un număr finit de termeni ai șirului (b_n), deci de asemenea un număr finit ai oricărui șir (c_n) obținut cu termenii celor două șiruri. Rezultă că șirul (c_n) are de asemenea limita a.

2. Puncte de acumulare ale unei mulțimi

Propoziție. Un număr a este punct de acumulare al unei mulțimi A, dacă și numai dacă există un șir a_n convergent către a, format din puncte din A diferite de a. ($a_n \in A$, $a_n \neq a$, $a_n \to a$).

Dacă $a_n \in A$, $a_n \neq a$ şi $a_n \to a$, atunci în orice vecinătate a lui a se află termeni a_n din şir, deci în orice vecinătate a lui se află puncte a_n din A diferite de a. Rezultă că a este punct de acumulare al mulţimii A.

Reciproc, să presupunem că a este punct de acumulare al mulţimii A. În vecinătatea $V_1 = (a - 1, a + 1)$ se află o infinitate de puncte din A, diferite de a; fie a_1 unul dintre acestea. Avem

$$a_1 \in A,\ a_1 \neq a \text{ şi } |a_1 - a| < 1.$$

Să presupunem că am găsit un punct $a_n \in A$, $a_n \neq a$, şi $|a_n - a| < \frac{1}{n}$. În vecinătatea $V_{n+1} = \left(a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}\right)$ se află o infinitate de puncte din A, diferite de a. Fie a_{n+1} unul dintre acestea, pe care-l putem alege *diferit* de a_n. Avem

$$a_{n+1} \in A,\ a_{n+1} \neq a \text{ şi } |a_{n+1} - a| < \frac{1}{n+1}.$$

Am demonstrat prin inducţie completă că putem alege un şir (a_n) de puncte din A, diferite de a (şi diferite între ele) astfel ca

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} \text{ pentru fiecare } n \in N.$$

Pe baza criteriului de convergenţă deducem că $a_n \to a$.

Corolarul 1. Un număr a este punct aderent al mulţimii A, dacă şi numai dacă există un şir (a_n) de puncte din A, convergent către a.

Într-adevăr, dacă $a \in A$, atunci luăm $a_n = a$ pentru orice n. Dacă $a \notin A$, atunci a este punct de acumulare al lui A şi se aplică propoziţia precedentă.

Corolarul 2. O mulţime A este închisă, dacă şi numai dacă, oricare ar fi şirul convergent de puncte (distincte sau nu) din A, limita şirului aparţine de asemenea lui A.

Să presupunem întîi că A este închisă şi fie (a_n) un şir de puncte din A, convergent către un număr a. Conform corolarului 1, a este punct aderent al lui A, şi deoarece A este închisă, îşi conţine punctele aderente, deci $a \in A$.

Reciproc, să presupunem că oricare ar fi şirul convergent de puncte din A, limita sa aparţine de asemenea lui A. Deoarece orice punct aderent $a \in \bar{A}$ este limita unui şir de puncte (a_n) din A, urmează că $a \in A$, deci A este închisă şi propoziţia este demonstrată.

§ 7. Puteri şi logaritmi

1. Radicali

Să considerăm ecuaţia

$$x^n = a \qquad (a \geqslant 0, \text{ real, } n \text{ natural}).$$

Este uşor de văzut că dacă această ecuaţie are o *soluţie pozitivă*, ea are *numai una*, adică dacă $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ şi $x_1^n = x_2^n = a$, atunci $x_1 = x_2$. În adevăr, dacă x_1 şi x_2 ar fi două soluţii pozitive, diferite, ale acestei ecuaţii, atunci, de exemplu, $x_1 < x_2$, deci $x_1^n = x_2^n$. Dar $x_1^n = a$ şi $x_2^n = a$, deci $x_1^n = x_2^n$ şi am ajuns la o contradicţie.

Vom arăta acum că această ecuaţie are efectiv o soluţie pozitivă:

Există un număr natural $m > a$; deoarece $n \geqslant 1$, avem: $m^n \geqslant m^1 = m$, deci $m^n > a$. Numărul a se află deci cuprins între două numere consecutive din următoarele numere

$$0^n < 1^n < 2^n < \ldots < m^n.$$

Fie $k \geqslant 0$ numărul întreg astfel încît

$$k^n \leqslant a < (k+1)^n.$$

Avem apoi $k < k + \frac{1}{2} < k + 1$, deci $k^n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^n < (k+1)^n$. Numărul a se află cuprins fie între k^n şi $\left(k + \frac{1}{2}\right)^n$, fie între $\left(k + \frac{1}{2}\right)^n$ şi $(k+1)^n$. Să notăm cu x_1 şi y_1 numerele consecutive dintre numerele k, $k + \frac{1}{2}$, $k + 1$, pentru care avem

$$x_1^n \leqslant a < y_1^n.$$

Avem $y_1 - x_1 = \frac{1}{2}$ şi $x_1 \geqslant 0$.

Să presupunem că am găsit două numere x_p şi y_p astfel ca:

$$x_p^n \leqslant a < y_p^n \text{ şi } y_p - x_p = \frac{1}{2^p}.$$

Să considerăm numerele $x_p < x_p + \frac{1}{2^{p+1}} < y_p$; avem: $x_p^n < \left(x_p + \frac{1}{2^{p+1}}\right)^n < y_p^n$. Numărul a este cuprins între x_p^n şi y_p^n, deci este cuprins între două puteri consecutive din cele trei puteri x_p^n, $\left(x_p + \frac{1}{2^{p+1}}\right)^n$, y_p^n. Să notăm cu x_{p+1} şi y_{p+1} două numere consecutive dintre numerele x_p, $x_p + \frac{1}{2^{p+1}}$, y_p, pentru care avem

$$x_{p+1}^n \leqslant a < y_{p+1}^n.$$

Avem de asemenea $x_p \leqslant x_{p+1} < y_{p+1} \leqslant y_p$ şi $y_{p+1} - x_{p+1} = \frac{1}{2^{p+1}}$.

Prin inducţie completă putem deci construi două şiruri de numere raţionale (x_p) şi (y_p) cu proprietăţile următoare:

1) $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_p \leqslant \ldots \leqslant y_p \leqslant \ldots \leqslant y_2 \leqslant y_1$.

2) $y_p - x_p = \frac{1}{2^p}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$

3) $x_p^n \leqslant a < y_p^n$, $p = 1, 2, 3, \ldots$

Din proprietăţile 1) şi 2) deducem că cele două şiruri au o limită comună x_0:

$$\lim_{p\to\infty} x_p = x_0 = \lim_{p\to\infty} y_p$$

şi $0 \leqslant x_1 \leqslant x_0$.

Atunci:

$$\lim_{p\to\infty} x_p^n = x_0^n = \lim_{p\to\infty} y_p^n.$$

Dar din proprietatea 3 deducem că

$$\lim_{p\to\infty} x_p^n \leqslant a \leqslant \lim_{p\to\infty} y_p^n,$$

adică: $x_0^n \leqslant a \leqslant x_0^n$ şi deci $x_0^n = a$, adică x_0 este o soluţie *pozitivă* a ecuaţiei $x^n = a$.

Soluţia *pozitivă unică* a ecuaţiei $x^n = a$ se notează cu $\sqrt[n]{a}$ şi se numeşte *rădăcina de ordinul n a lui a* (sau radicalul de ordin n al lui a).

2. Proprietăţile radicalilor

Deoarece $\sqrt[n]{a}$ este soluţia pozitivă a ecuaţiei $x^n = a$, avem $(\sqrt[n]{a})^n = a$ şi $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$, oricare ar fi $a \geqslant 0$ şi $n \in N$.

Avem $\sqrt[n]{0} = 0$ şi $\sqrt[n]{1} = 1$, oricare ar fi $n \in N$.

Într-adevăr, 0 este soluţia pozitivă (unică) a ecuaţiei $x^n = 0$, iar 1 este soluţia pozitivă unică a ecuaţiei $x^n = 1$. De asemenea, $\sqrt[n]{a} = a$, oricare ar fi $a \geqslant 0$.

Proprietăţile radicalilor sînt următoarele ($a \geqslant 0$):

1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $(n \in N)$.

2) $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$, $(n \in N,\ k \in Z)$.

3) $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$, $(n, m \in N, k \in Z)$.

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, $(n, m \in N)$.

5) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $(n \in N)$.

6) Dacă $a > 1$, $\sqrt[n]{a} > 1$; dacă $0 < a < 1$, $\sqrt[n]{a} < 1$, $(n \in N)$.

Pentru demonstrarea proprietăţilor 2)— 5) se notează cu u şi v cei doi membri ai egalităţilor şi se arată că, pentru un anumit exponent, puterile numerelor *pozitive* u şi v sînt egale, deci $u = v$.

Pentru exemplificare să demonstrăm proprietatea 2):

Să notăm $u = \sqrt[n]{a^k}$ şi $v = (\sqrt[n]{a})^k$. Avem

$$u^n = (\sqrt[n]{a^k})^n = a^k \text{ şi } v^n = (\sqrt[n]{a})^{kn} = [(\sqrt[n]{a})^n]^k = a^k,$$

deci $u^n = v^n$, de unde $u = v$, adică $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$.

Pentru demonstrarea proprietăţii 6) raţionăm prin reducere la absurd. Să presupunem că $a > 1$ şi $\sqrt[n]{a} \leqslant 1$. Ridicînd ambii membri ai ultimei inegalităţi la puterea n obţinem $(\sqrt[n]{a})^n \leqslant 1^n$, adică $a \leqslant 1$, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza $a > 1$.

La fel se arată că dacă $0 < a < 1$, atunci $\sqrt[n]{a} < 1$.

Observaţii. Am presupus, mai sus, $a \geqslant 0$. Ce se întîmplă în cazul cînd $a < 0$?

1° Dacă $a < 0$, ecuaţia $x^{2n} = a$ nu are nici o soluţie reală, deoarece $x^{2n} \geqslant 0$ oricare ar fi $x \in R$. Radicalii de ordin par ai numerelor strict negative nu au sens (în cadrul numerelor reale).

2° Dacă $a < 0$, ecuaţia $x^{2n-1} = a$ are o soluţie *negativă unică*. Într-adevăr notînd $b = -a$ avem $b > 0$, deci ecuaţia $x^{2n-1} = b$ are soluţie *pozitivă* unică, $x_0 = \sqrt[2n-1]{b}$. Atunci $(-x_0)^{2n-1} = -(\sqrt[2n-1]{b})^{2n-1} = -(\sqrt[2n-1]{b})^{2n-1} = -b = a$, adică $-x_0 = -\sqrt[2n-1]{-a}$ este o soluţie *negativă* a ecuaţiei $x^{2n-1} = a$.

Soluţia *negativă* unică a ecuaţiei $x^{2n-1} = a$, $a < 0$, se notează şi în acest caz cu $\sqrt[2n-1]{a}$:

$$\sqrt[2n-1]{a} = -\sqrt[2n-1]{-a}.$$

De exemplu, ecuaţia $x^3 = -27$ are soluţia $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$.

Radicalii numerelor strict negative nu mai posedă toate proprietăţile radicalilor numerelor pozitive. Proprietatea 3) nu mai este verificată pentru *orice* număr întreg k.

De exemplu, $\sqrt[3]{-27} = -3$, dar $\sqrt[3\cdot 2]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729} = 3$.

De asemenea, proprietatea 2) nu mai are loc dacă $a < 0$ şi n este par, chiar dacă şi k este par, deoarece membrul drept al egalităţii nu are sens în aceste condiţii.

Proprietăţile 2) şi 3) sînt esenţiale pentru definirea puterilor cu exponent raţional.

3. Puteri raţionale

Fie $a > 0$ un număr real şi r un număr raţional. Pentru definirea puterii a^r vom folosi faptul că r poate fi scris ca fracţie $\frac{m}{n}$, şi vom defini puterea $a^{\frac{m}{n}}$. Deoarece, însă, numărul r poate fi scris în mai multe moduri

ca fracţie, pentru puterea a^r trebuie să alegem o definiţie care să fie independentă de alegerea particulară a fracţiei care-l reprezintă pe r.

Fie $\frac{m}{n}$ o fracţie cu *numitorul natural*, care reprezintă numărul raţional r:

$$r = \frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot m.$$

Din proprietăţile radicalilor deducem:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Să notăm

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Fie $\frac{m'}{n'}$ fracţia ireductibilă cu *numitorul natural* care reprezintă pe r:

$$r = \frac{m'}{n'} = m' \cdot \frac{1}{n'} = \frac{1}{n'} \cdot m'.$$

Avem:

$$a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}} = (\sqrt[n']{a})^{m'}.$$

Deoarece însă fracţia $\frac{m'}{n'}$ este ireductibilă, există un număr natural k astfel ca $m = km'$ şi $n = kn'$.

Atunci:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn']{a^{km'}} = \sqrt[n']{a^{m'}},$$

adică

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}.$$

Definim puterea a^r cu exponentul raţional r astfel:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m,$$

unde $r = \frac{m}{n}$, iar n este *natural*. Din cele de mai sus rezultă că definiţia puterii a^r este independentă de alegerea fracţiei $\frac{m}{n}$ care reprezintă pe r.

Dacă $r \geqslant 0$, atunci putem scrie $r = \frac{m}{n}$, unde m şi n sînt numere naturale. În acest caz $\sqrt[n]{0^m} = (\sqrt[n]{0})^m = 0$; putem deci pune prin definiţie $0^r = 0$. Dacă însă $r \leqslant 0$, şi dacă $r = \frac{m}{n}$ cu n natural, atunci $m \leqslant 0$ şi

puterea 0^m nu mai este definită; în acest caz nu mai putem scrie $\sqrt[n]{0^m}$ sau $(\sqrt[n]{0})^m$, şi deci puterea 0^r cu $r \leqslant 0$ nu mai are sens.

Reţinem că puterea 0^r are sens numai pentru $r>0$. Avem $1^r = 1$ oricare ar fi r raţional.

Puterile cu exponent raţional se numesc *puteri raţionale*.

4. Proprietăţile puterilor raţionale

Proprietăţile puterilor raţionale sînt următoarele (ori de cîte ori exponentul este $\leqslant 0$ se va presupune baza >0):

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; $\quad \dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

2) $(a^r)^s = a^{rs}$.

3) $(ab)^r = a^r b^r$; $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$.

4) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$.

5) Dacă $a>1$ şi $r>0$, atunci $a^r>1$.

Aceste proprietăţi se demonstrează folosind definiţia puterilor raţionale şi proprietăţile corespunzătoare ale radicalilor şi ale puterilor întregi. Pentru exemplificare să demonstrăm proprietatea 1). Să scriem numerele r şi s ca fracţie cu *acelaşi* numitor natural: $r = \dfrac{p}{n}$, $s = \dfrac{q}{n}$. Avem:

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{p}{n}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^p a^q} = \sqrt[n]{a^{p+q}} = a^{\frac{p+q}{n}} = a^{r+s}.$$

Din aceste proprietăţi mai rezultă următoarele proprietăţi:

6) Dacă $0<a<1$ şi $r>0$, atunci $a^r<1$.

7) Dacă $r<0$, atunci $a^r<1$ pentru $a>1$,
$a^r>1$ pentru $0<a<1$.

8) Dacă $r<s$, atunci: $a^r<a^s$ pentru $a>1$,
$a^r>a^s$ pentru $0<a<1$.

(Dacă baza este >1, inegalitatea dintre exponenţi se păstrează şi pentru puteri; dacă baza este <1, inegalitatea dintre exponenţi se inversează pentru puteri.)

9) Dacă $0<a<b$, atunci: $a^r < b^r$ pentru $r>0$,
$a^r > b^r$ pentru $r<0$.

(Dacă exponentul este >0, inegalitatea dintre baze se păstrează şi pentru puteri; dacă exponentul este <0, inegalitatea dintre baze se inversează pentru puteri.)

Demonstraţia acestor proprietăţi se face ca şi pentru puterile întregi.

5. Şiruri de puteri raţionale

Pentru a putea defini puterile cu exponent real oarecare, trebuie mai întîi să studiem şirurile de puteri raţionale.

Lema 1. Dacă $a > 1$, **atunci** $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Deoarece $a > 1$ şi

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$$

avem:

$$a > a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}} > \ldots > a^{\frac{1}{n}} > \ldots$$

Şirul $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$ este descrescător şi mărginit $\left(1 < a^{\frac{1}{n}} < a\right)$. El este deci convergent. Să arătăm că limita sa este 1. Să presupunem prin absurd că 1 nu este limita şirului $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$. Aceasta înseamnă că există un număr $\varepsilon_0 > 0$, cu proprietatea că pentru orice număr N există un număr $n > N$ astfel ca $\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| > \varepsilon_0$, sau, $\left(\text{deoarece } a^{\frac{1}{n}} > 1\right)$, astfel ca $a^{\frac{1}{n}} - 1 > \varepsilon_0$, sau $a^{\frac{1}{n}} > 1 + \varepsilon_0$, sau încă $a > (1 + \varepsilon_0)^n$; atunci, în baza inegalităţii $(1 + \varepsilon_0)^n \geqslant 1 + n\varepsilon_0$ a lui Bernoulli, avem cu atît mai mult $a \geqslant 1 + n\varepsilon_0$. Deoarece $\varepsilon_0 > 0$, *există* însă un număr N astfel ca $a < N\varepsilon_0 < 1 + N\varepsilon_0$, şi deci pentru *orice* $n > N$ avem de asemenea $a < 1 + n\varepsilon_0$. Am ajuns astfel la o contradicţie.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Lema 2. Dacă $a > 1$, **atunci** $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$.

Într-adevăr, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Observaţie. Şirul $\left(a^{-\frac{1}{n}}\right)$ este *crescător* şi $a^{-\frac{1}{n}} < 1$ pentru orice $n \in N$.

Lema 3. Dacă $a > 1$ **şi** (r_n) **este un şir de numere raţionale convergent către** 0, **atunci** $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ şi $a^{-\frac{1}{n}} \to 1$, există un număr natural p astfel ca (fig. 45)

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{p}} < 1 < a^{\frac{1}{p}} < 1 + \varepsilon.$$

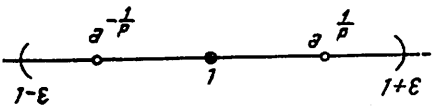


Fig. 45

Să notăm $\varepsilon' = \frac{1}{p}$ (p depinde de ε, deci ε' depinde de ε).

Deoarece $r_n \to 0$, există un număr natural $N(\varepsilon) = N(\varepsilon')$ astfel ca $|r_n| < \varepsilon'$ sau $|r_n| < \frac{1}{p}$, adică

$$-\frac{1}{p} < r_n < \frac{1}{p}, \text{ dacă } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Deoarece $a > 1$, avem:

$$a^{-\frac{1}{p}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{p}} \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon)$$

şi deci:

$$1 - \varepsilon < a^{r_n} < 1 + \varepsilon, \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon),$$

adică:

$$|a^{r_n} - 1| < \varepsilon \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon).$$

Aceasta înseamnă că $a^{r_n} \to 1$.

Lema 4. Dacă $a > 0$ şi (r_n) este un şir de numere raţionale convergent către 0, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$.

Pentru $a > 1$, proprietatea este enunţată în lema 3.

Pentru $a = 1$, avem $a^{r_n} = 1$, pentru orice n, deci $a^{r_n} \to 1$. Să presupunem $0 < a < 1$. Atunci $\frac{1}{a} > 1$, deci, în baza lemei 3, $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} \to 1$.

Atunci: $a = \frac{1}{\frac{1}{a}}$, deci $a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$ şi deci $a^{r_n} \to 1$.

Propoziţia 1. Dacă $a > 0$, şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, unde r_n şi r sînt numere raţionale, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r = a^{\lim\limits_{n\to\infty} r_n}.$$

Într-adevăr, $r_n - r \to 0$, deci $a^{r_n - r} \to 1$.
Atunci

$$a^{r_n} = a^{r_n - r + r} = a^{r_n - r}\, a^r,$$

deci $a^{r_n} \to 1 \cdot a^r$.

Observaţie. Dacă $a = 0$ şi $r_n > 0$, $r > 0$, atunci $a^{r_n} = 0$, $a^r = 0$, deci $a^{r_n} \to a^r$. Propoziţia 1 rămîne deci adevărată şi în cazul cînd baza este 0, dacă exponenţii sînt strict pozitivi.

Propoziţia 2. Dacă $a > 0$ şi (r_n) este un şir convergent de numere raţionale, atunci şirul (a^{r_n}) este de asemenea convergent.

Vom face demonstraţia pentru $a > 1$. Şirul (r_n) este mărginit (fiind convergent). Există deci un număr $M > 0$ astfel ca $-M \leqslant r_n \leqslant M$ pentru orice $n \in N$. Atunci $a^{r_n} \leqslant a^M$ pentru orice $n \in N$. Să punem $A = a^M > 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece: $a^{\frac{1}{n}} \to 0$ şi $a^{-\frac{1}{n}} \to 0$, există un număr natural p astfel ca:

$$1 - \frac{\varepsilon}{A} < a^{-\frac{1}{p}} < 1 < a^{\frac{1}{p}} < 1 + \frac{\varepsilon}{A}.$$

Să punem $\varepsilon' = \frac{1}{p}$ (p depinde de ε, deci ε' depinde de ε). Deoarece (r_n) este şir Cauchy (fiind convergent), există un număr $N(\varepsilon) = N(\varepsilon')$ astfel ca dacă $m, n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $-\varepsilon' < r_m - r_n < \varepsilon'$, adică:

$$-\frac{1}{p} < r_m - r_n < \frac{1}{p}.$$

Atunci $\qquad a^{-\frac{1}{p}} < a^{r_m - r_n} < a^{\frac{1}{p}} \qquad n, m \geqslant N(\varepsilon),$

deci:

$$1 - \frac{\varepsilon}{A} < a^{r_m - r_n} < 1 + \frac{\varepsilon}{A} \qquad n, m \geqslant N(\varepsilon),$$

adică:

$$-\frac{\varepsilon}{A} < a^{r_m - r_n} - 1 < \frac{\varepsilon}{A}$$

sau

$$|a^{r_m - r_n} - 1| < \frac{\varepsilon}{A} \qquad n, m \geqslant N(\varepsilon).$$

Atunci:

$$|a^{r_m} - a^{r_n}| = |a^{r_n}(a^{r_m - r_n} - 1)| = a^{r_n} |a^{r_m - r_n} - 1| \leqslant$$
$$\leqslant a^M |a^{r_m - r_n} - 1| = A\, |a^{r_m - r_n} - 1|$$

şi deci dacă $m, n \geqslant N(\varepsilon)$, avem

$$|a^{r_m} - a^{r_n}| \leqslant A\,|a^{r_m - r_n} - 1| < A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon,$$

adică (a^{r_n}) este şir fundamental. În baza criteriului lui Cauchy rezultă că (a^{r_n}) este convergent.

Dacă $a = 1$, avem $1^{r_n} = 1$, deci (1^{r_n}) este şir convergent.

Dacă $0 < a < 1$, raţionamentul se face ca mai sus, ţinînd seama de faptul că inegalitatea dintre exponenţi se inversează pentru puteri, şi deoarece $a^{r_n} \leqslant a^{-M}$, se ia $A = a^{-M}$.

Propoziţia 3. Dacă $a > 0$, şi dacă (r_n) şi (s_n) sînt şiruri de numere raţionale, convergente către aceeaşi limită, atunci (a^{r_n}) şi (a^{s_n}) sînt de asemenea convergente către aceeaşi limită.

Într-adevăr, deoarece (r_n) şi (s_n) au aceeaşi limită avem: $r_n - s_n \to 0$, deci: $a^{r_n - s_n} \to 1$, adică

$$a^{r_n - s_n} - 1 \to 0.$$

Şirul (a^{s_n}) este convergent, deci este mărginit, şi deci:

$$a^{s_n}(a^{r_n - s_n} - 1) \to 0.$$

Atunci $a^{r_n} = (a^{r_n} - a^{s_n}) + a^{s_n}$ şi $a^{r_n} - a^{s_n} = a^{s_n}(a^{r_n - r_n} - 1) \to 0$. deci:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}.$$

6. Puteri reale

Fie $a > 0$. Vom defini acum puterea a^x cu exponentul x real.

Fie $x \in R$ şi (r_n) un şir de numere *raţionale* convergent către x. Şirul (a^{r_n}) este convergent către un număr α:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \alpha.$$

Dacă (s_n) este alt şir de numere *raţionale* convergent către x, şirurile (a^{r_n}) şi (a^{s_n}) au aceeaşi limită α:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \alpha.$$

Aşadar, limita α nu depinde de şirul particular de numere raţionale convergent către x, ci numai de x. Prin definiţie, puterea a^x se defineşte prin

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}, \ (\lim_{n\to\infty} r_n = x, \ r_n \in Q).$$

Puterile cu exponent real oarecare se numesc *puteri reale.*

O b s e r v a ţ i i. 1° Dacă $a = 0$ şi $x > 0$, urmînd procedeul de mai sus se defineşte $0^x = 0$. În adevăr, orice şir de numere raţionale (r_n) convergent către x are termenii strict pozitivi, $r_n > 0$, cu excepţia unui număr finit dintre ei, pe care-i putem înlătura. Atunci

$$0^{r_n} = 0, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} 0^{r_n} = 0 \text{ şi deci } 0^x = \lim_{n\to\infty} 0^{r_n} = 0.$$

2° Dacă $x = r$ este raţional, puterea a^x definită aici considerînd pe x real coincide cu puterea raţională a^r definită anterior.

În adevăr, oricare ar fi şirul de numere raţionale (r_n) convergent către r, avem

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Pe de altă parte, conform definiţiei puterii a^x avem

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Limita unui şir fiind unică, deducem $a^x = a^r$.

În particular $a^0 = 1$, $(a > 0)$, $a^1 = a$, $(a \geqslant 0)$, unde 0 şi 1 sînt considerate numere reale.

7. Proprietăţile puterilor reale

Puterile reale au aceleaşi proprietăţi ca şi puterile raţionale (ori de cîte ori exponentul este $\leqslant 0$, se consideră baza > 0).

1) $a^x a^y = a^{x+y}$; $\quad \dfrac{a^x}{b^y} = a^{x-y}$.

2) $(a^x)^y = a^{xy}$.

3) $(ab)^x = a^x b^x$; $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

4) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

5) Dacă $a > 1$ şi $x > 0$, atunci $a^x > 1$.

6) Dacă $x_n \to x$, atunci $a^{x_n} \to a^x$, $\left(\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right)$.

7) Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, şi $a^{x_n} \to a^x$, atunci $x_n \to x$.

Să observăm întîi că dacă $a>0$, atunci $a^x>0$, oricare ar fi $x\in R$.

Într-adevăr, dacă $a>1$, alegem un şir *crescător* de numere raţionale $r_n \to x$. Atunci şirul (a^{r_n}) este de asemenea *crescător* şi $a^{r_n} \to a^x$, deci $a^{r_n} \leqslant a^x$ pentru orice n. Dar $a^{r_n} > 0$, deci $a^x > 0$. Dacă $0<a<1$, alegem un şir *descrescător* de numere raţionale $r_n \to x$. Atunci şirul (a^{r_n}) este *crescător*, şi ca mai sus deducem că $a^x > 0$.

În particular, dacă $a>1$ şi $x>0$, putem alege un şir *crescător* (r_n) de numere raţionale strict pozitive convergent către x, $r_n > 0$, $r_n \to x$. Atunci $a^{r_n} > 1$, şi deci $a^x > 1$, şi astfel proprietatea 5) este demonstrată. Să demonstrăm acum celelalte proprietăţi.

1) Fie $r_n \to x$ şi $s_n \to y$; atunci $r_n + s_n \to x + y$, deci

$$a^{x+y} = \lim_n a^{r_n+s_n} = \lim_n (a^{r_n}.a^{s_n}) = \lim_n a^{r_n}.\lim_n a^{s_n} = a^x.a^y.$$

3) Fie $r_n \to x$. Atunci

$$(ab)^x = \lim_{n\to\infty} (ab)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n}.b^{r_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.\lim_{n\to\infty} b^{r_n} = a^x.b^x.$$

Deoarece $b > 0$, avem $b^x > 0$; atunci

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{r_n}}{b^{r_n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n}} = \frac{a^x}{b^x}.$$

4) Fie $r_n \to x$. Avem $-r_n \to -x$ şi $a^{-r_n} = \dfrac{1}{a^{r_n}}$, deci

$$a^{-x} = \lim_n a^{-r_n} = \lim_n \frac{1}{a^{r_n}} = \frac{1}{\lim\limits_n a^{r_n}} = \frac{1}{a^x},$$

deoarece, pentru $a>0$, avem $a^x > 0$.

6) Fie $x_n \to x$. Pentru orice $n \in N$ avem

$$x_n - \frac{1}{n} < x_n < x_n + \frac{1}{n}.$$

Există numere *raţionale* r_n şi s_n astfel ca

$$x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n < s_n < x_n + \frac{1}{n}.$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = x + 0 = x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = x + 0 = x$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Deducem atunci că $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$.

Dacă $a > 1$, avem: $a^{x_n} < a^{r_n} < a^{s_n}$,

şi deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n} = a^x$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.

Dacă $a = 1$, evident $1^{x_n} = 1$, $1^x = 1$ şi $1^{x_n} \to 1^x$.

Dacă $0 < a < 1$, avem $a^{r_n} > a^{x_n} > a^{s_n}$, şi deducem iarăşi că

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x.$$

Dacă $a = 0$ şi $x > 0$, înlăturînd la nevoie un număr finit de termeni ai şirului x_n, putem presupune $x_n > 0$. În acest caz $a^{x_n} = 0$, $a^x = 0$ şi $0^{x_n} \to 0^x$.

7) Vom arăta mai întîi că dacă $a > 1$, şi $a^{y_n} \to 1$, atunci $y_n \to 0$.

Dacă, prin absurd, şirul (y_n) n-ar avea limita 0, ar exista o vecinătate $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ a lui 0, $\varepsilon_0 > 0$, în afara căreia se află o *infinitate* de termeni y_n, deci avem $y_n < -\varepsilon_0$ sau $\varepsilon_0 < y_n$ pentru o infinitate de indici. Pentru aceşti indici avem:

$$a^{y_n} < a^{-\varepsilon_0} < 1 \quad \text{sau} \quad 1 < a^{-\varepsilon_0} < a^{y_n},$$

adică a^{y_n} se află în afara vecinătăţii $(a^{-\varepsilon_0}, a^{\varepsilon_0})$ a lui 1, pentru o infinitate de indici, şi deci şirul a^{y_n} nu tinde către 1, ceea ce contrazice ipoteza.

Dacă $0 < a < 1$ şi $a^{y_n} \to 1$, atunci $y_n \to 0$.

Într-adevăr $\frac{1}{a} > 1$, şi $\left(\frac{1}{a}\right)^{y_n} = \frac{1}{a^{y_n}} \to 1$, deci $y_n \to 0$.

Dacă $a > 0$ şi $a \neq 1$, şi dacă $a^{x_n} \to a^x$, atunci $x_n \to x$. Într-adevăr, deoarece $a^{x_n} \to a^x$, avem:

$$\frac{a^{x_n}}{a^x} \to 1, \ (a^x > 0), \text{ adică } a^{x_n - x} \to 1, \text{ de unde } x_n - x \to 0 \text{ şi deci } x_n \to x.$$

O b s e r v a ţ i e. Pentru $a = 0$ sau $a = 1$, proprietatea 7) nu mai este adevărată, deoarece avem $0^{x_n} = 0$ şi $0^x = 0$, deci $0^{x_n} \to 0^x$, chiar dacă şirul (x_n) nu tinde către x. De asemenea, avem $1^{x_n} = 1$ şi $1^x = 1$, deci $1^{x_n} \to 1^x$ chiar dacă şirul (x_n) nu tinde către x.

2) Să demonstrăm acum proprietatea $(a^x)^y = a^{xy}$. Să presupunem întîi $a > 1$. şi $y = t$ *raţional* şi să arătăm că $(a^x)^t = a^{xt}$.

Fie (r_n) un şir *crescător* convergent către x şi (s_n) un şir *descrescător* convergent către x. Pentru fiecare $n \in N$ avem:

$$r_n \leqslant x \leqslant s_n,$$

deci:

$$a^{r_n} \leqslant a^x \leqslant a^{s_n}.$$

Dacă $t \geqslant 0$, avem

$$(a^{r_n})^t \leqslant (a^x)^t \leqslant (a^{s_n})^t$$

sau:

$$a^{r_n t} \leqslant (a^x)^t \leqslant a^{s_n t}$$

şi deoarece $r_n t \to xt$ şi $s_n t \to xt$, avem $a^{r_n t} \to a^{xt}$ şi $a^{s_n t} \to a^{xt}$ şi deci $(a^x)^t = a^{xt}$.

Dacă $t \leqslant 0$, avem

$$(a^{r_n})^t \geqslant (a^x)^t \geqslant (a^{s_n})^t$$

şi în acelaşi mod se deduce că $(a^x)^t = a^{xt}$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $\frac{1}{a} > 1$, deci

$$\left(\left(\frac{1}{a}\right)^x\right)^t = \left(\frac{1}{a}\right)^{xt} \text{ sau } \frac{1}{(a^x)^t} = \frac{1}{a^{xt}}, \text{ de unde: } (a^x)^t = a^{xt}.$$

Dacă $a = 1$, evident $a^x = 1$, $(a^x)^t = 1$, şi $a^{xt} = 1$, deci $(a^x)^t = a^{xt}$. Dacă $a = 0$, $x > 0$ şi $t > 0$, avem de asemenea $(a^x)^t = a^{xt} = 0$.

Să demonstrăm acum că $(a^x)^y = a^{xy}$.

Fie (t_n) un şir de numere raţionale convergent către y.

Avem:

$$(a^x)^{t_n} = a^{xt_n}.$$

Dar $(a^x)^{t_n} \to (a^x)^y$, iar $xt_n \to xy$, deci $a^{xt_n} \to a^{xy}$, de unde

$$(a^x)^y = \lim_n (a^x)^{t_n} = \lim_n a^{xt_n} = a^{xy}.$$

Din proprietăţile precedente ale puterilor reale se deduc încă următoarele proprietăţi:

8) Dacă $0 < a < 1$ şi $x > 0$, atunci $a^x < 1$.

9) Dacă $x < 0$, atunci $a^x < 1$ pentru $a > 1$,
$a^x > 1$ pentru $0 < a < 1$.

10) Dacă $x < y$, atunci $a^x < a^y$ pentru $a > 1$,
$a^x > a^y$ pentru $0 < a < 1$.

11) Dacă $0 < a < b$, atunci $a^x < b^x$ pentru $x > 0$.
$a^x > b^x$ pentru $x < 0$.

Demonstraţia acestor proprietăţi se face ca şi pentru puterile întregi şi raţionale.

Aplicaţie. Dacă $a \geqslant 1$, avem $a^x > x$ oricare ar fi $x \in R$.

Într-adevăr, dacă $x \leqslant 0$ avem $a^x > x$, deoarece $a^x > 0$ oricare ar fi $x \in R$. Dacă $0 < x < 1$, avem $a^0 < a^x$ şi deoarece $a^0 = 1$, deducem $a^x > 1 > x$. Fie $x \geqslant 1$, şi n un număr *natural* astfel ca $n \leqslant x \leqslant n + 1$. Atunci: $a^n \leqslant a^x < a^{n+1}$. Dar $a^n > n + 1 > x$, deci $a^x \geqslant a^n > x$, adică $a^x > x$. În particular, $e^x > x$ oricare ar fi $x \in R$.

8. Logaritmi

Să considerăm ecuaţia:

$$a^x = b$$

şi să vedem în ce caz această ecuaţie are o *soluţie unică* (pozitivă sau negativă).

Deoarece exponentul x este real, pentru ca puterea a^x să aibă sens este necesar ca $a \geqslant 0$ (dacă $x \leqslant 0$ este necesar ca $a > 0$). Atunci, pentru a avea loc egalitatea $a^x = b$ este necesar de asemenea ca $b \geqslant 0$.

Vom elimina mai întîi mai multe cazuri:

1) Dacă $a = 0$ şi $b = 0$, ecuaţia $0^x = 0$ are ca soluţie *orice* număr real $x>0$, deci are o infinitate de soluţii.

2) Dacă $a = 0$ şi $b>0$, ecuaţia $0^x = b$ nu are nici o soluţie, deoarece $0^x = 0$ oricare ar fi $x>0$.

Aşadar, dacă $a = 0$, ecuaţia $a^x = b$ *nu* are o soluţie unică, oricare ar fi $b\geqslant 0$.

3) Dacă $a>0$ şi $b = 0$, ecuaţia $a^x = 0$ nu are nici o soluţie, deoarece $a^x>0$, oricare ar fi $x\in R$.

Din 1) şi 3) deducem că dacă $b = 0$, ecuaţia $a^x = b$ *nu* are o soluţie unică, oricare ar fi $a\geqslant 0$.

4) Dacă $a = 1$ şi $b = 1$, ecuaţia $1^x = 1$ are ca soluţie *orice* număr real $x\in R$.

5) Dacă $a = 1$ şi $b \neq 1$, ecuaţia $1^x = b$ nu are *nici* o soluţie deoarece $1^x = 1$.

Aşadar, dacă $a = 1$, ecuaţia $a^x = b$ nu are o soluţie unică, oricare ar fi $b\geqslant 0$.

A rămas de studiat cazul cînd $a>0$ şi $a \neq 1$, iar $b>0$.

În acest caz, ecuaţia $a^x = b$ are o singură soluţie care poate fi pozitivă sau negativă, în particular 0.

Propoziţie. Dacă $a > 0$, $a \neq 1$ şi $b > 0$, ecuaţia $a^x = b$ are o singură soluţie.

a) Vom presupune mai întîi că $a > 1$ şi $b \geqslant 1$. Şirul (a^n) este strict crescător şi nemărginit:

$$1 < a < a^2 < a^3 < \ldots < a^n < \ldots$$

Există doi termeni consecutivi în acest şir, între care se află b.

$$a^k \leqslant b < a^{k+1} \ (k \geqslant 0).$$

Să împărţim intervalul $[k, k + 1]$ în două părţi egale prin punctul c; avem $k < c < k + 1$, deci

$$a^k < a^c < a^{k+1}.$$

Să notăm cu $[x_1, y_1]$ acela din segmentele $[k, c]$ sau $[c, k + 1]$, pentru care

$$a^{x_1} \leqslant b < a^{y_1}.$$

Avem

$$y_1 - x_1 = \frac{1}{2}.$$

Să presupunem că am găsit două numere $x_n < y_n$ astfel ca

$$a^{x_n} \leqslant b < a^{y_n} \text{ şi } y_n - x_n = \frac{1}{2^n}.$$

Împărţind segmentul $[x_n, y_n]$ în două părţi egale prin punctul c_n, avem $x_n < c_n < y_n$ şi

$$a^{x_n} < a^{c_n} < a^{y_n}.$$

Numărul b este cuprins între două puteri consecutive dintre acestea. Să notăm cu x_{n+1} şi y_{n+1} exponenţii celor două puteri consecutive pentru care

$$a^{x_{n+1}} \leqslant b < a^{y_{n+1}}.$$

Avem de asemenea

$$x_n \leqslant x_{n+1} < y_{n+1} \leqslant y_n \text{ şi } y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

În acest fel am demonstrat prin inducţie completă că putem găsi două şiruri (x_n) şi (y_n), astfel ca:

$$1^\circ\ x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant \ldots \leqslant y_2 \leqslant y_1.$$

$$2^\circ\ y_n - x_n = \frac{1}{2^n}, \qquad n \in N.$$

$$3^\circ\ a^{x_n} \leqslant b \leqslant a^{y_n}, \qquad n \in N.$$

Din primele două condiţii deducem că cele două şiruri au o limită comună x_0:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x_0.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{y_n} = a^{x_0}$, şi din condiţia 3° deducem că $a^{x_0} = b$, deci x_0 este o soluţie a ecuaţiei.

Să remarcăm că dacă $b>1$, atunci $x_0>0$; în adevăr, dacă am avea $x_0 \leqslant 0$, deoarece $a>1$, ar rezulta $a^{x_0} \leqslant 1$ şi cum $b > 1$ nu am putea avea egalitatea $a^{x_0} = 1$.

Dacă $b = 1$, $x_0 = 0$ este soluţie a ecuaţiei deoarece $a^0 = 1 = b$.

b) Să presupunem acum $a > 1$ şi $0 < b < 1$. Atunci $\frac{1}{b} > 1$, deci ecuaţia $a^x = \frac{1}{b}$ are o soluţie $y_0 > 0$,

$$a^{y_0} = \frac{1}{b},$$

de unde $a^{-y_0} = b$ şi punînd $x_0 = -y_0$ avem $a^{x_0} = b$, deci $x_0 < 0$ este soluţie a ecuaţiei.

Din *a)* şi *b)* rezultă că, dacă $a>1$ şi $b>0$, ecuaţia $a^x = b$ are o soluţie x_0 şi anume $x_0>0$ dacă $b>1$, $x_0 = 0$ dacă $b = 1$ şi $x_0<0$ dacă $0 < b < 1$.

c) Să presupunem $0 < a < 1$ şi $b > 0$. Atunci $\frac{1}{a} > 1$, deci ecuaţia $\left(\frac{1}{a}\right)^x = b$ are o soluţie y_0:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{y_0} = b$$

sau $\frac{1}{a^{y_0}} = b$ sau $a^{-y_0} = b$. Punînd $x_0 = -y_0$ obţinem $a^{x_0} = b$, adică x_0 este soluţie a ecuaţiei.

Am demonstrat astfel că în toate cazurile, dacă $a>0$, $a \neq 1$ şi $b>0$, ecuaţia a^x are o soluţie.

Rămîne de arătat că în aceste cazuri soluţia este *unică*. Dacă ar exista două numere $x_1<x_2$ astfel ca $a^{x_1} = b$ şi $a^{x_2} = b$, am ajunge la contradicţie. Într-adevăr, dacă $a>1$, atunci $a^{x_1}< a^{x_2}$, iar dacă $0<a<1$, atunci $a^{x_1} > a^{x_2}$, deci în ambele cazuri $a^{x_1} \neq a^{x_2}$, deci nu putem avea $a^{x_1} = b = a^{x_2}$.

Să observăm că ecuaţia $a^x = a$ are soluţia unică $x = 1$:

$$a^1 = a.$$

Definiţie. **Fie $a>0$, $a \neq 1$ şi $b>0$. Numărul unic x care verifică egalitatea $a^x = b$ se numeşte logaritmul lui b în baza a şi se notează** $\log_a b$:

$$x = \log_a b.$$

Aşadar

$$x = \log_a b \iff a^x = b.$$

Observaţii. Pentru ca logaritmul unui număr b într-o bază a să aibă sens, trebuie ca baza să fie *strict pozitivă şi diferită de* 1 ($a>0$, $a \neq 1$), iar numărul b să fie *strict pozitiv* ($b>0$).

Nu au sens logaritmii numerelor *negative*; în particular nu are sens logaritmul lui 0.

Din definiţia logaritmului $x = \log_a b$, ca soluţie a ecuaţiei $a^x = b$, rezultă

$$a^{\log_a b} = b.$$

Avem $\log_a a = 1$, deoarece $a^1 = a$, şi

$\log_a 1 = 0$, deoarece $a^0 = 1$.

De asemenea $\log_a b = \log_a c$ dacă şi numai dacă $b = c$.

9. Proprietăţile logaritmilor

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$,

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

În particular, $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$.

3) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.

4) dacă $a>1$, atunci $\log_a x > 0$ pentru $x>1$.

$\log_a x < 0$ pentru $0<x<1$,

5) $a^{\log_a x} = x$, $\log_a a^x = x$.

6) Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $(x_n > 0, x > 0)$, atunci $\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a x$ şi, reciproc, dacă $\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a x$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Demonstraţie. Fie $u = \log_a x$ şi $v = \log_a y$, deci $a^u = x$ şi $a^v = y$.

Atunci:

$$a^{u+v} = a^u \cdot a^v = x \cdot y,$$

deci

$$u + v = \log_a(x \cdot y), \text{ adică } \log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y),$$

de unde rezultă proprietatea 1). Mai departe

$$a^{u-v} = a^u \cdot a^{-v} = \frac{a^u}{a^v} = \frac{x}{y},$$

deci $u - v = \log_a \frac{x}{y}$, adică $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$,

de unde rezultă proprietatea 2). Cazul particular se obţine luînd $x = 1$, deoarece $\log_a 1 = 0$.

Pentru a demonstra proprietatea 3), să punem

$$u = \log_a x, \text{ deci } a^u = x.$$

Atunci

$$a^{\alpha u} = (a^u)^\alpha = x^\alpha,$$

deci $\alpha u = \log_a x^\alpha$, adică $\alpha \log_a x = \log_a x^\alpha$.

Proprietatea 4) a rezultat în cursul demonstraţiei proprietăţii precedente.

Prima proprietate de la 5) a rezultat din definiţia logaritmilor, iar partea a doua rezultă din proprietatea 3), luînd $x = a$:

$$\log_a a^\alpha = \alpha \log_a a = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Pentru demonstrarea proprietăţii 6), să presupunem că $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Să punem

$$u_n = \log_a x_n \text{ şi } u = \log_a x,$$

deci,

$a^{u_n} = x_n$ şi $a^u = x$. Din condiţia $x_n \to x$, adică $a^{u_n} \to a^u$ rezultă $u_n \to u$, deoarece $a > 0$ şi $a \neq 1$, adică $\log_a x_n \to \log_a x$. Reciproc, să presupunem $\log_a x_n \to \log_a x$, adică $u_n \to u$. Atunci $a^{u_n} \to a^u$, adică $x_n \to x$.

Din proprietăţile precedente rezultă încă următoarele proprietăţi:

7) Dacă $a < 1$, atunci $\log_a x < 0$ pentru $x > 1$,

$\log_a x > 0$ pentru $0 < x < 1$.

8) Dacă $a > 1$ şi $x < y$, atunci $\log_a x < \log y$.

Dacă $0 < a < 1$ şi $x < y$, atunci $\log_a x > \log_a y$.

Într-adevăr, notînd $u = \log_a x$ şi $v = \log_a y$, adică $a^u = x$ şi $a^v = y$, dacă $a > 1$, atunci $a^u < a^v$ dacă şi numai dacă $u < v$, deci $x < y$ dacă şi numai dacă $\log_a x < \log_a y$. De asemenea, dacă $0 < a < 1$, atunci $a^u < a^v$ dacă şi numai dacă $u > v$, deci $x < y$ dacă şi numai dacă $\log_a x > \log_a y$.

9) Formula de schimbare a bazei:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

$$(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0).$$

Fie $u = \log_a b$, deci $a^u = b$ şi $v = \log_b c$, deci $b^v = c$. Atunci $a^{uv} = b^v = c$, deci $uv = \log_a c$, adică

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.$$

În particular, luînd $c = a$, avem $\log_a a = 1$, deci

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Logaritmii în baza e se numesc *logaritmi naturali* sau *logaritmi neperieni* (de la numele matematicianului Neper). În loc de $\log_e x$ se scrie: $\ln x$, sau $\log x$.

Deoarece $e > 1$, rezultă

$\ln x > 0$ dacă $x > 1$.

$\ln x < 0$ dacă $x < 1$,

$\ln x < \ln y$ dacă şi numai dacă $x < y$.

Logaritmii în baza 10 se numesc *logaritmi zecimali*. În loc de $\log_{10} x$ se scrie $\lg x$.

Propoziţie. Dacă $a_n \to a$, $(a_n > 0,\ a > 0)$ şi $\alpha_n \to \alpha$, atunci $a_n^{\alpha_n} \to a^\alpha$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\alpha_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim \alpha_n}.$$

În adevăr, $a_n^{\alpha_n} = e^{\ln a_n^{\alpha_n}} = e^{\alpha_n \ln a_n}$.

Dar: $\alpha_n \ln a_n \to \alpha \ln a$ şi deci $e^{\alpha_n \ln a_n} \to e^{\alpha \ln a}$,

adică: $e^{\ln a_n^{\alpha_n}} \to e^{\ln a^\alpha}$ şi deci $a_n^{\alpha_n} \to a^\alpha$.

Corolar. Dacă $a_n \to a$, $(a_n > 0,\ a > 0)$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n^\alpha = (\lim_{n\to\infty} a_n)^\alpha.$$

Observaţie. Dacă $\alpha_n > 0$ şi $\alpha > 0$, propoziţia precedentă este adevărată şi în cazul cînd $a_n \geqslant 0$ şi $a_n \to 0$.

În acest caz $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

Într-adevăr, fie $(-\varepsilon, \varepsilon)$ o vecinătate a lui 0, unde $0 < \varepsilon < 1$. Să arătăm că $a_n^{\alpha_n} \leqslant \varepsilon$, pentru toţi indicii, cu excepţia unui număr finit dintre ei.

Deoarece $\alpha_n \to \alpha$, şirul α_n este mărginit; fie $M > 0$ astfel ca $\alpha_n \leqslant M$ pentru orice n. Avem $\varepsilon^M < \varepsilon$, deoarece $0 < \varepsilon < 1$.

Deoarece $a_n \to 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît $0 \leqslant a_n < \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$.

Deoarece $\alpha_n > 0$, avem

$$0 \leqslant a_n^{\alpha_n} < \varepsilon^{\alpha_n} < \varepsilon^M < \varepsilon \qquad n \geqslant N(\varepsilon_2),$$

adică $0 \leqslant a_n^{\alpha_n} < \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$, de unde rezultă că $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

Dacă însă $a_n \to 0$ şi $\alpha_n \to 0$, despre şirul $(a_n^{\alpha_n})$ nu putem afirma nimic. Uneori are limită pozitivă, nulă, finită sau $+\infty$; alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi α, $0 \leqslant \alpha \leqslant +\infty$, există un şir $a_n \to 0$ şi un şir $\alpha_n \to 0$, astfel încît $a_n^{\alpha_n} \to \alpha$.

Exemple.

1) (a_n): $e^{-1}, e^{-2}, \ldots, e^{-n}, \ldots$ $\quad a_n \to 0$

(α_n): $-\alpha, -\frac{\alpha}{2}, \ldots, -\frac{\alpha}{n}, \ldots$ $\quad \alpha_n \to 0$

$(a_n^{\alpha_n})$: $e^{\alpha}, e^{\alpha}, \ldots, e^{\alpha}, \ldots$ $\quad a_n^{\alpha_n} \to e^{\alpha}$.

Dînd lui α toate valorile reale, se obţin pentru e^{α} toate valorile strict pozitive.

2) (a_n): $e^{-1}, e^{-2^2}, e^{-3^2}, \ldots, e^{-n^2}, \ldots$ $\quad a_n \to 0$

(α_n): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ $\quad \alpha_n \to 0$

$(a_n^{\alpha_n})$: $e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, \ldots, e^{-n}, \ldots$ $\quad a_n^{\alpha_n} \to 0$

3) (a_n): $e^{-1}, e^{-2^2}, e^{-3^2}, \ldots, e^{-n^2}, \ldots$ $\quad a_n \to 0$

(α_n): $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots$ $\quad \alpha_n \to 0$

$(a_n^{\alpha_n})$: $e, e^2, e^3, \ldots, e^n, \ldots$ $\quad a_n^{\alpha_n} \to +\infty$

4) (a_n): $e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, e^{-4}, \ldots$ $\quad a_n \to 0$

(α_n): $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ $\quad \alpha_n \to 0$

$(a_n^{\alpha_n})$: $e^{-1}, e, e^{-1}, e, \ldots$ $\quad a_n^{\alpha_n}$ nu are limită.

Capitolul IV

DREAPTA ÎNCHEIATĂ

Necesitatea de a îngloba într-o formulare unitară unele propoziţii fundamentale ale analizei impune, după cum vom vedea mai jos, introducerea, pe lîngă numerele reale, a două simboluri, $+\infty$ şi $-\infty$, numite *numere improprii* sau *numere infinite*.

Pentru a face o deosebire, numerele reale vor fi numite uneori *numere finite*.

Mulţimea formată din toate numerele reale, împreună cu $+\infty$ şi $-\infty$, se numeşte *dreapta încheiată* şi se notează cu $\bar{R}$.

Prin *mulţime de numere* sau şir de numere vom înţelege în continuare mulţime de numere finite, respectiv *şir de numere finite*. Simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$ vor apărea doar ca limite ale unor şiruri divergente, sau ca margini ale mulţimilor nemărginite (care se pot reduce tot la limite de şiruri divergente).

§ 1. Mulţimi nemărginite

1. Mulţimi nemajorate

Ştim că orice mulţime *majorată* A are o *margine superioară* M, *care este cel mai mic majorant al mulţimii* A. În scris:

$$M = \sup A \text{ sau } M = \sup_{x \in A} x.$$

Reamintim că marginea superioară M este caracterizată de următoarele două proprietăţi:

1) $x \leqslant M$ pentru orice $x \in A$.

2) Dacă $\alpha < M$, există cel puţin un punct $x \in A$, astfel ca $\alpha < x$.

Dacă A nu este majorată vom spune că marginea sa superioară este $+\infty$ (plus infinit). În scris:

$$\sup A = +\infty \text{ sau } \sup_{x \in A} x = +\infty.$$

Pentru ca $+\infty$ să-și justifice denumirea de *margine superioară*, sîntem conduși să-i atribuim anumite proprietăți astfel încît să fie verificate proprietățile 1) și 2) ale marginii superioare definite anterior.

Pentru aceasta, vom pune prin definiție

$$x < +\infty \text{ pentru orice număr real } x.$$

Atunci:

1) $x < +\infty$ pentru orice $x \in A$.

2) dacă $\alpha < +\infty$, există cel puțin un punct $x \in A$ astfel ca $\alpha < x$ (deoarece A nu este majorată).

Putem acum da următoarea formulare unitară:

Propoziția 1. Orice mulțime A are o margine superioară M caracterizată de proprietățile 1) și 2). Marginea superioară M este finită dacă și numai dacă mulțimea A este majorată.

Exemple.

1) $\sup N = +\infty$ sau $\sup_{n \in N} n = +\infty$.

2) $\sup Q = +\infty$ sau $\sup_{x \in Q} x = +\infty$.

3) $\sup R = +\infty$ sau $\sup_{x \in R} x = +\infty$.

4) $\sup_{n \in N} (2^n) = +\infty$.

Observație. Din inegalitatea $x < +\infty$ pentru orice $x \in R$ rezultă în particular $0 < +\infty$, ceea ce ne determină să scriem și ∞ în loc de $+\infty$, după cum scriem, de exemplu, 5 în loc de $+5$.

2. Mulțimi neminorate

Știm că orice mulțime *minorată* A are o *margine inferioară* m, *care este cel mai mare minorant al mulțimii* A:

$$m = \inf A \text{ sau } m = \inf_{x \in A} x.$$

Marginea inferioară m este caracterizată de următoarele două proprietăți:

1') $m \leqslant x$ pentru orice $x \in A$;

2') dacă $m < \alpha$, există cel puțin un punct $x \in A$ astfel încît $x < \alpha$.

Dacă A nu este minorată, vom spune că marginea sa inferioară este $-\infty$ (minus infinit).

Vom pune prin definiție

$$-\infty < x \text{ pentru orice număr real } x.$$

Atunci:

1') $-\infty < x$ pentru orice $x \in A$;

2') dacă $-\infty < \alpha$, există cel puțin un punct $x \in A$ astfel ca $x < \alpha$ (deoarece A nu este minorată).

Putem da acum următoarea formulare unitară:

Propoziția 2. Orice mulțime A are o margine inferioară m, caracterizată de proprietățile 1') și 2'). Marginea inferioară m este finită dacă și numai dacă mulțimea A este minorată.

Exemple.

1) $\inf\limits_{n \in N} (-n) = -\infty$.

2) $\inf Q = -\infty$ sau $\inf\limits_{x \in Q} x = -\infty$.

3) $\inf R = -\infty$ sau $\inf\limits_{x \in R} x = -\infty$.

4) $\inf\limits_{x>0} (\ln x) = -\infty$.

3. Mulțimi nemărginite

Știm că orice mulțime *mărginită* A are o margine inferioară m și o margine superioară M și $m \leqslant M$; avem $m < M$ afară de cazul cînd $A = \{a\}$, caz în care $m = M = a$.

Din cele de mai sus rezultă că putem da următoarea formulare unitară:

Propoziția 3. Orice mulțime A are o margine inferioară m și o margine superioară M (finite sau infinite).

Pentru a putea afirma că $m \leqslant M$, și în cazul cînd $m = -\infty$ și $M = +\infty$, vom pune prin definiție

$$-\infty < +\infty.$$

Cu această convenție, avem totdeauna

$$\inf A \leqslant \sup A,$$

semnul egal avînd loc dacă și numai dacă mulțimea A este formată dintr-un singur punct.

Observație. Prin cele trei convenții de mai sus, am extins structura de ordine la dreapta încheiată $\bar{R}$. Cu această structură de ordine, dreapta încheiată este o mulțime *total ordonată*.

Acum se justifică modul de notare a intervalelor nemărginite:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x \in R, x > a\};$$
$$[a, +\infty) = \{x \mid x \in R, x \geqslant a\};$$
$$(-\infty, a) = \{x \mid x \in R, x < a\};$$
$$(-\infty, a] = \{x \mid x \in R, x \leqslant a\};$$
$$(-\infty, +\infty) = R.$$

În locul notațiilor $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ se pot folosi respectiv notațiile (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$.

4. Funcții nemărginite

Fie funcția reală $f: E \to R$ și $A \subset E$.

Dacă funcția f nu este minorată pe A, marginea sa inferioară pe A se ia, prin definiție, egală cu $-\infty$:

$$\inf_{x \in A} f(x) = -\infty.$$

Dacă funcția f nu este majorată pe A, marginea sa superioară pe A se ia, prin definiție, egală cu $+\infty$.

$$\sup_{x \in A} f(x) = +\infty.$$

Rezultă că, în toate cazurile, marginea inferioară și marginea superioară a funcției pe A sînt egale cu marginea inferioară, respectiv cu marginea superioară a mulțimii $f(A)$:

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A), \qquad \sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A).$$

Ca de obicei, cînd vom vorbi de marginile funcției, fără a specifica mulțimea pe care se consideră, se subînțelege că această mulțime este domeniul de definiție E.

Avem $m = \inf_{x \in E} f(x)$ dacă și numai dacă sînt îndeplinite următoarele două condiții:

1) $m \leqslant f(x)$ pentru orice $x \in E$

2) dacă $m < \alpha$, atunci există cel puțin un $x \in E$ astfel ca $f(x) < \alpha$.

Avem $M = \sup_{x \in E} f(x)$ dacă și numai dacă sînt îndeplinite următoarele două condiții:

1) $f(x) \leqslant M$ pentru orice $x \in E$;

2) dacă $\alpha < M$, atunci există cel puțin un $x \in E$ astfel ca $\alpha < f(x)$.

Dacă funcția f este constantă, $f(x) \equiv a$, atunci

$$\inf_{x \in E} f(x) = \sup_{x \in E} f(x) = a.$$

Dacă funcţia f nu este constantă, atunci

$$-\infty \leqslant \inf_{x\in E} f(x) < \sup_{x\in E} f(x) \leqslant +\infty.$$

Funcţia f este minorată dacă şi numai dacă $\inf_{x\in E} f(x)$ este finită; funcţia f este majorată dacă şi numai dacă $\sup_{x\in E} f(x)$ este finită. Rezultă că f este mărginită dacă şi numai dacă ambele margini ale funcţiei sînt finite.

Următoarele proprietăţi se verifică uşor:
1) Dacă $A \subset B \subset E$, atunci

$$\inf_{x\in A} f(x) \geqslant \inf_{x\in B} f(x) \qquad \sup_{x\in A} f(x) \leqslant \sup_{x\in B} f(x).$$

2) Dacă f şi g sînt două funcţii reale definite pe E şi dacă $f \leqslant g$, atunci:

$$\inf_{x\in E} f(x) \leqslant \inf_{x\in E} g(x), \qquad \sup_{x\in E} f(x) \leqslant \sup_{x\in E} g(x).$$

Deoarece un şir (x_n) este o funcţie definită pe mulţimea N a numerelor naturale, rezultă următoarele definiţii pentru marginile şirului:

$m = \inf_{x\in N} x_n$ dacă şi numai dacă:

1) $m \leqslant x_n$ oricare ar fi $n \in N$;

2) dacă $m < \alpha$, atunci există un termen x_n din şir astfel ca $x_n < \alpha$.

$M = \sup_{n\in N} x_n$ dacă şi numai dacă:

1) $x_n \leqslant M$ oricare ar fi $n \in N$;

2) Dacă $\alpha < M$, atunci există un termen x_n din şir astfel ca $\alpha < x_n$.

Toate proprietăţile marginilor de funcţii se păstrează, evident, şi pentru margini de şiruri.

Avem $\inf_n x_n = -\infty$ dacă şi numai dacă şirul (x_n) este nemărginit inferior, şi $\sup_n x_n = +\infty$ dacă şi numai dacă şirul (x_n) nu este mărginit superior.

Putem acum extinde definiţia oscilaţiei unei funcţii f: $E \to R$ pe o mulţime $A \subset E$. Dacă funcţia f nu este mărginită pe A (fie că nu este majorată, fie că nu este minorată), punem prin definiţie.

$$\omega_f(A) = +\infty.$$

Se verifică şi în acest caz egalitatea

$$\omega_f(A) = \sup_{\substack{x'\in A \\ x''\in A}} |f(x') - f(x'')|$$

şi proprietatea:

$$\omega_f(A) < \omega_f(B), \qquad \text{dacă } A \subset B.$$

De asemenea, dacă pentru orice vecinătate V a unui punct $x \in E$ avem $\omega_f(V \cap E) = +\infty$, atunci se pune prin definiție

$$\omega_f(x) = +\infty.$$

Așadar punctele $x \in E$ pentru care oscilația $\omega_f(x)$ este finită sînt cele în jurul cărora f este mărginită (există o vecinătate V a lui x astfel încît f este mărginită pe $V \cap E$).

§ 2. Extinderea structurii topologice la dreapta încheiată

1. Vecinătățile lui $+\infty$ și $-\infty$

Am numit *vecinătăți* ale unui punct $x \in R$ mulțimile care conțin *intervale deschise* și mărginite de forma (a, b) cu $a < x_0 < b$.

Prin extensiune, vom numi:

vecinătăți ale lui $+\infty$ *mulțimile care conțin intervale deschise și nemărginite de forma* $(a, +\infty)$;

vecinătăți ale lui $-\infty$, *mulțimile care conțin intervale deschise și nemărginite de forma* $(-\infty, a)$.

Observație. Vecinătățile lui $+\infty$ și ale lui $-\infty$ sînt formate *numai din numere finite*, adică sînt submulțimi ale dreptei *reale* R.

Una din proprietățile vecinătăților unui punct $x_0 \in R$ este aceea că x_0 aparține fiecărei vecinătăți ale sale. Această proprietate nu se mai păstrează pentru vecinătățile lui $+\infty$ și ale lui $-\infty$ *.

A doua proprietate a vecinătăților lui x_0 (intersecția a două vecinătăți ale lui x_0 este de asemenea o vecinătate a lui x_0) se păstrează și pentru vecinătățile lui $+\infty$ și ale lui $-\infty$. Într-adevăr, intersecția a două semidrepte $(a, +\infty)$ și $(b, +\infty)$ este o semidreaptă de aceeași formă, anume $(b, +\infty)$ dacă $a \leqslant b$; intersecția a două semidrepte $(-\infty, a)$ și $(-\infty, b)$ este semidreapta $(-\infty, a)$ dacă $a \leqslant b$. La fel se arată că se păstrează și celelalte proprietăți ale vecinătăților.

2. Puncte de acumulare infinite

Reamintim că un punct $x_0 \in R$ este *punct de acumulare* al unei mulțimi A, dacă fiecare vecinătate a lui x_0 conține cel puțin un punct $x \in A$ diferit de x_0. Dacă $x_0 \notin A$, condiția $x \neq x_0$ este verificată de la sine.

Dacă A nu este majorată, pentru orice număr $a \in R$ există cel puțin un punct $x \in A$ astfel ca $a < x$, adică astfel ca $x \in (a, +\infty)$; aceasta înseamnă că în orice vecinătate a lui $+\infty$ există cel puțin un punct $x \in A$ (evident x este diferit de $+\infty$).

* Dacă în $\bar{R} = [-\infty, +\infty]$ considerăm ca vecinătăți ale lui $+\infty$ mulțimile care conțin semidrepte $(a, +\infty]$ care conțin și pe $+\infty$, iar ca vecinătăți ale lui $-\infty$ mulțimile care conțin semidrepte $[-\infty, a)$ care conțin și pe $-\infty$, atunci prima proprietate a vecinătăților este verificată și pentru vecinătățile lui $+\infty$ și ale lui $-\infty$.

Deoarece această proprietate are aceeași formulare ca și proprietatea prin care se definește un punct de acumulare, spunem că $+\infty$ *este punct de acumulare al unei mulțimi nemajorate.*

Dacă A nu este minorată, în orice semidreaptă $(-\infty, a)$ există cel puțin un punct $x \in A$, adică în orice vecinătate a lui $-\infty$ se află cel puțin un punct $x \in A$ (evident x este diferit de $-\infty$). De aceea spunem că $-\infty$ *este punct de acumulare al unei mulțimi neminorate.*

Cu aceste denumiri, definiția punctului de acumulare are aceeași formulare, fie că punctul de acumulare este finit, fie că este infinit.

De asemenea, propoziția următoare, demonstrată inițial pentru puncte de acumulare finite, rămîne valabilă și pentru puncte de acumulare infinite.

Propoziție. $x \in \bar{R}$ **este punct de acumulare al unei mulțimi** $A \subset R$ **dacă și numai dacă în orice vecinătate a lui** x_0 **se află o infinitate de puncte din** A.

Lăsăm pe seama cititorului, ca exercițiu, verificarea acestei propoziții, în cazul cînd $x_0 = +\infty$ sau $x_0 = -\infty$.

Cu definiția lui $+\infty$ și $-\infty$ ca puncte de acumulare ale mulțimilor nemajorate, respectiv neminorate, rezultă următoarea extensiune a teoremei lui Weierstrass-Bolzano:

Orice mulțime infinită are cel puțin un punct de acumulare. Dacă mulțimea este infinită și mărginită, mulțimea are cel puțin un punct de acumulare finit.

Observație. Vom continua să numim puncte aderente ale unei mulțimi A *numai punctele finite* x_0, care au proprietatea că $V \cap A \neq \emptyset$, oricare ar fi vecinătatea V a lui x_0.

Deoarece considerăm numai mulțimi de numere finite, este necesar să precizăm propoziția următoare:

O mulțime A este închisă, dacă și numai dacă își conține toate punctele de acumulare finite.

§ 3. Șiruri cu limita $+\infty$ sau $-\infty$

Definiția limitei unui șir convergent se extinde și la anumite șiruri divergente.

1. Șiruri cu limită infinită

Definiție. **Spunem că** $+\infty$ **este limita unui șir** (a_n), **dacă orice vecinătate a lui** $+\infty$ **conține toți termenii șirului, cu excepția unui număr finit dintre ei.** Scriem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n} a_n = +\infty \text{ sau } a_n \to +\infty.$$

Luînd vecinătăţile lui $+\infty$ de forma $(\varepsilon, +\infty)$, se obţine o formulare echivalentă, dată de următoarea

Propoziţie. Un şir a_n are limita $+\infty$, dacă şi numai dacă, pentru orice număr ε, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem

$$a_n > \varepsilon.$$

În acest enunţ *nu* este necesar ca $\varepsilon > 0$.

Corolar. Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ atunci $\sup_{n\in N} a_n = +\infty$.

Exemplu. Şirul numerelor naturale

$$1,2,3,\ldots, n,\ldots.$$

are limita $+\infty$

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty, \text{ sau } n \to +\infty.$$

Acest exemplu justifică în parte semnul $n \to \infty$ folosit în notaţia limitei $\lim_{n\to\infty} a_n$. Justificarea acestei notaţii va fi dată în capitolul despre limite de funcţii.

Definiţie. Spunem că $-\infty$ este limita unui şir (a_n) dacă orice vecinătate a lui $-\infty$ conţine toţi termenii şirului cu excepţia unui număr finit dintre ei. Scriem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \lim_{n} a_n = -\infty \text{ sau } a_n \to -\infty.$$

Luînd vecinătăţile lui $-\infty$ de forma $(-\infty, \varepsilon)$, se obţine o formulare echivalentă dată de următoarea

Propoziţie. Un şir (a_n) are limită $-\infty$, dacă şi numai dacă, pentru orice număr ε, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem

$$a_n < \varepsilon.$$

În acest enunţ *nu* este necesar ca $\varepsilon < 0$.

Corolar. Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, atunci $\inf_{n\in N} x_n = -\infty$.

Exemplu. Şirul

$$-1, -2, -3,\ldots, -n,\ldots$$

are limita $-\infty$

$$\lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty \text{ sau } -n \to -\infty.$$

Observații. 1° Șirurile care au limita $+\infty$ sau $-\infty$ sînt nemărginite, deci sînt divergente. Vom continua să numim *șiruri convergente* numai șirurile care au *limita finită*.

2° Definiția limitei unui șir cu ajutorul vecinătăților are *aceeași formulare* fie că limita este finită, fie că limita este infinită.

3° Există șiruri care nu au limită, nici finită, nici infinită, cum sînt șirurile

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ldots,\ 0,\ 1\ldots$$

$$0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ldots,\ 0,\ n,\ldots$$

$$1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6,\ldots.$$

4° Dacă un șir este *convergent* el este *mărginit*, dar dacă este mărginit nu este neapărat convergent. Pentru șiruri cu limita infinită avem o proprietate asemănătoare: Dacă un șir are *limita infinită* el este *nemărginit*, dar dacă este nemărginit nu are neapărat limită (infinită).

Aplicații. 1) Dacă $(p_n)_{n\in N}$ *este un șir de numere* **naturale** *cu limita* $+\infty$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=e.$$

Să observăm mai întîi că, deoarece $p_n\to+\infty$, fiecare termen p_n din șir se repetă cel mult de un număr finit de ori. Într-adevăr, luînd $a>p_n$, în afara semidreptei $(a,+\infty)$ se află un număr *finit* de termeni, printre care și p_n și toți termenii egali cu p_n. Deoarece p_n sînt numere *naturale*, termenii $\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}$ fac parte din șirul $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ldots$

Dar $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$, deci în afara fiecărei vecinătăți a lui e se află un număr finit de numere de forma $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, deci cu atît mai mult un număr finit de numere de forma $\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}$, și cum orice asemenea număr se repetă în șirul inițial de un număr finit de ori, rezultă că în afara fiecărei vecinătăți a lui e se află un număr finit de termeni ai șirului inițial, deci $\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}\to e$.

Exemple.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e,\ \text{deoarece } n+1\to+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e,\ \text{deoarece } n^2\to+\infty.$$

Observație. Vom folosi notația $\lim\limits_{p_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=e$ în loc de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=e$ dacă $p_n\to\infty$.

2. Criterii pentru existenţa limitelor infinite

Pentru şirurile cu limite infinite avem criterii simple de existenţa limitei:

1) *Dacă* $a_n \to +\infty$ şi $b_n \geqslant a_n$ *pentru orice* $n \in N$, *atunci* $b_n \to +\infty$.

2) *Dacă* $a_n \to -\infty$ *şi* $b_n \leqslant a_n$ *pentru orice* $n \in N$, *atunci* $b_n \to -\infty$.

Într-adevăr, dacă $a_n \to +\infty$ şi $b_n \geqslant a_n$, în afara fiecărei vecinătăţi a lui $+\infty$ se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi cu atît mai mult un număr finit de termeni ai şirului (b_n) deci $b_n \to +\infty$.

Se raţionează în mod asemănător în cazul cînd $a_n \to -\infty$ şi $b_n \leqslant a_n$.

Exemple. 1) $2n > n$ şi $n \to +\infty$, deci $2n \to +\infty$.

2) dacă $a \geqslant 2$, $a^n > n$ şi $n \to +\infty$, deci $a^n \to +\infty$.

În particular $2^n \to +\infty$, $10^n \to +\infty$.

3) $-(2n+1) < -n$ şi $-n \to -\infty$, deci $-(2n+1) \to -\infty$.

3. Şiruri monotone nemărginite

Ştim că un şir monoton şi mărginit este convergent. Vom arăta acum că şirurile monotone şi nemărginite au limită infinită:

1) *Orice şir crescător şi nemărginit are limita* $+\infty$.

În adevăr, fie (a_n) un şir crescător şi nemărginit, şi fie $(a, +\infty)$ o vecinătate oarecare a lui $+\infty$. Deoarece (a_n) este nemărginit, există în şir un termen $a_N > a$, adică $a_N \in (a, +\infty)$; deoarece şirul este crescător, dacă $n \geqslant N$, avem $a_n > a_N$, deci $a_n > a$, adică $a_n \in (a, +\infty)$. În afara semidreptei $(a, +\infty)$ se află cel mult primii $N-1$ termeni, în număr finit, deci $a_n \to +\infty$.

2) *Orice şir descrescător şi nemărginit are limita* $-\infty$.

Demonstraţia se face ca mai sus.

Putem da acum următoarea formulare unitară relativă la şirurile monotone:

Orice şir monoton are limită. Limita este finită dacă şi numai dacă şirul este mărginit.

Exemple.

1) *Dacă* $a > 1$, *şirul* (a^n) *este crescător şi nemărginit, deci*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

2) *Dacă* $a > 1$, *iar* (x_n) *este crescător și nemărginit, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty.$$

În adevăr, din $x_n \leqslant x_{n+1}$ deducem $a^{x_n} \leqslant a^{x_{n+1}}$, deci șirul (a^{x_n}) este *crescător*. Dacă șirul (a^{x_n}) ar fi mărginit, el ar avea un majorant $M = a^{\alpha}$.

$$a^{x_n} \leqslant a^{\alpha} \text{ pentru orice } n \in N.$$

Rezultă $x_n \leqslant \alpha$ pentru orice $n \in N$, ceea ce contrazice ipoteza că (x_n) este nemărginit (mai precis nemajorat). Așadar (a^{x_n}) este nemărginit și, fiind și crescător, deducem

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty.$$

3) *Dacă* $a>1$, *și* (x_n) *este crescător și nemărginit, iar* $x_n > 0$ *pentru orice* $n \in N$, *atunci*

$$\lim_{x_n\to\infty} \log_a x_n = +\infty.$$

Este evident că șirul $(\log_a x_n)$ este *crescător*.
Dacă ar fi mărginit, ar avea un majorant $M = \log_a \alpha$:

$$\log_a x_n \leqslant \log_a \alpha \text{ pentru orice } n \in N,$$

de unde $x_n \leqslant \alpha$ pentru orice $n \in N$, ceea ce contrazice ipoteza că (x_n) este nemărginit (nemajorat). Așadar, șirul $(\log_a x_n)$ este nemărginit și fiind crescător, avem $\log_a x_n \to +\infty$.

4) *Dacă* $a > 1$ *și* (x_n) *este descrescător și are limita* 0, *iar* $x_n > 0$ *pentru orice* $n \in N$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n \to -\infty.$$

Evident, șirul $(\log_a x_n)$ este *descrescător*.
Dacă ar fi mărginit, ar avea un minorant $m = \log_a \beta$ cu $\beta > 0$

$$\log_a \beta \leqslant \log_a x_n \text{ pentru orice } n \in N.$$

deci $0 < \beta \leqslant x_n$ pentru orice $n \in N$, ceea ce contrazice ipoteza că $x_n \to 0$. Așadar, șirul $(\log_a x_n)$ este *nemărginit*, și, fiind descrescător, deducem

$$\lim_{x_n\to 0} \log_a x_n = -\infty.$$

5) *Dacă* $a > 1$, *iar* (x_n) *este descrescător și nemărginit, atunci*:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 0.$$

Este evident că șirul (a^{x_n}) este *descrescător* și *mărginit*, deoarece $0 < a^{x_n} \leqslant a^{x_1}$ pentru orice $n \in N$, deci (a^{x_n}) este convergent; fie α limita sa. Avem $0 \leqslant \alpha \leqslant a^{x_n}$ pentru orice $n \in N$. Dacă am avea $\alpha > 0$, atunci $\alpha = a^m$, și din $a^m \leqslant a^{x_n}$ deducem $m \leqslant x_n$

pentru orice $n \in N$, ceea ce contrazice ipoteza că (x_n) este nemărginit. Aşadar, $\alpha = 0$, adică $a^x n \to 0$.

6) *Dacă* $\alpha > 0$, iar (x_n) *este crescător şi nemărginit, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^\alpha = +\infty.$$

În adevăr, deoarece $\alpha > 0$, din $x_n \leqslant x_{n+1}$ deducem $x_n^\alpha \leqslant x_{n+1}^\alpha$, adică (x_n^α) este crescător. Dacă ar fi majorat de un număr $M = a^\alpha$, am avea $x_n^\alpha \leqslant a^\alpha$, adică $x_n \leqslant a$ pentru orice n, ceea ce contrazice ipoteza că (x_n) este nemărginit. Aşadar, (x_n^α) este nemărginit şi fiind şi crescător avem $x_n^\alpha \to +\infty$.

7) *Dacă* $\alpha > 0$, *iar* (x_n) *este crescător şi nemărginit, atunci* $x_n^{-\alpha} \to 0$.

8) *Dacă* $\alpha > 0$, *iar* (x_n) *este descrescător şi are limita* 0, *atunci* $x_n^{-\alpha} \to +\infty$.

Pentru demonstraţie se raţionează ca mai sus.

4. Proprietăţi ale şirurilor cu limite infinite

Dacă $a_n \to +\infty$, în afara fiecărei semidrepte $(a, +\infty)$ se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi cu atît mai mult un număr finit de termeni ai oricărui subşir al său, deci:

dacă (a_n) *are limita* $+\infty$, *atunci orice subşir al şirului* (a_n) *are de asemenea limita* $+\infty$.

În mod asemănător:

dacă (a_n) *are limita* $-\infty$, *orice subşir al său are limita* $-\infty$.

Ţinînd seama şi de proprietatea corespunzătoare a şirurilor convergente, se poate da următoarea formulare unitară:

1) *Dacă un şir are limită, orice subşir al său are aceeaşi limită.*

Exemple. $\lim_{n\to\infty} 2n = +\infty$; $\lim_{n\to\infty} (2n-1) = +\infty$; $\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$; $\lim_{n\to\infty} 10^n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty$.

Raţionînd ca mai sus, propoziţia următoare rămîne valabilă şi pentru limite infinite:

2) *Dacă un şir are limită, prin adăugarea sau înlăturarea unui număr finit de termeni, obţinem un şir cu aceeaşi limită.*

Lema lui Cesàro se poate de asemenea extinde la şirurile cu limită infinită.

3) *Din orice şir se poate extrage un subşir care are limită. Dacă şirul este mărginit se poate extrage un subşir convergent.*

Într-adevăr, dacă şirul este nemajorat, pentru orice număr $p \in N$ există un termen $a_{n_p} > p$ şi deoarece $\lim_{p \to \infty} p = +\infty$, rezultă $\lim_{p \to \infty} a_{n_p} = +\infty$ şi $(a_{n_p})_{p \in N}$ este un subşir al şirului (a_n). Se deduce în mod asemănător că, dacă şirul este neminorat, se poate extrage un subşir cu limita $-\infty$.

4) *Prin schimbarea ordinii termenilor unui şir care are limită, se obţine un şir cu aceeaşi limită.*

Într-adevăr, dacă $a_n \to +\infty$ şi dacă (b_n) se obţine din (a_n) prin schimbarea ordinii termenilor, în afara fiecărei semidrepte $(a, +\infty)$ se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi deci *acelaşi* număr finit de termeni ai şirului (b_n), deci $b_n \to +\infty$. Se raţionează la fel în cazul cînd $a_n \to -\infty$.

Cazul cînd (a_n) este convergent a fost considerat înainte.

5) *Dacă $a_n \to +\infty$, se poate schimba ordinea termenilor astfel încît să obţinem un şir crescător cu limita $+\infty$.*

Să considerăm semidreapta $V_1 = (1, +\infty)$. În afara ei, şi anume la stînga lui 1, se află un număr finit de termeni, pe care să-i aranjăm în ordine crescătoare

$$b_1, b_2, \ldots, b_{n_1}.$$

Dacă am reuşit să aranjăm în ordine crescătoare termenii din afara semidreptei $V_p = (p, +\infty)$,

$$b_1, \ldots, b_{n_1}, \ldots, b_{n_p},$$

termenii în număr finit din afara semidreptei $V_{p+1} = (p+1, +\infty)$ care apar în plus se aranjează în ordine crescătoare după b_{n_p}

$$b_1, \ldots, b_{n_2}, \ldots, b_{n_p}, b_{n_{p+1}}, \ldots, b_{n_{p+1}}.$$

În acest fel obţinem un şir *crescător* care conţine *toţi* termenii şirului iniţial.

Ţinînd seama de proprietatea corespunzătoare a şirurilor convergente, putem da următoarea formulare unitară.

Dacă $a_n \to a$, $(-\infty < a \leqslant +\infty)$ şi dacă $a_n < a$ pentru orice $n \in N$ se poate schimba ordinea termenilor astfel încît să obţinem un şir crescător cu limita a.

6) *Dacă $a_n \to -\infty$, se poate schimba ordinea termenilor ca să obţinem un şir descrescător cu limita $-\infty$.*

Se raţionează ca mai sus, folosind vecinătăţile $V_p = (-\infty, -p)$ ale lui $-\infty$.

Ţinînd seama şi de proprietatea corespunzătoare de la şirurile convergente, se poate da următoarea formulare unitară:

Dacă $a_n \to a$, $(-\infty \leqslant a < \infty)$ şi dacă $a < a_n$ pentru orice $n \in N$, se poate schimba ordinea termenilor ca să obţinem un şir descrescător cu limita a.

Exemple. *Dacă $a > 1$ şi dacă $x_n \to +\infty$, atunci $a^{x_n} \to +\infty$.* În loc de $\lim_{n \to \infty} a^{x_n} = +\infty$ vom scrie $\lim_{x_n \to \infty} a^{x_n} = \infty$ pentru a pune în evidenţă faptul că şirul (x_n) are limita ∞.

Într-adevăr, fie (y_n) un şir *crescător* obţinut prin schimbarea ordinii termenilor şirului (x_n). Avem $y_n \to +\infty$, deci $a^{y_n} \to \infty$. Schimbînd din nou ordinea termenilor şirului (a^{y_n}), putem obţine şirul (a^{x_n}) şi deci $a^{x_n} \to +\infty$.

2) Dacă $a > 1$, şi dacă $x_n \to -\infty$, atunci $a^{x_n} \to 0$. Vom scrie:

$$\lim_{x_n \to -\infty} a^{x_n} = 0.$$

Fie (y_n) un şir *descrescător* obţinut din (x_n) prin schimbarea ordinii termenilor. Avem $y_n \to -\infty$, deci $a^{y_n} \to 0$ şi deci $a^{x_n} \to 0$.

3) Dacă $a > 1$ şi $x_n \to +\infty$, $(x_n > 0)$, atunci $\log_a x_n \to +\infty$. Vom scrie:

$$\lim_{x_n \to +\infty} \log_a x_n = +\infty.$$

4) Dacă $a > 1$ şi $x_n \to 0$, $(x_n > 0)$, atunci $\log_a x_n \to -\infty$. Vom scrie:

$$\lim_{x_n \to 0} \log_a x_n = -\infty.$$

În exemplele 3 şi 4 se schimbă ordinea termenilor şirului (x_n) ca să obţinem un şir (y_n) crescător, respectiv descrescător, şi apoi se folosesc exemplele de la numărul precedent.

5) Dacă $a > 1$, şi dacă $a^{x_n} \to +\infty$, atunci $x_n \to +\infty$, iar dacă $a^{x_n} \to 0$, atunci $x_n \to -\infty$. Se pune $y_n = a^{x_n}$, deci $x_n = \log_a y_n$ şi se folosesc exemplele precedente.

6) Dacă $a > 1$ şi dacă $\log_a x_n \to +\infty$, atunci $x_n \to +\infty$, iar dacă $\log_a x_n \to -\infty$, atunci $x_n \to 0$.

Se pune $y_n = \log_a x_n$, deci $x_n = a^{x_n}$ şi se folosesc exemplele precedente.

Din exemplele de mai sus deducem pentru $a = e$

$$\lim_{x_n \to \infty} e^{x_n} = \infty; \qquad \lim_{x_n \to -\infty} e^{x_n} = 0;$$

$$\lim_{x_n \to \infty} \ln x_n = \infty; \qquad \lim_{x_n \to 0} \ln x_n = -\infty.$$

7) Dacă $\alpha > 0$ şi $x_n \to +\infty$, atunci $x_n^{\alpha} \to +\infty$. Vom scrie:

$$\lim_{x_n \to +\infty} x_n^{\alpha} = +\infty.$$

8) Dacă $\alpha > 0$ şi $x_n \to +\infty$, atunci $x_n^{-\alpha} \to 0$. Vom scrie:

$$\lim_{x_n \to \infty} x_n^{-\alpha} = 0.$$

9) Dacă $\alpha > 0$ şi $x_n \to 0$, $(x_n > 0)$, atunci $x_n^{-\alpha} \to \infty$. Vom scrie:

$$\lim_{x_n \to 0} x_n^{-\alpha} = +\infty.$$

Pentru demonstraţie se schimbă ordinea termenilor şirului (x_n) ca să obţinem un şir monoton (y_n) şi apoi se folosesc proprietăţile respective ale şirurilor monotone.

7) *Dacă $a_n \to +\infty$ şi $b_n \to +\infty$, atunci orice şir format cu termenii şirurilor (a_n) şi (b_n) într-o ordine oarecare are limita $+\infty$.*

Într-adevăr, în afara oricărei semidrepte $(a, +\infty)$ se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi un număr finit de termeni ai şirului (b_n), deci un număr finit de termeni ai oricărui şir (c_n) format cu termenii celor două şiruri, deci $c_n \to +\infty$.

Dacă $a_n \to -\infty$ *şi* $b_n \to -\infty$, *atunci orice şir format cu termenii celor două şiruri, într-o ordine oarecare, are limita* $-\infty$.

Se raţionează ca mai sus.

Ţinînd seama şi de proprietatea corespunzătoare a şirurilor convergente, se poate da următoarea formulare unitară:

Dacă (a_n) *şi* (b_n) *au aceeaşi limită* $x_0 \in \overline{R}$, *atunci orice şir format cu termenii şirurilor* (a_n) *şi* (b_n), *într-o ordine oarecare, are limita* x_0.

5. Trecerea la limită în inegalităţi

Propoziţia următoare, demonstrată la început pentru şiruri convergente, este adevărată şi pentru şirurile cu limita infinită.

Dacă (a_n) *şi* (b_n) *sînt şiruri cu limită şi dacă* $a_n \leqslant b_n$ *pentru orice* $n \in N$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Într-adevăr, în toate cazurile care se pot ivi:

$a_n \to +\infty$ şi $b_n \to +\infty$; $a_n \to x_0$ şi $b_n \to +\infty$; $a_n \to -\infty$ şi $b_n \to x_0$; $a_n \to -\infty$ şi $b_n \to -\infty$, în care cel puţin una din cele două limite este infinită, inegalitatea este verificată.

Rezultă de aici că este adevărată şi proprietatea următoare:

Dacă $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, *iar* (a_n) *şi* (b_n) *au aceeaşi limită* $x_0 \in \overline{R}$, *atunci* (x_n) *are limita* x_0.

6. Modulul

Dacă $a_n \to +\infty$, *atunci* $|a_n| \to +\infty$.

Dacă $a_n \to -\infty$, *atunci* $|a_n| \to +\infty$.

Dacă $a_n \to +\infty$ în afara semidreptei $(0, +\infty)$ se află numai un număr finit de termeni; pentru ceilalţi termeni, care se află în semidreapta $(0, +\infty)$, avem $a_n > 0$, deci $|a_n| = a_n$ şi, deoarece limita unui şir nu depinde de un număr finit de termeni, avem:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Să presupunem acum că $a_n \to -\infty$ şi să arătăm că $|a_n| \to +\infty$. Fie pentru aceasta $(a, +\infty)$ o vecinătate a lui $+\infty$; semidreapta $(-\infty, -a)$ este atunci o vecinătate a lui $-\infty$, deci avem $a_n < -a$ sau $|a_n| = -a_n > a$,

adică $|a_n| \in (a, +\infty)$ pentru toți indicii, cu excepția unui număr finit dintre ei. Rezultă că $|a_n| \to +\infty$.

Pentru a putea afirma și în aceste cazuri că limita modulului este egală cu modulul limitei, sîntem conduși să punem prin definiție.

$$|+\infty| = +\infty \text{ și } |-\infty| = +\infty.$$

§ 4. Operații cu șiruri care au limită

1. Suma șirurilor care au limită

Proprietatea cunoscută: *Suma a două șiruri* **convergente** *este un șir convergent și limita sumei este egală cu suma limitelor* se extinde, în cazul în care unul cel puțin din cele două șiruri are limita infinită, în felul următor:

I) *Dacă* $a_n \geqslant \alpha$ *și* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n + b_n \to +\infty$.

II) *Dacă* $a_n \leqslant \alpha$ *și* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n + b_n \to -\infty$.

Într-adevăr, fie $(a, +\infty)$ o vecinătate oarecare a lui $+\infty$; atunci $(a - \alpha, +\infty)$ este de asemenea o vecinătate a lui $+\infty$. Deoarece $b_n \to +\infty$, avem $b_n \in (a - \alpha, +\infty)$, adică $b_n > a - \alpha$ pentru toți indicii, cu excepția unui număr finit dintre ei. Atunci

$$a_n + b_n > \alpha + a - \alpha = a,$$

adică $a_n + b_n \in (a, +\infty)$ pentru toți indicii, cu excepția unui număr finit dintre ei, deci $a_n + b_n \to +\infty$.

Proprietatea II) se demonstrează în mod analog.

Dacă (a_n) este convergent sau dacă $a_n \to +\infty$, atunci există α astfel ca $a_n \geqslant \alpha$, pentru orice $n \in N$. De asemenea, dacă (a_n) este convergent, sau dacă $a_n \to -\infty$, există α astfel ca $a_n \leqslant \alpha$ pentru orice $n \in N$. Din cele două proprietăți de mai sus rezultă următoarele patru propoziții:

1) *Dacă* $a_n \to +\infty$ *și* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n + b_n \to +\infty$.
2) *Dacă* $a_n \to a$ *și* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n + b_n \to +\infty$.
3) *Dacă* $a_n \to a$ *și* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n + b_n \to -\infty$.
4) *Dacă* $a_n \to -\infty$ *și* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n + b_n \to -\infty$.

Pentru a putea afirma și în aceste cazuri că *limita sumei este egală cu suma limitelor*, sîntem conduși să punem prin definiție (notînd ∞ în loc de $+\infty$).

$\infty + \infty = \infty$;

$a + \infty = \infty + a = \infty$ oricare ar fi $a \in R$;

$a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$ oricare ar fi $a \in R$;

$-\infty + (-\infty) = -\infty$.

O b s e r v a ţ i e. În cazul cînd $a_n \to +\infty$ *şi* $b_n \to -\infty$, despre şirul $(a_n + b_n)$ nu putem afirma nimic. Uneori şirul sumă are limită finită sau infinită, alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi $a \in R$, putem găsi un şir $a_n \to +\infty$ şi un şir $b_n \to -\infty$ astfel ca $a_n + b_n \to a$. De aceea nu se acordă nici un sens scrierii $\infty - \infty$. Spunem că operaţia $\infty - \infty$ *nu este definită*, sau că este o *operaţie fără sens*.

Exemple.

1) (a_n): 1, 2, 3, ..., n, ... — $a_n \to +\infty$;
(b_n): $a-1, a-2, a-3, \ldots, a-n, \ldots$ — $b_n \to -\infty$;
$(a_n + b_n)$: $a, a, a, \ldots, a, \ldots$ — $a_n + b_n \to a$.

2) (a_n): 2, 4, 6, 8, ..., $2n$, ... — $a_n \to +\infty$;
(b_n): $-1, -2, -3, -4, \ldots, -n, \ldots$ — $b_n \to -\infty$;
$(a_n + b_n)$: 1, 2, 3, 4, ..., n,... — $a_n + b_n \to +\infty$.

3) (a_n): 1, 2, 3, ..., n, ... — $a_n \to +\infty$;
(b_n): $-2, -4, -6, \ldots, -2n, \ldots$ — $b_n \to -\infty$;
$(a_n + b_n)$: $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ — $a_n + b_n \to -\infty$.

4) (a_n): 2, 2, 4, 4, ..., $2n$, $2n$, ... — $a_n \to +\infty$;
(b_n): $-1, -2, -3, -4, \ldots, -2n+1, -2n, \ldots$ — $b_n \to -\infty$;
$(a_n + b_n)$: 1, 0, 1, 0, ..., 1, 0, ... — nu are limită.

Putem acum da o formulare unitară care să cuprindă atît teorema relativă la suma a două şiruri convergente, cît şi cele patru propoziţii de mai sus.

T e o r e m ă. Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limită (finită sau infinită) şi dacă suma limitelor are sens, atunci şirul sumă $(a_n + b_n)$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Cazul exceptat: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Acest caz va fi denumit mai departe „cazul $\infty - \infty$".

O b s e r v a ţ i e. Fie funcţiile $f: E \to R$ şi $g: E \to R$. Cu operaţia de adunare extinsă asupra numerelor infinite, avem următoarele relaţii:

$$\inf_{x\in E} (f(x) + g(x)) \geqslant \inf_{x\in E} f(x) + \inf_{x\in E} g(x)$$

şi:

$$\sup_{x\in E} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{x\in E} g(x).$$

Într-adevăr, dacă $m_1 = \inf_{x\in E} f(x)$ şi $m_2 = \inf_{x\in E} g(x)$, atunci $m_1 + m_2 \leqslant f(x) + g(x)$ pentru orice $x \in E$, deci, $m_1 + m_2 \leqslant \inf_{x\in E} (f(x) + g(x))$. La fel se demonstrează şi a doua relaţie.

Pentru orice mulţime $A \subset E$ putem scrie acum egalitatea

$$\omega(A) = \sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x)$$

fie că marginile sînt finite, fie că sînt infinite.

2. Produsul cu scalari al șirurilor care au limită

Știm că dacă (b_n) este un șir convergent și α un număr real, atunci șirul (αb_n) este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} b_n.$$

În cazul cînd șirul (b_n) are limită infinită, avem următoarele propoziții:

I) $b_n \to +\infty$ *dacă și numai dacă* $-b_n \to -\infty$.

Să observăm că avem $b_n > a$ dacă și numai dacă $-b_n < -a$, deci $b_n \in (a, +\infty)$ dacă și numai dacă $-b_n \in (-\infty, -a)$. Așadar, în afara semidreptei $(a, +\infty)$ se află un număr finit de termeni ai șirului (b_n) dacă și numai dacă în afara semidreptei $(-\infty, -a)$ se află numai un număr finit de termeni ai șirului $(-b_n)$. Aceasta înseamnă că $b_n \to +\infty$ dacă și numai dacă $-b_n \to -\infty$.

Proprietatea se poate enunța și astfel:

$a_n \to -\infty$ *dacă și numai dacă* $-a_n \to +\infty$.

Într-adevăr, se pune $a_n = -b_n$, deci $-a_n = b_n$ și se aplică proprietatea de mai sus.

1) *Dacă* $b_n \to +\infty$ *și* $\alpha > 0$, *atunci* $\alpha b_n \to +\infty$.

Să observăm că $b_n > \frac{a}{\alpha}$ dacă și numai dacă $\alpha b_n > a$, deci $b_n \in \left(\frac{a}{\alpha}, +\infty\right)$ dacă și numai dacă $\alpha b_n \in (a, +\infty)$.

Fie o semidreaptă oarecare $(a, +\infty)$; deoarece $b_n \to +\infty$, în afara semidreptei $\left(\frac{a}{\alpha}, +\infty\right)$ se află numai un număr finit de termeni ai șirului (b_n), deci în afara semidreptei $(a, +\infty)$ se află numai un număr finit de termeni ai șirului (αb_n) și deci $\alpha b_n \to +\infty$.

Din proprietățile I) și 1) de mai sus rezultă încă următoarele proprietăți:

2) *Dacă* $b_n \to -\infty$ *și* $\alpha > 0$, *atunci* $\alpha b_n \to -\infty$.

Într-adevăr, în acest caz $-b_n \to +\infty$, deci $\alpha(-b_n) \to +\infty$ adică, $-\alpha b_n \to +\infty$ și deci $\alpha b_n \to -\infty$.

3) *Dacă* $b_n \to +\infty$ *și* $\alpha > 0$, *atunci* $(-\alpha)\, b_n \to -\infty$.

Într-adevăr, $(-\alpha)\, b_n = \alpha \cdot (-b_n)$, iar $-bn \to -\infty$, deci $\alpha(-b_n) \to -\infty$, adică $(-\alpha)\, b_n \to -\infty$.

4) *Dacă* $b_n \to -\infty$ *și* $\alpha > 0$, *atunci* $(-\alpha)\, b_n \to +\infty$.

Într-adevăr, $-b_n \to +\infty$, deci $\alpha(-b_n) \to +\infty$, sau $(-\alpha)\, b_n \to +\infty$.

Observație. Proprietatea I) este un caz particular al proprietăților 3) și 4), luînd $\alpha = -1$.

Pentru a putea scrie și în aceste cazuri ($\alpha \neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} b_n$$

sîntem conduși să punem, pentru orice număr real $\alpha > 0$:

$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty;$$

$$\alpha(-\infty) = -\infty \cdot \alpha = -\infty;$$

$$(-\alpha)\infty = \infty(-\alpha) = -\infty;$$

$$(-\alpha)(-\infty) = -\infty(-\alpha) = +\infty.$$

Rezultă, în particular, luînd $\alpha = -1$.

$$(-1)\infty = \infty(-1) = -\infty;$$

$$(-1)(-\infty) = (-\infty)(-1) = +\infty.$$

În loc de $(-1)(-\infty)$ se scrie $-(-\infty)$; deci $-(-\infty) = \infty$.

Observație. Dacă $\alpha = 0$, avem $\lim_{n\to\infty} \alpha b_n = 0$, oricare ar fi șirul (b_n), fie că are, fie că nu are limită. Într-adevăr, șirul (αb_n) este constant și are toți termenii nuli.

3. Produsul șirurilor care au limită

Știm că produsul a două șiruri convergente este un șir convergent și *limita produsului este egală cu produsul limitelor.*

Dacă unul cel puțin din cele două șiruri are limită infinită putem enunța următoarele proprietăți:

I) *Dacă* $a_n \geqslant \alpha > 0$ *și* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n b_n \to +\infty$.

Într-adevăr $\alpha b_n \to +\infty$ și $a_n b_n \geqslant \alpha b_n$, deci $a_n b_n \to +\infty$.

II) *Dacă* $a_n \geqslant \alpha > 0$ *și* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n b_n \to -\infty$.

Deoarece $b_n \to -\infty$, avem $b_n < 0$ (cu excepția unui număr finit de indici) și din $a_n \geqslant \alpha$, deducem $a_n b_n \leqslant \alpha b_n$; dar $\alpha b_n \to -\infty$, deci $a_n b_n \to -\infty$.

III) *Dacă* $a_n \leqslant -\alpha < 0$ *și* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n b_n \to -\infty$.

Punînd $\beta = -\alpha > 0$, avem $-a_n > \beta > 0$, deci $-a_n b_n \to +\infty$ și deci $a_n b_n \to -\infty$.

IV) *Dacă* $a_n \leqslant -\alpha < 0$ *și* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n b_n, +\infty$.

Într-adevăr $-b_n \to +\infty$, deci $\alpha(-b_n) \to +\infty$, adică:$-\alpha b_n \to +\infty$.

Să observăm că dacă $a_n \to a > 0$ sau $a_n \to +\infty$ există un număr $\alpha > 0$, astfel ca $a_n > \alpha$ pentru toți indicii cu excepția unui număr finit dintre ei.

De asemenea, dacă $a_n \to a < 0$ sau $a_n \to -\infty$, există un număr $\alpha > 0$ astfel ca $a_n < -\alpha$ pentru toți indicii cu excepția unui număr finit dintre ei. Din cele patru proprietăți de mai sus deducem următoarele propoziții:

1) *Dacă* $a_n \to +\infty$ *și* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n b_n \to +\infty$.
2) *Dacă* $a_n \to -\infty$ *și* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n b_n \to -\infty$.
3) *Dacă* $a_n \to -\infty$ *și* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n b_n \to +\infty$.
4) *Dacă* $a_n \to a > 0$ *și* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n b_n \to +\infty$.
5) *Dacă* $a_n \to a > 0$ *și* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n b_n \to -\infty$.
6) *Dacă* $a_n \to a < 0$ *și* $b_n \to +\infty$, *atunci* $a_n b_n \to -\infty$.
7) *Dacă* $a_n \to a < 0$ *și* $b_n \to -\infty$, *atunci* $a_n b_n \to +\infty$.

Folosind produsul dintre un număr finit $\neq 0$ și un număr infinit, definit anterior, în ultimele patru propoziții putem afirma că *limita produsului este egală cu produsul limitelor.*

Pentru a putea afirma și în cazul primelor trei propoziții că limita produsului este egală cu produsul limitelor, sîntem conduși să punem:

$$\infty \cdot \infty = \infty;\ \infty\,(-\infty) = (-\infty)\,\infty = -\infty;\ (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty.$$

O b s e r v a ț i e. În cazul cînd $a_n \to 0$, *și* $b_n \to \infty$ sau $b_n \to -\infty$, despre șirul $(a_n b_n)$ nu putem afirma nimic. Uneori șirul produs are limită (finită sau infinită), alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi $a \in R$, putem găsi un șir $a_n \to 0$, și un șir $b_n \to +\infty$ (sau $b_n \to -\infty$) astfel ca $a_n b_n \to a$. De aceea nu se acordă nici un sens scrierii $0 \cdot \infty$ sau $0 \cdot (-\infty)$. Spunem că operațiile $0 \cdot \infty$ și $0 \cdot (-\infty)$ *nu sînt definite*, sau că sînt *operații fără sens.*

Exemple.

1) (a_n): $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \ldots, \frac{a}{n}, \ldots$ $\quad a_n \to 0$;
(b_n): $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $\quad b_n \to +\infty$;
$(a_n b_n)$: $a, a, a, \ldots, a, \ldots$ $\quad a_n b_n \to a$.

2) (a_n): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ $\quad a_n \to 0$;
(b_n): $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ $\quad b \to +\infty$;
$(a_n b_n)$: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $\quad a_n b_n \to +\infty$.

3) (a_n): $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots$ $\quad a_n \to 0$;
(b_n): $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ $\quad b_n \to +\infty$;
$(a_n b_n)$: $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ $\quad a_n b_n \to -\infty$.

4) (a_n): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}, \ldots$ $\quad a_n \to 0$;
(b_n): $2, 2, 6, 4, \ldots, 4n-2, 2n, \ldots$ $\quad b_n \to +\infty$;
$(a_n b_n)$: $2, 1, 2, 1, \ldots, 2, 1, \ldots$ nu are limită.

Dacă în aceste 4 exemple se ia $(-b_n)$ în loc de (b_n) se obțin alte patru exemple în care primul șir are limita 0, iar al doilea șir are limita $-\infty$.

Putem da acum o formulare unitară care să cuprindă atît teorema relativă la produsul a două şiruri convergente cît şi cele şapte propoziţii de mai sus.

Teoremă. Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limită (finită sau infinită) şi dacă produsul limitelor are sens, atunci şirul produs $(a_n b_n)$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Cazuri exceptate: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *şi* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$;

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Fiecare din aceste două cazuri va fi denumit mai departe „cazul $0\cdot\infty$". De altfel, cazul $0\cdot(-\infty)$ se reduce la cazul $0\cdot\infty$, deoarece dacă $a_n \to 0$ şi $b_n \to -\infty$, atunci $-a_n \to 0$ şi $-b_n \to \infty$ şi $a_n b_n = (-a_n)(-b_n)$.

4. Cîtul şirurilor care au limită

Ştim că raportul a două şiruri convergente este un şir convergent dacă limita şirului de la numitor este diferită de 0, şi *limita raportului este egală cu raportul limitelor.*

Pentru şirurile care au limite infinite avem următoarea proprietate:

I) *Dacă* $b_n \to +\infty$, *sau dacă* $b_n \to -\infty$, *atunci* $\frac{1}{b_n} \to 0$.

Din ipoteză deducem că $|b_n| \to +\infty$; să arătăm că $\left|\frac{1}{b_n}\right| \to 0$, de unde va rezulta că $\frac{1}{b_n} \to 0$.

Fie (α, β) o vecinătate a lui 0, $\alpha < 0 < \beta$; deoarece $|b_n| \to +\infty$, avem $|b_n| \in \left(\frac{1}{\beta}, +\infty\right)$, adică $|b_n| > \frac{1}{\beta}$ şi deci $\frac{1}{|b_n|} < \beta$, adică $\left|\frac{1}{b_n}\right| \in (\alpha, \beta)$, pentru toţi indicii, cu excepţia unui număr finit dintre ei. Rezultă că $\left|\frac{1}{b_n}\right| \to 0$ şi deci $\frac{1}{b_n} \to 0$.

Din această proprietate deducem următoarele propoziţii:

1) *Dacă* $a_n \to a$ *şi* $b_n \to +\infty$, *atunci* $\frac{a_n}{b_n} \to 0$.

2) *Dacă* $a_n \to a$ *şi* $b_n \to -\infty$, *atunci* $\frac{a_n}{b_n} \to 0$.

În adevăr, în ambele cazuri $\frac{1}{b_n} \to 0$ și

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot 0 = 0.$$

Pentru a putea afirma și în aceste cazuri că *limita raportului este egală cu raportul limitelor*, sîntem conduși să punem

$$\frac{a}{+\infty} = 0 \text{ și } \frac{a}{-\infty} = 0, \text{ oricare ar fi } a \in R.$$

Observații. 1° Dacă ambele șiruri (a_n) (b_n) au limite infinite, despre șirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu mai putem afirma nimic. Uneori șirul cît are limită (finită sau infinită), alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi numărul $a \in R$, putem găsi două șiruri (a_n) și (b_n) cu limite infinite astfel ca $\frac{a_n}{b_n} \to a$.

De aceea nu se acordă nici un sens scrierilor $\frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$; spunem că operațiile respective *nu sînt definite*, sau că sînt *operații fără sens*.

Exemple.

1) (a_n): $a, 2a, 3a, \ldots, na, \ldots, (a > 0)$; $a_n \to +\infty$;
(b_n): $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $b_n \to +\infty$;
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$: $a, a, a, \ldots, a, \ldots$ $\frac{a_n}{b_n} \to a$.

2) (a_n): $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $a_n \to \infty$;
(b_n): $1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$ $b_n \to +\infty$;
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ $\frac{a_n}{b_n} \to 0$.

3) (a_n): $1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$ $a_n \to +\infty$;
(b_n): $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $b_n \to +\infty$;
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$.

4) (a_n): $2, 2, 6, 4, \ldots, 4n-2, 2n, \ldots$ $a_n \to +\infty$;
(b_n): $1, 2, 3, 4, \ldots, 2n-1, 2n \ldots$ $b_n \to +\infty$;
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$: $2, 1, 2, 1, \ldots, 2, 1, \ldots$ nu are limită.

Înmulțind cu -1 unul sau ambele șiruri din fiecare exemplu, se obțin alte exemple pentru cazul cînd unul sau ambele șiruri au limita $-\infty$.

Trebuie observat că dacă $a_n \to +\infty$ și $b_n \to +\infty$, sau dacă $a_n \to -\infty$ și $b_n \to -\infty$, șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are termenii pozitivi, cu excepția unui număr finit dintre ei; dacă deci șirul cît are limită, această limită este *pozitivă* (finită sau $+\infty$).

Pentru un număr $a < 0$, putem găsi totdeauna un șir $a_n \to +\infty$ și un șir $b_n \to -\infty$, astfel ca $\frac{a_n}{b_n} \to a$.

Reamintim că o altă operație fără sens este împărțirea cu 0.

S-a arătat că dacă $a_n \to 0$ și $b_n \to 0$, șirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are uneori limită (finită sau infinită), alteori nu are limită.

Dacă însă $a_n \to a \neq 0$ (sau dacă $a_n \to +\infty$ sau $a_n \to -\infty$) și $b_n \to 0$, șirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este totdeauna *nemărginit*; uneori are limita $+\infty$ sau $-\infty$, alteori nu are limită.

Putem acum da o formulare unitară relativă la limita cîtului a două șiruri:

Teoremă. Dacă șirurile (a_n) și (b_n) au limită (finită sau infinită) și dacă raportul limitelor are sens, atunci șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are limită și:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Cazuri exceptate:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$.

Fiecare din cele patru cazuri cuprinse aici vor fi denumite „*cazul* $\frac{\infty}{\infty}$“. De altfel, cazurile $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$ se reduc la cazul $\frac{\infty}{\infty}$; de exemplu, dacă $a_n \to +\infty$ și $b_n \to -\infty$, atunci $-b_n \to +\infty$, iar $\frac{a_n}{b_n} = -\frac{a_n}{-b_n}$ etc.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Dacă avem și $\lim a_n = 0$, acest caz va fi denumit mai departe „cazul $\frac{0}{0}$“.

Observație. În cazul cînd $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, avem totdeauna $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$.

Într-adevăr, $|b_n| \to 0$, și $|b_n| > 0$ deci $\frac{1}{|b_n|} \to +\infty$; apoi $|a_n| \to |a| > 0$, deci $|a_n| \cdot \frac{1}{|b_n|} \to |a| \cdot \infty = \infty$, adică $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to \infty$. Trebuie observat însă că, deși $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$, este posibil ca șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ să nu aibă limită.

5. Aplicații

1) *Dacă* $x_n \to +\infty$, *atunci* $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$. *Vom scrie*

$$\lim_{x_n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Putem presupune $x_n \geqslant 1$, înlăturînd, eventual, numărul finit de termeni care nu verifică această condiție.

Pentru fiecare termen x_n, fie p_n numărul *natural* care verifică inegalitățile

$$p_n \leqslant x_n < p_n + 1.$$

Deoarece $x_n \to +\infty$ și $p_n + 1 \geqslant x_n$, avem $p_n + 1 \to \infty$ și atunci avem de asemenea $p_n \to +\infty$.

Deoarece (p_n) și $(p_n + 1)$ sînt formate din numere naturale și au limita $+\infty$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n+1} = e.$$

Avem de asemenea $\frac{1}{p_n} \to 0$, $\frac{1}{p_n+1} \to 0$, deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right) = 1 \text{ și } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right) = 1.$$

Atunci $\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n} = \left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n+1}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{-1}$,

deci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n+1} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{-1} = e\cdot 1 = e.$$

De asemenea,

$$\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n+1} = \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}\left(1+\frac{1}{p_n}\right),$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Din inegalitățile $p_n \leqslant x_n < p_n + 1$ deducem succesiv

$$\frac{1}{p_n+1} < \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{p_n}, \quad 1+\frac{1}{p_n+1} < 1+\frac{1}{x_n} \leqslant 1+\frac{1}{p_n},$$

$$\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{p_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n+1},$$

adică:

$$\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n+1}$$

și, deoarece șirurile de la extremități au limita e, rezultă că și șirul $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ are limita e.

2) *Dacă* $x_n \to -\infty$, *atunci* $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$. *Vom scrie*

$$\lim_{x_n \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Să punem $y_n = -x_n$. Atunci $y_n \to +\infty$, deci $y_n - 1 \to \infty$ și deci

$$\left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n-1} \to e.$$

Dar

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n-1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n-1}\right)^{y_n} = \left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n-1}\left(1+\frac{1}{y_n-1}\right).$$

Deoarece $y_n - 1 \to +\infty$, rezultă că $\frac{1}{y_n-1} \to 0$, deci $1+\frac{1}{y_n-1} \to 1$ și deci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n-1} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n-1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

3) *Dacă* $x_n > 0$ *și* $x_n \to 0$, *atunci* $(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$. *Vom scrie*

$$\lim_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n > 0}} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.$$

Să punem $y_n = \frac{1}{x_n} > 0$; deoarece $x_n > 0$ și $x_n \to 0$, rezultă $y_n \to \infty$ și deci:

$$\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \to e.$$

Dar

$$(1+x)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}$$

și deci:

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e.$$

4) *Dacă* $x_n < 0$ *și* $x_n \to 0$, *atunci* $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$. *Vom scrie*

$$\lim_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n < 0}} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.$$

Să punem $y_n = \frac{1}{x_n}$; deoarece $x_n < 0$ și $x_n \to 0$, avem $y_n \to -\infty$, deci:

$$\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \to e. \text{ Dar}$$

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n}$$

și deci:

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e.$$

5) *Dacă* $x_n \to +\infty$, *atunci* $\frac{e^{x_n}}{x_n} \to +\infty$. *Vom scrie*

$$\lim_{x_n \to \infty} \frac{e^{x_n}}{x_n} = +\infty.$$

Într-adevăr, deoarece $e^x \geqslant x$ pentru orice $x \in R$, avem:

$$\frac{e^{x_n}}{x_n} = \frac{\left(e^{\frac{x_n}{2}}\right)^2}{\left(x_n^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \left(\frac{e^{\frac{x_n}{2}}}{x_n^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \geqslant \left(\frac{\frac{x_n}{2}}{\sqrt{x_n}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right) (\sqrt{x_n})^2 = \left(\frac{1}{4}\right) x_n,$$

adică:

$$\frac{e^{x_n}}{x_n} \geqslant \frac{1}{4} x_n. \quad \text{Dar} \frac{1}{4} x_n \to +\infty,$$

deci:

$$\lim_{x_n \to \infty} \frac{e^{x_n}}{x_n} = \infty.$$

Observație. Raționamentul de mai sus se aplică pentru orice bază $a \geqslant 2$, în loc de e, deoarece pentru $a \geqslant 2$ avem $a^x > x$ oricare ar fi x. Se va arăta mai departe că avem:

$$\lim_{x_n \to +\infty} \frac{a^{x_n}}{x_n} = +\infty$$

oricare ar fi $a > 1$.

6) Din exemplul 5 rezultă

$$\lim_{x_n \to \infty} \frac{x_n}{e^{x_n}} = 0.$$

7) *Dacă* $x_n \to +\infty$, $x_n > 0$, *avem* $\frac{\ln x_n}{x_n} \to 0$. *Vom scrie*

$$\lim_{x_n \to \infty} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0.$$

Din inegalitatea $e^x \geqslant x > 0$, deducem $x \geqslant \ln x$ pentru $x > 0$. Presupunînd $x_n \geqslant 1$, avem

$$\frac{\ln x_n}{x_n} = \frac{\ln (\sqrt{x_n})^2}{x_n} = 2\,\frac{\ln \sqrt{x_n}}{x_n} \leqslant 2\,\frac{\sqrt{x_n}}{x_n} = 2\,\frac{1}{\sqrt{x_n}},$$

adică $\frac{\ln x_n}{x_n} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x_n}}$.

Dar $x_n \to +\infty$, deci $\sqrt{x_n} \to \infty$, şi deci $\frac{2}{\sqrt{x_n}} \to 0$.

Aplicînd criteriul de convergenţă al şirurilor deducem $\frac{\ln x_n}{x_n} \to 0$.

8) Din exemplul 7 deducem

$$\lim_{x_n \to +\infty} \frac{x_n}{\ln x_n} = +\infty.$$

Într-adevăr, presupunînd $x_n > 1$, avem $\frac{\ln x_n}{x_n} > 0$ şi $\frac{\ln x_n}{x_n} \to 0$;

deducem $$\frac{x_n}{\ln x_n} \to +\infty.$$

9) *Dacă* $x_n \to -\infty$, *avem* $x_n \cdot e^{x_n} \to 0$. *Vom scrie*

$$\lim_{x_n \to -\infty} x_n \cdot e^{x_n} = 0.$$

Într-adevăr, să punem $x_n = -y_n$, deci $y_n \to +\infty$. Atunci

$$x_n e^{x_n} = -y_n e^{-y_n} = -\frac{y_n}{e^{y_n}} \to 0.$$

10) *Dacă* $x_n \to 0$, $x_n > 0$, *atunci* $x_n \ln x_n \to 0$. *Vom scrie*

$$\lim_{x_n \to 0} x_n \ln x_n = 0.$$

Să punem $y_n = \frac{1}{x_n}$; deoarece $x_n > 0$ şi $x_n \to 0$, avem $y_n \to +\infty$.

Atunci:

$$x_n \ln x_n = \frac{1}{y_n} \ln \frac{1}{y_n} = -\frac{\ln y_n}{y_n} \to 0.$$

6. Puteri

Pentru puteri de șiruri convergente s-a demonstrat că: dacă $a_n \to a$ și $\alpha_n \to \alpha$, dacă a^α are sens (adică $a > 0$ pentru $\alpha \leqslant 0$, $a_n \geqslant 0$ și $a \geqslant 0$ pentru $\alpha > 0$), atunci $a_n^{\alpha_n} \to a^\alpha$, adică

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\alpha_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n}.$$

Pentru șirurile care au limite infinite avem următoarele propoziții:

1) *Dacă* $a_n \to \infty$ *și* $\alpha_n \to \infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to \infty$.
2) *Dacă* $a_n \to a > 1$ *și* $\alpha_n \to \infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to \infty$.
3) *Dacă* $a_n \to +\infty$ *și* $\alpha_n \to -\infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to 0$.
4) *Dacă* $a_n \to a > 1$ *și* $\alpha_n \to -\infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to 0$.
5) *Dacă* $a_n \to \frac{1}{a}$, $a > 1$ *și* $\alpha_n \to +\infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to 0$.
6) *Dacă* $a_n \to 0$ *și* $\alpha_n \to +\infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to 0$.
7) *Dacă* $a_n \to \frac{1}{a}$, $a > 1$ *și* $\alpha_n \to -\infty$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to +\infty$.
8) *Dacă* $a_n \to +\infty$ *și* $\alpha_n \to \alpha > 0$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to +\infty$.
9) *Dacă* $a_n \to +\infty$ *și* $\alpha_n \to -\alpha$, $\alpha > 0$, *atunci* $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

Într-adevăr, avem: $a_n^{\alpha_n} = e^{\ln a_n^{\alpha_n}} = e^{\alpha_n \cdot \ln a_n}$.

Să observăm că dacă $a_n \to +\infty$, atunci $\ln a_n \to +\infty$, dacă $a_n \to a > 1$, atunci $\ln a_n \to \ln a > 0$, iar dacă $a_n \to \frac{1}{a}$, $a > 1$, atunci $\ln a_n \to \ln\frac{1}{a} < 0$.

De asemenea, dacă $\beta_n \to +\infty$, atunci $e^{\beta_n} \to +\infty$, iar dacă $\beta_n \to -\infty$, atunci $e^{\beta_n} \to 0$. Cu excepția propoziției 6) toate celelalte se demonstrează folosind teoremele privitoare la produsul de șiruri aplicate produsului $\alpha_n \ln a_n$.

Pentru exemplificare, să demonstrăm propoziția 9). Deoarece $a_n \to +\infty$, avem $\ln a_n \to +\infty$; și deoarece $\alpha_n \to -\alpha < 0$, avem $\alpha_n \cdot \ln a_n \to -\infty$, deci $e^{\alpha_n \ln a_n} \to 0$, adică $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

Propoziția 6) se demonstrează astfel: deoarece $a_n \to 0$, există un număr $a < 1$, astfel ca $a_n \leqslant a < 1$, cu excepția unui număr finit de indici. Dar $\alpha_n \to +\infty$, și pe baza proprietății 5) deducem $a^{\alpha_n} \to 0$; deoarece $a_n > 0$ (cu excepția unui număr finit de indici), din $a_n \leqslant a$ deducem $a_n^{\alpha_n} \leqslant a^{\alpha_n} \to 0$, deci $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

Lăsăm pe seama cititorului, ca exercițiu, demonstrarea celorlalte propoziții.

Pentru a putea scrie și în aceste cazuri, ca și pentru șirurile convergente, că

$$\lim_{n\to\infty} (a_n^{\alpha_n}) = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n}$$

sîntem conduşi să punem ($a > 1$, $\alpha > 0$)

$$\infty^{\infty} = \infty;\ a^{\infty} = \infty;\ \infty^{-\infty} = 0;\ a^{-\infty} = 0;\ \left(\frac{1}{a}\right)^{\infty} = 0;$$

$$0^{\infty} = 0;\quad \left(\frac{1}{a}\right)^{-\infty} = \infty;\quad \infty^{\alpha} = \infty;\quad \infty^{-\infty} = 0.$$

O b s e r v a ţ i e. Nu se acordă nici un sens scrierilor 1^{∞}, $1^{-\infty}$ şi ∞^0 deoarece dacă $a_n \to 1$ şi $\alpha_n \to +\infty$ sau $\alpha_n \to -\infty$, respectiv dacă $a \to \infty$ şi $\alpha_n \to 0$, despre şirul $a_n^{\alpha_n}$ nu se poate afirma nimic. Uneori are limita finită pozitivă sau $+\infty$, alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi $a \geqslant 0$, putem găsi două şiruri $a_n \to 1$ şi $\alpha_n \to +\infty$, respectiv $a_n \to +\infty$ şi $\alpha_n \to 0$ astfel ca $a_n^{\alpha_n} \to a$. Spunem că operaţiile 1^{∞}, $1^{-\infty}$ şi ∞^0 *nu sînt definite* sau că sînt *operaţii fără sens*.

Exemple.

C a z u l 1^{∞}

1) (a_n): $e^{\alpha}, e^{\frac{\alpha}{2}}, \ldots, e^{\frac{\alpha}{n}}, \ldots, a_n \to 1$;
(α_n): $1, 2, \ldots, n, \ldots$ $\alpha_n \to +\infty$;
$\left(a_n^{\alpha_n}\right)$. $e^{\alpha}, e^{\alpha}, \ldots e^{\alpha}, \ldots a_n^{\alpha_n} \to e^{\alpha}$.

Dînd lui α *toate valorile reale*, obţinem pentru e^{α} *toate valorile strict pozitive.*

2) (a_n): $e, e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{3}}, \ldots, e^{\frac{1}{n}}, \ldots, a_n \to 1$;
(α_n): $1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$ $\alpha_n \to +\infty$;
$\left(a_n^{\alpha_n}\right)$: $e, e^2, e^3, \ldots, e^n, \ldots$ $a_n^{\alpha_n} \to +\infty$.

3) (a_n): $e^{-1}, e^{\frac{-1}{2}}, \ldots, e^{-\frac{1}{n}}, \ldots$ $a_n \to 1$;
(α_n): $1, 2^2, \ldots, n^2, \ldots$ $b_n \to +\infty$;
$\left(a_n^{\alpha_n}\right)$: $e^{-1}, e^{-2}, \ldots, e^{-n}, \ldots$ $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

4) (a_n): $e^{-1}, e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{-1}{3}}, e^{\frac{1}{4}}, \ldots$ $a_n \to 1$;
(α_n): $1, 2, 3, 4, \ldots$ $\alpha_n \to +\infty$;
$\left(a_n^{\alpha_n}\right)$: $e^{-1}, e, e^{-1}, e, \ldots$ nu are limită.

Schimbînd pe α_n în $-\alpha_n$, obţinem alte patru exemple pentru cazul $1^{-\infty}$.

C a z u l ∞^0

1) (a_n): $e, e^2, e^3, \ldots, e^n, \ldots$ $a_n \to \infty$;
(α_n): $\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}, \ldots, \frac{\alpha}{n}, \ldots$ $\alpha_n \to 0$;
$\left(\alpha_n^{\alpha_n}\right)$: $e^{\alpha}, e^{\alpha}, e^{\alpha}, \ldots, e^{\alpha}, \ldots$ $a_n^{\alpha_n} \to e^{\alpha}$;

dînd lui α toate valorile reale se obţin pentru e^{α} toate valorile strict pozitive.

2) (a_n): $e, e^{2^2}, e^{3^2}, \ldots, e^{n^2}, \ldots$ $a_n \to +\infty$;

(α_n): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ $\alpha_n \to 0$;

$(a_n^{\alpha_n})$: $e, e^2, e^3, \ldots, e^n, \ldots, a_n^{\alpha_n} \to +\infty$.

3) (a_n): $e, e^{2^2}, e^{3^2}, \ldots, e^{n^2}, \ldots$ $a_n \to +\infty$;

(α_n): $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots -\frac{1}{n}, \ldots, \alpha_n \to 0$;

$(a_n^{\alpha_n})$: $e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, \ldots, e^{-n}, \ldots$ $a_n^{\alpha_n} \to 0$.

4) (a_n): $e, e^2, e^3, \ldots, e^n, \ldots, a_n \to +\infty$;

(α_n): $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{n}, \ldots, \alpha_n \to 0$;

$(a_n^{\alpha_n})$: $e^{-1}, e, e^{-1}, e, \ldots$ nu are limită.

Reamintim că altă operaţie fără sens este 0^0. În cazul cînd $a_n \to 0$, $(a_n > 0)$ şi $\alpha_n \to 0$, despre şirul $(a_n^{\alpha_n})$ nu se poate afirma nimic. Uneori are limită finită pozitivă, sau $+\infty$, alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi $a \geqslant 0$, există un şir $a_n \to 0$ şi un şir $\alpha_n \to 0$, astfel ca $a_n^{\alpha_n} \to a$.

Putem acum da o formulare unitară care să înglobeze atît teorema privitoare la puterile şirurilor convergente, cît şi cele nouă propoziţii de mai sus.

Teorema. Dacă (a_n) şi (α_n) sînt două şiruri cu limită (finită sau infinită) şi dacă puterea $(\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim_{n\to\infty} \alpha_n}$ are sens, atunci şirul $(a_n^{\alpha_n})$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\alpha_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim_{n\to\infty} \alpha_n}.$$

Cazuri exceptate:

$a_n \to 1$ şi $\alpha_n \to +\infty$ sau $\alpha_n \to -\infty$. Fiecare dintre aceste două cazuri vor fi denumite „cazul 1^∞“;

$a_n \to \infty$ şi $\alpha_n \to 0$, denumit „cazul ∞^0“;

$a_n \to 0$ şi $\alpha_n \to 0$, denumit „cazul 0^0“.

§ 5. Puncte limită ale unui şir

Un număr a, finit sau infinit, se numeşte punct limită al unui şir (a_n), dacă orice vecinătate a lui a conţine o infinitate de termeni ai şirului.

Observaţii. 1° Dacă un număr se repetă într-un şir de o infinitate de ori, acest număr este punct limită al şirului.

2° Un şir poate avea *mai multe* puncte limită. De exemplu, şirul

$$0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$$

are două puncte limită, şi anume 0 şi 1.

3° Există şiruri care au o *infinitate* de puncte limită. De exemplu, şirul

$$1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5; \ldots; 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

are o mulţime numărabilă de puncte limită şi anume fiecare număr natural este punct limită al acestui şir (deoarece fiecare număr natural se repetă de o infinitate de ori). De asemenea, $+\infty$ este punct limită.

4° Există şiruri pentru care mulţimea punctelor limită este toată dreapta reală.

Într-adevăr, deoarece mulţimea numerelor raţionale este numărabilă, putem aşeza *toate* numerele raţionale într-un şir:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Fie x_0 un număr *real* oarecare, (α, β) o vecinătate oarecare a lui x_0. Orice interval conţine o infinitate de numere raţionale. Deci vecinătatea (α, β) a lui x_0 conţine o infinitate de termeni ai şirului (a_n); rezultă că x_0 este punct limită al acestui şir. Cum x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că *orice* număr real este punct limită al şirului (a_n).

De asemenea, $+\infty$ şi $-\infty$ sînt puncte limită ale acestui şir.

5° Dacă a este punct limită al şirului (a_n), în afara unei vecinătăţi a lui a se pot, de asemenea, afla o infinitate de termeni ai şirului.

De exemplu, pentru şirul $1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$ numărul 1 este punct limită al şirului. În afara vecinătăţii $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ a lui 1 se află o infinitate de termeni ai şirului, şi anume, toţi termenii nuli.

6° Există şiruri care nu au nici un punct limită finit, de exemplu şirul numerelor naturale $1, 2, 3, \ldots$

Propoziţie. Un număr a este punct limită al unui şir (a_n) dacă şi numai dacă există un subşir al acestuia care tinde către a.

Dacă există un subşir care tinde către a, atunci în fiecare vecinătate a lui se află toţi termenii subşirului, cu excepţia unui număr finit dintre ei, adică o infinitate de termeni ai şirului (a_n), deci a este punct limită al şirului (a_n).

Reciproc, fie a un punct limită al şirului (a_n). Să presupunem întîi că a este finit. În vecinătatea $V_1 = (a - 1, a + 1)$ a lui a se află o infinitate de termeni ai şirului; fie a_{n_1} unul dintre aceştia. Avem $|a_{n_1} - a| < 1$.

Să presupunem că am ales un termen a_{n_p} în vecinătatea

$V_p = \left(a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}\right)$. În vecinătatea $V_{p+1} = \left(a - \frac{1}{p+1}, a + \frac{1}{p+1}\right)$ se află o infinitate de termeni ai şirului; alegem în V_{p+1} un termen $a_{n_{p+1}}$ cu $n_{p+1} > n_p$.

Avem $|a_{n_{p+1}} - a| < \frac{1}{p+1}$.

Aşadar, prin inducţie completă putem alege un subşir de numere naturale $n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots$,
astfel ca

$$|a_{n_p} - a| < \frac{1}{p} \text{ pentru orice } p \in N;$$

$(a_{n_p})_{p\in N}$ este un subşir al şirului iniţial şi din inegalităţile precedente, folosind criteriul de convergenţă, deducem că

$$\lim_{p\to\infty} a_{n_p} = a.$$

Dacă $a = +\infty$ se aleg vecinătăţile $V_p = (p, +\infty)$ ale lui $+\infty$ şi se procedează ca mai sus. Dacă $a = -\infty$, se iau vecinătăţile $V = (-\infty, -p)$.

Observaţie. Din lema lui Cesàro rezultă că un şir mărginit are cel puţin un punct limită. De asemenea, din extensiunea acestei leme rezultă că orice şir are cel puţin un punct limită.

Lemă. Mulţimea A a punctelor limită finită ale unui şir (a_n) este închisă.

Dacă $A = \varnothing$, atunci A este închisă. Să presupunem că $A \neq \varnothing$ şi fie a un punct aderent al lui A. Fie de asemenea o vecinătate V a lui a; în această vecinătate se află cel puţin un punct $b \in A$, iar V este şi o vecinătate a lui b. Deoarece b este punct limită al şirului, în vecinătatea V al lui b se află o infinitate de termeni ai şirului. Aşadar, în orice vecinătate V a lui a se află o infinitate de termeni ai şirului, deci a este punct limită al şirului, adică $a \in A$. Deoarece mulţimea A îşi conţine toate punctele aderente, este închisă.

Din această lemă rezultă că dacă A nu este vidă, şi dacă este minorată, atunci $\inf A \in A$, iar dacă este majorată, atunci $\sup A \in A$.

Propoziţie. Pentru orice şir (a_n) există un cel mai mic punct limită (finit sau infinit) şi un cel mai mare punct limită (finit sau infinit).

Într-adevăr, dacă şirul (a_n) este nemajorat, atunci $+\infty$ este punct limită al şirului, deci $+\infty$ este cel mai mare punct limită al şirului.

Să presupunem că (a_n) este majorat şi fie A mulţimea punctelor sale limită *finite*. Dacă A este vidă, înseamnă că singurul punct limită al şirului este $-\infty$, deci $-\infty$ este şi cel mai mare punct limită al şirului. Dacă A nu este vidă, mulţimea A este majorată, ca şi şirul (a_n), iar $\sup A \in A$, adică $\sup A$ este punct limită, şi deci cel mai mare punct limită al şirului.

Existenţa celui mai mic punct limită al şirului se demonstrează în mod asemănător.

Definiţie. Fie (a_n) un şir. Cel mai mic punct limită al şirului se numeşte limita inferioară a şirului şi se notează $\lim\inf_{n\to\infty} a_n$ sau $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$; cel mai mare punct limită al şirului se numeşte limită superioară a şirului şi se notează $\lim\sup_{n\to\infty} a_n$ sau $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

Cele două limite extreme ale şirului sînt caracterizate de următoarele proprietăţi:

I) $l = \lim\inf_{n\to\infty} a_n$ *dacă şi numai dacă, pentru orice vecinătate* (α, β) *a lui* l, *sînt îndeplinite următoarele condiţii*:

1) *mulţimea indicilor* n *pentru care* $a_n \leqslant \alpha$ *este finită sau vidă;*

2) *mulţimea indicilor* n *pentru care* $a_n \leqslant \beta$ *este infinită.*

II) $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$ *dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate* (α,β) *a lui* L, *sînt îndeplinite următoarele condiții:*

1) *mulțimea indicilor n pentru care* $\beta \leqslant a_n$ *este finită sau vidă;*

2) *mulțimea indicilor n pentru care* $\alpha \leqslant a_n$ *este infinită.*

Următoarea relație se verifică fără dificultate:

$$-\infty \leqslant \inf_{n\in N} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \sup_{n\in N} a_n \leqslant +\infty.$$

Propoziție. Un șir are limită dacă și numai dacă limitele sale extreme sînt egale. Dacă șirul are limită, limitele extreme și limita șirului sînt egale.

Dacă șirul (a_n) are limita a, atunci în afara oricărei vecinătăți (α, β) a lui a se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului, deci inegalitățile $a_n \leqslant \alpha$ și $\beta \leqslant a_n$ sînt verificate cel mult de un număr finit de termeni, iar inegalitățile $a_n \leqslant \beta$ și $\alpha \leqslant a_n$ sînt verificate de o infinitate de termeni ai șirului. Rezultă că

$$a = \liminf_{n\to\infty} a_n \text{ și } a = \limsup_{n\to\infty} a_n,$$

deci limitele extreme sînt egale între ele și egale cu limitele șirului.

Reciproc, să presupunem că limitele extreme sînt egale și să notăm cu a valoarea lor comună. Pentru orice vecinătate (α, β) a lui a, inegalitățile $a_n \leqslant \alpha$ și $\beta \leqslant a_n$ sînt verificate cel mult de un număr finit de indici, adică în afara vecinătății (α, β) se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului. Rezultă că a este limita șirului.

Corolar. Un șir are limită dacă și numai dacă are un singur punct limită.

Propoziție. Dacă $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, **atunci**

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \text{ și } \liminf_{n\to\infty} \alpha_n a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

oricare ar fi șirul (a_n).

Să notăm $\omega = \limsup_{n\to\infty} a_n$ și $\omega' = \limsup_{n\to\infty} \alpha_n a_n$.

Există un subșir $a_{n_p} \xrightarrow[p]{} \omega$; atunci $\alpha_{n_p} \to 1$, deci $\alpha_{n_p} a_{n_p} \to \omega$ și deci ω este punct limită al șirului $(\alpha_n a_n)$, de unde rezultă că $\omega \leqslant \limsup_{n\to\infty} \alpha_n a_n = \omega'$.

Există de asemenea un subșir $\alpha_{n_k} a_{n_k} \xrightarrow[k]{} \omega'$; atunci $\alpha_{n_k} \to 1$, deci

$a_{n_k} = \dfrac{\alpha_{n_k} a_{n_k}}{\alpha_{n_k}} \to \omega'$, deci ω' este punct de limită al șirului (a_n), de unde rezultă că

$$\omega' \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n = \omega.$$

Așadar, $\omega' = \omega$, adică

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

La fel se demonstrează și cealaltă egalitate.

Propoziţie. **Dacă** $a_n \leqslant b_n$ **pentru orice** n, **atunci**

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n \text{ şi } \liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Fie $\omega = \limsup_{n\to\infty} a_n$; există un subşir $a_{n_p} \to \omega$; orice subşir al şirului (a_{n_p}) are limita ω. Atunci, dacă un subşir al şirului (b_{n_p}) are limită, ea este mai mare sau egală cu ω, adică orice punct limită al şirului (b_{n_p}) este mai mare decît ω.

Cum punctele limită ale şirului (b_{n_p}) sînt şi puncte limită ale şirului (b_n), rezultă că $\omega \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Cealaltă inegalitate se demonstrează la fel.

Se demonstrează următoarele egalităţi:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in N} \sup_{p\geqslant 0} a_{n+p};$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in N} \inf_{p\geqslant 0} a_{n+p}$$

Capitolul V

LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE

§ 1. Limita unei funcții într-un punct

1. Punerea problemei

Într-unul din capitolele precedente au fost studiate limitele unor funcții particulare, anume șirurile. Un șir (a_n) are limita a (finită sau infinită) dacă pentru valori ale indicelui n suficient de mari (suficient de vecine cu $+\infty$) putem realiza ca termenii șirului să fie cît dorim de apropiați (vecini) de a.

În acest capitol va fi studiată noțiunea de limită într-un punct a unei funcții oarecare. Problema care se pune acum se poate formula astfel:

Dîndu-se o funcție reală de variabilă reală f: $E \to R$, să se cerceteze comportarea sa în jurul unui punct x_0, adică să se cerceteze ce se întîmplă cu valorile $f(x)$ ale funcției atunci cînd argumentul x se apropie din ce în ce mai mult de x_0. Se apropie și valorile funcției din ce în ce mai mult de un anumit număr l (finit sau infinit)? Altfel spus, problema care se pune este dacă pentru valorile argumentului x suficient de vecine cu x_0, putem realiza ca valorile funcției $f(x)$ să fie cît dorim de vecine cu un anumit număr l (finit sau infinit).

Problema astfel pusă necesită unele precizări. Comportarea funcției f în jurul lui x_0 se referă *nu* la valoarea funcție în x_0, ci în celelalte puncte vecine cu x_0; prin urmare, problema comportării funcției în jurul lui x_0 se poate pune chiar dacă funcția *nu* este definită în x_0. Pe de altă parte, pentru a putea studia comportarea funcției în jurul lui x_0, *trebuie să existe puncte* $x \neq x_0$ *oricît de vecine cu* x_0, în care funcția f *să fie definită*, adică x_0 trebuie să fie *punct de acumulare* pentru mulțimea E pe care este definită funcția f.

Dacă mulțimea E este *nemajorată*, ea are punctul $+\infty$ ca punct de acumulare. În acest caz se poate pune problema comportării funcției în jurul lui $+\infty$, dînd argumentului x valori din ce în ce mai vecine cu $+\infty$ (adică din ce în ce mai mari) și văzînd ce se întîmplă cu valorile funcției.

Dacă mulțimea E este *neminorată* ea are punctul $-\infty$ ca punct de acumulare. În acest caz se poate pune problema comportării funcției în jurul lui $-\infty$.

2. Definiția limitei cu ajutorul vecinătăților

Considerațiile precedente ne conduc la definiția limitei unei funcții într-un punct.

Fie funcția $f: E \to R$, și x_0 un *punct de acumulare* al mulțimii E (x_0 finit sau infinit).

Definiție. Se spune că un număr l (finit sau infinit) este limita funcției f în punctul x_0, dacă pentru orice vecinătate U a lui l există o vecinătate V a lui x, astfel încît, oricare ar fi $x \neq x_0$ din $V \cap E$, să avem $f(x) \in U$.

În această definiție, V depinde, natural, de U.

Limita funcției f în punctul x_0 se notează:

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$ sau, mai simplu, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

și se citește

„*limită de $f(x)$ cînd x tinde către x_0*".

Observații. 1° În loc de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ vom scrie adesea „$f(x) \to l$ cînd $x \to x_0$" sau, uneori, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$. Notațiile: $\lim f(x)$, sau $f(x) \to l$, sau $x \to x_0$ scrise separat nu au sens.

2° După cum s-a specificat la început, problema existenței limitei funcției f în punctul x_0 se poate pune chiar dacă f nu este definită în x_0, adică dacă $x_0 \notin E$ (x_0 fiind însă *punct de acumulare* al lui E). În acest caz, restricția $x \neq x_0$ din definiția limitei este de prisos, fiind verificată de la sine (deoarece $x \in V \cap E$ și $x_0 \notin E$).

În particular, dacă E nu este majorată, se poate lua $x_0 = +\infty$, iar dacă E nu este minorată, se poate lua $x_0 = -\infty$. În aceste cazuri condiția $x \neq x_0$ este verificată de la sine.

Dacă însă x_0 nu este punct de acumulare al mulțimii E (adică dacă este un punct izolat al lui E sau punct exterior al lui E), definiția limitei nu se mai poate aplica. Problema existenței limitei funcției *nu are sens* într-un asemenea punct.

De exemplu, pentru funcția $f(x) = \ln x$ definită pe $E = (0, +\infty)$ nu are sens $\lim\limits_{x \to -1} \ln x$ sau $\lim\limits_{x \to -5} \ln x$, deoarece -1 și -5 nu sînt puncte de acumulare (ci sînt puncte exterioare) ale mulțimii E.

De asemenea, pentru funcția $f(n) = n^2$, definită pe mulțimea N a numerelor naturale, nu are sens $\lim\limits_{n \to 5} n^2$, deoarece 5 nu este punct de acumulare (ci este punct izolat) al mulțimii N.

3° Dacă f este definită în x_0, adică dacă $x_0 \in E$, (x_0 fiind punct de acumulare pentru E), funcția f poate să aibă în punctul x_0 limită diferită de valoarea $f(x_0)$ a funcției în acest punct, adică putem avea $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Funcțiile pentru care avem

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (adică $f(x) \to f(x_0)$ cînd $x \to x_0$) se numesc funcții *continue* în punctul x_0 și vor fi studiate în capitolul următor.

4° Definiția limitei unei funcții într-un punct conține în particular definiția limitei unui șir.

În adevăr, un șir (a_n) este o funcție $f(n) = a_n$ definită pe mulțimea N a numerelor naturale, care are un singur punct de acumulare, $+\infty$. Se poate considera deci limita acestei funcții în punctul $+\infty$.

Definiția limitei acestei funcții în punctul $+\infty$, $\lim_{n \to +\infty} f(n)$, este echivalentă cu definiția anterioară a limitei șirului (a_n), $\lim_{n \to \infty} a_n$.

5° A spune că l *nu* este limita funcției f în punctul x_0, înseamnă că: există o vecinătate U_0 a lui l, cu proprietatea că, pentru fiecare vecinătate V a lui x_0, există un punct $x \neq x_0$ din $V \cap E$, astfel încît $f(x) \notin U_0$ (în această propoziție, x depinde de V).

A spune că funcția f nu are limită în punctul x_0 (sau că $\lim_{x \to x_0} f(x)$ nu există) înseamnă că: oricare ar fi numărul l (finit sau infinit) există o vecinătate U a lui l (U depinde de l) cu proprietatea că, pentru fiecare vecinătate V a lui x_0 putem găsi un punct $x \neq x_0$ din $V \cap E$ (x depinde atît de V cît și de l) astfel încît $f(x) \notin U$.

6° Definiția de mai sus a limitei se aplică pentru orice funcție $f: E \to F$, unde E și F sînt spații topologice oarecare (în acest caz x_0 este punct de acumulare al lui E, iar $l \in F$).

3. Definiția cu ε și δ a limitei

În definiția cu vecinătăți a limitei, să luăm vecinătățile U ale lui l de forma:

$(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$, dacă l este finit;
$(\varepsilon, +\infty)$, dacă $l = +\infty$ (ε oarecare, nu neapărat >0);
$(-\infty, \varepsilon)$, dacă $l = -\infty$ (ε oarecare, nu neapărat <0)

și vecinătățile V ale lui x_0 de forma:

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ cu $\delta > 0$, dacă x_0 este finit;
$(\delta, +\infty)$, dacă $x_0 = +\infty$ (δ nu neapărat >0);
$(-\infty, \delta)$, dacă $x_0 = -\infty$ (δ nu neapărat <0).

A spune că $x \in V$ înseamnă:

$|x - x_0| < \delta$, dacă x_0 este finit;
$x > \delta$, dacă $x_0 = +\infty$;
$x < \delta$, dacă $x_0 = -\infty$.

A spune că $f(x) \in U$ înseamnă:

$|f(x) - l| < \varepsilon$, dacă l este finit;
$f(x) > \varepsilon$, dacă $l = +\infty$;
$f(x) < \varepsilon$, dacă $l = -\infty$.

Ținînd seama că în enunțul definiției V depinde de U, rezultă că δ depinde de ε, ceea ce se pune în evidență scriind $\delta(\varepsilon)$.

Ținînd seama de faptul că în definiția limitei putem folosi numai vecinătățile simetrice ale punctelor finite (deoarece orice vecinătate a unui punct finit conține o vecinătate simetrică a acestui punct) și transcriind,

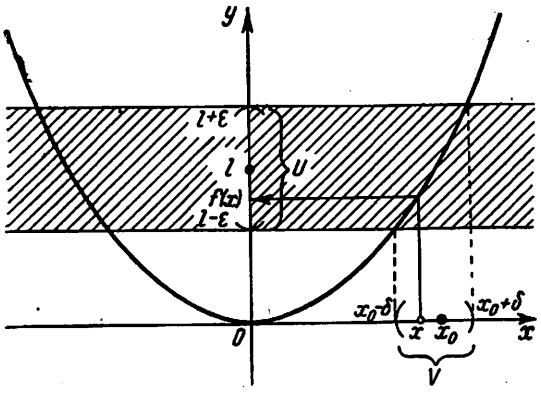


Fig. 46

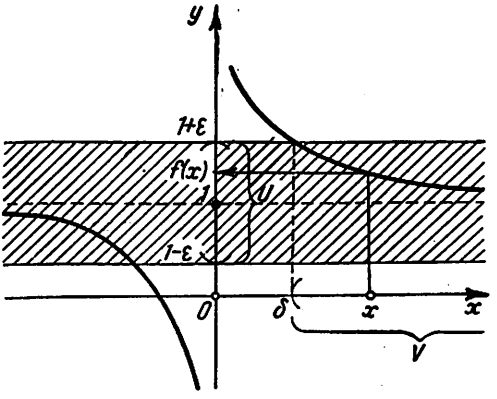


Fig. 47

cu notațiile de mai sus, definiția limitei, se obțin nouă definiții particulare, după cum x_0 sau l sînt finite sau infinite. Se obțin astfel așa-numitele „definiții cu ε și δ" ale limitei.

În enunțurile de mai jos, x_0 și l sînt considerate *finite*.

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ (sau $f(x)\to l$ cînd $x\to x_0$) *înseamnă*:

pentru orice $\varepsilon>0$, există $\delta>0$, *astfel încît oricare ar fi* $x\in E$, $x\neq x_0$, *cu* $|x-x_0|<\delta$, *să avem* $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to x_0} x^2 - x_0^2 = l$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ (sau $f(x)\to l$ cînd $x\to+\infty$) *înseamnă*:

pentru orice $\varepsilon>0$, *există un* δ, *astfel încît, oricare ar fi* $x\in E$, *cu* $x>\delta$ *să avem* $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1 = l$.

De aici se deduce în particular definiția cu ε a limitei unui șir convergent, $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 1$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ (sau $f(x)\to l$ cînd $x\to-\infty$) *înseamnă*:

pentru orice $\varepsilon>0$, *există un* δ, *astfel încît oricare ar fi* $x\in E$ *cu* $x<\delta$ *să avem* $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1 = l$.

4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (sau $f(x) \to +\infty$ cînd $x \to x_0$) *înseamnă:*
pentru orice ε, *există un* $\delta>0$, *astfel încît, oricare ar fi* $x\in E$, $x \neq x_0$, *cu* $|x - x_0| < \delta$, *să avem* $f(x) > \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x^2-1)^2} = +\infty$.

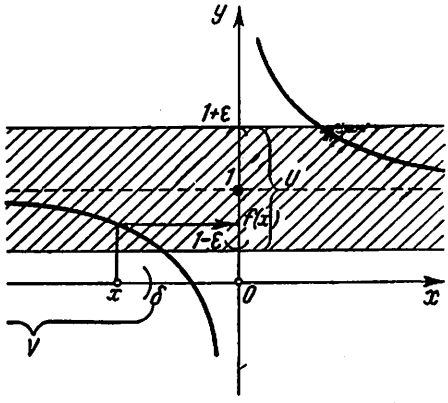


Fig. 48

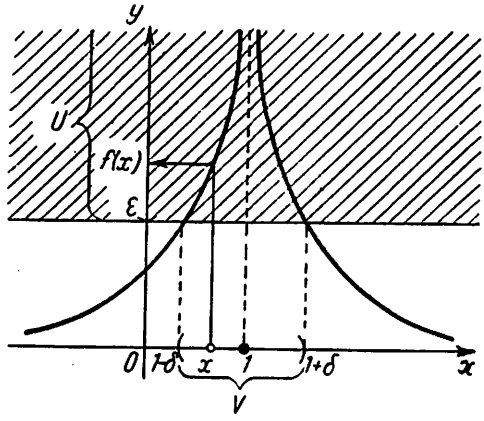


Fig. 49

5) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ (sau $f(x) \to -\infty$ cînd $x \to x_0$) *înseamnă:*
pentru orice ε, *există un* $\delta>0$, *astfel încît, oricare ar fi* $x\in E$, $x \neq x_0$, *cu* $|x - x_0| < \delta$, *să avem* $f(x) < \varepsilon$.

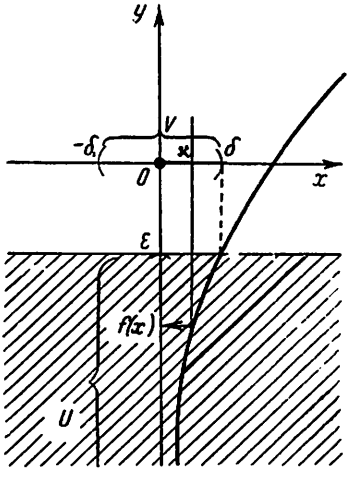


Fig. 50

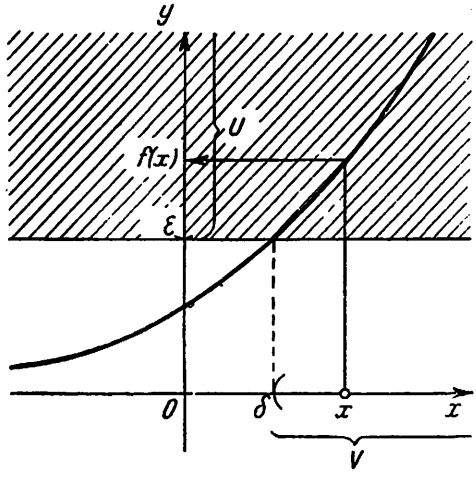


Fig. 51

Exemplu. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (sau $f(x) \to +\infty$ cînd $x \to +\infty$) *înseamnă: pentru orice* ε, *există un* δ, *astfel încît oricare ar fi* $x \in E$ *cu* $x > \delta$, *să avem* $f(x) > \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Acest caz conține în particular șirurile cu limita $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (sau $f(x) \to -\infty$ cînd $x \to +\infty$) *înseamnă: pentru orice* ε *există un* δ, *astfel încît oricare ar fi* $x \in E$ *cu* $x > \delta$ *să avem* $f(x) < \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty$.

Acest caz conține în particular șirurile cu limita $-\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (sau $f(x) \to +\infty$ cînd $x \to -\infty$) *înseamnă: pentru orice* ε, *există un* δ, *astfel încît oricare ar fi* $x \in E$, *cu* $x < \delta$, *să avem* $f(x) > \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (sau $f(x) \to -\infty$ cînd $x \to -\infty$) *înseamnă: pentru orice* ε, *există un* δ, *astfel încît oricare ar fi* $x \in E$ *cu* $x < \delta$, *să avem* $f(x) < \varepsilon$.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

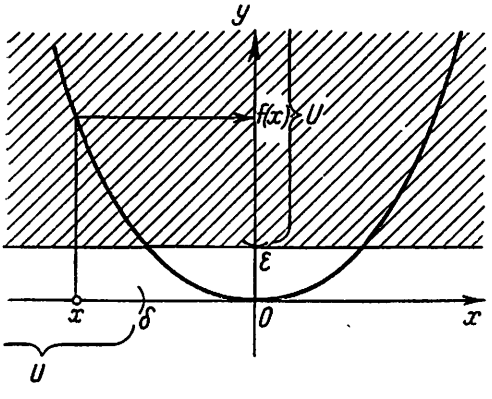


Fig. 52

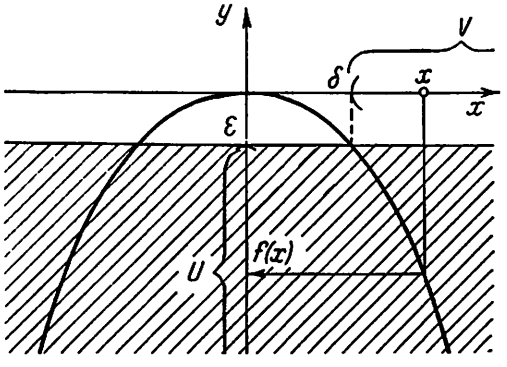


Fig. 53

O b s e r v a ț i i. 1° Dacă se iau numai vecinătățile V ale lui x_0 de forma $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sau $(\delta, +\infty)$ sau $(-\infty, \delta)$, se obțin următoarele trei definiții (fie că l este finit, fie că este infinit):

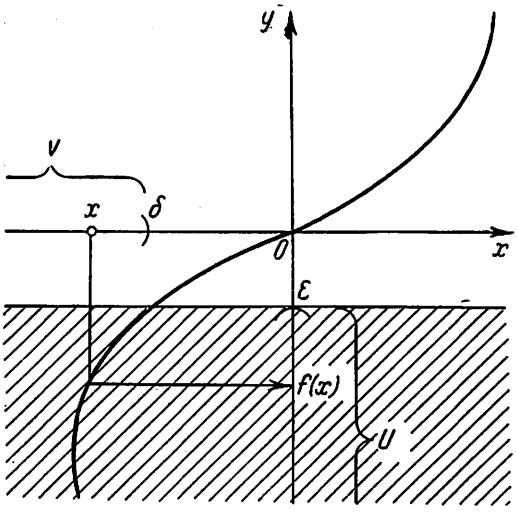


Fig. 54

1) $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, x_0 *finit, dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate* U *a lui* l, *există un număr* $\delta > 0$ *(care depinde de* U*) astfel încît, pentru orice* $x \neq x_0$ *din* E *cu* $|x - x_0| < \delta$ *să avem* $f(x) \in U$.

2) $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, *dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate* U *a lui* l, *există un număr* $\delta = \delta(U)$, *astfel încît, pentru orice* $x \neq x_0$ *din* E *cu* $x > \delta$, *să avem* $f(x) \in U$.

3) $l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, *dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate* U *a lui* l, *există un număr* $\delta = \delta(U)$ *astfel încît, pentru orice* $x \neq x_0$ *din* E *cu* $x < \delta$ *să avem* $f(x) \in U$.

2° Dacă se iau numai vecinătățile U ale lui l de forma $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, sau $(\varepsilon, +\infty)$ sau $(-\infty, \varepsilon)$, se obțin alte trei definiții (fie că x_0 este finit, fie că este infinit).

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, l *finit, dacă și numai dacă pentru orice număr* $\varepsilon > 0$, *există o vecinătate* V *(care depinde de* ε*) a lui* x_0, *astfel încît, pentru orice* $x \neq x_0$ *din* $V \cap E$ *să avem* $|f(x) - l| < \varepsilon$.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, *dacă și numai dacă pentru orice număr* ε, *există o vecinătate* $V = V(\varepsilon)$ *a lui* x_0, *astfel încît, pentru orice* $x \neq x_0$ *din* $V \cap E$ *să avem* $f(x) > \varepsilon$.

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, *dacă și numai dacă, pentru orice număr* ε *există o vecinătate* $V = V(\varepsilon)$ *a lui* x_0, *astfel încît, pentru orice* $x \neq x_0$, *din* $V \cap E$ *să avem* $f(x) < \varepsilon$.

4. Definiția cu șiruri a limitei

S-a observat mai înainte că limita unui șir este un caz particular de limită de funcție.

Limitele de șiruri pot fi însă folosite pentru a da o definiție a limitelor de funcții, echivalentă cu cea precedentă.

Teoremă. Funcția f are limita l în punctul x_0, dacă și numai dacă pentru orice șir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$ avem $f(x_n) \to l$:

Să presupunem că $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ și să arătăm că este verificată condiția din enunțul teoremei. Fie un șir oarecare $x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$; să arătăm că $f(x_n) \to l$. Să alegem o vecinătate arbitrară U a lui l. Deoarece $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît, pentru orice $x \neq x_0$ din $V \cap E$ să avem $f(x) \in U$. Dar $x_n \to x_0$, deci avem $x_n \in V \cap E$ și deci $f(x_n) \in U$, cu excepția unui număr finit de indici, adică $f(x_n) \to l$.

Reciproc, să presupunem că pentru toate șirurile $x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$, șirurile corespunzătoare $(f(x_n))$ au o limită comună, l, și să arătăm că $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Să presupunem, prin absurd, că l nu este limita funcției f în punctul x_0. Aceasta înseamnă că: *există* o vecinătate U_0 a lui l, cu proprietatea că, *oricare* ar fi vecinătatea V a lui x_0, există un punct $x_V \neq x_0$ din $V \cap E$, astfel încît $f(x_V) \notin U_0$.

Deoarece vecinătatea V este arbitrară, putem lua un șir (V_n) de vecinătăți ale lui x_0, de forma:

$$V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right), \text{ dacă } x_0 \text{ este finit;}$$

$$V_n = (n, +\infty), \qquad \text{dacă } x_0 = +\infty;$$

$$V_n = (-\infty, -n), \qquad \text{dacă } x_0 = -\infty.$$

În fiecare vecinătate V_n există un punct $x_n \neq x_0$ din E, astfel că $f(x_n) \notin U_0$. Am obținut astfel un șir (x_n) de puncte din E diferite de x_0, și $x_n \to x_0$ (deoarece, $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ sau $x_n > n$ sau $x_n < -n$, după cum x_0 este finit, $x_0 = +\infty$ sau $x_0 = -\infty$). Conform ipotezei, rezultă că $f(x_n) \to l$, deci în vecinătatea U_0 a lui l se află toți termenii $f(x_n)$ cu excepția unui număr finit dintre ei, ceea ce este în contradicție cu relația $f(x_n) \notin U_0$, oricare ar fi $n \in N$.

Deoarece presupunerea că l n-ar fi limita funcției f în punctul x_0 ne duce la contradicție, rezultă că $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ și teorema este complet demonstrată.

Observații. 1° Teorema precedentă exprimă o condiție echivalentă cu cea din enunțul definiției limitei cu ajutorul vecinătăților. De aceea condiția din enunțul teoremei poate fi luată ca definiție a limitei, iar enunțul definiției precedente devine o teoremă.

Definiția limitei unei funcții într-un punct, cu ajutorul șirurilor, se numește *definiția lui Heine*. În continuare, va fi folosită o definiție sau alta, după cum va fi mai convenabil.

2° Dacă din $x_n \to x_0$ rezultă $f(x_n) \to l$, am folosit adesea notația $\lim\limits_{n\to x_0} f(x_n) = l$ în loc de $\lim\limits_{x_n\to\infty} f(x_n) = l$.

Notația limitei unei funcții, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, se obține, formal, din cea precedentă, dacă nu se mai scrie indicele n.

3° Notația „$f(x) \to l$ cînd $x \to x_0$" capătă acum o justificare, dacă prin $x \to x_0$ înțelegem un șir *arbitrar* $x_n \to x_0$, $(x_n \neq x_0)$. Anume, prin notația „$f(x) \to l$ cînd $x \to x_0$" trebuie să înțelegem „$f(x_n) \to l$ oricare ar fi șirul $x_n \to x_0 (x_n \neq x_0)$".

4° În enunțul teoremei precedente (deci și în definiția lui Heine) s-a pus condiția ca *toate* șirurile $(f(x_n))$ să aibă o limită comună, l, independentă de șirul $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$.

Este suficient să presupunem că pentru *orice* șir $x_n \to x_0$ $(x_n \in E$, $x_n \neq x_0)$, șirul $(f(x_n))$ are limită. Rezultă atunci că limita este aceeași pentru *toate* șirurile $(f(x_n))$, independentă de șirul $x_n \to x_0$.

Într-adevăr, dacă pentru două șiruri $x'_n \to x_0$ și $x''_n \to x_0$ am avea $f(x'_n) \to l$ și $f(x''_n) \to l''$ și $l' \neq l''$, atunci șirul

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_n, x''_n, \ldots$$

tinde de asemenea către x_0, dar șirul valorilor funcției

$$f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \ldots, f(x'_n), f(x''_n), \ldots$$

nu mai are limită, deoarece, dacă ar avea o limită, l, din faptul că $(f(x'_n))$ și $(f(x''_n))$ sînt subșiruri ale celui de mai sus, ar rezulta $f(x'_n) \to l$ și $f(x''_n) \to l$. Din unicitatea limitei unui șir am deduce atunci $l' = l$ și $l'' = l$, deci $l' = l''$ și am ajunge la o contradicție.

5° Din raționamentul precedent deducem în particular că: funcția f nu are limită în x_0 (sau că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nu există) dacă și numai dacă există cel puțin un șir $x_n \to x_0 (x_n \in E$, $x_n \neq x_0)$ astfel încît șirul $(f(x_n))$ să nu aibă limită.

5. Exemple

Cu definiția lui Heine putem calcula limitele unor funcții, folosind limitele unor șiruri cunoscute.

1) Pentru funcția constantă $f(x) \equiv c$ definită pe R, avem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$, oricare ar fi x_0 (finit sau infinit). Scriem

$$\lim_{x\to x_0} c = c.$$

Într-adevăr, $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n) = \lim\limits_{x_n\to x_0} c = c$, oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$.

2) Pentru funcția identică $f(x) = x$ definită pe R, avem $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$, oricare ar fi x_0 (finit sau infinit). Scriem

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

Într-adevăr $\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = \lim_{x_n \to x_0} x_n = x_0$, oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$.

În particular, $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

3) Pentru funcția $f(x) = x^k$, (k natural) definită pe R, avem, $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^k$, oricare ar fi x_0 (finit sau infinit). Scriem

$$\lim_{x \to x_0} x^k = x_0^k, \text{ (sau } x^k \to x_0^k \text{ cînd } x \to x_0).$$

Într-adevăr, $\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = \lim_{x_n \to x_0} x_n^k = x_0^k$, oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$.

În particular, $\lim_{x \to -\infty} x^{2k} = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^{2k+1} = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty$.

4) Pentru funcția $f(x) = \frac{1}{x^k}$, ($k \in N$) definită pe $R - \{0\}$, avem $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{1}{x_0^k}$ dacă $x_0 \neq 0$ (finit sau infinit). Scriem:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{x_0^k}, \quad (x \neq x_0)$$

$\left(\text{sau } \frac{1}{x^k} \to \frac{1}{x_0^k} \text{ dacă } \quad x \to x_0 \neq 0\right)$.

În particular, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

Avem de asemenea

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty.$$

Într-adevăr, dacă $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, atunci $x_n^{2k} \to 0$ și $x_n^{2k} > 0$, deci

$\frac{1}{x_n^{2k}} \to +\infty$, adică $\lim_{x_n \to 0} \frac{1}{x_n^{2k}} = +\infty$, de unde $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty$.

Funcția $f(x) = \frac{1}{x^{2k-1}}$, ($k \in N$) nu are limită în 0.

Într-adevăr, dacă $x_n \to 0$ și $x_n > 0$, atunci $x_n^{2k-1} \to 0$ și $x_n^{2k-1} > 0$, deci $\frac{1}{x_n^{2k-1}} \to +\infty$; dacă $x_n \to 0$ și $x_n < 0$, atunci $x_n^{2k-1} \to 0$ și $x_n^{2k-1} < 0$, deci $\frac{1}{x_n^{2k-1}} \to -\infty$.

5) Pentru funcția $f(x) = x^\alpha$, $(\alpha > 0)$ definită pe $[0, +\infty)$, avem $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^\alpha$, oricare ar fi x_0 (finit sau $+\infty$).

Scriem:

$$\lim_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \text{ (sau } x^\alpha \to x_0^\alpha \text{ dacă } x \to x_0).$$

În particular, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ (sau $x^\alpha \to +\infty$ cînd $x \to +\infty$).

6) Pentru funcția $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $(\alpha > 0)$, definită pe $(0, +\infty)$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{x_0^\alpha} \text{ dacă } x_0 > 0 \left(\text{sau } \frac{1}{x^\alpha} \to \frac{1}{x_0^\alpha} \text{ cînd } x \to x_0\right).$$

În particular, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$ $\left(\text{sau } \frac{1}{x^\alpha} \to 0 \text{ cînd } x \to +\infty\right)$.

De asemenea:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty \left(\text{sau } \frac{1}{x^\alpha} \to +\infty \text{ cînd } x \to 0\right).$$

7) Pentru funcția $f(x) = a^x$, $(a > 0)$ definită pe R, avem

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}, \; x_0 \text{ finit.}$$

În particular, $\lim_{x \to 1} a^x = a$, $\lim_{x \to 0} a^x = 1$.

Dacă $a > 1$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Dacă $0 < a < 1$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$.

8) Pentru funcția $f(x) = \ln x$ definită pe $(0, +\infty)$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0, \; x_0 \text{ finit.}$$

În particular, $\lim_{x \to e} \ln x = 1$, $\lim_{x \to 1} \ln x = 0$.

De asemenea, avem

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty, \; \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Observaţie. Pentru toate funcţiile din exemplele precedente avem $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ oricare ar fi punctul x_0 din domeniul lor de definiţie. Rezultă că aceste funcţii sînt *continue* în orice punct din domeniul lor de definiţie.

9) Pentru funcţia $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ definită pe $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ avem

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Într-adevăr, $\lim_{x_n\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$, $\lim_{x_n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

§ 2. Limite laterale

1. Limite relative la submulţimi

Fie funcţia $f: E\to R$, şi o submulţime $A \subset E$; fie x_0 un punct de acumulare al lui A, deci şi al lui E. Să considerăm restricţia f_A a lui f la mulţimea A:

$$f_A(x) = f(x), \text{ pentru } x \in A.$$

Definiţie. Spunem că funcţia f are limita l în x_0, relativ la submulţimea A, dacă restricţia f_A are limita l în x_0; se notează $l = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x) = \lim_{x\to x_0} f_A(x).$$

Rezultă că $l = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x)$, dacă şi numai dacă pentru orice şir $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, format din puncte $x_n \in A$, avem $f(x_n) \to l$.

Propoziţia 1. Dacă funcţia f are limita l în x_0, atunci are în x_0 aceeaşi limită, relativ la submulţimea A.

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, $x_n \in A$, atunci $x_n \in E$, şi deci $f(x_n) \to l$.

Observaţii. 1° În cazul particular al şirurilor, se deduce că, dacă şirul (a_n) are limita l, orice subşir al său are aceeaşi limită.

2° Propoziția reciprocă nu este adevărată; funcția f poate avea în x_0 limită relativ la submulțimea A, fără a avea limită în x_0 (relativ la E).

Exemplu. $E = [-1,1]$, $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leqslant x < 0 \\ 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$; $A = [0,1]$, $f_A(x) = 1$.

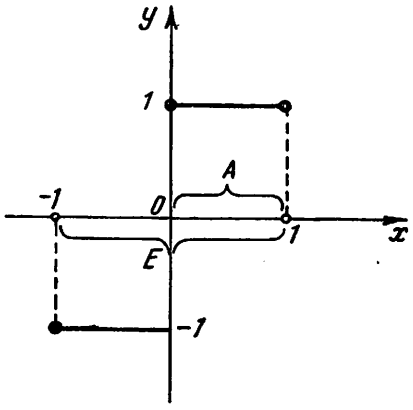


Fig. 55

Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in A}} f(x) = 1$, dar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nu există.

Într-adevăr, dacă alegem șirul (x_n) astfel:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{n}, \ldots$$

atunci $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, dar șirul $(f(x))$ este

$$-1, 1, -1, 1, \ldots$$

și nu are limită.

3° Dacă submulțimea A este definită printr-o anumită proprietate P, în notația $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x)$ se poate înlocui, pentru simplificare, semnul $x \in A$, cu proprietatea P.

Exemple. Dacă $A = (a,b) = \{x \mid a < x < b\}$, vom scrie: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ a<x<b}} f(x)$.

Dacă $A = (x_0, +\infty) = \{x \mid x > x_0\}$ vom scrie: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$.

Dacă $A = (-\infty, x_0) = \{x \mid x < x_0\}$ vom scrie: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ etc.

Propoziția 2. Dacă submulțimea A este intersecția lui E cu o vecinătate V a lui x_0, $A = V \cap E$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x)$ există dacă și numai dacă există și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; cele două limite sînt egale în acest caz.

Conform propoziției precedente dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, atunci există și $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x)$ și sînt egale. Reciproc, să presupunem că există $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x) = l$ și să arătăm atunci că există și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Fie, într-adevăr, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, $x_n \in E$. Deoarece $x_n \to x_0$ avem $x_n \in V$, deci $x_n \in A = V \cap A$, cu excepția unui număr finit de indici; deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x) = l$ există prin ipoteză, avem $f(x_n) \to l$, deci $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n) = l$, de unde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Observații. 1° Din propoziția 2) rezultă că pentru a cerceta limita funcției f în punctul x_0 este suficient să luăm o vecinătate V oarecare a lui x_0, aleasă după voie, și să considerăm funcția f definită numai pe $V \cap E$ (restricția

lui f la $V \cap E$); sau, cu alte cuvinte, este suficient ca în definiția limitei să considerăm șiruri $x_n \to x_0$, $(x_n \neq x_0)$, formate numai din puncte din $V \cap E$.

2° În cazul particular al șirurilor, vecinătățile lui $+\infty$ sînt de forma $V = (a, +\infty)$. A considera intersecția $V \cap N = (a, +\infty) \cap N$ revine la a considera numai indicii $n > a$, deci la a înlătura un număr finit de termeni ai șirului (a_n).

Propoziția 2) are în acest caz următorul enunț: șirul (a_n) are limita l, dacă și numai dacă, prin înlăturarea unui număr finit de termeni, șirul obținut are limita l.

2. Limita la stînga

Fie funcția $f: E \to R$ și x_0 un punct de acumulare al lui E. Să presupunem că x_0 este de asemenea punct de acumulare al mulțimii $A = E \cap (-\infty, x_0)$. Aceasta înseamnă că există șiruri $x_n \to x_0$ formate din puncte din E *de la stînga* lui x_0. A spune că $x \in A$, înseamnă că $x \in E$ și $x < x_0$. În acest caz se poate considera limita lui f în x_0, relativ la submulțimea A. Ajungem astfel la următoarea:

Definiție. Un număr l_s (finit sau infinit) se numește limita la stînga a funcției f în punctul x_0, dacă pentru orice vecinătate U a lui l_s există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît, oricare ar fi $x < x_0$ din $V \cap E$ să avem $f(x) \in U$.

Se folosesc următoarele notații:

$$l_s = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0 - 0).$$

Observații. 1° Pentru $x_0 = +\infty$, definiția limitei în punctul $+\infty$ este echivalentă cu definiția limitei la stînga în punctul $+\infty$.

Mai general, dacă $E = (a, b)$ definiția limitei în punctul b este echivalentă cu definiția limitei la stînga în punctul b, deoarece $(a, b) \cap (-\infty, b) = (a, b)$.

În punctul a (în particular în punctul $-\infty$), definiția precedentă nu se poate aplica, deoarece $(a, b) \cap (-\infty, a) = \varnothing$. Spunem că în punctul a limita la stînga nu are sens.

2° Dacă în definițiile limitei cu ε și δ se înlocuiește condiția $x \neq x_0$ cu $x < x_0$, se obțin definiții ale limitei la stînga echivalente cu cea de mai sus.

De asemenea, dacă în definiția lui Heine se înlocuiește condiția $x_n \neq x_0$ cu $x_n < x_0$, se obține o definiție echivalentă a limitei la stînga:

Propoziția 1. Un număr l_s este limita la stînga a funcției f în punctul x_0, dacă și numai dacă, pentru orice șir $x_n \to x_0$ $(x_n \in E, x_n < x_0)$, avem $f(x_n) \to l_s$.

Observație. Pentru ca să existe limita la stînga $f(x_0 - 0)$ este necesar și suficient ca pentru orice șir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E, x_n < x_0)$ șirul $(f(x_n))$ să aibă limită. Rezultă atunci că limita este *aceeași* oricare ar fi șirul (x_n) ales.

Definiția limitei la stînga se poate formula numai cu ajutorul șirurilor crescătoare (x_n), după cum rezultă din

Propoziția 2. $l_s = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ **dacă și numai dacă, pentru orice șir crescător** $x_0 \nearrow x_0$, $(x_n \in E,\ x_n < x_0)$ **avem** $f(x_n) \to l_s$.

Dacă $l_s = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$, avem $f(x_n) \to l$ pentru orice șir $x_n \to x_0 (x_n \in E, x_n < x_0)$, în particular pentru orice șir crescător $x_n \nearrow x_0$, $(x_n \in E, x_n < x_0)$.

Reciproc, să presupunem că avem $f(y_n) \to l_s$ pentru orice șir crescător $y_n \nearrow x_0$ $(y_n \in E, y_n < x_0)$.

Fie atunci un șir *oarecare* $x_n \to x_0 (x_n \in E, x_n < x_0)$. Putem schimba ordinea termenilor în șirul (x_n), astfel încît să obținem un șir crescător $y_n \nearrow x_0$ și deci $f(y_n) \to l_s$; putem schimba acum din nou ordinea termenilor în șirul $(f(y_n))$ ca să obținem șirul $(f(x_n))$ și deci $f(x_n) \to l_s$, adică $\lim\limits_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n < x_0}} f(x_n) = l_s$. Șirul (x_n) fiind ales arbitrar, rezultă că $l_s = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$.

Definiția limitei la stînga se poate de asemenea formula numai cu ajutorul șirurilor *strict crescătoare*.

Propoziția 3. $l_s = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$, **dacă și numai dacă pentru orice șir strict crescător** $x_n \nearrow x_0$ $(x_n \in E)$ **avem** $f(x_n) \to l_s$.

Evident, dacă $l_s = \lim f(x)$, avem $f(x_n) \nearrow l$ pentru orice șir

$$x_n \to x_0 \ (x_n \in E,\ x_n < x_0),$$

în particular pentru orice șir strict crescător

$$x_n \nearrow x_0 (x_n \in E).$$

Reciproc, să presupunem că pentru orice șir *strict crescător*

$$y_n \nearrow x_0 (y_n \in E) \text{ avem } f(y_n) \to l_s.$$

Fie atunci un șir *crescător* $x_n \nearrow x_0 (x \in E,\ x_n < x_0)$. Deoarece *toți* termenii șirului (x_n) sînt *diferiți* de limita sa x_0, rezultă că *fiecare* termen din acest șir se repetă cel mult de un număr finit de ori. Putem atunci extrage un subșir (x_{n_p}) format numai din termenii *distincți* ai șirului (x_n). Evident, $x_{n_p} \xrightarrow[p]{} x_0$ și subșirul (x_{n_p}) este strict crescător, deoarece termenii săi sînt distincți. Atunci $f(x_{n_p}) \xrightarrow[p]{} l_s$. Aceasta înseamnă că orice vecinătate U a lui l_s conține toți termenii $f(x_{n_p})$ cu excepția unui număr finit dintre ei. Cum fiecare termen $f(x_n)$ este egal cu unul din termenii $f(x_{n_p})$, iar fiecare termen $f(x_n)$ se repetă de un număr finit de ori, rezultă că în afara vecinătății U a lui l_s se află un număr finit de termeni $f(x_n)$, deci $f(x_n) \to l_s$. Cum șirul crescător $x_n \nearrow x_0 (x_n, \in E,\ x_n < x_0)$ a fost ales arbitrar, deducem că $l_s = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$.

3. Limita la dreapta

Să presupunem acum că x_0 este punct de acumulare al mulțimii $A = E \cap (x_0, +\infty)$. Aceasta înseamnă că există șiruri $x_n \to x_0$ formate din puncte din E de la dreapta lui x_0. A spune că $x \in A$ înseamnă $x \in E$

și $x > x_0$. În acest caz se poate considera limita lui f în x_0, relativ la submulțimea A. Ajungem astfel la următoarea

Definiție. **Un număr l_d (finit sau infinit) este limita la dreapta a funcției f în punctul x_0, dacă pentru orice vecinătate U a lui l_d, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x > x_0$ din $V \cap E$, să avem $f(x) \in U$.**

Se folosesc următoarele notații:

$$l = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Observații. 1° Pentru $x_0 = -\infty$, definiția limitei în punctul $-\infty$ este echivalentă cu definiția limitei la dreapta în punctul $-\infty$.

Mai general, dacă $E = (a, b)$, definiția limitei în punctul a este echivalentă cu definiția limitei la dreapta în punctul a, deoarece $(a, b) \cap (a, +\infty) = (a, b)$.

În punctul b (în particular în punctul $+\infty$), limita la dreapta nu are sens, deoarece $(a, b) \cap (b, +\infty) = \varnothing$.

2° Dacă în definițiile limitei cu ε și δ se înlocuiește condiția $x \neq x_0$ cu $x > x_0$, se obțin definiții ale limitei la dreapta echivalente cu cea de mai sus.

De asemenea, dacă în definiția lui Heine se înlocuiește condiția $x_n \neq x_0$ cu $x_n > x_0$, se obține o definiție echivalentă a limitei la dreapta:

Propoziția 4. **$l_d = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$ dacă și numai dacă pentru orice șir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n > x_0)$, avem $f(x_n) \to l_d$.**

Observație. Pentru ca să existe limita la dreapta $f(x_0 + 0)$, este necesar și suficient ca pentru orice șir $x_n \to x_0$ $(x_n \in E,\ x_n > x_0)$, șirul $(f(x_n))$ să aibă limită. Rezultă atunci că limita este *aceeași* oricare ar fi șirul (x_n) ales.

Definiția limitei la dreapta se poate formula numai cu ajutorul șirurilor descrescătoare sau numai cu ajutorul șirurilor strict descrescătoare.

Propoziția 5. **$l_d = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} (f(x)$ dacă și numai dacă pentru orice șir strict descrescător $x_n \searrow x_0$ $(x_n \in E)$, avem $f(x_n) \to l_d$.**

4. Calculul limitei cu ajutorul limitelor laterale

Să presupunem acum că x_0 este punct de acumulare atît pentru mulțimea $A = E \cap (-\infty, x_0)$, cît și pentru mulțimea $B = E \cap (x_0, +\infty)$. Aceasta înseamnă că există atît șiruri $x_n \to x_0$ cu $x_n \in E$ și $x_n < x_0$, cît și șiruri $y_n \to x_0$ cu $y_n \in E$ și $y_n > x_0$.

În acest caz au sens ambele limite laterale în x_0.

Legătura dintre limită și limitele laterale este dată de

Propoziția 6. Funcția f are limită în x_0, dacă și numai dacă are în x_0 limite laterale egale. În acest caz

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Într-adevăr, dacă există $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, aceasta înseamnă că f are în x_0 limite relative la A și la B egale cu l:

$$l = \lim_{\substack{x\to x\\ x\in A}} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ și } l = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in B}} f(x) = f(x_0 + 0),$$

deci limitele laterale există și sînt egale amîndouă cu l.

Reciproc, să presupunem că limitele laterale în punctul x_0 există și sînt egale: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = l$.

Fie atunci U o vecinătate oarecare a lui l. Deoarece $f(x_0 - 0) = l$, există o vecinătate V_1 a lui x_0 astfel încît dacă $x\in V_1\cup E$ și $x < x_0$ să avem $f(x)\in U$. Deoarece $f(x_0 + 0) = l$, există o vecinătate V_2 a lui x_0, astfel încît dacă $x\in V_2\cap E$ și $x>x_0$, să avem $f(x)\in U$.

Să notăm $V = V_1\cap V_2$. Avem $V\cap E\subset V_1\cap E$ și $V\cap E\subset V_2\cap E$ și V este o vecinătate a lui x_0. Fie $x\neq x_0$ un punct oarecare din $V\cap E$. Atunci $x\in V_1\cap E$ și $x\in V_2\cap E$. Dacă $x<x_0$, atunci $f(x)\in U$ (deoarece $x\in V_1\cap E$), iar dacă $x > x_0$, atunci, de asemenea, $f(x)\in U$ (deoarece $x\in V_2\cap E$). Așadar, oricare ar fi $x\neq x_0$ din $V\cap E$, avem $f(x)\in U$, și deci $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Corolar. $l = \lim_{x\to x_0} f(x)$ **dacă și numai dacă pentru orice șir strict monoton** $x_n \to x_0 (x_n\in E)$ **avem** $f(x_n) \to l$.

Observație. Uneori este mai ușor de calculat limitele laterale în x_0 și din compararea lor să deducem dacă funcția are limită în x_0.

Propoziția 7. O funcție monotonă pe mulțimea E are limite laterale în orice punct de acumulare al mulțimii E.

Pentru a face o alegere, să presupunem că funcția f este crescătoare pe E. Fie x_0 un punct de acumulare de puncte ale lui E de la stînga lui x_0, și să arătăm că $f(x_0 - 0)$ există. Pentru aceasta este suficient să folosim numai șiruri crescătoare $x_n\nearrow x_0$, $(x_n\in E)$, $x_n<x_0$.

Deoarece f este crescătoare, șirurile $(f(x_n))$ sînt de asemenea crescătoare, deci au limită (finită sau $+\infty$).

Rezultă că limita șirurilor $(f(x_n))$ este aceeași și deci funcția f are limită la stînga în x_0.

Dacă x_0 este punct de acumulare de puncte din E de la dreapta lui x_0, se folosesc șiruri strict descrescătoare $x_n\searrow x_0 (x_n\in E)$ și se deduce ca mai sus că $f(x_0 + 0)$ există.

În cazul cînd f este descrescătoare, demonstrația se face în mod asemănător.

O b s e r v a ţ i e. 1° Există funcţii care nu au nici limită la dreapta, nici limită la stînga în unele puncte.

Exemple. 1) Funcţia $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ nu are limite laterale în punctul 0.

Fie $x_n = \frac{2}{n\pi}$; avem $x_n \to 0$ şi $x_n > 0$.

Dar $f(x_n) = \sin n\frac{\pi}{2}$; deci şirul $(f(x_n))$ este

$$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ldots$$

şi nu are limită. Aşadar $f(x)$ nu are limită la dreapta în punctul 0.

Luînd şirul $x_n = -\frac{2}{n\pi}$, avem $x_n \to 0$ şi $x_n < 0$.

Şirul $(f(x_n))$ este:

$$-1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ldots$$

şi nu are limită, deci f nu are limită la stînga în punctul 0.

2) Funcţia lui Dirichlet definită pe R prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \text{ este raţional} \\ 0 \text{ dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

nu are limite laterale în nici un punct.

Fie $x_0 \in R$ oarecare. Există şiruri (x_n) de numere raţionale şi şiruri (y_n) de numere iraţionale, astfel ca $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$, $x_n > x_0$, $y_n > x_0$. Atunci

$$f(x_n) = 1, \text{ deci } f(x_n) \to 1 \text{ şi } f(y_n) = 0, \text{ deci } f(x_n) \to 0.$$

Rezultă că f nu are limită la dreapta în x_0.

Luînd şirurile (x_n) şi (y_n) astfel ca $x_n < x_0$, $y_n < x_0$, se deduce că f nu are nici limită la stînga în x_0.

2° Pentru o funcţie f: $E \to R$, despre care se ştie că are limită într-un punct x_0 de acumulare al lui E, limita sa l se poate calcula folosind un singur şir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E)$, $x_n \neq x_0$):

$$l = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

De asemenea, dacă f are limită la stînga l_s în x_0, luînd un singur şir $x_n \to x_0 (x_n \in E,\ x_n < 0)$ obţinem $f(x_n) \to l_s$; iar dacă f are limită la dreapta l_d în x_0, luînd un singur şir $x_n \to x_0 (x_n \in E,\ x_n > 0)$ obţinem $f(x_n) \to l_d$.

În particular, acest procedeu se poate aplica pentru funcţiile monotone, despre care *ştim* că au limite laterale în fiecare punct de acumulare al domeniului de definiţie.

Exemple. 1) Funcţia $(fx) = a^x$ este monotonă pe R; ea are deci limite în punctele $-\infty$ şi $+\infty$. Atunci:

Dacă $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{n\to-\infty} a^{-n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^n} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Dacă $0 < a < 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{n\to-\infty} a^n = +\infty.$$

2) Funcția $f(x) = \ln x$ este monotonă pe $(0, +\infty)$; ea are deci limite în punctele 0 și $+\infty$. Atunci:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = \lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0} \ln x = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{1}{n} = -\infty.$$

3) Funcția $f(x) = x^\alpha$, $(\alpha > 0)$, definită pe $[0, +\infty)$, este monotonă, deci are limită în $+\infty$. Atunci:

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty.$$

4) Funcția $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $(\alpha > 0)$, definită pe $(0, +\infty)$, este monotonă, deci are limite în 0 și $+\infty$. Atunci:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

5) Fie funcția $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ definită pe $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Avem:

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Într-adevăr, fie $x_n \to 0$, $x_n > 0$. Punînd $y_n = \frac{1}{x_n}$, avem $y_n \to +\infty$.

Atunci:

$$f(x) = (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \to e,$$

sau:

$$\lim_{\substack{x_n\to 0\\ x_n>0}} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e, \text{ de unde } \lim_{x\searrow x_0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Fie acum $x_n \to 0$, $x_n < 0$. Punînd $y_n = \frac{1}{x_n}$, avem $y_n \to -\infty$

$$f(x_n) = (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \to e$$

sau:

$$\lim_{\substack{x_n\to 0\\ x_n<0}} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e, \text{ de unde } \lim_{x\nearrow x_0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Funcția $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, avînd limitele laterale în 0 egale cu e, rezultă că are limită în 0 egală cu e.

6) Pentru funcția $f(x) = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in N$, definită pe $R - \{0\}$.

avem:

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x^{2k}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty.$$

7) Pentru funcția $f(x) = \frac{1}{x^{2k-1}}$, $k \in N$, definită pe $R - (0)$, avem:

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x^{2k-1}} = -\infty, \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x^{2k-1}} = +\infty.$$

§ 3. Proprietățile limitelor de funcții

1. Proprietăți ale limitelor

În cele ce urmează vor fi studiate proprietățile limitelor. Proprietățile limitelor laterale sînt aceleași, deoarece limitele laterale sînt limite ale unor restricții de funcții.

Deoarece limita unei funcții într-un punct se poate defini cu ajutorul limitelor de șiruri, o serie de proprietăți ale limitelor de șiruri se transmit limitelor de funcții.

Fie funcția $f: E\to R$ și x_0 un punct de acumulare al lui E.

Propoziția 1. Dacă limita funcției f în punctul x_0 există, această limită este unică.

În adevăr, dacă funcția are limita l în punctul x_0, avem $f(x_n)\to l$, oricare ar fi șirul $x_n \to x_0, (x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$, iar șirurile $(f(x_n))$ au toate limita unică l.

Propoziția 2. Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, **atunci** $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)|.$$

În adevăr, dacă $x_n \to x_0$, $(x_n \in E,\ x_n \neq x_0)$, atunci $f(x_n) \to l$, deci $f(x_n)| \to |l|$, adică $\lim_{x_n\to x_0} |f(x_n)| = |l|$, de unde $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$.

Exemple. $\lim\limits_{x\to x_0} |x| = |x_0|$; $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$;

$\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$, deci $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Observație. 1° Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, deoarece dacă $|f(x_n)| \to 0$, atunci $f(x_n) \to 0$.

2° Dacă însă $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = l > 0$ s-ar putea ca $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ să nu existe.

Exemplu. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2}} = +\infty$,

dar:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ nu există, deoarece $\lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$ și $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$.

Dacă însă există și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, atunci avem sau $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, sau $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -l$, deoarece în acest caz $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\pm l| = |\lim\limits_{x\to x_0} f(x)|$.

Propoziția 3. Dacă l este finit, avem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ dacă și numai dacă $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - l] = 0$.

În adevăr, oricare ar fi șirul $x_n \to x_0 (x_n \in E,\ x \neq x_0)$ avem $f(x_n) \to l$ dacă și numai dacă $f(x_n) - l \to 0$, adică $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n) = l$ dacă și numai dacă $\lim\limits_{x_n\to x_0} [f(x_n) - l] = 0$, de unde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ dacă și numai dacă $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - l)] = 0$.

Exemplu. Deoarece $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0 (x_0$ finit), avem

$$\lim_{x\to x_0} [x - x_0] = 0 \text{ (sau } x - x_0 \to 0 \text{ cînd } x \to x_0).$$

Rezultă atunci că $\lim\limits_{x\to x_0} |x - x_0| = 0$ (sau $|x - x_0| \to 0$ cînd $x \to x_0$).

Propoziția 4. Dacă funcțiile f și g definite pe E coincid pe o vecinătate V a lui x_0 (cu excepția lui x_0) și dacă una dintre ele are limită în x_0, atunci și cealaltă funcție are limită în x_0, și limitele sînt egale.

Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, atunci

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in V\cap E}} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

Deoarece, conform ipotezei, avem $f(x) = g(x)$ pentru $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, rezultă că funcția g are limită în x_0 relativ la $V \cap E$ și

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in V\cap E}} g(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in V\cap E}} f(x) = l.$$

Deoarece V este o vecinătate a lui x_0, rezultă că funcția g are limită în x_0 (relativ la E) și

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in V\cap E}} g(x) = l.$$

Propoziția 5. Dacă funcțiile g, f **și** h **definite pe** E **au limită în** x_0, **și dacă există o vecinătate** V **a lui** x_0, **astfel încît să avem** $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ **pentru orice** $x\in V\cap E$, $(x \neq x_0)$, **atunci**

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} h(x).$$

Într-adevăr, dacă $x_n\to x_0$, $(x_n\in E,\ x_n \neq x_0)$, putem presupune că $x_n\in V$ pentru orice n, îndepărtînd, la nevoie, numărul finit de termeni dinafara lui V. Atunci

$$g(x_n) \leqslant f(x_n) \leqslant h(x_n) \text{ și deci } \lim_{x_n\to x_0} g(x_n) \leqslant \lim_{x_n\to x_0} f(x_n) \leqslant \lim_{x_n\to x_0} h(x_n),$$

de unde:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} h(x).$$

Corolarul 1. Dacă f **are limită în** x_0 **și dacă există o vecinătate** V **a lui** x_0 **astfel încît, pentru două numere** α **și** β **să avem** $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, **oricare ar fi** $x\in V\cap E$, $x \neq x_0$, **atunci**

$$\alpha \leqslant \lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \beta.$$

Corolarul 2. Dacă f **are limită în** x_0 **și dacă există o vecinătate** V **a lui** x_0, **astfel încît să avem** $f(x) \geqslant 0$ **pentru orice** $x\in V\cap E$, $x \neq x_0$, **atunci** $\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant 0$.

Observație. Dacă $f(x) > 0$, $(x \in V\cap E,\ x \neq x_0)$ nu rezultă $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, ci numai $\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant 0$ (eventual $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$).

Exemplu. $|x| > 0$, pentru $x \neq 0$, dar $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

Corolarul 3. Dacă f **are limită în** x_0 **și dacă există o vecinătate** V **a lui** x_0, **astfel încît să avem** $f(x) \leqslant 0$ **pentru orice** $x\in V\cap E$, $x \neq x_0$, **atunci** $\lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant 0$.

Observație. Putem avea $f(x) < 0$ pentru orice $x\in E$, $x \neq x_0$, și totuși $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Propoziția 6. Dacă funcțiile g **și** h **definite pe** E **au limite egale în** x_0, **și dacă există o vecinătate** V **a lui** x_0, **astfel încît să avem**

$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci funcția f are limită în x_0, egală cu limita comună a celor două funcții g și h.

Într-adevăr, fie $l = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$. Dacă $x_n \to x_0 (x_n \in V \cap E, x_n \neq x_n)$, atunci $g(x_n) \leqslant f(x_n) \leqslant h(x_n)$ și deoarece $\lim\limits_{x_n \to x_0} g(x_n) = l$ și $\lim\limits_{x_n \to x_0} h(x_n) = l$, rezultă

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = l, \text{ de unde } \lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

2. Proprietăți ale funcțiilor deduse din proprietățile limitelor

În propozițiile următoare se arată că, dacă limita unei funcții într-un punct are o anumită proprietate, atunci funcția are această proprietate pe o întreagă vecinătate a punctului.

Propoziția 7. Dacă funcția f: $E \to R$ are limită în x_0 și dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > \alpha$, atunci există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît să avem $f(x) > \alpha$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Fie U o vecinătate a numărului $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, cu extremitatea stîngă în α, deci de forma $U = (\alpha, \beta)$ sau $U = (\alpha, +\infty)$, după cum limita este finită sau $+\infty$. Există atunci o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in U$, adică $f(x) > \alpha$.

Corolarul 1. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $f(x) > 0$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Corolarul 2. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Într-adevăr, $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to x_0} f(x)| > 0$, deci există V, astfel încît pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq 0$, să avem $|f(x)| > 0$, adică $f(x) \neq 0$.

Propoziția 8. Dacă funcția f: $E \to R$ are limită în x_0 și dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \beta$, atunci există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $f(x) < \beta$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Demonstrația se face la fel ca pentru propoziția 7, luînd vecinătățile V ale lui $f(x_0)$ de forma (α, β) sau $(-\infty, \beta)$ după cum limita este finită sau $-\infty$.

Corolar. **Dacă** $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, **atunci există o vecinătate** V **a lui** x_0, **astfel încît să avem** $f(x) < 0$, **oricare ar fi** $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Propoziția 9. **Dacă** f **are limita finită în** x_0 **și dacă** $\alpha < \lim_{x\to x_0} f(x) < \beta$, **atunci există o vecinătate** V **a lui** x_0 **astfel încît** $\alpha < f(x) < \beta$ **pentru orice** $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Într-adevăr, $U = (\alpha, \beta)$ este o vecinătate a numărului $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Există atunci o vecinătate V a lui x_0 astfel ca, dacă $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in U$, adică $\alpha < f(x) < \beta$.

Corolar. **Dacă** f **are limita finită în** x_0, **există o vecinătate** V **a lui** x_0, **pe care funcția este mărginită.**

Observație. Dacă f este mărginită pe o vecinătate a lui x_0, nu rezultă că f are limită în x_0, chiar dacă f este monotonă. Dacă f este monotonă, are limite laterale în x_0, dar, eventual, diferite.

Propoziția 10. **Dacă** f **și** g **sînt definite pe** E **și au limite în punctul** x_0, **și dacă** $\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$, **atunci există o vecinătate** V **a lui** x_0, **astfel încît** $f(x) < g(x)$ **pentru orice** $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$.

Alegem un număr α astfel ca $\lim_{x\to x_0} f(x) < \alpha < \lim_{x\to x_0} g(x)$. Există o vecinătate V_1 a lui x_0, astfel ca $f(x) < \alpha$ pentru $x \in V_1 \cap E$, $x \neq x_0$, și o vecinătate V_2 a lui x_0, astfel ca $\alpha < g(x)$ pentru $x \in V_2 \cap E$, $x \neq x_0$. Mulțimea $V = V_1 \cap V_2$ este o vecinătate a lui x_0, și dacă $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci $x \in V_1 \cap E$ și $x \in V_2 \cap E$ deci $f(x) < \alpha < g(x)$, de unde $f(x) < g(x)$.

3. Criterii de existență a limitelor de funcții

Pentru șiruri, criteriul lui Cauchy ne asigură de convergența unui șir fără a-i cunoaște limita.

Pentru funcții, avem un criteriu (necesar și suficient) de existență a *limitei finite*, fără a cunoaște această limită.

Fie funcția $f: E \to R$ și x_0 un punct de acumulare al lui E.

Criteriul lui Cauchy-Bolzano. **Funcția** f **are limită finită în punctul** x_0 **dacă și numai dacă, pentru orice număr** $\varepsilon > 0$, **există o vecinătate** V **a lui** x_0, **astfel încît, oricare ar fi punctele** $x' \neq x_0$ **și** $x'' \neq x_0$ **din** $V \cap E$ **să avem** $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Să presupunem că există $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ și că l este *finit*.

Aceasta înseamnă că pentru orice număr $\varepsilon>0$ (adică pentru orice vecinătate $U=\left(l-\frac{\varepsilon}{2}, l+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ a lui l) există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x\neq x_0$ din $V\cap E$, să avem $|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ (adică $f(x)\in U$); atunci pentru orice $x'\neq x_0$ și $x''=x_0$ din $V\cap E$ avem:

$$|f(x')-l|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ și } |f(x'')-l|<\frac{\varepsilon}{2},$$

deci:

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-l|+|f(x'')-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Reciproc, să presupunem că este verificată condiția din enunț și să arătăm că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ există și este finită.

Fie un șir oarecare $x_n\to x_0$ ($x_n\in E$, $x_n\neq x_0$) și un număr oarecare $\varepsilon>0$. Conform ipotezei, există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît, dacă $x'\neq x_0$, $x''\neq x_0$, x', $x''\in V\cap E$ atunci $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$. Vecinătatea V a lui x_0 depinde de ε.

Deoarece $x_n\to x_0$, există un număr natural N (care depinde de V, deci de ε), astfel încît oricare ar fi $p\geqslant N$ să avem $x_p\in V\cap E$. Așadar, oricare ar fi $n\geqslant N$, și $m\geqslant N$, avem x_n, $x_m\in V\cap E$, de unde

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că $(f(x_n))$ este un șir fundamental, și deci este convergent, conform criteriului lui Cauchy.

Am arătat astfel că oricare ar fi șirul $x_n\to x_0$, ($x_n\in E$, $x_n\neq x_0$), șirul $(f(x_n))$ are limită finită.

Rezultă că această limită finită este independentă de șirul (x_n) ales, deci limita comună a șirurilor $(f(x_n))$ este limita funcției f în punctul x_0.

Așadar, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ există și este finită.

Criteriile care urmează dau condiții suficiente de existență a limitei.

Propoziția 1. Dacă f și g sînt definite pe E, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ și dacă există un număr finit l, și o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $|f(x)-l|\leqslant g(x)$, pentru orice $x\in V\cap E$, $x\neq x_0$, atunci

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l.$$

Fie $x_n\to x_0$, $x_n\in E$, $x_n\neq x_0$. Putem presupune $x_n\in V$, pentru orice n. Atunci $|f(x_n)-l|\leqslant g(x_n)$ și deoarece $g(x_n)\to 0$, pe baza criteriului de la șiruri, deducem $f(x_n)\to l$, adică $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n)=l$, de unde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.

O b s e r v a ț i e. Dacă $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, atunci $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. În adevăr, notînd $g(x) = |f(x)|$, avem $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ și $|f(x) - 0| \leqslant g(x)$, deci $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Exemple. 1) Pentru funcția $f(x) = \sin x$, definită pe R, avem:

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \qquad (x_0 \text{ finit})$$

(sau $\sin x \to \sin x_0$ cînd $x \to x_0$).

Într-adevăr:

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2.\frac{|x-x_0|}{2} = |x - x_0|,$$

deoarece $|\cos\alpha| \leqslant 1$ și $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$ oricare ar fi α (fie că α este măsurat în radiani, fie că este măsurat în grade). Deoarece $|x - x_0| \to 0$ cînd $x \to x_0$, deducem că $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.

2) Pentru funcția $f(x) = \cos x$ definită pe R, avem

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \ (x_0 \text{ finit})$$

(sau $\cos x \to \cos x_0$ cînd $x \to x_0$).

În adevăr

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2.\frac{|x-x_0|}{2} = |x - x_0|,$$

deoarece $|\sin\alpha| \leqslant 1$, oricare ar fi α. Deoarece $\lim_{x\to x_0} |x - x_0| = 0$, deducem $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

O b s e r v a ț i i. 1° Pentru funcțiile $f(x) = \sin x$ și $f(x) = \cos x$ avem $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pentru orice $x_0 \in R$, deci funcțiile sin și cos sînt continue în orice punct din domeniul lor de definiție.

2° În punctele $+\infty$ și $-\infty$, funcțiile sin și cos nu au limită.

Fie $x_n = n\frac{\pi}{2} \to +\infty$. Șirul $(\sin x_n)$ este:

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots, 1, 0, -1, 0, \ldots$$

deci nu are limită. Așadar, funcția sin x nu are limită în punctul $+\infty$. Se arată la fel că nici funcția cos x nu are limită în punctul $+\infty$.

Luînd $x_n = -n\frac{\pi}{2} \to -\infty$, deducem că funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ nu au limită în punctul $-\infty$.

3) Pentru funcția $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ definită pe $R - \{0\}$, avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

În adevăr, pentru $x \in V = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ avem

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|$$

dacă x este măsurat în *radiani*. Pentru $x \neq 0$, avem atunci

$$\frac{1}{|\operatorname{tg} x|} < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{|\sin x|}$$

sau:

$$\frac{|\cos x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{|\sin x|},$$

de unde

$$|\cos x| < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1.$$

Dar $\lim\limits_{x\to 0} |\cos x| = |\cos 0| = 1$ și $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$. Rezultă că funcția $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ are limită în 0, și această limită este egală cu 1:

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1.$$

Dar pentru $x \in V$, $x \neq 0$, $\sin x$ și x au același semn, deci $\frac{\sin x}{x} > 0$, de unde

$$\frac{\sin x}{x} = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \text{ și deci } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

4) Pentru funcția $f(x) = \frac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, definită pe $(0, +\infty)$, avem

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

$$\left(\text{sau } \frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0 \text{ cînd } x \to +\infty\right).$$

Avem:

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln\left(x^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}{x} = \frac{2}{\alpha}\frac{\ln x^{\frac{\alpha}{2}}}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha}\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{x^\alpha} = \frac{2}{\alpha}\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}},$$

deoarece $\ln z < z$, oricare ar fi $z > 0$. Dar $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{\alpha} \frac{1}{\frac{\alpha}{x^2}} = 0$

și deci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

Se spune că funcția logaritmică $\ln x$ crește mai încet decît orice putere cu exponentul strict pozitiv.

Propoziția 2. Dacă funcțiile f și g sînt definite pe E, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ și dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $f(x) \geqslant g(x)$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, $(x_n \in V \cap E,\ x_n \neq x_0)$, avem $f(x_n) \geqslant g(x_n)$ și, deoarece $g(x_n) \to +\infty$, avem $f(x_n) \to +\infty$, adică $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n) = +\infty$, de unde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Exemplu. Pentru funcția $f(x) = \frac{e^x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, definită pe $(0, +\infty)$.

avem:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\left(\text{sau } \frac{e^x}{x^\alpha} \to +\infty, \text{ cînd } x \to +\infty\right).$$

avem:

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{\left(\frac{\alpha}{e^{2\alpha}}\right)^{2\alpha}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{2\alpha}} = \left(\frac{\frac{x}{e^{2\alpha}}}{\frac{1}{x}}\right)^{2\alpha} > \left(\frac{\frac{x}{2\alpha}}{\frac{1}{x^2}}\right)^{2\alpha} = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{2\alpha} x^\alpha,$$

deoarece $e^z > z$, oricare ar fi z. Dar $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{2\alpha} x^\alpha = +\infty$ și deci $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$. Se spune că funcția exponențială e^x crește mai repede decît orice putere cu exponentul strict pozitiv.

Propoziția 3. Dacă funcțiile f și g sînt definite pe E, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ și dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $f(x) \leqslant g(x)$, pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, $(x_n \in V \cap E,\ x_n \neq r_0)$, avem $f(x_n) \leqslant g(x_n)$ și, deoarece $g(x_n) \to -\infty$, avem $f(x_n) \to -\infty$, adică $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n) = -\infty$, de unde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

4. Operații cu funcțiile care au limită

Fie funcțiile $f\colon E\to R$ și $g\colon E\to R$, și x_0 un punct de acumulare al mulțimii E.

Teoremă. Dacă funcțiile f și g au limite în punctul x_0 (finite sau infinite), atunci:

1) Dacă suma limitelor are sens, funcția $f+g$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)$$

(cazul exceptat: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$).

2) Dacă produsul limitelor are sens, funcția fg are limită în x_0 și

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\,g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)$$

(cazul exceptat $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$).

3) Funcția αf are limită în x_0, oricare ar fi $\alpha\in R$ și

$$\lim_{x\to x_0}\alpha f(x)=\alpha\cdot\lim_{x\to x_0}f(x),\ \text{dacă}\ \alpha\neq 0$$

și $\lim\limits_{x\to x_0}0\cdot f(x)=0$.

4) Dacă raportul limitelor are sens, funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$$

(cazuri exceptate: 1) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$).

5) Dacă $f\geqslant 0$ și dacă puterea $[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$ are sens, atunci funcția f^g are limită în x_0 și

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=[\lim_{x\to x_0}f(x)]^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}.$$

Fie $a=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ și $b=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. Fie $x_n\to x_0$, $(x_n\in E,\ x_n\neq x_0)$. Din ipoteză rezultă că $f(x_n)\to a$ și $g(x_n)\to b$.

Dacă $a + b$ are sens, atunci $f(x_n) + g(x_n) \to a + b$, adică

$$\lim_{x_n \to x_0} [f(x_n) + g(x_n)] = a + b, \text{ de unde } \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = a + b =$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Celelalte puncte ale teoremei se demonstrează la fel.

O b s e r v a ț i i . 1° Dacă raportul limitelor are sens, înseamnă că $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, deci $g(x) \neq 0$ pe o întreagă vecinătate $V \cap E$ a lui x_0, deci raportul funcțiilor $\frac{f}{g}$ este definit cel puțin pe $V \cap E$, iar x_0 este punct de acumulare al acestei mulțimi, deci are sens $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

De asemenea, dacă $[\lim_{x \to x_0} f(x)]^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$ are sens, atunci sau $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ și $\lim_{x \to x_0} g(x)$ este oarecare (finită sau infinită), sau $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ și $\lim_{x \to x_0} g(x) > 0$ (finită sau $+\infty$).

În primul caz, avem $f(x) > 0$ pe o vecinătate $V \cap E$ a lui x_0, deci funcția $f(x)^{g(x)}$ este definită cel puțin pe $V \cap E$, și deci limita sa în punctul x_0 are sens.

În al doilea caz, avem $g(x) > 0$, pe o vecinătate $V \cap E$ a lui x_0, deci funcția $f(x)^{g(x)}$ este de asemenea definită pe $V \cap E$ și deci limita sa în x_0 are sens.

2° În cazul cînd $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, se pot face următoarele precizări:

a) Dacă $g(x) > 0$, pentru $x \neq x_0$, atunci $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$.

b) Dacă $g(x) < 0$, pentru $x \neq x_0$, atunci $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty$.

Într-adevăr, dacă $x_n \to x_0$, $(x_n \in E, x_n \neq x_0)$, atunci $g(x_n) \to 0$; dacă $g(x_n) > 0$, atunci $\frac{1}{g(x_n)} \to +\infty$, iar dacă $g(x_n) < 0$, atunci $\frac{1}{g(x_n)} \to -\infty$.

c) Dacă $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ și $g(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_0$, atunci $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{|g(x)|} = +\infty$.

Într-adevăr, $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = 0$, și $|g(x)| > 0$, pentru $x \neq x_0$.

Reciproc, dacă $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$, atunci $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$.

Într-adevăr, $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{|g(x)|} = 0$, deci $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$.

3° Mulțimea $\mathcal{F}(E, x_0)$ a funcțiilor definite pe E, care au limită finită în x_0, este o *algebră*, deoarece suma, produsul și produsul cu scalari, efectuate asupra funcțiilor din această mulțime, ne conduc la funcții care fac parte din aceeași mulțime.

Dacă notăm $L(f) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ pentru $f \in \mathcal{F}(E, x_0)$, avem

$$L(f+g) = L(f) + L(g) \qquad \text{(aditivitatea)},$$

$$L(\alpha f) = \alpha L(f) \qquad \text{(omogenitatea)},$$

$$L(fg) = L(f)\ L(g) \qquad \text{(multiplicativitatea)}.$$

Aplicația $L\colon \mathcal{F}(E, x_0) \to R$ este o funcțională liniară (aditivă și omogenă) și multiplicativă pe algebra $\mathcal{F}(E, x_0)$.

Din teorema de mai sus rezultă de asemenea că:

6) **Funcția $-f$ are limită în x_0 și**

$$\lim_{x \to x_0} (-f(x)) = -\lim_{x \to x_0} f(x).$$

7) **Dacă diferența limitelor are sens, funcția $f - g$ are limită în x_0 și**

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(cazul exceptat: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$).

Pentru demonstrarea proprietății 6) se aplică proprietatea 3) cu $\alpha = -1$. Pentru a demonstra 7) se aplică apoi 1) și 6).

Se demonstrează prin recurență că proprietățile 1) și 3) rămîn valabile pentru mai multe funcții $f_1, f_2, \ldots, f_n$ care au limite în x_0:

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) + \ldots + \lim_{x \to x_0} f_n(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x) \ldots \lim_{x \to x} f_n(x),$$

dacă suma sau produsul limitelor din membrul drept sînt definite (au sens).

În particular, din ultima egalitate se obține:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^n \quad (n \in N).$$

Corolar. Dacă $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ și dacă g este mărginită pe o vecinătate a lui x_0, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = 0$

Fie V o vecinătate a lui x_0 pe care g este mărginită, și fie $M > 0$ astfel ca

$$|g(x)| \leqslant M \text{ pentru } x \in V.$$

atunci

$$|f(x)\,g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leqslant M\,|f(x)|$$

și $\lim\limits_{x\to x_0} M\,|f(x)| = M \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, de unde

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) = 0.$$

5. Exemple

1) *Pentru orice polinom $P(x)$ definit pe R, avem*

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0) \quad (x_0 \text{ finit}).$$

(Orice polinom este o funcție continuă în punctele domeniului său de definiție.)

Într-adevăr, fie $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Toți termenii sumei au limite finite în x_0, deci suma limitelor are sens și deci $P(x)$ are limită în x_0:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0}(a_n x^n) + \lim_{x\to x_0}(a_{n-1}x^{n-1}) + \lim_{x\to x_0}(a_1 x) + \lim_{x\to x_0} a_0 =$$

$$= a_n x_0 + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0).$$

2) *Pentru orice polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, definit pe R, $a_n \neq 0$, avem*

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = a_n(+\infty)^n, \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = a_n(-\infty)^n.$$

Avem, pentru $x \neq 0$,

$$P(x) = x^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right).$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k} = 0$, $(k\in N)$, suma din paranteză are limita $a_n \neq 0$, iar $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = (+\infty)^n$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = (-\infty)^n$. Rezultă că $P(x)$ are limită în punctele $+\infty$ și $-\infty$ și

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0\frac{1}{x^n}\right) = (+\infty)^n \cdot a_n;$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \lim_{x\to-\infty}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0\frac{1}{x^n}\right) = (-\infty)^n \cdot a_n.$$

Așadar, în punctele $+\infty$ și $-\infty$, limita unui polinom este egală cu limita termenului cu gradul cel mai mare.

3) *Orice funcție rațională* $\frac{P}{Q}$ *are limită într-un punct* x_0 *în care nu se anulează numitorul,* $Q(x_0) \neq 0$, *și*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

(O funcție rațională este continuă în orice punct din domeniul său de definiție.)

Într-adevăr, deoarece $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) = P(x_0)$ și $\lim_{x \to x_0} Q(x) = Q(x_0) \neq 0$, rezultă:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{\lim_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

4) Fie $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0}$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

a) *Dacă* $n < m$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

b) *Dacă* $n = m$, $\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m}$.

c) *Dacă* $n > m$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} (+\infty)^{n-m}$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} (-\infty)^{n-m}$.

Într-adevăr, pentru $x \neq 0$, avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \ldots + a_0 \frac{1}{x^n} \right)}{x^m \left(b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \ldots + b_0 \frac{1}{x^m} \right)} = \frac{x^n}{x^m} \cdot R(x),$$

unde

$$R(x) = \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \ldots + a_0 \frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \ldots + b_0 \frac{1}{x^m}}.$$

Avem: $\lim_{x \to +\infty} R(x) = \lim_{x \to -\infty} R(x) = \frac{a_n}{b_m} \neq 0$.

Dacă $n < m$, avem $\frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}}$

și deci

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^n}{x^m} = 0,$$

deci

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \cdot \frac{a^n}{b^m} = 0.$$

Dacă $n=m$, avem $\frac{x^n}{x^n}=1$, deci, pentru $x\neq 0$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x),$$

de unde

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n}{b_n}.$$

Dacă $n>m$, avem $\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$ cu $n-m>0$, deci

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^m}=(+\infty)^{n-m} \text{ și } \lim_{x\to-\infty}\frac{x^n}{x^m}=(-\infty)^{n-m},$$

de unde

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^m}\lim_{x\to+\infty}R(x)=\frac{a_n}{b_m}(+\infty)^{n-m}$$

și

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^n}{x^m}\lim_{x\to-\infty}R(x)=\frac{a_n}{b_m}(-\infty)^{n-m}.$$

5) *Fie funcția rațională* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *definită pe* R, *și* x_0 *o rădăcină a numitorului,* $Q(x_0)=0$. *Dacă* p *și* q *sînt ordinele de multiplicitate ale rădăcinii* x_0, *respectiv pentru* P *și* Q, *avem*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-x_0)^p\,P_1(x)}{(x-x_0)^q\,Q_1(x)},$$

unde p *și* q *sînt numere naturale sau* 0, *iar* $P_1(x_0)\neq 0$, $Q_1(x_0)\neq 0$.

a) *Dacă* $p>q$, *avem*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=0.$$

b) *Dacă* $p=q$, *avem*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}.$$

c) *Dacă* $p<q$ *și* $q-p=2k$, $k\in N$, *avem*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=+\infty\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

d) *Dacă* $p<q$ *și* $q-p=2k-1$, $k\in N$, *avem*

$$\lim_{x\nearrow x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=-\infty\cdot\frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}$$

$$\lim_{x\searrow x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=+\infty\cdot\frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)},$$

deci funcția $\frac{P}{Q}$ *nu are limită în* x_0.

Într-adevăr, dacă $p>q$, $\dfrac{(x-x_0)^p}{(x-x_0)^q}=(x-x_0)^{p-q}$,

deci

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)^p}{(x-x_0)^q}=0.$$

Dacă $q=p$, $\dfrac{(x-x_0)^p}{(x-x_0)^q}\equiv 1$.

Dacă $p<q$, avem $\dfrac{(x-x_0)^p}{(x-x_0)^q}=\dfrac{1}{(x-x_0)^{q-p}}$.

În acest caz:

$$\lim_{x\nearrow x_0}\frac{1}{(x-x_0)^{q-p}}=(-\infty)^{p-q};\quad \lim_{x\searrow x_0}\frac{1}{(x-x_0)^{q-p}}=(+\infty)^{p-q},$$

deci, dacă $p-q=2k$, limitele laterale sînt ambele egale cu $+\infty$, iar dacă $p-q=2k-1$, limita la stînga este $-\infty$, iar limita la dreapta este $+\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

Într-adevăr, pentru $x\neq 0$, avem $\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}$ și deci

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1.$$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$.

Într-adevăr, pentru $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x\neq 0$, avem

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x},$$

deci

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=1\cdot\cos 0=1.$$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}=1$,

deoarece pentru $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x\neq 0$, avem $\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}=\dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}}$.

9) *Pentru* $x_0 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, *k întreg, avem*

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0.$$

(Funcţia tg x este continuă în orice puncte din domeniul său de definiţie.)

Într-adevăr, $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ şi $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \neq 0$,

deci

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \to x_0} \sin x}{\lim_{x \to x_0} \cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0.$$

Observaţii. 1° Dacă $x_0 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, funcţia tg x are în x_0 limite laterale infinite, şi diferite, deci nu are limită într-un asemenea punct.

De exemplu, $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$.

2° În punctele $+\infty$ şi $-\infty$, funcţia tg x nu are limite.

Într-adevăr, luînd $x_n = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$, avem $x_n \to +\infty$, iar şirul $(\operatorname{tg} x_n)$,

$$-1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots$$

nu are limită, deci tg x nu are limită în punctul $+\infty$.

Luînd $x_n = -n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$, avem $x_n \to -\infty$, dar şirul $(\operatorname{tg} x_n)$ nu are limită, deci tg x nu are limită în $-\infty$.

10) *Pentru* $x_0 \neq k\pi$, *k întreg, avem*:

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0.$$

(Funcţia ctg x este continuă în orice punct din domeniul său de definiţie.)

Într-adevăr, $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \neq 0$,

deci:

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x_0}{\sin x_0} = \operatorname{ctg} x_0.$$

Observaţii. 1° Dacă $x_0 = k\pi$, funcţia ctg x are în x_0 limite laterale infinite, dar diferite, deci nu are limită în x_0.

De exemplu, $\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\lim_{x \searrow 0} \operatorname{ctg} x = +\infty$.

2° În punctele $+\infty$ şi $-\infty$, funcţia ctg x nu are limite.

11) *Pentru funcţia* $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ *definită pe* $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ *avem*:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

6. Limitele funcțiilor compuse

Fie funcțiile $u : E \to F$; $f: F \to R$ și funcția compusă $f \circ u$: $E \to R$,

$$(f \circ u)(x) = f(u(x)), \text{ pentru } x \in E.$$

Fie x_0 un punct de acumulare al lui E și u_0 un punct de acumulare al lui F.

Teoremă. **Dacă** $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$, **dacă** $u(x) \neq u_0$ **pentru** $x \neq x_0$, **și dacă** $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = l$, **atunci funcția compusă** $f \circ u$ **are limită în** x_0 **și** $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

Într-adevăr, fie $x_n \to x_0$, $(x_n \in E, x_n \neq x_0)$. Notînd $u_n = u(x_n)$ avem $u_n \neq u_0$. Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$, avem $u(x_n) \to u_0$, adică $u_n \to u_0$, $(u_n \in F$, $u_n \neq u_0)$. Deoarece $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = l$, avem $f(u_n) \to l$, adică $f(u(x_n)) \to l$, sau $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(u(x_n)) = l$, de unde $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = l$.

Observație. Raționamentul de mai sus se poate schematiza astfel: dacă $x \to x_0$, atunci $u(x) \to u_0$ și deci $f(u(x)) \to l$.

Corolarul 1. **Dacă** $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$, **dacă** $u_0 \in F$ **și dacă** $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$, **atunci**

$$\lim_{x \to x_0} f(u(x)) = f(\lim_{x \to x_0} u\ (x).$$

Corolarul 2. **Dacă** $x_0 \in E$, **dacă** $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0) = u_0$ **și dacă** $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$, **atunci**

$$\lim_{x \to x_0} f(u(x)) = f(u(x_0)).$$

Exemple. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\beta x} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $(\beta \neq 0)$.

Să punem $u(x) = \alpha x$, deci $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = \lim\limits_{x \to 0} \alpha x = 0$

(sau $u(x) \to 0$ cînd $x \to 0$). Atunci:

$$\frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\sin u(x)}{(x)},$$

deci:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \to 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\alpha x}=\frac{\alpha}{\beta}\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{tg}u}{u}=\frac{\alpha}{\beta}\ (\beta\neq 0)$.

3) Fie funcția $u\colon E\to R$, și x_0 un punct de acumulare al lui E. Dacă $\lim_{x\to x_0}u(x)=0$, și dacă $u(x)\neq 0$ pentru $x\neq x_0$, atunci

$$\lim_{x\to x_0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e.$$

Într-adevăr

$$\lim_{x\to x_0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e.$$

4) Fie funcțiile $u, v\colon E\to R$, și x_0 un punct de acumulare al lui E. Dacă $\lim_{x\to x_0}u(x)=0$ și $u(x)\neq 0$ pentru $x\neq x_0$, și dacă $\lim_{x\to x_0}u(x)\,v(x)=A$ (finit sau infinit), atunci:

$$\lim_{x\to x_0}(1+u(x))^{v(x)}=e^{A}.$$

Într-adevăr

$$(1+u(x))^{v(x)}=\left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{u(x)v(x)}.$$

Dacă $x\to x_0$, atunci $u(x)\to 0$, deci

$$(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\to e \text{ și deci } (1+u(x))^{v(x)}\to e^{A}.$$

§ 4. Funcții continue

1. Definiția continuității

În paragraful precedent s-a studiat comportarea unei funcții f în *jurul* unui punct x_0, care este punct de acumulare pentru mulțimea E pe care este definită f. Punctul x_0 nu aparține în mod necesar lui E, și chiar dacă $x_0\in E$, valoarea funcției în punctul x_0 nu este luată în considerație.

În acest paragraf se studiază comportarea funcției f nu numai în jurul lui x_0, dar și în x_0, și anume se compară valoarea funcției în x_0 cu valorile sale în punctele vecine cu x_0. Pentru aceasta, este necesar ca funcția f să fie definită în x_0, adică $x_0\in E$.

Problema care se pune acum se poate formula astfel:

Fiind dată o funcție $f\colon E\to R$ și x_0 un punct din E, să se cerceteze dacă, atunci cînd x se apropie de x_0, $f(x)$ se apropie de $f(x_0)$. Altfel spus,

problema care se pune este dacă, pentru valori ale argumentului x suficient de vecine cu x_0, putem realiza ca valorile funcției $f(x)$ să fie cît dorim de vecine cu $f(x_0)$.

Aceste considerații ne conduc la următoarea

Definiție. Se spune că o funcție $f : E \to R$ este continuă într-un punct x_0 din E, dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x \in V \cap E$, să avem $f(x) \in U$.

În această definiție, V depinde de U.

Dacă f este continuă în punctul $x_0 \in E$, se spune că x_0 este *punct de continuitate* al funcției f.

Observație. Definiția continuității este asemănătoare cu definiția limitei. Există însă și deosebiri, datorite faptului că în definiția limitei se impune condiția $x \neq x_0$, în timp ce în definiția continuității această condiție nu se impune.

În definiția limitei, x_0 este punct de acumulare pentru E, dar nu aparține în mod necesar lui E.

De exemplu, dacă $E = (a, b)$ se poate considera limita funcției în punctele $x_0 = a$ și $x_0 = b$, chiar dacă $a = -\infty$ sau $b = +\infty$.

În definiția continuității, x_0 aparține lui E dar nu este în mod necesar punct de acumulare pentru E, ci poate fi și *punct izolat* al lui E.

Problema continuității nu are sens în punctele în care funcția nu este definită; definiția continuității nu se poate aplica în aceste puncte.

În particular, problema continuității nu se pune în punctele $+\infty$ și $-\infty$, deoarece domeniul de definiție al unei funcții este format numai din puncte finite.

Exemple. 1) Pentru funcția $f(x) = \ln x$ definită pe $(0, +\infty)$, nu are sens problema continuității în punctul 0, sau în punctul -1.

2) Pentru funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ nu se pune problema continuității în punctul 0.

3) Pentru funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$ definită pentru $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k întreg, nu are sens problema continuității în punctele..., $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, ...

Definiția continuității, dată mai sus, se aplică fără nici o modificare pentru funcții $f: E \to F$, oricare ar fi spațiile topologice E și F.

Dată fiind asemănarea dintre definiția limitei și definiția continuității, o serie întreagă de proprietăți ale limitelor rămîn valabile și pentru funcții continue, și cu aceleași demonstrații, cu singura deosebire că nu se mai pune condiția $x \neq x_0$.

Dăm mai întîi cîteva propoziții care dau condiții necesare și suficiente de continuitate, și al căror enunț poate fi luat ca definiție a continuității.

Propoziția 1. Funcția $f : E \to R$ este continuă în punctul $x_0 \in E$, dacă și numai dacă, pentru orice șir $x_n \to x_0$, $x_n \in E$, avem $f(x_n) \to f(x_0)$.

O b s e r v a ț i i. 1° În această propoziție este suficient să presupunem că pentru orice șir $x_n \to x_0$, $x_n \in E$, șirul $(f(x_n))$ are limită. Rezultă atunci că *toate* șirurile $(f(x_n))$ au *aceeași* limită, și anume $f(x_0)$, oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$.

Faptul că toate șirurile $(f(x_n))$ au aceeași limită se demonstrează ca și pentru limite de funcții, fără a mai pune condiția $x_n \neq x_0$. Faptul că această limită comună este $f(x_0)$ rezultă din faptul că, pentru șirul constant $x_n = x_0$, avem $x_n \to x_0$ și $f(x_n) = f(x_0)$, deci $f(x_n) \to f(x_0)$.

2° Definiția continuității cu ajutorul șirurilor se poate aplica numai în acele spații topologice, în care topologia se poate defini cu ajutorul șirurilor.

P r o p o z i ț i a 2. Funcția $f : E \to R$ este continuă în punctul $x_0 \in E$, dacă și numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu $|x - x_0| < \delta$, să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Pentru demonstrație, se folosește definiția continuității, ținînd seama de faptul că x_0 și $f(x_0)$ sînt *finite*, deci vecinătățile lui $f(x_0)$ se pot lua de forma $U = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$, iar vecinătățile lui x_0 se pot lua de forma $V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ cu $\delta > 0$. Deoarece V depinde de U, rezultă că δ depinde de ε. Condiția $x \in V$ este echivalentă cu $|x - x_0| < \delta$, iar condiția $f(x) \in U$ este echivalentă cu $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

O b s e r v a ț i e. Definiția continuității cu ε și δ se aplică numai în acele spații topologice în care s-au definit atît operația de adunare (în grupuri) cît și modulul (sau altă noțiune cu proprietățile modulului, de exemplu norma în spații vectoriale).

Sînt utile și următoarele două propoziții, în care se dau definiții cu vecinătăți și cu ε sau δ:

f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$, există un număr $\delta > 0$ (care depinde de U) astfel încît pentru orice $x \in E$ cu $|x - x_0| < \delta$ să avem $f(x) \in U$.

f este continuă în x_0 dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in V.$$

P r o p o z i ț i a 3. O funcție $f : E \to R$ este continuă în orice punct izolat al domeniului ei de definiție.

Fie x_0 un punct izolat al lui E. Aceasta înseamnă că există o vecinătate V a lui x_0 astfel ca $V \cap E = \{x_0\}$. Dacă $x_n \to x_0$, $(x_n \in E)$, vecinătatea V conține toți termenii șirului cu excepția unui număr finit dintre ei. Există deci un număr N, astfel încît pentru $n \geqslant N$ să avem $x_n \in V$, și, deoarece $x_n \in E$, rezultă că $x_n \in V \cap E$, adică $x_n = x_0$. Atunci, pentru $n \geqslant N$ avem $f(x_n) = f(x_0)$ și deci $f(x_n) \to f(x_0)$. Cum șirul $x_n \to x_0$ a fost ales arbitrar, rezultă că f este continuă în x_0.

Exemple. 1) Dacă mulțimea E este finită, $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, atunci E este formată numai din puncte izolate, deci *orice* funcție definită pe E este continuă în *orice* punct din E.

2) Un șir (a_n) este o funcție definită pe mulțimea N a numerelor naturale. Deoarece mulțimea N este formată numai din puncte izolate, rezultă că orice șir este o funcție continuă în *orice* punct n din domeniul său de definiție N.

Dacă $x_0 \in E$ este punct de acumulare pentru E, atunci are sens atît problema continuității în x_0, cît și problema limitei în x_0. În acest caz, definiția continuității se poate formula cu ajutorul limitei:

Propoziția 4. O funcție $f : E \to R$ este continuă într-un punct de acumulare $x_0 \in E$ dacă și numai dacă funcția are limită în x_0 egală cu $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(sau $f(x) \to f(x_0)$ cînd $x \to x_0$).

Să presupunem întîi că f este continuă în x_0. Aceasta înseamnă că pentru orice șir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E)$ avem $f(x_n) \to f(x_0)$. În particular, pentru șirurile $x_n \to x_0$, $(x_n \in E)$ cu $x_n \neq x_0$, avem de asemenea $f(x_n) \to f(x_0)$, deci $f(x_0)$ este limita funcției în punctul x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Reciproc, să presupunem că $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ și să arătăm că f este continuă în x_0. Aceasta înseamnă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta = \delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$, $x \neq x_0$, cu $|x - x_0| < \delta$, să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Dar dacă $x = x_0$, atunci $|x - x_0| = 0 < \delta$ și $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, astfel încît restricția $x \neq x_0$ este de prisos. Conform propoziției 2, rezultă că f este continuă în x_0.

Observații. 1° Limita funcției în punctul x_0 poate fi infinită. Dacă însă f este continuă, această limită este $f(x_0)$, deci este finită (deoarece o funcție are *numai* valori finite).

2° În cazul cînd mulțimea E nu are nici un punct izolat, enunțul propoziției 4 poate fi luat ca definiție a continuității, echivalentă cu celelalte trei definiții, cu vecinătăți, cu șiruri, sau cu ε și δ.

Vom folosi una sau alta din aceste definiții, după cum va fi mai convenabil pentru simplificarea raționamentelor.

Pentru demonstrarea criteriului de integrabilitate al lui Lebesgue, vom folosi propoziția următoare, din care rezultă că proprietatea de continuitate se poate defini și cu ajutorul oscilației.

Propoziția 5. Funcția $f : E \to R$ este continuă într-un punct $x_0 \in E$ dacă și numai dacă oscilația sa în acest punct este nulă:

$$\omega_f(x_0) = 0.$$

Să presupunem întîi că f este continuă în x_0, și fie $\varepsilon>0$. Există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, pentru orice punct $x\in V\cap E$ să avem $|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Pentru orice puncte $x', x''\in V\cap E$ avem atunci

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

de unde

$$\omega_f(V\cap E)=\sup_{\substack{x'\in V\cap E\\ x''\in V\cap E}}|f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon$$

și deci

$$\omega_f(x_0)=\inf_{V\ni x_0}\omega_f(V\cap E)\leqslant\varepsilon.$$

Așadar, $\omega_f(x_0)\leqslant\varepsilon$, oricare ar fi $\varepsilon>0$. Cum $\omega_f(x_0)$ este $\geqslant 0$ și independent de ε, rezultă că $\omega_f(x_0)=0$.

Reciproc, să presupunem că $\omega_f(x_0)=0$ și fie $\varepsilon>0$. Deoarece

$$\omega_f(x_0)=\inf_{V\ni x_0}\omega_f(V\cap E)=0$$

rezultă că există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît

$$\omega_f(V\cap E)<\varepsilon.$$

Deoarece $|f(x')-f(x'')|\leqslant\omega_f(V\cap E)$, oricare ar fi $x', x''\in V\cap E$, rezultă în particular că

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \text{ oricare ar fi } x\in V\cap E,$$

deci f este continuă în x_0, și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Definiție. Se spune că o funcție $f: E\to R$ este continuă pe o mulțime $A\subset E$, dacă este continuă în fiecare punct din A.

Dacă funcția este continuă pe tot domeniul său de definiție, se spune uneori, mai simplu, că este continuă, fără a mai specifica mulțimea pe care o are această proprietate.

Continuitatea funcției f pe mulțimea A se exprimă prin una din următoarele propoziții echivalente:

1) *Oricare ar fi $x\in A$ și oricare ar fi vecinătatea U a lui $f(x)$, există o vecinătate V a lui x (V depinde și de U și de x), astfel încît pentru orice $x'\in V\cap E$ să avem $f(x')\in U$.*

2) *Oricare ar fi* $x \in A$ *și oricare ar fi șirul* $x_n \to x$ $(x_n \in E)$ avem $f(x_n) \to f(x)$.

3) *Oricare ar fi* $x \in A$ *și oricare ar fi numărul* $\varepsilon > 0$, *există un număr* $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, *astfel încît pentru orice punct* $x' \in E$ *cu* $|x' - x| < \delta$ *să avem* $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

Dacă A este formată numai din puncte de acumulare ale lui E, atunci se poate da o formulare echivalentă cu ajutorul limitelor:

4) *Oricare ar fi* $x \in A$ *avem* $\lim\limits_{x' \to x} f(x') = f(x)$.

Observație. Funcțiile elementare sînt definite pe intervale sau pe reuniuni de intervale, iar acestea sînt formate *numai* din puncte de acumulare. Așadar, pentru funcțiile elementare se poate aplica definiția continuității cu ajutorul limitei.

Pentru funcțiile elementare, limita într-un punct x_0 din domeniul de definiție se obține înlocuind direct pe x cu x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

deci *funcțiile elementare sînt continue în orice punct din domeniul lor de definiție.*

Exemple.

1) $f(x) \equiv c$, definită pe R. Oricare ar fi $x_0 \in R$, avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0).$$

2) $f(x) = x$, definită pe R. Oricare ar fi $x_0 \in R$, avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0).$$

3) $f(x) = x^n$, $n \in N$, definită pe R. Oricare ar fi $x_0 \in R$, avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n = f(x_0).$$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in N$, definită pe $R - \{0\}$. Oricare ar fi $x_0 \neq 0$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n}.$$

5) Pentru polinomul $P(x)$, definit pe R, avem pentru orice $x_0 \in R$,

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

6) Pentru funcția rațională $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, și pentru orice $x_0 \in R$, pentru care $Q(x_0) \neq 0$, avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

7) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$, definită pe $[0, +\infty)$. Oricare ar fi $x_0 \geqslant 0$, avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha = f(x_0).$$

8) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, definită pe $(0, +\infty)$. Oricare ar fi $x_0 > 0$, avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{x_0^\alpha} = f(x_0).$$

9) $f(x) = a^x$, $(a > 0)$, definită pe R. Oricare ar fi $x_0 \in R$, avem

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

10) $f(x) = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$, definită pe $(0, +\infty)$. Oricare ar fi $x_0 > 0$ avem

$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0.$$

11) $f(x) = \sin x$, definită pe R. Oricare ar fi $x_0 \in R$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

12) $f(x) = \cos x$, definită pe R. Oricare ar fi $x_0 \in R$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

13) $f(x) = \operatorname{tg} x$, definită pentru $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, k întreg. Oricare ar fi $x_0 \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0.$$

14) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, definită pentru $x \neq k\pi$, k întreg. Oricare ar fi $x_0 \neq k\pi$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0.$$

Se va arăta mai departe că și funcțiile trigonometrice inverse sînt continue pe tot domeniul lor de definiție.

2. Puncte de discontinuitate

Fie funcția $f: E \to R$ și $x_0 \in E$. Dacă funcția f nu este continuă în x_0, se spune că f este *discontinuă* în x_0, iar x_0 se numește *punct de discontinuitate* al funcției. Deoarece f este continuă în punctele izolate ale lui E, un punct de discontinuitate $x_0 \in E$ este în mod necesar un punct de acumulare pentru E.

Ținînd seama de definițiile continuității, prin negație deducem că funcția f este discontinuă într-un punct $x_0 \in E$, dacă și numai dacă este verificată una din următoarele condiții echivalente:

1) *Există o vecinătate U a lui $f(x_0)$, astfel încît, oricare ar fi vecinătatea V a lui x_0, să existe un punct $x \in V \cap E$, astfel ca $f(x) \notin U$ (x depinde de V).*

2) *Există un număr ε, astfel încît, oricare ar fi $\delta > 0$, să existe un punct $x \in E$ cu $|x - x_0| < \delta$ astfel încît $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ (x depinde de δ).*

3) *Există cel puțin un șir $x_n \to x_0$, $(x_n \in E)$ astfel încît șirul $(f(x_n))$ să nu aibă limita $f(x_0)$* (eventual să nu aibă nici o limită).

4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *nu există, sau* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *există dar este diferită de* $f(x_0)$.

5) *Oscilația funcției în x_0 este strict pozitivă*: $\omega_f(x_0) > 0$.

O b s e r v a ț i e. Discontinuitatea funcției f s-a definit ca o proprietate contrară continuității. Prin aceasta s-a dat sens discontinuității exact în aceleași puncte în care are sens și continuitatea, adică numai în punctele domeniului de definiție.

Dacă x_0 nu aparține domeniului de definiție, nu are sens să se spună nici că funcția este continuă, nici că este discontinuă în acest punct, chiar dacă x_0 este punct de acumulare al domeniului de definiție, și chiar dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Rezultă că problema discontinuității, ca și cea a continuității, nu se poate pune decît pentru punctele din domeniul de definiție al funcției.

Exemple. 1) Pentru funcția $f(x) = \ln x$ definită pe $(0, +\infty)$ nu are sens să se spună că este continuă sau discontinuă în punctul 0, deși funcția are limită în acest punct ($\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = -\infty$); de asemenea, nu are sens să se pună problema discontinuității acestei funcții în punctul -1.

2) Pentru funcția $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{pentru } x > 0 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$ definită pe $[0, +\infty)$, are sens să se pună problema continuității în punctul 0, deoarece funcția este definită în 0; anume, funcția este discontinuă în acest punct, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

3) Pentru funcția $f(x) = \dfrac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ nu are sens să se spună că este discontinuă în 0.

4) Funcția $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$ definită pe R este discontinuă în punctul 0, deoarece deși este definită în 0 nu are limită în acest punct.

5) Pentru funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$, definită pentru $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k întreg, nu are sens să se spună că este discontinuă în punctul $\frac{\pi}{2}$.

6) Pentru funcția $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x \text{ pentru } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 \text{ pentru } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ definită pe $(0, \pi)$, are sens să se spună că este continuă în punctul $\frac{\pi}{2}$, anume, această afirmație este falsă. De asemenea, are sens să se spună că ea este discontinuă în punctul $\frac{\pi}{2}$, anume, această afirmație este adevărată, deoarece funcția nu are limită în $\frac{\pi}{2}$.

7) Pentru funcția $f(x) = x$ definită pe $R - \{0\}$, nu are sens nici una din următoarele două propoziții:

— funcția este continuă în punctul 0;
— funcția este discontinuă în punctul 0.

8) Pentru funcția $f(x) = \begin{cases} x \text{ dacă } x \neq 0 \\ 1 \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$ definită pe R, au sens amîndouă propozițiile următoare:

— funcția este continuă în punctul 0;
— funcția este discontinuă în punctul 0.

Prima propoziție este falsă, iar a doua este adevărată, deoarece funcția are limită în punctul 0, anume $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, dar este diferită de $f(0) = 1$.

9) Pentru funcția $f(x) = x$ definită pe R, au sens amîndouă propozițiile din exemplul precedent, și anume: prima este adevărată (f este continuă în 0), iar a doua este falsă.

Puncte de discontinuitate ale unei funcții se împart în două categorii: punctele de discontinuitate de prima speță și puncte de discontinuitate de speța a doua.

Un punct de discontinuitate x_0 al funcției f se numește *punct de discontinuitate de prima speță*, dacă funcția are limite laterale finite în x_0.

În cazul cînd limitele laterale sînt egale, evident, ele sînt diferite de $f(x_0)$, deoarece funcția nu este continuă în x_0.

Dacă x_0 este extremitatea stîngă (respectiv dreaptă) a unui interval I, și este punct de discontinuitate al funcției f, atunci x_0 este punct de discontinuitate de speța întîi dacă există limita la dreapta în x_0 și este finită (respectiv dacă există limită la stînga în x_0 și este finită), deoarece în acest caz cealaltă limită laterală nu are sens. Evident, în acest caz $f(x_0 + 0)$ (respectiv $f(x_0 - 0)$) este diferit de $f(x_0)$, deoarece în caz contrar funcția ar fi continuă în x_0.

Celelalte puncte de discontinuitate ale funcției, care nu sînt de prima speță, se numesc *puncte de discontinuitate de speța a doua.*

Așadar, x_0 este punct de discontinuitate de speța a doua pentru funcția f, dacă cel puțin una dintre limitele laterale (în cazul cînd are sens) nu există, sau este infinită.

Exemple.

1) $f(x) = \begin{cases} x \text{ pentru } x \neq 0 \\ 1 \text{ pentru } x = 0 \end{cases}$ definită pe R.

Avem $f(0-0) = 0$ și $f(0+0) = 0$, dar $f(0) = 1$, deci 0 este punct de discontinuitate de prima speță.

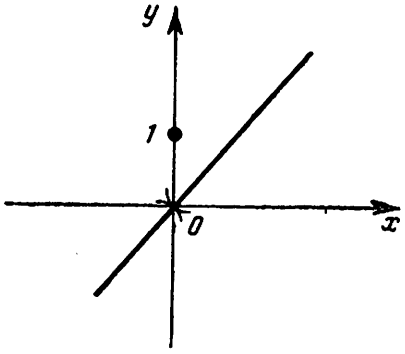


Fig. 56

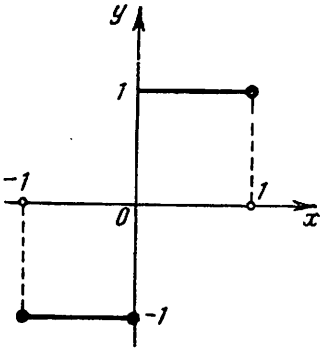


Fig. 57

2) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dacă } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 \text{ dacă } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$ definită pe $[-1, 1]$.

Avem $f(0-0) = -1$ și $f(0+0) = 1$, deci 0 este punct de discontinuitate de prima speță.

3) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x = -1 \\ x \text{ dacă } -1 < x < 1 \\ -1 \text{ dacă } x = 1 \end{cases}$ definită pe $[-1, 1]$.

Punctul -1 este punct de discontinuitate de prima speță.

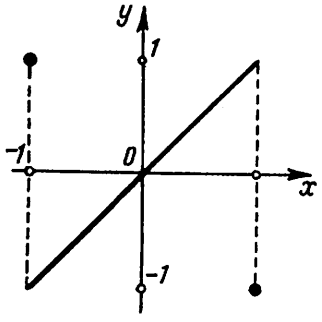


Fig. 58

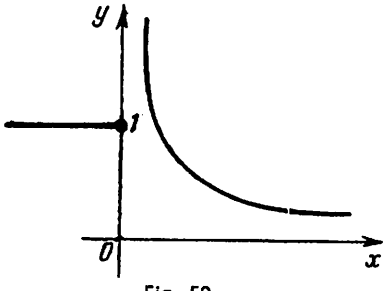


Fig. 59

Avem $f(-1+0) = -1$ și $f(-1) = +1$. Aici $f(-1-0)$ nu are sens. Punctul 1 este punct de discontinuitate de prima speță. Avem $f(1-0) = 1$ și $f(1) = -1$. Aici $f(1+0)$ nu are sens.

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ dacă } x > 0 \\ 1 \text{ dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$ definită pe $[0, +\infty)$.

Punctul 0 este punct de discontinuitate de speța a doua, deoarece $f(0-0) = 1$, dar $f(0+0) = +\infty$.

5) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \text{ este rațional,} \\ 0 \text{ dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$ definită pe R.

Orice punct este punct de discontinuitate de speța a doua, deoarece această funcție nu are limite laterale în nici un punct.

6) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$ definită pe R.

Punctul 0 este punct de discontinuitate de speța a doua, deoarece $f(0-0)$ și $f(0+0)$ nu există.

Dacă x_0 este punct interior al unui interval I și dacă limitele laterale în x_0 există și sînt finite, diferența $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ se numește *saltul funcției f în punctul x_0*.

Dacă $I = [a, b]$, și dacă $f(a+0)$ există și este finit, atunci $f(a+0) - f(a)$ se numește saltul funcției f în punctul a, iar dacă $f(b-0)$ există și este finit, $f(b) - f(b-0)$ se numește saltul funcției f în punctul b.

Evident, saltul funcției într-un punct de continuitate este zero.

Saltul funcției poate fi zero și într-un punct de discontinuitate din *interiorul* intervalului, dacă $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$.

Propoziția 1. Toate punctele de discontinuitate ale unei funcții monotone pe un interval, $f : I \to R$, sînt de prima speță.

Se știe că o funcție monotonă are limite laterale în fiecare punct din domeniul său de definiție. (Dacă extremitățile aparțin intervalului, la extremități numai una dintre limitele laterale are sens.)

Trebuie să arătăm că aceste limite laterale sînt finite. Să presupunem că f este crescătoare. Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Dacă $x_1 < x < x_2$, atunci $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ și prin trecere la limită obținem

$$f(x_1) \leqslant \lim_{x \searrow x_1} f(x) \leqslant f(x_2), \qquad f(x_1) \leqslant \lim_{x \nearrow x_2} f(x) \leqslant f(x_2),$$

adică: $f(x_1) \leqslant f(x_1+0) \leqslant f(x_2)$ și $f(x_1) \leqslant f(x_2-0) \leqslant f(x_2)$.

Dar $f(x_1)$ și $f(x_2)$ sînt finite, ca valori ale funcției. Rezultă că $f(x_1+0)$ și $f(x_2-0)$ sînt de asemenea finite. Deoarece x_1 și x_2 au fost alese arbitrar, rezultă că în orice punct din I funcția are limită la stînga finită (cu excepția extremității stîngi, unde această limită nu are sens) și limita la dreapta finită (cu excepția extremității drepte).

Rezultă că punctele de discontinuitate — dacă există — sînt de prima speță.

Dacă f este descrescătoare, demonstrația se face la fel.

Observație. Să presupunem că f este crescătoare pe I. Din demonstrația propoziției precedente deducem că dacă $x_1 < x_2$, atunci

$$f(x_1) \leqslant f(x_1+0) \leqslant f(x_2-0) \leqslant f(x_2).$$

Într-adevăr, alegînd $\alpha \in I$ astfel ca $x_1 < \alpha < x_2$, avem:

$$f(x_1) \leqslant f(x_1+0) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(x_2-0) \leqslant f(x_2).$$

În particular, pentru orice punct x_0 din interiorul lui I avem:

$$f(x_0-0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+0),$$

deci saltul $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ este pozitiv. Dacă x_0 este punct de discontinuitate, acest salt este strict pozitiv și, evident, dacă x_0 este punct de continuitate, saltul este 0.

Dacă x' și x'' sînt două puncte de discontinuitate și dacă $x' < x''$, atunci, pe axa Oy, intervalul $[f(x' - 0), f(x' + 0)]$ se află sub intervalul $[f(x'' - 0), f(x'' + 0)]$, putînd avea în comun o extremitate, iar cele două intervale sînt de lungime strict pozitivă.

Propoziția 2. Mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții monotone $f : I \to R$ este cel mult numărabilă.

Vom presupune la început că intervalul este închis și mărginit, $I = [a, b]$ și că f este crescătoare.

Avem: $f(a) \leqslant f(a + 0) \leqslant f(x - 0) \leqslant f(x + 0) \leqslant f(b - 0) \leqslant f(b)$, oricare ar fi $a < x < b$. Fie $\alpha > 0$ și fie n puncte interioare $x_1 < x_2 < ,..., < x_n$, în care saltul funcției este mai mare sau egal cu α:

$$f(x_i + 0) - f(x_i - 0) \geqslant \alpha, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Avem $f(x_i + 0) \leqslant f(x_{i+1} - 0)$ sau $f(x_{i+1} - 0) - f(x_i + 0) \geqslant 0$,

$$i = 1, 2, ..., n.$$

Atunci

$$f(b) - f(a) \geqslant f(x_n + 0) - f(x_1 - 0) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i + 0) - f(x_i - 0)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_{i+1} - 0) - f(x_i + 0)] \geqslant \sum_{i=1}^{n} [f(x_i + 0) - f(x_i - 0)] \geqslant n\alpha,$$

de unde: $n \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{\alpha}$.

Rezultă că numărul punctelor în care saltul este mai mare decît α este finit sau eventual 0. Printre aceste puncte putem considera și extremitățile, dacă este cazul.

Să notăm cu S_1 mulțimea punctelor în care saltul este $\geqslant 1$, și pentru fiecare număr natural $n \geqslant 2$, să notăm cu S_n mulțimea punctelor în care saltul este $\geqslant \dfrac{1}{n}$ și $< \dfrac{1}{n-1}$

$$S_1 = \{x \mid x \in I, f(x + 0) - f(x - 0) \geqslant 1\},$$

$$S_n = \left\{ x \mid x \in I, \frac{1}{n} \leqslant f(x + 0) - f(x - 0) < \frac{1}{n-1} \right\}, \quad n \geqslant 2.$$

Din cele de mai sus rezultă că fiecare mulțime S_n este finită sau vidă. Reuniunea $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ este formată din toate punctele în care saltul este strict pozitiv, deci din toate punctele de discontinuitate.

Dar S este o mulțime cel mult numărabilă, fiind o reuniune numărabilă de mulțimi finite sau vide, și teorema este demonstrată în acest caz.

Dacă f este descrescătoare, demonstrația se face la fel.

Dacă intervalul I nu este închis și mărginit, el se poate scrie ca o reuniune numărabilă de intervale închise și mărginite I_n, care au în comun, două cîte două, cîte o extremitate:

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Dacă $I = (a,b]$, $a \geqslant -\infty$ luăm $I_1 = [\alpha_1, b]$, $I_2 = [\alpha_2, \alpha_1]$,..., $I_n = [\alpha_n, \alpha_{n-1}]$,... unde (α_n) este un șir strict descrescător, astfel ca $\alpha_n \to a$.
Dacă $I = [a, b)$, $b \leqslant +\infty$, luăm $I_1 = [a, \beta_1]$, $I_2 = [\beta_1, \beta_2]$,..., $I_n = [\beta_{n-1}, \beta_n]$,..., unde (β_n) este un șir strict crescător astfel ca $\beta_n \to b$.
Dacă $I = (a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, luăm

$$I = [\alpha_1, \beta_1],\ I_2 = [\alpha_2, \beta_2],\ldots,\ I_n = [\alpha_n, \beta_n],\ldots$$

unde (α_n) este strict descrescător astfel ca $\alpha_n \to a$, iar (β_n) este strict crescător astfel ca $\beta_n \to b$, și $\alpha_1 < \beta_1$.

În fiecare interval I_n, mulțimea punctelor de discontinuitate este cel mult numărabilă. Deoarece reuniunea unei familii numărabile de mulțimi numărabile este de asemenea numărabilă, rezultă că mulțimea punctelor de discontinuitate din toate intervalele (I_n) este numărabilă, și cu aceasta propoziția este complet demonstrată.

3. Continuitatea relativă la o submulțime

Fie funcția f: $E \to R$, A o submulțime a lui E și $x_0 \in A$.

Definiție. Se spune că funcția f este continuă în punctul x_0 relativ la submulțimea A, dacă restricția f_A a lui f la A este continuă în x_0.

Aceasta înseamnă că oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$, $x_n \in A$, avem $f_A(x_n) \to f_A(x_0)$.

Dar pentru $x \in A$ avem $f_A(x) = f(x)$. Așadar, a spune că funcția f este continuă în punctul x_0 relativ la submulțimea A, înseamnă că pentru orice șir $x_n \to x_0$ format din puncte din A, $x_n \in A$, să avem $f(x_n) \to f(x_0)$.

Se pot da definiții ale continuității relative la A, echivalente cu cea de mai sus, folosind vecinătățile, sau ε și δ, și punînd condiția $x \in A$ (în loc de $x \in E$).

Dacă x_0 este punct de acumulare al lui A (deci și al lui E) se poate folosi definiția continuității cu ajutorul limitei:

f este continuă în x_0 relativ la A dacă

$$\lim_{x \to x_0} f_A(x) = f(x_0), \text{ adică dacă } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0).$$

Propoziție. Dacă f este continuă în x_0 (relativ la E), atunci f este continuă în x_0 și relativ la A.

Într-adevăr, dacă f este continuă în x_0 relativ la E, pentru orice șir $x_n \to x_0$ format din puncte din E avem $f(x_n) \to f(x_0)$. În particular, deoarece $A \subset E$, pentru orice șir $x_n \to x_0$ format din puncte din A avem de asemenea $f(x_n) \to f(x_0)$, adică f este continuă în x_0 relativ la A.

Observație. Propoziția reciprocă nu este adevărată. Funcția f poate fi continuă în x_0 relativ la A, fără a fi continuă în x_0 (relativ la E).

Exemplu. $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pentru } -1 \leqslant x < 0 \\ 1 \text{ pentru } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$ definită pe $E = [1, 1]$, și $A = [0, 1]$; avem $f_A(x) \equiv 1$, (pentru $x \in A$), deci f_A este continuă în 0, deci f este continuă în 0, relativ la intervalul $A = [0, 1]$. Totuși f nu este continuă în 0, relativ la $E = [-1, 1]$, deoarece nu are limită în 0. Într-adevăr $f(0 - 0) = -1$ și $f(0 + 0) = 1$. (Se poate folosi definiția cu limită a continuității, deoarece 0 este punct de acumulare pentru E.)

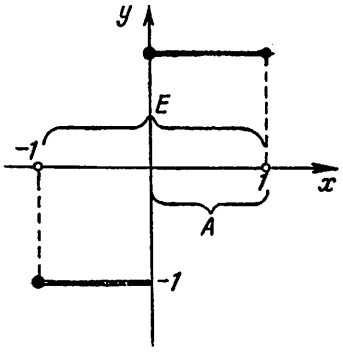


Fig. 60

În anumite cazuri este adevărată și propoziția reciprocă:

Propoziție. Dacă A este intersecția lui E cu o vecinătate V a lui x_0, $A = E \cap V$, și dacă f este continuă în x_0 relativ la A, atunci f este continuă în x_0 (relativ la E).

Prin ipoteză, f este continuă în x_0 relativ la A, deci oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$, $x_n \in A$, avem $f(x_n) \to f(x_0)$. Dacă x_n este format din puncte din E, și dacă $x_n \to x_0$, avem $x_n \in V$, deci $x_n \in A$ pentru toți termenii, cu excepția unui număr finit dintre ei, și deci $f(x_n) \to f(x_0)$. Așadar, oricare ar fi șirul $x_n \to x_0$, $x_n \in E$, avem $f(x_n) \to f(x_0)$, adică f este continuă în x_0 relativ la E.

4. Continuitatea laterală

Fie funcția $f: E \to R$ și $x_0 \in E$.

Dacă luăm mulțimea $A = E \cap (-\infty, x_0] = \{x \mid x \in E, x \leqslant x_0\}$, putem defini continuitatea lui f în x_0, relativ la submulțimea A.

Definiție. Se spune că funcția f este continuă la stînga în punctul x_0, dacă pentru orice șir $x_n \to x_0$ format din puncte $x_n \leqslant x_0$ din E, avem $f(x_n) \to f(x_0)$.

Dacă în definițiile continuității cu vecinătăți sau cu ε și δ, se pune condiția ca $x \leqslant x_0$, se obțin definiții ale continuității la stînga, echivalente cu cea de mai sus.

Observații. 1° Dacă $E = [a, b)$ orice funcție definită pe E este continuă la stînga în a.

Într-adevăr, dacă $x_n \to a$, $x_n \leqslant a$, și $x_n \in [a, b)$, rezultă că $x_n = a$, deci $f(x_n) = f(a)$ și deci $f(x_n) \to f(a)$.

2° Dacă $E = (a, b]$, definiția continuității în punctul b este echivalentă cu definiția continuității la stînga în punctul b, deoarece condiția $x_n \in (a, b]$ este echivalentă cu condiția $x_n \in (a, b]$ și $x_n \leqslant b$.

Așadar, f este continuă în b, dacă și numai dacă este continuă la stînga în b.

3° Dacă x_0 este punct de acumulare al mulțimii $A = E \cap (-\infty, x_0] = \{x \mid x \in E, x \leqslant x_0\}$, atunci definiția continuității la stînga în x_0 se poate formula cu ajutorul limitei la stînga în x_0: f este continuă la stînga în x_0, dacă și numai dacă are limită la stînga în x_0, egală cu $f(x_0)$:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Dacă $E = [a, b]$, limita la stînga în a nu are sens, deci continuitatea la stînga în a nu se poate formula cu ajutorul limitei. Însă continuitatea la stînga în a este totdeauna asigurată.

Dacă luăm mulțimea $B = E \cap [x_0, +\infty) = \{x \mid x \in E, x \geqslant x_0\}$, putem defini continuitatea lui f în x_0 relativ la mulțimea B.

Definiție. **Se spune că funcția f este continuă la dreapta în punctul x_0, dacă, pentru orice șir $x_n \to x_0$ format din puncte $x_n \geqslant x_0$ din E, avem $f(x_n) \to f(x_0)$.**

Dacă în definițiile continuității cu vecinătate sau cu ε și δ se pune condiția $x \geqslant x_0$, se obțin definiții ale continuității la dreapta în x_0, echivalente cu cea de mai sus.

Observații. 1° Dacă $E = (a, b]$, orice funcție definită pe E este continuă la dreapta în b. Într-adevăr, dacă $x_n \to b$, $x_n \geqslant b$ și $x_n \in (a, b]$, atunci $x_n = b$, deci $f(x_n) = f(b)$ și deci $f(x_n) \to f(b)$.

2° Dacă $E = [a, b)$, definiția continuității în a este echivalentă cu definiția continuității la dreapta în a, deoarece condiția $x_n \in [a, b)$ este echivalentă cu condiția $x_n \in [a, b)$ și $x_n \geqslant a$.

Așadar, funcția f este continuă în a, dacă și numai dacă este continuă la dreapta în a.

3° Dacă x_0 este punct de acumulare al mulțimii $B = E \cap [x_0, +\infty) = \{x \mid x \in E, x \geqslant x_0\}$, atunci definiția continuității la dreapta în x_0 se poate formula cu ajutorul limitei la dreapta în x_0:

f este continuă la dreapta în x_0, dacă și numai dacă are limită la dreapta în x_0, egală cu $f(x_0)$:

$$f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Dacă $E = [a, b]$, limita la dreapta în b nu are sens, deci continuitatea la dreapta în b nu se poate formula cu ajutorul limitei la dreapta. Însă continuitatea la dreapta în b este totdeauna asigurată.

Propoziție. **Funcția $f : E \to R$ este continuă în punctul $x_0 \in E$, dacă și numai dacă este continuă la stînga și la dreapta în x_0.**

Dacă f este continuă în x_0, atunci pentru orice șir $x_n \to x_0$, $x_n \in E$ avem $f(x_n) \to f(x_0)$. Aceasta este adevărată în particular pentru șirurile $x_n \to x_0$ cu $x_n \leqslant x_0$, deci f este continuă la stînga în x_0 și pentru șirurile $x_n \to x_0$ cu $x_n \geqslant x_0$, deci f este continuă la dreapta în x_0.

Reciproc, să presupunem că f este continuă la dreapta și la stînga în x_0. Aceasta înseamnă că pentru orice număr $\varepsilon > 0$, putem găsi un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît dacă $x \in E$, $x \leqslant x_0$, și $|x - x_0| < \delta$ să avem

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (deoarece f este continuă la stînga în x_0) și dacă $x \in E$, $x \geqslant x_0$ și $|x - x_0| < \delta$ să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (deoarece f este continuă la dreapta în x_0). Așadar, oricare ar fi $x \in E$ cu $|x - x_0| < \delta$ (fie că $x \leqslant x_0$, fie că $x \geqslant x_0$), avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, adică f este continuă în x_0.

Observație. Dacă x_0 este punct de acumulare al lui E, pentru care ambele limite laterale $f(x_0 - 0)$ și $f(x_0 + 0)$ au sens, funcția f este continuă în x_0, dacă și numai dacă limitele laterale există și sînt egale cu $f(x_0)$:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0),\ f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Exemple.

1) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 \text{ dacă } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$ definită pe $[0, 2]$.

$f(1-0) = -1$, $f(1+0) = 1$, $f(1) = -1$, deci $f(1-0) = f(1)$. Funcția este continuă la stînga în 1, dar nu este continuă la dreapta în 1, deci nu este continuă în 1.

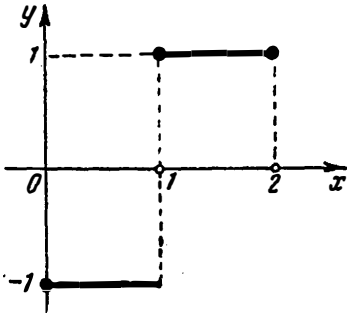


Fig. 61

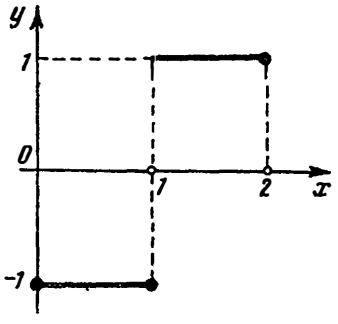


Fig. 62

2) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 \text{ dacă } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$ definită pe $[0, 2]$.

Avem $f(1-0) = -1$, $f(1+0) = 1$, $f(1) = 1$, deci $f(1+0) = f(1)$. Funcția este continuă la dreapta în 1, dar nu este continuă la stînga în 1, deci nu este continuă în 1.

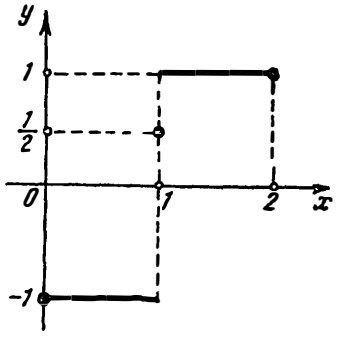


Fig. 63

3) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ 0{,}5 & \text{dacă } x = 1 \\ 1 & \text{dacă } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$ definită pe $[0, 2]$.

Avem $f(1-0) = -1$, $f(1+0) = 1$, $f(1) = 0{,}5$, deci funcția nu este continuă nici la stînga, nici la dreapta în 1.

4) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{x} \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$

Avem $f(0-0)=1$, $f(0)=1$, $f(0+0)=+\infty$. Funcția este continuă la stînga în 0, dar nu este continuă la dreapta în 0.

5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} \text{ dacă } x\neq 0,\\ 1 \text{ dacă } x=0.\end{cases}$

Funcția are limite laterale infinite în 0, deci nu este continuă nici la stînga, nici la dreapta în 0.

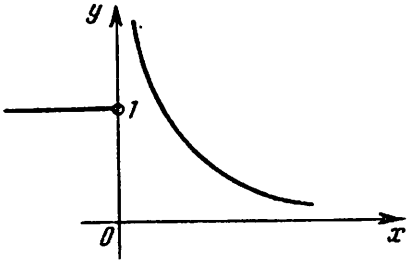


Fig. 64

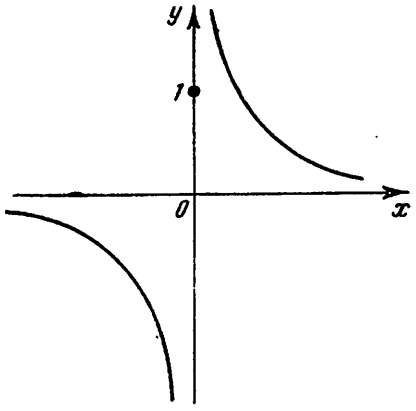


Fig. 65

§ 5. Proprietățile funcțiilor continue

1. Operații cu funcții continue

Vom arăta acum că efectuînd operațiile obișnuite asupra funcțiilor continue, se obțin tot funcții continue.

Teoremă. Dacă funcțiile f și g definite pe mulțimea E sînt continue într-un punct $x_0\in E$, atunci:

1) $f+g$ este continuă în x_0;
2) αf este continuă în x_0, oricare ar fi $\alpha\in R$;
3) fg este continuă în x_0;
4) dacă $g(x_0)\neq 0$ (adică dacă $\frac{f}{g}$ este definită în x_0), funcția $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0.
5) dacă $f(x_0)^{g(x_0)}$ are sens, atunci funcția f^g este continuă în x_0.

Deoarece f și g sînt continue în x_0, pentru orice șir $x_n\to x_0$, $(x_n\in E)$, avem $f(x_n)\to f(x_0)$ și $g(x_n)\to g(x_0)$, deci:

1) $f(x_n)+g(x_n)\to f(x_0)+g(x_0)$, adică $f+g$ este continuă, în x_0;
2) $\alpha f(x_n)\to \alpha f(x_0)$, adică αf este continuă în x_0;
3) $f(x_n)\,g(x_n)\to f(x_0)\,g(x_0)$, adică fg este continuă în x_0;
4) dacă $g(x_0)\neq 0$, $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\to\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$, adică $\dfrac{f}{g}$ este continuă în x_0;
5) dacă $f(x_0)^{g(x_0)}$ are sens, $f(x_n)^{g(x_n)}\to f(x_0)^{g(x_0)}$, adică f^g este continuă în x_0.

Observații. 1° Luînd în proprietatea 3) $\alpha = -1$, rezultă că dacă f este continuă în x_0, atunci $-f$ este continuă în x_0.

2° Dacă f și g sînt continue în x_0, atunci $f - g$ este continuă în x_0, deoarece $f - g = f + (-g)$.

3° Prin recurență se demonstrează că suma și produsul a n funcții continue în x_0 sînt de asemenea continue în x_0;

4° Mulțimea funcțiilor definite pe E și continue într-un punct $x_0 \in E$ este o *algebră*.

Corolar. Dacă f și g sînt continue pe E, iar α și β sînt numere reale, atunci funcțiile $\alpha f + \beta g$ și fg sînt continue pe E, iar funcțiile $\frac{f}{g}$ și f^g sînt continue pe domeniul lor de definiție.

Observație. Mulțimea funcțiilor definite pe E și continue pe E este o *algebră*.

2. Proprietățile locale ale funcțiilor continue

Propoziția 1. Dacă funcția $f : E \to R$ este continuă în $x_0 \in E$, atunci funcția $|f|$ este continuă în x_0.

Dacă x_0 este punct izolat, atunci $|f|$ este continuă în x_0. Dacă x_0 este punct de acumulare al lui E, continuitatea lui f în x_0 înseamnă

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

de unde

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|,$$

adică $|f|$ este continuă în x_0.

Observație. Este posibil ca $|f|$ să fie continuă în x_0 fără ca f să fie continuă în x_0.

Exemplu. Funcția $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \text{ este rațional} \\ -1 \text{ dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$

este discontinuă în orice punct, deoarece nu are limită în nici un punct. Funcția $|f|$ este continuă în orice punct, deoarece este constantă, $|f(x)| \equiv 1$.

Corolarul 1. Dacă f este continuă pe E, atunci $|f|$ este continuă pe E.

Corolarul 2. Funcția $f : E \to R$ este continuă în x_0 (sau pe E) dacă și numai dacă f^+ și f^- sînt continue în x_0 (sau pe E).

Într-adevăr dacă f este continuă atunci $|f|$ este continuă și din egalitățile

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f),\ f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

rezultă că f^+ și f^- sînt continue.

Reciproc, dacă f^+ și f^- sînt continue, din egalitatea

$$f = f^+ - f^-$$

rezultă că și f este continuă.

Corolarul 3. Dacă funcțiile $f, g : E \to R$ sînt continue în x_0 (sau pe E), atunci funcțiile $\sup(f, g)$ și $\inf(f, g)$ sînt continue în x_0 sau pe E.

Într-adevăr, funcțiile $f + g$ și $f - g$ sînt continue, deci $|f - g|$ este continuă și din egalitatea

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

rezultă că $\sup(f, g)$ este continuă.

De asemenea, funcțiile $-f$ și $-g$ sînt continue, deci $\sup(-f, -g)$ este continuă și din egalitatea

$$\inf(f, g) = -\sup(-f, -g)$$

rezultă că și $\inf(f, g)$ este continuă.

Propoziția 2. Dacă funcția $f : E \to R$ este continuă într-un punct $x_0 \in E$ și dacă $\alpha < f(x_0) < \beta$, atunci există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $\alpha < f(x) < \beta$, pentru orice $x \in V \cap E$.

Mulțimea $U = (\alpha, \beta)$ este o vecinătate a lui $f(x_0)$. Deoarece f este continuă în x_0, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \in V \cap E$ să avem $f(x) \in U$, adică $\alpha < f(x) < \beta$.

Corolarul 1. Dacă f este continuă în x_0, atunci există o vecinătate V a lui x_0 pe care f este mărginită.

Corolarul 2. Dacă f este continuă în x_0, și dacă $f(x_0) > 0$, există o vecinătate V a lui x_0 astfel ca $f(x) > 0$ pentru orice $x \in V \cap E$.

Se aplică propoziția precedentă pentru $\alpha = 0$ și $\beta > f(x_0)$ oarecare.

Corolarul 3. Dacă f este continuă în x_0, și dacă $f(x_0) < 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $f(x) < 0$ pentru orice $x \in V \cap E$.

Se aplică propoziția precedentă pentru $\beta = 0$ și $\alpha < f(x_0)$ oarecare.

Corolarul 4. Dacă f este continuă în x_0 și dacă $f(x_0) \neq 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V \cap E$.

Într-adevăr, $|f|$ este continuă în x_0 și $|f(x_0)|>0$, deci există o vecinătate a lui x_0, pe care avem $|f(x)|>0$, adică $f(x)\neq 0$.

Corolarul 5. Dacă f este continuă în x_0 și dacă în orice vecinătate V a lui x_0 există puncte în care f are valori <0 și puncte în care f are valori >0, atunci $f(x_0)=0$.

Propoziția 3. Dacă funcțiile f și g definite pe E sînt continue în punctul $x_0\in E$, și dacă $f(x_0)<g(x_0)$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $f(x)<g(x)$ pentru orice $x\in V\cap E$.

Alegem α astfel ca $f(x_0)<\alpha<g(x_0)$. Există atunci două vecinătăți V_1 și V_2 ale lui x_0, astfel că dacă $x\in V_1\cap E$ să avem $f(x)<\alpha$, iar dacă $x\in V_2\cap E$ să avem $g(x)>\alpha$. Dar $V=V_1\cap V_2$ este o vecinătate a lui x_0. Dacă $x\in V\cap E$, atunci $x\in V_1\cap E$ și $x\in V_2\cap E$, deci $f(x)<\alpha$ și $g(x)>\alpha$, adică $f(x)<\alpha<g(x)$, de unde $f(x)<g(x)$.

Propoziția 4. Dacă f este continuă în x_0, atunci, pentru orice număr $\varepsilon>0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi punctele x', $x''\in V$, să avem $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Într-adevăr, deoarece f este continuă în x_0, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît pentru orice $x\in V$ să avem

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă $x', x''\in V$ avem atunci

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(x_0)+f(x_0)-f(x'')|\leqslant$$

$$\leqslant|f(x')-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

3. Prelungirea prin continuitate a unei funcții

Fie o mulțime E, un punct de acumulare $x_0\in E$ și o funcție f definită pe $E-\{x_0\}$. Funcția f se poate prelungi în mai multe feluri în punctul x_0, și anume dîndu-i în punctul x_0 o valoare arbitrară. Este posibil ca nici una dintre aceste prelungiri să nu fie continuă în x_0.

Dacă însă funcția f are *limită finită* în punctul x_0, una dintre aceste prelungiri este continuă în x_0, după cum rezultă din următoarea

Propoziție. Dacă funcția f are limita finită y_0 în punctul x_0, funcția $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) \text{ dacă } x\neq x_0 \\ y_0 \text{ dacă } x=x_0, \end{cases}$ definită pe E, este continuă în x_0.

Într-adevăr, deoarece pentru $x \neq x_0$, $x \in E$ avem $\bar{f}(x) = f(x)$, și deoarece $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, rezultă că și $\bar{f}$ are limita y_0 în x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} \bar{f}(x) = y_0 = \bar{f}(x_0)$$

adică $\bar{f}$ este continuă în x_0.

Funcția $\bar{f}$ se numește *prelungirea funcției f prin continuitate în punctul x_0*.

Se spune de asemenea că funcția $\bar{f}$ se obține din funcția f, prelungind-o prin continuitate în x_0.

Observație. Dacă $x_0 \in E$ este punct izolat, orice prelungire a lui f în x_0 este continuă în x_0.

Exemple. 1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ definită pe $R - \{0\}$. Avem $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, deci f se poate prelungi prin continuitate în punctul 0. Prelungirea sa prin continuitate este

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ dacă } x \neq 0, \\ 1 \text{ dacă } x = 0. \end{cases}$$

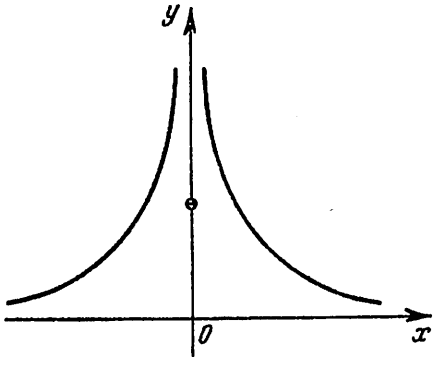


Fig. 66

2) $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ definită pe $(-1,0) \cup (0, +\infty)$. Avem

$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, deci funcția

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \text{ dacă } x \neq 0 \\ e \quad \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

definită pe $(-1, +\infty)$ este prelungirea prin continuitate a lui f în punctul 0.

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ definită pe $R - \{0\}$. Avem $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, deci funcția f nu se poate prelungi prin continuitate în punctul 0. Într-adevăr, oricare ar fi $\alpha \in R$, funcția

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \text{ dacă } x \neq 0 \\ \alpha \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

nu este continuă în 0.

4) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$ nu are limită în punctul 0, deci nu se poate prelungi prin continuitate în 0.

5) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$. Avem

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x| \text{ pentru } x \neq 0,$$

deoarece $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$. Deoarece $\lim_{x\to 0}|x| = 0$, rezultă că $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, deci f se poate prelungi prin continuitate în 0, și anume:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Observație. După cum se va vedea mai departe (regula lui l'Hospital), problema prelungirii prin continuitate a fost, încă de la începuturile analizei matematice, o problemă care a preocupat mult pe matematicieni (Bernoulli, l'Hospital etc.). Cum însăși noțiunea de funcție nu era bine clarificată, se identifica o funcție cu prelungirea sa prin continuitate. Ulterior, dezvoltarea matematicilor moderne a impus necesitatea de a distinge între ele aceste două funcții.

4. Proprietatea lui Darboux

Funcțiile continue definite pe un *interval* au proprietatea importantă că nu pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin *toate* valorile intermediare, adică dacă iau două valori diferite, atunci iau toate valorile cuprinse între ele. Mai precis:

Teoremă. Dacă f este o funcție continuă pe un interval I, atunci oricare ar fi punctele $a < b$ din I, și oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, există cel puțin un punct c_λ între a și b, astfel încît să avem $f(c_\lambda) = \lambda$.

Pentru a face o alegere, să presupunem că $f(a) \leqslant f(b)$. Dacă $f(a) = f(b)$ și dacă $f(a) \leqslant \lambda \leqslant f(b)$, atunci $\lambda = f(a)$ și luînd $c_\lambda = a$, avem $f(c_\lambda) = \lambda$, și teorema este demonstrată în acest caz.

Să presupunem deci că $f(a) < f(b)$ și fie λ un număr astfel ca $f(a) < \lambda < f(b)$. Să notăm cu A mulțimea punctelor dintre a și b în care funcția f are valori $\leqslant \lambda$:

$$A = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant \lambda\}.$$

Avem $a \in A \subset [a,b]$, deci A este nevidă și mărginită. Fie $c = \sup A$. Evident, $a \leqslant c \leqslant b$. Vom arăta că $f(c) = \lambda$. Într-adevăr, există un șir $x_n \to c$, format din puncte din A ($x_n \leqslant c$, eventual $x_n = c$, dacă $c \in A$). Deoarece f este continuă pe I, f este continuă în c, deci $f(x_n) \to f(c)$. Dar $f(x_n) \leqslant \lambda$ (deoarece $x_n \in A$) și prin trecere la limită obținem $f(c) \leqslant \lambda$.

Deoarece $f(b) > \lambda$, rezultă că $c \neq b$, și anume $c < b$. Dacă $c < y < b$, atunci $f(y) > \lambda$ (deoarece dacă am avea $f(y) \leqslant \lambda$, atunci $y \in A$, deci $y \leqslant c = \sup A$). Fie atunci un șir $y_n \to c$, astfel ca $c < y_n < b$. Deoarece f este continuă în c, avem $f(y_n) \to f(c)$ și, deoarece $f(y_n) > \lambda$, prin trecere la limită obținem $f(c) \geqslant \lambda$. Din inegalitățile $f(c) \leqslant \lambda$ și $f(c) \geqslant \lambda$, deducem $f(c) = \lambda$.

Observații. 1° Condiția ca funcția f să fie definită pe un *interval* este esențială. Dacă funcția continuă f este definită pe o mulțime care

nu este un interval, ci, de exemplu, o reuniune de intervale disjuncte, este posibil ca funcția să ia două valori diferite, dar să nu mai ia nici o valoare intermediară.

Exemplu. Funcția $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dacă } x < 0 \\ 1 \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$ definită pe $R - \{0\}$ este continuă pe domeniul ei de definiție, ia numai valorile -1 și 1 și nu mai ia nici o valoare intermediară.

2° Proprietatea pusă în evidență în teorema precedentă nu este caracteristică funcțiilor continue. Darboux a dat un exemplu de funcție care are această proprietate și care nu este continuă în nici un punct.

Iată un exemplu simplu de funcție discontinuă într-un punct, care are proprietatea din enunțul teoremei:

Funcția $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ definită pe R este discontinuă în punctul 0 (deoarece nu are limită în 0), și se verifică ușor că nu trece de la o valoare $f(a)$ la o valoarea $f(b)$ fără a lua într-un interval (a, b) orice valoare cuprinsă între $f(a)$ și $f(b)$.

Proprietatea pusă în evidență pentru funcțiile continue în teorema precedentă se numește *proprietatea lui Darboux*:

Definiție. O funcție f definită pe un interval I are proprietatea lui Darboux, dacă, oricare ar fi punctele a, $b \in I$, $a < b$, și oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, există un punct c_λ cuprins între a și b astfel ca $f(c_\lambda) = \lambda$.

Cu această definiție, teorema precedentă se enunță astfel: *Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux.*

Se va arăta mai departe că și funcțiile derivate, definite pe un *interval*, au proprietatea lui Darboux. De aceea vom demonstra mai întîi cîteva propoziții pentru funcțiile cu proprietatea lui Darboux, care vor fi adevărate atît pentru funcțiile continue cît și pentru funcțiile derivate. În aceste propoziții funcțiile se consideră definite pe un interval I.

Propoziția 1. Fie funcția $f : I \to R$ și $a < b$ două puncte din I. Dacă f are proprietatea lui Darboux și dacă $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$ (sau dacă $f(a) > 0$ și $f(b) < 0$) atunci există cel puțin un punct cuprins între a și b în care funcția se anulează.

Pentru demonstrație, se aplică definiția precedentă pentru $\lambda = 0$.

Corolar. Dacă funcția $f : I \to R$ are proprietatea lui Darboux și nu se anulează în nici un punct din I, atunci funcția păstrează același semn pe tot intervalul I.

Într-adevăr, dacă ar exista două puncte a și b din I în care funcția ar avea semne diferite, de exemplu $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$, atunci funcția s-ar anula cel puțin într-un punct din I cuprins între a și b, ceea ce ar contrazice ipoteza.

Observații. Dacă funcția $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux și nu se anulează pe I, pentru a vedea ce semn au *toate* valorile sale pe intervalul I este suficient să vedem semnul valorii funcției într-un *singur* punct din interval.

Propoziția 2. O funcție $f : I \to R$ are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă transformă orice interval $J \subset I$, tot într-un interval, $f(J)$.

Să presupunem întîi că f are proprietatea lui Darboux.
Fie intervalul $J \subset I$; să notăm

$$m = \inf_{x \in J} f(x) = \inf f(J), \qquad M = \sup_{x \in J} f(x) = \sup f(J).$$

Avem $-\infty \leqslant m \leqslant M \leqslant +\infty$. Dacă f este constantă pe J atunci mulțimea $f(J)$ este formată dintr-un singur punct, deci este un interval (cu extremitățile egale) și propoziția este demonstrată în acest caz.

Să presupunem că f nu este constantă pe J, deci $m < M$. Să arătăm că mulțimea $f(J)$ conține întregul interval (m, M). Fie λ un număr oarecare din intervalul (m, M), adică $m < \lambda < M$.

Deoarece $m = \inf_{x \in J} f(x)$ și $m < \lambda$ există un punct $a \in J$ astfel ca $m \leqslant f(a) < \lambda$.

Deoarece $M = \sup f(x)$ și $\lambda < M$, există un punct $b \in J$ astfel ca $\lambda < f(b) \leqslant M$.

Așadar, $f(a) < \lambda < f(b)$. Deoarece f are proprietatea lui Darboux, există un punct $c_\lambda \in (a, b) \subset J$ astfel ca $f(c_\lambda) = \lambda$ și deci $\lambda \in f(J)$.

Cum λ a fost ales arbitrar în intervalul (m, M) rezultă că $(m, M) \subset f(J)$.

Deoarece m și M sînt marginile mulțimii $f(J)$, această mulțime poate să mai conțină, în afară de punctele intervalului (m, M), cel mult extremitățile m și M (dacă acestea sînt finite). Rezultă deci că $f(J)$ este un interval.

Reciproc, să presupunem că oricare ar fi intervalul $J \subset I$, imaginea sa $f(J)$ este tot un interval.

Fie atunci două puncte $a < b$ din I.

Să notăm $J = [a, b]$; atunci $f(J)$ este un interval și avem $f(a) \in f(J)$, $f(b) \in f(J)$; deci dacă λ se află cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, atunci $\lambda \in f(J)$, deci există un punct $c_\lambda \in [a, b]$ astfel ca $f(c_\lambda) = \lambda$, adică f are proprietatea lui Darboux, și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Corolar. Dacă funcția $f : I \to R$ are proprietatea lui Darboux, atunci $f(I)$ este interval.

Observații. 1° Afirmația reciprocă nu este în general adevărată: dacă $f(I)$ este interval, nu rezultă că f are proprietatea lui Darboux.

Exemplu. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } -1 \leqslant x < 0 \\ x \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$ definită pe $I = [-1, 1]$.

Avem $f(I) = [0, 1]$, deci $f(I)$ este interval, dar f nu are proprietatea lui Darboux pe I. Într-adevăr, dacă luăm intervalul $J = [-1, 0] \subset I$ avem $f(J) = \{0, 1\}$, deci $f(J)$ nu este interval (între $f(-1) = 1$ și $f(0) = 0$, funcția nu mai ia nici o valoare intermediară pe intervalul $[-1, 0]$).

2° Intervalele se numesc mulțimi conexe* ale dreptei (adică mulțimi formate dintr-o „singură bucată"). Cu această denumire, proprietatea exprimată în propoziția precedentă se enunță astfel:

O funcție are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă transformă mulțimile conexe tot în mulțimi conexe.

În spații topologice oarecare, această proprietate se poate lua ca definiție a funcțiilor cu proprietatea lui Darboux.

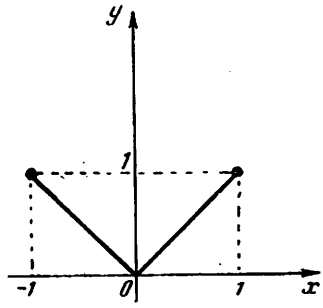


Fig. 67

Se știe că o funcție strict monotonă este biunivocă, dar că există funcții biunivoce care nu sînt strict monotone.

Pentru funcțiile definite pe un *interval* care au proprietatea lui Darboux, este adevărată și afirmația reciprocă, după cum rezultă din

Propoziția 3. Dacă funcția $f : I \to R$ are proprietatea lui Darboux și este biunivocă, atunci f este strict monotonă.

Să presupunem, prin absurd, că f nu este nici strict crescătoare, nici strict descrescătoare. Aceasta înseamnă că există trei puncte $x_1 < x_2 < x_3$ din I, astfel încît să nu avem nici $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ și nici $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$, adică $f(x_2)$ nu se află cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_3)$.

Pentru a face o alegere, să presupunem că $f(x_1) < f(x_3)$. Atunci avem:

$$\text{sau } f(x_2) < f(x_1) < f(x_3) \text{ sau } f(x_1) < f(x_3) < f(x_2).$$

(Nu putem avea $f(x_2) = f(x_1)$ sau $f(x_2) = f(x_3)$, deoarece $x_2 \neq x_1$, $x_2 \neq x_3$ și f este biunivocă.)

Deoarece f are proprietatea lui Darboux, în primul caz există un punct c_1 cuprins între x_2 și x_3 (deci $c_1 \neq x_1$), astfel ca $f(c_1) = f(x_1)$. În al

* Un spațiu topologic E este *conex* dacă nu există două mulțimi deschise, nevide și disjuncte, a căror reuniune să fie E. Se dă o definiție echivalentă a conexiunii, cu mulțimi închise, nevide și disjuncte.

doilea caz există un punct c_3 cuprins între x_1 și x_2 (deci $c_3 \neq x_3$), astfel ca $f(c_3) = f(x_3)$.

În ambele cazuri funcția ia aceeași valoare în două puncte diferite, deci nu este biunivocă, ceea ce contrazice ipoteza.

Rezultă deci că f este strict monotonă pe I.

Propoziția 4. Dacă funcția $f : I \to R$ are proprietatea lui Darboux și dacă există una din limitele laterale într-un punct $x_0 \in I$, atunci ea este egală cu $f(x_0)$.

Să presupunem că există limita la stînga $f(x_0 - 0)$ (finită sau infinită) și că ea este diferită de $f(x_0)$. Pentru a face o alegere, să presupunem că $f(x_0 - 0) < f(x_0)$.

Fie λ un număr astfel ca $f(x_0 - 0) < \lambda < f(x_0)$. Deoarece $f(x_0 - 0) < \lambda$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît pentru orice $x < x_0$ din $V \cap I$ să avem $f(x) < \lambda$. Fie $a \in V \cap I$ astfel ca $a < x_0$, deci $f(a) < \lambda < f(x_0)$. Oricare ar fi $x \in (a, x_0)$, $a < x < x_0$, avem $x \in V$ deci $f(x) < \lambda$. Așadar, funcția nu ia valoarea λ în nici un punct cuprins între a și x_0, ceea ce contrazice ipoteza că f are proprietatea lui Darboux.

Așadar, dacă există $f(x_0 - 0)$, atunci $f(x_0 - 0) = f(x_0)$. În mod asemănător se demonstrează că dacă există $f(x_0 + 0)$, atunci $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Observație. Propoziția afirmă că dacă există limita la stînga $f(x_0 - 0)$, atunci f este continuă la stînga în x_0, iar dacă există limita la dreapta $f(x_0 + 0)$, atunci f este continuă la dreapta în x_0. În particular, dacă există ambele limite laterale, funcția este continuă în x_0.

Corolar. Dacă funcția $f : I \to R$ are proprietatea lui Darboux, atunci ea nu are nici un punct de discontinuitate de prima speță.

În adevăr, dacă există $f(x_0 - 0)$ și $f(x_0 + 0)$, atunci avem $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$, deci x_0 nu este punct de discontinuitate.

Rezultă deci că, dacă x_0 este punct de discontinuitate, cel puțin una din limitele laterale nu există, deci x_0 este punct de discontinuitate de speța a doua.

Observație. Dacă $f(x_0 + 0)$ sau $f(x_0 - 0)$ *există și este diferită de* $f(x_0)$, în particular dacă este infinită, funcția nu are proprietatea lui Darboux.

Exemple.

1) $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$ definită pe R.

Funcția are proprietatea lui Darboux. În punctul 0 funcția nu are nici limită la stînga, nici limită la dreapta.

$$2)\ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \leqslant 0 \\ \sin\dfrac{1}{x} \text{ pentru } x > 0 \end{cases} \quad \text{definită pe } R.$$

Funcția are proprietatea lui Darboux. Avem $f(0-0) = 1$ și $f(0) = 1$, deci $f(0-0) = f(0)$. Funcția nu are limită la dreapta în 0.

$$3)\ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x < 0 \\ 0 \text{ pentru } x = 0 \\ \sin\dfrac{1}{x} \text{ pentru } x > 0 \end{cases} \quad \text{definită pe } R.$$

Avem $f(0-0) = 1$ și $f(0) = 0$, deci $f(0-0) \neq f(0)$. Rezultă că funcția nu are proprietatea lui Darboux pe R (și pe nici un interval care conține pe 0).

$$4)\ f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} \text{ dacă } x < 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} \text{ dacă } x > 0 \end{cases} \quad \text{definită pe } R.$$

Avem $f(0+0) = +\infty$, deci funcția nu are proprietatea lui Darboux.

Deoarece o funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux, toate propozițiile relative la funcțiile cu proprietatea lui Darboux rămîn adevărate și pentru funcții continue pe un interval:

Corolarul 1. Dacă o funcție continuă pe un interval I ia valori de semne contrare în două puncte $a < b$ din I, atunci ea se anulează cel puțin într-un punct dintre a și b.

Corolarul 2. Dacă o funcție continuă nu se anulează pe un interval, atunci ea păstrează același semn pe acest interval.

Corolarul 3. Dacă f este continuă pe un interval I, atunci $f(I)$ este interval.

Corolarul 4. Dacă f este biunivocă și continuă pe un interval I, atunci f este strict monotonă pe I.

Observație. Dacă funcția este biunivocă și continuă pe o mulțime care nu este interval, s-ar putea ca funcția să nu fie strict monotonă pe această mulțime.

Exemplu. Funcția $f(x) = \begin{cases} x \text{ dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ x - 3 \text{ dacă } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$ definită pe $[0,1)\cup(1,2]$

este continuă și biunivocă. Funcția este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $[0, 1)$ și $(1,2]$, dar nu este strict crescătoare pe reuniunea lor, deoarece $f(0) = 0$ și $f(2) = -1$.

A p l i c a ț i i. Folosind proprietatea: dacă f este continuă pe un interval I, atunci $f(I)$ este interval; vom determina mulțimea valorilor unor funcții elementare.

1) Funcția $f(x) = x^n$, $n \in N$, definită pe $I = [0, +\infty)$ este continuă, deci $f(I)$ este interval, și anume $f(I) = [0, +\infty)$.

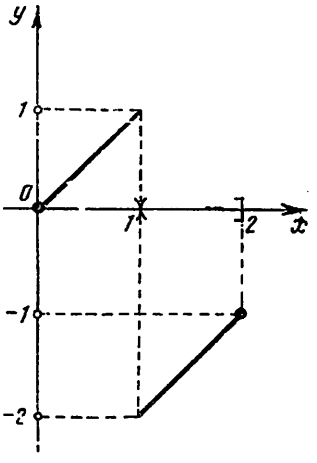


Fig. 68

Într-adevăr, $f(0) = 0$ și $m = \inf\limits_{x \geqslant 0} x^n = 0$; pe de altă parte $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, deci x^n ia valori oricît de mari și deci:

$M = \sup\limits_{x \geqslant 0} x^n = +\infty$. Deoarece $m = 0 \in f(I)$, rezultă că $f(I) = [0, +\infty)$.

2) Funcția $f(x) = x^{2n-1}$, $n \in N$, definită pe $R = (-\infty + \infty)$ este continuă, deci $f(R)$ este interval, și anume $f(R) = R$.

Avem $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2n-1} = -\infty$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2n-1} = +\infty$, deci funcția ia valori oricît de departe spre $-\infty$ și oricît de departe spre $+\infty$. Rezultă $m = \inf\limits_{x \in R} x^{2n-1} = -\infty$ și $M = \sup\limits_{x \in R} x^{2n-1} = +\infty$, deci $f(R) = (-\infty, +\infty) = R$.

3) Funcția $f(x) = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ definită pe R este continuă, deci $f(R)$ este interval și anume $f(R) = (0, +\infty)$.

Într-adevăr, dacă $a > 1$, avem

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \text{ și } \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty,$$

deci

$$m = \inf_{x \in R} a^x = 0 \text{ și } M = \sup_{x \in R} a^x = +\infty.$$

Deoarece funcția a^x nu ia valoarea 0, rezultă că $f(R) = (0, +\infty)$. În cazul cînd $0 < a < 1$, se demonstrează la fel.

4) Funcția $f(x) = \sin x$ definită pe $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este continuă pe I. Rezultă că $f(I)$ este interval, și anume $f(I) = [-1,1]$.

Avem $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$, deci $(-1, 1) \subset f(I)$. Dar $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ și $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, deci $-1 \in f(I)$, și $1 \in f(I)$ de unde rezultă că

$$f(I) = [-1, 1].$$

5) $f(x) = \cos x$ definită pe $I = [0, \pi]$ este continuă pe I. Rezultă că $f(I)$ este interval și se arată ca la exemplul 4 că $f(I) = [-1,1]$.

6) $f(x) = \operatorname{tg} x$ definită pe $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este continuă pe I. Rezultă că $f(I)$ este interval, și anume $f(I) = R = (-\infty, +\infty)$.

Într-adevăr

$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty \text{ și } \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty,$$

deci

$$m = \inf_{x \in I} \operatorname{tg} x = -\infty \text{ și } M = \sup_{x \in I} \operatorname{tg} x = +\infty,$$

de unde $f(I) = (-\infty, +\infty) = R$.

7) $f(x) = \operatorname{ctg} x$ definită pe $I = (0, \pi)$ este continuă pe I. Rezultă că $f(I)$ este interval și se arată în exemplul 6 că $f(I) = R = (-\infty, +\infty)$.

5. Rezolvarea ecuațiilor $x^n = a$ și $a^x = b$

Într-un capitol anterior s-a demonstrat existența și unicitatea soluției pozitive a ecuației $x^n = a$ ($a \geqslant 0$, n natural) și a soluției ecuației $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$). Vom da acum demonstrații mai simple ale existenței soluțiilor acestor ecuații.

1) *Ecuația* $x^n = a$, $a \geqslant 0$, $n \in N$ *are o soluție pozitivă și numai una.*

Într-adevăr, funcția $f(x) = x^n$ aplică semidreapta $I = [0, +\infty)$ pe întreaga semidreaptă $[0, +\infty)$, adică $f(I) = [0, +\infty)$. Deoarece $a > 0$, avem $a \in f(I) = [0, +\infty)$, deci există un punct $x_0 \in I$ ($x_0 \geqslant 0$) astfel ca $f(x_0) = a$, adică astfel ca $x_0^n = a$. Aceasta înseamnă că x_0 este o soluție pozitivă a ecuației. Deoarece funcția x^n este strict crescătoare, este biunivocă, deci nu poate lua valoarea a decît în punctul x_0, deci x_0 este singura soluție pozitivă a acestei ecuații.

După cum se știe, soluția pozitivă x_0 a ecuației $x^n = a$ s-a notat cu $\sqrt[n]{a}$.

2) *Ecuația* $x^{2n-1} = a$, $a < 0$, $n \in N$ *are o soluție strict negativă și numai una.*

Într-adevăr, funcția $f(x) = x^{2n-1}$ aplică dreapta R pe întreaga dreaptă R, adică $f(R) = R$. Există deci un punct $x_0 \in R$, astfel că $f(x_0) = a$, adică astfel că $x_0^{2n-1} = a$. Aceasta înseamnă că x_0 este soluția ecuației $x^{2n-1} = a$. Deoarece funcția x^{2n-1} este strict crescătoare pe R, ea nu mai poate lua valoarea a în alt punct afară de x_0, deci x_0 este singura soluție a ecuației. Să observăm că dacă am avea $x_0 \geqslant 0$, atunci $x_0^{2n-1} \geqslant 0$ și deoarece $a < 0$, nu am putea avea $x_0^{2n-1} = a$. Așadar, $x_0 < 0$, adică x_0 este o soluție strict negativă a ecuației, care s-a notat $\sqrt[2n-1]{a}$.

3) *Ecuația* $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, *are o soluție reală și numai una.*

Într-adevăr, funcția $f(x) = a^x$ aplică dreapta R pe întreaga semidreaptă $(0, +\infty)$, adică $f(I) = (0, +\infty)$. Deoarece $a > 0$, avem $a \in f(I) = (0, +\infty)$, deci există $x_0 \in R$, astfel ca $a^{x_0} = b$. Faptul că x_0 este singura

soluție a acestei ecuații rezultă din aceea că funcția $f(x) = a^x$ este strict monotonă pe R.

Soluția x_0 a ecuației $a^x = b$ s-a notat $\log_a b$.

6. Continuitatea funcțiilor compuse

Fie funcțiile $u: E \to F$ și $\varphi: F \to R$.

Să considerăm funcția compusă $f = \varphi \circ u: E \to R$, $f(x) = \varphi(u(x))$ pentru $x \in E$.

Teoremă. Dacă funcția u este continuă într-un punct $x_0 \in E$ și dacă funcția φ este continuă în punctul corespunzător $u_0 = u(x_0) \in F$, atunci funcția compusă $f = \varphi \circ u$ este continuă în punctul $x_0 \in E$.

Fie $x_n \to x_0$, $x_n \in E$. Deoarece u este continuă în x_0, avem $u(x_n) \to u(x_0) = u_0$. Să notăm $u_n = u(x_n) \in F$. Deoarece $u_n \to u_0$ și φ este continuă în u_0, avem $\varphi(u_n) \to \varphi(u_0)$, adică $\varphi(u(x_n)) \to \varphi(u(x_0))$, sau $f(x_n) \to f(x_0)$, adică f este continuă în x_0.

Observații. Dacă $x_0 \in E$ este punct de acumulare al lui E și $u_0 = u(x_0) \in F$ este punct de acumulare al lui F, continuitatea în x_0 și u_0 se poate formula cu ajutorul limitelor:

Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0) = u_0$ și dacă $\lim\limits_{u \to u_0} \varphi(u) = \varphi(u_0)$, atunci:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(u(x)) = \lim_{u \to u_0} \varphi(u) = \varphi(\lim_{x \to x_0} u(x)).$$

Corolar. Dacă u este continuă pe E și φ este continuă pe F, atunci $f = \varphi \circ u$ este continuă pe E.

(Prin compunerea a două funcții continue se obține tot o funcție continuă.)

7. Continuitatea funcțiilor inverse

Vom demonstra mai întîi următoarea

Propoziție. Dacă funcția $f: E \to R$ este monotonă și dacă mulțimea valorilor, $f(E)$, este un interval, atunci f este continuă pe E.

Vom considera cazul cînd f este crescătoare pe E. Fie $x_0 \in E$ arbitrar și $y_0 = f(x_0)$. Fie U o vecinătate a lui y_0. Să presupunem întîi că y_0 este punct interior al intervalului $f(E)$; există atunci un interval închis $[\alpha, \beta] \subset f(E) \cap U$ astfel ca $y_0 \in (\alpha, \beta)$ (fig. 69). Deoarece $\alpha, \beta \in f(E)$, există două puncte $\alpha', \beta' \in E$ astfel ca $\alpha = f(\alpha')$ și $\beta = f(\beta')$. Deoarece f este crescătoare și $\alpha < y_0 < \beta$, avem $\alpha' < x_0 < \beta'$, deci $V = (\alpha', \beta')$ este o vecinătate a lui x_0. Pentru orice $x \in V$, avem $\alpha' < x < \beta'$, deci $f(\alpha') \leqslant f(x) \leqslant f(\beta')$, adică $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, adică $f(x) \in [\alpha, \beta] \subset U$.

Rezultă, așadar, că f este continuă în x_0.

Să presupunem că y_0 este extremitatea stîngă a intervalului $f(E)$, deci $y_0 \leqslant f(x)$ pentru orice $x \in E$. Deoarece f este crescătoare, pentru orice punct $x < x_0$ din E avem $f(x) \leqslant f(x_0) = y_0$, deci $f(x) = y_0$. Fie U o vecinătate a lui y_0 și β un punct din $f(E) \cap U$, astfel ca $y_0 < \beta$ (fig. 70). Există

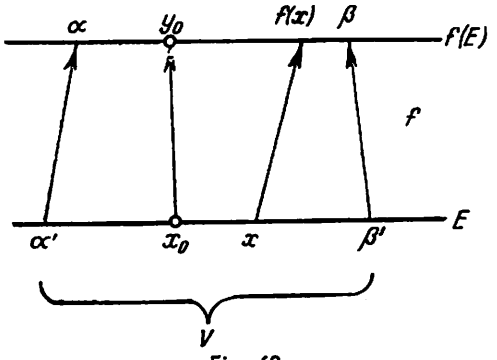


Fig. 69

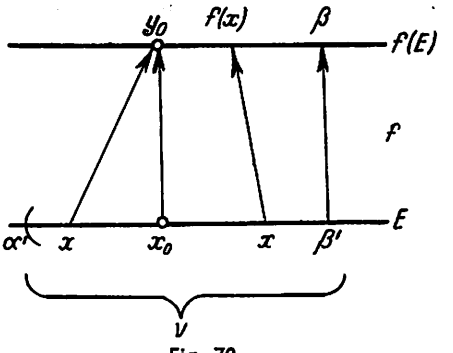


Fig. 70

un punct $\beta' \in E$, astfel ca $f(\beta') = \beta$. Deoarece f este crescătoare și $y_0 < f(\beta')$ avem $x_0 < \beta'$. Luînd $\alpha' < x_0$ oarecare, intervalul $V = (\alpha', \beta')$ este o vecinătate a lui x_0.

Fie $x \in V$ oarecare. Dacă $x \leqslant x_0$, atunci $f(x) = y_0$, deci $f(x) \in U$; dacă $x_0 < x < \beta'$, atunci $y_0 < f(x) < \beta$, deci $f(x) \in U$. Așadar, pentru orice $x \in V$ avem $f(x) \in U$, deci f este continuă în x_0.

Dacă y_0 este extremitatea dreaptă a intervalului $f(E)$, se raționează la fel.

Dacă f este descrescătoare, atunci $-f$ este crescătoare și $-f(E)$ este simetricul intervalului $f(E)$ față de origine și deci $-f(E)$ este interval; conform celor de mai sus, $-f$ este continuă pe E. Atunci f este de asemenea continuă pe E.

Teoremă. Dacă f este o aplicație strict monotonă a unui interval I pe un interval J, atunci funcția f și inversa sa f^{-1} sînt continue.

Într-adevăr, f și f^{-1} sînt ambele strict monotone; deoarece $f(I) = J$ este interval, f este continuă pe I. De asemenea, $f^{-1}(J) = I$ și I este interval, deci f^{-1} este continuă pe J.

Corolar. Dacă $f : I \to R$ este o funcție continuă și strict monotonă definită pe intervalul I, atunci funcția sa inversă $f^{-1} : f(I) \to I$ este continuă pe $f(I)$.

Într-adevăr f^{-1} este strict monotonă și este definită pe $J = f(I)$ care este interval.

Exemple. 1) Funcția sin: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ este continuă și strict crescătoare. Rezultă că și funcția sa inversă arc sin: $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este continuă (și strict crescătoare). Așadar,

$$\lim_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad -1 \leqslant x_0 \leqslant 1.$$

2) Funcția cos: $[0, \pi] \to [-1, 1]$ fiind continuă și strict descrescătoare, funcția sa inversă arc cos: $[-1, 1] \to (0, \pi]$ este continuă (și strict descrescătoare). Așadar,

$$\lim_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad -1 \leqslant x_0 \leqslant 1.$$

3) Funcția tg: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, +\infty)$ este continuă și strict crescătoare, deci funcția sa inversă arc tg: $(-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este continuă (și strict crescătoare). Așadar,

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} x_0, \quad x_0 \in R.$$

4) Funcția ctg: $(0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$ este continuă și strict descrescătoare, deci funcția sa inversă arc tg: $(-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$ este continuă (și strict descrescătoare). Așadar,

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arc\,ctg} x = \operatorname{arc\,ctg} x^0, \quad x_0 \in R.$$

8. Proprietățile funcțiilor continue pe mulțimi compacte

Fie funcția $f: E \to R$. Reamintim că f este mărginită pe E dacă mulțimea $f(E)$ este mărginită, adică dacă există un număr $M > 0$ astfel încît, oricare ar fi $x \in E$, să avem:

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Teorema 1. O funcție continuă pe o mulțime compactă este mărginită pe această mulțime.

Fie E o mulțime compactă și funcția $f: E \to R$ continuă pe această mulțime.

Să presupunem, prin absurd, că f *nu* este mărginită pe E. Aceasta înseamnă că, pentru orice număr $M > 0$, există un punct $x_M \in E$ astfel încît $|f(x_M)| > M$.

Luînd $M = n$, $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, găsim un punct $x_n \in E$ astfel ca $|f(x_n)| > n$. Am obținut astfel un șir (x_n) de puncte din E. Dar E fiind compactă, este mărginită, deci șirul (x_n) este mărginit. Conform lemei lui Cesàro, el conține un subșir convergent, $x_{n_p} \xrightarrow[p]{} x_0$. Deoarece E este compactă,

este închisă, deci o dată cu termenii șirului (x_{n_p}) conține și limita sa, $x_0 \in E$. Funcția f, fiind continuă pe E, este în particular continuă în x_0, deci deoarece $x_{n_p} \xrightarrow[p]{} x_0$ rezultă că $f(x_{n_p}) \xrightarrow[p]{} f(x_0)$ și deci $|f(x_{n_p})| \xrightarrow[p]{} |f(x_0)|$. Dar din inegalitățile $|f(x_{n_p})| > n_p$, deducem că $|f(x_{n_p})| \xrightarrow[p]{} +\infty$, deoarece $n_p \xrightarrow[p]{} +\infty$. Am ajuns astfel la o contradicție (deoarece $|f(x_0)|$ este finit).

Rezultă, așadar, că f este mărginită.

Observație. Dacă mulțimea nu este compactă, este posibil ca o funcție continuă pe E să nu fie mărginită.

Exemple. 1) $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $I = (0, 1)$ este continuă pe I, dar nu este mărginită. Aici, intervalul I este mărginit dar nu este închis.

2) $f(x) = x$ definită pe $I = [0, +\infty)$ este continuă pe I, dar nu este mărginită. Aici, intervalul I este închis, dar nu este mărginit.

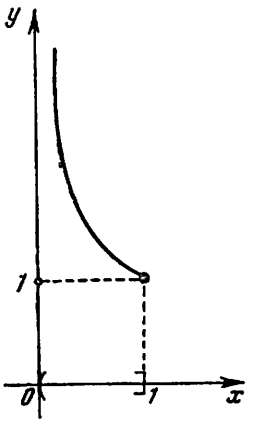


Fig. 71

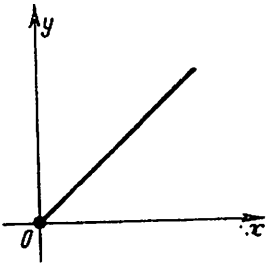


Fig. 72

Teorema 2. Dacă f este o funcție continuă pe o mulțime compactă E, atunci $f(E)$ este compactă.

Din teorema 1 rezultă că f este mărginită pe E, adică mulțimea $f(E)$ este mărginită. Rămîne de arătat că este închisă. Pentru aceasta este suficient să arătăm că, oricare ar fi șirul convergent format din puncte din $f(E)$, limita sa aparține de asemenea lui $f(E)$.

Fie $y_n \to y_0$, $y_n \in f(E)$. Pentru fiecare n, există un punct $x_n \in E$ astfel ca $f(x_n) = y_n$. Am obținut astfel un șir (x_n) de puncte din E. Se arată ca în demonstrația teoremei precedente că (x_n) conține un subșir $x_{n_p} \xrightarrow[p]{} x_0 \in E$. Deoarece f este continuă în x_0 deducem $f(x_{n_p}) \xrightarrow[p]{} f(x_0) \in f(E)$, și, deoarece $f(x_{n_p}) = y_{n_p}$, rezultă $y_{n_p} \xrightarrow[p]{} f(x_0)$. Dar, deoarece $y_n \longrightarrow y_0$ și (y_{n_p}) este un subșir al șirului (y_n), rezultă că $y_{n_p} \xrightarrow[p]{} y_0$, și, cum limita unui șir este unică, deducem $y_0 = f(x_0)$, de unde $y_0 \in f(E)$, și teorema este demonstrată.

Acest rezultat se enunță prescurtat astfel: *imaginea unei mulțimi compacte printr-o funcție continuă este o mulțime compactă.*

Observație. Dacă E nu este compact, este posibil ca $f(E)$ să nu fie compact.

Exemple. 1) $f(x) = x$ definită pe $I = (0, 1)$. Avem $f(I) = (0, 1)$. Mulțimea $f(I)$ este mărginită, dar nu este închisă.

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $I = (0, 1)$. Avem $f(I) = [1, +\infty)$.

Mulțimea $f(I)$ este închisă dar nu este mărginită.

Corolar. Imaginea unui interval compact printr-o funcție continuă este un interval compact.

Într-adevăr, conform proprietății lui Darboux, imaginea unui interval printr-o funcție continuă este un interval. Restul corolarului rezultă din teorema precedentă.

Spunem că o funcție minorată $f: E \to R$ își atinge marginea inferioară $m = \inf_{x \in E} f(x)$, dacă există un punct $x_m \in E$ astfel ca $m = f(x_m)$.

Spunem că o funcție majorată $f: E \to R$ își atinge marginea superioară $M = \sup_{x \in E} f(x)$, dacă există un punct $x_M \in E$ astfel ca $f(x_M) = M$.

Teorema 3. O funcție continuă pe o mulțime compactă își atinge marginile pe această mulțime.

Fie $f: E \to R$ continuă și E compactă. Mulțimea $f(E)$ este compactă, adică închisă și mărginită. Să notăm $M = \sup f(E)$ și $m = \inf f(E)$. Deoarece $f(E)$ este închisă, avem $m \in f(E)$ și $M \in f(E)$.

Există deci două puncte $x_m \in E$ și $x_M \in E$ astfel ca

$$f(x_m) = \inf f(E) = \inf_{x \in E} f(x),$$

$$f(x_M) = \sup f(E) = \sup_{x \in E} f(x)$$

și teorema este demonstrată.

Observații. 1° Deoarece $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pentru orice $x \in E$, rezultă că $f(E) \subset [m, M]$.

2° Dacă E nu este compactă, este posibil ca f să fie mărginită fără ca să-și atingă marginile.

Exemplu. $f(x) = x$ definită pe $E = (0, 1)$. Avem $m = \inf_{x \in I} f(x) = 0$ și $M = \sup_{x \in I} f(x) = 1$, dar funcția $f(I) = (0, 1)$, deci f nu ia în nici un punct nici valoarea $m = 0$, nici valoarea $M = 1$.

9. Funcții uniform continue

Fie funcția $f: E \to R$. A spune că f este continuă pe E înseamnă că pentru orice $x \in E$, f este continuă în x, adică:

Oricare ar fi $x \in E$ și oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, astfel încît, oricare ar fi $x' \in E$ cu $|x' - x| < \delta$, să avem $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

Pentru un punct $x \in E$, fixat, corespondența $\varepsilon \to \delta(\varepsilon, x)$ caracterizează într-un anumit sens „gradul" de continuitate al funcției f în punctul x.

Dacă x' este alt punct din E, și dacă pentru fiecare $\varepsilon>0$ avem $\delta(\varepsilon, x')\leqslant \leqslant\delta(\varepsilon, x)$, am putea spune că funcția f este „mai continuă" în punctul x' decît în punctul x.

Evident, în cazul a două puncte (sau al unui număr finit de puncte), putem alege totdeauna același $\delta(\varepsilon)$, și anume pe cel mai mic dintre numerele $\delta(\varepsilon, x')$ și $\delta(\varepsilon, x)$.

În cazul unei mulțimi infinite de puncte din E, nu mai este totdeauna posibil să alegem același $\delta(\varepsilon)>0$, deoarece s-ar putea ca pentru un $\varepsilon>0$ fixat, marginea inferioară a numerelor $\delta(\varepsilon, x)$ să fie 0. Am putea spune că, în acest caz, funcția nu este „la fel de continuă" în toate punctele.

Dacă însă este posibil ca pentru fiecare $\varepsilon > 0$ să găsim un număr $\delta(\varepsilon)>0$ unic, același pentru toate punctele $x\in E$ (adică δ să depindă numai de ε, dar nu și de x), atunci am putea spune că funcția este „la fel de continuă" în toate punctele din E, sau că este *uniform continuă pe* E. În acest caz, deoarece δ nu mai depinde de x, afirmația „oricare ar fi $x\in E$" trebuie să figureze după afirmația relativă la δ. Așadar:

Definiție. O funcție $f : E \to R$ este uniform continuă (pe E) dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît, oricare ar fi x' și x'' din E cu $|x' - x''| < \delta$, să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Observație. Din punct de vedere geometric, a spune că f este uniform continuă înseamnă că, dacă alegem pe axa Ox un interval I de lungime $<\delta$, imaginea sa $f(I)$ are lungimea $<\varepsilon$, *oriunde* s-ar afla I în mulțimea E.

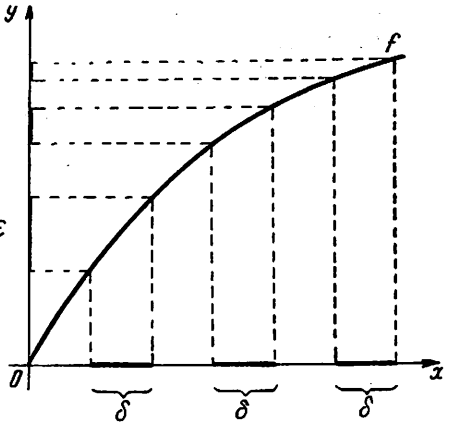


Fig. 73

Exemple. 1) Funcția constantă $f(x)\equiv c$ definită pe R este uniform continuă pe R.

Într-adevăr, $|f(x') - f(x'')| = |c - c|=0$, deci pentru orice $\varepsilon>0$ putem alege $\delta(\varepsilon)=1$ și atunci, dacă $|x'-x''|<\delta$, avem într-adevăr $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

2) Funcția identică $f(x) = x$ definită pe R este uniform continuă pe R.

Într-adevăr, $|f(x')-f(x'')| =|x'-x''|$, deci pentru fiecare $\varepsilon > 0$ putem alege $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ și atunci, dacă $|x' - x''| < \delta$ avem într-adevăr $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

3) Funcția $f(x) = x^2$ definită pe R nu este uniform continuă pe R.

Să presupunem prin absurd că funcția ar fi uniform continuă pe R. Fie $\varepsilon > 0$; există deci $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît dacă $|x' - x''| < \delta$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Dacă alegem punctele x' și x'' astfel ca $|x' - x''| = \delta$ avem $|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = |x' - x''|\,|x' + x''| = \delta|x' + x''|$.

Această egalitate este îndeplinită oriunde s-ar afla x' și x'' pe dreaptă.

Să luăm atunci $x'>\frac{\varepsilon}{\delta}$ și $x''>\frac{\varepsilon}{\delta}$, $(|x' - x''| = \delta)$.

Atunci $|x' + x''| = x' + x'' > \frac{2\varepsilon}{\delta}$ și deci

$$|x'^2 - x''^2| = \delta |x' + x''| > \delta \frac{2\varepsilon}{\delta} = 2\varepsilon,$$

adică $|f(x') - f(x'')| > 2\varepsilon$, ceea ce contrazice inegalitatea $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ obținută mai sus.

Așadar, $f(x) = x^2$ nu este uniform continuă pe R.

Propoziție. Orice funcție uniform continuă este continuă.

Această propoziție rezultă din definiția continuității uniforme luînd $x_0 = x''$ și ținîndu-l fixat.

Observații. 1° Proprietatea de continuitate are un caracter *punctual*, ea se definește într-un punct. Proprietatea de continuitate uniformă are un caracter *global*, ea se definește pe o mulțime.

2° Afirmația reciprocă propoziției precedente nu este în general adevărată: există funcții continue care nu sînt uniform continue, de exemplu funcția $f(x) = x^2$ definită pe R.

Dacă însă domeniul de definiție este *compact*, este adevărată și afirmația reciprocă:

Teoremă. O funcție continuă pe o mulțime compactă este uniform continuă pe această mulțime.

Fie E o mulțime *compactă* (închisă și mărginită) și o funcție continuă $f: E \to R$. Să arătăm că f este uniform continuă pe E. Să presupunem, prin absurd, că f nu este uniform continuă pe E. Aceasta înseamnă că: există un număr $\varepsilon_0 > 0$, astfel încît, oricare ar fi numărul $\delta > 0$, există două puncte x'_δ și x''_δ din E astfel încît $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$ dar $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| > \varepsilon_0$.

Luînd $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, obținem două șiruri (x'_n) și (x''_n) de puncte din E, astfel ca pentru orice $n \in N$ să avem

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \text{ și } |f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon_0.$$

Mulțimea E este mărginită (fiind compactă), deci și șirul (x'_n) este mărginit. În baza lemei lui Cesàro, el conține un subșir convergent $x'_{n_p} \xrightarrow[p]{} x_0$, iar limita x_0 *aparține lui* E, deoarece E este închisă.

Deoarece $|x'_{n_p} - x''_{n_p}| < \frac{1}{n_p} \xrightarrow[p]{} 0$, deducem că

$$x'_{n_p} - x''_{n_p} \xrightarrow[p]{} 0,$$

deci: $x''_{n_p} = x'_{n_p} - (x'_{n_p} - x''_{n_p}) \xrightarrow[p]{} x_0 - 0 = x_0$.

Deoarece $x'_{n_p} \xrightarrow[p]{} x_0$ și $x''_{n_p} \xrightarrow[p]{} x_0$, iar f este continuă în x_0 (fiind continuă pe E), deducem

$$f(x'_{n_p}) \xrightarrow[p]{} f(x_0) \text{ și } f(x''_{n_p}) \xrightarrow[p]{} f(x_0),$$

deci:

$$f(x'_{n_p}) - f(x''_{n_p}) \longrightarrow 0.$$

Dar din inegalitățile $|f(x'_{n_p}) - f(x''_{n_p})| > \varepsilon_0$, pentru orice $p \in N$, deducem că șirul $(f(x'_{n_p}) - f(x''_{n_p}))$ nu are limita 0, și am ajuns astfel la o contradicție.

Deoarece presupunerea că f n-ar fi uniform continuă ne duce la contradicție, rezultă că f este uniform continuă și teorema este demonstrată.

O b s e r v a ț i i. 1° Teorema precedentă rezultă și ca o consecință imediată a propoziției relative la oscilația funcției (cap. II, § 5, nr. 7). Într-adevăr, deoarece f este continuă, avem $\omega_f(x) = 0$ pentru orice $x \in E$, deci $\omega = \sup_{x \in E} \omega_f(x) = 0$. Conform propoziției menționate, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice interval I de lungime $< \delta(\varepsilon)$ să avem $\omega_f(I \cap E) < \varepsilon$. Deducem că oricare ar fi punctele x', $x'' \in E$ cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$, notînd $I = [x', x'']$ avem $\omega_f(I \cap E) < \varepsilon$, deci, în particular, $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

O b s e r v a ț i i. 1° Dacă f este continuă pe o mulțime care nu este compactă, este posibil să nu fie uniform continuă.

Exemple. 1) $f(x) = x^2$ definită pe R, este continuă, dar nu este uniform continuă. Aici mulțimea de definiție este închisă, dar nu este mărginită.

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $(0, 1]$ este continuă, dar nu este uniform continuă — după cum se va vedea mai departe (deoarece nu este mărginită). Aici mulțimea de definiție este mărginită, dar nu este închisă.

2° Condiția ca E să fie compactă este suficientă, dar nu și necesară pentru ca o funcție continuă să fie uniform continuă. De exemplu, funcția $f(x) = x$ definită pe R este uniform continuă.

Putem acum recapitula proprietățile funcțiilor *continue* pe mulțimi *compacte*:

1) Sînt mărginite.
2) Își ating efectiv marginile.
3) Sînt uniform continue.

Spunem că o funcție $f: E \to R$ este lipschitziană* dacă există un număr $M > 0$ astfel încît oricare ar fi punctele x', $x'' \in E$ să avem

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant M|x' - x''|.$$

Inegalitatea aceasta se numește *condiția lui Lipschitz.*

P r o p o z i ț i e. Dacă funcția $f: E \to R$ este lipschitziană atunci ea este uniform continuă.

* De la numele matematicianului Lipschitz.

În adevăr, fie $\varepsilon>0$; să luăm $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{M}$. Atunci, dacă

$$|x'-x''|<\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{M},$$

avem

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

deci f este uniform continuă pe E.

Rezultă în particular că funcțiile lipschitziene sînt continue.

Observații. 1° Dacă f este uniform continuă pe E atunci $|f|$ este uniform continuă pe E. Afirmația reciprocă nu este în general adevărată.

2° Dacă f și g sînt uniform continue pe E, atunci $f+g$ și αf sînt uniform continue pe E, oricare ar fi $\alpha\in R$. Mulțimea funcțiilor uniform continue pe E este deci un spațiu vectorial. Această mulțime nu este în general o algebră, deoarece produsul a două funcții uniform continue poate să nu fie uniform continuu.

Exemplu. Funcțiile $f(x)=x$ și $g(x)=x$ sînt uniform continue pe R, dar produsul lor $f(x)\,g(x)=x^2$ nu este uniform continuu pe R.

3° O funcție f uniform continuă pe o mulțime mărginită E este mărginită pe E.

Rezultă că funcția $f(x)=\frac{1}{x}$ nu este uniform continuă pe (0, 1), deoarece nu este mărginită.

4° Dacă f și g sînt uniform continue pe o mulțime mărginită E, atunci produsul lor fg este uniform continuu pe E.

Rezultă că mulțimea funcțiilor uniform continue pe o mulțime *mărginită* este o algebră.

5° Dacă f este uniform continuă pe E, atunci f se poate prelungi prin continuitate în orice punct de acumulare (finit) al lui E, iar funcția prelungită este de asemenea uniform continuă.

Rezultă că dacă o funcție nu are limită finită într-un punct de acumulare (finit) al lui E, atunci ea nu este uniform continuă pe E.

Exemplu. Funcția $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ definită pe (0, 1) nu are limită în 0, deci nu este uniform continuă.

10. Funcții semicontinue

Fie funcția $f\colon E\to R$ și $x_0\in E$.

Spunem că funcția f este semicontinuă inferior în punctul x_0, dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît

$$f(x)>f(x_0)-\varepsilon,\ \textit{pentru orice}\ x\in V\cap E.$$

Spunem că funcția f este semicontinuă superior în punctul x_0, dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon,\ \textit{pentru orice}\ x\in V\cap E.$$

Din această definiție rezultă că dacă în x_0 funcția are un minim, atunci este semicontinuă inferior în x_0, iar dacă în x_0 are un maxim, atunci este semicontinuă superior în x_0. O funcție este continuă în x_0, dacă și numai dacă este semicontinuă inferior și superior în x_0.

O funcție este semicontinuă inferior (respectiv superior) pe mulțimea E, dacă are această proprietate în fiecare punct din E.

Se verifică ușor că suma $f+g$ a două funcții semicontinue inferior (sau superior) este de asemenea o funcție semicontinuă inferior (sau superior). Dacă f este semicontinuă inferior, atunci $-f$ este semicontinuă, superior și reciproc.

Dacă f este semicontinuă inferior (sau superior) și $\alpha \geqslant 0$, atunci αf este semicontinuă inferior (sau superior).

Mulțimea funcțiilor semicontinue inferior (sau superior) în x_0 sau pe E nu este un spațiu vectorial, dar este un con convex în spațiul vectorial al tuturor funcțiilor definite pe E. Lăsăm pe seama cititorului să verifice următoarele proprietăți:

1) Dacă $(f_i)_{i\in I}$ este o familie oarecare de funcții semicontinue inferior, atunci anvelopa superioară $\sup\limits_{i\in I} f_i$ este semicontinuă inferior (în toate punctele $x\in E$ în care $\sup\limits_{i\in I} f_i(x) < +\infty$).

2) Dacă $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ este o familie finită de funcții semicontinue inferior, atunci anvelopa inferioară $\inf\limits_{1\leqslant i\leqslant n} f_i$ este semicontinuă inferior.

Capitolul VI

DERIVATE

§ 1. Originea geometrică și fizică a derivatei

1. Problema tangentei

Fie f o funcție definită pe un interval I continuă pe acest interval. Să notăm cu C graficul său:

$$C = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}.$$

Graficul funcției este o curbă în plan (fig. 74).

Fie x_0 un punct din I și $M_0(x_0, f(x_0))$ punctul corespunzător de pe grafic. Să luăm un punct oarecare $x \neq x_0$ din I; pe grafic îi corespunde punctul $M(x, f(x))$.

Unind punctele M_0 și M obținem o dreaptă care formează unghiul α cu axa Ox.

Paralela prin M_0 la Ox taie paralela prin M la Oy în punctul N. S-a format triunghiul dreptunghic M_0NM care are cateta M_0N de lungime $x - x_0$ și cateta MN de lungime $f(x) - f(x_0)$.

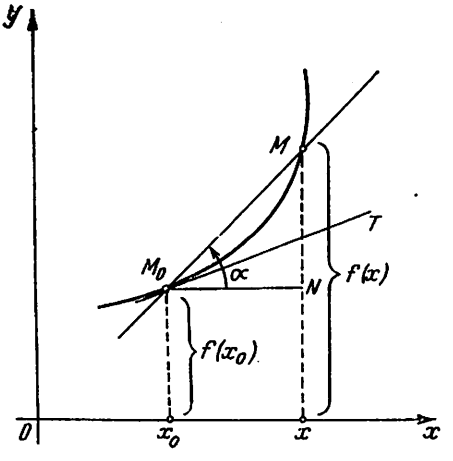


Fig. 74

Coeficientul unghiular $m = \operatorname{tg} \alpha$ al secantei M_0M este dat de egalitatea

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Luînd alt punct $x' \neq x_0$ din I, căruia îi corespunde pe grafic punctul $M'(x', f(x'))$, dreapta M_0M' are coeficientul unghiular

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$

Pentru puncte x diferite, obținem diferite secante M_0M care au, în general, coeficienți unghiulari diferiți.

Dacă x se apropie de x_0, punctul M se apropie pe grafic de punctul M_0. Se apropie oare şi secanta M_0M, ca poziţie, de o dreaptă M_0T? Sau, cu alte cuvinte, se apropie şi coeficientul unghiular tg α al secantei M_0M de o valoare $\operatorname{tg}\alpha_0$?

Sîntem astfel conduşi să considerăm limita funcţiei tg α cînd $x \to x_0$, adică

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă această limită există şi este finită, spunem că graficul C admite tangentă în punctul M_0, şi anume tangenta la grafic în punctul M_0 este, prin definiţie, dreapta M_0T al cărei coeficient unghiular este

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă limita precedentei există şi este infinită ($+\infty$ sau $-\infty$), vom spune de asemenea că graficul C admite tangentă în punctul M_0, şi anume tangenta la grafic în punctul M_0 este, prin definiţie, dreapta M_0T paralelă cu axa Oy (dreapta a cărei ecuaţie este $x = x_0$).

2. Problema vitezei

Să considerăm un mobil M în mişcare rectilinie şi uniformă (fig. 75). Aceasta înseamnă că traiectoria sa este o linie dreaptă şi că spaţiul este proporţional cu timpul în care este parcurs. Să alegem un punct de referinţă O, un sens pozitiv şi o unitate de lungime pe dreapta pe care se mişcă mobilul M. Să alegem de asemenea un moment de referinţă pe care să-l notăm 0.

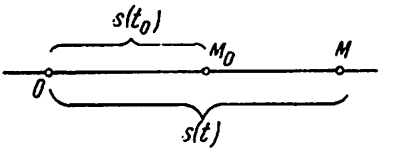


Fig. 75

Să notăm cu $s(0)$ abscisa mobilului în acest moment. În fiecare moment t să notăm cu $s(t)$ abscisa punctului de pe traiectorie, în care se află mobilul la momentul respectiv.

Spaţiul parcurs de mobil din momentul iniţial pînă într-un moment oarecare t este $s(t) - s(0)$. Să notăm cu v raportul constant dintre spaţiu şi timpul t în care a fost parcurs:

$$\frac{s(t) - s(0)}{t} = v,$$

de unde $s(t) = vt + s(0)$.

Spaţiul parcurs între două momente oarecare $t_1 < t_2$ este $s(t_2) - s(t_1)$. Raportul dintre spaţiul $s(t_2) - s(t_1)$ şi timpul $t_2 - t_1$ în care a fost parcurs este

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{vt_2 - vt_1}{t_2 - t_1} = v.$$

Raportul constant v dintre spațiu și timpul în care a fost parcurs se numește *viteza* mobilului în mișcare rectilinie și uniformă. În acest caz, viteza este egală (numeric) cu spațiul parcurs în unitatea de timp.

Viteza v este aceeași în fiecare moment.

Să presupunem acum că mobilul M se mișcă rectiliniu, dar neuniform. Aceasta înseamnă că spațiul nu mai este proporțional cu timpul în care a fost parcurs. Ce se înțelege în acest caz prin viteza pe care mobilul o are la un anumit moment t_0?

Să considerăm un moment oarecare $t > t_0$ și să facem raportul dintre spațiul $s(t) - s(t_0)$ și timpul $t - t_0$ în care a fost parcurs:

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Acest raport îl putem considera ca o viteză medie a mobilului în intervalul de timp dintre t_0 și t, în sensul că un alt mobil în mișcare rectilinie și uniformă care ar avea viteza v_m ar parcurge în timpul $t - t_0$ același spațiu $s(t) - s(t_0)$ ca și mobilul inițial.

Dacă alegem alt moment $t' > t_0$, obținem viteza medie

$$v_m' = \frac{s(t') - s(t_0)}{t' - t_0},$$

care este în general diferită de v_m. Intuitiv, ne dăm seama ușor că, cu cît intervalul de timp dintre t_0 și t este mai mic, cu atît mișcarea mobilului diferă mai puțin de o mișcare uniformă pe intervalul de timp considerat. Sîntem astfel conduși să considerăm limita vitezei medii cînd timpul $t - t_0$ tinde către 0, adică

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Dacă această limită există și este finită, ea este, prin definiție, viteza $v(t_0)$ a mobilului în momentul t_0:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

3. Densitatea liniară a unei bare materiale

Să considerăm o bară materială omogenă rectilinie și cu secțiunea constantă. Aceasta înseamnă că masa unei porțiuni din bară este proporțională cu lungimea acestei porțiuni.

Luînd în considerare numai lungimea barei și neglijînd celelalte dimensiuni, să așezăm bara de-a lungul unei axe Ox, cu un capăt în O, și cu celălalt

capăt în sensul pozitiv al axei (fig. 76). Pentru fiecare punct de pe bară de abscisă x, să notăm cu $m(x)$ masa porţiunii Ox.

Pentru două puncte oarecare $x_1<x_2$ de pe bară, masa porţiunii dintre x_1 şi x_2 este $m(x_2) - m(x_1)$ iar lungimea sa este $x_2 - x_1$. Să notăm cu ρ raportul constant dintre masă şi lungime:

$$\rho = \frac{m(x_2) - m(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Fig. 76

Deoarece $m(0) = 0$, pentru orice punct de pe bară de abscisă x, avem

$$\rho = \frac{m(x) - m(0)}{x - 0} = \frac{m(x)}{x},$$

adică $m(x) = \rho x$.

Raportul constant ρ dintre masă şi lungime se numeşte *densitatea* barei. Densitatea este aceeaşi, ρ, în orice punct al barei.

Să presupunem acum că bara materială nu este omogenă. Aceasta înseamnă că masa unei porţiuni din bară nu mai este proporţională cu lungimea acestei porţiuni. Ce se înţelege în acest caz prin densitatea barei într-un punct x_0?

Să considerăm un punct oarecare $x>x_0$ de pe bară şi să formăm raportul dintre masa $m(x) - m(x_0)$ (a porţiunii dintre punctele x_0 şi x) şi lungimea sa $x - x_0$

$$\rho_m = \frac{m(x)-m(x_0)}{x - x_0}.$$

Acest raport îl putem considera ca o densitate medie a porţiunii dintre punctele x_0 şi x, în sensul că o bară omogenă de lungime $x - x_0$, care ar avea densitatea ρ_m, ar avea aceeaşi masă $m(x) - m(x_0)$ ca şi a porţiunii din bara neomogenă.

Dacă alegem alt punct $x'>x_0$, obţinem densitatea medie

$$\rho'_m = \frac{m(x') - m(x_0)}{x' - x_0},$$

care este în general diferită de ρ_m. Cu cît lungimea $x - x_0$ este mai mică, cu atît porţiunea din bară diferă mai puţin de o bară omogenă. Sîntem astfel conduşi să considerăm limita densităţii medii cînd lungimea $x - x_0$ tinde către 0, adică

$$\lim_{x\to x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă această limită există şi este finită, ea este, prin definiţie, densitatea $\rho(x_0)$ a barei în punctul x_0:

$$\rho(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}.$$

§ 2. Derivata

1. Definiția derivatei

Cele trei probleme diferite puse în paragraful precedent, două din fizică și una din geometrie, ca de altfel și alte probleme din fizică, ne conduc, toate, la cercetarea existenței limitei unui raport de forma $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Dată fiind importanța teoretică și practică a acestor probleme diferite, vom studia dintr-un punct de vedere unitar limita raportului considerat, independent de problema concretă din care provine.

Rezultatele obținute pe această cale se interpretează apoi pentru fiecare problemă în parte, după specificul ei.

Fie f o funcție definită pe un interval I și x_0 un punct din I. Pentru fiecare punct $x \neq x_0$ din I, să considerăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$R(x)$ este o funcție definită pentru toate punctele $x \in I$ cu excepția lui x_0, în care numitorul (ca și numărătorul) se anulează. Deși funcția $R(x)$ nu este definită în x_0, se poate pune problema existenței limitei acestei funcții în punctul x_0, deoarece x_0 este un punct de acumulare al mulțimii $I - \{x_0\}$.

Definiție. **Se spune că funcția $f : I \to R$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, dacă raportul $R(x)$ are în punctul x_0 limită finită. Limita însăși se numește derivata funcției f în punctul x_0 și se notează cu $f'(x_0)$:**

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pentru derivata $f'(x_0)$ se folosesc de asemenea notațiile

$$\frac{df(x_0)}{dx} \text{ și } Df(x_0).$$

Pentru a pune în evidență argumentul x, se spune adesea că $f'(x_0)$ este *derivata lui f în raport cu x în punctul x_0*. În acest caz, mai ales, se folosește notația

$$\frac{df(x_0)}{dx} \text{ sau } f'_x(x_0).$$

Dacă limita raportului este *infinită* ($+\infty$ sau $-\infty$), ea se numește de asemenea derivata funcției f în punctul x_0 și se notează tot cu $f'(x_0)$. În acest caz nu mai spunem însă că funcția este derivabilă în x_0. Vom distinge astfel expresia „funcția f are derivată (finită sau infinită)" de expresia „funcția f este derivabilă".

Ţinînd seama de diferitele definiţii echivalente ale limitei, cu şiruri, cu vecinătăţi, sau cu ε şi δ, egalitatea

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

este echivalentă cu fiecare din propoziţiile următoare:

1) *Oricare ar fi şirul* $x_n\to x_0$, $(x_n\in I,\ x_n\neq x_0)$, avem

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\to f'(x_0).$$

2) *Pentru orice vecinătate* U *a lui* $f'(x_0)$, *există o vecinătate* V *a lui* x_0, *astfel încît, oricare ar fi* $x\in V\cap I$, $x\neq x_0$, *să avem*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in U.$$

3) *Dacă* $f'(x_0)$ *este finit: pentru orice* $\varepsilon>0$, *există un număr* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, *astfel încît, oricare ar fi* $x\in I$, $x\neq x_0$, *cu* $|x-x_0|<\delta$, *să avem*

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon.$$

Din studiul problemei tangentei de la § 1, rezultă următoarea interpretare geometrică a derivatei:

Dacă funcţia f *are derivată în punctul* x_0, *graficul său admite tangentă în punctul corespunzător* $M_0(x_0, f(x_0))$; *dacă derivata este finită, coeficientul unghiular* tg α_0 *al acestei tangente este egal cu derivata* $f'(x_0)$; *dacă derivata este infinită, tangenta este paralelă cu axa* Oy.

Observaţii. 1° Derivabilitatea şi derivata $f'(x_0)$ sînt, respectiv, aspectul calitativ şi cel cantitativ al aceleiaşi noţiuni. Pentru a putea calcula derivata $f'(x_0)$ trebuie mai întîi să ne asigurăm că ea există, adică trebuie să ne asigurăm că funcţia este derivabilă în x_0.

2° Derivata $f'(x_0)$ este un *număr*.

3° Derivabilitatea este o noţiune cu caracter punctual şi are sens numai în punctele în care funcţia este definită. De exemplu, nu are sens problema derivabilităţii funcţiei $f(x)=\ln x$ în punctul 0 sau în punctul -1, sau a funcţiei tg x în punctul $\frac{\pi}{2}$, sau a funcţiei $\frac{1}{x}$ în punctul 0 etc.

4° Problema derivatei se poate pune nu numai pentru funcţii definite pe un interval, ci şi pe o mulţime oarecare E, dacă x_0 este punct de acumulare pentru E.

De exemplu, funcţia $f(x)=x$ definită numai pe mulţimea Q a numerelor *raţionale* este derivabilă în punctul 0, şi are derivata egală cu 1. Într-adevăr, pentru orice $x\in Q$ $x\neq 0$, avem

$$R(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x-0}{x-0}\equiv 1,$$

deci

$$f'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Totuşi, în continuare, funcţiile vor fi considerate definite pe un interval. Rezultatele obţinute sînt valabile şi pentru funcţii definite pe o reuniune de intervale.

2. Continuitatea funcţiilor derivabile

În definiţia derivatei nu s-a impus continuitatea funcţiei. Continuitatea rezultă însă din derivabilitate, aşa cum se arată în următoarea

Teoremă. Dacă funcţia $f : I \to R$ este derivabilă în punctul $x \in I$, atunci f este continuă în x_0.

Într-adevăr, pentru orice $x \neq x_0$ din I avem egalitatea

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Dar, $\lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$ şi, conform ipotezei,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \text{(finit)}.$$

Rezultă atunci că f are limită în x_0 şi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0),$$

adică f este continuă în x_0.

Observaţii. 1° Afirmaţia reciprocă nu este, în general, adevărată: o funcţie poate fi continuă în x_0, fără a fi derivabilă în x_0.

Mulţimea funcţiilor $f: I \to R$ derivabile într-un punct $x_0 \in I$ este conţinută în mulţimea funcţiilor continue în acest punct.

Exemplu. Funcţia $f(x) = |x|$ definită pe R este continuă pe R; în particular, este continuă în 0. Dar funcţia nu este derivabilă în 0. Într-adevăr, să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x > 0 \\ -1 \text{ dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Raportul $R(x)$ are în punctul 0 limita la stînga -1, şi limita la dreapta 1, deci nu are limită în punctul 0, adică funcţia $f(x) = |x|$ nu este derivabilă în 0.

Pe figura 77 se constată că în origine graficul funcţiei nu are tangentă.

2° Dacă f are derivată *infinită* în punctul x_0, nu rezultă că f este continuă în acest punct.

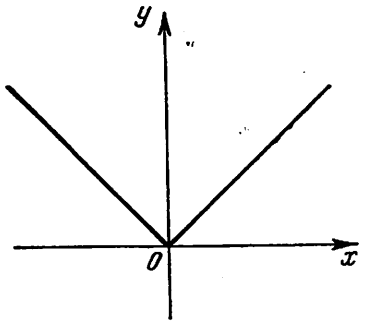


Fig. 77

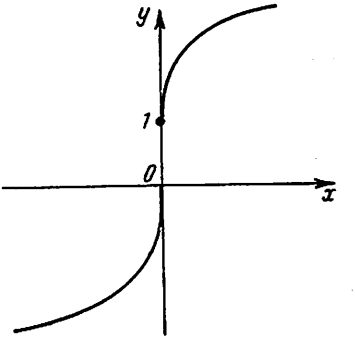


Fig. 78

Exemplu. Funcţia $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x} \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ \sqrt{-x} \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$

este discontinuă în punctul 0, totuşi are derivata $+\infty$ în acest punct.

3. Derivate laterale

Fie funcţia $f\colon I \to R$ şi $x_0 \in I$. Pentru $x \neq x_0$ din I să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Din exemplul precedent se constată că este posibil ca raportul $R(x)$ să nu aibă limită în x_0, dar să aibă limite laterale în x_0. Sîntem conduşi astfel la următoarea

Definiţie. 1) **Se spune că funcţia f este derivabilă la stînga în punctul x_0, dacă raportul $R(x)$ are limită la stînga finită în x_0. Această limită se numeşte derivata la stînga a funcţiei f în x_0 şi se notează $f'_s(x_0)$:**

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2) Se spune că funcția f este derivabilă la dreapta în punctul x_0, dacă raportul $R(x)$ are limită la dreapta finită în x_0. Această limită se numește derivata la dreapta a funcției f în x_0 și se notează $f'_d(x_0)$:

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Exemplu. Pentru funcția $f(x) = |x|$ definită pe R, avem

$$f'_s(0) = -1 \text{ și } f'_d(0) = 1.$$

Se pot da definiții echivalente ale derivatelor laterale, cu șiruri, cu vecinătăți, sau cu ε și δ.

Observații. 1° Dacă raportul $R(x)$ are în punctul x_0 limită la stînga infinită ($+\infty$ sau $-\infty$), funcția f nu este derivabilă la stînga în x_0. Totuși, limita la stînga în x_0 a raportului se notează de asemenea $f'_s(x_0)$ și se numește derivata la stînga a funcției f în punctul x_0.

De asemenea, dacă raportul $R(x)$ are în punctul x_0 limită la dreapta infinită ($+\infty$ sau $-\infty$), funcția f nu este derivabilă la dreapta în x_0. Totuși, limita la dreapta în x_0 a raportului se notează de asemenea $f'_d(x_0)$ și se numește derivata la dreapta a funcției f în punctul x_0.

2° Dacă intervalul este compact (închis și mărginit), $I = [a, b]$ în punctul a nu are sens limita la stînga a raportului $R(x)$, iar în punctul b nu are sens limita la dreapta a acestui raport. De asemenea, definiția limitei în a este echivalentă cu definiția limitei la dreapta în a, iar definiția limitei în b este echivalentă cu definiția limitei la stînga în b.

Pentru derivate, aceste fapte se transpun astfel:

a) În punctul a nu are sens problema derivatei la stînga, iar definiția derivatei în a este echivalentă cu definiția derivatei la dreapta în a. Așadar:

Funcția f are derivată în punctul a dacă și numai dacă are derivată la dreapta în a.

În acest caz $f'(a) = f'_d(a)$.

b) În punctul b nu are sens problema derivatei la dreapta, iar definiția derivatei în b este echivalentă cu definiția derivatei la stînga în b. Așadar:

Funcția f are derivată în b dacă și numai dacă are derivată la stînga în b.

În acest caz $f'(b) = f'_s(b)$.

Dacă însă x_0 este punct interior al intervalului $[a, b]$, adică dacă $a < x_0 < b$, atunci au sens ambele derivate laterale în x_0.

Funcția f poate avea în x_0 derivate laterale diferite.

Propoziție. O funcție $f: I \to R$ are derivată într-un punct interior $x_0 \in I$, dacă și numai dacă are derivate laterale egale în x_0. În acest caz,

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0).$$

Această propoziție rezultă din faptul că raportul $R(x)$ are limită în punctul x_0, dacă și numai dacă are limite laterale egale în x_0.

Propoziția conține și cazul în care derivatele sînt infinite. În particular dacă derivatele sînt finite, deducem că

Funcția f este derivabilă în punctul x_0 dacă și numai dacă este derivabilă la stînga și la dreapta în x_0, și derivatele laterale sînt egale.

Dacă în demonstrația teoremei de continuitate a funcțiilor derivabile se consideră numai limita la stînga ($x<x_0$), sau numai limita la dreapta ($x>x_0$), se obține următoarea

P r o p o z i ț i e. Dacă f este derivabilă la stînga în x_0, atunci f este continuă la stînga în x_0.

Dacă f este derivabilă la dreapta în x_0, atunci f este continuă la dreapta în x_0.

C o r o l a r. Dacă f este derivabilă la stînga și la dreapta în x_0, atunci f este continuă în x_0.

Funcția $f(x) = |x|$ definită pe R este derivabilă la stînga și la dreapta în 0, deci este continuă în 0 (deși nu este derivabilă în 0).

O b s e r v a ț i i. O funcție poate fi continuă la stînga (sau la dreapta) într-un punct, fără a fi derivabilă la stînga (respectiv la dreapta) în acest punct.

Exemplu. Funcția $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ definită pe R este continuă în punctul 0, dar nu are derivate laterale în 0.

Într-adevăr, $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|$ și $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, deci

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

adică f este continuă în punctul 0.

Pentru $x \neq 0$ să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}.$$

Funcția $\sin \frac{1}{x}$ nu are nici limită la stînga, nici limită la dreapta în 0, deci funcția f nu are nici derivată la stînga, nici derivată la dreapta în 0.

Reluînd problema tangentei se constată că derivatele laterale au de asemenea o interpretare geometrică simplă.

Să luăm numai puncte $x \in I$ la dreapta lui x_0, $x > x_0$, şi să considerăm semidreapta M_0M, cu extremitatea în M_0. Coeficientul ei unghiular este

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

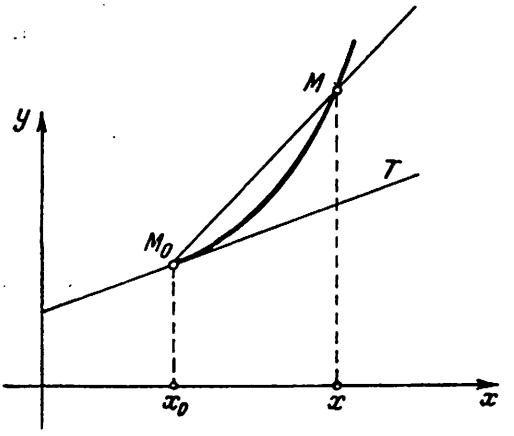


Fig. 79

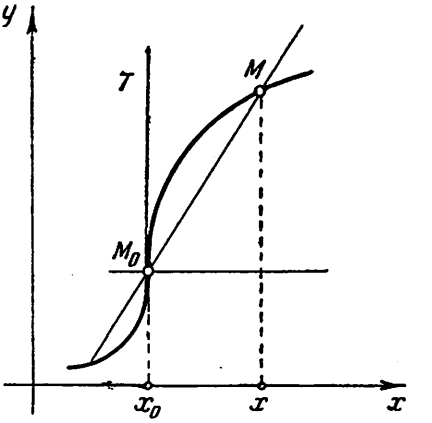


Fig. 80

Dacă acest coeficient unghiular are o limită finită tg α_0 cînd x se apropie de x_0 de la dreapta, spunem că graficul are în punctul M_0 *semitangentă la dreapta*, care este, prin definiţie, semidreapta cu extremitatea în M_0, care se află în semiplanul de la dreapta lui $M_0(x \geqslant x_0)$ şi care are coeficientul unghiular tg α_0. Aşadar: *Dacă funcţia f este derivabilă la dreapta în punctul x_0, graficul funcţiei are în punctul corespunzător M_0 $(x_0, f(x_0))$ semitangentă la dreapta, al cărei coeficient unghiular este egal cu $f'_d(x_0)$.*

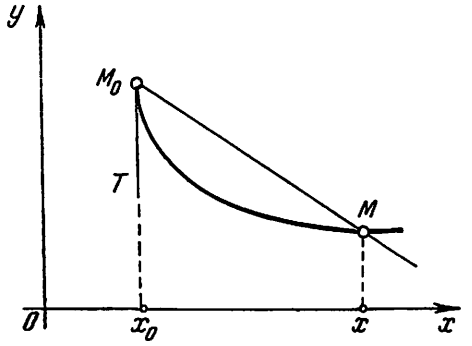


Fig. 81

Dacă $f'_d(x_0) = +\infty$, graficul admite, prin definiţie, semitangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, o semidreaptă M_0T paralelă cu axa Oy, situată deasupra punctului M_0 (fig. 80).

Dacă $f'_d(x_0) = -\infty$, graficul admite, prin definiţie, ca semitangentă la dreapta în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, semidreapta M_0T paralelă cu axa Oy, situată sub punctul M_0 (fig. 81).

Consideraţii analoge ne conduc la interpretarea geometrică a derivatei la stînga:

Dacă funcţia f este derivabilă la stînga în punctul x_0, graficul său are în punctul M_0 $(x_0, f(x_0))$ semitangentă la stînga o semidreaptă M_0T

cu coeficientul unghiular $f'_s(x_0)$, situată în semiplanul de la stînga lui M_0 $(x \leqslant x_0)$ (fig. 82).

Dacă $f_s(x_0) = +\infty$, graficul admite, prin definiție, ca semitangentă la stînga în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, o semidreaptă M_0T paralelă cu axa Oy, situată sub punctul M_0 (fig. 83).

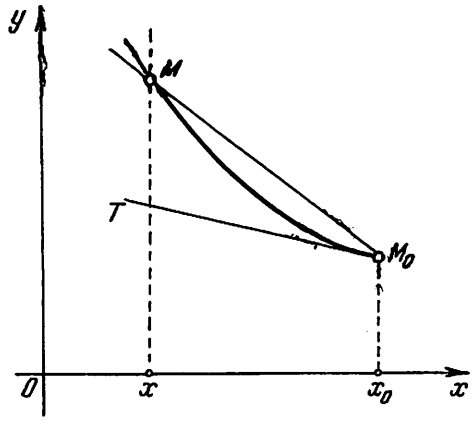


Fig. 82

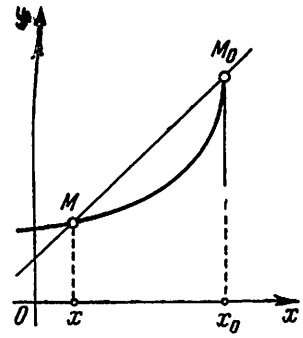


Fig. 83

Dacă $f_s(x_0) = -\infty$, graficul admite, prin definiție, ca semitangentă la stînga în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, o semidreaptă M_0T paralelă cu axa Oy, situată deasupra punctului M_0(fig. 84).

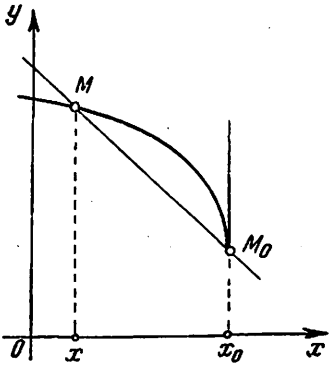


Fig. 84

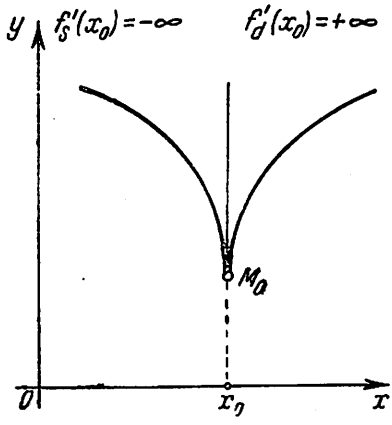


Fig. 85

Dacă funcția f are în x_0 derivate laterale egale, cele două semitangente sînt în prelungire, deci graficul are tangentă în punctul M_0.

Dacă funcția f are în x_0 derivate laterale diferite, cele două semitangente nu mai sînt în prelungire.

Dacă una dintre derivatele laterale este $+\infty$ și cealaltă este $-\infty$ cele două semitangente sînt suprapuse (fig. 85 și 86).

În acest caz, punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numește *punct de întoarcere* al graficului.

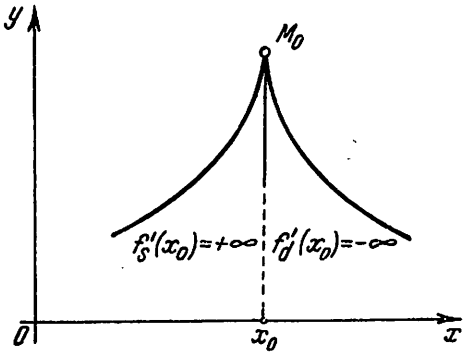


Fig. 86

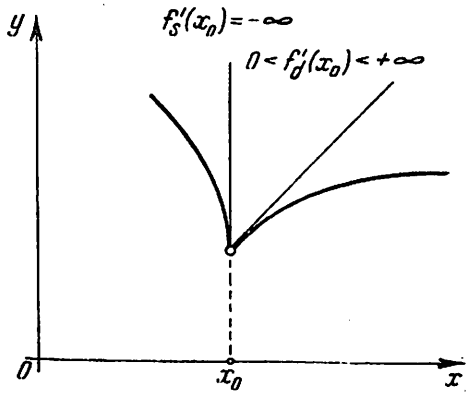


Fig. 87

Dacă funcția f are în punctul x_0 derivate laterale diferite, și cel puțin una din ele este *finită*, cele două semitangente laterale nu sînt nici suprapuse, nici în prelungire. În acest caz, punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numește *punct unghiular* al graficului (fig. 87).

4. Derivata pe un interval

Definiție. Se spune că funcția $f: I \to R$ este derivabilă pe o submulțime $A \subset I$, dacă este derivabilă în fiecare punct din A.

Dacă funcția f este derivabilă pe tot domeniul ei de definiție, se spune uneori, mai simplu, că este derivabilă, fără a mai specifica mulțimea pe care are această proprietate.

Propoziție. Dacă funcția $f: I \to R$ este derivabilă pe I, atunci f este continuă pe I.

Într-adevăr, f este derivabilă în fiecare punct din I, deci este continuă în fiecare punct din I.

Observație. Există funcții continue pe un interval care nu sînt derivabile în nici un punct din acest interval*.

Mulțimea funcțiilor derivabile pe un interval este conținută în mulțimea funcțiilor continue pe acest interval.

* Un astfel de exemplu a fost dat, pentru prima oară, de K. Weierstrass. Ulterior s-au dat exemple mai simple (a se vedea M.N. Analiză mat. II, p. 353)

Fie funcţia $f\colon I \to R$ derivabilă pe I. Fiecărui punct $x \in I$ vom face să-i corespundă numărul $f'(x)$.

Obţinem astfel o funcţie $x \to f'(x)$ definită pe I, care se numeşte *funcţia derivată* a lui f sau, mai simplu, derivata lui f. Derivata funcţiei f se notează f'. Se folosesc de asemenea notaţiile $\frac{df}{dx}$ şi Df.

Trebuie făcută distincţie între *derivata funcţiei f în punctul x*, care este un *număr*, $f'(x)$, şi *derivata* funcţiei f, care este o *funcţie*, f'. Derivata $f'(x_0)$ se mai notează adesea $(f'(x))_{x=x_0}$ sau $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Dacă punem $y = f(x)$, se folosesc notaţiile $y' = f'(x)$ sau $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$ sau încă $y'_x = f'_x(x)$.

5. Exemple de funcţii derivabile

1) Funcţia constantă $f(x) \equiv c$ definită pe R este derivabilă şi $f'(x) \equiv 0$. Scriem aceasta astfel:

$$c' = 0.$$

Într-adevăr, fie $x_0 \in R$ oarecare. Să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} \equiv 0 \qquad (x \neq x_0).$$

Atunci: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, adică $f'(x_0) = 0$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că $f'(x) = 0$, oricare ar fi $x \in R$.

O b s e r v a ţ i e. Prin notaţia c' *nu* trebuie să se înţeleagă derivata *numărului* c, ci a funcţiei constante care are în toate punctele valoarea c. Noţiunea de derivată nu se ataşează numerelor, ci numai funcţiilor.

2) Funcţia identică $f(x) = x$ definită pe R este derivabilă şi $f'(x) \equiv 1$. Scriem astfel:

$$x' = 1.$$

Într-adevăr, fie $x_0 \in R$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$ avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} \equiv 1,$$

deci: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$, adică $f'(x_0) = 1$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă $f'(x) = 1$, oricare ar fi $x \in R$.

Fie funcția $f\colon I \to R$ derivabilă pe I. Fiecărui punct $x \in I$ vom face să-i corespundă numărul $f'(x)$.

Obținem astfel o funcție $x \to f'(x)$ definită pe I, care se numește *funcția derivată* a lui f sau, mai simplu, derivata lui f. Derivata funcției f se notează f'. Se folosesc de asemenea notațiile $\frac{df}{dx}$ și Df.

Trebuie făcută distincție între *derivata funcției f în punctul x*, care este un *număr*, $f'(x)$, și *derivata* funcției f, care este o *funcție*, f'. Derivata $f'(x_0)$ se mai notează adesea $(f'(x))_{x=x_0}$ sau $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Dacă punem $y = f(x)$, se folosesc notațiile $y' = f'(x)$ sau $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$ sau încă $y'_x = f'_x(x)$.

5. Exemple de funcții derivabile

1) Funcția constantă $f(x) \equiv c$ definită pe R este derivabilă și $f'(x) \equiv 0$. Scriem aceasta astfel:

$$c' = 0.$$

Într-adevăr, fie $x_0 \in R$ oarecare. Să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} \equiv 0 \qquad (x \neq x_0).$$

Atunci: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, adică $f'(x_0) = 0$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că $f'(x) = 0$, oricare ar fi $x \in R$.

O b s e r v a ț i e. Prin notația *c' nu* trebuie să se înțeleagă derivata *numărului c*, ci a funcției constante care are în toate punctele valoarea c. Noțiunea de derivată nu se atașează numerelor, ci numai funcțiilor.

2) Funcția identică $f(x) = x$ definită pe R este derivabilă și $f'(x) \equiv 1$. Scriem astfel:

$$x' = 1.$$

Într-adevăr, fie $x_0 \in R$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$ avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} \equiv 1,$$

deci: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$, adică $f'(x_0) = 1$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă $f'(x) = 1$, oricare ar fi $x \in R$.

O b s e r v a ţ i e. Prin notaţia x' *nu* trebuie să se înţeleagă derivata argumentului, ci a funcţiei identice. Noţiunea de derivată nu se ataşează argumentului, ci numai funcţiilor.

3) Funcţia $f(x) = x^n$, $n \in N$ definită pe R, este derivabilă şi $f'(x) = nx^{n-1}$. Scriem:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Fie $x_0 \in R$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$ avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + x\,x_0^{n-2} + x_0^{n-1}.$$

Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} x^k = x_0^k$, $\quad k \in N$ avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x^{n-1} + \lim_{x \to x_0} x^{n-2} \cdot x_0 + \lim_{x \to x_0} x^{n-3} \cdot x_0^2 + \ldots \lim_{x \to x_0} x \cdot x_0^{n-2} +$$

$$+ x_0^{n-1} = x_0^{n-1} + x_0^{n-2} \cdot x_0 + x_0^{n-3} \cdot x_0^2 + \ldots + x_0 \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1} =$$

$$= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}}_{n \text{ ori}} = n\,x_0^{n-1},$$

adică $f'(x_0) = n\,x_0^{n-1}$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă $f'(x) = nx^{n-1}$ pentru orice $x \in R$.

4) Funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ definită pe $[0, +\infty)$ este derivabilă pe semidreapta deschisă $(0, +\infty)$ şi pentru $x > 0$ avem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Scriem:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Fie $x_0 > 0$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$, $x \geqslant 0$, avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}.$$

Dar $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \neq 0$, deci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\lim \sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

adică $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Deoarece $x_0 > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

O b s e r v a ţ i e. În punctul 0, funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ nu este derivabilă, dar derivata sa în acest punct există şi este $+\infty$, $f'(0) = +\infty$.

Într-adevăr, pentru $x > 0$, avem

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Deoarece $\sqrt{x} > 0$ şi $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, rezultă că $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = + \infty$,

adică:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = + \infty, \text{ deci } f'(0) = + \infty.$$

5) Funcţia $f(x) = \sin x$ definită pe R este derivabilă şi $f'(x) = \cos x$. Scriem

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Fie $x_0 \in R$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$ avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} =$$

$$= \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}.$$

Dar $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{2} = 0$, deci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Pe de altă parte funcţia $\cos \frac{x + x_0}{2}$ este continuă, ca funcţie compusă a funcţiilor continue $\cos u$ şi $\frac{x + x_0}{2}$, deci

$$\lim_{x \to x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = \cos \frac{x_0 + x_0}{2} = \cos \frac{2x_0}{2} = \cos x_0.$$

Aşadar

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \to x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = \cos x_0,$$

adică $f'(x_0) = \cos x_0$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că $f'(x) = \cos x$ oricare ar fi $x \in R$.

6) Funcţia $f(x) = \cos x$ definită pe R este derivabilă şi $f'(x) = -\sin x$. Scriem:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Fie $x_0 \in R$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$ avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \frac{-2\sin\frac{x - x_0}{2}\sin\frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} =$$

$$= -\frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \sin\frac{x + x_0}{2}.$$

Deoarece funcţia compusă $\sin\frac{x + x_0}{2}$ este continuă, avem

$$\lim_{x \to x_0} \sin\frac{x + x_0}{2} = \sin\frac{x_0 + x_0}{2} = \sin\frac{2x_0}{2} = \sin x_0.$$

Atunci:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\lim_{x \to x_0} \frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \to x_0} \sin\frac{x + x_0}{2} = -\sin x_0,$$

adică $f'(x_0) = -\sin x_0$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că $f'(x) = -\sin x$, oricare ar fi $x \in R$.

7) Funcţia $f(x) = \ln x$ definită pe semidreapta $(0, +\infty)$ este derivabilă şi $f'(x) = \frac{1}{x}$. Scriem:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

Fie $x_0 > 0$ oarecare. Pentru $x \neq x_0$, $x > 0$, avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \ln\frac{x}{x_0}.$$

Dar: $\frac{x}{x_0} = 1 - 1 + \frac{x}{x_0} = 1 + \frac{x - x_0}{x_0}$, deci

$$R(x) = \frac{1}{x - x_0} \ln\frac{x}{x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{x_0}{x - x_0} \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0} \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x - x_0}}.$$

Avem $\lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x_0} = 0$, deci

$$\lim_{x\to x_0} \left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \lim_{u\to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

și, deoarece funcția logaritmică este continuă,

$$\lim_{x\to x_0} \ln \left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \ln \lim_{x\to x_0} \left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \ln e = 1.$$

Așadar:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{x\to x_0} \ln \left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

adică $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$. Deoarece $x_0 > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \frac{1}{x}$.

O b s e r v a ț i e. Funcția $f(x) = \ln x$ este derivabilă pe semidreapta $(0, +\infty)$, deci derivata sa $f'(x) = \frac{1}{x}$ este definită tot pe semidreapta $(0, +\infty)$, deși operația de împărțire cu x, prin care se calculează derivata în punctul $x > 0$, are sens și pentru $x < 0$.

Așadar, nu trebuie confundată derivata $f'(x) = \frac{1}{x}$, care este definită pe semidreata $(0,+\infty)$ cu funcția elementară $h(x) = \frac{1}{x}$ al cărei domeniu maxim de definiție este $R - \{0\}$: Funcțiile f' și h coincid pe semidreapta $(0, +\infty)$.

§ 3. Operații cu funcții derivabile

Ca și pentru funcțiile continue, operațiile algebrice de adunare, înmulțire și înmulțire cu scalari, operația de compunere și, cu anumite restricții, operația de inversare, aplicate funcțiilor derivabile, conduc tot la funcții derivabile.

1. Operații algebrice

P r o p o z i ț i a 1. Dacă funcțiile f și g definite pe un interval I sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcția $f + g$ este derivabilă în x_0 și

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Să notăm $h = f + g$. Pentru fiecare $x \neq x_0$ din I, avem

$$R(x) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Deoarece f și g sînt derivabile în x_0, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Rezultă că și raportul $R(x)$ are limită (finită) în x_0, deci funcția h este derivabilă în x_0 și

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0),$$

adică

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

O b s e r v a ț i e. Propoziția rămîne adevărată și dacă una sau ambele derivate $f'(x_0)$ și $g'(x_0)$ sînt infinite, dacă $f'(x_0) + g'(x_0)$ are sens (cazul exceptat este cel în care una din derivate este $+\infty$, iar cealaltă $-\infty$).

C o r o l a r. Dacă funcțiile f și g sînt derivabile pe un interval I, atunci $f + g$ este derivabilă pe I și

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Se demonstrează prin recurență că dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt n funcții definite pe I și derivabile pe I (sau într-un punct $x_0 \in I$), atunci suma lor este de asemenea derivabilă pe I (respectiv în x_0) și

$$(f_1 + f_2 + \ldots f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'$$

sau

$$\left(\sum_{i=1} f_i\right)' = \sum_{i=1} f_i'.$$

P r o p o z i ț i a 2. Dacă funcția $f : I \to R$ este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcția cf este derivabilă în x_0, oricare ar fi numărul c, și

$$(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

Să notăm $h = cf$. Pentru fiecare $x \neq x_0$ din I avem

$$R(x) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Deoarece, prin ipoteză, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ rezultă că raportul $R(x)$ are limită (finită) în x_0, deci funcția h este derivabilă în x_0, și

$$h'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=c\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=cf'(x_0),$$

adică $(cf)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$.

Observație. Propoziția rămîne adevărată și dacă $f'(x_0)$ este infinită. În acest caz, dacă $c=0$, avem $(cf)'(x_0)=0$.

Corolar. Dacă funcția f este derivabilă pe I, atunci funcția cf este derivabilă pe I și

$$(cf)'=c\cdot f'.$$

Luînd în acest corolar $c=-1$, rezultă că:

Dacă f este derivabilă pe I (sau în x_0), atunci funcția $-f$ este derivabilă pe I (respectiv în x_0) și

$$(-f)'=-f'.$$

Folosind această ultimă proprietate și propoziția 1, rezultă că:

Dacă funcțiile f și g sînt derivabile pe I (sau în x_0) atunci funcția $f-g$ este derivabilă pe I (respectiv în x_0) și

$$(f-g)'=f'-g'.$$

Într-adevăr, $f-g=f+(-g)$ și deoarece g este derivabilă, $(-g)$ este de asemenea derivabilă, și deci și suma $f+(-g)$ este derivabilă. Atunci

$$(f-g)'=(f+(-g))'=f'+(-g)'=f'+(-g')=f'-g'.$$

Dacă una sau ambele derivate $f'(x_0)$ și $g'(x_0)$ sînt infinite și dacă $f'(x_0)-g'(x_0)$ are sens, atunci $f'-g'$ are derivată în x_0 și $(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$.

Observații. 1° Mulțimea $\mathfrak{D}(I, x_0)$ a funcțiilor definite pe I și derivabile în $x_0\in I$ este un *spațiu vectorial*. Operația de derivare în punctul x_0 face să corespundă fiecărei funcții $f\in\mathfrak{D}(I, x_0)$, numărul $f'(x_0)$, adică operația de derivare este o funcțională $L:f\to f'(x_0)$ definită pe spațiul vectorial $\mathfrak{D}(I, x_0)$. Această operație este o funcțională *liniară* (aditivă și omogenă)

$$L(f+g)=(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)=L(f)+L(g);$$

$$L(\alpha f)=(\alpha f)'(x_0)=\alpha\cdot f'(x_0)=\alpha L(f).$$

2° Mulțimea $\mathfrak{D}(I)$ a funcțiilor definite și derivabile pe I este un *spațiu vectorial*. Să notăm cu $\mathfrak{D}'(I)$ mulțimea derivatelor funcțiilor din $\mathfrak{D}(I)$. Mulțimea $\mathfrak{D}'(I)$ este de asemenea un spațiu vectorial.

Operația de derivare D face să corespundă fiecărei funcții $f\in\mathfrak{D}(I)$, derivata sa $f'\in\mathfrak{D}'(I)$:

$$D: f\to f' \text{ sau } Df=f'.$$

Operația de derivare este o *operație liniară* definită pe spațiul vectorial $\mathcal{D}(I)$ cu valori în spațiul vectorial $\mathcal{D}'(I)$:

$$D(f+g) = Df + Dg;$$
$$D(\alpha f) = \alpha Df.$$

Exemple. 1) Funcția $f(x) = |x|$ definită pe R este derivabilă pe $R - \{0\}$ și $(|x|)' = \begin{cases} -1 \text{ dacă } x < 0 \\ 1 \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$.

Într-adevăr, pentru $x < 0$ avem $f(x) = |x| = -x$, deci $f'(x) = (-x)' = -x' = -1$, iar pentru $x > 0$, avem $f(x) = |x| = x$, deci $f'(x) = x' = 1$.

2) $$(ax^n)' = a(x^n)' = a \cdot nx^{n-1} = na\,x^{n-1}.$$

3) Un polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ definit pe R este o funcție derivabilă și

$$P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1.$$

4) Dacă $a>0, a\neq 1$, funcția $f(x) = \log_a x$ definită pe $(0, +\infty)$ este derivabilă și

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Într-adevăr dacă $x > 0$, $\ln x = \ln a \log_a x$, deci $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$ și deci $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$.

Propoziția 3. Dacă funcțiile f și g definite pe I sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcția fg este derivabilă în x_0 și

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$

Să notăm $h = fg$. Pentru fiecare $x \neq x_0$ din I avem

$$R(x) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x) + f(x_0)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \frac{(f(x) - f(x_0))\,g(x) + f(x_0)\,(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,g(x) +$$
$$+ f(x_0)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Prin ipoteză avem $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Pe de altă parte, funcția g fiind derivabilă în x_0, este continuă în x_0, deci $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Așadar, toți termenii din ultimul membru al șirului precedent de egalități au limite (finite) în x_0, iar $f(x_0)$ este un număr. Rezultă că și raportul $R(x)$ are limită (finită) în x_0, adică h este derivabilă în x_0 și

$$h'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

adică:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Corolar. **Dacă funcțiile f și g sînt derivabile pe I, atunci funcția fg este derivabilă pe I și**

$$(fg') = f'g + fg'.$$

Prin recurență se demonstrează că *dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt n funcții derivabile pe I (sau în x_0) atunci produsul lor este de asemenea o funcție derivabilă pe I (respectiv în x_0)* și

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 f_2 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n.$$

Pentru $n = 2$ formula a fost deja demonstrată. S-o presupunem adevărată pentru n funcții, și să arătăm atunci că este adevărată și pentru $n + 1$ funcții:

$$(f_1 f_2 \cdots f_n f_{n+1})' = (f_1 f_2 \cdots f_n)' f_{n+1} + (f_1 f_2 \cdots f_n) f_{n+1}' =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_1 f_2 \cdots f_{i-1} f_i' \cdot f_{i+1} \cdots f_n f_{n+1} + f_1 f_2 \cdots f_n f_{n+1}' =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} f_1 f_2 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n f_{n+1}.$$

Conform principiului inducției complete, formula este adevărată pentru orice n.

Dacă cele n funcții sînt egale cu o funcție f derivabilă pe I, deducem că funcția f^n este derivabilă pe I și

$$(f^n)' = nf^{n-1}f'.$$

În particular, deoarece $x' = 1$, avem

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Acest rezultat va fi obținut de asemenea mai departe din teorema relativă la derivarea funcțiilor compuse.

Observații. 1° Mulțimea $\mathfrak{D}(I, x_0)$ este o *algebră*. Operația de derivare în punctul x_0, $L(f) = f'(x_0)$ *nu* este însă multiplicativă.

2° Mulțimea $\mathfrak{D}(I)$ este o algebră. Operația de derivare $D(f) = f'$ *nu* este multiplicativă.

Propoziția 4. Dacă funcțiile f și g definite pe I sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$, și dacă $g(x_0) \neq 0$, atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 și

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Să notăm $h = \frac{f}{g}$. Să observăm mai întîi că funcția g este continuă în x_0 (fiind derivabilă în x_0); deoarece $g(x_0) \neq 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V \cap I$. Așadar, funcția $\frac{f}{g}$ este definită cel puțin pe intervalul $V \cap I$ care conține pe x_0. Pentru orice $x = x_0$ din $V \cap I$ avem

$$R(x) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x)}}{x - x_0} = \frac{f(x)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x)}{(x - x_0)\, g(x)\, g(x_0)} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\, g(x_0)} \frac{f(x)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\, g(x_0)} \frac{(f(x) - f(x_0))\, g(x_0) - f(x_0)\, (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\, g(x_0)} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x_0) - f(x_0)\, \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right].$$

Deoarece g este continuă în x_0, avem $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$. Deoarece f și g sînt derivabile în x_0, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0);$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Ținînd seama de faptul că $f(x_0)$ și $g(x_0)$ sînt numere, toți termenii din ultimul membru al șirului de egalități de mai sus au limite (finite) în x_0. Rezultă că și $R(x)$ are limită (finită) în x_0, adică funcția h este derivabilă în x_0, și

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x} g(x) \cdot g(x_0)} \left[\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x_0) -\right.$$

$$\left. - f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] = \frac{1}{(g(x_0))^2} [f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)],$$

adică

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Corolar. Dacă f și g sînt derivabile pe I, atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă pe domeniul ei de definiție (format din toate punctele $x \in I$ în care $g(x) \neq 0$) și

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Exemple. 1) O funcție rațională $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ este derivabilă pe tot domeniul ei de definiție (ca raport de polinoame care sînt derivabile), adică în toate punctele x în care $Q(x) \neq 0$. Derivata se calculează după regula de derivare a cîtului, dată în propoziția 4.

2) Funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$ este derivabilă pe tot domeniul său de definiție (format din punctele $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k întreg) și $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Scriem

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Într-adevăr, dacă $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, atunci $\cos x \neq 0$ și $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) =$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) Funcția $f(x) = \operatorname{ctg} x$ este derivabilă pe tot domeniul său de definiție (format din punctele $x \neq k\pi$, k întreg) și

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

Scriem

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Într-adevăr, dacă $x \neq k\pi$, atunci $\sin x \neq 0$ și

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$+\frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4) Funcția $f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \in N$ definită pe $R - \{0\}$, este derivabilă și

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \text{ sau } (x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

Într-adevăr, pentru $x \neq 0$, avem

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1(x^n)'}{x^{2n}} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

O b s e r v a ţ i e. Pentru orice *k întreg* avem

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Se va arăta mai departe că această formulă este adevărată pentru orice exponent *real.*

2. Derivabilitatea funcţiilor compuse

Fie funcţiile $u : I \to J$ şi $\varphi : J \to R$, I şi J fiind intervale. Să considerăm funcţia compusă $f = \varphi_0 u$ definită pentru orice $x \in I$ prin egalitatea

$$f(x) = \varphi(u(x)).$$

T e o r e m ă. Dacă funcţia u este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ şi funcţia φ este derivabilă în punctul corespunzător $y_0 = u(x_0) \in J$, atunci funcţia compusă $f = \varphi_0 u$ este derivabilă în punctul x_0 şi

$$f'(x_0) = \varphi'(u(x_0)) \cdot u'(x_0).$$

Prin ipoteză avem

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \varphi'(y_0).$$

Să considerăm funcţia $\alpha(y)$ definită pentru $y \in J$ astfel:

$$\alpha(y) = \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} - \varphi'(y_0) \text{ dacă } y \neq y_0;\ \alpha(y_0) = 0.$$

Avem:

$$\lim_{y \to y_0} \alpha(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} - \varphi'(y_0) = \varphi'(y_0) - \varphi'(y_0) = 0 = \alpha(y_0),$$

deci funcţia $\alpha(y)$ este *continuă* în punctul y_0 şi are, evident, valoarea 0 în acest punct.

Din egalitatea prin care se defineşte funcţia $\alpha(y)$, deducem pentru $y \neq y_0$:

$$\varphi(y) - \varphi(y_0) = [\varphi'(y_0) + \alpha(y)]\ (y - y_0).$$

Această egalitate este adevărată şi pentru $y = y_0$, deoarece ambii membri sînt egali cu 0 în acest caz. Aşadar egalitatea este adevărată pentru orice $y \in J$.

În particular, pentru orice $x \in I$ avem $u(x) \in J$ şi deci egalitatea precedentă este adevărată, dacă o scriem pentru $u(x)$ în loc de y, oricare ar fi $x \in I$:

$$\varphi(u(x)) - \varphi(y_0) = [\varphi'(y_0) + \alpha(u(x))]\ (u(x) - y_0) = \\ = [\varphi'(y_0) + \alpha(u(x))]\ (u(x) - u(x_0)).$$

Să observăm că funcția u este *continuă* în punctul x_0 (fiind derivabilă în acest punct), iar funcția $\alpha(y)$ este continuă în punctul corespunzător $y_0 = u(x_0)$. Rezultă că funcția compusă $\alpha(u(x))$ este continuă în punctul x_0 și deci:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(u(x)) = \alpha(u(x_0)) = \alpha(y_0) = 0.$$

Să formăm acum raportul $R(x)$ pentru funcția $f(x) = \varphi(u(x))$. Pentru orice $x \neq x_0$, avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi(u(x)) - \varphi(u(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \frac{[\varphi'(y_0) + \alpha(u(x))](u(x) - u(x_0))}{x - x_0} = [\varphi'(y_0) + \alpha(u(x))] \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

Termenii din ultimul membru al șirului de egalități au toți limite (finite) în x_0: într-adevăr, $\varphi'(y_0)$ este număr,

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(u(x)) = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0).$$

Rezultă că și raportul inițial are limită (finită) în x_0, deci funcția f este derivabilă în x_0 și

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = [\varphi'(y_0) + \lim_{x \to x_0} \alpha(u(x))] \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= [\varphi'(y_0) + 0]\, u'(x_0) = \varphi'(y_0) \cdot u'(x_0) = \varphi'(u(x_0)) \cdot u'(x_0).$$

Corolar. Dacă funcția u este derivabilă pe I și funcția φ este derivabilă pe J, atunci funcția compusă $f = \varphi_0 u$ este derivabilă pe I și

$$f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x), \quad x \in I.$$

Observație. Teorema precedentă rămîne valabilă și în cazul compunerii mai multor funcții.

Dacă în egalitatea $f(x) = \varphi(u(x))$ pentru $x \in I$, prin care se definește funcția compusă $f = \varphi \circ u$, nu se mai pune în evidență argumentul x, se scrie

$$f = \varphi(u).$$

Atunci $f' = [\varphi(u)]'$.

Dacă în egalitatea $f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x)$ pentru $x \in I$, nu se mai pune în evidență argumentul x, se scrie

$$f' = \varphi'(u) \cdot u'$$

și deoarece $f' = [\varphi(u)]'$, obținem egalitatea

$$[\varphi(u)]' = \varphi'(u) \cdot u'.$$

Această formulă este foarte utilă pentru calculul derivatelor funcțiilor compuse. Nu trebuie însă pierdut din vedere că în această formulă u nu este variabila independentă a funcției φ, ci este o funcție derivabilă.

Semnificația precisă a ultimei egalități este dată de egalitatea următoare:

$$(\varphi \circ u)' = (\varphi' \circ u) \cdot u'.$$

Aplicînd formula de derivare a funcțiilor compuse în cazul funcțiilor elementare, se obțin următoarele reguli de derivare (în care u este o funcție derivabilă pe un interval I sau pe o reuniune de intervale):

1) $(u^n)' = n\, u^{n-1} u'$ $\qquad$ n *întreg*

(dacă $n \leqslant 0$, este necesar ca $u(x) \neq 0$ pentru $x \in I$).

2) $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\qquad$ $(u(x) > 0$ pentru $x \in I)$,

3) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

4) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

5) $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$, $\qquad$ $(u(x) \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ pentru $x \in I)$.

6) $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$, $\qquad$ $(u(x) \neq k\pi$ pentru $x \in I)$.

7) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $\qquad$ $(u(x) > 0$ pentru $x \in I)$.

8) $(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$, $\qquad$ $(x \neq 0)$.

Ultima regulă se obține astfel:

$$(\ln |x|)' = \frac{(|x|)'}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{-1}{|x|} = \dfrac{1}{-|x|} = \dfrac{1}{x} & \text{dacă } x < 0, \\ \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x} & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Observație. Dacă punem $y = \varphi(u)$, $u = u(x)$ și $y = f(x)$, atunci formula de derivare a funcției compuse $y = f(x)$ se scrie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

În această egalitate, membrul stîng se obține din membrul drept — formal — prin simplificare cu du.

3. Derivabilitatea funcțiilor inverse

Fie f o aplicație *strict monotonă* a unui interval I pe un interval J:

$$f : I \to J, \qquad f(I) = J.$$

Fie $\varphi = f^{-1}$ funcția inversă a lui f:

$$\varphi : J \to I.$$

Știm că $y = f(x)$ dacă și numai dacă $x = \varphi(y)$, $x \in I$, $y \in J$.

Teorema. Dacă funcția f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ și dacă $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția sa inversă $\varphi = f^{-1}$ este derivabilă în punctul corespunzător $y_0 = f(x_0) \in J$ și

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Să observăm mai întîi că f și f^{-1} sînt continue, deoarece ambele sînt strict monotone și mulțimea valorilor fiecăreia este un interval.

Prin ipoteză avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0$$

deci, pentru orice șir $x_n \to x_0$, $x_n \in I$, $x_n \neq x_0$, avem

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0).$$

Să formăm acum raportul $R(y)$ pentru funcția φ, $y \neq y_0$,

$$R(y) = \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0}.$$

Pentru ca să arătăm că acest raport are în punctul y_0 limita $\frac{1}{f'(x_0)}$, este suficient să arătăm că pentru orice șir $y_n \to y_0$, $y_n \in J$, $y_n \neq y_0$, avem

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} \to \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Fie deci un șir oarecare $y_n \to y_0$, $y_n \in J$, $y_n \neq y_0$.

Deoarece $y_n \in J = f(I)$, pentru fiecare $n \in N$ există un punct $x_n \in I$ astfel ca

$$y_n = f(x_n) \text{ deci } x_n = \varphi(y_n).$$

Deoarece $y_n \neq y_0$, iar funcția φ este strict monotonă avem

$$\varphi(y_n) \neq \varphi(y_0) \text{ adică } x_n \neq x_0, \text{ sau } x_n - x_0 \neq 0.$$

Deoarece φ este continuă în y_0 și $y_n \to y_0$, avem

$$\varphi(y_n) \to \varphi(y_0) \text{ adică } x_n \to x_0.$$

Am obținut astfel un șir $x_n \to x_0$, $x_n \in I$, $x_n \neq x_0$ și deci

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) \neq 0.$$

Atunci

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

(s-a împărțit și numărătorul și numitorul cu $x_n - x_0 \neq 0$).

Așadar

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

deci funcția φ este derivabilă în punctul y_0 și

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Corolar. Dacă funcția f este derivabilă pe I și $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci funcția sa inversă $\varphi = f^{-1}$ este derivabilă pe J și

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ sau } \varphi'(y) \cdot f'(x) = 1.$$

unde x și y sînt în relațiile $y = f(x)$ și $x = \varphi(y)$.

Interpretarea geometrică. Graficele funcțiilor f și φ sînt simetrice față de prima bisectoare.

Punctul (x_0, y_0) se află pe graficul lui f, iar punctul (y_0, x_0) se află pe graficul lui φ, și aceste două puncte sînt simetrice față de prima bisectoare.

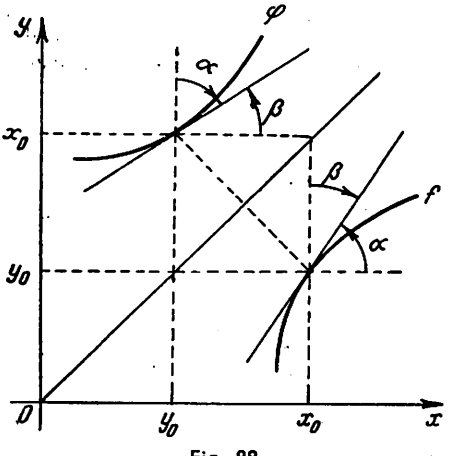


Fig. 88

Faptul că funcția f este derivabilă în x_0 înseamnă că graficul său admite în punctul (x_0, y_0) tangentă, cu coeficientul unghiular $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$.

Faptul că funcția φ este derivabilă în y_0 înseamnă că graficul său admite în punctul (y_0, x_0) tangentă, cu coeficientul unghiular $\operatorname{tg} \beta = \varphi'(y_0)$.

Din egalitatea $\varphi'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ deducem $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$, adică $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

Observație. Dacă funcția f are derivata nulă $f'(x_0) = 0$ într-un

punct $x_0 \in I$, atunci funcția sa inversă φ nu este derivabilă în punctul corespunzător, $y_0 = f(x_0)$; ea are însă derivata infinită, și anume $\varphi'(y_0) = +\infty$ dacă funcția f (ca și φ) este strict crescătoare (fig. 89), și $\varphi'(y_0) = -\infty$ dacă funcția f este strict descrescătoare (fig. 90).

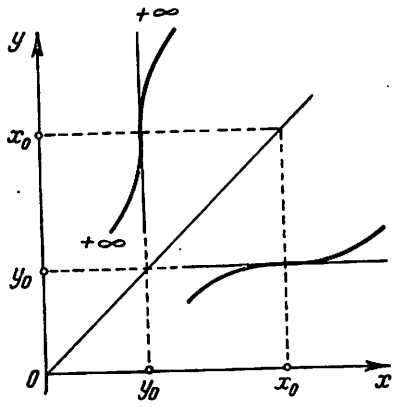


Fig. 89

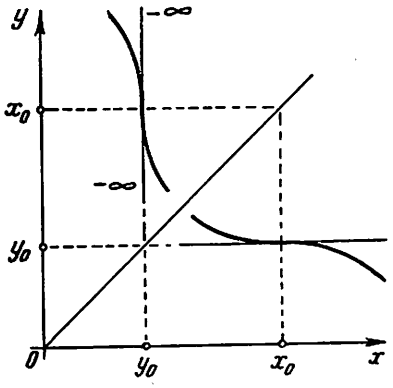


Fig. 90

Într-adevăr, dacă f este strict crescătoare, atunci $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I. Cu notațiile din teorema precedentă, dacă $y_n \to y_0$, $y_n \in J$, $y_n \neq y_0$, atunci

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}}$$

și deoarece $\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} > 0$ și $\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to 0$,

rezultă că

$$\frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \to +\infty$$

adică:

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} \to +\infty,$$

de unde

$$\varphi'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = +\infty.$$

Dacă f este strict descrescătoare, atunci

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I$$

şi, urmînd un raţionament asemănător cu cel precedent, deducem

$$\varphi'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = -\infty.$$

Explicaţia geometrică este simplă: deoarece $f'(x_0) = 0$, tangentă în punctul (x_0, y_0) la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox, şi prin simetrie faţă de prima bisectoare, deducem că tangenta în punctul (y_0, yx_0) la graficul funcţiei φ este paralelă cu axa Oy.

Exemple. 1) Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, funcţia $f(x) = a^x$ definită pe R este derivabilă şi $f'(x) = a^x \ln a$. Scriem

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Într-adevăr, funcţia $f(x) = a^x : R \to (0, +\infty)$ este inversa funcţiei $\varphi(y) = \log_a y : (0, +\infty) \to R$.

Funcţia $\log_a y$ este derivabilă şi derivata sa nu se anulează pe domeniul său de definiţie $(0, +\infty)$:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y \ln a}.$$

Rezultă atunci că funcţia $f(x) = a^x$ este de asemenea derivabilă pe domeniul său de definiţie R, şi

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = y \ln a$$

unde $x = \log_a y$ şi $y = a^x$, deci $f'(x) = a^x \ln a$.

În particular, pentru $a = e$, avem $\ln e = 1$, deci

$$(e^x)' = e^x.$$

Observaţie. Pentru $a = 1$; avem $f(x) = 1^x \equiv 1$, deci $f'(x) \equiv 0$, iar $\ln 1 = 0$. Formula de derivare a funcţiei exponenţiale este deci valabilă pentru orice $a > 0$.

2) Funcţia $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in R$, definită pe $(0, +\infty)$, este derivabilă şi $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Scriem:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Într-adevăr, pentru $x > 0$, avem

$$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x},$$

deci funcţia x^α — este o funcţie compusă de funcţii derivabile: funcţia exponenţială e^u şi funcţia logaritmică $\alpha \ln x$. Rezultă că şi funcţia putere x^α este derivabilă, şi derivînd după regula de derivare a funcţiilor compuse, obţinem:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\ln x^\alpha} \cdot \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

În particular, pentru $\alpha = \frac{1}{n}$, deducem că funcția $f(x) = \sqrt[n]{x}$ definită pe $(0, +\infty)$ este derivabilă și

$$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\frac{n-1}{x^n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Observație. Pentru $\alpha > 0$, funcția $f(x) = x^\alpha$ este definită pe semidreapta închisă $[0, +\infty)$. În punctul $x = 0$, nu mai putem aplica procedeul anterior pentru a vedea dacă funcția x^α este derivabilă în 0, deoarece funcția ln x nu este definită în punctul $x = 0$.

Pentru a vedea dacă funcția putere este derivabilă în acest caz în punctul 0, folosim direct definiția derivatei. Pentru $x > 0$ formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^\alpha - 0^\alpha}{x - 0} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}.$$

Dacă $\alpha - 1 > 0$, avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1} = 0$, deci:

dacă $\alpha > 1$, funcția $f(x) = x^\alpha$ este derivabilă și în punctul 0 și $f'(0) = 0 = \alpha\, 0^{\alpha-1}$, adică derivata se obține în acest caz după aceeași regulă ca și în punctele $x > 0$.

Dacă $\alpha - 1 < 0$ atunci $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{1-\alpha}} = +\infty$, adică $'(0) = +\infty$, deci:

dacă $0 < \alpha < 1$, funcția $f(x) = x^\alpha$ *nu* este derivabilă în punctul 0, dar are o derivată egală cu $+\infty$ în 0.

Dacă $\alpha = 1$, avem $f(x) = x^\alpha = x$, deci $f'(x) \equiv 1$, și în particular $f'(0) = 1$. În acest caz, derivata $f'(0)$ *nu* se mai poate obține din formula $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$, făcînd $\alpha = 1$ și $x = 0$.

3) Dacă funcțiile u și v sînt derivabile pe un interval I și dacă $u(x) > 0$ pentru orice $x \in I$, atunci funcția u^v este derivabilă pe I și

$$(u^v)' = v\, u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$$

Să scriem, în adevăr,

$$u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$$

(ln u are sens deoarece $u(x) > 0$ pentru orice $x \in I$).

Funcția $e^{v \ln u}$ este o funcție compusă de funcții derivabile deci u^v este derivabilă și

$$(u^v)' = (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u} (v \ln u)' = e^{v \ln u} \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right) = e^{\ln u^v} \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right) =$$

$$= u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right) = u^v v' \ln u + v \frac{u^v u'}{u} = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v\, u^{v-1} \cdot u'.$$

Funcția u^v se derivează deci astfel: întîi se consideră că v este constant și se derivează ca o putere, apoi se consideră că u este constant și se derivează ca o exponențială, și se adună apoi cele două derivate.

Exemplu. $f(x) = x^x$ definită pe $(0, +\infty)$ este derivabilă şi

$(x^x)' = xx^{x-1}x' + x^x \ln x \cdot x' = xx^{x-1} + x^x \ln x = x^x + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x)$.

4) Funcţia $f(x)$= arc sin x definită pe $[-1, 1]$ este derivabilă pe intervalul deschis $(-1, 1)$ şi

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

În punctele -1 şi 1, funcţia arc sin nu este derivabilă, dar are derivată egală cu $+\infty$ în aceste puncte.

Într-adevăr funcţia $f(x) = \arcsin x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este inversa funcţiei $\varphi(y) = \sin y : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, care este derivabilă pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi

$$\varphi'(y) = \cos y.$$

Avem:

$\varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ şi $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, deci în punctele corespunzătoare

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \text{ şi } \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

funcţia sa inversă $f(x) = \arcsin x$ nu este derivabilă, dar are derivata $+\infty$ (fiind strict crescătoare).

În celelalte puncte $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, avem $\varphi'(y) = \cos y > 0$, deci în punctele corespunzătoare $x = \varphi(y) = \sin y$, $(-1 < x < 1)$, funcţia inversă $f(x) = \arcsin x$ este derivabilă şi

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(x)} \text{ sau } (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}.$$

Dar, deoarece pentru $\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ avem $\cos y > 0$, rezultă că

$$\cos y = \sqrt{\cos^2 y} = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

şi deci

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad -1 < x < 1.$$

5) Funcţia $f(x) = \arccos x$ definită pe $[-1, 1]$ este derivabilă pe intervalul deschis $(-1,1)$ şi

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

În punctele -1 și 1 funcția arc cos nu este derivabilă, dar are derivată egală cu $-\infty$ în aceste puncte.

Într-adevăr, funcția $f(x) = \arccos x : [-1,1] \to [0, \pi]$ este inversa funcției $\varphi(y) = \cos y : [0, \pi] \to [-1, 1]$ care este derivabilă pe $[0, \pi]$ și

$$\varphi'(y) = -\sin y.$$

Avem

$$\varphi'(0) = \sin 0 = 0 \quad \text{și} \quad \varphi'(\pi) = \sin \pi = 0,$$

deci în punctele corespunzătoare

$$\varphi(0) = \cos 0 = 1 \quad \text{și} \quad \varphi(\pi) = \cos \pi = -1,$$

funcția sa inversă $f(x) = \arccos x$ nu este derivabilă, dar are derivata $-\infty$ (fiind strict descrescătoare). În celelalte puncte $0 < y < \pi$ avem $\varphi'(y) = -\sin y < 0$, deci în punctele corespunzătoare $x = \varphi(y) = \cos y$, $(-1 < x < 1)$ funcția inversă $f(x) = \arccos x$ este derivabilă și

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \text{ sau } (\arccos x)' = \frac{1}{-\sin y}.$$

Dar, deoarece pentru $0 < y < \pi$ avem $\sin y > 0$, rezultă că

$$\sin y = \sqrt{\sin^2 y} = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

și deci

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

6) Funcția $f(x) = \operatorname{arctg} x$ definită pe R este derivabilă pe domeniul său de definiție și

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Într-adevăr funcția $f(x) = \operatorname{arctg} x : R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este inversa funcției $\varphi(y) = \operatorname{tg} y : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$ care este derivabilă și

$$\varphi'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y.$$

Deoarece $\varphi'(y) \neq 0$ pentru orice $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că funcția inversă $f(x) = \operatorname{arctg} x$ este derivabilă pe R și

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \text{ sau } (\operatorname{arc\,tg}\, x)' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y},$$

unde x și y sînt în relația $x = \varphi(y) = \operatorname{tg} y$, deci

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

7) Funcţia $f(x) = \text{arc ctg } x$ definită pe R este derivabilă pe domeniul său de definiţie şi

$$(\text{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Într-adevăr, funcţia $f(x) = \text{arcctg}x : R \to (0, \pi)$ este inversa funcţiei $\varphi(y) = \text{ctg } y : (0, \pi) \to R$, care este derivabilă şi

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{\sin^2 y} = -(1 + \text{ctg}^2 y).$$

Deoarece $\varphi'(y) \neq 0$ pentru orice $y \in (0, \pi)$, rezultă că funcţia inversă $f(x) = \text{arcctg } x$ este derivabilă pe R şi

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \text{ sau } (\text{arcctg } x)' = \frac{1}{-(1 + \text{ctg}^2 y)},$$

unde x şi y sînt în relaţia $x = \varphi(y) = \text{ctg } y$, deci

$$(\text{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

8) Să punem $y = f(x)$, de unde $x = \varphi(y)$. Atunci formula de derivare a funcţiei inverse se scrie astfel:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ sau } \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1.$$

În aceste egalităţi, unul din membri se obţine — formal — din celălalt prin operaţii algebrice obişnuite.

Această notaţie este adesea utilă pentru calculul derivatelor.

Să considerăm funcţiile $y = \varphi(t)$ şi $x = \psi(t)$ definite pe un interval I. Să presupunem că funcţia $x = \psi(t)$ este continuă şi strict monotonă, deci admite o funcţie inversă $t = \overset{-1}{\psi}(x)$ definită pe intervalul $J = \psi(I)$. Putem atunci considera funcţia compusă $y = \varphi(\overset{-1}{\psi}(x)) = f(x)$ definită pe J:

$$J \underset{\psi}{\overset{\overset{-1}{\psi}}{\rightleftarrows}} I \xrightarrow{\varphi} R.$$

Dacă $y = \varphi(t)$ şi $x = \psi(t)$ sînt derivabile în raport cu t pe intervalul I şi dacă derivata $\frac{dx}{dt}$ nu se anulează pe I, atunci funcţia $y = f(x)$ este derivabilă în raport cu x pe intervalul J şi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Fie $x_0 \in J$ și $t_0 = \overset{-1}{\psi}(x_0) \in I$. Fie (x_n) un șir de puncte din J, $x_n \neq x_0$ și $x_n \to x_0$. Pentru fiecare n să notăm $t_n = \overset{-1}{\psi}(x_n) \in I$. Avem $t_n \neq t_0$ deoarece $\overset{-1}{\psi}$ este strict monotonă, ca și ψ. De asemenea, $t_n \to t_0$, deoarece $\overset{-1}{\psi}$ este continuă. Atunci

$$\frac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{t_n - t_0} \to \varphi'(t_0), \quad \frac{\psi(t_n) - \psi(t_0)}{t_n - t_0} \to \psi'(t_0),$$

deci:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi(\overset{-1}{\psi}(x)) - \varphi(\overset{-1}{\psi}(x_0))}{x_n - x_0} = \frac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{\psi(t_n) - \psi(t_0)} = \frac{\dfrac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{t_n - t_0}}{\dfrac{\psi(t_n) - \psi(t_0)}{t_n - t_0}} \to \frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

Rezultă atunci că

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că

$$f'(x) = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

unde $t = \overset{-1}{\psi}(x)$ sau $x = \psi(t)$, sau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

§ 4. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

1. Teorema lui Fermat

Fie funcția $f : I \to R$, și $x_0 \in I$.

Definiție. Se spune că x_0 este un punct de maxim relativ (sau local) al funcției f, dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem

$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ pentru orice } x \in V \cap I.$$

Se spune că x_0 este un punct de minim relativ (sau local) al funcției f, dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem:

$$f(x_0) \leqslant f(x) \text{ pentru } x \in V \cap I.$$

Punctele de maxim și de minim relativ ale funcției f se numesc *puncte de extrem* relativ (sau local) ale lui f.

Dacă x_0 este un punct de maxim (relativ) al funcției f, numărul $f(x_0)$ se numește *maxim* (relativ) *al funcției* f, iar punctul $(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numește *punct de maxim* (relativ) *al graficului.*

Dacă x_0 este un punct de minim (relativ) al funcției f, numărul $f(x_0)$ se numește *minim* (relativ) *al funcției* f, iar punctul $(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numește *punct de minim* (relativ) *al graficului.*

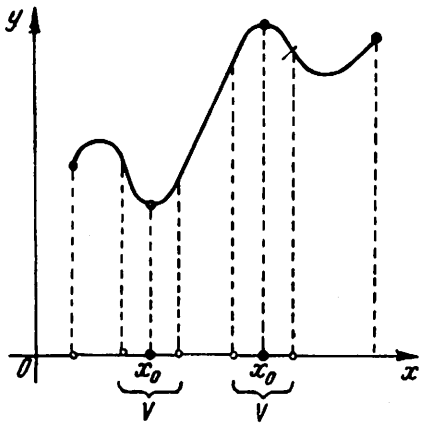


Fig. 81

Maximele și minimele funcției f (adică valorile funcției în punctele sale de maxim sau de minim) se numesc *extreme* ale funcției, iar punctele de maxim sau de minim ale graficului se numesc *puncte de extrem ale graficului.*

O b s e r v a ț i i. 1° Un punct de maxim relativ nu este în mod necesar un punct de maxim absolut (în care funcția are cea mai mare valoare pe întreg intervalul I). Un punct de maxim absolut este însă în același timp și un punct de maxim relativ.

De asemenea, un punct de minim relativ nu este în mod necesar un punct de minim absolut (în care funcția are cea mai mică valoare pe întreg intervalul I). Un punct de minim absolut este însă și un punct de minim relativ.

2° Este posibil ca un minim (relativ) al funcției să fie mai mare decît un maxim (relativ) al său.

În cele ce urmează va fi omis calificativul „relativ".

În legătură cu punctele de extrem ale unei funcții, avem următoarea

T e o r e m ă (F e r m a t). Dacă funcția f are derivată într-un punct de extrem x_0 din interiorul intervalului I, atunci derivata sa este nulă în acest punct, $f'(x_0) = 0$.

Să presupunem că x_0 este un punct de *maxim* al funcției.

Aceasta înseamnă că există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem

$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ sau } f(x) - f(x_0) \leqslant 0 \text{ pentru orice } x \in V \cap I.$$

Prin ipoteză avem

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Deci pentru orice șir $x_n \to x_0$, $x_n \in V \cap I$, $x_n \neq x_0$, avem

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0).$$

În particular, luînd șirul $x_n \to x_0$, $x_n \in V \cap I$, astfel ca $x_n < x_0$, adică $x_n - x_0 < 0$, avem

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geqslant 0$$

(deoarece numărătorul și numitorul sînt negativi) și prin trecere la limită deducem că și limita $f'(x_0)$ a șirului este pozitivă:

$$f'(x_0) \geqslant 0.$$

Luînd acum șirul $x_n \to x_0$, $x_n \in V \cap I$, astfel ca $x_n > x_0$, adică $x_n - x_0 > 0$, avem:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqslant 0$$

(deoarece numărătorul este $\leqslant 0$ și numitorul este > 0).

Prin trecere la limită, deducem că și limita $f'(x_0)$ a șirului este negativă

$$f'(x_0) \leqslant 0.$$

Din cele două inegalități obținute, rezultă $f'(x_0) = 0$.

În cazul cînd x_0 este punct de minim, se procedează la fel, sau se observă că x_0 este un punct de maxim pentru funcția $h = -f$, și deci, conform primei părți a demonstrației, avem $h'(x_0) = 0$, adică $f'(x_0) = 0$.

O b s e r v a ț i i. 1° Dacă punctul de extrem x_0 nu se află în interiorul intervalului I, ci la o extremitate a sa, este posibil ca funcția să aibă derivată în x_0, dar derivata sa să *nu* se anuleze în acest punct.

Exemplu. Funcția $f(x) = x$ definită pe $I = [0, 1]$ are un minim în punctul 0 și un maxim în punctul 1, dar derivata sa nu se anulează în aceste puncte. Într-adevăr, $f'(x) \equiv 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

2° Funcția f poate avea un extrem într-un punct x_0 fără a avea derivată în acest punct.

Exemplu. Funcția $f(x) = |x|$ are un minim în punctul 0, dar nu are derivată în acest punct.

3° Reciproca teoremei lui Fermat nu este, în general, adevărată. Derivata unei funcții se poate anula într-un punct x_0 din interiorul intervalului, fără ca x_0 să fie punct de extrem.

Exemplu. $f(x) = x^3$ definită pe R. Avem $f'(x) = 3x^2$ și $f'(0) = 0$, dar 0 nu este punct de extrem al acestei funcții.

4° În teorema lui Fermat, condiția ca domeniul de definiție al funcției să fie *interval* nu este esențială. Funcția poate fi definită, de exemplu, și pe o reuniune de intervale disjuncte.

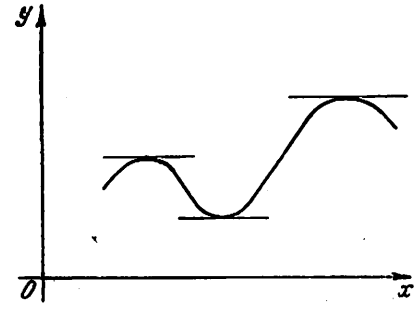


Fig 92

Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat este următoarea:

Dacă graficul funcției admite tangentă într-un punct de extrem, care nu coincide cu extremitățile graficului, atunci tangenta în acest punct este paralelă cu axa Ox (fig. 92).

2. Teorema lui Rolle

Teorema lui Fermat dă condiții suficiente (dar nu și necesare) pentru ca derivata într-un punct să fie nulă.

O altă teoremă care dă condiții suficiente pentru ca derivata să se anuleze este

Teorema lui Rolle. Fie f o funcție definită pe un interval I și $a < b$ două puncte din I. Dacă:

1) funcția f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$;

2) funcția f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b);

3) $f(a) = f(b)$.

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, $a < c < b$, în care derivata se anulează, $f'(c) = 0$.

Dacă funcția f este constantă pe $[a, b]$, $f(x) \equiv \alpha$, avem $f'(x) \equiv 0$, deci, pentru *orice* punct $c \in (a, b)$ avem $f'(c) = 0$ și teorema este demonstrată în acest caz.

Să presupunem deci că funcția f nu este constantă.

Deoarece funcția f este continuă pe intervalul *compact* $[a, b]$, ea este mărginită și își atinge marginile pe acest interval. Există deci două puncte x_m și x_M în intervalul $[a, b]$, astfel încît să avem

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) \text{ pentru orice } x \in [a, b].$$

În plus, deoarece f nu este constantă, avem

$$f(x_m) < f(x_M)$$

x_m și x_M sînt puncte de extrem ale funcției, pe intervalul $[a, b]$.

Dacă x_m este punct interior al acestui interval, adică dacă $a < x_m < b$ atunci, conform teoremei lui Fermat, avem $f'(x_m) = 0$ și luînd $c = x_m$ teorema este demonstrată în acest caz.

Dacă $x_m = a$ sau $x_m = b$, atunci

$$f(a) = f(b) = f(x_m) < f(x_M),$$

deci x_M nu poate fi egal nici cu a, nici cu b; așadar, x_M se află în interiorul intervalului $[a, b]$, adică $a < x_M < b$; conform teoremei lui Fermat, avem $f'(x_M) = 0$ și luînd $c = x_M$, teorema este demonstrată și în acest caz.

Așadar, în toate cazurile putem găsi un punct $c \in (a, b)$ astfel ca $f'(c) = 0$.

Interpretarea geometrică a teoremei lui Rolle este următoarea: Dacă graficul funcției f admite tangentă în fiecare punct (cu excepția, eventual, a extremităților) și dacă dreapta care unește extremitățile graficului este

paralelă cu axa Ox, atunci există cel puțin un punct de pe grafic (care nu coincide cu extremitățile graficului) în care tangenta este de asemenea paralelă cu axa Ox (fig. 93).

O b s e r v a ț i i. 1° Dacă una din cele trei condiții ale teoremei nu este verificată, concluzia teoremei lui Rolle poate să nu mai fie adevărată.

Exemple. 1) Funcția $f(x) = \begin{cases} x \text{ dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 \text{ dacă } x = 1 \end{cases}$

definită pe $[0, 1]$ este discontinuă numai în punctul 1, este derivabilă pe intervalul deschis $(0,1)$ și anume $f'(x) \equiv 1$ pentru $x \in (0,1)$, și are valori egale la capete, $f(0) = f(1) = 0$. Derivata nu se anulează în nici un punct din (a, b).

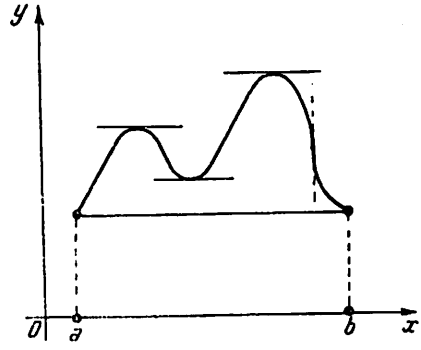


Fig. 93

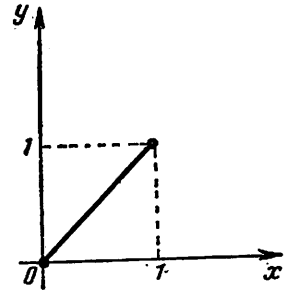


Fig. 94

2) Funcția $f(x) = |x|$ definită pe $[-1,1]$ este continuă pe intervalul închis $[-1,1]$, are valori egale la capetele $f(-1) = |-1| = 1$, $f(1) = |1| = 1$ și este derivabilă în toate punctele intervalului, cu excepția punctului 0 în care nu este derivabilă. Derivata nu se anulează în nici un punct. Într-adevăr:

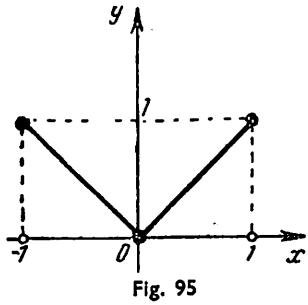


Fig. 95

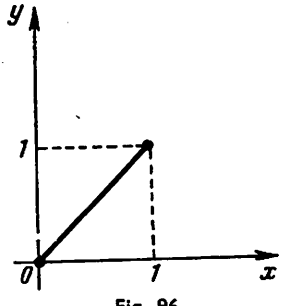


Fig. 96

$$(|x|)' = \begin{cases} -1 \text{ dacă } x < 0 \\ 1 \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$$

3) Funcția $f(x) = x$ definită pe $[0,1]$ este continuă pe $[0,1]$, derivabilă pe $[0, 1]$ și anume $f'(x) \equiv 1$, dar nu ia valori egale la capete: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Derivata nu se anulează în nici un punct.

2° Condiția ca domeniul de definiție al funcției să fie interval este esențială pentru valabilitatea teoremei lui Rolle.

Exemplu. Funcția $f(x) = \begin{cases} x \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ 2 - x \text{ pentru } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

definită pe mulțimea $[0,1) \cup (1,2]$ (care nu este interval) este continuă și derivabilă pe tot domeniul său de definiție și ia valori egale la extremități:

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 2 - 2 = 0.$$

Derivata sa nu se anulează în nici un punct. Într-adevăr

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ -1 \text{ pentru } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

În toate rezultatele care folosesc teorema lui Rolle, condiția ca domeniul de definiție să fie *interval* va fi esențială.

3° Teorema lui Rolle rămîne adevărată dacă se presupune că pe intervalul deschis (a, b) funcția f are derivată finită sau infinită. Într-adevăr, în demonstrație s-a folosit teorema lui Fermat, în care nu se presupune a priori, că derivata este finită.

Teorema lui Rolle rămîne adevărată, în particular, dacă funcția *derivabilă* f se anulează în a și b, $f(a) = 0$ și $f(b) = 0$, adică dacă a și b sînt *rădăcini* ale funcției. În acest caz, teorema se poate enunța astfel:

Între două rădăcini ale funcției se află cel puțin o rădăcină a derivatei.

O proprietate duală este următoarea:

Între două rădăcini consecutive ale derivatei se află cel mult o rădăcină a funcției.

Într-adevăr, fie $x_1 < x_2$ două rădăcini consecutive ale derivatei, $f'(x_1) = 0$ și $f'(x_2) = 0$. Aceasta înseamnă că între x_1 și x_2 nu mai există nici o altă rădăcină a derivatei.

Să presupunem, prin absurd, că funcția ar avea două rădăcini diferite a și b între x_1 și x_2:

$$x' < a < b < x_2, \quad f(a) = f(b) = 0.$$

În baza proprietății precedente, ar rezulta că între rădăcinile a și b ale funcției s-ar afla cel puțin o rădăcină c a derivatei

$$x_1 < a < c < b < x_2, \quad f'(c) = 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza că x_1 și x_2 sînt rădăcini *consecutive* ale funcției.

3. Teorema lui Lagrange

Vom folosi acum teorema lui Rolle pentru a demonstra o teoremă importantă, cu numeroase aplicații în analiză, cunoscută sub numele de „*teorema lui Lagrange*“ sau „*teorema creșterilor finite*“ sau încă „prima teoremă a creșterilor finite“.

Teorema lui Lagrange. **Fie f o funcție definită pe un interval I și $a < b$ două puncte din I. Dacă:**

1) f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$;
2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b),
atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, $a < c < b$, astfel încît să avem

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Pentru demonstrație, se aplică teorema lui Rolle funcției ajutătoare h, definită pe I astfel

$$h(x) = f(x) - kx, x \in I,$$

unde k este un număr ce urmează a fi determinat astfel ca

$$h(a) = h(b);$$

$$h(a) = f(a) - ka, \quad h(b) = f(b) - kb.$$

Pentru ca $h(a) = h(b)$ este necesar și suficient ca $f(a) - ka = f(b) - kb$, de unde

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pentru această valoare a lui k, funcția h verifică ipotezele teoremei lui Rolle: funcția $h(x)$ este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b), ca diferență a funcțiilor $f(x)$ și kx, care sînt continue pe $[a, b]$ și derivabile pe (a, b). În plus, $h(a) = h(b)$. Există deci cel puțin un punct $c \in (b, a)$ astfel ca $h'(c) = 0$. Dar pentru $x \in (a, b)$ avem

$$h'(x) = f'(x) - k,$$

deci $h'(c) = f'(c) - k$, adică $0 = f'(c) - k$, de unde $k = f'(c)$ și deci

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ sau } f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$$

și teorema este demonstrată.

Fiecare din ultimele două egalități poartă numele de *formula creșterilor finite* sau *formula mediei*, sau, uneori, *prima* formulă a creșterilor finite.

Interpretarea geometrică a teoremei creșterilor finite este următoarea: Dacă graficul funcției f admite tangentă în fiecare punct (cu excepția, eventual, a extremităților), există cel puțin un punct de pe grafic (care nu coincide cu extremitățile), în care tangenta este paralelă cu coarda care unește extremitățile.

Într-adevăr, coeficientul unghiular al tangentei în punctul $(c, f(c))$ este $f'(c)$, iar coeficientul unghiular al coardei AB este $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Formula creşterilor finite

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

arată că cele două drepte au coeficienţii unghiulari egali, deci sînt paralele.

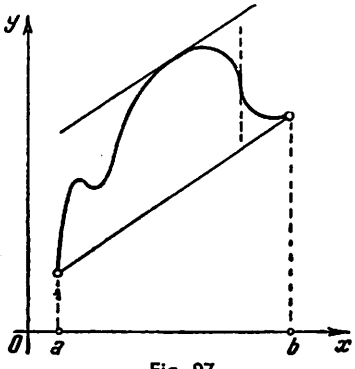


Fig. 97

O b s e r v a ţ i i. 1° Teorema lui Lagrange conţine ca un caz particular teorema lui Rolle. Într-adevăr, dacă $f(a)=f(b)$, din formula creşterilor finite obţinem $f'(c)=0$.

2° Teorema lui Lagrange rămîne adevărată dacă se presupune că funcţia f are derivată finită sau infinită pe intervalul deschis.

3° Punctul intermediar c din formula creşterilor finite depinde atît de funcţia f cît şi de punctele a şi b. Pentru o aceeaşi funcţie f şi pentru intervale $[a_1, b_1]$ şi $[a_2, b_2]$ diferite, obţinem, în general, puncte intermediare c_1 şi c_2 diferite, astfel ca

$$\frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1}=f'(c_1) \qquad \frac{f(b_2)-f(a_2)}{b_2-a_2}=f'(c_2).$$

Pentru acelaşi interval $[a, b]$ şi pentru funcţiile f_1 şi f_2 diferite, obţinem, în general, puncte intermediare c_1 şi c_2 diferite, astfel ca

$$\frac{f_1(b)-f_1(a)}{b-a}=f'_1(c_1) \qquad \frac{f_2(b)-f_2(a)}{b-a}=f'_2(c_2),$$

chiar dacă $f_1(a)=f_2(a)$ şi $f_1(b)=f_2(b)$.

4° Formula creşterilor finite se poate scrie şi sub forma

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c) \text{ sau } f(a)-f(b)=(a-b)f'(c).$$

Aşadar, în formula creşterilor finite este indiferent dacă $a<b$ sau $b<a$.

C o r o l a r. Dacă f este derivabilă pe intervalul I, atunci pentru orice punct a şi x din I există un punct ξ astfel ca

$$a<\xi<x \text{ sau } x<\xi<a \text{ (după cum } a<x \text{ sau } x<a) \text{ şi astfel ca}$$

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x}=f'(\xi) \text{ adică } f(a)-f(x)=(a-x)\,f'(\xi).$$

În adevăr f este derivabilă pe intervalul închis cu extremităţile în a şi x (deci şi pe intervalul deschis cu aceste extremităţi), deoarece f este derivabilă

pe întreg intervalul I. Rezultă atunci că f este și continuă pe intervalul închis cu extremitățile în a și x, și deci i se poate aplica teorema creșterilor finite pe acest interval.

Dacă funcția f și punctul a se mențin fixate, iar punctul x este arbitrar, atunci punctul intermediar ξ depinde de x.

De exemplu, luînd un șir $x_n \to a$, $x_n \neq a$, obținem un șir $\xi_n \to a$, $\xi_n \neq a$ astfel ca

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(\xi_n) \text{ pentru fiecare } n.$$

Faptul că $\xi_n \to a$, rezultă din inegalitățile $|\xi_n - a| < |x_n - a|$ și din aceea că $|x_n - a| \to 0$, folosind criteriul de convergență a șirurilor.

4. Consecințe ale teoremei creșterilor finite

1) Se știe că dacă f este o funcție constantă pe un interval I (sau pe o reuniune de intervale), atunci $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in I$. Reciproc:

Propoziția 1. Dacă f are derivată nulă pe un interval I, atunci funcția f este constantă pe acest interval.

Într-adevăr, să alegem un punct $a \in I$. Aplicînd teorema creșterilor finite, deducem că pentru orice punct $x \neq a$ din I există un punct $\xi \in I$ (cuprins între x și a) astfel ca

$$f(x) - f(a) = (x - a)\, f'(\xi).$$

Dar $f'(x) \equiv 0$, deci $f'(\xi) = 0$ și deci $f(x) - f(a) = 0$, de unde

$$f(x) = f(a) \text{ pentru orice } x \in I,$$

adică f este constantă pe I.

Observație. Dacă f are derivata nulă pe o mulțime care nu este interval, ci, de exemplu, o reuniune de intervale disjuncte, nu rezultă că f este constantă pe această mulțime.

Exemplu. Funcția $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pentru } x < 0 \\ 1 \text{ pentru } x > 0 \end{cases}$

definită pe $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ nu este constantă pe domeniul său de definiție dar are derivata nulă

$$f'(x) = 0 \text{ pentru orice } x \neq 0.$$

2) Dacă f și g sînt două funcții derivabile pe un interval I (sau o reuniune de intervale) și dacă diferența lor este constantă pe I, atunci derivatele lor sînt egale pe I.

Într-adevăr, din ipoteza $f(x) - g(x) \equiv C$, $x \in I$, deducem $f'(x) - g'(x) \equiv 0$, $x \in I$, deci

$$f'(x) = g'(x) \qquad \text{pentru orice } x \in I.$$

Reciproc:

Propoziția 2. Dacă f și g sînt două funcții derivabile pe un interval I, și dacă derivatele lor sînt egale pe intervalul I, atunci diferența lor este constantă pe acest interval.

Să notăm $h = f - g$. Ipoteza afirmă că $f' = g'$. Rezultă că $h' = f' - g' = 0$. În baza proprietății 1 deducem că $h(x) = c$, adică $f(x) - g(x) = c$ pentru orice $x \in I$.

Observație. Dacă funcțiile f și g au derivate egale pe o mulțime care nu este interval, nu rezultă că diferența lor este constantă pe această mulțime.

Exemplu. Fie funcțiile f și g definite pe $A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel

$$f(x) = \operatorname{tg} x;$$

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x + 1 & \text{pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{tg} x - 1 & \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

Avem $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ și $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, deci $f'(x) = g'(x)$ pentru orice $x \in A$. Dar funcția $f - g$ nu este constantă pe A:

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} -1 \text{ pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 \text{ pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}.$$

Din propoziția 2 rezultă că, dacă f este derivabilă pe un interval I, orice altă funcție derivabilă pe I care are aceeași derivată f' ca și f este de forma $f + C$ (unde C este o constantă convenabilă, care depinde de funcția g).

Mulțimea $\{f + C\}_{C \in R}$ conține deci *toate* funcțiile definite pe I care au derivata egală cu f'.

Funcțiile derivabile pe I care au derivata egală cu f' se numesc *primitive* ale lui f'. Primitivele sînt studiate în capitolul despre integrale.

3) Fie f o funcție derivabilă pe un interval I (sau pe o reuniune de intervale).

Dacă f este *crescătoare*, derivata sa f' este *pozitivă*.

Dacă f este *descrescătoare*, derivata sa f' este *negativă*.

Într-adevăr, fie un punct oarecare $x \in I$.

Dacă f este crescătoare avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I$$

și prin trecere la limită obținem

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Dacă f este descrescătoare, avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I$$

și prin trecere la limită obținem

$$f'(x) \leqslant 0.$$

O b s e r v a ț i e . Dacă f este strict crescătoare pe I, nu rezultă că derivata f' este strict pozitivă. De asemenea, dacă f este strict descrescătoare pe I, nu rezultă că f' este strict negativă.

Exemplu. Funcția $f(x) = x^3$, definită pe R, este strict crescătoare, dar derivata sa $f'(x) = 3x^2$ se anulează în punctul 0.

Reciproc avem însă

P r o p o z i ț i a 3. Fie f o funcție derivabilă pe un interval I. Dacă f' este strict pozitivă pe I, f este strict crescătoare pe I. Dacă f' este strict negativă pe I, f este strict descrescătoare pe I.

Fie $x < x_2$ două puncte oarecare din I. Aplicînd teorema creșterilor finite pe intervalul $[x_1, x_2]$ deducem că există un punct $\xi \in (x_1, x_2)$, astfel încît să avem

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi).$$

Să observăm că $x_2 - x_1 > 0$.

Dacă f' este strict pozitivă pe I, avem $f'(\xi) > 0$, deci $(x_2 - x_1) f'(\xi) > 0$ și deci $f(x_2) - f(x_1) > 0$, sau

$$f(x_1) < f(x_2),$$

adică f este strict crescătoare pe I.

Dacă f' este strict negativă pe I, avem $f'(\xi) < 0$, deci $(x_2 - x_1) f'(\xi) < 0$ și deci $f(x_2) - f(x_1) < 0$, sau

$$f(x_1) > f(x_2),$$

adică f este strict descrescătoare pe I.

O b s e r v a ț i i. 1° Dacă f' este *pozitivă* pe I, f este *crescătoare* pe I; dacă f' este *negativă* pe I, f este *descrescătoare* pe I.

În adevăr, din demonstrația propoziției precedente deducem că dacă $f' \geqslant 0$, atunci $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, adică f este crescătoare; iar dacă $f' \leqslant 0$, atunci $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, adică f este descrescătoare.

2° *Dacă derivata f' nu se anulează pe I, atunci f este strict monotonă pe I.*

În adevăr, oricare ar fi $x_1 \neq x_2$ din I, aplicînd teorema creșterilor finite, găsim un punct ξ cuprins între x_1 și x_2 astfel ca

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(\xi).$$

Dar $x_1 - x_2 \neq 0$ și $f'(\xi) \neq 0$, deci $f(x_1) \neq f(x_2)$, adică f este biunivocă pe I. Fiind și continuă pe I, rezultă că este strict monotonă.

Acest rezultat se va deduce mai departe și din proprietatea lui Darboux.

3° Propoziția 3 și observațiile precedente nu mai sînt, în general, adevărate, dacă funcția este definită pe o mulțime care nu este interval, ci, de exemplu, o reuniune de intervale.

Exemplu. Funcția $f(x) = \frac{1}{x}$, definită pe $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, este derivabilă, și $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pentru orice $x \neq 0$. Funcția $\frac{1}{x}$ este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$, dar nu este strict descrescătoare pe reuniunea lor. Într-adevăr, $-1 < 1$ dar $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

4) Fie f o funcție definită pe un *interval* I și $x_0 \in I$.

Propoziția 4. Dacă f este derivabilă pe $I - \{x_0\}$ și dacă derivata sa f' are limită (finită sau infinită) în punctul x_0, atunci $f'(x_0)$ există și

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

Să notăm $l = \lim_{x \to x_0} f'(x)$. Fie un șir oarecare $x_n \to x_0$, $x_n \in I$, $x_n \neq x_0$. Aplicînd teorema creșterilor finite pe intervalele cu o extremitate în x_0 și cu cealaltă extremitate în x_n, obținem un șir de puncte intermediare $\xi_n \to x_0, \xi_n \in I$, $\xi_n \neq 0$, astfel ca

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(\xi_n), \qquad n \in N.$$

Deoarece $\xi_n \to x_0$, $\xi_n \neq x_0$, rezultă că $f'(\xi_n) \to l$ și deci

$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to l$. Deoarece șirul (x_n) a fost arbitrar astfel ca $x_n \to x_0$, $(x_n \neq x_0)$, rezultă că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l,$$

adică f are derivată (finită sau infinită) în x_0, egală cu l:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

În particular, *dacă* $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ *există și este finită atunci* f *este derivabilă în* x_0, *iar derivata* f' *este continuă în* x_0.

Observație. Dacă derivata f' are limită la stînga (respectiv la dreapta) în x_0, atunci există derivata la stînga $f'_s(x_0)$ (respectiv derivata la dreapta $f'_d(x_0)$) și $f'_s(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} f'(x)$ (respectiv $f'_d(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f'(x)$).

5) Fie funcția $f: I \to R$

Propoziția 5. Dacă f are derivată mărginită pe intervalul I, atunci f este lipschitziană pe I, deci este uniform continuă pe I.

Fie $M > 0$ un număr astfel ca $|f'(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in I$.

Fie x' și x'' două puncte arbitrare din I. Să aplicăm teorema creșterilor finite funcției f pe intervalul cu extremitățile în x' și x'': există un punct ξ cuprins între x' și x'' astfel ca

$$f(x') - f(x'') = f'(\xi)\ (x' - x'').$$

Atunci

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)|\ |x' - x''| \leqslant M |x' - x''|,$$

deci f este lipschitziană. Rezultă atunci că f este uniform continuă pe I.

Corolar. Dacă intervalul I este mărginit și dacă f are derivata mărginită pe I, atunci f este mărginită pe I.

Într-adevăr, f este uniform continuă pe intervalul mărginit I, deci f este mărginită pe I.

Acest corolar se poate enunța și în forma următoare:

Dacă f este derivabilă pe intervalul mărginit I, și dacă f este nemărginită pe I, atunci derivata f' este de asemenea nemărginită pe I.

5. Teorema lui Cauchy

O altă teoremă a cărei demonstrație folosește teorema lui Rolle este *teorema lui Cauchy*, sau *a doua teoremă a creșterilor finite.*

Teorema lui Cauchy. Fie f și g două funcții definite pe un interval I și $a < b$ două puncte din I. Dacă:

1) f și g sînt continue pe intervalul închis $[a, b]$;

2) f și g sînt derivabile pe intervalul deschis (a, b);

3) $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$,

atunci $g(a) \neq g(b)$ și există un punct $c \in (a, b)$, $a < c < b$ astfel încît să avem

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Să arătăm mai întîi că $g(a) \neq g(b)$. Dacă am avea $g(a) = g(b)$, funcția g ar verifica ipotezele teoremei lui Rolle și deci ar exista un punct ξ astfel ca $g'(\xi) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza 3.

Pentru demonstrația celeilalte părți a concluziei, se aplică teorema lui Rolle funcției ajutătoare h, definită pe I astfel:

$$h(x) = f(x) - k\, g(x), \qquad x \in I,$$

unde k este un număr ce urmează a fi determinat astfel încît să avem $h(a) = h(b)$. Dar

$$h(a) = f(a) - kg(a), \quad h(b) = f(b) - kg(b).$$

Pentru ca $h(a) = h(b)$ este necesar și suficient ca

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b),$$

de unde:

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Pentru această valoare a lui k, funcția h verifică ipotezele teoremei lui Rolle: h este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b), ca diferență a funcțiilor f și kg care sînt continue pe $[a, b]$ și derivabile pe (a, b). În plus, $h(a) = h(b)$. Există deci cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel ca $h'(c) = 0$. Dar pentru $x \in (a, b)$ avem

$$h'(x) = f'(x) - kg'(x),$$

deci $h'(c) = f'(c) - kg'(c)$, adică $0 = f'(c) - kg'(c)$, de unde

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

și deci

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

și teorema este demonstrată.

Ultima egalitate poartă numele de „a doua formulă a creșterilor finite" sau „a doua formulă a mediei".

O b s e r v a ț i i . 1° Teorema lui Lagrange se obține ca un caz particular din teorema lui Cauchy, luînd $g(x) = x$, $x \in I$. Într-adevăr, g este continuă și derivabilă pe întreg intervalul I, și $g'(x) \equiv 1$, deci derivata lui g nu se anulează în nici un punct. În particular, $g'(c) = 1$. Scriind a doua formulă a creșterilor finite, în acest caz particular, în care $g(b) = b$ și $g(a) = a$, se obține prima formulă a creșterilor finite.

Teorema lui Cauchy rămîne adevărată dacă se presupune că funcțiile f și g au derivată finită sau infinită pe intervalul deschis (a, b) și dacă în fiecare punct $t \in (a, b)$ cel puțin una din derivatele $f'(t)$ și $g'(t)$ este finită.

2° Punctul intermediar c, din a doua formulă a creșterilor finite, depinde atît de funcțiile f și g cît și de punctele a și b.

3° Amplificînd cu -1 membrul stîng al formulei a doua a creșterilor finite, se constată că ea este adevărată fie că $a<b$, fie că $a>b$.

Corolar. Dacă f și g sînt derivabile pe I, dacă g' nu se anulează pe I și dacă $f(a)=g(a)=0$, atunci pentru orice punct $x\in I$ există un punct ξ cuprins între a și x ($\xi\neq a$, $\xi\neq x$), astfel încît să avem

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Într-adevăr, deoarece $f(a)=0$ și $g(a)=0$, avem $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$. Aplicînd teorema lui Cauchy deducem că există un punct ξ cuprins între a și x astfel ca $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ și deci $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

6. Teorema lui Darboux

În capitolul precedent s-a arătat că funcțiile continue au proprietatea lui Darboux, dar că există și alte funcții care au această proprietate, fără a fi continue.

Vom arăta că funcțiile derivate au de asemenea proprietatea lui Darboux.

Să transcriem mai întîi, pentru derivate, un rezultat despre limite.

Fie f o funcție definită pe un interval I, derivabilă într-un punct $x_0\in I$:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Dacă $\alpha<f'(x_0)<\beta$, există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît să avem

$$\alpha<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<\beta \qquad \text{pentru } x\in V\cap I.$$

În particular, dacă $f'(x_0)>0$, atunci

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0 \qquad \text{pentru } x\in V\cap I,$$

iar dacă $f'(x_0)<0$, atunci

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0 \qquad \text{pentru } x\in V\cap I.$$

Teorema lui Darboux. Dacă f' este derivata unei funcții derivabile f pe un interval I, atunci derivata f' are proprietatea lui Darboux pe acest interval.

Fie două puncte $a<b$ din I pentru care $f'(a)\neq f'(b)$; pentru a face o alegere, să presupunem că $f'(a)<f'(b)$. Fie de asemenea λ un număr astfel ca $f'(a)<\lambda<f'(b)$. Vom arăta că putem găsi un punct c_λ, astfel ca

$a<c_\lambda<b$ şi $f'(c_\lambda) = \lambda$. Pentru demonstraţie, vom aplica teorema lui Fermat funcţiei ajutătoare h, definită pe I astfel:

$$h(x) = f(x) - \lambda.x. \qquad x \in I.$$

Funcţia h este derivabilă pe I şi

$$h'(x) = f'(x) - \lambda, \qquad x \in I.$$

Pe de altă parte, funcţia h este continuă (fiind derivabilă) pe intervalul compact $[a, b]$, deci este mărginită şi-şi atinge marginile pe acest interval. Din inegalităţile $f'(a) < \lambda < f'(b)$, deducem $f'(a) - \lambda < 0$ şi $f'(b) - \lambda > 0$, deci

$$h'(a) < 0, \qquad h'(b) > 0.$$

Deoarece $h'(a) < 0$, există o vecinătate V a lui a astfel încît să avem

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} < 0 \qquad \text{pentru } x \in V \cap I.$$

În particular, dacă $x \in V \cap [a, b]$ atunci $x > a$, deci $x - a > 0$, de unde rezultă că $h(x) - h(a) < 0$, adică

$$h(x) < h(a) \qquad \text{pentru } x \in V \cap [a, b].$$

Aceasta înseamnă că funcţia h îşi atinge marginea inferioară pe intervalul $[a, b]$ într-un punct *diferit* de a.

Deoarece $h'(b) > 0$, există o vecinătate W a lui b astfel încît să avem

$$\frac{h(x) - h(b)}{x - b} > 0 \qquad \text{pentru } x \in W \cap I.$$

În particular, dacă $x \in W \cap [a, b]$, atunci $x < b$, deci $x - b < 0$, de unde rezultă că $h(x) - h(b) < 0$, adică

$$h(x) < h(b) \qquad \text{pentru } x \in W \cap [a, b].$$

Aceasta înseamnă că funcţia h îşi atinge marginea inferioară pe intervalul $[a, b]$ într-un punct *diferit* de b.

Din cele de mai sus rezultă că funcţia h îşi atinge *marginea inferioară* într-un punct c din *interiorul* intervalului $[a, b]$.

Dar c este un punct de *minim* (absolut) al funcţiei h, pe $[a, b]$, iar pe de altă parte h fiind derivabilă pe I este derivabilă în c. Aplicînd teorema lui Fermat, deducem că $h'(c) = 0$. Cum $h'(c) = f'(c) - \lambda$, rezultă că $f'(c) - \lambda = 0$, adică $f'(c) = \lambda$.

Luînd $c_\lambda = c$, teorema este demonstrată.

Deoarece funcţiile derivate (pe un interval) au proprietatea lui Darboux, toate propoziţiile demonstrate pentru funcţiile cu proprietatea lui Darboux rămîn adevărate pentru funcţiile derivate:

Corolarul 1. Dacă o derivată f', definită pe un interval I, are într-un punct $a \in I$ o valoare < 0 şi într-un punct $b \in I$ o valoare > 0, ea se anulează cel puţin într-un punct cuprins între a şi b.

Corolarul 2. Dacă o derivată f' definită pe un interval I nu se anulează în nici un punct din I, atunci ea păstrează acelaşi semn pe tot intervalul I (deci primitiva sa f este strict monotonă pe I).

Corolarul 3. O derivată f' nu are nici un punct de discontinuitate de prima speţă.

Acest corolar rezultă şi din observaţia după propoziţia 4 de la pct. 4 (pag. 270).

Exemple. 1) Funcţia $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ definită pe R nu poate fi derivata altei funcţii, deoarece 0 este punct de discontinuitate de prima speţă.

Observaţie. Funcţia $g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ definită pe $R - \{0\}$ este derivata funcţiei $G(x) = |x|$, dar funcţia g nu este definită pe un *interval*, ci pe reuniunea intervalelor disjuncte $(-\infty, 0)$ şi $(0, +\infty)$. În punctul 0, ea nu este definită.

2) Funcţia $f(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ definită pe R are în 0 o discontinuitate de speţa a doua. Ea ar putea fi derivata altei funcţii. Într-adevăr, funcţia $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ definită pe R este derivabilă şi $F' = f$.

§ 5. Derivate de ordin superior. Formula lui Taylor

1. Derivate de ordin superior

Fie f o funcţie definită pe un interval I (sau pe o reuniune de intervale) şi x_0 un punct din I.

Dacă funcţia f este *derivabilă pe o vecinătate* V a lui x_0, derivata sa f', definită pe V, poate fi la rîndul său derivabilă în punctul x_0.

Definiţie. Dacă derivata f' este derivabilă în punctul x_0 se spune că funcţia f este derivabilă de două ori în punctul x_0; derivata lui f' în x_0 se notează $f''(x_0)$ sau $\dfrac{d^2f(x_0)}{dx^2}$ sau $D^2f(x_0)$ şi se numeşte derivata a doua (sau derivata de ordinul 2) a funcţiei f în punctul x_0:

$$f''(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in V}} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Pentru a face o deosebire, derivata $f'(x_0)$ se mai numeşte *derivata întîi* (sau de ordinul întîi) a funcţiei f în punctul x_0.

O b s e r v a ţ i e. Dacă funcţia f este derivabilă numai în punctul x_0 (sau pe o mulţime care nu are pe x_0 ca un punct de acumulare), nu se mai poate defini derivata a doua a lui f în punctul x_0. Aşadar, *dacă funcţia f este derivabilă de două ori în x_0, aceasta înseamnă că derivata întîi f' există pe o întreagă vecinătate a lui x_0.*

Dacă funcţia f este derivabilă de două ori pe intervalul I, se defineşte *derivata a doua* a funcţiei f, pe intervalul I, ca fiind *funcţia* care asociază fiecărui punct $x \in I$ numărul $f''(x)$. Derivata a doua se notează cu f'' sau $\frac{d^2f}{dx^2}$ sau D^2f:

$$f'' = (f')'; \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right); D^2 f = D(Df).$$

Se definesc în mod asemănător *derivata a treia* (sau de ordinul trei) a funcţiei f, notată f''' sau $\frac{d^3f}{dx^3}$ sau D^3f, *derivata a patra* (sau de ordinul patru) a funcţiei f, notată f^{IV} sau $\frac{d^4f}{dx^4}$ sau D^4f etc.

Pentru omogenitatea limbajului, se spune că funcţia f însăşi este derivata sa de ordinul zero.

Pentru aceste derivate se folosesc de asemenea următoarele notaţii:

$$f^{(0)} = f;\ f^{(1)} = f';\ f^{(2)} = f'';\ f^{(3)} = f'''.$$

Se defineşte prin recurenţă derivata de un ordin n oarecare ($n \in N$).

D e f i n i ţ i e . Dacă funcţia f este derivabilă de $n-1$ ori pe o vecinătate V a lui x_0, şi dacă derivata $f^{(n-1)}$ este derivabilă în x_0, se spune că funcţia f este derivabilă de n ori în x_0; derivata lui $f^{(n-1)}$ în punctul x_0 se notează cu $f^{(n)}(x_0)$ sau $\frac{d^nf(x_0)}{dx^n}$ sau $D^nf(x_0)$ şi se numeşte derivata de ordinul n a funcţiei f în punctul x_0:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in V}} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă funcţia f este derivabilă de n ori pe intervalul I, se defineşte derivata de ordinul n a funcţiei f, pe acest interval, ca fiind funcţia care asociază fiecărui punct $x \in I$, numărul $f^{(n)}(x)$. Derivata de ordinul n a lui f se notează $f^{(n)}$ sau $\frac{d^nf}{dx^n}$ sau D^nf:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'; \frac{d^nf}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right); D^nf = D(D^{n-1}f).$$

Se spune, de asemenea, „funcţia f admite derivată de ordinul n“ sau „derivata de ordinul n a funcţiei f există“ în loc de „funcţia f este derivabilă de n ori“.

O b s e r v a ţ i e. Dacă funcţia f este derivabilă de n ori în punctul x_0, rezultă că derivata de ordinul $n-1$ (ca şi derivatele de ordin mai mic decît $n-1$) există nu numai în punctul x_0, ci pe o întreagă vecinătate a lui x_0.

Exemple

1) $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$;

$P'(x) = n\ a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$;

$P''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)\ (n-2)\ a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + 3 \cdot 2a_3x + 2 \cdot 1a_2$;

$P'''(x) = n(n-1)\ (n-2)\ a_n x^{n-3} + \ldots + 3 \cdot 2 \cdot 1a_3$;

$P^{(n-1)}(x) = n(n-1)\ (n-2)\ldots 3 \cdot 2\ a_n x = n!a_n x$;

$P^{(n)}(x) \equiv n!\ a_n$;

$P^{(n+1)}(x) \equiv 0$; $\quad P^{(n+k)}(x) \equiv 0, \quad k = 1,2\ldots\ldots$

Un polinom $P(x)$ are derivate de orice ordin (este o funcţie indefinit derivabilă), iar derivatele sale de ordin mai mare decît gradul său sînt identic nule.

Reciproc, dacă o funcţie $P(x)$ are derivata de ordinul $n+1$ identic nulă, $P(x)$ este un polinom de grad cel mult egal cu n.

Într-adevăr, din egalitatea

$$P^{(n+1)}(x) \equiv 0$$

deducem succesiv

$$P^{(n)}(x) \equiv C_n;$$

$$P^{(n-1)}(x) = C_n x + C_{n-1};$$

$$P^{(n-2)}(x) = C_n \frac{x^2}{1 \cdot 2} + C_{n-1}x + C_{n-2};$$

$$P^{(n-3)}(x) = C_n \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + C_{n-1}\frac{x^2}{2} + C_{n-2}x + C_{n-3};$$

$$P'(x) = C_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_{n-1}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_2x + C_1;$$

$$P(x) = C_n \frac{x^n}{n!} + C_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_2\frac{x^2}{2!} + C_1x + C_0,$$

unde $C_0, C_1, \ldots, C_n$ sînt nişte numere dintre care unele pot fi nule.

2) Funcţia $f(x) = ce^x$ definitivă pe R, are derivate de orice ordin pe R (este indefinit derivabilă)

$$f'(x) = ce^x; \quad f''(x) = ce^x; \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = ce^x.$$

3) Funcţia $f(x) = \sin x$ definită pe R este indefinit derivabilă pe R:
$f^{(0)}(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f^{III}(x) = -\cos x$; $f^{IV}(x) = \sin x$;... .

$f^{(4k)}(x) = \sin x$; $f^{(4k+1)}(x) = \cos x$; $f^{(4k+2)}(x) = -\sin x$;
$f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$; $f^{(4k+4)}(x) = \sin x$.

4) Funcţia $f(x) = \cos x$ este indefinit derivabilă pe R:

$f^{(0)}(x) = \cos x$; $f'(x) = -\sin x$; $f''(x) = -\cos x$;
$f'''(x) = \sin x$; $f^{IV}(x) = \cos x$;
$f^{(4k)}(x) = \cos x$; $f^{(4k+1)}(x) = -\sin x$; $f^{(4k+2)}(x) = -\cos x$;
$f^{(4k+3)}(x) = \sin x$; $f^{(4k+4)}(x) = \cos x$.

5) Funcţia $f(x) = \frac{1}{x}$, definită pe $R - \{0\}$ este indefinit derivabilă pe $R - \{0\}$.

$f^{(0)}(x) = \frac{1}{x}$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f''(x) = \frac{2}{x^3}$; $f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$,...,
$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$.

6) Funcţia $f(x) = \ln x$ definită pe $(0, +\infty)$ este indefinit derivabilă pe $(0, +\infty)$ şi

$$f^{(0)}(x) = \ln x;\ f'(x) = \frac{1}{x};\ f''(x) = -\frac{1}{x^2};\ f'''(x) = \frac{2}{x^3};$$
$$f^{IV}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4},\ldots,\quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \ldots$$

2. Operaţii cu funcţii derivabile de n ori

Propoziţie. Fie funcţiile $f : I \to R$ şi $g : I \to R$. Dacă f şi g sînt derivabile de n ori într-un punct $x \in I$, atunci funcţiile $f + g$, αf (α număr real) şi fg sînt derivabile de n ori în x_0, iar dacă $g(x_0) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă de n ori în x_0.

Propoziţia a fost demonstrată pentru $n = 1$. S-o presupunem adevărată pentru n oarecare şi s-o demonstrăm presupunînd că f şi g sînt derivabile de $n + 1$ ori în x_0. Atunci f şi g sînt derivabile o dată pe o vecinătate V a lui x_0, iar derivatele f' şi g' sînt derivabile de n ori în x_0. Deoarece g este continuă în x_0 (fiind derivabilă), dacă $g(x_0) \neq 0$, rezultă că g este dife-

rită de zero pe o întreagă vecinătate a lui x_0, şi putem presupune că această vecinătate este V, luînd-o la nevoie mai mică. Avem următoarele formule, valabile pe vecinătatea V:

$$(f+g)' = f' + g', \quad (\alpha f)' = \alpha f', \quad (fg)' = f'g + fg', \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Deoarece funcţiile din membrul al doilea al acestor egalităţi sînt derivabile de n ori în x_0, şi deoarece asupra lor se efectuează doar operaţiile de adunare, înmulţire cu scalari, înmulţire şi împărţire, care păstrează derivabilitatea, urmează, conform presupunerii, că funcţiile din dreapta egalităţilor, deci şi cele din stînga egalităţilor, sînt derivabile de n ori în x_0, deci funcţiile $f+g$, αf şi fg sînt derivabile de $n+1$ ori în x_0, iar dacă $g(x_0) \neq 0$, funcţia $\frac{f}{g}$, derivabilă de $n+1$ ori în x_0.

Conform principiului inducţiei complete, propoziţia este adevărată pentru orice n.

Corolar. Dacă funcţiile f şi g sînt derivabile de n ori pe I, atunci $f+g$, αf şi fg sînt deribabile de n ori pe I şi

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, \qquad (\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)};$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(n-i)}\, g^{(i)} = f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)}\, g^{(2)} + \ldots + f g^{(n)},$$

iar funcţia $\frac{f}{g}$ este derivabilă de n ori pe mulţimea sa de definiţie.

Rămîne să demonstrăm numai formulele. Demonstraţia se face prin inducţie completă. Demonstrarea primelor două formule o lăsăm pe seama cititorului, ca exerciţiu uşor.

Să demonstrăm ultima formulă. Pentru $n = 1$, formula este adevărată: $(fg)' = f'g + fg'$. S-o presupunem adevărată pentru n. Atunci

$$(fg)^{(n+1)} = [(fg)^{(n)}]' = \left[\sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(n-i)}\, g^{(i)}\right]' = \sum_{i=0}^{n} C_n^i [f^{(n-i+1)} g^{(i)} + f^{(n-i)} g^{(i+1)}] =$$

$$= C_n^0 f^{(n+1)}\, g^{(0)} + \sum_{i=1}^{n} f^{(n+1-i)}\, g^{(i)} [C_n^i + C_n^{i-1}] + C_n^n f^{(0)} g^{(n+1)} =$$

$$= C_{n+1}^0 f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{i=1}^{n} C_{n+1}^i f^{(n+1-i)}\, g^{(i)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(0)} g^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} C_{n+1}^i f^{(n+1-i)}\, g^{(i)}.$$

Astfel formula este adevărată pentru orice n.

Observaţie. Ultima egalitate din corolar se numeşte *formula lui Leibniz* de derivare a unui produs de două funcţii. Membrul drept al formulei aminteşe formula lui Newton de dezvoltare a binomului.

Primele două formule din corolar exprimă faptul că operația de derivare de n ori este *liniară*.

Propoziție. **Fie funcțiile $u : I \to J$ și $\varphi : J \to R$. Dacă funcția u este derivabilă de n ori în punctul $x_0 \in I$ și dacă funcția φ este derivabilă de n ori în punctul corespunzător $y_0 = u(x_0) \in J$, atunci funcția compusă $f = \varphi_0 u : I \to R$ este derivabilă de n ori în punctul x_0.**

Pentru $n = 1$ propoziția a fost deja demonstrată. Să presupunem că ea este adevărată pentru cazul cînd se compun două funcții derivabile de n ori.

Să demonstrăm atunci propoziția în cazul cînd u este derivabilă de $n + 1$ ori în x_0, iar φ este derivabilă de $n + 1$ ori în y_0. Atunci u este derivabilă de n ori într-o vecinătate U a lui x_0, iar φ este derivabilă de n ori într-o vecinătate V a lui y_0, și putem alege vecinătatea V astfel ca $u(U) \subset V$; atunci funcția compusă este derivabilă de n ori pe U și avem

$$f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x) \qquad \text{pentru } x \in U.$$

Dar funcția $\varphi'(u(x))$ este derivabilă de n ori în x_0, deoarece u este derivabilă de n ori (chiar de $n + 1$ ori) în x_0, iar φ' este derivabilă de n ori în x_0; de asemenea, u' este derivabilă de n ori în x_0. Atunci și produsul $\varphi'(u(x)) \cdot u'(x)$ este derivabil de n ori în x_0, adică $f'(x)$ este derivabilă de n ori în x_0, de unde rezultă că f este derivabilă de $n + 1$ ori în x_0.

Conform principiului inducției complete, propoziția este adevărată pentru orice n.

Corolar. **Dacă u este derivabilă de n ori pe I, iar φ este derivabilă de n ori pe J, atunci funcția compusă $f = \varphi \circ u$ este derivabilă de n ori pe I.**

În ceea ce privește derivatele de ordin superior ale funcției $f = \varphi \circ u$, plecăm de la derivata de ordinul 1:

$$f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x)$$

și se derivează succesiv

$$f''(x) = \varphi''(u(x)) \cdot u'^2(x) + \varphi'(u(x)) \cdot u''(x);$$

$$f'''(x) = \varphi'''(u(x))\, u'^3(x) + 3\varphi''(u(x))\, u'(x) u''(x) + \varphi'(u(x))\, u'''(x) \text{ etc.}$$

Observație. Notînd $y = f(x)$ și $y = \varphi(u)$, apoi $y'_x = f'$, $y'_u = \varphi'$ și $u'_x = u'$, formulele precedente se scriu

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x;$$

$$y''_x = y''_u\, u'^2_x + y'_u\, u''_x;$$

$$y'''_x = y'''_u\, u'^3_x + 3y''_u\, u'_x \cdot u''_x + y'_u\, u'''_x$$

etc.

Propoziţie. **Fie $f : I \to J$ o funcţie strict monotonă cu $f(I) = J$, şi fie $\varphi : J \to I$ funcţia sa inversă. Dacă f este derivabilă de n ori într-un punct $x_0 \in I$ şi dacă $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcţia inversă $\varphi = \overset{-1}{f}$ este derivabilă de n ori în punctul corespunzător $y_0 = f(x_0) \in J$.**

Propoziţia a fost demonstrată pentru $n = 1$. S-o presupunem adevărată pentru un n oarecare şi s-o demonstrăm pentru cazul cînd f este derivabilă de $n + 1$ ori în x_0.

Atunci f este derivabilă de n ori, deci este derivabilă o dată într-o vecinătate U_1 a lui x_0, iar derivata f' este continuă în x_0. Deoarece $f'(x_0) \neq 0$, rezultă că există o vecinătate U a lui x_0 astfel ca $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in U$. Dacă notăm cu $V = f(U)$, funcţia inversă φ este derivabilă de n ori pe V, conform presupunerii, deci este derivabilă o dată pe V şi

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))} \qquad \text{pentru } y \in V.$$

Dar φ este derivabilă de n ori în y_0, iar f' este derivabilă de n ori în punctul $x_0 = \varphi(y_0)$, deci funcţia compusă $f'(\varphi(y))$ este derivabilă de n ori în y_0, şi de asemenea funcţia $\dfrac{1}{f'(\varphi(y))}$ este derivabilă de n ori în y_0, adică φ' este derivabilă de n ori în y_0. Rezultă că φ este derivabilă de $n + 1$ ori în y_0.

Conform principiului inducţiei complete, propoziţia este adevărată pentru orice n.

Corolar. **Dacă f este derivabilă de n ori pe I şi dacă derivata f' nu se anulează pe I, atunci funcţia inversă $\varphi = \overset{-1}{f}$ este derivabilă de n ori pe $J = f(I)$.**

Plecînd de la egalitatea

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))}, \qquad y \in J$$

şi derivînd o dată, obţinem

$$\varphi''(y) = -\frac{f''(\varphi(y))\varphi'(y)}{f'^2(\varphi(y))} = -\frac{f''(\varphi(y))}{f'^3(\varphi(y))}.$$

Derivînd încă o dată, obţinem

$$f'''(y) = -\frac{f'''(\varphi(y))\ \varphi'(y)\ f'^3(\varphi(y)) - f''(\varphi(y))\ 3f'^2(\varphi(y))\ f''(\varphi(y))\ \varphi'(y)}{f'^6(\varphi(y))} =$$

$$= -\frac{[f''(\varphi(y))\ f'(\varphi(y)) - 3f''^2(\varphi(y))]\ \varphi'(y)}{f'^4(\varphi(y))} = -\frac{f'''(\varphi(y))\ f'(\varphi(y)) - 3f''^2(\varphi(y))}{f'^5(\varphi(y))}.$$

O b s e r v a ţ i e. Notînd $y = f(x)$ şi $x = \varphi(y)$, apoi $y'_x = f'$ şi $x'_y = \varphi'$, egalităţile de mai sus se scriu

$$x'_y = \frac{1}{y'_x};$$

$$x''_y = -\frac{y''_x}{y'^3_x};$$

$$x''' = -\frac{y'''_x y'_x - 3y''^2_x}{y'^5_x}.$$

P r o p o z i ţ i e. Fie funcţiile $x = \varphi(t)$ şi $y = \psi(t)$ definite pe un interval I, astfel că funcţia φ este strict monotonă şi continuă pe I, şi fie funcţia $y = f(x) = \psi(\overline{\varphi}^{1}(x))$ definită pentru $x \in \varphi(I) = J$.

Dacă funcţiile φ şi ψ sînt derivabile de n ori într-un punct $t_0 \in I$ şi dacă $\varphi'(t_0) \neq 0$, atunci funcţia $y = f(x)$ este derivabilă de n ori în punctul corespunzător $x_0 = \varphi(t_0)$.

Propoziţia a fost demonstrată deja pentru $n = 1$. S-o presupunem adevărată pentru n oarecare şi s-o demonstrăm în cazul în care φ şi ψ sînt derivabile de $n + 1$ ori în t_0. Atunci φ şi ψ sînt derivabile de n ori într-o vecinătate U a lui t_0 şi $\varphi'(t) \neq 0$ pentru $t \in U$. Rezultă că funcţia inversă $\overline{\varphi}^{1}(x)$ este derivabilă de n ori în vecinătatea $V = \varphi(U)$ a lui x_0. Avem

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(\overline{\varphi}^{1}(x))}{\varphi'(\overline{\varphi}^{1}(x))}; \qquad x \in V;$$

dar ψ' şi φ' sînt derivabile de n ori în t_0, deci şi funcţiile compuse $\psi'(\overline{\varphi}^{1}(x))$ şi $\varphi'(\overline{\varphi}^{1}(x))$ sînt derivabile de n ori în x_0. Atunci citul lor, $f'(x)$, este derivabil de n ori în x_0, adică f este derivabilă de $n + 1$ ori în x_0. Conform principiului inducţiei complete, propoziţia este adevărată pentru orice n.

C o r o l a r. Dacă φ şi ψ sînt derivabile de n ori pe I, atunci f este derivabilă de n ori pe J.

Derivînd egalitatea

$$f'(x) = \frac{\psi'(\overline{\varphi}^{1}(x))}{\varphi'(\overline{\varphi}^{1}(x))}$$

obținem:

$$f''(x) = \frac{\psi''(\overset{-1}{\varphi}(x))\ \varphi'(\overset{-1}{\varphi}(x)) - \psi'(\overset{-1}{\varphi}(x))\ \varphi''(\overset{-1}{\varphi}(x))}{\varphi'^2(\overset{-1}{\varphi}(x))} \cdot (\overset{-1}{\varphi})'(x) =$$

$$= \frac{\psi''(\overset{-1}{\varphi}(x))\ \varphi'(\overset{-1}{\varphi}(x)) - \psi'(\overset{-1}{\varphi}(x))\ \varphi''(\overset{-1}{\varphi}(x))}{\varphi'^2(\overset{-1}{\varphi}(x))} \cdot \frac{1}{\varphi'(\overset{-1}{\varphi}(x))} =$$

$$= \frac{\psi''(\overset{-1}{\varphi}(x))\ \varphi'(\overset{-1}{\varphi}(x)) - \psi'(\overset{-1}{\varphi}(x))\ \varphi''(\overset{-1}{\varphi}(x))}{\varphi'^3(\overset{-1}{\varphi}(x))}.$$

Observație. Notînd $y'_t = \varphi'$ și $x'_t = \psi'$, egalitățile precedente se scriu

$$f'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \qquad f''_x = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{x'^3_t}.$$

3. Formula lui Taylor

Fie funcția f: $I \to R$, derivabilă de n ori într-un punct $a \in I$. Aceasta înseamnă că primele $n - 1$ derivate există nu numai în a, dar pe o întreagă vecinătate a lui a. Pentru simplitatea expunerii, vom presupune că primele $n - 1$ derivate există pe întreg intervalul I.

Pentru fiecare $x \in I$ să definim polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{x - a}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Polinomul T_n, definit pe I, se numește *polinomul lui Taylor* de gradul n, atașat funcției f, în punctul a.

Dacă pentru fiecare $x \in I$ notăm

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x),$$

atunci:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \text{ adică}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

oricare ar fi $x \in I$. Această egalitate, valabilă pentru orice $x \in I$, se numește *formula lui Taylor* de ordinul n, corespunzătoare funcției f, în punctul a.

Funcția R_n definită pe I se numește *restul* de ordinul n al formulei lui Taylor.

În cele ce urmează vom căuta să scriem restul R_n în altă formă, mai convenabilă pentru calcule.

Să calculăm mai întîi derivatele polinomului lui Taylor

$$T_n'(x) = f'(a) + \frac{x-a}{1!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a);$$

$$T_n''(x) = f''(a) + \frac{x-a}{1!}f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(a);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + \frac{x-a}{1!}f^{(n)}(a);$$

$$T_n^{(n)}(x) \equiv f^{(n)}(a); \qquad T_n^{(n+1)}(x) \equiv 0; \qquad T_n^{(n+h)}(x) \equiv 0.$$

Valorile derivatelor succesive ale acestui polinom, în punctul a, sînt*:

$$T_n(a) = f(a);$$
$$T_n'(a) = f'(a);$$
$$T_n''(a) = f''(a);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a);$$
$$T_n^{(n+1)}(a) = 0.$$

Deoarece f și T au derivate de ordinul n în a, rezultă că și restul $R_n = f - T_n$ are derivate de ordinul n în a. De asemenea, deoarece f și T_n au derivate pînă la ordinul $n-1$ inclusiv, pe întreg intervalul I, rezultă că și restul R_n are derivate pînă la ordinul $n-1$ inclusiv pe întreg intervalul I.

Vom avea astfel:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \qquad x \in I;$$
$$R_n'(x) = f'(x) - T_n'(x), \qquad x \in I;$$
$$R_n''(x) = f''(x) - T_n''(x), \qquad x \in I;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x), \quad x \in I;$$
$$R_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - T_n^{(n)}(a).$$

Rezultă atunci

$$R_n(a) = 0;\ R_n'(a) = 0;\ R_n''(a) = 0,\ \ldots,\ R_n^{(n-1)}(a) = 0;\ R_n^{(n)}(a) = 0.$$

O b s e r v a ț i e. Deoarece R_n este derivabilă pe I, este continuă pe I; în particular este continuă în a, deci

$$\lim_{x \to a} R_n(x) = R_n(a) = 0.$$

* Polinomul lui Taylor de gradul n, atașat funcției f, a fost construit tocmai astfel încît să verifice condițiile scrise.

Aceasta înseamnă că, pentru x suficient de aproape de a, restul $R_n(x)$ este oricît de mic, adică diferența $f(x) - T_n(x)$ poate fi făcută oricît de mică; mai precis, putem realiza ca diferența $f(x) - T_n(x)$ să fie cît dorim de mică, dacă luăm pe x suficient de aproape de a. Aceasta înseamnă că pentru valorile lui x suficient de apropiate de a, funcția $f(x)$ poate fi aproximată prin polinomul lui Taylor $T_n(x)$.

Vom preciza, încă, acest rezultat, arătînd că nu numai $R_n(x)$, dar chiar raportul $\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$ poate fi făcut oricît de mic, dacă x este suficient de apropiat de a. Mai precis, vom arăta următoarea:

Lemă.

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Într-adevăr, să notăm $g(x) = (x-a)^n$. Avem

$$g'(x) = n(x-a)^{n-1};$$
$$g''(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g^{(n-1)}(x) = n!\,(x-a);$$
$$g^{(n)}(x) = n!$$

Atunci:

$$g(a) = 0 \qquad R_n(a) = 0;$$
$$g'(a) = 0 \qquad R_n'(a) = 0;$$
$$g''(a) = 0 \qquad R_n''(a) = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g^{(n-1)}(a) = 0 \qquad R_n^{(n-1)}(a) = 0;$$
$$g^{(n)}(a) = n! \neq 0 \qquad R_n^{(n)}(a) = 0.$$

Fie $x \in I$ arbitrar. Deoarece $R_n(a) = 0$ și $g(a) = 0$, aplicînd corolarul teoremei lui Cauchy există un punct c_1, cuprins între a și x, astfel încît

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)}.$$

Deoarece $R_n'(a) = 0$ și $g'(a) = 0$, aplicînd încă o dată corolarul teoremei lui Cauchy, există un punct c_2 cuprins între a și c_1 (deci între a și x), astfel încît

$$\frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R''(c_2)}{g''(c_2)} \text{ și deci } \frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)}.$$

Aplicînd de $n-1$ ori corolarul teoremei lui Cauchy găsim un punct ξ cuprins între a şi x, $\xi \neq a$, $\xi \neq x$, astfel încît

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n-1}(\xi)}{g^{(n-1)}(\xi)} = \frac{R_n^{(n-1)}(\xi) - R_n^{(n-1)}(a)}{g^{(n-1)}(\xi) - g^{(n-1)}(a)} =$$

$$= \frac{\dfrac{R_n^{(n-1)}(\xi) - R_n^{(n-1)}(a)}{\xi - a}}{\dfrac{g^{(n-1)}(\xi) - g^{(n-1)}(a)}{\xi - a}}$$

(deoarece $R_n^{(n-1)}(a) = 0$, $g^{(n-1)}(a) = 0$ şi $\xi \neq a$).

Dacă alegem un şir $x_k \underset{k}{\longrightarrow} a$, $x_k \neq a$, atunci $\xi_k \to a$ şi $\xi_k \neq a$, deci:

$$\frac{R_n^{(n-1)}(\xi_k) - R_n^{(n-1)}(a)}{\xi_k - a} \underset{k}{\longrightarrow} R_n^{(n)}(a) = 0,$$

$$\frac{g^{(n-1)}(\xi_k) - g^{(n-1)}(a)}{\xi_k - a} \underset{k}{\longrightarrow} g^{(n)}(a) = n! \neq 0$$

şi deci:

$$\frac{R_n(x_k)}{g(x_k)} \underset{k}{\longrightarrow} \frac{R_n^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} = 0.$$

Deoarece şirul $x_k \to a$, $x_k \neq a$ a fost ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{g(x)} = 0,$$

adică

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Propoziţie. **Dacă f este derivabilă de n ori în punctul $a \in I$, atunci există o funcţie $\alpha(x)$ definită pe I astfel ca**

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 = \alpha(a)$$

şi astfel ca pentru orice $x \in I$ să aveam

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) +$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n!} \alpha(x).$$

Într-adevăr, deoarece $\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=0$, definim funcţia α astfel:

$$\alpha(x)=n!\,\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \text{ dacă } x\neq a \text{ şi } \alpha(a)=0.$$

Atunci $\lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{x\to a} n!\,\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=0=\alpha(a)$, şi

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}\alpha(x)$$

pentru orice $x\in I$ (chiar pentru $x=a$). Înlocuind în formula lui Taylor restul $R_n(x)$ cu $\frac{(x-a)^n}{n!}\alpha(x)$, se obţine formula din enunţul propoziţiei.

În propoziţia precedentă, s-a presupus că funcţia f este derivabilă de n ori numai în punctul a.

În propoziţiile următoare vom presupune că f este *derivabilă* de $n+1$ ori pe întreg intervalul I, şi vom da alte forme restului formulei Taylor.

Fie a şi x două puncte arbitrare diferite din I pe care le fixăm.

Fie de asemenea p un număr natural oarecare.

Restul $R_n(x)$ de ordinul n, al formulei lui Taylor în punctul a, se poate scrie sub forma

$$R_n(x)=(x-a)^p\,K,$$

unde K este un număr (care se schimbă o dată cu x şi a). Formula lui Taylor de ordinul n în punctul a se scrie deci pentru punctul x ales, astfel:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)+(x-a)^pK.$$

Să considerăm acum funcţia $\varphi(t)$ definită pentru orice $t\in I$ prin egalitatea următoare:

$$\varphi(t)=f(t)+\frac{x-t}{1!}f'(t)+\frac{(x-t)^2}{2}f''(t)+\ldots+\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)+(x-t)^p\,K.$$

Se verifică uşor că funcţia φ este derivabilă pe I, deoarece toate funcţiile din membrul drept sînt derivabile pe I.

Avem:

$$\varphi(x)=f(x) \quad \text{şi} \quad \varphi(a)=f(x).$$

Putem aplica teorema lui Rolle funcţiei φ pe intervalul cu extremităţile a şi x: există un punct ξ cuprins între a şi x astfel ca $\varphi'(\xi)=0$. Dar

$$\varphi'(t)=f'(t)+\frac{x-t}{1!}f''(t)-f'(t)+\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)-\frac{x-t}{1!}f''(t)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)-\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)-p(x-t)^{p-1}K=$$

$$=\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)-p(x-t)^{p-1}K.$$

Egalitatea $\varphi'(\xi) = 0$ se scrie atunci

$$\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) - p(x-\xi)^{p-1} K = 0,$$

de unde:

$$K = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\, p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Aşadar, restul R_n se scrie

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^p\ (x-\xi)^{n-p+1}}{n!\, p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Sub această formă, R_n se numeşte *restul lui Schlömlich-Roche*. Luînd $p = 1$ obţinem *restul lui Cauchy*

$$R_n(x) = \frac{(x-a)\ (x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Luînd $p = n + 1$, obţinem *restul lui Lagrange*

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

O b s e r v a ţ i e. Punctul intermediar ξ depinde atît de a şi de x cît şi de n şi p. Aşadar, în formula lui Cauchy, punctul ξ este diferit de cel din formula lui Lagrange.

Deoarece ξ este cuprins între a şi x, există un număr θ (care depinde, ca şi ξ, de a, x, n şi p) astfel ca $0 < \theta < 1$ şi

$$\xi = a + \theta(x - a).$$

Notînd $h = x - a$, atunci $\xi = a + \theta h$, iar formula lui Taylor se scrie:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n,$$

unde restul R_n poate avea una din formele

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\, p} f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad \text{(Schlömlich-Roche)};$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \qquad \text{(Cauchy)};$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \qquad \text{(Lagrange)}.$$

În particular, dacă $0 \in I$, şi dacă luăm $a = 0$, formula lui Taylor cu restul lui Lagrange se scrie astfel:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

unde $0 < \theta < x$ (θ depinde de x şi de n).

Restul lui Cauchy se scrie în acest caz astfel:

$$R_n = ({}_n!)^{-1}x^{n+1}(1-\theta)^n f^{n+1}(\theta x).$$

Exemple. 1) Pentru funcția $f(x) = e^x$ definită pe R, avem: $f^{(n)}(x)=e^x$ și $f^{(n)}(0)=1$, oricare ar fi $n\in N$, deci formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 se scrie:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, 0<\theta<1. \quad x\in R$$

2) Pentru funcția $f(x) = \sin x$ definită pe R, avem

$f(x) = 0$; $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{IV}(0) = 0$,...

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 se scrie

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin \theta x, \qquad 0 < \theta < 1. \quad x\in R$$

3) Pentru funcția $f(x) = \cos x$ definită pe R, avem

$f(0) = 1$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = -1$; $f'''(0) = 0$; $f^{IV}(0) = 1$;...

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 se scrie

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos \theta x, \qquad 0 < \theta < 1. \quad x\in R$$

4) Pentru funcția $f(x) = \ln (1 + x)$ definită pe $(-1,+\infty)$ avem:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \quad f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3};$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}; \ldots; \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}; \ldots$$

deci:

$f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = -1$; $f'''(0) = 2$;...; $f^{IV}(0) = -3!$

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 se scrie:

$$\ln (1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)}\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

unde $0 < \theta < 1$, θ depinde de x și de n, iar $x > -1$.

4. Puncte de extrem ale unei funcții

Fie f o funcție reală definită pe un interval I.

Teorema lui Fermat afirmă că într-un punct de extrem din interiorul intervalului, derivata funcției se anulează (dacă funcția este derivabilă în acest punct).

Știm însă că din $f'(x_0) = 0$, nu rezultă că x_0 este un punct de extrem.

Se va arăta mai departe că, studiind semnul derivatei întîi în vecinătatea lui x_0, putem decide dacă x_0 este sau nu un punct de extrem, şi, în caz afirmativ, dacă este punct de maxim sau de minim.

Dacă nu cunoaştem semnul derivatei întîi în punctele din jurul lui x_0, putem folosi derivatele de ordin superior ale funcţiei în x_0 (şi numai în x_0) pentru a vedea dacă x_0 este punct de extrem.

Teoremă. Fie f o funcţie derivabilă de n ori, $n \geqslant 2$, într-un punct $a \in I$, astfel încît

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0,\ldots,f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

1) Dacă n este par, atunci a este punct de extrem al lui f: dacă $f^{(n)}(a) < 0$ atunci a este punct de maxim, iar dacă $f^{(n)}(a) > 0$, atunci a este punct de minim.

2) Dacă n este impar, iar a este punct interior al intervalului I, atunci a nu este punct de extrem al funcţiei f.

Doarece primele $n - 1$ derivate se anulează în a, formula lui Taylor, de ordinul n, în punctul a, se scrie, pentru orice $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \alpha(x).$$

unde

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0, \quad \text{şi} \quad \alpha(a) = 0,$$

atunci

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!} [f^{(n)}(a) + \alpha(x)].$$

Deoarece $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, avem

$$\lim_{x \to a} [f^{(n)}(a) + \alpha(x)] = f^{(n)}(a).$$

Dacă $f^{(n)}(a) > 0$, există o vecinătate V a lui a astfel ca

$$f^{(n)}(a) + \alpha(x) > 0 \text{ pentru } x \in V.$$

Dacă $f^{(n)}(a) < 0$, există o vecinătate V a lui a astfel ca

$$f^{(n)}(a) + \alpha(x) < 0 \text{ pentru } x \in V.$$

Dacă n este par, avem $(x - a)^n \geqslant 0$ pentru orice $x \in I$, deci:

Dacă $f^{(n)}(a) > 0$, atunci $f^{(n)}(a) + \alpha(x) > 0$ pentru $x \in V$, de unde rezultă că $f(x) - f(a) \geqslant 0$ sau

$$f(x) \geqslant f(a) \text{ pentru } x \in V,$$

adică a este un punct de *minim*.

Dacă $f^{(n)}(a) < 0$, atunci $f^{(n)}(a) + \alpha(x) < 0$ pentru $x \in V$, de unde rezultă că $f(x) - f(a) \leqslant$ sau

$$f(x) \leqslant f(a) \text{ pentru } x \in V$$

adică a este un punct de *maxim*.

Să considerăm acum cazul cînd a este punct interior al intervalului I iar n este *impar*. Atunci $(x-a)^n < 0$ dacă $x < a$ şi $(x-a)^n > 0$ dacă $x > a$, deci:

dacă $f^{(n)}(a) > 0$, atunci $f^{(n)}(a) + \alpha(x) > 0$ pentru $x \in V$, de unde rezultă că:

$$f(x) - f(a) < 0 \quad \text{adică } f(x) < f(a) \quad \text{dacă } x < a, \quad x \in V,$$
$$f(x) - f(a) > 0 \quad \text{adică } f(x) > f(a) \quad \text{dacă } x > a, \quad x \in V$$

şi deci a nu este punct de extrem;

dacă $f^{(n)}(a) < 0$ atunci

$$f(x) > f(a) \quad \text{dacă } x < a, \quad x \in V,$$
$$f(x) < f(a) \quad \text{dacă } x > a, \quad x \in V$$

şi deci nici în acest caz a nu este punct de extrem.

O b s e r v a ţ i i. Deoarece $f''(a)$ există, rezultă că f' există într-o întreagă vecinătate a lui a. Dacă n este par, iar a este punct interior al intervalului I, atunci derivata f' are semne diferite de o parte şi de alta a lui a. Într-adevăr, dacă ar avea acelaşi semn într-o vecinătate a lui a, atunci f ar fi strict monotonă în această vecinătate şi deci a n-ar mai fi punct de extrem al lui f.

C o r o l a r u l 1. Fie f o funcţie derivabilă de două ori în punctul $a \in I$, astfel încît $f'(0) = 0$ şi $f''(a) \neq 0$.

1) Dacă $f''(a) < 0$, atunci a este punct de maxim.

2) Dacă $f''(a) > 0$, atunci a este punct de minim.

Corolarul următor stabileşte o proprietate reciprocă:

C o r o l a r u l 2. Dacă f este derivabilă de două ori într-un punct interior $a \in I$ şi dacă f are în a un minim, atunci $f''(a) \geqslant 0$, iar dacă f are în a un maxim, atunci $f''(a) \leqslant 0$.

Să presupunem că a este un punct de minim, deci $f'(a) = 0$. Dacă am avea $f''(a) < 0$, atunci din corolarul precedent ar rezulta că a este un punct de maxim şi am ajunge la o contradicţie: aşadar $f''(a) \geqslant 0$.

La fel se demonstrează că dacă a este un punct de maxim, atunci $f''(a) \leqslant 0$.

Corolarul 3. Dacă f este derivabilă de trei ori în punctul interior $a \in I$ şi dacă $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, atunci a nu este punct de extrem al funcţiei f.

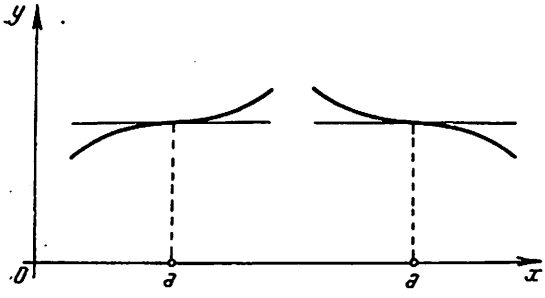


Fig. 98

Observaţie. În cazul cînd n este impar, tangenta la grafic în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox şi traversează graficul (fig. 98).

Un asemenea punct, în care tangenta traversează graficul, se numeşte *punct de inflexiune.*

§ 6. Regulile lui l'Hospital

În cazurile exceptate de teoremele relative la operaţiile cu limitele de funcţii, trebuie întreprins un studiu direct pentru a vedea dacă există limită.

Uneori derivatele pot fi de folos în aceste cazuri, prin aşa-numitele „reguli ale lui l'Hospital".

Aceste reguli se aplică în cazul $\frac{0}{0}$ şi în cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Celelalte cazuri se reduc la acestea.

1. Cazul $\frac{0}{0}$

Fie I un interval, x_0 un punct de acumulare al său (x_0 finit sau infinit) şi funcţiile f şi g definite pe intervalul I, cu excepţia, eventual, a lui x_0. Vom presupune că $g(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_0$, $x \in I$. Dacă

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

funcţia $\frac{f(x)}{g(x)}$ poate să aibă sau poate să nu aibă limită în punctul x_0.

În orice caz, deoarece $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = 0$ şi $|g(x)| > 0$ pentru $x \neq x_0$, $x \in I$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{|g(x)|} = +\infty$$

şi deci

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty.$$

Aşadar, sînt posibile trei situaţii: sau $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, sau $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$ sau $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ nu există, dar $\frac{f(x)}{g(x)}$ este nemărginită în orice vecinătate a lui x_0.

Vom cerceta în continuare cazul în care ambele funcţii au limita 0 în punctul x_0.

Teorema următoare este cunoscută sub numele de „regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$".

Teorema 1. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I, f şi g două funcţii definite pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0. Dacă:

1) $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ şi $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$;

2) **f şi g sînt derivabile pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0;**

3) **$g'(x)\neq 0$ pentru orice $x\neq x_0$ din I;**

4) **există $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (finită sau infinită).**

Atunci:

a) **$g(x)\neq 0$ pentru orice $x\neq x_0$ din I;**

b) **funcţia $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstraţie. Vom considera mai întîi cazul cînd x_0 este *finit*. Deoarece g' nu se anulează nici la stînga lui x_0, nici la dreapta lui x_0, rezultă că g' păstrează un semn constant atît la stînga lui x_0, cît şi la dreapta lui x_0, deci funcţia g este *strict monotonă* atît la stînga lui x_0, cît şi la dreapta lui x_0. Rezultă atunci că $g(x)\neq\lim_{x\to x_0} g(x)$ adică $g(x)\neq 0$ pentru orice $x\neq x_0$ din I.

Să definim acum funcţiile $\bar f$ şi $\bar g$ pe mulţimea $I\cup\{x_0\}$ astfel:

$$\bar f(x)=\begin{cases} f(x) & \text{dacă } x\neq x_0\\ 0 & \text{dacă } x=x_0\end{cases};\quad \bar g(x)=\begin{cases} g(x) & \text{dacă } x\neq x_0\\ 0 & \text{dacă } x=x_0\end{cases}.$$

Avem: $\lim_{x\to x_0}\bar f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=0=\bar f(x_0)$;

$$\lim_{x\to x_0}\bar g(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0=\bar g(x_0)$$

deci funcţiile $\bar f$ şi $\bar g$ sînt *continue* în punctul x_0 (dacă f şi g nu sînt definite în x_0, atunci $\bar f$ şi $\bar g$ sînt prelungirile prin continuitate în punctul x_0 ale funcţiilor f şi g).

În orice punct $x\neq x_0$ din I, funcţiile $\bar f$ şi $\bar g$ sînt derivabile (fiind egale, în vecinătatea lui x, respectiv cu funcţiile derivabile f şi g) şi

$$\bar f'(x)=f'(x),\quad \bar g'(x)=g'(x)\neq 0.$$

Dacă alegem un şir oarecare $x_n \to x_0$, $x_n \in I$, $x_n \neq x_0$, pentru fiecare n putem aplica funcţiilor $\bar{f}$ şi $\bar{g}$ teorema lui Cauchy pe intervalul cu extremităţile în x_0 şi x_n: există un punct ξ_n cuprins între x_0 şi x_n, $\xi_n \neq x_0$, $\xi_n \neq x_n$, astfel ca

$$\frac{\bar{f}(x_n) - \bar{f}(x_0)}{\bar{g}(x_n) - \bar{g}(x_0)} = \frac{f'(\xi_n)}{\bar{g}'(\xi_n)}.$$

În plus, $\bar{g}(x_n) \neq \bar{g}(x_0)$ adică $\bar{g}(x_n) \neq 0$.

Dar $\bar{f}(x_n) = f(x_n)$, $\bar{f}(x_0) = 0$, $\bar{f}'(\xi_n) = f'(\xi_n)$;

$\bar{g}(x_n) = g(x_n)$, $\bar{g}(x_0) = 0$, $\bar{g}'(\xi_n) = g'(\xi_n)$

şi egalitatea precedentă se scrie

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

În plus $g(x_n) \neq 0$.

Să observăm că $|\xi_n - x_0| < |x_n - x_0|$ şi $|x_n - x_0| \to 0$, deci $\xi_n \to x_0$, iar $\xi_n \neq x_0$.

Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ şi $\xi_n \to x_0$, $\xi_n \neq x_0$, avem $\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to A$ şi deci $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to A$. Şirul (x_n), fiind ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

şi teorema este demonstrată în cazul cînd x_0 este finit.

Să trecem acum la cazul cînd x_0 este *infinit*. Pentru a face o alegere, să presupunem că $x_0 = +\infty$ (cazul cînd $x_0 = -\infty$ se tratează la fel).

Putem presupune că intervalul I este de forma $I = (a, +\infty)$ cu $a > 0$, considerînd, în caz contrar, restricţiile funcţiilor f şi g la un asemenea interval, ceea ce nu modifică existenţa limitei funcţiei $\frac{f}{g}$ în punctul $+\infty$.

Să considerăm atunci funcţiile F şi G definite pe intervalul $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ astfel:

$$F(y) = f\left(\frac{1}{y}\right), \quad G(y) = g\left(\frac{1}{y}\right), \quad 0 < y < \frac{1}{a}.$$

Să observăm că F şi G se obţin compunînd respectiv funcţiile f şi g cu funcţia $u(y) = \frac{1}{y}$, definită pentru $y \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ cu valori în $(a, +\infty)$.

Funcţiile F şi G verifică toate ipotezele teoremei pentru punctul $x_0 = 0$.

1) $\lim\limits_{y \to 0} F(y) = 0$ şi $\lim\limits_{y \to 0} G(y) = 0$.

Într-adevăr, fie $y_n \to 0$, $0 < y_n < \frac{1}{a}$. Dacă notăm $x_n = \frac{1}{y_n}$, avem $x_n \to +\infty$, deci $f(x_n) \to 0$ şi $g(x_n) \to 0$. Dar $f(x_n) = f\left(\frac{1}{y_n}\right)$ şi $g(x_n) = g\left(\frac{1}{y_n}\right)$. Rezultă că

$$F(y_n) = f\left(\frac{1}{y_n}\right) \to 0 \text{ şi } G(y_n) = g\left(\frac{1}{y_n}\right) \to 0.$$

Deoarece şirul $y_n \to 0$, $y_n > 0$ a fost ales arbitrar, deducem

$$\lim_{y\to 0} F(y) = 0 \text{ şi } \lim_{y\to 0} G(y) = 0.$$

2) Funcţiile F şi G sînt derivabile pe $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, deoarece funcţia $u(y) = \frac{1}{y}$ este derivabilă pe $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, iar f şi g sînt derivabile pe $(a, +\infty)$. Avem

$$F'(y) = -\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right);$$

$$G'(y) = -\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right).$$

3) $G'(y) \neq 0$ pentru orice $y \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$, deoarece $\frac{1}{y^2} \neq 0$ şi $g'\left(\frac{1}{y}\right) \neq 0$.

4) $\lim_{y\to 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Într-adevăr

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} \text{ pentru } y \in \left(0, \frac{1}{a}\right).$$

Fie $y_n \to 0$, $0 < y_n < \frac{1}{a}$, şi să notăm $x_n = \frac{1}{y_n}$; atunci $x_n \to +\infty$, deci

$$\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} \to A, \text{ sau } \frac{f'\left(\frac{1}{y_n}\right)}{g'\left(\frac{1}{y_n}\right)} \to A$$

şi deci

$$\frac{F'(y_n)}{G'(y_n)} \to A.$$

Cum şirul $y_n \to 0$, $y_n > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{y\to 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = A.$$

Putem deci aplica teorema demonstrată mai sus, funcţiilor F şi G, în punctul 0. Deducem că $G(y) \neq 0$ pentru orice $y \in \left(0, \frac{1}{0}\right)$ şi

$$\lim_{y\to 0} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = A.$$

Rezultă atunci că $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, +\infty)$. Să arătăm că $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Fie un şir oarecare $x_n \to +\infty$, $x_n > a$; notînd $y_n = \frac{1}{x_n}$ avem $y_n \to 0$, $y_n > 0$ şi deci

$$\frac{F(y_n)}{G(y_n)} \to A.$$

Dar

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f\left(\frac{1}{y_n}\right)}{g\left(\frac{1}{y_n}\right)} = \frac{F(y_n)}{G(y_n)}$$

şi deci

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to A.$$

Deoarece şirul $x_n \to +\infty$ a fost ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

şi teorema este complet demonstrată.

O b s e r v a ţ i i. 1° Condiţia ca $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ dintr-o anumită vecinătate a lui x_0 este esenţială. Dacă celelalte trei condiţii sînt verificate dar g' se anulează în puncte oricît de apropiate de x_0, este posibil ca funcţia $\frac{f}{g}$ să nu aibă limita în x_0.

Exemplu. Fie funcţiile

$f(x) = e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x)$, $g(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$ definite pe R.
1) Avem $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$;
2) f şi g sînt derivabile pe R şi
$f'(x) = -5 \sin x \cdot e^{-2x}$; $g'(x) = -2 \sin x \cdot e^{-x}$;
3) $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2} e^{-x} = 0$.
Totuşi funcţia

$$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{-x} \frac{1 + 2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = e^{-x}\left(1 + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} x}\right)$$

nu are limită în punctul $+\infty$.

Regula lui l'Hospital nu este aplicabilă în acest caz, deoarece derivata g' se anulează într-un şir de puncte care tind către $+\infty$, şi anume în punctele $k\pi$, k natural.

2° Reciproca regulii lui l'Hospital nu este, în general, adevărată.

Dacă $\frac{f}{g}$ are limită în x_0, nu rezultă că şi $\frac{f'}{g'}$ are limită în x_0; altfel spus, dacă $\frac{f'}{g'}$ nu are limită în x_0, nu rezultă că $\frac{f}{g}$ nu are limită în x_0.

Exemplu. Fie funcţiile f şi g definite pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ astfel:

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x};$$
$$g(x) = \sin x.$$

Avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x \sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Funcţiile f şi g sînt derivabile pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ şi $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, $g'(x) = \cos x$, iar derivata g' nu se anulează pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$. Totuşi funcţia $\frac{f'}{g'}$ nu are limită în punctul 0:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Avem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x \sin\frac{1}{x}}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$, dar $\cos\frac{1}{x}$ nu are limita în 0, şi nici raportul $\frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$, deci nici funcţia $\frac{f'}{g'}$.

3° Aplicînd regula lui l'Hospital funcţiei $\frac{\sin x}{x}$ în punctul 0, obţinem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Aceasta nu constituie o demonstraţie a faptului că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, ci doar o verificare, deoarece derivata funcţiei $\sin x$, care s-a folosit mai sus, s-a calculat ea însăşi cu ajutorul acestei limite.

În cazul cînd şi derivatele f' şi g' au limita 0 în punctul x_0, limita $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se poate calcula — dacă este posibil — aplicînd încă o dată regula lui l'Hospital funcţiilor f' şi g' şi procedeul se poate itera.

Exemplu. Aplicînd regula lui l'Hospital de trei ori, obţinem

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}\cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}\cos^2 x + e^{\sin x}\sin x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}\cos^3 x + 2e^{\sin x}\sin x\cos x + e^{\sin x}\cos x\sin x + e^{\sin x}\cos x}{\cos x} = 1.$$

În regula lui l'Hospital s-a folosit existența derivatelor într-o vecinătate a lui x_0, dar nu neapărat în x_0.

Teorema următoare dă o regulă de calcul care necesită existența derivatelor numai în punctul x_0, nu și în celelalte puncte vecine cu x_0.

Teorema 2 (Cauchy). Fie f și g două funcții definite pe un interval I și un punct $x_0 \in I$. Dacă:

1) $f(x_0) = 0$ și $g(x_0) = 0$;
2) **f și g sînt derivabile în punctul x_0;**
3) $g'(x_0) \neq 0$,

atunci:

a) **există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $g(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_0$ din V și**

b) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Să observăm mai întîi că, deoarece $g'(x_0) \neq 0$ și

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \neq x_0$, din V să avem,

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \neq 0,$$

adică $g(x) \neq g(x_0)$, sau (deoarece $g(x_0) = 0$), $g(x) \neq 0$.

Pentru $x \neq x_0$ din V avem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

(deoarece $f(x_0) = 0$ și $g(x_0) = 0$). Atunci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Observații. 1° Regula lui l'Hospital și teorema lui Cauchy nu au același cîmp de aplicabilitate. În unele cazuri, una din funcțiile f și g este derivabilă numai în x_0, deci în aceste cazuri nu se poate aplica regula lui l'Hospital, ci numai teorema lui Cauchy.

Exemplu. Fie funcțiile f și g definite pe R astfel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dacă } x \text{ este rațional,} \\ 0 \text{ dacă } x \text{ este irațional;} \end{cases}$$

$$g(x) = \sin x.$$

Avem $f(0) = 0$ și $g(0) = 0$.

Funcţia f este derivabilă *numai* în punctul 0 şi $f'(0) = 0$. Funcţia g este derivabilă pe R şi $g'(x) = \cos x$, iar $g'(0) = 1$. Aplicînd teorema lui Cauchy, obţinem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Regula lui l'Hospital nu este aplicabilă aici.

2° Dacă funcţiile f şi g sînt derivabile pe întreg intervalul I şi în x_0, este posibil ca teorema lui Cauchy să se poată aplica, dar regula lui l'Hospital să nu se poată aplica.

Exemplu. Fie funcţiile f şi g definite pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0 & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$$

$$g(x) = \sin x.$$

Avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$.

Funcţiile f şi g sînt derivabile pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0 & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$$

$$g'(x) = \cos x, \quad g'(0) = 1,$$

iar $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aplicînd teorema lui Cauchy, obţinem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Totuşi, regula lui l'Hospital nu se poate aplica deoarece funcţia $\frac{f'}{g'}$ nu are limită în punctul 0.

2. Cazul $\frac{\infty}{\infty}$

Pentru a demonstra regula lui l'Hospital în cazul $\frac{\infty}{\infty}$, avem nevoie de

Lema lui Stolz. Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri. Dacă şirul (b_n) este strict monoton şi nemărginit, şi dacă $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to A$ (finit sau infinit), atunci $\frac{a_n}{b_n} \to A$.

Să presupunem că şirul (b_n) este strict crescător, deci (fiind nemărginit) $b_n \to +\infty$.

Vom considera întîi cazul cînd A este *finit*. Fie $V = (\alpha, \beta)$ o vecinătate oarecare a lui A, $\alpha < A < \beta$.

Să alegem o vecinătate $V' = (\alpha', \beta')$ a lui A, astfel ca $\alpha < \alpha' < A < \beta' < \beta$.

Deoarece $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to A$, şi V' este o vecinătate a lui A, există un număr N', astfel încît pentru orice $n \geqslant N'$ să avem:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \in V \text{ adică}$$

$$\alpha' < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < \beta', \quad n \geqslant N'.$$

Înmulţind toţi termenii cu $b_{n+1} - b_n > 0$ (deoarece şirul (b_n) este strict crescător), obţinem

$$\alpha'(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < \beta'(b_{n+1} - b_n), \quad n \geqslant N'.$$

Scriind aceste inegalităţi pentru N', $N' + 1$, $N' + 2$,..., $n - 1$, în loc de n, adunînd membru cu membru şi făcînd reducerile necesare, obţinem

$$\alpha'(b_n - b_{N'}) < a_n - a_{N'} < \beta'(b_n - b_{N'}),$$

oricare ar fi $n > N'$.

Deoarece $b_n \to +\infty$, putem alege de la început N' astfel ca $b_{N'} > 0$ şi deci şi $b_n > 0$, oricare ar fi $n > N'$. Împărţind atunci cu $b_n > 0$, obţinem:

$$\alpha'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) < \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{N'}}{b_n} < \beta'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right),$$

de unde

$$\alpha'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{a_{N'}}{b_n} + \beta'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right).$$

Dar $\frac{b_{N'}}{b_n} \to 0$, şi $\frac{a_{N'}}{b_n} \to 0$, deci

$$\alpha'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} \to \alpha' \text{ şi } \beta'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} \to \beta'.$$

Deoarece $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, există un număr $N > N'$ astfel încît, pentru orice $n \geqslant N$, să avem

$$\alpha < \alpha'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} \text{ şi } \beta'\left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} < \beta,$$

deci pentru $n \geqslant N$,

$$\alpha < \frac{a_n}{b_n} < \beta$$

sau $\frac{a_n}{b_n} \in V = (\alpha, \beta)$. Deoarece vecinătatea V a lui A a fost aleasă arbitrar, rezultă că $\frac{a_n}{b_n} \to A$.

Să considerăm acum cazul cînd $A = +\infty$. În acest caz, luăm o vecinătate oarecare $V = (\alpha, +\infty)$ a lui $+\infty$. Alegem apoi vecinătatea $V' = (\alpha', +\infty)$ a lui $+\infty$, astfel ca $\alpha < \alpha'$.

Deoarece:

$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to +\infty$, există un număr N' astfel ca pentru orice $n \geqslant N'$ să avem

$$\alpha' < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{+1} - b_n}.$$

Raţionamentul continuă ca mai sus, folosind numai inegalităţile din stînga şi găsim un număr $N > N'$ astfel ca pentru orice $n \geqslant N$ să avem

$$\alpha < \frac{a_n}{b_n},$$

adică $\frac{a_n}{b_n} \in V$, de unde deducem că $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$.

În cazul cînd $A = -\infty$, raţionamentul se face la fel, folosind numai inegalităţile din dreapta şi deducem că $\frac{a_n}{b_n} \to -\infty$.

Dacă şirul (b_n) este strict descrescător, şirul $(c_n) = (-b_n)$ este strict crescător, şi

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{c_{n+1} - c_n} = -\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to -A,$$

deci, în baza raţionamentului precedent, rezultă că

$$\frac{a_n}{c_n} \to -A,$$

de unde

$$\frac{a_n}{b_n} = -\frac{a_n}{c_n} \to A.$$

Putem acum trece la demonstrarea regulii lui l'Hospital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Vom demonstra următoarea teoremă mai general:

Teorema 3. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I, f şi g două funcţii definite pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0. Dacă:

1) $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$;

2) **f şi g sînt derivabile pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0;**

3) $g'(x) \neq 0$ **pentru orice** $x \neq x_0$ **din** I;

4) **există** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ **(finită sau infinită).**

Atunci: funcţia $\frac{f}{g}$ **are limită în** x_0 **şi**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vom considera întîi cazul cînd x_0 nu este extremitatea stîngă a intervalului I şi vom arăta că funcţia $\frac{f}{g}$ are în x_0 *limită la stînga* egală cu A. Pentru aceasta este suficient să folosim numai şiruri strict crescătoare $x_n \nearrow x_0$ (cu $x_n < x_0$).

Deoarece $g'(x) \neq 0$ pe intervalul $I \cap (-\infty, x_0)$, conform proprietăţii lui Darboux, derivata g' păstrează acelaşi semn pe acest interval. Pentru a face o alegere, să presupunem că $g'(x) > 0$ pentru orice $x < x_0$ din I.

Rezultă că funcţia g este *strict crescătoare* la stînga lui x_0.

Fie acum un şir strict crescător $x_n \nearrow x_0$, $(x_n \in I,\ x_n < x_0)$. Atunci şirul $(g(x_n))$ este de asemenea *strict crescător*. Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x_n)| \to +\infty$, rezultă că $|g(x_n)| \to +\infty$, deci şirul $(g(x_n))$ este *nemărginit*.

Să aplicăm teorema lui Cauchy funcţiilor f şi g pe fiecare interval $[x_n, x_{n+1})$: găsim un punct $\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$, deci $x_n < \xi_n < x_0$ astfel ca

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Dar, deoarece $x_n \to x_0$, rezultă că $\xi_n \to x_0$ şi $\xi_n < x_0$ şi din

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ deducem că } \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to A \text{ şi deci}$$

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} \to A.$$

Dar şirul $(g(x_n))$ este strict monoton şi nemărginit. Putem deci aplica lema lui Stolz, şi deducem că

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to A.$$

Cum şirul strict crescător $x_n \to x_0$ a fost ales arbitrar, aceasta înseamnă că

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Acelaşi rezultat se obţine şi dacă se consideră că $g'(x) < 0$ pentru orice $x < x_0$ din I.

Dacă x_0 nu este extremitatea dreaptă a intervalului I, se raţionează în mod asemănător şi se deduce că

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Dacă x_0 este o extremitate a intervalului I, limita în x_0 este egală cu acea limită laterală care are sens în acest punct, şi prin aceasta din cele demonstrate mai sus rezultă că

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Dacă x_0 este punct interior al intervalului I, din egalitatea limitelor laterale rezultă că funcţia $\frac{f}{g}$ are limită în x_0, egală cu A, şi teorema este complet demonstrată.

Exemplu. Avem $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ şi dacă $\alpha > 0$, $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$. Apoi

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \neq 0 \text{ pentru } x \neq 0 \text{ şi}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \text{ de unde, aplicînd regula lui l'Hospital obţinem:}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Acest rezultat a fost obţinut mai înainte pe altă cale.

O b s e r v a ţ i i . 1° Condiţia ca g' să nu se anuleze în nici un punct $x \neq x_0$ din I este şi aici esenţială.

2° Dacă $\frac{f'}{g'}$ nu are limită în punctul x_0, nu rezultă că nici $\frac{f}{g}$ nu are limită în acest punct.

3° Practic, regula lui l'Hospital se poate folosi cînd *ştim* să calculăm $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (în cazul cînd există).

Sînt cazuri în care limita raportului $\frac{f'}{g'}$ nu se calculează mai uşor decît limita raportului $\frac{f}{g}$, şi deci în acest caz nu este indicat a se folosi regula lui l'Hospital.

Exemple. 1) Fie $f(x) = e^x - e^{-x}$ şi $g(x) = e^x + e^{-x}$ definite pe R.
Avem $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ şi $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Apoi $f'(x) = e^x + e^{-x}$, $g'(x) = e^x - e^{-x} \neq 0$ pentru $x \neq 0$.

Avem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Dacă nu ştim de la început să calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, atunci nu ştim să calculăm nici $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ şi deci regula lui l'Hospital nu poate fi utilizată (chiar dacă ştim că limita există).

Limita funcţiei $\frac{f}{g}$ se poate calcula însă direct:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

2) Fie funcţiile $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ şi $g(x) = x$ definite pe R. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Apoi

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad g'(x) = 1.$$

Avem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Aplicarea regulii lui l'Hospital în acest caz nu ne ajută, dacă nu ştim de la început să calculăm limita funcţiei $\frac{f}{g}$.

Această limită se poate calcula însă direct:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = \sqrt{0+1} = 1.$$

Regula lui l'Hospital se poate aplica de mai multe ori, fie pentru cazul $\frac{0}{0}$, fie pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$:

Corolarul 1. **Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I, f şi g două funcţii definite pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0. Dacă**

1) funcţiile f şi g sînt derivabile de n ori pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0;

2) $g^{(n)}(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(i)}(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g^{(i)}(x) = 0$, sau $\lim\limits_{x\to x_0} |g^{(i)}(x)| = +\infty$, $i = 0,1,2,\ldots, n-1$;

4) există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A$ (finită sau infinită).

Atunci:

a) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0, \ldots, g^{(n-1)}(x) \neq 0$ **pentru orice** $x \neq x_0$ **din** I;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Pentru $n=1$ corolarul este deja demonstrat (în teorema 1 și teorema 3). Să-l presupunem adevărat pentru $n-1$, și să arătăm atunci că este adevărat și pentru n.

Aplicînd teorema 1 sau teorema 3 funcțiilor $f^{(n-1)}$ și $g^{(n-1)}$, deducem că $g^{(n-1)}(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I și

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A.$$

Deoarece am presupus corolarul adevărat pentru $n-1$, rezultă că:

$g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0, \ldots, g^{(n-1)}(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I,

de unde rezultă punctul a) al corolarului, și că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$$

de unde rezultă și punctul b) al corolarului.

Exemplu. S-a arătat mai înainte că dacă $\alpha > 0$, atunci

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty.$$

Vom regăsi acest rezultat aplicînd regula lui l'Hospital de n ori, unde n este un număr natural astfel ca

$$n - 1 < \alpha \leqslant n.$$

Atunci $\alpha - n \leqslant 0$ sau $n - \alpha \geqslant 0$, deci $\frac{1}{x^{\alpha-n}} = x^{n-\alpha}$ și $\lim\limits_{x \to \infty} x^{n-\alpha} > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^x}{x^{\alpha-n}} = \lim_{x \to \infty} x^{n-\alpha} e^x = +\infty.$$

Putem deci aplica de n ori regula lui l'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}} = +\infty.$$

Corolarul 2. Dacă

1) **funcțiile** f **și** g **sînt derivabile de** n **ori în punctul** $x_0 \in I$;

2) $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$,

3) $g^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Atunci:

a) **există o vecinătate** V **a lui** x_0, **astfel ca pentru orice** $x \neq x_0$ **din** V **să avem** $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0, \ldots, g^{(n-1)}(x) \neq 0$;

b) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Aplicînd teorema lui Cauchy funcţiilor ($f^{(n-1)}$ şi $g^{(n-1)}$ deducem că: **există o vecinătate** V a lui x_0 astfel ca

$$g^{(n-1)}(x) \neq 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } V$$

şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Deoarece funcţiile f, g, f', g',... $f^{(n-2)}$, $g^{(n-2)}$ sînt continue în punctul x_0, avem

$$\lim_{x \to x_0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-2;$$

$$\lim_{x \to x_0} g^{(k)}(x) = g^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-2.$$

Se poate aplica deci corolarul regulii lui l'Hospital pentru $n - 1$ şi se obţine concluzia corolarului de faţă.

Exemplu. Fie funcţia $f : I \to R$, derivabilă de n ori în punctul $a \in I$. Dacă R_n este restul de ordinul n al formulei lui Taylor corespunzătoare acestei funcţii, în punctul a, s-a demonstrat că:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Această egalitate o putem demonstra acum folosind corolarul 2. Avem:

$$R_n(a) = 0, \; R_n'(a) = 0, \; \ldots, \; R_n^{(n)}(a) = 0.$$

Dacă notăm $g(x) = (x - a)^n$, avem

$$g(a) = 0, \; g'(a) = 0, \ldots, \; g^{(n-1)}(a) = 0, \; g^{(n)}(a) = n! \neq 0.$$

Aplicînd corolarul deducem că:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{0}{n!} = 0.$$

3. Alte cazuri

Pentru celelalte cazuri nu avem reguli asemănătoare cu regula lui l'Hospital, însă aceste cazuri se pot reduce la unul din cazurile $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, şi astfel se poate aplica regula lui l'Hospital. Vom lua pe rînd celelalte cazuri care se ivesc, la adunare ($\infty - \infty$), la înmulţire ($0 \cdot \infty$) şi la puteri (0^0, 1^∞ şi ∞^0).

1) *Cazul* $\infty - \infty$. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al intervalului I, f şi g două funcţii *definite* şi derivabile pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0.

Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ şi $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$,

atunci pentru $f - g$ sîntem în cazul $\infty - \infty$.

Putem presupune că $f(x) \neq 0$ şi $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I, restrîngînd, la nevoie, domeniul de definiţie al funcţiilor f şi g.

Pentru orice $x \neq x_0$ din I avem

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{f(x) - g(x)}{f(x)\,g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\,g(x)}} = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\,g(x)}}$$

şi

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right) = 0, \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)\,g(x)} = 0.$$

Am redus astfel cazul $\infty - \infty$ la cazul $\frac{0}{0}$. Dacă în acest ultim caz se poate aplica regula lui l'Hospital, atunci putem calcula limita funcţiei

$$\frac{\dfrac{1}{g} - \dfrac{1}{f}}{\dfrac{1}{fg}} \text{ şi apoi } \lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\,g(x)}}.$$

O b s e r v a ţ i e. 1° Pentru a putea aplica regula lui l'Hospital ultimului raport, trebuie ca derivata funcţiei de la numitor să nu se anuleze în nici un punct $x \neq x_0$ din I. Dar

$$\left(\frac{1}{f(x)\,g(x)}\right)' = -\frac{f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)}{[f(x)\,g(x)]^2},$$

deci trebuie ca $f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I. Deoarece $f(x) > 0$ şi $g(x) > 0$, o condiţie suficientă pentru ca $f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \neq 0$, este ca f' şi g' să nu se anuleze în aceleaşi puncte, adică f şi g să nu aibă în comun nici un punct de extrem în vecinătatea lui x_0.

2) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=1$, atunci putem reduce cazul $\infty-\infty$ la cazul $\frac{0}{0}$ şi în modul următor:

$$f-g=f\left(1-\frac{g}{f}\right)=\frac{1-\frac{g}{f}}{\frac{1}{f}}$$

sau:

$$f-g=\left(\frac{f}{g}-1\right)g=\frac{\frac{f}{g}-1}{\frac{1}{g}}.$$

Pentru a putea aplica regula lui l'Hospital în acest caz, trebuie ca $f'(x)\neq 0$ pentru orice $x\neq x_0$ din I, sau $g'(x)\neq 0$ pentru orice $x\neq x_0$ din I.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}\neq 1$, atunci

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]=\pm\infty$$

după cum $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}$ este <1 sau >1.

Exemple. 1) Pentru $x>0$ avem

$$x-\ln x=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right),$$

deci

$$\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)=\lim_{x\to\infty}x\left(1-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\right)=\infty\,(1-0)=\infty.$$

2) Pentru $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $x\neq 0$, avem

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x-x}{x\sin x}\text{ şi }\lim_{x\to 0}(\sin x-x)=0,\ \lim_{x\to 0}x\sin x=0,$$

deci

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

2) *Cazul* $0\cdot\infty$. Fie x_0 un punct de acumulare al intervalului I, f şi g două funcţii definite şi derivabile pe I, cu excepţia, eventual, a lui x_0.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$

atunci, pentru funcţia $f|g|$ sîntem în cazul $0\cdot\infty$.

Putem presupune că $g(x) \neq 0$ (restrîngînd, la nevoie, domeniul de definiţie). Atunci

$$f(x)\ g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

şi $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$. Am redus astfel cazul $0 \cdot \infty$ la cazul $\frac{0}{0}$. Dacă în acest caz se poate aplica regula lui l'Hospital, atunci putem calcula limita funcţiei $\frac{f}{\frac{1}{g}}$ şi apoi

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\ g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Pentru a putea aplica regula lui l'Hospital în acest caz, trebuie ca $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I.

O b s e r v a ţ i e. Dacă $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I, atunci $f(x) \neq f(x_0)$, deci $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I.

Putem deci scrie

$$f(x)\ g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

şi am redus astfel cazul $0 \cdot \infty$ la cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Regula lui l'Hospital este aplicabilă în acest caz, deoarece $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{f'}{f^2} \neq 0$.

Exemplu. Dacă $\alpha > 0$, atunci $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$, $(x > 0)$.

Avem $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$ şi $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

Pentru $x > 0$ putem scrie

$$x^\alpha \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}}$$

deci

$$\lim_{x \to 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

3) *Cazurile* 0^0, 1^∞, ∞^0. Fie x_0 un punct de acumulare al intervalului I, f şi g două funcţii definite şi derivabile pe I, cu excepţia, eventual, a punctului x_0. Presupunem că

$$f(x) > 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I.$$

Pentru orice $x \neq x_0$ din I avem

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ln f(x) = A$ (finit sau infinit) atunci

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^A.$$

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, sîntem în cazul 0^0, şi deoarece $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = -\infty$, acest caz se reduce la cazul $0 \cdot \infty$.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, sîntem în cazul 1^∞ şi deoarece $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = 0$, acest caz se reduce de asemenea la cazul $0 \cdot \infty$.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to x^0} g(x) = 0$, sîntem în cazul ∞^0 şi deoarece $\lim\limits_{x\to x^0} \ln f(x) = +\infty$, şi acest caz se reduce la cazul $0\cdot\infty$.

Pentru a calcula limita funcţiei $g(x) \ln f(x)$, scriem

$$g(x) \ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ dacă } g(x) \neq 0 \text{ pentru } x \neq x_0$$

sau

$$g(x) \ln f(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}} \text{ dacă } f(x) \neq 1 \text{ pentru } x \neq x_0$$

şi astfel acest caz se reduce la cazul $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Observaţii. 1° Dacă notăm

$$h = f^g,$$

aplicînd logaritmii, obţinem

$$\ln h(x) = g(x) \ln f(x).$$

Trebuie deci să calculăm $\lim\limits_{x\to x_0} \ln h(x) = A$ şi apoi $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = e^A$.

Pe de altă parte, putem scrie

$$f^g = [1 + (f-1)]^g = \{[1 + (f-1)]^{\frac{1}{f-1}}\}^{g(f-1)},$$

dacă $f(x) \neq 1$ pentru $x \neq x_0$. Deci în cazul 1^∞, adică în cazul cînd $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, avem

$$\lim_{x\to x_0} [1 + (f-1)]^{\frac{1}{f-1}} = e.$$

Aşadar, dacă $\lim_{x\to x_0} g(x)\,[f(x)-1]=A$, atunci

$$\lim_{x\to x_0} f^g = e^A.$$

Totul revine deci, în cazul 1^∞, la cercetarea limitei

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\,[f(x)-1].$$

Observăm că sîntem în cazul $0\cdot\infty$ pe care-l putem reduce la unul din cazurile $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, scriind

$$g(x)\,[f(x)-1]=\frac{f(x)-1}{\frac{1}{g(x)}}$$

sau:

$$g(x)\,[(f(x)-1]=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)-1}}.$$

Exemple.

1) $h(x)=x^x$ — definită pentru $x>0$.

Avem

$$\ln h(x)=x\ln x \text{ şi } \lim_{x\to 0} x\ln x=0$$

deci

$$\lim_{x\to 0} x^x=e^0=1$$

2) $h(x)=\cos x^{\frac{1}{x^2}}$ definită pentru $x\neq 0$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Avem

$$\ln h(x)=\frac{1}{x^2}\ln\cos x$$

şi $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg} x}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=-\frac{1}{2}$,

deci

$$\lim \cos x^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3) $h(x)=\left(\frac{1}{1-\cos x}\right)^{\sin x}$ definită pentru $x\neq 0$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Avem

$$\ln h(x)=\sin x\ln\frac{1}{1-\cos x}=-\sin x\ln(1-\cos x)$$

şi

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln(1-\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{1-\cos x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = -\lim_{x\to 0} \frac{3\sin^2 x \cos x}{\sin x} \cdot 1 = -\lim_{x\to 0} 3 \sin x \cos x = 0,$$

deci $\lim_{x\to 0} \ln h(x) = 0$ şi deci $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x}\right)^{\sin x} = e^0 = 1$.

§ 7. Aplicaţiile derivatelor la studiul funcţiilor

În acest paragraf vom arăta că derivatele de ordinul întîi şi de ordinul doi ne dau indicaţii importante asupra comportării funcţiilor.

1. Derivata întîi. Intervale de monotonie. Puncte de extrem

Fie f o funcţie definită pe o mulţime E, care este o reuniune (finită şi infinită) de *intervale.*

Vom presupune că funcţia f este derivabilă pe mulţimea E, cu excepţia unei mulţimi finite sau numărabile de puncte din E.

Fie E' submulţimea lui E pe care f este derivabilă.

Mulţimea E' este de asemenea o reuniune finită sau infinită de intervale.

Reamintim următoarele rezultate:

Dacă derivata f' este strict pozitivă pe un interval $I \subset E'$, atunci funcţia f este strict crescătoare pe I.

Dacă derivata f' este strict negativă pe un interval $I \subset E'$, atunci funcţia f este strict descrescătoare pe I.

Dacă derivata f' nu se anulează pe un interval $I \subset E'$, atunci f' păstrează acelaşi semn pe întreg intervalul I.

Din aceste proprietăţi deducem că funcţia f este strict monotonă pe aceleaşi intervale pe care derivata f' nu se anulează.

Rezultă astfel calea de urmat pentru a determina intervalele pe care funcţia f este strict monotonă (intervale de monotonie ale funcţiei):

1) *Se determină mulţimea $E' \subset E$ pe care funcţia f este derivabilă, şi se calculează derivata f' pe mulţimea E'.*

2) *Se determină punctele din E', în care derivata f' se anulează (rădăcinile derivatei), adică se rezolvă ecuaţia*

$$f'(x) = 0, \qquad x \in E'.$$

3) *Se descompune mulțimea E în intervale disjuncte astfel încît pe nici un asemenea interval derivata f' nu se mai anulează.* Aceste intervale, pe care derivata nu se anulează, se obțin din intervalele mulțimii E pe care este definită funcția, împărțindu-le mai departe prin punctele în care funcția nu este derivabilă și prin punctele în care derivata se anulează (presupunînd că derivata nu se anulează pe un interval întreg).

4) Pe fiecare interval I pe care derivata f' nu se anulează, ea păstrează același semn. *Se determină semnul derivatei pe I*, calculînd valoarea derivatei într-un singur punct din I.

5) În funcție de semnul derivatei f' pe un interval I, se determină dacă funcția f este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe I: dacă f' are semnul $+$, f este strict crescătoare, iar dacă f' are semnul $-$, f este strict descrescătoare.

Rezultă apoi și punctele de extrem ale funcției:

a) Fie x_0 un punct *interior* al mulțimii E, în care funcția f este continuă, și fie I intervalul din E care-l conține pe x_0 și astfel că derivata f' nu se mai anulează pe I, cu excepția, eventual, a lui x_0 (dacă f este derivabilă în x_0).

Dacă pe I funcția f este *strict crescătoare la stînga lui x_0* și *strict descrescătoare la dreapta lui x_0*, atunci x_0 este un *punct de maxim* al funcției.

Într-adevăr, deoarece f este strict crescătoare la stînga lui x_0, funcția are limită la stînga în x_0 și

$$f(x) < f(x_0 - 0) \qquad \text{dacă } x < x_0, \quad x \in I.$$

Deoarece f este strict descrescătoare la dreapta lui x_0, funcția are limită la dreapta în x_0 și

$$f(x_0 + 0) > f(x) \qquad \text{dacă } x_0 < x, \quad x \in I.$$

Deoarece f este continuă în x_0 avem $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$, deci

$$f(x) < f(x_0), \text{ oricare ar fi } x \neq x_0 \text{ din } I,$$

adică x_0 este un punct de maxim al funcției.

Se demonstrează la fel că:

Dacă pe I funcția f este *strict descrescătoare* la stînga lui x_0 și *strict crescătoare* la dreapta lui x_0, atunci x_0 este un *punct de minim* al funcției.

Din aceste observații rezultă următoarea regulă:

Dacă pe I, derivata f' are semnul $+$ la stînga lui x_0 și semnul $-$ la dreapta lui x_0, atunci x_0 este un punct de maxim al funcției f; dacă pe I, derivata f' are semnul $-$ la stînga lui x_0 și semnul $+$ la dreapta lui x_0, atunci x_0 este punct de minim al funcției f.

Dacă derivata f' are același semn de o parte și de alta a lui x_0, atunci x_0 nu este punct de extrem al funcției.

Dacă funcția f este derivabilă în punctul de extrem x_0, atunci, conform teoremei lui Fermat, avem în mod necesar $f'(x_0) = 0$.

b) Să presupunem că punctul $x_0 \in E$ este *extremitatea stîngă* a unui interval $I \subset E$, în interiorul căruia derivata nu se mai anulează, și că func-

ţia f este *continuă* în x_0. Să presupunem de asemenea că x_0 nu este extremitate dreaptă a nici unui interval din E. În aceste condiţii:

— dacă pe I (la dreapta lui x_0) derivata are semnul — atunci x_0 este un punct de maxim;

— dacă pe I (la dreapta lui x_0) derivata are semnul +, atunci x_0 este un punct de minim.

Într-adevăr, în primul caz, funcţia este strict descrescătoare la dreapta lui x_0, deci

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) > f(x) \qquad \text{pentru } x \in I,$$

adică x_0 este punct de maxim, iar în al doilea caz funcţia este strict crescătoare la dreapta lui x_0, deci

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) < f(x) \qquad \text{pentru } x \in I,$$

adică x_0 este punct de minim.

c) Să presupunem că punctul $x_0 \in E$ este extremitatea dreaptă a unui interval I (din care este formată mulţimea E) în interiorul căruia derivata nu se mai anulează, că funcţia f este *continuă* în x_0 şi că x_0 nu este extremitate stîngă a nici unui interval din E. În aceste condiţii:

— dacă pe I (la stînga lui x_0) derivata are semnul —, atunci x_0 este punct de minim;

— dacă pe I (la stînga lui x_0) derivata are semnul +, atunci x_0 este punct de maxim.

Demonstraţia este analogă cu cea a cazului precedent.

O b s e r v a ţ i e. În ultimele două cazuri, funcţia f poate fi derivabilă în x_0, fără ca derivata să se anuleze în x_0.

Rezultatele privitoare la intervalele de monotonie şi la punctele de extrem se trec într-un tablou cu trei linii: în prima linie se trec punctele care delimitează intervalele mulţimii E, punctele în care derivata nu există şi punctele în care derivata se anulează. În linia a doua se trece semnul derivatei f'. În linia a treia se trec extremele funcţiei, şi se indică prin săgeţi comportarea funcţiei (↗ dacă este strict crescătoare şi ↘ dacă este strict descrescătoare).

Exemple. 1) Fie funcţia $f(x) = e^x - x$ definită pe R.

Avem $f'(x) = e^x - 1$ pentru orice $x \in R$. Ecuaţia $e^x - 1 = 0$ are soluţia $x = 0$. Intervalele pe care derivata nu se anulează sînt $(-\infty, 0)$ şi $(0, +\infty)$; pe primul interval avem $f'(x) < 0$ deoarece $f'(-1) = e^{-1} - 1 < 0$; pe al doilea interval avem $f'(x) > 0$ deoarece $f'(1) = e^1 - 1 > 0$.

Punctul 0 este punct de minim al funcţiei şi $f(0) = e^0 = 1$. Tabloul variaţiei funcţiei este:

x		0	
f'	$-$	0	$+$
f	↘	m (1)	↗

Deoarece minimul funcţiei este 1, rezultă că $f(x) \geqslant 1$ pentru orice $x \in R$, adică $e^x - x \geqslant 1$ sau

$$e^x \geqslant x + 1, \quad x \in R.$$

Atunci, cu atît mai mult

$$e^x > x \text{ pentru orice } x \in R.$$

Acest rezultat a fost obținut anterior pe altă cale.

2) Fie funcția $f(x) = \ln x - x$ definită pe $(0, +\infty)$.

Avem $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ pentru orice $x > 0$. Ecuația $\frac{1}{x} - 1 = 0$ are soluția $x = 1$. Intervalele pe care derivata nu se anulează sînt $(0, 1)$ și $(1, +\infty)$. Avem $f'(x) > 0$ pentru $x \in (0, 1)$, deoarece $f'\frac{1}{2} = 1 > 0$, și $f'(x) < 0$ pentru $x > 1$ deoarece $f'(2) = \frac{1}{2} - 1 < 0$.

Punctul 1 este un punct de maxim al funcției și $f(1) = \ln 1 - 1 = -1$. Tabloul variației funcției este:

x		0		1	
f'		$+$	$+$	0	$-$ $-$
f		↗		M (-1)	↘

Deoarece maximul funcției este -1, rezultă că $f(x) \leqslant -1$ pentru orice $x > 0$, adică $\ln x - x \leqslant -1$, sau

$$\ln x \leqslant x - 1, \qquad x > 0.$$

Atunci cu atît mai mult

$$\ln x < x \text{ pentru orice } x > 0.$$

Acest rezultat a fost obținut anterior prin logaritmarea inegalității $e^x > x$, $(x > 0)$.

3) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ definită pe $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Avem

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

Ecuația $x^2 - 2x - 1 = 0$ are soluțiile $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ și $x_2 = 1 - \sqrt{2}$; în aceste puncte, derivata se anulează.

Avem $f(1 + \sqrt{2}) = 2(1 + \sqrt{2})$, $f(1 - \sqrt{2}) = 2(1 - \sqrt{2})$.

Tabloul variației funcției este:

x		$1 - \sqrt{2}$		1		$1 + \sqrt{2}$
f'	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0 $+$
f		M				m
	↗	$2(1 - \sqrt{2})$	↘		↘	$2(1 + \sqrt{2})$ ↗

2. Derivata a doua. Convexitate și concavitate. Puncte de inflexiune

Simpla cunoaștere a faptului că o funcție f este, de exemplu, strict crescătoare pe un interval I, nu este totdeauna suficientă pentru a ne da seama de forma graficului său.

De exemplu, funcția $f(x) = \sqrt{x}$ definită pe $[0, +\infty)$ este strict crescătoare, însă acest fapt nu este suficient pentru a decide dacă graficul său are forma indicată cu linie continuă sau cea indicată cu linie întreruptă în figura 99.

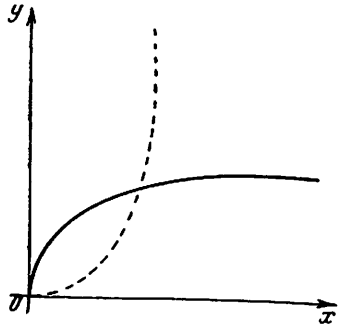


Fig. 99

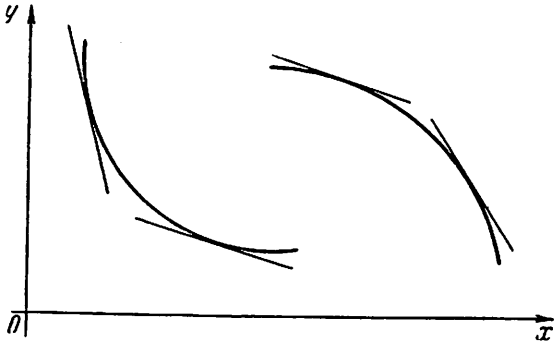


Fig. 100

O funcție derivabilă $f: I \to R$ poate fi strict crescătoare pe I în două moduri, după cum tangenta la grafic, în fiecare punct, se află sub grafic sau deasupra graficului (fig. 100).

În primul caz graficul este o curbă *convexă*, iar în al doilea caz, o curbă *concavă*.

De asemenea, funcția derivabilă f poate fi strict descrescătoare pe I în două moduri, după cum tangenta la grafic, în fiecare punct, se află sub grafic sau deasupra graficului (fig. 101).

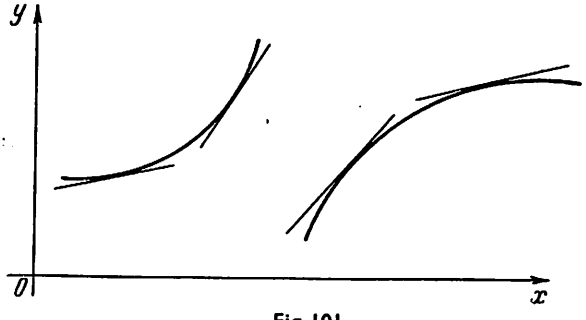


Fig 101

În primul caz, graficul este o curbă *convexă*, iar în al doilea caz, o curbă *concavă*.

Vom da acum o definiție precisă a convexității și concavității și vom arăta că derivata a doua (dacă există) ne dă indicații precise în această privință.

Fie f o funcție *derivabilă* pe un interval I și x_0 un punct din I. Tangenta la graficul funcției în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ are ecuația

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Funcția liniară

$$F(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

(definită pe R) are ca grafic tangenta M_0T (fig. 102).

Spunem că tangenta M_0T se află *sub grafic* dacă

$$F(x) \leqslant f(x) \qquad \text{pentru orice } x \in I$$

și că se află *strict sub grafic* dacă

$$F(x) < f(x) \qquad \text{pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I.$$

Spunem că tangenta se află *deasupra graficului* dacă

$$F(x) \geqslant f(x) \text{ pentru orice } x \in I$$

și că se află strict *deasupra graficului* dacă

$$F(x) > f(x) \qquad \text{pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I.$$

Definiție. Funcția f este convexă (respectiv strict convexă) pe intervalul I, dacă tangenta dusă în orice punct al graficului se află sub grafic (respectiv strict sub grafic).

Funcția f este concavă (respectiv strict concavă) pe intervalul I, dacă tangenta dusă în orice punct al graficului se află deasupra graficului (respectiv strict deasupra graficului).

Spunem că graficul funcției f este o *curbă convexă* (strict convexă) sau *concavă* (strict concavă) dacă funcția f are proprietatea respectivă.

Exemplu. O funcție liniară $f(x) = ax + b$ are ca grafic o dreaptă. Ea este în același timp convexă și concavă, deoarece tangenta într-un punct oarecare al graficului coincide cu graficul, deci se află în același timp sub grafic și deasupra graficului.

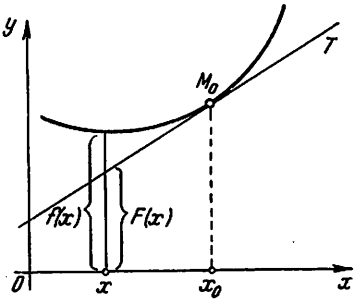


Fig. 102

Reciproc, dacă funcția f este și convexă și concavă pe I, atunci tangenta într-un punct oarecare al graficului coincide cu graficul, deci graficul este un segment de dreaptă și deci funcția este liniară.

Fie f o funcție *derivabilă de două ori* pe un interval I.

Dacă funcția f este convexă pe I, derivata a doua f'' este pozitivă pe I.

Dacă funcția f este concavă pe I, derivata a doua f'' este negativă pe I.

Într-adevăr, să presupunem că f este *convexă* pe I și să arătăm că derivata întîi f' este *crescătoare* pe I, de unde va rezulta că derivata sa f'', este *pozitivă* pe I.

Fie $x_1 < x_2$ două puncte oarecare din I.

Ducînd tangenta la grafic în punctul $M_1(x_1, f(x_1))$, avem:

$$F_1(x) \leqslant f(x) \text{ pentru orice } x \in I,$$

unde $F_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)\,(x - x_1)$.

În particular, $F_1(x_2) \leqslant f(x_2)$ adică

$$(*) \quad f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2).$$

Ducînd tangenta la grafic în punctul $M_2(x_2, f(x_2))$, avem de asemenea

$$F_2(x) \leqslant f(x) \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

unde $F_2(x) = f(x_2) + f'(x_2)\,(x - x_2)$.

În particular, $F_2(x_1) \leqslant f(x_1)$ adică

$$(**) \quad f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \leqslant f(x_1).$$

Adunînd membru cu membru inegalităţile (*) şi (**) obţinem:

$$f'(x_1)\,(x_2 - x_1) + f'(x_2)\,(x_1 - x_2) \leqslant 0$$

sau

$$[f'(x_1) - f'(x_2)]\,(x_2 - x_1) \leqslant 0$$

şi deoarece $x_2 - x_1 > 0$, rezultă $f'(x_1) - f'(x_2) \leqslant 0$ sau $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$ adică derivata f' este crescătoare pe I şi deci derivata a doua f'' este pozitivă pe I.

În cazul cînd f este concavă, demonstraţia se face la fel.

O b s e r v a ţ i e. Dacă f este *strict convexă* pe I nu rezultă că derivata a doua f'' este *strict pozitivă* pe I.

Este posibil ca funcţia f să fie strict convexă şi derivata a doua f'' să nu anuleze în unele puncte.

Exemplu. Funcţia $f(x) = x^4$ definită pe R este strict convexă pe R. Avem $f'(x) = 4x^3$ şi $f''(x) = 12\,x^2$, iar $f''(0) = 0$.

Reciproc, avem însă următoarea

P r o p o z i ţ i e. Fie f o funcţie derivabilă de două ori pe un interval I.

1) Dacă derivata a doua f'' este pozitivă pe I, funcţia f este convexă pe I.

Dacă derivata a doua f'' este strict pozitivă pe I, funcția f este strict convexă pe I.

2) Dacă derivata a doua f'' este negativă pe I, funcția f este concavă pe I.

Dacă derivata a doua f'' este strict negativă f'' pe I, funcția f este strict concavă pe I.

Fie x_0 un punct *oarecare* din I. Să scriem formula lui Taylor de ordinul întîi în punctul x_0:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(\xi),$$

unde $x \in I$ iar ξ este cuprins între x și x_0.

Să scriem și funcția al cărei grafic este tangenta în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ la graficul funcției f:

$$F(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0).$$

Atunci, pentru orice $x \in I$ avem

$$F(x) - f(x) = -\frac{(x - x_0)^2}{2} f''(\xi).$$

Deoarece $(x - x_0)^2 > 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I, semnul diferenței $F(x) - f(x)$ este contrar semnului lui $f''(\xi)$.

Dacă f'' este *pozitivă*, avem $f''(\xi) \geqslant 0$ și deci $F(x) - f(x) \leqslant 0$ sau $F(x) \leqslant f(x)$ pentru orice $x \in I$, adică funcția f este *convexă*.

Dacă f'' este *strict pozitivă*, avem $f''(\xi) > 0$ și deci $F(x) - f(x) < 0$ sau $F(x) < f(x)$ pentru orice $x \neq x_0$ din I, adică funcția f este *strict convexă*.

Dacă f'' este *negativă*, avem $f''(\xi) \leqslant 0$ și deci $F(x) \geqslant f(x)$ pentru orice $x \in I$, adică funcția f este *concavă*.

Dacă f'' este *strict negativă*, avem $f''(\xi) < 0$ și deci $F(x) < f(x)$ pentru orice $x \neq x_0$ din I, adică f este *strict concavă*.

Fie acum o funcție f definită pe o mulțime E care este o reuniune (finită sau infinită) de intervale. Vom presupune că funcția f este de două ori derivabilă pe E, cu excepția unei mulțimi finite sau numărabile de puncte din E. Mulțimea $E'' \subset E$, pe care f este derivabilă de două ori, este, de asemenea, reuniune (finită sau infinită) de intervale.

Din propoziția precedentă deducem că funcția f este strict convexă sau strict concavă pe același interval pe care derivata a doua păstrează același semn. Deoarece derivata a doua are, de asemenea, proprietatea lui Darboux, deducem că funcția f este strict convexă sau strict concavă pe aceleași intervale pe care derivata a doua nu se anulează.

Rezultă astfel calea de urmat pentru determinarea intervalelor pe care funcţia este strict concavă sau strict convexă:

1) *Se determină mulţimea* $E'' \subset E$ *pe care funcţia* f *este derivabilă de două ori, şi se calculează derivata a doua* f'' *pe mulţimea* E''.

2) *Se determină punctele din* E'' *în care derivata a doua* f'' *se anulează, adică se rezolvă ecuaţia*

$$f''(x) = 0, \quad x \in E''.$$

3) Se descompune mulţimea E în intervale disjuncte, astfel încît, pe nici un asemenea interval, derivata a doua f'' să nu se mai anuleze. Aceste intervale pe care derivata a doua nu se mai anulează se obţin din intervalele mulţimii E pe care este definită funcţia, împărţindu-le mai departe prin punctele în care funcţia nu este de două ori derivabilă şi prin punctele în care derivata a doua se anulează (presupunînd că derivata a doua nu se anulează pe un întreg interval).

4) Pe fiecare interval I pe care derivata a doua f'' nu se mai anulează, ea păstrează acelaşi semn. Se determină semnul derivatei a doua pe întregul interval I calculînd valoarea ei într-un singur punct din I.

5) În funcţie de semnul derivatei a doua pe un interval I se determină dacă funcţia f este strict convexă sau strict concavă: dacă f'' are semnul $+$, f este strict convexă, iar dacă f'' are semnul $-$, f este strict concavă.

La tabloul în care se trec rezultatele privind intervalele de monotonie şi extremele unei funcţii se mai adaugă o linie în care se trece semnul derivatei a doua. În prima linie trebuie trecute atunci şi valorile argumentului în care funcţia nu este derivabilă de două ori, cum şi rădăcinile derivatei a doua.

Exemplu. Fie funcţia $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$.

Avem: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ şi $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ pentru orice $x \neq 0$

x	$-\infty$			0			$+\infty$
f'		$-$	$-$	|	$-$	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$ | $-\infty$	$\searrow$		0
f''		$-$	$-$	|	$+$	$+$	

Pe intervalul $(-\infty, 0)$ funcţia este concavă, iar pe intervalul $(0, +\infty)$ funcţia este convexă.

În tablou am trecut şi limitele funcţiei în punctele $-\infty$ şi $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ şi } \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

cum și limitele laterale în punctul 0:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Putem acum trasa graficul funcției (fig. 103).

De mai multe ori s-a vorbit înainte despre *puncte de inflexiune*, și anume cu ocazia definirii derivatelor infinite și cu ocazia determinării punctelor de extrem ale funcției cu ajutorul valorilor derivatelor succesive într-un punct.

Fie f o funcție definită pe un interval I și x_0 un punct *interior* al lui I.

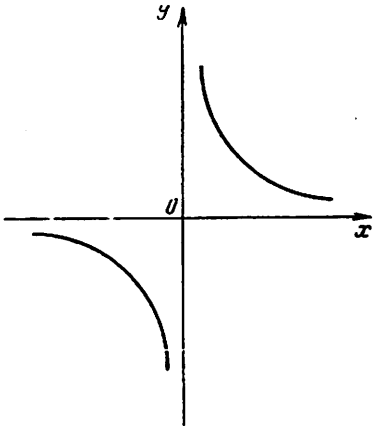


Fig. 103

Definiție. Se spune că punctul interior $x \in I$ este punct de inflexiune al funcției f, dacă funcția are derivată (finită sau infinită) în punctul x_0, și dacă funcția este convexă de o parte a lui x_0 și concavă de cealaltă parte a lui x_0.

Dacă x_0 este punct de inflexiune al funcției, punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numește *punct de inflexiune al graficului.*

Geometric, a spune că M_0 este punct de inflexiune al graficului înseamnă că graficul admite tangentă în punctul M_0 (paralelă sau neparalelă cu axa Oy) și că de o parte a lui M_0 graficul este o curbă convexă, iar de cealaltă parte a lui M_0 graficul este o curbă concavă sau că de o parte a lui M_0 tangenta se află sub grafic, iar de cealaltă parte a lui M_0 tangenta se află deasupra graficului.

Rezultă că tangenta dusă într-un punct de inflexiune al graficului traversează graficul, deoarece de o parte a lui M_0 tangenta se află sub grafic, iar de cealaltă parte a lui M_0 tangenta se află deasupra graficului.

După ce s-au determinat intervalele pe care funcția este strict convexă sau strict concavă rezultă și punctele de inflexiune ale funcției:

Fie f o funcție definită pe o mulțime E care este reuniune (finită sau infinită) de intervale, și x_0 un punct din *interiorul* unui interval al mulțimii E, astfel încît derivata $f'(x_0)$ există (finită sau infinită).

Dacă de o parte și de alta a lui x_0 derivata a doua f'' are semne diferite, atunci x_0 este punct de inflexiune al funcției f.

Dacă derivata a doua are același semn de o parte și de alta a lui x_0, atunci x_0 nu este punct de inflexiune al funcției.

Dacă într-un punct de inflexiune x_0 funcția este derivabilă de două ori, atunci avem în mod necesar $f''(x_0) = 0$.

Într-adevăr, x_0 este punct de extrem al derivatei f', deci derivata f'' a lui f' se anulează în x_0, conform teoremei lui Fermat.

O b s e r v a ț i e. Dacă derivata a doua se anulează într-un punct x_0, nu rezultă că x_0 este punct de inflexiune.

Exemplu. Fie funcția $f(x) = x^4$ definită pe R. Avem $f'(x) = 4x^3$ și $f''(x) = 12x^2$, iar $f''(0) = 0$, dar 0 nu este punct de inflexiune, ci punct de minim al funcției.

Punctele de inflexiune în care derivata a doua se anulează se pot identifica fără a studia semnul derivatei a doua în jurul acestor puncte, ci semnul derivatelor succesive numai în aceste puncte:

P r o p o z i ț i e. Fie f o funcție derivabilă de n ori într-un punct interior a al unui interval I. Dacă:

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0,\ldots,\ f^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$f^{(n)}(a) \neq 0,\ n \geqslant 3$$

și n este impar, atunci a este punct de inflexiune al funcției.

Să notăm $h = f'$; avem:

$$h'(a) = 0,\ h''(a) = 0,\ldots,h^{(n-2)}(a) = 0,\ h^{(n-1)}(a) \neq 0,$$

iar $n - 1$ este *par*, deci a este punct de extrem al funcției h, iar derivata sa h' are semne diferite de o parte și de alta a lui a (dacă h' ar avea același semn de o parte și de alta a lui a, atunci a n-ar mai fi punct de extrem pentru h). Rezultă că $f'' = h'$ are semne diferite de o parte și de alta a lui a, deci a este punct de inflexiune al funcției f.

C o r o l a r. Dacă într-un punct interior $a \in I$, avem

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0,\ f'''(a) \neq 0,$$

atunci a este punct de inflexiune al funcției f.

Exemplu. Fie funcția $f(x) = x^3$. Avem $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$. Deci, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6$. Rezultă că 0 este punct de inflexiune al funcției f.

3. Asimptote

Fie f o funcție definită pe o mulțime E care este reuniune (finită sau infinită) de intervale.

În cazul cînd *funcția* f este *nemărginită*, sau *mulțimea* E este nemărginită, graficul funcției este o mulțime nemărginită de puncte din plan (în sensul că nu există nici un dreptunghi sau nici un cerc care să conțină graficul în întregime).

Spunem în acest caz că graficul funcției are ramuri nemărginite.

Dacă o ramură nemărginită a graficului se apropie necontenit (într-un sens care va fi precizat mai departe) de o anumită dreaptă, spunem că această dreaptă este *asimptotă* la graficul funcției. Pentru studiu, asimptotele se împart în două categorii: asimptote verticale (sau paralele cu axa Oy) și asimptote oblice (sau neparalele cu axa Oy).

a) *Asimptote verticale.* Asimptotele verticale se definesc pentru *funcții nemărginite* chiar dacă sînt definite pe mulțimi mărginite.

Dacă x_0 este punctul de acumulare (finit) al mulțimii E și dacă cel puțin una din limitele laterale $f(x_0 - 0)$ și $f(x_0 + 0)$ există și este *infinită*, spunem că dreapta

$$x = x_0,$$

paralelă cu axa Oy, este *asimptotă verticală* la graficul funcției f.

Evident, dacă $x \in E$ și dacă funcția f este continuă în x_0, atunci limitele laterale sînt egale cu $f(x_0)$, deci sînt *finite*. Așadar, asimptotele verticale trebuie căutate în punctele de discontinuitate ale funcției (mai precis în punctele de discontinuitate de speța a doua) și în punctele de acumulare ale lui E care nu aparțin lui E (deci în care funcția f nu este definită).

Exemple. 1) $f(x) = \frac{1}{x}$ definită pe $R - \{0\}$. Avem $f(0 - 0) = -\infty$ și $f(0+0) = +\infty$, deci dreapta $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală a graficului.

2) $f(x) = \operatorname{tg} x$ definită pentru $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, k întreg. Avem $f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty$ și $f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -8$, deci dreapta $x = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă verticală a graficului.

3) $f(x) = \ln x$ definită pe $(0, +\infty)$. Avem $f(0 + 0) = -\infty$ (limita la stînga în 0 nu are sens). Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală a graficului.

4) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, definită pe $(0, +\infty)$. Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$ (limita la

stînga în 0 nu are sens). Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală a graficului.

5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 5, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$ definită pe R.

Avem $f(1-0) = -\infty$ şi $f(1+0) = +\infty$. Funcţia f este definită în 1, dar este discontinuă în acest punct. Dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală a graficului.

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ definită pe intervalul $(-1, 1)$. Dreptele $x = -1$ şi $x = 1$ sînt asimptote verticale ale graficului. Din acest exemplu se constată că funcţia poate avea asimptote verticale chiar dacă este definită pe o mulţime mărginită.

O b s e r v a ţ i e. Dacă dreapta $x = x_0$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f, distanţa dintre grafic şi asimptotă, măsurată pe orizontală, descreşte necontenit cînd punctul de pe grafic se depărtează necontenit (cînd abscisa punctului de pe grafic se apropie de x_0).

b) *A s i m p t o t e o b l i c e.* Asimptotele oblice se definesc pentru funcţii definite pe *mulţimi nemărginite*, chiar dacă funcţiile sînt mărginite.

Dacă mulţimea E pe care este definită funcţia este nemărginită la dreapta (nemajorată), atunci $+\infty$ este punct de acumulare al mulţimii E. În acest caz:

Spunem că o dreaptă $y = mx + n$ *este asimptotă* (oblică) *la ramura spre* $+\infty$ *a graficului dacă*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

În loc de „asimptotă la ramura spre $+\infty$ a graficului" vom spune, mai simplu, „asimptotă la $+\infty$".

Dacă mulţimea E este nemărginită la stînga (neminorată), atunci $-\infty$ este punct de acumulare al mulţimii E. În acest caz:

Spunem că o dreaptă $y = m'x + n'$ *este asimptotă* (oblică) *la ramura spre* $-\infty$ *a graficului dacă*

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - m'x - n'] = 0.$$

În loc de „asimptotă la ramura spre $-\infty$ a graficului" vom spune „asimptotă la $-\infty$".

Vom studia întîi asimptotele la $+\infty$. Asimptotele la $-\infty$ se studiază la fel.

Să presupunem deci că mulţimea E este nemajorată şi că dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la $+\infty$, adică

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

Avem atunci

$$f(x) - mx = [f(x) - mx - n] + n,$$

deci:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = n.$$

Mai departe, pentru $x > 0$, avem

$$\frac{f(x)}{x} - m = \frac{f(x) - mx}{x},$$

deci

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx}{x} = \frac{n}{+\infty} = 0$$

și, deoarece

$$\frac{f(x)}{x} = \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] + m,$$

rezultă

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

Așadar, dacă dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la $+\infty$, coeficientul unghiular m și ordonata la origine n verifică egalitățile următoare:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx].$$

Reciproc, să presupunem că:

există $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ *și este* **finită;**

există $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = n$ *și este* **finită;**

atunci dreapta $y = mx + n$ *este asimptotă la* $+\infty$.

Într-adevăr, în acest caz,

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - n] = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] - n = 0.$$

O b s e r v a ț i i. 1° Dacă $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ nu există sau este infinită, graficul funcției nu are asimptotă la $+\infty$.

Dacă există $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ și este finită, dar $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$ nu există sau este infinită, graficul funcției nu are asimptotă la $+\infty$.

2° Dacă există $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ și este *finită*, atunci dreapta $y = a$ este asimptotă la $+\infty$, paralelă cu axa Ox (asimptotă orizontală).

Într-adevăr, $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - a] = 0$.

3° Dacă $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *nu există* (nici finită, nici infinită), atunci *graficul funcției nu are asimptotă la* $+\infty$.

Să presupunem că există $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$.

Dacă $m = 0$, atunci $f(x) - mx = f(x)$ și deoarece $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ nu există, nici $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$ nu există, deci graficul nu are asimptotă la $+\infty$.

Dacă $m \neq 0$, atunci pentru $x > 0$ avem $f(x) = \frac{f(x)}{x} x$ și deci ar exista $\lim_{x\to+\infty} f(x) = m\infty$, ceea ce contrazice ipoteza.

Așadar, o condiție *necesară* (dar nu suficientă) pentru ca graficul să aibă asimptotă la $+\infty$ este să existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (finită sau infinită). În cazul cînd această limită nu există, este inutil a mai căuta asimptotă la $+\infty$.

Din considerațiile precedente rezultă calea de urmat pentru a vedea dacă există asimptotă la $+\infty$, iar în cazul cînd există, pentru a o determina:

1) Se caută $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Dacă există $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ și este *finită*, atunci dreapta $y = a$ este asimptotă la $+\infty$.

Dacă există $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ și este *infinită*, atunci:

2) Se caută $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Dacă există $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ și este finită, atunci:

3) Se caută $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$.

Dacă există $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = n$ și este *finită*, atunci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la $+\infty$.

Exemple. 1) $f(x) = \sin x$ definită pe R. Nu există $\lim_{x\to+\infty} \sin x$, deci graficul funcției nu are asimptotă la $+\infty$.

2) $f(x) = x^2$ definită pe R. Avem $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, deci este posibil ca graficul să aibă asimptotă la $+\infty$ și atunci calculăm:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Deoarece această limită este *infinită*, graficul nu are asimptotă la $+\infty$.

3) $f(x) = \ln x$ definită pe $(0, +\infty)$.

Avem $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

deci calculăm mai departe limita

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,$$

care este *finită*, deci calculăm mai departe limita

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

care este infinită, deci graficul nu are asimptotă la $+\infty$.

4) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ definită pe $R-\{1\}$. Avem

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1,$$

deci dreapta $y=1$ este asimptotă la $+\infty$.

5) $f(x)=2\sqrt{x^2-1}$ definită pe $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.
Avem

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{x^2-1}=+\infty,$$

deci calculăm mai departe limita

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=2$$

care este *finită*, deci calculăm mai departe limita

$$n=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}[2\sqrt{x^2-1}-2x]=$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0.$$

Așadar, dreapta $y=2x$ este asimptotă la $+\infty$.

Să presupunem că mulțimea E este neminorată. Făcînd considerații asemănătoare cu cele din cazul precedent, rezultă calea de urmat pentru a vedea dacă există asimptotă la $-\infty$, iar în cazul cînd există, pentru a o calcula:

1) Se caută $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$ și este *finită*, dreapta $y=a$ este asimptotă la $-\infty$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ și este *infinită*, atunci:

2) Se caută $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m'$ şi este *finită*, atunci:

3) Se caută $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-m'x]$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-m'x]=n'$ şi este finită, atunci: dreapta $y=m'x+n'$ este asimptotă la $-\infty$.

O b s e r v a ţ i i. Dacă nu există $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, graficul funcţiei nu are asimptotă la $-\infty$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ (finită sau infinită), dar $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ nu există sau nu este finită, atunci graficul funcţiei nu are asimptotă la $-\infty$.

Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ (finită sau infinită) şi dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m$ şi este finită, dar $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-mx]$ nu există sau este infinită, atunci graficul funcţiei nu are asimptotă la $-\infty$.

Exemple. 1) $f(x)=\operatorname{tg}x$, definită pe R. Nu există $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{tg}x$, deci graficul nu are asimptotă la $-\infty$.

2) $f(x)=x^2$ definită pe R. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, deci calculăm mai departe limita

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

care este infinită, deci graficul nu are asimptotă la $-\infty$.

3) $f(x)=\ln|x|$ definită pe $R-\{0\}$. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln|x|=+\infty$, deci calculăm mai departe limita

$$m'=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln|x|}{-|x|}=0$$

care este finită, deci calculăm mai departe limita

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\ln|x|=+\infty$$

care este infinită, deci graficul nu are asimptotă la $-\infty$.

4) $f(x)=2\sqrt{x^2-1}$ definită pe $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Avem

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}2\sqrt{x^2-1}=+\infty,$$

deci calculăm mai departe limita

$$m'=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=2\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{-\sqrt{x^2}}=-2\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=-2,$$

care este finită, deci calculăm mai departe limita

$$n' = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - m'x] = 2\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2-1}+x] = 2\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0,$$

care este finită, deci dreapta $y = -2x$ este asimptotă la $-\infty$.

5) $f(x) = e^x$ definită pe R. Avem

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

deci dreapta $y = 0$ este asimptotă la $-\infty$.

4. Reprezentarea grafică a funcțiilor

Cercetările întreprinse în cadrul acestui paragraf sînt suficiente pentru a putea trasa graficul unei funcții care admite derivată de ordinul doi în toate punctele sau cu excepția unei mulțimi numărabile de puncte. De cele mai multe ori se pune problema trasării graficului unei *funcții elementare*. În acest scop se procedează pe etape în modul următor:

I) D o m e n i u l d e d e f i n i ț i e. 1) Dacă domeniul de definiție al unei funcții elementare nu este specificat, se subînțelege că este domeniul maxim de definiție, format din toate punctele pentru care operațiile au sens. Se determină acest domeniu maxim de definiție.

2) Se calculează $f(0)$ dacă funcția este definită în 0. În punctul $(0, f(0))$ graficul taie axa Oy.

3) Se rezolvă ecuația $f(x) = 0$. Soluțiile acestei ecuații, dacă există, reprezintă abscisele punctelor în care graficul taie axa Ox.

4) Dacă domeniul de definiție este nemajorat, se cercetează $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, iar dacă domeniul de definiție este neminorat, se cercetează $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

II) D e r i v a t a î n t î i. 1) Se determină mulțimea $E' \subset E$ pe care funcția f este derivabilă și se calculează derivata întîi f'.

2) Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$. Rădăcinile derivatei întîi pot fi puncte de extrem ale funcției.

3) Se determină intervalele pe care derivata întîi păstrează același semn și se determină semnul derivatei întîi pe aceste intervale.

III) D e r i v a t a a d o u a. 1) Se determină mulțimea $E'' \subset E'$ pe care funcția este derivabilă de două ori; se calculează derivata a doua f''.

2) Se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$. Rădăcinile derivatei a doua pot fi puncte de inflexiune.

3) Se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează același semn și se determină semnul derivatei a doua pe aceste intervale.

IV) A s i m p t o t e l e. 1) Se cercetează dacă există asimptotele verticale și, dacă există, se calculează aceste asimptote.

2) Se cercetează dacă există asimptote oblice şi, dacă există, se calculează aceste asimptote.

V) T a b l o u l. Rezultatele obţinute anterior se trec, pentru sistematizare, într-un tablou cu linii orizontale.

1) În linia întîi se trec valorile remarcabile ale argumentului, obţinute anterior (rădăcinile funcţiei, derivatei întîi şi derivatei a doua, punctele în care funcţia şi derivatele nu sînt definite, extremităţile intervalelor pe care funcţia este definită etc.). Dacă domeniul de definiţie este nemărginit, se trec şi punctele $+\infty$ şi $-\infty$.

2) În linia a doua se trec rezultatele privind derivata întîi; se trage o linie verticală în dreptul punctelor în care funcţia este definită, dar derivata întîi nu este definită; de o parte şi de alta a acestei linii se scriu limitele laterale ale derivatei întîi, dacă există. Se scrie 0 în dreptul rădăcinilor derivatei şi se trece semnul derivatei.

3) În linia a treia se trec valorile funcţiei în dreptul valorilor argumentului din linia întîi. Se marchează cu săgeţi creşterea sau descreşterea funcţiei. Se trage o linie verticală, în dreptul punctelor în care funcţia nu este definită. De o parte şi de alta a acestei linii se trec, dacă există, limitele laterale ale funcţiei.

În dreptul lui $+\infty$ şi $-\infty$ se trec limitele funcţiei în aceste puncte. Se marchează cu literele m, M şi i, respectiv, punctele de minim, de maxim şi de inflexiune ale funcţiei.

4) În linia a patra se trec rezultatele privind derivata a doua; se trage o linie verticală în dreptul punctelor în care f sau derivata întîi f' este definită, dar derivata a doua nu este definită. Se scrie 0 în dreptul rădăcinilor derivatei a doua. Se trece semnul derivatei a doua.

VI) G r a f i c u l. Rezultatele sistematizate în tablou permit trasarea graficului funcţiei pe o bucată de hîrtie pe care s-a desenat un sistem de axe ortogonale Ox şi Oy. Se trasează întîi asimptotele. Se trec apoi punctele $(x, f(x))$ care rezultă din tablou. În punctele de extrem ale graficului se trasează un mic segment de dreaptă orizontal. În punctele de inflexiune ale graficului se trasează o porţiune din tangenta la grafic în acest punct. Se unesc apoi punctele printr-o linie, ţinînd seama de indicaţiile din tablou privind creşterea sau descreşterea, cum şi convexitatea sau concavitatea funcţiei. Linia astfel obţinută ne dă forma graficului funcţiei.

Exemplu. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

I) D o m e n i u l d e d e f i n i ţ i e. Se pune condiţia ca $\dfrac{x+1}{x-1} \geqslant$ şi ca $x-1 \neq 0$. Se obţine domeniul $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.

În punctul 0 funcția nu este definită, deci graficul nu taie axa Oy. Rădăcinile funcției: -1.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=1,\quad \lim_{x\to1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty.$$

II) Derivata întîi $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

definită pe $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Pe această mulțime derivata f' nu se anulează. Semnul derivatei întîi este $-$ în ambele intervale. Avem $\lim\limits_{x\to1} f'(x)=-\infty$.

III) Derivata a doua. $f''(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\,\dfrac{2x^2+3x+1}{(x-1)^3}$

definită pe $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Derivata a doua nu se anulează pe această mulțime.

Semnul derivatei a doua este $-$ pe primul interval și $+$ pe al doilea interval.

IV) Asimptotele. Deoarece $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$, dreapta $x=1$ este asimptotă verticală.

Deoarece $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$, dreapta $x=-1$ nu este asimptotă verticală.

Asimptotele oblice au rezultat la punctul I: dreapta $y=1$ este asimptotă atît la $+\infty$ cît și la $-\infty$.

V) Tabloul.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	$-\infty$		$-\infty$	$-$	
f	1	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	1
f''		$-$				$+$	

VI) Graficul.

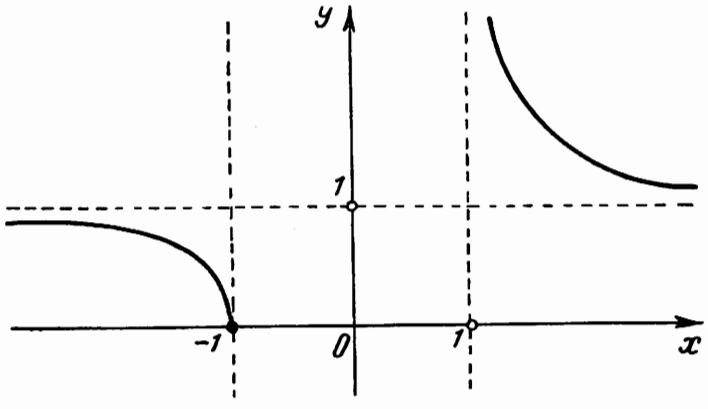


Fig. 104

§ 8. Diferenţiale

1. Definiţia diferenţialei

Fie f o funcţie definită pe un interval I şi $x_0 \in I$.

Definiţie. **Se spune că funcţia f este diferenţiabilă în punctul $x_0 \in I$, dacă există un număr $A \in R$ şi o funcţie definită pe I, continuă în x_0 şi nulă în x_0, astfel încît pentru orice $x \in I$, să avem**

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)\,(x - x_0).$$

Deoarece funcţia α este continuă în x_0 şi nulă în acest punct, avem

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0.$$

Dacă funcţia f este diferenţiabilă în fiecare punct din I, spunem că este diferenţiabilă pe I.

Propoziţie. **Funcţia f este diferenţiabilă într-un punct $x_0 \in I$ dacă şi numai dacă este derivabilă în x_0.**

Să presupunem întîi că f este diferenţiabilă în x_0, deci

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)\,(x - x_0),\quad x \in I,$$

unde $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Pentru $x \neq x_0$ putem împărţi cu $x - x_0$ şi obţinem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x),\quad x \neq x_0.$$

Deoarece $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, deducem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A,$$

deci f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = A$.

Reciproc, să presupunem că f este derivabilă în x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Să definim funcţia α pe I astfel:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0, & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}$$

Atunci

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 - \alpha(x_0),$$

deci funcţia α este continuă în punctul x_0 şi nulă în acest punct.

Din definiția funcției α, rezultă că pentru $x \neq x_0$ avem

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$$

și această egalitate este adevărată și pentru $x = x_0$, deci funcția f este diferențiabilă în punctul x_0.

Observații. 1° Din demonstrația acestei propoziții, rezultă că funcția f este diferențiabilă în punctul x_0 dacă și numai dacă avem

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x_0), \qquad x \in I,$$

unde $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ și $\alpha(x_0) = 0$. Funcția α este perfect determinată de această egalitate în toate punctele $x \neq x_0$ din I.

2° Propoziția precedentă afirmă că noțiunile de derivabilitate și de diferențiabilitate sînt echivalente, în sensul că dacă funcția are una din aceste proprietăți, atunci are și cealaltă proprietate.

3° Din egalitatea prin care se definește diferențiabilitatea rezultă

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \qquad x \in I.$$

Această egalitate este tocmai formula lui Taylor de ordinul întîi.

Egalitatea

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \qquad x \in I,$$

se scrie de asemenea

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \alpha(x)](x - x_0), \qquad x \in I$$

și avem $\lim_{x \to x_0} [f'(x_0) + \alpha(x)] = f'(x_0)$. Aceasta înseamnă că, pentru valori ale argumentului suficient de apropiate de x_0, avem

$$f'(x_0) + \alpha(x) \approx f'(x_0)$$

și deci

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0), \qquad x \approx x_0, \qquad x \in I.$$

Așadar, creșterea $f(x) - f(x_0)$ a funcției se poate aproxima cu produsul $f'(x_0)(x - x_0)$ dintre derivata în x_0 și creșterea $x - x_0$ a argumentului (pentru creșteri ale argumentului suficient de mici).

Să notăm cu h creșterea de la x_0 la x a argumentului, $h = x - x_0$. Atunci $x = x_0 + h$, și deci, pentru h suficient de mic,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h, \qquad x_0 + h \in I.$$

Această relaţie este foarte utilă, deoarece în loc să calculăm valorile funcţiei în punctele x_0 şi $x_0 + h$ din I pentru a afla creşterea funcţiei, această creştere se poate obţine mai uşor, dar cu aproximaţie, făcînd produsul $f'(x_0)h$, care este o funcţie liniară în h.

Să observăm că în această relaţie trebuie să avem atît $x_0 \in I$, cît şi $x_0 + h \in I$, pentru a putea scrie diferenţa $f(x_0 + h) - f(x_0)$, dar produsul $f'(x_0)h$ are sens oricare ar fi $h \in R$.

Definiţie. Funcţia liniară $h \to f'(x_0)h$ definită pentru orice $h \in R$ se numeşte diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 şi se notează $\mathrm{d}f(x_0)$:

$$\mathrm{d}f(x_0)\,(h) = f'(x_0)h.$$

Relaţia de aproximaţie se scrie atunci

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx \mathrm{d}f(x_0)\,(h), \qquad x_0 + h \in I.$$

Trebuie observat că, în timp ce derivata funcţiei f în punctul x_0 este un *număr*, $f'(x_0)$, diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 este o *funcţie* liniară, $h \to f'(x_0)h$, definită pentru orice $h \in R$.

Deoarece diferenţiala $\mathrm{d}f(x_0)$ este o funcţie, ea are un grafic, care este o dreaptă ce trece prin origine şi are coeficientul unghiular $\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$, deci este paralelă cu tangenta la graficul funcţiei f (în punctul $M_0\,(x_0, f(x_0))$

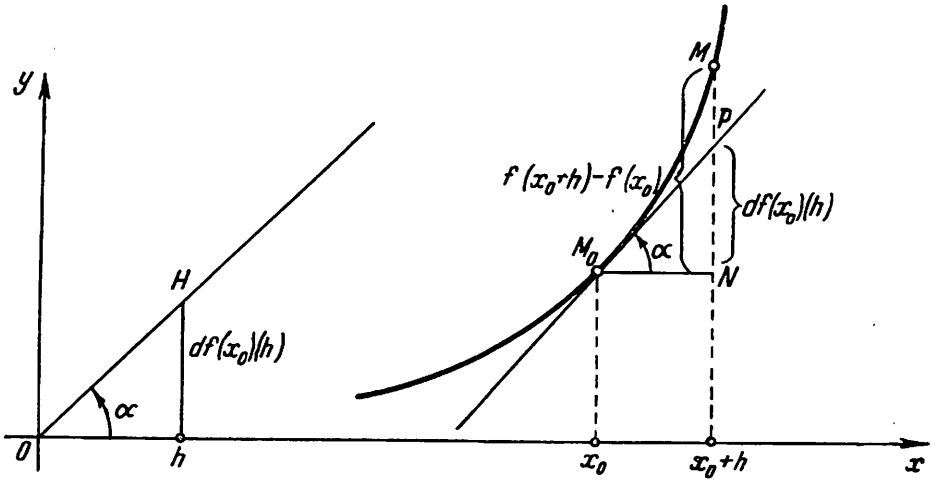


Fig. 105

(fig. 105). De aici rezultă şi interpretarea geometrică a diferenţialei. Avem $MN = f(x_0 + h) - f(x_0)$, $NP = \mathrm{d}f(x_0)\,(h)$. Relaţia de aproximaţie

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx \mathrm{d}f(x_0)\,(h), \qquad x_0 + h \in I$$

exprimă faptul că segmentul PM poate fi făcut oricît de mic, dacă se ia creşterea h suficient de mică.

Diferențiala funcției într-un punct oarecare $x \in I$ este

$$df(x)\ (h) = f'(x) \cdot h, \qquad h \in R.$$

Pentru funcția identică $\varphi(x) = x$ definită pe R, avem $\varphi'(x) \equiv 1$, deci diferențiala sa $d\varphi(x_0)$ verifică egalitatea

$$d\varphi(x_0)\ (h) = h, \qquad h \in R.$$

Pentru orice $x \in I$ avem $d\varphi(x)\ (h) = h$, $h \in I$, deci $d\varphi(x) = d\varphi(x_0)$.

Atunci

$$\frac{df(x_0)\ (h)}{d\varphi(x_0)} = \frac{f'(x_0)h}{h} = f'(x_0), \text{ oricare ar fi } h \neq 0,$$

deci

$$\frac{df(x_0)}{d\varphi(x_0)} = f'(x_0).$$

Derivata $f'(x_0)$ este egală deci cu raportul *constant* dintre diferențiala sa $df(x_0)$ și diferențiala funcției identice, $d\varphi(x_0)$.

Pentru un punct arbitrar $x \in I$ avem atunci

$$\frac{df(x)}{d\varphi(x)} = f'(x).$$

Pentru diferențiala funcției identice $\varphi(x) = x$ se folosește notația dx, astfel încît

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Se justifică astfel una din notațiile derivatei, specificată la începutul capitolului.

Diferențiala dx a funcției identice se numește, mai simplu, diferențiala lui x. Uneori se întrebuințează și denumirea „diferențiala variabilei independente", dar această denumire este improprie, deoarece noțiunea de diferențială se referă *numai* la funcții.

Din ultima egalitate se deduce

$$df(x) = f'(x)dx,$$

adică diferențiala funcției f este egală cu produsul dintre derivata sa și diferențiala lui x.

Trebuie observat că pentru o valoare fixată x a argumentului, avem $dx(h) = h$, oricare ar fi $h \in R$.

Exemple. 1) Pentru $f(x) = \sin x$, $x \in R$ avem

$$df(x) = d \sin x = \cos x\ dx.$$

2) $\mathrm{d}\ \ln x = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

3) $\mathrm{d}e^x = e^x\,\mathrm{d}x$.

4) $d\ \mathrm{arctg}\ x = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

5) $\mathrm{d}(x^2+3) = 2x\mathrm{d}x$.

Regulile demonstrate anterior pentru derivate se păstrează şi pentru diferenţiale:

$$\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v; \qquad \mathrm{d}(u-v) = \mathrm{d}u - \mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}(\alpha u) = \alpha\mathrm{d}u;$$

$$\mathrm{d}(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}\frac{v}{u} = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2},$$

unde u şi v sînt funcţii derivabile.

Exemple. 1) $\mathrm{d}\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)\,\mathrm{d}(x+1) - (x+1)\,\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2} =$

$$= \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x - (x+1)\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \frac{-2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2}.$$

2) $\mathrm{d}\sin x\cos x = \cos x\,\mathrm{d}\sin x + \sin x\,\mathrm{d}\cos x =$

$= \cos x\cdot\cos x\mathrm{d}x + \sin x(-\sin x)\,\mathrm{d}x = \cos^2 x\,\mathrm{d}x - \sin^2 x\mathrm{d}x = (\cos^2 x - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x.$

2. Diferenţiala funcţiilor compuse

Fie două funcţii derivabile $u : I \to J$ şi $\varphi : J \to R$ şi funcţia compusă $f = \varphi \circ u : I \to R$:

$$f(x) = \varphi(u(x)), \qquad x \in I.$$

Funcţia f este de asemenea derivabilă. Diferenţiala sa este

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x = \varphi'(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$$

sau

$$\mathrm{d}[\varphi(u(x))] = \varphi'(u(x))\cdot u'(x)\mathrm{d}x.$$

Dar

$$u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u(x),$$

deci

$$\mathrm{d}[\varphi(u(x))] = \varphi'(u(x))\mathrm{d}u(x).$$

Dacă nu se mai pune în evidenţă argumentul x, atunci ultima egalitate se scrie

$$\mathrm{d}\varphi(u) = \varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

Trebuie observat că în această egalitate u este o funcție, dar că egalitatea are aceeași *formă* ca și cînd u ar fi argumentul funcției φ.

În exemplele următoare, u este o funcție derivabilă:

1) $du^n = nu^{n-1}\,du$;

2) $d\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$;

3) $d \sin u = \cos u\,du$;

4) $d \cos u = -\sin u\,du$;

5) $d \operatorname{tg} u = \frac{1}{\cos^2 u}\,du$;

6) $d \operatorname{ctg} u = \frac{1}{\sin^2 u}\,du$;

7) $d \operatorname{arc\,sin} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;

8) $d \operatorname{arc\,cos} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;

9) $d \operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{1+u^2}\,du$;

10) $d \operatorname{arc\,ctg} u = -\frac{1}{1+u^2}\,du$;

11) $d \ln u = \frac{1}{u}\,du$;

12) $de^u = e^u\,du$.

3. Diferențiale de ordin superior

Fie funcția $f: I \to R$ și $x_0 \in I$.

Spunem că funcția f este diferențiabilă de două ori în punctul x_0 dacă este derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0 și dacă derivata f' este diferențiabilă în x_0.

Aceasta revine la a spune că f este derivabilă de două ori în x_0.

Diferențiala de ordinul doi în x_0 se notează $d^2f(x_0)$ și se definește prin egalitatea

$$d^2f(x_0) = f''(x_0)\,dx^2.$$

În mod analog, spunem că f este diferențiabilă de n ori în punctul x_0, dacă are derivată de ordinul $n-1$ într-o vecinătate a lui x_0 și dacă derivata $f^{(n-1)}$ este diferențiabilă în x_0.

Aceasta revine la a spune că f este derivabilă de n ori în x_0.

Diferențiala de ordinul n în x_0 se notează $d^nf(x_0)$ și se definește prin egalitatea

$$d^nf(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,dx^n.$$

Diferențiala de ordinul n în x_0 este o funcție de argumentul dx; mai precis, este un polinom de gradul n în dx.

§ 9. Aplicațiile derivatei în fizică

Mărimile fizice se schimbă cu timpul (variază în timp). O asemenea mărime fizică se descrie în matematică printr-o funcție $f(t)$, unde argumentul t semnifică timpul, iar valorile $f(t)$ ale funcției reprezintă măsura mărimii respective, la momentele t. De cele mai multe ori este convenabil să utilizăm ecuația $y = f(t)$, unde y semnifică măsura mărimii respective. Este important adesea să se cunoască „viteza de variație" a unei mărimi, care este o nouă mărime fizică și a cărei măsură este derivata $\frac{df}{dt}$ a funcției f în raport cu timpul.

1. Viteza în mișcarea rectilinie

Să considerăm un mobil M în mișcare rectilinie (v. fig. 75). Dacă alegem un punct de referință O, un sens pozitiv de parcurgere pe dreapta pe care se mișcă mobilul și un moment inițial $t_0 = 0$, abscisa s a mobilului M la un moment t este dată de o ecuație

$$s = f(t)$$

numită legea de mișcare a mobilului.

s are semnificația „spațiului parcurs de mobil" din momentul inițial pînă la momentul t.

La începutul capitolului, s-a definit *viteza* $v(t_0)$ a mobilului la un moment t_0, ca fiind limita

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = v(t_0).$$

Așadar

$$v(t_0) = f'(t_0)$$

adică, *viteza în mișcarea rectilinie este derivata spațiului în raport cu timpul.* În scris: $v = s' = \frac{ds}{dt}$.

Dacă viteza este constantă spunem că mișcarea este *uniformă. Mișcarea mobilului este uniformă dacă și numai dacă legea de mișcare este de forma* $s = \alpha t + \beta$ ($\alpha, \beta \in R$).

Într-adevăr, dacă $s = \alpha t + \beta$ atunci $v = s' = \alpha \equiv$ ct.; reciproc, dacă viteza este constantă, $v = \alpha =$ ct., adică $s' = \alpha$, atunci $s = \alpha t + \beta$.

În particular, dacă viteza este nulă, $v = 0$, atunci legea de mișcare este $s = \beta =$ ct., adică mobilul nu se mișcă. Reciproc, dacă mobilul nu se mișcă, avem $s = \beta =$ ct., deci $v = s' = 0$.

Viteza este pozitivă, dacă și numai dacă mobilul se mișcă în sensul pozitiv al axei.

Într-adevăr, $v \geqslant 0$ dacă și numai dacă funcția $f(t)$ este crescătoare.

Aceasta înseamnă că dacă $t_1 < t_2$, atunci $f(t_1) \leqslant f(t_2)$, deci mobilul se mișcă de la $s_1 = f(t_1)$ la $s_2 = f(t_2)$ în sensul pozitiv al axei. În mod asemănător:

Viteza este negativă, dacă și numai dacă mobilul se mișcă în sensul negativ al axei.

Dacă $v(t_0) = 0$ *și dacă înainte de* t_0 *și după* t_0 *viteza are semne diferite, atunci în momentul* t *mobilul își schimbă sensul mișcării* (în acest moment mobilul „se întoarce").

Dacă $v(t_0) = 0$ și dacă viteza are același semn înainte și după t_0, mobilul are un moment de oprire în punctul $s_0 = f(t_0)$ după care își continuă mișcarea în același sens ca și mai înainte.

2. Accelerația în mișcarea rectilinie

„Viteza de variație" a vitezei v cu care se mișcă mobilul se numește *accelerație*. Așadar:

Accelerația în mișcarea rectilinie este derivata vitezei în raport cu timpul sau derivata a doua a spațiului în raport cu timpul.

Pentru accelerație folosim litera a:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Dacă accelerația este constantă, spunem că mișcarea este *uniform accelerată.*

Mișcarea mobilului este uniform accelerată dacă și numai dacă legea de mișcare este de forma $s = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

Într-adevăr, dacă accelerația este constantă $a \equiv A$, atunci $v = At + \beta$ și deci $s = \frac{1}{2} At^2 + \beta t + \gamma$.

Reciproc, dacă $s = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, atunci $v = 2\alpha t + \beta$, deci $a = 2\alpha =$ ct.

Mișcarea mobilului este uniformă dacă și numai dacă accelerația este nulă.

În adevăr, mișcarea este uniformă, $s = \alpha t + \beta$, dacă și numai dacă viteza este constantă, $v = \alpha =$ ct., deci dacă și numai dacă accelerația este nulă, $a = v' \equiv 0$.

Un exemplu important de mişcare uniform accelerată este căderea corpurilor în vid, în care legea de mişcare este:

$$s = \frac{1}{2} gt^2.$$

Acceleraţia mişcării este egală cu acceleraţia gravitaţiei g.

3. Viteza şi acceleraţia unghiulară

Să considerăm un mobil M care se mişcă pe o traiectorie circulară (fig. 106). Poziţia mobilului în fiecare moment t este perfect determinată de unghiul la centru α format de raza OM cu o dreaptă fixă OA, măsurat în sens trigonometric. Aşadar, mişcarea mobilului este dată de o ecuaţie $\alpha = f(t)$.

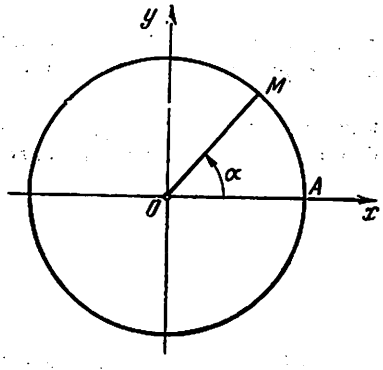


Fig. 106

Unghiul la centru descris de mobil, în intervalul de timp dintre un moment t_0 şi un alt moment t, este $f(t) - f(t_0)$.

Raportul

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

se numeşte viteza unghiulară medie a mobilului în intervalul de timp de la t_0 la t. Limita

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

(dacă există şi este finită) se numeşte *viteza unghiulară* a mobilului în momentul t_0. Aşadar:

Viteza unghiulară în mişcarea circulară este derivata unghiului la centru, în raport cu timpul.

Dacă viteza unghiulară este constantă, spunem că mişcarea circulară este *uniformă*.

Derivata a doua a unghiului la centru într-o mişcare circulară se numeşte acceleraţie unghiulară.

Mişcarea circulară este uniformă dacă şi numai dacă acceleraţia unghiulară este nulă.

4. Debitul unui lichid

Să considerăm un lichid în scurgere printr-un tub. Să notăm cu $Q(t)$ cantitatea de lichid care trece printr-o secţiune a tubului, în intervalul de timp t, începînd de la un anumit moment de referinţă, pe care-l notăm cu 0.

Diferența $Q(t) - Q(t_0)$ exprimă cantitatea de lichid scursă între momentele t_0 și t.

Dacă în intervale de timp egale se scurg cantități de lichid egale, se spune că scurgerea lichidului are debit constant.

În acest caz se numește debit cantitatea de lichid scursă în unitatea de timp.

Dacă debitul lichidului nu este constant, considerăm debitul mediu

$$\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$$

în intervalul de timp de la t_0 la t. Limita

$$\lim_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} = Q'(t_0)$$

se numește debitul scurgerii lichidului în momentul t_0. Așadar:

Debitul este derivata cantității de lichid în raport cu timpul.

5. Intensitatea curentului electric

Un curent electric care trece printr-un conductor se poate asemui cu un lichid în scurgere printr-o conductă. Putem vorbi și în acest caz de cantitatea de electricitate $Q(t)$ scursă prin conductor într-un timp t, începînd de la un anumit moment de referință.

Putem vorbi de asemenea de debitul de electricitate. Debitul de electricitate se numește *intensitatea curentului electric*. Așadar:

Intensitatea curentului electric este derivata cantității de electricitate în raport cu timpul.

6. Densitatea unei repartiții liniare de masă

Problema definirii densității unei bare liniare a fost pusă, la începutul acestui capitol, ca una din problemele ce conduc la noțiunea de derivată:

Densitatea unei repartiții liniare de masă este derivata masei în raport cu lungimea.

Capitolul VII

INTEGRAREA

§ 1. Mulţimi măsurabile în sensul lui Jordan

1. Mulţimi pe dreaptă măsurabile Jordan

Vom nota cu $\mathcal{P}$ clasa mulţimilor care sînt *reuniuni finite* de *intervale mărginite* (închise, deschise sau semideschise). Se verifică imediat că $\mathcal{P}$ are următoarele proprietăţi:

1) Reuniunea a două sau mai multe mulţimi (în număr finit) din $\mathcal{P}$ este tot o mulţime din $\mathcal{P}$.

2) Diferenţa a două mulţimi din $\mathcal{P}$ este tot o mulţime din $\mathcal{P}$.

(Într-adevăr, se observă că diferenţa a două intervale este vidă, un interval, sau o reuniune de două intervale.)

Clasa $\mathcal{P}$ a reuniunilor finite de intervale mărginite este un *clan**. Să observăm că orice mulţime $P \in \mathcal{P}$ se poate pune sub forma reuniunii unei

---

* Fie E o mulţime. O clasă $\mathcal{K}$ nevidă de părţi ale lui E se numeşte clan, dacă reuniunea $A \cup B$ şi diferenţa $A - B$ a două mulţimi A şi B din $\mathcal{K}$ aparţin lui $\mathcal{K}$. Rezultă atunci că intersecţia $A \cap B$ a două mulţimi A, $B \in \mathcal{K}$ aparţine lui $\mathcal{K}$, deoarece $A \cap B = A - (A - B)$. Prin inducţie completă se arată că reuniunea şi intersecţia unei familii finite de părţi din $\mathcal{K}$ aparţin lui $\mathcal{K}$.

O funcţie m: $\mathcal{K} \to X$ definită pe un clan $\mathcal{K}$ cu valori într-un spaţiu vectorial X se numeşte *funcţie aditivă* de mulţime, dacă A, $B \in \mathcal{K}$ şi $A \cap B = \varnothing$ implică $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Funcţiile aditive de mulţime se numesc *măsuri aditive* sau, mai simplu, *măsuri*.

O măsură μ: $\mathcal{K} \to R$ cu valori reale se numeşte *măsură reală*; dacă în plus $\mu(A) \geqslant 0$ pentru orice $A \in \mathcal{K}$, μ se numeşte *măsură pozitivă*. Din definiţia măsurii rezultă următoarele proprietăţi: (*i*) $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} m(A_i)$, dacă mulţimile A_i sînt disjuncte două cîte două.

(*ii*) $m(A - B) = m(A) - m(B)$, dacă $B \subset A$ (m este substractivă).

O *măsură pozitivă* μ are în plus următoarele proprietăţi:

(*iii*) $\mu(A) \leqslant \mu(B)$, dacă $A \subset B$ (μ este crescătoare).

(*iu*) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, oricare ar fi mulţimile A_i din $\mathcal{K}$ (μ este subadditivă).

familii $(I_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de intervale care n-au în comun, două cîte două, decît cel mult o extremitate. Dacă notăm cu $m(I)$ lungimea unui interval, se definește *măsura* sau *lungimea* $m(P)$ a mulțimii P din $\mathcal{P}$ prin egalitatea

$$m(P) = \sum_{i=1}^{n} m(I_i).$$

Se demonstrează că $m(P)$ nu depinde de familia $(I_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de intervale care n-au în comun decît cel mult extremități și a căror reuniune este P, ci depinde numai de P.

Funcția reală m: $\mathcal{P}\to R$ definită pe clanul $\mathcal{P}$ al reuniunilor finite de intervale mărginite, are următoarele proprietăți:

1) $m(P)\geqslant 0$, oricare ar fi $P\in\mathcal{P}$;

2) $m(P\cup Q) = m(P) + m(Q)$, dacă $P\cap Q = \varnothing$.

Lungimea m este o *măsură aditivă* pe clasa $\mathcal{P}$.

Rezultă atunci că măsura m are, încă, următoarele proprietăți:

3) $m(Q - P) = m(Q) - m(P)$, dacă $P\subset Q$;

4) $m(P)\leqslant m(Q)$, dacă $P\subset Q$.

5) $m(P\cup Q)\leqslant m(P) + m(Q)$, oricare ar fi P, $Q\in\mathcal{P}$.

Vom căuta acum să extindem noțiunea de lungime (sau măsură) de la clasa $\mathcal{P}$ la o clasă mai largă de mulțimi de pe dreaptă, pe care le vom numi *mulțimi măsurabile în sensul lui Jordan*, sau, mai simplu, *mulțimi măsurabile Jordan*. Vom arăta că această clasă de mulțimi este tot un clan și că, pe acest clan, lungimea păstrează proprietățile sale fundamentale de a fi pozitivă și aditivă.

Vom defini mai întîi, pentru orice mulțime mărginită, o lungime interioară și o lungime exterioară.

Fie $A\subset R$ o mulțime *mărginită oarecare*.

Există totdeauna reuniuni de intervale $P\subset A$ (eventual $P = \Phi$ sau P format dintr-un singur punct) și reuniuni de intervale $Q\supset A$, care acoperă pe A.

Oricare ar fi reuniunea de intervale $P\subset A$ și reuniunea de intervale $Q\supset A$, avem $P\subset Q$, deci $m(P)\leqslant m(Q)$. Să notăm

$$m_i(A) = \sup_{P\subset A} m(P),\quad m_e(A) = \inf_{Q\supset A} m(Q)$$

Numerele $m_i(A)$ și $m_e(A)$ se numesc, respectiv, *măsura* (sau lungimea) *interioară* și *măsura* (sau lungimea) *exterioară* — în sensul lui Jordan — a lui A, și avem

$$m(P)\leqslant m_i(A)\leqslant m_e(A)\leqslant m(Q)$$

oricare ar fi mulțimile P și Q din $\mathcal{P}$ astfel ca $P\subset A\subset Q$.

Definiţie. Spunem că o mulţime mărginită A are lungime, sau că este măsurabilă Jordan, dacă măsura interioară şi măsura exterioară sînt egale:

$$m_i(A) = m_e(A).$$

Dacă A este măsurabilă, valoarea comună a măsurii interioare şi a măsurii exterioare se numeşte măsura Jordan (sau lungimea) mulţimii A şi se notează $m(A)$:

$$m(A) = m_i(A) = m_e(A).$$

Urmează că dacă A este măsurabilă, avem $m(P) \leqslant m(A) \leqslant m(Q)$ oricare ar fi reuniunile de intervale P şi Q din $\mathcal{P}$, astfel ca $P \subset A \subset Q$. Rezultă de asemenea că $m(A) \geqslant 0$.

Dacă A este o reuniune finită de intervale mărginite, din $\mathcal{P}$, putem lua în particular $P = A$ şi $Q = A$ şi atunci

$$m_i(A) = \sup_{P \subset A} m(P) = m(A) \text{ şi } \quad m_e(A) = \inf_{Q \supset A} m(Q) = m(A)$$

deci $m_i(A) = m_e(A) = m(A)$, adică reuniunile finite de intervale mărginite sînt măsurabile, iar măsura lor, considerate ca mulţimi măsurabile, este egală cu lungimea lor definită anterior.

Clasa $\mathcal{M}$ a mulţimilor măsurabile conţine deci clasa $\mathcal{P}$. Vom arăta că $\mathcal{M}$ este un clan şi că măsura m este aditivă pe $\mathcal{M}$.

Observaţie. Măsura interioară a unei mulţimi poate fi diferită de măsura sa exterioară.

Exemplu. Fie A mulţimea punctelor raţionale din intervalul $[0, 1]$. Mulţimea A nu are nici un punct interior, deci singurele intervale conţinute în A sînt punctele. Urmează că orice reuniune finită de intervale $P \subset A$ este o mulţime finită de puncte, deci are lungimi nule şi deci

$$m_i(A) = \sup_{P \subset A} m(P) = 0.$$

Orice reuniune finită de intervale $Q \supset A$ conţine intervalul $[0,1]$, deci $m(Q) \geqslant m([0,1]) = 1$ şi deci $m_e(A) = \inf_{Q \supset A} m(Q) = 1$.

Avem deci $m_i(A) \subset m_e(A)$. Mulţimea A nu este măsurabilă Jordan. Această mulţime nu are lungime, în sensul definiţiei de mai sus.

Vom da acum unele criterii de măsurabilitate; enunţurile acestor criterii pot fi luate ca definiţii ale măsurabilităţii, echivalente cu definiţia de mai sus.

Propoziţia 1. **O mulţime mărginită $A \subset R$ este măsurabilă Jordan, dacă şi numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există o reuniune finită de intervale mărginite $P_\varepsilon \subset A$ şi o reuniune finită de intervale mărginite $Q_\varepsilon \supset A$ astfel ca**

$$m(Q_\varepsilon) - m(P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Să presupunem întîi că A este măsurabilă, deci

$$m(A) = \sup_{P \subset A} m(P) = \inf_{Q \supset A} m(Q).$$

Fie $\varepsilon > 0$. Există două reuniuni finite de intervale P_ε și Q_ε din $\mathcal{P}$ astfel ca $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$ și

$$m(A) < m(P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m(Q_\varepsilon) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Adunînd membru cu membru aceste inegalități, obținem

$$m(Q_\varepsilon) < m(P_\varepsilon) + \varepsilon$$

adică

$$m(Q_\varepsilon) - m(P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Reciproc, să presupunem că pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există două reuniuni finite P_ε și Q_ε din $\mathcal{P}$ astfel ca $P_\varepsilon \subset A \subset AQ_\varepsilon$ și $m(Q_\varepsilon) - m(P_\varepsilon) < \varepsilon$ și să arătăm că A este măsurabilă. Avem

$$m(P_\varepsilon) \leqslant m_i(A) \leqslant m_e(A) \leqslant m(Q_\varepsilon)$$

de unde

$$m_e(A) - m_i(A) \leqslant m(Q_\varepsilon) - m(P_\varepsilon) < \varepsilon$$

adică $m_e(A) - m_i(A) \leqslant \varepsilon$. Deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă că $m_e(A) - m_i(A) = 0$, adică $m_i(A) = m_e(A)$, deci A este măsurabilă.

Propoziția 2. Dacă A este o mulțime măsurabilă Jordan și dacă pentru un anumit număr I avem $m(P) \leqslant I \leqslant m(Q)$, oricare ar fi reuniunile finite de intervale P și Q din $\mathcal{P}$, astfel ca $P \subset A \subset Q$, atunci $I = m(A)$.

Într-adevăr, din inegalitatea $m(P) \leqslant I \leqslant m(Q)$, deducem $\sup\limits_{P \subset A} m(P) \leqslant I \leqslant \inf\limits_{Q \supset A} m(Q)$, adică $m_i(A) \leqslant I \leqslant m_e(A)$; deoarece A este măsurabilă, avem $m_i(A) = m_e(A) = m(A)$, de unde $I = m(A)$.

Propoziția 3. O mulțime mărginită $A \subset R$ este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă există două șiruri (P_n) și (Q_n) de reuniuni finite de intervale mărginite, astfel încît $P_n \subset A \subset Q_n$ pentru fiecare n și astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} m(P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} m(Q_n)$. Limita comună este egală cu măsura mulțimii A:

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m(P_n) = \lim_{n\to\infty} m(Q_n).$$

Să presupunem întîi că A este măsurabilă. Luînd $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $(n = 1,2,\ldots)$, există reuniuni finite de intervale mărginite P_n și Q_n astfel încît $P_n \subset A \subset Q_n$ și

$$m(Q_n) - m(P_n) < \frac{1}{n}.$$

Pe de altă parte

$$m(P_n) \leqslant m(A) \leqslant m(Q_n).$$

Rezultă atunci că

$$m(A) - m(P_n) \leqslant m(Q_n) - m(P_n) < \frac{1}{n}$$

$$m(Q_n) - m(A) \leqslant m(Q_n) - m(P_n) < \frac{1}{n}$$

și deci $\lim\limits_{n\to\infty} [m(A) - m(P_n)] = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} [m(Q_n) - m(A)] = 0$, adică

$$\lim_{n\to\infty} m(P_n) = \lim_{n\to\infty} m(Q_n) = m(A).$$

Reciproc, să presupunem că există două șiruri (P_n) și (Q_n) de reuniuni finite de intervale mărginite astfel ca $P_n \subset A \subset Q_n$ pentru fiecare n și

$$\lim_{n\to\infty} m(P_n) = \lim_{n\to\infty} m(Q_n).$$

Deoarece

$$m(P_n) \leqslant m_i(A) \leqslant m_e(A) \leqslant m(Q_n)$$

pentru orice n, rezultă că

$$m_i(A) = m_e(A) = \lim_{n\to\infty} m(P_n) = \lim_{n\to\infty} m(Q_n)$$

deci A este măsurabilă Jordan.

Propoziția 4. Dacă A_1 și A_2 sînt mulțimi măsurabile Jordan, atunci $A_1 \cup A_2$ și $A_1 - A_2$ sînt măsurabile Jordan. Dacă, în plus $A_1 \cap A_2 = \Phi$, atunci

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece A_1 și A_2 sînt măsurabile, există patru reuniuni finite de intervale mărginite P_1, P_2, Q_1, Q_2, astfel ca

$$P_1 \subset A_1 \subset Q_1, \quad P_2 \subset A_2 \subset Q_2$$

și

$$m(Q_1 - P_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m(Q_2 - P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Să arătăm întîi că $A_1 \cup A_2$ este măsurabilă. Avem

$$P_1 \cup P_2 \subset A_1 \cup A_2 \subset Q_1 \cup Q_2$$

și

$$(Q_1 \cup Q_2) - (P_1 \cup P_2) = (Q_1 \cup Q_2) \cap \mathbf{C}(P_1 \cup P_2) = (Q_1 \cup Q_2) \cap (\mathbf{C}P_1 \cap \mathbf{C}P_2) =$$
$$= (Q_1 \cap \mathbf{C}P_1 \cap \mathbf{C}P_2) \cup (Q_2 \cap \mathbf{C}P_1 \cap \mathbf{C}P_2) \subset (Q_1 \cap \mathbf{C}P_1) \cup (Q_2 \cap \mathbf{C}P_2) =$$
$$= (Q_1 - P_1) \cup (Q_2 - P_2)$$

deci

$$m[(Q_1 \cup Q_2) - (P_1 \cup P_2)] \leqslant m(Q_1 - P_1) + m(Q_2 - P_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

adică $A_1 \cup A_2$ este măsurabilă.

Să arătăm că $A_1 - A_2$ este măsurabilă. Avem

$$P_1 - Q_2 \subset A_1 - A_2 \subset Q_1 - P_2$$

și

$$(Q_1 - P_2) - (P_1 - Q_2) = (Q_1 \cap \mathbf{C}P_2) \cap \mathbf{C}(P_1 \cap \mathbf{C}Q_2) = (Q_1 \cap \mathbf{C}P_2) \cap (\mathbf{C}P_1 \cup Q_2) =$$
$$= (Q_1 \cap \mathbf{C}P_2 \cap \mathbf{C}P_1) \cup (Q_1 \cap \mathbf{C}P_2 \cap Q_2) \subset (Q_1 \cap \mathbf{C}P_1) \cup (Q_2 \cap \mathbf{C}P_2) =$$
$$= (Q_1 - P_1) \cup (Q_2 - P_2)$$

de unde

$$m[(Q_1 - P_2) - (P_1 - Q_2)] \leqslant m(Q_1 - P_1) + m(Q_2 - P_2) < \varepsilon$$

adică $A_1 - A_2$ este măsurabilă.

Să presupunem acum că $A_1 \cap A_2 = \Phi$ și să arătăm că

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

Fie (P_1^n), (Q_1^n), (P_2^n), (Q_2^n) patru șiruri de reuniuni finite de intervale mărginite astfel încît

$$P_2^n \subset A_1 \subset Q_1^n \text{ și } P_2^n \subset A_2 \subset Q_1^n, \text{ pentru orice } n \in N,$$

și $\lim\limits_{n\to\infty} m(P_1^n) = \lim\limits_{n\to\infty} m(Q_1^n) = m(A_1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} m(P_2^n) = \lim\limits_{n\to\infty} m(Q_2^n) = m(A_2)$.

Deoarece A_1 și A_2 sînt disjuncte și $P_1^n \subset A_1$, $P_2^n \subset A_2$ avem $P_1^n \cap P_2^n = \Phi$ pentru fiecare n, deci

$$m(P_1^n \cup P_2^n) = m(P_1^n) + m(P_2^n).$$

Pe de altă parte,

$$m(Q_1^n \cup Q_2^n) \leqslant m(Q_1^n) + m(Q_2^n).$$

Atunci

$$m(P_1^n) + m(P_2^n) \leqslant m(A_1 \cup A_2) \leqslant m(Q_1^n) + m(Q_2^n).$$

Trecînd la limită în aceste inegalități obținem

$$m(A_1) + m(A_2) \leqslant m(A_1 \cup A_2) \leqslant m(A_1) + m(A_2)$$

adică

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

Observație. Deoarece $\mathcal{M}$ este un clan, rezultă că intersecția $A \cap B$ a două mulțimi măsurabile A și B, este tot o mulțime măsurabilă.

Ca și pentru reuniunile finite de intervale mărginite, măsura mulțimilor măsurabile Jordan are, încă, următoarele proprietăți.

1) $m(A_1 \cup A_2) \leqslant m(A_1) + m(A_2)$

2) $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$

3) $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$, dacă mulțimile A_i sînt disjuncte două cîte două

4) $m(A_1) \leqslant m(A_2)$, dacă $A_1 \subset A_2$

5) $m(A_1 - A_2) = m(A_1) - m(A_2)$, dacă $A_2 \subset A_1$.

Putem da acum criterii de măsurabilitate cu ajutorul mulțimilor măsurabile înseși. De aici va rezulta, în particular, că aplicînd mulțimilor măsurabile procedeul de extensiune aplicat reuniunilor finite de intervale mărginite, rămînem tot în clasa mulțimilor măsurabile Jordan. (Se poate depăși această clasă aplicînd alt procedeu, de exemplu, folosind reuniuni infinite de intervale mărginite; se obțin atunci mulțimile măsurabile în sensul lui Lebesgue.)

Propoziția 5. Fie $M \subset R$ o mulțime mărginită. Dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există două mulțimi măsurabile Jordan A și B astfel ca $A \subset M \subset B$ și $m(B) - m(A) < \varepsilon$ atunci M este măsurabilă Jordan.

Fie $\varepsilon > 0$ și fie A și B două mulțimi măsurabile astfel ca $A \subset M \subset B$ și $m(B) - m(A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece

$$\sup_{P \subset A} m(P) = m(A) \text{ și } \inf_{Q \supset B} m(Q) = m(B),$$

există o reuniune finită de intervale mărginite $P \subset A$ și o reuniune finită de intervale mărginite $Q \supset B$, astfel ca

$$m(A) - m(P) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad m(Q) - m(B) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Atunci $P \subset M \subset Q$ și

$$m(Q) - m(P) \leqslant m(Q) - m(B) + m(B) - m(A) + m(A) - m(P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

deci M este măsurabilă.

Corolar. **Dacă există două șiruri (A_n) și (B_n) de mulțimi măsurabile Jordan astfel ca $A_n \subset M \subset B_n$ pentru orice $n \in N$ și**

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n)$$

atunci M este măsurabilă și măsura sa $m(M)$ este egală cu limita comună a celor două șiruri de măsuri.

Avem $\lim_{n\to\infty} [m(B_n) - m(A_n)] = 0$, deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$, astfel încît, pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$m(B_n) - m(A_n) < \varepsilon,$$

deci M este măsurabilă. Atunci

$$m(A_n) \leqslant m(M) \leqslant m(B_n)$$

și deci, trecînd la limită,

$$m(M) = \lim_{n\to\infty} m(A_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n).$$

2. Mulțimi de măsură Jordan nulă

Mulțimile care au măsura Jordan nulă prezintă un interes deosebit. Reamintim întîi că avem totdeauna

$$0 \leqslant m_i(A) \leqslant m_e(A)$$

pentru orice mulțime $A \subset R$. Rezultă de aici că:

Orice mulțime cu măsura exterioară nulă este măsurabilă Jordan și are măsură nulă.

De aceea nu vom mai spune mulțime măsurabilă Jordan de măsură nulă, ci, mai simplu, mulțime de măsură Jordan nulă.

Propoziția 6. **O mulțime mărginită $A \subset R$ este de măsură Jordan nulă dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o familie finită de intervale deschise mărginite $I_1, I_2, \ldots, I_n$ care acoperă pe A, astfel încît**

$$\sum_{i=1}^{n} m(I_i) < \varepsilon.$$

Să presupunem întîi că $m(A) = 0$, deci $m_e(A) = 0$, și fie $\varepsilon > 0$. Deoarece

$$m_e(A) = \inf_{Q \supset A} m(Q)$$

unde Q sînt reuniuni finite de intervale mărginite, există o asemenea mulțime $Q \supset A$ cu $m(Q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Să scriem Q sub formă de reuniune finită de intervale mărginite disjuncte:

$$Q = \bigcup_{i=1}^{n} J_i.$$

Avem deci

$$\sum_{i=1}^{n} m(J_i) = m(Q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fiecărui interval J_i, cu extremitățile a_i și b_i, să-i adăugăm intervale *deschise*, $\left(a_i - \frac{\varepsilon}{8^n}, a_i + \frac{\varepsilon}{8^n}\right)$ și $\left(b_i - \frac{\varepsilon}{8^n}, b_i + \frac{\varepsilon}{8^n}\right)$ fiecare de lungime $\frac{\varepsilon}{4^n}$. Obținem un interval deschis I_i, a cărui lungime verifică inegalitatea

$$m(I_i) \leqslant m(J_i) + \frac{\varepsilon}{4^n} + \frac{\varepsilon}{4^n} = m(J_i) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Familia de intervale mărginite *deschise* $I_1, I_2, \ldots, I_n$ acoperă pe A și

$$\sum_{i=1}^{n} m(I_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(m(J_i) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{i=1}^{n} m(J_i) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Reciproc, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există o familie finită de intervale mărginite (deschise sau nu) $I_1, I_2, \ldots, I_n$ care acoperă pe A, cu $\sum_{i=1}^{n} m(I_i) < \varepsilon$, rezultă că $m_e(A) < \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$, deci $m_e(A) = 0$, și deci A este de măsură Jordan nulă.

Proprietățile mulțimilor de măsură Jordan nulă sînt următoarele:

1) Dacă A este de măsură Jordan nulă, atunci orice submulțime $B \subset A$ este de măsură Jordan nulă.

Într-adevăr, $m_e(B) \leqslant m_e(A) = 0$.

2) Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt de măsură Jordan nulă, atunci reuniunea lor este de măsură Jordan nulă.

Într-adevăr, reuniunea lor este măsurabilă și

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = 0.$$

Se poate da acum un criteriu de măsurabilitate Jordan, cu ajutorul mulțimilor de măsură nulă.

Propoziția 7. O mulțime mărginită $A \subset E$ este măsurabilă Jordan, dacă și numai dacă frontiera sa are măsura Jordan nulă.

Să presupunem întîi că A este măsurabilă și fie $\varepsilon > 0$. Există două reuniuni finite de intervale mărginite P și Q astfel încît $P \subset A \subset Q$ și $m(Q) - m(P) < \varepsilon$. Să notăm cu $\mathring{P}$ interiorul mulțimii P (obținut din P prin înlăturarea extremităților intervalelor ce compun pe P) și cu $\bar{Q}$ aderența lui Q (obținută din Q prin adăugarea extremităților intervalelor ce compun pe Q). Evident, $\mathring{P} \subset P$ și $Q \subset \bar{Q}$ deci $\mathring{P} \subset A \subset \bar{Q}$ iar $m(\mathring{P}) = m(P)$ și $m(\bar{Q}) = m(Q)$ (deoarece punctele adăugate sau înlăturate au măsura nulă), deci $M(\bar{Q}) - m(\mathring{P}) < \varepsilon$, sau

$$m(\bar{Q} - \mathring{P}) < \varepsilon.$$

Deoarece $\mathring{P} \subset A$ și $\mathring{P}$ este deschisă, nici un punct frontieră al mulțimii A nu aparține lui $\mathring{P}$, deci $Fr\, A \subset \mathbf{C}\mathring{P}$. Pe de altă parte $A \subset \bar{Q}$ deci $\mathrm{Fr}\, A \subset \bar{Q}$. Deducem atunci că $\mathrm{Fr}\, A \subset \bar{Q} \cap \mathbf{C}\mathring{P} = \bar{Q} - \mathring{P}$, deci $\bar{Q} - \mathring{P}$ este o reuniune finită de intervale mărginite, care conține mulțimea $\mathrm{Fr}A$. Deoarece $m(\bar{Q} - \mathring{P}) < \varepsilon$, rezultă că $m_e(\mathrm{Fr}A) < \varepsilon$; ε fiind arbitrar deducem că $m_e(\mathrm{Fr}A) = 0$, deci $m(\mathrm{Fr}A) = 0$.

Reciproc să presupunem că $m(\mathrm{Fr}A) = 0$ și fie $\varepsilon > 0$. Există o reuniune finită de intervale mărginite $S \supset \mathrm{Fr}A$, astfel ca $m(S) < \varepsilon$.

Să notăm cu P mulțimea punctelor din A care nu aparțin mulțimii S, adică $P = A - S$. Avem $P \subset A$ și $P \cap S = \Phi$. Dar mulțimea P este o reuniune finită de intervale mărginite, avînd ca extremități o parte din extremitățile intervalelor din S. Într-adevăr, mulțimea $A - S$ nu mai are nici un punct frontieră, deci toate punctele sale îi sînt puncte interioare, și o dată cu un punct x conține un întreg interval I_x.

Mulțimea $Q = P \cup S$ este o reuniune finită de intervale mărginite și $A \subset Q$, deoarece

$$Q = P \cup S = (A - S) \cup S = (A \cap \mathbf{C}S) \cup S = A \cup S \supset A.$$

Pe de altă parte, deoarece $P \cap S = \Phi$, avem $m(P \cup S) = m(P) + m(S)$ deci

$$m(Q) - m(P) = m(P \cup S) - m(P) = m(P) + m(S) - m(P) - m(S) < \varepsilon$$

adică A este măsurabilă.

Exemple. 1) Orice mulțime formată dintr-un singur punct, $\{a\}$, are măsură Jordan nulă, deoarece pentru orice $\varepsilon > 0$, intervalul $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, acoperă pe $\{a\}$ și are lungimea $< \varepsilon$.

2) O mulțime finită $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ are măsura Jordan nulă, deoarece este reuniunea mulțimilor $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}$.

3) Se poate arăta că mulțimea triadică a lui Cantor este perfectă (închisă și fără puncte izolate), nu este numărabilă (este echivalentă cu mulțimea tuturor numerelor reale) și are măsura Jordan nulă.

Mulțimea triadică a lui Cantor se obține astfel: Se împarte intervalul $[0, 1]$ în trei părți egale și se scoate interiorul segmentului de la mijloc. Fiecare din cele două intervale rămase se împarte în cîte trei părți egale și se scot interioarele intervalelor de la mijloc. Fiecare din cele patru părți rămase se împarte în cîte trei părți egale și se îndepărtează interioarele intervalelor de la mijloc, și așa mai departe, indefinit.

4) Mulțimile numărabile nu au, în general, măsura Jordan nulă. Într-adevăr, în general, aceste mulțimi nici nu sînt măsurabile Jordan, cum este de exemplu mulțimea punctelor raționale din $[0,1]$.

3. Mulțimi neglijabile

După cum am specificat mai înainte, putem depăși clasa mulțimilor măsurabile Jordan, dacă folosim, nu reuniuni *finite* de intervale mărginite, ci reuniuni *numărabile* de asemenea intervale. Se obțin astfel mulțimile măsurabile (în sensul lui) Lebesgue.

Noi vom avea nevoie numai de mulțimile de măsură Lebesgue nulă, care vor fi numite, de asemenea, *mulțimi neglijabile.*

Pentru a simplifica scrisul, vom da următoarea definiție, care, de altfel, va fi reluată în capitolul despre serii. Dacă (α_n) este un șir de numere $\geqslant 0$, atunci limita α (finită sau $+\infty$) a șirului crescător al sumelor $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)_{1 \leqslant n < +\infty}$ va fi numită suma numerelor $(\alpha_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ și vom scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha.$$

Așadar,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sup_{n \in N} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .$$

Definiție. **Spunem că o mulțime $A \subset R$ (mărginită sau nemărginită) este de măsură Lebesgue nulă, sau neglijabilă, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un șir (I_n) de intervale deschise care acoperă pe A, astfel încît**

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon.$$

Unele din intervalele I_n pot fi, eventual, vide. Pentru intervalele vide I_n avem $m(I_n) = \Phi$.

Din propoziția 6 deducem că:

Orice mulțime de măsură Jordan nulă este neglijabilă.

Există însă mulțimi neglijabile care nu sînt măsurabile Jordan. De exemplu, mulțimea punctelor raționale din [0,1] nu este măsurabilă Jordan, dar, după cum va rezulta mai jos, este neglijabilă, fiind numărabilă.

Proprietățile mulțimilor neglijabile sînt următoarele:

1) Dacă A este neglijabilă, atunci orice submulțime $B \subset A$ este neglijabilă.

2) Dacă (A_n) este un șir de mulțimi neglijabile, atunci reuniunea lor este o mulțime neglijabilă.

Să demonstrăm întîi prima proprietate. Deoarece A este neglijabilă, pentru orice $\varepsilon>0$ există un șir (I_n) de intervale deschise care acoperă pe A, deci și pe B, astfel încît

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon.$$

Urmează că B este de asemenea neglijabilă.

Să demonstrăm a doua proprietate. Fie $\varepsilon>0$. Deoarece mulțimile A_n sînt neglijabile, pentru fiecare n există un șir $(I_{np})_{1 \leqslant p < +\infty}$ de intervale deschise care acoperă pe A_n, astfel încît

$$\sum_{p=1}^{\infty} m(I_{np}) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Atunci șirul dublu (I_{np}) de intervale deschise acoperă reuniunea $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ și suma lungimilor acestor intervale este

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} m(I_{np}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2_i} = \varepsilon$$

deci $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ este neglijabilă.

Exemple. 1) Orice mulțime formată dintr-un număr finit de puncte este neglijabilă, deoarece are măsură Jordan nulă.

2) Orice mulțime numărabilă $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ este neglijabilă, deoarece este reuniunea șirului de mulțimi neglijabile $A_n = \{a_n\}$.

Rezultă că mulțimea N a numerelor naturale și mulțimea Q a numerelor raționale sînt neglijabile, deoarece sînt numărabile.

3) Există mulțimi infinite nenumărabile care sînt neglijabile. De exemplu mulțimea triadică a lui Cantor este neglijabilă, fiind de măsură Jordan nulă.

4. Mulțimi plane măsurabile Jordan

Să considerăm planul R^2 ca produs cartezian $R \times R$ al dreptei reale cu ea însăși. Aceasta revine la a considera punctele din plan raportate la două axe rectangulare.

Vom considera apoi dreptunghiurile pline, care au laturile paralele cu axele de coordonate, putîndu-și conține una sau mai multe laturi, adică de forma

$$I_1 \times I_2 \{(x, y) | x \in I_1, \ y \in I_2\}$$

unde I_1 și I_2 sînt intervale mărginite pe dreaptă, care-și pot conține sau nu una sau ambele extremități. Aria unui asemenea dreptunghi se definește prin egalitatea

$$s(I_1 \times I_2) = m(I_1) \cdot m(I_2).$$

Conform acestei definiții, punctele sau segmentele paralele cu una din axe sînt dreptunghiuri cu aria nulă. De asemenea, mulțimea vidă $\emptyset \subset R^2$ este un dreptunghi cu aria nulă.

Vom nota cu $\mathcal{P}$ clasa mulțimilor plane care sînt *reuniuni finite de dreptunghiuri* cu laturile paralele cu axele.

Se verifică imediat că $\mathcal{P}$ este un clan:

1) *Reuniunea a două mulțimi din $\mathcal{P}$ este tot o mulțime din $\mathcal{P}$;*

2) *Diferența a două mulțimi din $\mathcal{P}$ este tot o mulțime din $\mathcal{P}$.*

(Într-adevăr diferența a două dreptunghiuri din $\mathcal{P}$ este vidă, un dreptunghi, sau o reuniune de mai multe dreptunghiuri din $\mathcal{P}$.) Orice mulțime P din $\mathcal{P}$ se poate pune sub forma reuniunii unei familii $(D_i)_{i \leqslant 1 \leqslant n}$ de dreptunghiuri din $\mathcal{P}$ care n-au în comun două cîte două, decît cel mult cîte o latură:

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} D_1.$$

Se definește măsura sau aria $s(P)$ a lui P prin egalitatea

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m(D_i).$$

Se demonstrează că aria $s(P)$ depinde numai de P, și nu depinde de modul particular în care P se scrie ca reuniune de dreptunghiuri care n-au în comun decît cel mult laturi.

Aria s definită pe clanul $\mathcal{P}$ este *pozitivă* și *aditivă*, este deci o *măsură*.

Vom căuta acum să extindem noțiunea de arie de la clasa $\mathcal{P}$ la o clasă mai largă de mulțimi plane, care vor fi numite mulțimi măsurabile în sensul lui Jordan.

Fie $A \subset R^2$ o mulțime mărginită oarecare. Se definesc aria (sau măsura) Jordan interioară $s_i(A)$ și aria (sau măsura) Jordan exterioară $s_e(A)$ prin egalitățile

$$s_i(A) = \sup_{P \subset A} s(P), \qquad s_e(A) = \inf_{Q \supset A} s(Q)$$

unde marginea superioară se ia pentru toate mulțimile $P \subset A$ din $\mathcal{P}$, iar marginea inferioară pentru toate mulțimile $Q \supset A$ din $\mathcal{P}$.

Definiție. **Spunem că mulțimea mărginită $A \subset R^2$ are arie Jordan sau este măsurabilă Jordan, dacă $s_i(A) = s_e(A)$. Dacă A este măsurabilă, se definește aria (sau măsura Jordan) $s(A)$ a lui A, prin egalitatea**

$$s(A) = s_i(A) = s_e(A).$$

Toate propozițiile relative la mulțimile măsurabile pe dreaptă rămîn valabile și pentru mulțimi plane măsurabile, și cu aceleași demonstrații, înlocuind reuniunile finite de intervale mărginite, cu reuniuni finite de dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele, iar lungimea m cu aria s.

Propoziția 1. O mulțime mărginită $A \subset R^2$ este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o reuniune finită de dreptunghiuri $P_\varepsilon \subset A$ din $\mathcal{P}$ și o reuniune finită de dreptunghiuri $Q_\varepsilon > A$ din $\mathcal{P}$ astfel ca $s(Q_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Propoziția 2. O mulțime mărginită $A \subset R^2$ este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă există două șiruri de reuniuni finite de dreptunghiuri (P_n) și (Q_n) din $\mathcal{P}$ cu $P_n \subset A \subset Q_n$ pentru fiecare n [și $\lim_{n\to\infty} s(P_n) = \lim_{n\to\infty} s(Q_n)$. În acest caz avem:

$$s(A) = \lim_{n\to\infty} s(P_n) = \lim_{n\to\infty} s(Q_n).$$

Propoziția 3. Dacă A_1 și A_2 sînt măsurabile Jordan, atunci $A_1 \cup A_2$ și $A_1 - A_2$ sînt măsurabile Jordan. Dacă, în plus, $A_1 \cap A_2 = \Phi$, atunci $s(A_1 \cup A_2) = s(A_1) + s(A_2)$.

Așadar, clasa $\mathcal{M}$ a mulțimilor plane măsurabile Jordan este un clan, iar aria s este o măsură pe acest clan.

Se demonstrează că poligoanele pline și cercurile pline sînt mulțimi măsurabile, iar aria lor Jordan este egală cu aria lor obișnuită. Propozițiile următoare arată că putem defini aria Jordan plecînd de la alte mulțimi măsurabile decît de la reuniunile finite de dreptunghiuri; de exemplu, plecînd de la reuniuni finite de poligoane oarecari, sau segmente de cercuri.

Propoziţia 4. **Fie $M \subset R^2$ o mulţime mărginită. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există două mulţimi plane măsurabile A şi B cu $A \subset M \subset B$ şi $s(B) - s(A) < \varepsilon$, atunci M este măsurabilă Jordan.**

Propoziţia 5. **Dacă există două şiruri (A_n) şi (B_n) de mulţimi plane măsurabile cu $A_n \subset M \subset B_n$ pentru orice n şi**

$$\lim_{n\to\infty} s(A_n) = \lim_{n\to\infty} s(B_n)$$

atunci M este măsurabilă Jordan şi

$$s(M) = \lim_{n\to\infty} s(A_n) = \lim_{n\to\infty} s(B_n).$$

Mulţimile $A \subset R$ cu aria exterioară nulă, $s_e(A) = 0$, sînt mulţimile plane de arie (sau măsură) Jordan nulă. Orice submulţime a unei mulţimi de măsură nulă are de asemenea măsură nulă. Orice reuniune finită de mulţimi de măsură nulă are măsura Jordan nulă.

Propoziţia 6. **O mulţime mărginită $A \subset R^2$ este măsurabilă dacă şi numai dacă frontiera sa are arie nulă.**

Din această propoziţie rezultă că poligoanele sînt măsurabile, deoarece frontiera lor este o linie poligonală, care are arie nulă.

5. Mulţimi măsurabile Jordan în spaţiul R^3

Toate rezultatele enunţate pentru mulţimile măsurabile plane rămîn adevărate şi pentru mulţimile măsurabile în spaţiu, dacă se înlocuiesc dreptunghiurile cu laturile paralele cu axele, cu paralelipipedele pline cu feţele paralele cu planele de coordonate şi ariile s cu volumele v.

Printre mulţimile măsurabile Jordan din spaţiu se află poliedrele (pline), sferele, cilindrii, conurile şi toate corpurile studiate în geometrie, iar volumul lor Jordan coincide cu volumul lor obişnuit.

De asemenea, pentru definirea volumului se poate pleca de la reuniuni finite de poliedre, de cilindri, sau alte mulţimi măsurabile, în locul reuniunilor finite de paralelipipede.

Observaţie. Toate rezultatele privind mulţimile măsurabile de pe dreaptă, din plan sau din spaţiu se pot formula unitar, dacă se înlocuiesc cuvintele: *lungime*, *arie* şi *volum*, prin *măsură* şi se desemnează, toate, printr-o aceiaşi literă, de exemplu m, în loc de s sau v. Rezultatele enunţate în acest mod unitar rămîn valabile pentru mulţimi din spaţiul R^n cu n dimensiuni.

§ 2. Integrala în sensul lui Riemann

1. Probleme care conduc la noţiunea de integrală

a) *Problema ariei.* Fie f o funcţie pozitivă mărginită pe un interval $[a, b]$.

Graficul său G este situat deasupra axei Ox. Ne punem problema dacă trapezul curbiliniu $abBA$ mărginit de axa Ox, graficul G şi dreptele $x = a$ şi $x = b$ este o mulţime măsurabilă şi cum se poate calcula aria sa.

Să observăm întîi că, deoarece intervalul $[a, b]$ şi funcţia f sînt mărginite, trapezul curbiliniu $abBA$ este o mulţime mărginită în plan. Pentru a vedea dacă este măsurabilă, vom căuta să-l aproximăm din interior şi din exterior cu poligoane particulare, cu laturile paralele cu axele de coordonate. Anume, să considerăm o diviziune (d) a intervalului $[a, b]$:

(d): $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$.

Pe fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$, ca bază, să construim dreptunghiul cu cea mai mare înălţime posibilă m_i, astfel încît acest dreptunghi să fie conţinut în întregime în trapezul curbiliniu:

$$m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x).$$

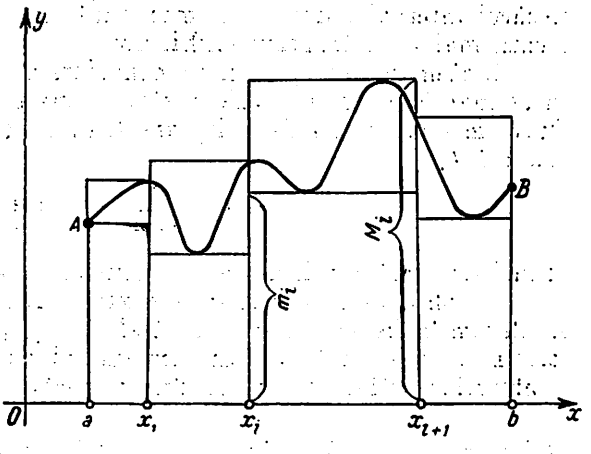


Fig. 107

Ariile dreptunghiurilor astfel construite sînt respectiv

$$m_0(x_1 - x_0),\ m_1(x_2 - x_1), \ldots, m_i(x_{i+1} - x_i), \ldots, m_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Reuniunea acestor dreptunghiuri este un poligon P conţinut în trapezul curbiliniu, a cărui arie este

$$s = s(P) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i). \qquad (1)$$

Pe fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$, ca bază, să construim acum dreptunghiul cu cea mai mică înălţime M_i, astfel încît acest dreptunghi să conţină în întregime porţiunea din graficul funcţiei aflată deasupra intervalului $[x_i, x_{i+1}]$:

$$M_i = \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x).$$

Ariile acestor dreptunghiuri sînt respectiv

$$M_0(x_1 - x_0),\ M_1(x_2 - x_1),\ldots,M_i\,(x_{i+1} - x_i),\ldots,M_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Reuniunea acestor dreptunghiuri este un poligon Q, care conține în întregime trapezul curbiliniu, și a cărui arie este

$$S = s(Q) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,(x_{i+1} - x_i).$$

Avem $P \subset Q$ și $s(P) \leqslant s(Q)$. Poligonul $Q - P$ conține în întregime graficul funcției și aria sa este

$$s(Q - P) = s(Q) - s(P).$$

Poligoanele P și Q aproximează trapezul curbiliniu respectiv prin lipsă și prin exces.

Cu cît numărul intervalelor parțiale este mai mare și cu cît lungimea fiecărui interval parțial este mai mică, cu atît poligoanele P și Q aproximează mai bine trapezul curbiliniu.

Sîntem astfel conduși să considerăm un șir (d_n) de diviziuni din ce în ce mai fine (cu intervale parțiale din ce în ce mai multe și mai mici). Obținem două șiruri de poligoane (P_n) și (Q_n). Dacă ariile lor au o limită comună I,

$$I = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

atunci trapezul curbiliniu este o mulțime măsurabilă și aria sa este I.

Să observăm că putem aproxima trapezul curbiliniu și în alt mod: să alegem în fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$ un punct *arbitrar* ξ_i, și să construim pe acest interval un dreptunghi cu înălțimea $f(\xi_i)$. Ariile dreptunghiurilor astfel construite sînt respectiv

$$f(\xi_0)\ (x_1 - x_0),\ f(\xi_1)\ (x_2 - x_1),\ldots,f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i),\ldots,f(\xi_{n-1})\,(x_n - x_{n-1}).$$

Reuniunea acestor dreptunghiuri este un poligon R, a cărui arie este

$$\sigma = s(R) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i).$$

Poligonul R este cuprins între poligoanele P și Q, $P \subset R \subset Q$, deci $s(P) \leqslant s(R) \leqslant s(Q)$, sau

$$s < \sigma < S.$$

Dacă alegem un șir de diviziuni (d_n) din ce în ce mai fine, și pentru fiecare diviziune în parte alegem niște puncte intermediare ξ_i în mod arbitrar, între ariile poligoanelor (P_n), (Q_n) și (R_n) avem relația

$$s_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n.$$

Dacă $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = I$, atunci de asemenea $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = I$, astfel încît trapezul curbiliniu se poate aproxima şi cu dreptunghiuri R, care nu sînt nici complet conţinute în trapezul curbiliniu, dar nici nu-l conţin în întregime.

b) *Masa unei bare rectilinii.* Să considerăm o bară materială rectilinie, aşezată de-a lungul axei Ox; fie a şi b abscisele extremităţilor barei. Să presupunem că se cunoaşte densitatea liniară $f(x)$ a barei în fiecare punct $x \in [a, b]$, şi că f este o funcţie continuă.

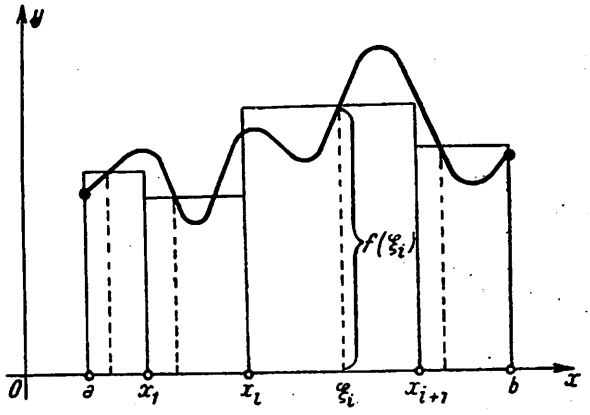


Fig. 108

Dacă densitatea este constantă, $f(x) \equiv \rho$, adică dacă bara este omogenă, masa sa este egală cu produsul dintre densitate şi lungime, $\rho\,(b - a)$.

Dacă densitatea nu este constantă (adică dacă bara nu este omogenă) procedăm în felul următor: împărţim bara în mai multe părţi; aceasta revine la a considera o diviziune (d) a intervalului $[a, b]$:

$$(d) : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

În fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$ să alegem un punct intermediar ξ_i, şi să considerăm, într-o primă aproximaţie, că, pe acest interval, bara este omogenă şi că densitatea sa pe acest interval este egală cu densitatea $f(\xi_i)$ în punctul ξ_i ales. Masa porţiunii din bară cuprinsă între x_i şi x_{i+1}, considerată omogenă, cu densitatea $f(\xi_i)$, este $f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)$.

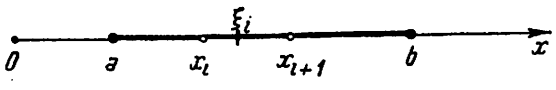


Fig. 109

Masele aproximative ale porţiunilor din bară cuprinse între diferitele puncte ale diviziunii sînt respectiv:

$$f(\xi_0)\,(x_1 - x_0),\ f(\xi_1)\,(x_2 - x_1),\ldots,\ f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i),\ldots,\ f(\xi_{n-1})\,(x_n - x_{n-1}).$$

Masa totală a barei, calculată cu aproximaţia corespunzătoare diviziunii (d) şi alegerii punctelor intermediare ξ_i, este

$$m_d = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i).$$

Eroarea comisă provine din faptul că pe fiecare interval parţial am considerat densitatea constantă. Ne dăm seama uşor, intuitiv, că dacă

intervalele parțiale sînt din ce în ce mai multe și mai mici (dacă diviziunea este din ce în ce mai fină), atunci și densitatea variază mai puțin în fiecare interval parțial în parte și, deci, eroarea pe care o facem considerînd densitatea constantă pe fiecare asemenea interval este din ce în ce mai mică.

Sîntem astfel conduși să considerăm un șir (d_n) de diviziuni din ce în ce mai fine. Dacă șirul (md_n) al maselor aproximative are o limită m, este natural să considerăm că m este masa totală a barei.

2. Definiția integralei în sensul lui Riemann

Cele două exemple anterioare, diferite, unul din geometrie și altul din fizică, impun cercetarea sumelor de forma $\Sigma_i f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i)$, chiar pentru funcții care nu sînt pozitive. Studiul acestor sume ne va conduce la noțiunea de integrală în sensul lui Riemann.

Fie $[a, b]$ un interval (închis și mărginit), $a \leqslant b$. O familie finită de puncte $d = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ astfel ca

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b$$

se numește *diviziune* a intervalului $[a, b]$. Fiecare din intervalele $[x_i, x_{i+1}]$ se numește *interval parțial* al diviziunii d. Un interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$ poate conține un singur punct, dacă $x_i = x_{i+1}$.

Spunem că o diviziune d' *este mai fină* decît o diviziune d, și scriem $d' \supset d$ sau $d \subset d'$, dacă diviziunea d' conține *toate* punctele diviziunii d (și eventual și alte puncte în plus), adică, dacă fiecare interval parțial al diviziunii d' este conținut în întregime într-un interval parțial al diviziunii d.

Lungimea celui mai mare interval parțial al unei diviziuni $d = (x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ se numește *norma diviziunii* d și se notează $\nu(d)$

$$\nu(d) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Evident, $x_{i+1} - x_i \leqslant \nu(d)$ și dacă $\nu(d) < \delta$, atunci $x_{i+1} - x_i < \delta$, oricare ar fi $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Dacă d' este mai fină decît d atunci $\nu(d') \leqslant \nu(d)$. (Cu cît o diviziune este mai fină, cu atît norma sa este mai mică.)

Dacă însă $\nu(d') \leqslant \nu(d)$, nu rezultă că diviziunea d' este mai fină decît diviziunea d. Diviziunea d' poate fi formată din intervale parțiale mai mici decît cele ale diviziunii d, fără ca diviziunea d' să conțină toate punctele diviziunii d.

Exemplu. $d = \left(a, \frac{a+b}{2}, b\right)$, $d' = \left(a, \frac{a+b}{3}, \frac{2(a+b)}{3}, b\right)$.

Avem $v(d) = \frac{a+b}{2}$ și $v(d') = \frac{a+b}{3}$, deci $v(d') < v(d)$, dar diviziunea d' nu este mai fină decît diviziunea d.

Dacă în fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$ al unei diviziuni d, alegem un punct ξ_i, $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$, punctele alese $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_{n-1}$ se numesc *puncte intermediare* ale diviziunii d.

Evident, pentru aceeași diviziune d, putem alege punctele intermediare (ξ_i) într-o infinitate de moduri, dacă $a < b$.

Dacă $a = b$, orice diviziune d a intervalului $[a, b]$ este formată numai din puncte care coincid cu a. Toate intervalele parțiale ale diviziunii d au lungimea nulă, deci $\nu(d) = 0$. În acest caz, putem alege punctele intermediare ξ_i într-un singur mod și anume $\xi_i = a$.

Fie f o funcție definită pe un interval $[a, b]$.

Să considerăm o diviziune d a acestui interval:

$$d : a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n = b.$$

În fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$ să alegem un punct intermediar ξ_i, $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$, și să formăm produsul $f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i)$ dintre valoarea funcției f în punctul intermediar ξ_i și lungimea intervalului parțial $[x_i, x_{i+1}]$. Obținem astfel produsele:

$$f(\xi_0)\ (x_1 - x_0), f(\xi_1)\ (x_2 - x_1), \ldots, f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i), \ldots, f(\xi_{n-1})\ (x_n - x_{n-1}).$$

Suma acestor produse se notează $\sigma_d\ (f)$ sau σ_d și se numește *sumă riemanniană* (de la numele matematicianului Riemann) a funcției f, corespunzătoare diviziunii d și punctelor intermediare ξ_i:

$$\sigma_d = \sigma_d\ (f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i).$$

Sumele riemanniene se mai numesc *sume integrale*.

Dacă $a = b$, atunci $x_{i+1} = x_i$, deci $x_{i+1} - x_i = 0$ și deci $\sigma_d(f) = 0$ oricare ar fi diviziunea d a intervalului $[a, a]$.

Evident, dacă $a < b$, pentru o aceeași diviziune d putem forma o infinitate de sume integrale, corespunzătoare diferitelor moduri posibile de alegere a punctelor intermediare ξ_i. Notația $\sigma_d(f)$ a sumei integrale nu este completă; ea ar trebui să conțină și punctele intermediare de care depinde, dar aceasta ar complica notația.

Să observăm că dacă unul din intervalele parțiale are lungimea nulă, $x_{i+1} - x_i = 0$, „contribuția" sa în suma integrală este nulă, astfel încît, dacă $a < b$, putem să considerăm numai diviziuni formate din *puncte distincte*:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Problema care se pune acum este dacă, alegînd diviziuni din ce în ce mai fine, formate din intervale din ce în ce mai multe și mai mici, sumele integrale se apropie din ce în ce mai mult de un anumit număr I (finit). Ajungem astfel la următoarea

Definiție. Se spune că funcția f este integrabilă (în sensul lui Riemann) pe intervalul $[a, b]$, dacă pentru orice șir de diviziuni (d_n) cu norma tinzînd către 0, $\nu(d_n) \to 0$, și pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i, șirurile corespunzătoare (σ_{d_n}) de sume integrabile au o limită finită comună I.

Numărul I se numește integrala funcției f pe intervalul $[a, b]$ (în sensul lui Riemann) și se notează

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ sau } \int_a^b f(x) \text{ sau } \int_a^b f\,dx \text{ sau } \int_a^b f.$$

Notația $\int_a^b f(x)\,dx$ se citește *integrală de la a la b din $f(x)\,dx$*.

Semnul $\int$ se numește *semn de integrare*, sau semnul integralei; a și b se numesc limite de integrare: a este *limita inferioară*, iar b este *limita superioară*; intervalul $[a, b]$ se numește *interval de integrare*; funcția f se numește *funcția de integrat*; x se numește *variabila de integrare*. Variabila de integrare se poate nota cu orice literă, t, u, v, y, x etc. Astfel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha.$$

Dacă $a < b$, se definește $\int_a^b f(x)\,dx$ prin egalitatea

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemple. 1) Orice funcție f definită pe un interval $[a, a]$ cu extremitățile egale este integrabilă pe acest interval și

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Într-adevăr, avem $\sigma_d(f) = 0$, oricare ar fi diviziunea d a intervalului $[a, a]$. Așadar, dacă $\nu(d_n) \to 0$, atunci $\sigma_{d_n} \to 0$, deci f este integrabilă și $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2) Orice funcție constantă $f(x) \equiv \alpha$ definită pe un interval $[a, b]$ este integrabilă și

$$\int_a^b \alpha\,dx = \alpha(b-a).$$

Într-adevăr, oricare ar fi diviziunea d și punctele intermediare ξ_i avem $f(\xi_i) = \alpha$, deci

$$\sigma_d = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha\,(x_{i+1} - x_i) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \alpha(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1}) = \alpha(x_n - x_0) = \alpha(b - a).$$

Pentru orice șir (d_n) de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$ avem $\sigma_{d_n} \to \alpha(b - a)$, deci f este integrabilă și $\int_a^b f(x)\,dx = \alpha\,(b - a)$, adică $\int_a^b \alpha\,dx = \alpha(b - a)$.

3) Funcţia f definită pe intervalul $[a, b]$, $a < b$, astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \text{ este raţional} \\ 1, \text{ dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

nu este integrabilă în sensul lui Riemann.

În adevăr, fie (d_n) un şir de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$. Dacă în fiecare diviziune alegem punctele intermediare ξ_i *raţionale*, avem $f(\xi_i) = 0$, deci sumele integrale corespunzătoare σ_{d_n} sînt toate nule şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{d_n} = 0$. Dacă în fiecare diviziune alegem punctele intermediare ξ_i' *iraţionale*, avem $f(\xi_i') = 1$ şi sumele integrale corespunzătoare σ'_{d_n} sînt toate egale cu $b-a$:

$$\sigma'_{d_n} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = b - a,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma'_{d_n} = b - a \neq 0$. Aşadar, pentru alegeri diferite ale punctelor intermediare, sumele integrale au limite *diferite*. Rezultă că funcţia f nu este integrabilă în sensul lui Riemann.

O b s e r v a ţ i i. 1° După o definiţie mai generală a integralei dată de Lebesgue, funcţia din exemplul 3 este integrabilă (în sensul lui Lebesgue), şi integrala sa (în sensul lui Lebesgue) este egală cu 0.

2° În definiţia integrabilităţii este suficient să se presupună că pentru fiecare şir (d_n) de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$, şi pentru fiecare alegere a punctelor intermediare, şirul sumelor integrale (σ_{d_n}) are limită finită. Rezultă atunci că toate şirurile (σ_{d_n}) au o limită finită comună I, oricare ar fi şirul de diviziuni (d_n) cu $\nu(d_n) \to 0$ şi oricare ar fi punctele intermediare.

Într-adevăr, dacă pentru două şiruri de diviziuni (d'_n) şi (d''_n) cu $(d'_n) \to 0$ şi $(d''_n) \to 0$ am avea $\sigma'_{d_n} \to I'$ şi $\sigma''_{d_n} \to I''$ cu $I' \neq I''$, atunci pentru următorul şir de diviziuni

$$d'_1,\ d''_1,\ d'_2,\ d''_2,\ \ldots,\ d'_n,\ d''_n,\ \ldots$$

şirul normelor

$$\nu(d'_1),\ \nu(d''_1),\ \ldots,\ \nu(d'_n),\ \nu(d''_n),\ \ldots$$

tinde de asemenea către 0, dar şirul sumelor integrale

$$\sigma d'_1,\ \sigma d''_1,\ \ldots,\ \sigma d'_1,\ \sigma d''_n,\ \ldots$$

nu ar avea limită.

3° Dacă ştim că funcţia f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, pentru calculul integralei este suficient să luăm un *singur* şir particular (d_n) de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$, şi de asemenea nişte puncte intermediare particulare în fiecare diviziune. Ştim atunci că $\sigma_{d_n} \to \int_a^b f(x)\,dx$.

Astfel, putem alege diviziunea d_n formată din n intervale parţiale, de aceeaşi lungime, şi anume $\frac{b-a}{n}$; în fiecare asemenea interval parţial putem alege punctul intermediar la una din extremităţile acestui interval sau la mijlocul său.

Sumele integrale corespunzătoare se pot calcula mai uşor. Alegînd diviziunea (d_n) cu un număr suficient de mare de intervale parţiale, suma integrală corespunzătoare σd_n poate să difere oricît de puţin de valoarea integralei.

În acest mod se calculează integrala cu aproximaţie.

4° Să considerăm un singur şir (Δ_n) de diviziuni, şi anume, pentru fiecare $n \in N$, diviziunea Δ_n este formată din n intervale parţiale de aceeaşi lungime $\frac{b-a}{n}$:

$$\Delta_n : a,\ a+\frac{b-a}{n},\ a+\frac{2(b-a)}{n},\ \ldots,\ a+\frac{i(b-a)}{n},\ \ldots,\ a+\frac{n(b-a)}{n}=b.$$

Avem $\nu(\Delta_n)=\frac{b-a}{n}$, deci $\nu(\Delta_n)\to 0$.

Pentru o alegere oarecare a punctelor intermediare, să notăm cu σ_n suma integrală corespunzătoare diviziunii Δ_n:

$$\sigma_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\frac{b-a}{n}.$$

Se poate arăta că funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă şirul (σ_n) are o limită finită unică I, independentă de alegerea punctelor intermediare; limita I este egală cu integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

Lăsăm demonstraţia acestui fapt pe seama cititorului, ca exerciţiu.

5° La începuturile analizei, suma integralei $\sum f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$ era notată $\sum_a^b f(x)\,\Delta x$, unde Δx reprezenta lungimea comună a intervalelor unei diviziuni Δ_n. Notaţia $\int_a^b f(x)\,dx$ aminteşte această notaţie a sumei integrale: semnul de integrare $\int$ provine din litera S prin alungire, iar dx provine din Δx.

Trebuie observat că semnul de diferenţială dx care apare în notaţia integralei nu are justificare teoretică, dar s-a păstrat prin tradiţie. Avantajul semnului de diferenţială este acela că dacă f este o funcţie de două sau mai multe variabile semnul diferenţialei indică variabila de integrare, de exemplu

$$\int_a^b f(x,\ y)\ dx \quad \text{sau} \quad \int_a^b f(x,\ y)\ dy.$$

Semnul de diferenţială prezintă de asemenea un avantaj la calculul integralei unei funcţii compuse prin metoda schimbării de variabilă, unde, dacă în mod formal se interpretează dx ca o diferenţială, se pot da reguli simple pentru calculul integralei prin metoda schimbării de variabilă.

Se observă o analogie între definiţia integralei şi definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii. Ca şi pentru limite de funcţii, se poate da o definiţie cu ε şi δ a integralei, aşa cum rezultă din teorema următoare:

Teorema. Funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă există un număr finit I cu proprietatea că, pentru orice număr $\varepsilon>0$, există un număr $\delta(\varepsilon)>0$, astfel încît, oricare ar fi diviziunea d cu $\nu(d)<\delta(\varepsilon)$, şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare în diviziunea d, să avem $|\sigma_d - I|<\varepsilon$.

În acest caz $I=\int_a^b f(x)\ dx$.

Demonstrație. Să presupunem întîi că f este integrabilă pe $[a, b]$ și să arătăm că numărul $I = \int_a^b f(x)\,dx$ îndeplinește condiția din enunțul teoremei.

Să presupunem, prin absurd, că numărul I ales nu îndeplinește condiția din enunț. Aceasta înseamnă că: există un număr $\varepsilon_0 > 0$, astfel încît oricărui număr $\delta > 0$ îi corespunde o diviziune d (care depinde de δ) cu $\nu(d) < \delta$, și o alegere a punctelor intermediare ξ_i astfel încît pentru suma integrală corespunzătoare să avem $|\sigma_d - I| \geq \varepsilon_0$.

Deoarece $\delta > 0$ este arbitrar, să luăm $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Există deci o diviziune d_n cu $\nu(d_n) < \frac{1}{n}$ și niște puncte intermediare ξ_i astfel încît $|\sigma_{d_n} - I| > \varepsilon_0$.

Am obținut astfel un șir (d_n) de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$ și un șir (σ_{d_n}) de sume integrale cu $|\sigma_{d_n} - I| > \varepsilon_0$, pentru orice $n \in N$. Aceasta înseamnă că I nu este limita șirului (σ_{d_n}), adică șirul (σ_{d_n}) nu tinde către $\int_a^b f(x)\,dx$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza că f este integrabilă pe $[a, b]$.

Reciproc, să presupunem că există un număr finit I care îndeplinește condiția din enunțul teoremei; să arătăm în acest caz că f este integrabilă pe $[a, b]$ și că $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Fie (d_n) un șir oarecare de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$ și fie (σ_{d_n}) șirul corespunzător de sume integrale, pentru o alegere arbitrară a punctelor intermediare în fiecare diviziune.

Pentru a arăta că f este integrabilă pe $[a, b]$ trebuie să arătăm că $\sigma_{d_n} \to I$.

Fie pentru aceasta un număr $\varepsilon > 0$ oarecare. Lui ε ales îi corespunde un număr $\delta(\varepsilon)$ astfel încît $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ să implice $|\sigma_d - I| < \varepsilon$.

Dar $\nu(d_n) \to 0$, deci, pentru numărul $\delta(\varepsilon) > 0$ obținut, există un număr $N(\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ să avem $\nu(d_n) < \delta(\varepsilon)$, și deci $|\sigma_{d_n} - I| < \varepsilon$.

Așadar, pentru numărul $\varepsilon > 0$ ales am găsit un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ să avem $|\sigma_{d_n} - I| < \varepsilon$. Aceasta înseamnă că $\sigma_{d_n} \to I$.

Cum șirul (d_n) cu $\nu(d_n) \to 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ și că $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Observație. Analogia dintre definiția integralei și definiția limitei unei funcții se poate extinde și asupra notațiilor.

Dacă $\nu(d_n) \to 0$ implică $\sigma_{d_n} \to I$, în loc de $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{d_n} = I$ putem scrie $\lim\limits_{\nu(n)\to 0} \sigma_{d_n} = I$ (sau, încă, $\sigma_{d_n} \to I$ cînd $\nu(d_n) \to 0$).

Dacă pentru *orice* şir (d_n) cu $\nu(d_n) \to 0$ avem $\sigma_{d_n} \to I$, vom scrie, ca şi pentru funcţii:

$$\lim_{\nu(d)\to 0} \sigma_d = I$$

(sau $\sigma_d \to I$ cînd $\nu(d) \to 0$). Cum limita I este, conform definiţiei, integrala funcţiei f, avem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\nu(d)\to 0} \sigma_d(f)$$

(sau $\sigma_d(f) \to \int_a^b f(x)\,dx$ cînd $\nu(d) \to 0$).

În definiţia integrabilităţii nu s-a impus condiţia ca funcţia f să fie mărginită. Această condiţie este însă verificată de la sine, aşa cum rezultă din următoarea

Propoziţie. Dacă funcţia f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, atunci f este mărginită pe $[a, b]$.

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece f este integrabilă, putem găsi o diviziune d astfel încît oricare ar fi punctele intermediare ξ_i să avem

$$|\sigma_d - I| < \varepsilon \text{ sau } I - \varepsilon < \sigma_d < I + \varepsilon, \text{ unde } I = \int_a^b f.$$

Să presupunem, prin absurd, că funcţia f nu este mărginită pe $[a, b]$; atunci există cel puţin un interval al diviziunii d pe care f nu este mărginită; fie $[x_j, x_{j+1}]$ un asemenea interval, şi, pentru a face o alegere, să presupunem că f nu este mărginită superior pe intervalul $[x_j, x_{j+1}]$:

$$\sup_{x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}} f(x) = +\infty.$$

Să alegem punctele $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ pentru $i \neq j$, şi să notăm

$$\Omega = \sum_{i\neq j} f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i).$$

Putem alege acum punctul $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ astfel ca

$$f(\xi_j) > \frac{I - \Omega + 2\varepsilon}{x_{j+1} - x_j}.$$

(Evident, $x_{j+1} - x_j > 0$, deoarece, în caz contrar, intervalul $[x_j, x_{j+1}]$ s-ar reduce la un punct şi funcţia ar fi mărginită pe acest interval.)

Atunci $(f\xi_j)\ (x_{j+1} - x_j) > I - \Omega + 2\varepsilon$

şi

$$\sigma_d = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i\neq j} f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i) + f(\xi_j)\ (x_{j+1} - x_j) =$$

$$= \Omega + f(\xi_j)\ (x_{j+1} - x_j) > \Omega + I - \Omega + 2\varepsilon = I + 2\varepsilon,$$

adică $\sigma_d > I + 2\varepsilon$, ceea ce contrazice inegalitățile $I - \varepsilon < \sigma_d < I + \varepsilon$, care au rezultat din alegerea diviziunii d.

Dacă f nu este mărginită inferior pe intervalul $[x_j, x_{j+1}]$, se alege un punct ξ_j în acest interval, astfel ca $f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) < I - \Omega - 2\varepsilon$ și se obține inegalitatea $\sigma_d < I - 2\varepsilon$, ceea ce contrazice inegalitatea $I - \varepsilon < \sigma_d < I + \varepsilon$.

Rezultă deci că funcția f este mărginită.

3. Criteriul lui Darboux

Vom demonstra acum un criteriu de integrabilitate, în care nu intervine valoarea integralei, și care este analog criteriului lui Cauchy de la șiruri, sau al criteriului lui Cauchy-Bolzano de la limite de funcții.

Fie f o funcție *mărginită* definită pe un interval $[a, b]$, $a < b$, și fie m și M marginile sale pe acest interval:

$$m = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x), \qquad M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x).$$

Avem deci $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pentru orice $x \in [a, b]$.

Să considerăm o diviziune (d) a intervalului $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Funcția f este mărginită pe fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$; să notăm cu m_i, și M_i marginile funcției pe acest interval:

$$m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x), \qquad M_i = \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x).$$

Avem $m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i$, oricare ar fi $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Să formăm sumele

$$s_d = s_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i),$$

$$S_d = S_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Sumele s_d și S_d se numesc *sumele Darboux* ale funcției f, corespunzătoare diviziunii d; s_d este *suma inferioară Darboux*, iar S_d este *suma superioară Darboux*. Avem

$$m(b - a) \leqslant s_d \leqslant \sigma_d \leqslant S_d \leqslant M(b - a),$$

oricare ar fi alegerea punctelor intermediare cu ajutorul cărora s-a format suma riemanniană σ_d.

Într-adevăr, oricare ar fi punctul intermediar $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, avem

$$m \leqslant m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i \leqslant M.$$

Înmulțind toți termenii cu numărul pozitiv $x_{i+1} - x_i$ obținem

$$m(x_{i+1} - x_i) \leqslant m_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i) \leqslant M_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant M(x_{i+1} - x_i).$$

Adunînd membru cu membru cele n inegalități, obținem

$$m\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant M\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_1),$$

adică

$$m(b - a) \leqslant s_d \leqslant \sigma_d \leqslant S_d \leqslant M(b - a).$$

Trebuie observat că, pentru o diviziune dată d, putem forma o infinitate de sume riemanniene σ_d, dar numai două sume Darboux, s_d și S_d.

Legătura dintre sumele Darboux și sumele riemanniene corespunzătoare unei *aceleiași* diviziuni d este dată de egalitatea

$$sd = \inf_{\xi_i} \sigma_d,\ S_d = \sup_{\xi_i} \sigma_d,$$

unde marginea inferioară și cea superioară se consideră pentru toate alegerile posibile ale punctelor intermediare ξ_i.

În adevăr, fie $\varepsilon > 0$; deoarece $m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x)$, în fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$ există un punct ξ_i astfel ca $f(\xi_i) - m_i < \frac{\varepsilon}{b - a}$. Atunci

$$\sigma_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) - m_i](x_{i+1} - x_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a}(x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b - a}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon,$$

deci

$$\sigma_d - \varepsilon \leqslant s_d \leqslant \sigma_d.$$ Rezultă că $s_d = \inf_{\xi_i} \sigma_d$.

La fel se demonstrează cea de-a doua egalitate.

S-a arătat mai sus că pentru o aceeași diviziune d, suma inferioară s_d este mai mică sau egală cu suma superioară S_d. Vom arăta acum că orice sumă inferioară este mai mică decît orice sumă superioară, chiar dacă suma inferioară și cea superioară provin din diviziuni diferite. Pentru aceasta avem nevoie de următoarea

Lemă. Dacă diviziunea d' este mai fină decît diviziunea d, atunci

$$s_d \leqslant s_{d'} \leqslant S_{d'} \leqslant S_d.$$

(Prin trecerea de la o diviziune la o diviziune mai fină, sumele inferioare cresc, iar sumele superioare descresc.)

Fie $[x_i, x_{i+1}]$ un interval parțial al diviziunii d; să presupunem că diviziunea d' mai are un punct c în acest interval, $x_i < c < x_{i+1}$. Așadar, pentru diviziunea d' există două intervale parțiale $[x_i, c]$ și $[c, x_{i+1}]$ în locul intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ al diviziunii d.

Să notăm

$$m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x),\ m' = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant c} f(x),\ m_i'' = \inf_{c \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x).$$

Avem, evident, $m_i \leqslant m_i'$ și $m_i \leqslant m_i''$, deci

$$m_i(c - x_i) \leqslant m_i'(c - x_i),\ m_i(x_{i+1} - c) \leqslant m_i''(x_{i+1} - c)$$

și prin adunarea membru cu membru a acestor inegalități se obține

$$m_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant m_i'(c - x_i) + m_i''(x_{i+1} - c).$$

Așadar, termenul $m_i(x_{i+1} - x_i)$ corespunzător intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ în suma s_d se înlocuiește printr-un număr mai mare sau egal, $m_i'(c - x_i) + m_i''(x_{i+1} - c)$ pentru a obține suma $s(d')$. Acest fapt rămîne valabil dacă diviziunea d' are în intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ mai multe puncte de diviziune; pe de altă parte acest fapt este valabil pentru fiecare interval parțial al diviziunii d. Rezultă atunci că $s_d \leqslant s_{d'}$.

Inegalitatea $S_{d'} \leqslant S_d$ se demonstrează la fel.

Propoziție. Oricare ar fi diviziunile d_1 și d_2, avem $s_{d_1} \leqslant S_{d_2}$. (Orice sumă inferioară este mai mică sau egală cu orice sumă superioară.)

Să notăm cu d diviziunea formată atît cu punctele diviziunii d_1, cît și cu punctele diviziunii d_2. Evident, d este mai fină și decît d_1 și decît d_2. Atunci

$$s_{d1} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant S_{d1},$$
$$s_{d2} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant S_{d2},$$

de unde $s_{d_1} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant S_{d_2}$ și deci $s_{d_1} \leqslant S_{d_2}$.

Corolar. Avem

$$\sup_d s_d \leqslant \inf_d S_d,$$

unde marginile superioare și inferioare se consideră pentru toate diviziunile posibile d, ale intervalului (a, b).

Fie d_0 o diviziune oarecare. Pentru orice diviziune d avem

$$s_d \leqslant S_{d_0},$$

deci mulțimea $\{s_d\}$ a sumelor inferioare este majorată de numărul S_{d_0} (care este un majorant al ei). Această mulțime are deci o margine superioară finită $\underline{I}$ (cel mai mic majorant) și $\underline{I} \leqslant S_{d_0}$.

Deoarece diviziunea d_0 a fost aleasă arbitrar, rezultă că pentru orice diviziune d avem $\underline{I} \leqslant S_d$. Așadar, mulțimea $\{S_d\}$ a sumelor superioare este

minorată ($\underline{I}$ este un minorant al ei). Această mulțime are deci o margine inferioară finită $\bar{I}$ (cel mai mare minorant) și $\underline{I} \leqslant \bar{I}$, adică

$$\sup_d s_d \leqslant \inf_d S_d.$$

Numerele $\underline{I} = \sup_d s_d$ și $\bar{I} = \inf_d S_d$ se numesc *integralele Darboux* ale funcției f; $\underline{I}$ este *integrala inferioară Darboux* iar $\bar{I}$ este *integrala superioară Darboux.*

Pentru orice diviziune d avem

$$s_d \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} < S_d.$$

Integralele Darboux se mai notează și astfel:

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \text{ și } \bar{I} = \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Sîntem acum în măsură să dăm un criteriu de integrabilitate foarte important, care folosește sumele Darboux.

Teorema. O funcție mărginită $f\colon [a, b] \to R$ **este integrabilă pe** $[a, b]$ **dacă și numai dacă, pentru orice număr** $\varepsilon > 0$, **există un număr** $\delta(\varepsilon) > 0$, **astfel încît oricare ar fi diviziunea** d **cu** $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ **să avem** $S_d - s_d < \varepsilon$.

Să presupunem întîi că f este integrabilă pe $[a, b]$ și să notăm cu I integrala sa. Fie $\varepsilon > 0$; conform primului criteriu de integrabilitate, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, oricare ar fi diviziunea d cu $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare, să avem $|\sigma_d - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ sau

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_d < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pentru fiecare asemenea diviziune d avem deci

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \inf_{\xi_i} \sigma_d \leqslant \sup_{\xi_i} \sigma_d \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2},$$

adică

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}$$

și deci $S_d - s_d \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$

Așadar, dacă f este integrabilă, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon)$ astfel încît $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ implică $S_d - s_d < \varepsilon$.

Reciproc, să presupunem că această condiție este verificată, și să arătăm că f este integrabilă.

Rezultă mai întîi că $\bar{I} = \underline{I}$. Într-adevăr, din inegalitatea $s_d \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant S_d$ deducem, pentru $\nu(d) \leqslant \delta(\varepsilon)$,

$$0 \leqslant \bar{I} - \underline{I} \leqslant S_d - s_d \leqslant \varepsilon,$$

adică $0 \leqslant \bar{I} - \underline{I} \leqslant \varepsilon$; deoarece ε este arbitrar rezultă că $\underline{I} = \bar{I}$. Să notăm cu I valoarea comună a integralelor Darboux. Avem:

$$s_d \leqslant I \leqslant S_d \quad \text{și} \quad s_d \leqslant \sigma_d \leqslant S_d,$$

deci $|\sigma_d - I| \leqslant S_d - s_d$.

Dacă $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ atunci $S_d - s_d < \varepsilon$ și deci

$$|\sigma_d - I| < \varepsilon,$$

adică f este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b f(x)\,dx = I$.

Această teoremă va fi numită *criteriul lui Darboux.*

Observație. Din demonstrația acestei teoreme, rezultă că, dacă f este integrabilă, integralele Darboux sînt egale între ele și egale cu integrala Riemann:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Reciproc, se poate arăta că, dacă integralele Darboux sînt egale, funcția este integrabilă în sensul lui Riemann.

Pentru funcția definită pe $[a, b]$ cu $a < b$, prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 1, & \text{dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

avem $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$ și $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 1$.

4. Clase de funcții integrabile

Propoziția 1. Orice funcție f monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Pentru a face o alegere să presupunem că f este crescătoare și că nu este constantă, deci $f(a) < f(b)$. (Pentru funcțiile constante s-a arătat deja că sînt integrabile.)

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$. Avem

$$f(x_i) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{i+1}) \quad \text{pentru} \quad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},$$

deci $m_i = f(x_i)$ şi $M_i = f(x_{i+1})$. Atunci

$$S_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\ (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))\ (x_{i+1} - x_i).$$

Fie $\varepsilon > 0$; dacă $\nu(d < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, atunci $x_{i+1} - x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ pentru $i = 0, 1, \ldots, n-1$, deci, deoarece $f(x_{i+1}) - f(x_i) \geqslant 0$, avem

$$S_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)]\ (x_{i+1} - x_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon.$$

Aşadar, luînd $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, criteriul lui Darboux este verificat, deci f este integrabilă. Dacă f este descrescătoare, demonstraţia se face la fel, ţinînd seama că $m_i = f(x_{i+1})$ şi $M_i = f(x_i)$.

Propoziţia 2. Orice funcţie continuă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Fie d o diviziune. Deoarece f este continuă pe intervalul compact $[x_i, x_{i+1}]$, este mărginită şi-şi atinge marginile pe acest interval; există deci două puncte x_i' şi x_i'' din $[x_i, x_{i+1}]$, astfel ca

$$f(x_i') = m_i,\ f(x_i'') = M_i.$$

Atunci

$$S_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\ (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i'') - f(x_i'))\ (x_{i+1} - x_i).$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece f este continuă pe intervalul compact $[a, b]$, este uniform continuă pe acest interval; numărului ε ales îi corespunde deci un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice $x', x'' \in [a, b]$ cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$.

Pentru orice diviziune d cu $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$, avem $|x_{i+1} - x_i| < \delta(\varepsilon)$, deci $|x_i'' - x_i'| < \delta(\varepsilon)$, şi, prin urmare, $|f(x_i'') - f(x_i')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$. Aşadar, dacă $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$, atunci

$$S_d - s_d = |S_d - s_d| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i'') - f(x_i')|\ (x_{i+1} - x_1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon$$

şi deci f este integrabilă pe $[a, b]$.

5. Criteriul lui Lebesgue

Pentru cele două clase de funcţii integrabile, funcţiile continue şi funcţiile monotone, mulţimea punctelor de discontinuitate este — într-un anumit sens — excepţională: vidă, la funcţiile continue şi cel mult numărabilă, la funcţiile monotone (cap. V, § 4, nr. 2, propoziţia 2). Criteriul lui Lebesgue, care va fi demonstrat mai jos, arată că mulţimea punctelor de continuitate caracterizează complet funcţiile integrabile în sensul lui Riemann. Spre deosebire de celelalte criterii de integrabilitate, care folosesc sumele integrale, criteriul lui Lebesgue are meritul deosebit de a caracteriza funcţiile integrabile numai prin structura acestor funcţii. Vom demonstra mai întîi o teoremă ajutătoare, care constituie ea însăşi un criteriu de integrabilitate.

Teorema 1. (Paul du Bois Reymond). O funcţie $f\colon [a, b] \to R$ **este integrabilă în sensul lui Riemann pe** $[a, b]$ **dacă şi numai dacă este mărginită şi pentru orice număr** $\varepsilon > 0$, **mulţimea**

$$E_\varepsilon = \{x \mid \omega_f(x) \geqslant \varepsilon\}$$

este de măsură Jordan nulă.

Să presupunem întîi că f este integrabilă. Atunci f este mărginită. Să presupunem prin absurd că ar exista un număr $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că mulţimea E_{ε_0} nu este de măsură Jordan nulă, ci de măsură exterioară strict pozitivă: $m_e(E_{\varepsilon_0}) = \alpha > 0$. Deoarece f este integrabilă, conform criteriului lui Darboux există o diviziune d a intervalului $[a, b]$ astfel încît

$$S_d - s_d < \alpha\varepsilon_0.$$

Dacă un interval $[x_j, x_{j+1}]$ conţine puncte x din E_{ε_0}, avem

$$M_j - m_j = \omega_f([x_j, x_{j+1}]) \geqslant \omega_f(x) \geqslant \varepsilon_0$$

iar reuniunea tuturor intervalelor de acest fel conţine pe E_{ε_0}, deci suma lungimilor acestor intervale este $\geqslant \alpha$. Atunci

$$S_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\,(x_{i+1} - x_i) \geqslant$$

$$\geqslant \sum{}' (M_j - m_j)\,(x_{j+1} - x_j) \geqslant \varepsilon_0 \sum (x_{j+1} - x_j) \geqslant \varepsilon_0\alpha$$

unde Σ' se referă numai la intervalele parţiale ce conţin puncte din E_{ε_0}. Am ajuns astfel la contradicţia $\varepsilon_0\alpha \leqslant S_a - s_d < \varepsilon_0\alpha$. Urmează aşadar că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, mulţimea E_ε este de măsură Jordan nulă.

Reciproc, să presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $m_e(E_\varepsilon) = 0$ şi să arătăm că f este integrabilă. Fie $\varepsilon > 0$. Să alegem ε' şi ε'' astfel încît

$$\omega_f([a, b])\,\varepsilon'' < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{şi} \quad (b - a)\,\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deoarece $m_e(E_{\varepsilon''})=0$, există o familie finită de intervale deschise $(J_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ care acoperă pe $E_{\varepsilon''}$, cu suma lungimilor $< \varepsilon'$. Reuniunea F a acestor intervale este o mulțime deschisă. Diferența $E=[a, b]-F$ este o reuniune de intervale și este închisă și mărginită, deci compactă. Conform propoziției din cap. II, § 5, nr. 7, pentru $\varepsilon'' > 0$ ales, există un număr $\delta' > 0$ astfel încît oricare ar fi intervalul $I \subset [a, b] - F$ de lungime $< \delta'$ să avem $\omega_f(I) < \varepsilon''$. Să alegem $\delta = \min\left(\delta', \frac{\varepsilon'}{2p}\right)$. Fie acum d o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$ $\nu(d) < \delta$. Pentru a arăta că f este integrabilă, va fi suficient să arătăm că

$$S_d - s_d < \varepsilon.$$

Vom împărți $S_d - s_d$ în trei părți astfel:

$$S_d - s_d = \sum(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3$$

unde Σ_1 se referă la intervale parțiale care n-au nici un punct comun cu F, Σ_2 se referă la intervale parțiale conținute în F, iar Σ_3 se referă la intervalele parțiale care acoperă o extremitate a unuia din intervalele J_i.

Pentru prima sumă avem:

$$\sum_1(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_1 \omega_f([x_{i+1} - x_i])(x_{i+1} - x_i) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon'' \sum_1 (x_{i+1} - x_i) \leqslant \varepsilon''(b - a),$$

deoarece $[x_i, x_{i+1}] \subset [a, b] - F$ și lungimea intervalelor $[x_1, x_{i+1}]$ este $< \delta$ deci $< \delta'$.

Pentru a doua sumă avem:

$$\sum_2(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < (M - m)\sum_2(x_{i+1} - x_i) \leqslant (M - m)\sum_2 m(J_i) \leqslant$$
$$\leqslant (M - m)\varepsilon'.$$

Pentru a treia sumă avem:

$$\sum_3(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \leqslant (M - m)\sum_3(x_{i+1} - x_i) \leqslant 2p\delta(M - m) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon'(M - m),$$

deoarece numărul extremităților intervalelor J_i este $2p$. Așadar, avem

$$S_d - s_d \leqslant \varepsilon''(b - a) + \varepsilon'(M - m) = \varepsilon''(b - a) + 2\varepsilon'\omega_f([a, b]) < \varepsilon$$

și teorema este complet demonstrată.

Înainte de a enunța criteriul lui Lebesgue, vom demonstra următoarea

Lemă. Dacă $f: [a, b] \to R$ este o funcție mărginită, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, mulțimea $E_\varepsilon = \{x \mid \omega_f(x) \geqslant \varepsilon\}$ este închisă.

Într-adevăr, fie $x_0 \in [a, b]$ un punct de acumulare al lui E_ε.

Să presupunem, prin absurd, că $x_0 \notin E_\varepsilon$, deci că $\omega_f(x_0) < \varepsilon$. Există atunci un interval deschis I_0 cu centrul în x_0, cu $\omega_f(I_0 \cap [a, b]) < \varepsilon$. În inter-

valul I_0 există cel puțin un punct $x \in E_\varepsilon$, deci $\omega_f(x) \geqslant \varepsilon$. Intervalul I_0 este o vecinătate a lui x, deci $\omega_f(I_0 \cap [a, b] \geqslant \omega_f(x) \geqslant \varepsilon$ și am ajuns la o contradicție. Urmează deci că $x_0 \in E_\varepsilon$ și deci mulțimea E_ε este închisă. Teorema următoare este cunoscută sub numele de *„criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann"*.

Teorema 2 (Lebesgue). O funcție f: $[a, b] \to R$ este integrabilă Riemann, dacă și numai dacă este mărginită și mulțimea punctelor în care f este discontinuă este neglijabilă (de măsură Lebesgue nulă).

Să presupunem întîi că f este integrabilă. Atunci f este mărginită. Fie (ε_n) un șir descrescător de numere > 0, convergent către 0. În baza teoremei 1, fiecare mulțime $E_{\varepsilon_n}\{x \mid \omega_f(x) > \varepsilon_n\}$ este de măsură Jordan nulă, deci este neglijabilă și deci reuniunea lor

$$E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\varepsilon_n}$$

este de asemenea neglijabilă. Dar

$$E_0 = \{x \mid x \in [a, b],\ \omega_f(x) > 0\}$$

deci E_0 este formată din toate punctele de discontinuitate ale lui f. Așadar dacă f este integrabilă, mulțimea E_0 a punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă.

Reciproc, să presupunem că f este mărginită și că mulțimea E_0 a punctelor de discontinuitate ale lui f este neglijabilă și să arătăm că f este integrabilă.

Fie $\delta > 0$. Deoarece E_0 este neglijabilă, există un șir (I_n) de intervale deschise care acoperă mulțimea E_0 astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} m(I_n) < \delta$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, avem $E_\varepsilon \subset E_0$, deci (I_n) constituie o acoperire a lui E_ε. Deoarece, conform lemei precedente, E_ε este o mulțime închisă și mărginită, deci compactă, din acoperirea (I_n) se poate extrage o acoperire finită $(I_i)_{1 \leqslant i \leqslant n(\varepsilon)}$ a lui E_ε. Deducem că $m_e(E_\varepsilon) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n(\varepsilon)} m(I_i) \leqslant \delta$. Cum $\delta > 0$ este arbitrar, rezultă că $m_e(E_\varepsilon) = 0$, deci E_ε este de măsură Jordan nulă. Conform teoremei 1, deducem că f este integrabilă și astfel teorema este complet demonstrată.

Observații. 1° Se spune că o proprietate punctuală definită pentru punctele dintr-o mulțime $E \subset R$ are loc aproape peste tot pe E dacă mulțimea punctelor din E în care nu are loc este neglijabilă. Cu această denumire, o funcție este continuă aproape peste tot, dacă mulțimea punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă. Criteriul lui Lebesgue se poate enunța acum astfel:

O funcție f: $[a, b] \to R$ este integrabilă dacă și numai dacă este mărginită, și continuă aproape peste tot pe $[a, b]$.

2° Din criteriul lui Lebesgue rezultă imediat că funcțiile continue și funcțiile monotone sînt integralele, deoarece la funcțiile continue mulțimea punctelor de discontinuitate este vidă, deci neglijabilă, iar la funcțiile monotone mulțimea punctelor de discontinuitate este cel mult numărabilă, deci de asemenea neglijabilă.

§ 3. Proprietățile funcțiilor integrabile

Cu definiția integralei cu șiruri sau cu ε și δ, se pot demonstra atît proprietățile funcțiilor integrabile cît și proprietăți ale integralei.

Cu criteriul lui Darboux sau cu criteriul lui Lebesgue se pot demonstra numai proprietăți de integrabilitate, dar nu se pot demonstra proprietăți ale integralei, deoarece integrala nu apare în enunțul acestor criterii. Folosirea criteriului lui Lebesgue simplifică mult demonstrațiile.

1. Spațiul funcțiilor integrabile. Liniaritatea integralei

Propoziția 1. Dacă f **și** g **sînt integrabile pe** $[a, b]$ **și** $\alpha, \beta \in R$, **atunci funcția** $\alpha f + \beta g$ **este integrabilă pe** $[a, b]$ **și**

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Vom da întîi o demonstrație folosind direct definiția cu șiruri a integrabilității și a integralei. Fie d o diviziune oarecare a lui $[a, b]$; să alegem arbitrar punctele intermediare ξ_i. Avem

$$\sigma_d(\alpha f + \beta g) = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)] (x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) + \beta \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) = \alpha\sigma_d(f) + \beta\sigma_d(g).$$

Fie (d_n) un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$. Pentru fiecare diviziune d_n avem:

$$\sigma_{d_n}(\alpha f + \beta g) = \alpha\sigma_{d_n}(f) + \beta\sigma_{d_n}(g).$$

Deoarece f și g sînt integrabile, avem

$$\sigma_{d_n}(f) \to \int_a^b f, \qquad \sigma_{d_n}(g) \to \int_a^b g,$$

deci

$$\sigma_{d_n}(\alpha f + \beta g) \to \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Rezultă că $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe $[a, b]$ și că

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Să dăm acum o demonstrație a integrabilității funcției $\alpha f + \beta g$ folosind criteriul lui Lebesgue. Să observăm întîi că f și g sînt mărginite, fiind integrabile, deci funcția $\alpha f + \beta g$ este de asemenea mărginită. Dacă notăm cu A mulțimile punctelor de discontinuitate a lui f și cu B mulțimea punctelor de discontinuitate a lui g, mulțimile A și B sînt neglijabile, deci $A \cup B$ este de asemenea neglijabilă. Mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției $\alpha f + \beta g$ este conținută în $A \cup B$ deci este neglijabilă, deci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă. Egalitatea din enunț se obține acum astfel: Deoarece știm că toate funcțiile care intervin în egalitate sînt integrabile, putem alege un șir particular de diviziuni (d_n) ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$ și în fiecare diviziune putem alege punctele intermediare ξ_i într-un mod particular (de exemplu la extremitatea stîngă a intervalelor parțiale); să formăm sumele integrale relative la funcțiile f, g și $\alpha f + \beta g$.

Deoarece știm că toate aceste funcții sînt integrabile, avem

$$\sigma_{d_n}(\alpha f + \beta g) \to \int_a^b (\alpha f + \beta g)$$

$$\sigma_{d_n}(f) \to \int_a^b f \qquad \text{și} \qquad \sigma_{d_n}(g) \to \int_a^b g.$$

Pentru sumele integrabile, se arată ca mai sus că avem egalitatea

$$\sigma_{d_n}(\alpha f + \beta g) = \alpha \sigma_{d_n}(f) + \beta \sigma_{d_n}(g)$$

de unde, trecînd la limită, obținem

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Observații. 1° Mulțimea funcțiilor integrabile pe intervalul $[a, b,]$ este un spațiu vectorial, iar aplicația $f \to \int_a^b f$ este o funcțională liniară pe acest spațiu.

2° Egalitatea $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ rămîne adevărată chiar dacă $a > b$.

3° Dacă $f + g$ (sau $f - g$) este integrabilă nu rezultă că f și g sînt integrabile.

Propoziția 2. Dacă f și g sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci funcția fg este integrabilă pe $[a, b]$.

Deoarece f și g sînt integrabile, ele sînt mărginite, iar mulțimile A și B ale punctelor de discontinuitate sînt neglijabile. Rezultă că funcția fg este

mărginită şi că mulţimea punctelor sale de discontinuitate este conţinută în $A \cup B$, deci este neglijabilă, şi deci fg este integrabilă.

O b s e r v a ţ i e. Mulţimea funcţiilor integrabile pe $[a, b]$ este o *algebră*. Integrala $\int_a^b f$ nu este însă o funcţională *multiplicativă* pe acest spaţiu; în general avem:

$$\int_a^b fg \neq \int_a^b f \int_a^b g.$$

P r o p o z i ţ i a 3. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, dacă f nu se anulează pe $[a, b]$ şi dacă funcţia $\frac{1}{f}$ este mărginită, atunci $\frac{1}{f}$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Într-adevăr funcţia $\frac{1}{f}$ este continuă în aceleaşi puncte în care este continuă şi f, deci $\frac{1}{f}$ este continuă aproape peste tot pe $[a, b]$ şi fiind mărginită, prin ipoteză, este integrabilă pe $[a, b]$.

P r o p o z i ţ i a 4. Dacă f şi g sînt integrabile pe $[a, b]$ şi dacă funcţia f^g este definită pe $[a, b]$, atunci f^g este integrabilă pe $[a, b]$.

Într-adevăr f şi g sînt mărginite şi continue aproape peste tot, deci f^g este mărginită şi continuă aproape peste tot, deci este integrabilă.

C o r o l a r. Dacă $f \geqslant 0$ şi dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci $\sqrt{f}$ este integrabilă pe $[a, b]$.

2. Proprietăţi de monotonie ale integralei

P r o p o z i ţ i a 5. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ şi $f \geqslant 0$, atunci $\int_a^b f \geqslant 0$.

Să observăm întîi că pentru orice diviziune d a intervalului $[a, b]$ şi pentru orice puncte intermediare ξ_i avem

$$\sigma_d(f) = \sum f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i) \geqslant 0$$

deoarece $f(\xi_i) \geqslant 0$ şi $x_{i+1} - x_i \geqslant 0$.

Să alegem acum un șir particular (d_n) de diviziuni ale lui $[a, b]$ și în fiecare diviziune să alegem punctele intermediare ξ_i într-un mod particular. Pentru sumele integrale corespunzătoare avem:

$$\sigma_{d_n}(f) \to \int_a^b f.$$

Dar pentru fiecare n avem, ca mai sus

$$\sigma_{d_n}(f) \geqslant 0$$

și trecînd la limită obținem

$$\int_a^b f \geqslant 0.$$

O b s e r v a ț i e. Dacă $f \geqslant 0$ și $a \leqslant b$ avem $\int_b^a f \leqslant 0$.

C o r o l a r u l 1. Dacă f și g sînt integrabile pe $[a, b]$ și dacă $f \leqslant g$ atunci

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Într-adevăr $g - f \geqslant 0$ și $f - g$ este integrabilă, deci

$$\int_a^b (f - g) \geqslant 0.$$

Dar

$$\int_a^b (f - g) = \int_a^b f - \int_a^b g$$

de unde

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

O b s e r v a ț i e. Dacă $f \leqslant g$ și $a \leqslant b$ avem $\int_b^a f \geqslant \int_b^a g$.

C o r o l a r u l 2. Dacă f și g sînt integrabile pe $[a, b]$ dacă $m \leqslant f \leqslant M$ și $g \geqslant 0$, atunci

$$m \int_a^b g\,dx \leqslant \int_a^b fg\,dx \leqslant M \int_a^b g\,dx.$$

Într-adevăr, deoarece $g \geqslant 0$, din inegalitățile $m \leqslant f \leqslant M$ deducem $mg \leqslant f \leqslant Mg$ și deci, prin integrare

$$\int_a^b mg\,dx \leqslant \int_a^b fg\,dx < \int_a^b Mg\,dx$$

de unde

$$m\int_a^b g\,dx \leqslant \int_a^b fg\,dx \leqslant M\int_a^b g\,dx$$

O b s e r v a ţ i e. Dacă $m \leqslant f \leqslant M$ şi $g \geqslant 0$ şi dacă $a \leqslant b$, atunci

$$m\int_a^b g\,dx \geqslant \int_a^b fg\,dx \geqslant M\int_a^b g\,dx$$

C o r o l a r u l 3. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ şi $m \leqslant f \leqslant M$ atunci

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a).$$

Într-adevăr se ia $g(x) \equiv 1$ în corolarul 2, şi se observă că

$$\int_a^b g\,dx = b - a.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Corolarul 3 rezultă şi din inegalităţile

$$m(b-a) \leqslant s_d \leqslant S_d \leqslant M(b-a) \text{ şi } s_d \leqslant \int_a^b f < S_d.$$

2° Dacă $m \leqslant f \leqslant M$ şi $a \leqslant b$, avem $m(a-b) \geqslant \int_b^a f \geqslant M(a-b)$.

P r o p o z i ţ i a 5. Dacă f este integrabilă pe $[a, b,]$ atunci funcţia $|f|$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Într-adevăr f este mărginită şi mulţimea A a punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă. Rezultă că $|f|$ este mărginită. Deoarece $|f|$ este continuă în orice punct în care f este continuă (şi, eventual şi în alte puncte), rezultă că mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui $|f|$ este conţinută în A, deci este neglijabilă, şi deci $|f|$ este integrabilă.

Pentru a demonstra inegalitatea din enunţ, plecăm de la inegalitatea

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$$

de unde, prin integrare obţinem

$$-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$$

şi deoarece $\int_a^b |f| \geqslant 0$, deducem

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

O b s e r v a ț i i. 1° Dacă $|f|$ este integrabilă, nu rezultă că f este integrabilă.

Exemplu. Funcția f definită pe $[a, b]$, $a < b$, astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \text{ este rațional} \\ -1, \text{ dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

nu este integrabilă, deoarece mulțimea punctelor sale de discontinuitate este $[a, b]$ și nu este neglijabilă. Avem însă $|f(x)| \equiv 1$, deci $|f|$ este continuă și deci este integrabilă.

C o r o l a r u l 1. Pentru orice funcție integrabilă f avem

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|$$

fie că $a \leqslant b$, fie că $a \geqslant b$.

Dacă $a \leqslant b$, avem $\int_a^b |f| \geqslant 0$ deci

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|$$

iar dacă $a \geqslant b$, avem $b \leqslant a$, deci

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_b^a f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_b^a f(x)\right|dx\Big| = \int_a^b f(x)\left|dx\right|.$$

C o r o l a r u l 2. Dacă f este integrabilă și dacă $|f| \leqslant M$, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M|b - a|$$

fie că $a \leqslant b$, fie că $a \geqslant b$.

Într-adevăr, dacă $a \leqslant b$, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant M(b - a) = M|b - a|$$

deoarece $b - a \geqslant 0$; iar dacă $a \geqslant b$, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_b^a f(x)\,dx\right| \leqslant M|a - b| = M|a - b|.$$

C o r o l a r u l 3. O funcție $f : [a, b] \to R$ este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă partea pozitivă f^+ și partea negativă f^- sînt integrabile pe $[a, b]$.

Se ține seama de egalitățile

$$\begin{cases} f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \\ f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$$

Corolarul 4. Dacă f și g sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci anvelopa superioară $\sup(f, g)$ și anvelopa inferioară $\inf(f, g)$ sînt integrabile pe $[a, b]$.

Se ține seama de egalitățile

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|$$

$$\inf(f, g) = -\sup(-f, -g).$$

3. Formule de medie

Propoziția 6. Dacă f și g sînt integrabile pe $[a, b]$ și dacă $g \geqslant 0$. există un număr μ cuprins între marginile m și M ale funcției f, astfel ca

$$\int_a^b fg\,dx = \mu \int_a^b g\,dx.$$

Din inegalitatea $m \leqslant f \leqslant M$ deducem $mg \leqslant fg \leqslant Mg$ (deoarece $g \geqslant 0$) și deci

$$m\int_a^b g\,dx \leqslant \int_a^b fg\,dx \leqslant M\int_a^b g\,dx.$$

Să observăm că, deoarece $g \geqslant 0$ și $a \leqslant b$, avem $\int_a^b g\,dx \geqslant 0$.

Dacă $\int_a^b g\,dx = 0$, atunci din aceste inegalități deducem de asemenea $\int_a^b fg\,dx = 0$, deci, luînd un număr oarecare $\mu \in [m, M]$, avem

$$\int_a^b fg\,dx = \mu \int_a^b g\,dx = 0.$$

Dacă $\int_a^b g\,dx > 0$, atunci

$$m \leqslant \frac{\int_a^b fg\,dx}{\int_a^b g\,dx} \leqslant M$$

și, luînd $\mu = \dfrac{\int_a^b fg\,dx}{\int_a^b g\,dx}$, avem $m \leqslant \mu \leqslant M$ și

$$\int_a^b fg\,dx = \mu \int_a^b g\,dx.$$

Această egalitate se numește *formula mediei pentru integrale.*

Corolarul 1. Dacă f **este continuă, iar** g **este pozitivă și integrabilă pe** $[a, b]$, **există un număr** $\xi \in (a, b)$ **astfel ca**

$$\int_a^b fg\,dx = f(\xi) \int_a^b g\,dx.$$

În adevăr, f fiind continuă pe $[a, b]$, își atinge marginile pe acest interval; există deci puncte x_1 și x_2 în $[a, b]$ astfel ca $f(x_1) = m$ și $f(x_2) = M$ și deci $f(x_1) \leqslant \mu \leqslant f(x_2)$, unde μ este astfel ca

$$\int_a^b fg\,dx = \mu \int_a^b g\,dx.$$

Dar, fiind continuă, f are proprietatea lui Darboux: ea nu poate trece de la valoarea $f(x_1)$ la valoarea $f(x_2)$ fără a trece prin valoarea intermediară μ; există deci un punct $\xi \in [a, b]$ astfel ca $\mu = f(\xi)$, și deci

$$\int_a^b fg\,dx = f(\xi) \int_a^b g\,dx.$$

Observație. Propoziția 6 și corolarul 1 rămîn valabile și dacă $g \leqslant 0$.

Corolarul 2. Dacă f **este integrabilă pe** $[a, b]$, **există un număr** μ **cuprins între marginile funcției** f, **astfel ca**

$$\int_a^b f\,dx = \mu(b - a).$$

Se aplică formula mediei pentru funcția $g(x) \equiv 1$, ținînd seama că

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b 1 \cdot dx = b - a.$$

Corolarul 3. Dacă f **este continuă pe** $[a, b]$, **există un punct** $\xi \in (a, b)$, **astfel ca**

$$\int_a^b f dx = f(\xi)\ (b - a).$$

Se aplică corolarul 1, pentru funcția $g\ (x) \equiv 1$.

Observație. Propoziția 6 și corolarele sale sînt valabile fie că $a \leqslant b$, fie că $a \geqslant b$.

4. Proprietatea de ereditate.
Aditivitatea integralei ca funcție de interval

Aditivitatea integralei ca funcție de interval. Proprietatea enunțată în propoziția următoare se numește *proprietate de ereditate**.

Propoziția 7. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă pe orice subinterval $[a', b'] \subset [a, b]$.

Într-adevăr f este mărginită pe $[a, b]$ deci este mărginită și pe $[a', b']$. Pe de altă parte mulțimea A a punctelor de discontinuitate din $[a, b]$ este neglijabilă, iar mulțimea A' a punctelor de discontinuitate din $[a', b']$ este conținută în A, deci A' este neglijabilă, și deci f este integrabilă pe $[a', b']$.

Proprietatea exprimată de egalitatea din propoziția 8 se numește proprietatea de *aditivitate a integralei*, considerată ca *funcție de interval.*

Propoziția 8. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci oricare ar fi punctul $c \in [a, b]$ avem

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Dacă $c = a$, atunci $\int_a^c f = 0$ și $\int_c^b f = \int_a^b f$, deci formula este verificată. De asemenea, formula este verificată dacă $c = b$. Să presupunem deci că $a < c < b$. Funcția f este integrabilă pe intervalele $[a, c]$ și $[c, b]$.

Fie (d_n') un șir de diviziuni ale intervalului $[a, c]$ cu $\nu(d_n') \to 0$. Atunci

$$\sigma_{d_n'} \to \int_a^c f,$$

oricare ar fi punctele intermediare alese în fiecare diviziune d_n'.

Fie (d_n'') un șir de diviziuni ale intervalului $[c, b]$ cu $\nu(d_n'') \to 0$. Atunci

$$\sigma_{d_n''} \to \int_c^b f,$$

oricare ar fi punctele intermediare alese în fiecare diviziune d_n''. Pentru fiecare $n \in N$ să notăm $d_n = d_n' \cup d_n''$. Am obținut astfel un șir de diviziuni (d_n) ale intervalului $[a, b]$ și avem de asemenea $\nu(d_n) \to 0$, deoarece $\nu(d_n) \leqslant \nu(d_n') + \nu(d_n'')$. Atunci

$$\sigma_{d_n} \to \int_b^a f.$$

Dar

$$\sigma_{d_n} = \sigma_{d_n'} + \sigma_{d_n''}.$$

* O proprietate care se referă la o clasă $\mathcal{C}$ de părți ale unei mulțimi E este ereditară dacă de îndată ce are loc pentru o mulțime $A \in \mathcal{C}$ are loc pentru orice submulțime $A' \subset A$ din $\mathcal{C}$.

Trecînd la limită, obținem

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Observație. Egalitatea $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ este adevărată, oricare ar fi ordinea de succesiune (după mărime) a punctelor a, b și c. De exemplu, dacă $a < b < c$, avem $\int_a^b f + \int_b^c = \int_a^c f$, deci

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Au loc și proprietăți reciproce, proprietăți de ereditate.

Propoziția 9. Dacă f este integrabilă pe intervalele $[a, c]$ și $[c, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Într-adevăr f este mărginită pe $[a, c]$ și $[c, b]$ deci este mărginită pe $[a, b]$. Pe de altă parte, mulțimea A a punctelor de discontinuitate din $[a, c]$ și mulțimea B a punctelor de discontinuitate din $[c, b]$ sînt neglijabile. Mulțimea punctelor de discontinuitate din $[a, b]$ este $A \cup B$, deci este neglijabilă și deci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Corolar. Dacă f este integrabilă pe intervalele $[a, a_1]$, $[a_1, a_2]$,..., a_{n-1}, $b]$ atunci f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$.

Propoziția 10. Dacă f este mărginită pe $[a, b]$ și este integrabilă pe orice interval compact $[a, x]$ cu $x < b$, atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Fie (x_n) un șir crescător din $[a, b]$, convergent către b. Avem $x_n < b$ pentru orice n, deci f este integrabilă pe orice interval $[a, x_n]$, deci mulțimea E_n a punctelor de discontinuitate din $[a, x_n]$ ale lui f este neglijabilă. Cum orice punct de discontinuitate $x < b$ al lui f se află într-o mulțime E_n, urmează că mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui f este formată de reuniunea $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, și, eventual, din b, deci este neglijabilă, și deci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Propoziția 10'. Dacă f este mărginită pe $[a, b]$ și este integrabilă pe orice interval compact $[x, b]$ cu $a < x$, atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Corolarul 1. Dacă f și g sînt egale pe $[a, b]$, cu excepția unui număr finit de puncte $c_1, c_2, \ldots c_n$, și dacă una din ele este integrabilă pe $[a, b]$, atunci și cealaltă este integrabilă pe $[a, b]$ și integralele lor sînt egale.

Să presupunem că f este integrabilă pe $[a, b]$. Atunci f este integrabilă pe orice interval compact din $[a, b]$ și este mărginită pe $[a, b]$.

Rezultă atunci că și g este mărginită pe $[a, b]$ și integrabilă pe orice interval compact din $[a, b]$ care nu conține nici unul din punctele $c_1, c_2, \ldots, c_n$, deci este integrabilă pe $[a, b]$.

Fie acum un șir (d_n) de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$. În fiecare diviziune d_n să alegem punctele intermediare ξ_i diferite de punctele $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Atunci $f(\xi_i) = g(\xi_i)$, deci

$$\sigma_{d_n}(f) = \sum_i f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_i g(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sigma_{d_n}(g).$$

Prin trecere la limită obținem

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Corolarul 2. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ și dacă se modifică valoarea funcției în mod arbitrar într-un număr finit de puncte din $[a, b]$, atunci funcția obținută este de asemenea integrabilă pe $[a, b]$ și are aceeași integrală ca și f.

5. Integrarea pe o reuniune de intervale

Fie f o funcție definită pe un *interval mărginit* I, de forma $[a, b)$, sau $(a, b]$ sau (a, b).

Fie f_1 și f_2 două extensiuni ale funcției f la intervalul închis $\bar{I} = [a, b]$:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in I; \\ \lambda_1, & \text{dacă } x \notin I; \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in I; \\ \lambda_2, & \text{dacă } x \notin I. \end{cases}$$

Funcțiile f_1 și f_2 sînt de asemenea mărginite pe $\bar{I} = [a, b]$ și sînt egale pe $\bar{I}$ cu excepția, eventual, a extremităților a și b.

Dacă una din funcțiile f_1 și f_2 este integrabilă pe $[a, b]$, atunci și cealaltă este integrabilă pe $[a, b]$ și integralele lor sînt egale, $\int_a^b f_1 \, dx = \int_a^b f_2 \, dx$.

Așadar, integrabilitatea și integrala unei extensiuni f_1 a lui f nu depind de valorile date extensiunii în punctele a și b, ci numai de funcția f însăși.

Sîntem conduși astfel la următoarea

Definiție. Se spune că funcția f este integrabilă pe intervalul I, dacă o extensiune a sa f_1 la intervalul $\bar{I}$ este integrabilă. Integrala funcției f pe intervalul I se notează $\int_I f \, dx$ sau, încă, $\int_a^b f \, dx$ și este egală prin definiție cu integrala extensiunii f_1 pe intervalul $\bar{I} = [a, b]$:

$$\int_I f \, dx = \int_a^b f \, dx = \int_a^b f_1 \, dx.$$

Din propoziția 10 rezultă

Propoziția 11. Funcția f este integrabilă pe I dacă și numai dacă este mărginită pe I și este integrabilă pe orice interval compact conținut în I.

Toate proprietățile integralelor definite pe un interval compact $[a, b]$ rămîn valabile și pentru integralele funcțiilor definite pe intervale mărginite oarecare.

Fie acum f o funcție definită pe o reuniune de intervale mărginite și disjuncte, $A = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$.

Definiție. Se spune că funcția f este integrabilă pe mulțimea A, dacă este integrabilă pe fiecare din intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Integrala funcției f pe mulțimea A, notată $\int_A f\,dx$, este egală prin definiție cu suma integralelor pe cele n intervale:

$$\int_A f\,dx = \int_{I_1} f\,dx + \int_{I_2} f\,dx + \ldots + \int_{I_n} f\,dx.$$

Se verifică de asemenea ușor că toate proprietățile integralelor definite pe un interval rămîn valabile pentru integralele funcțiilor definite pe o reuniune de intervale:

1) Orice funcție integrabilă pe A este mărginită pe A.
2) Orice funcție continuă pe A este integrabilă pe A.
3) Orice funcție definită pe A și monotonă pe porțiuni este integrabilă pe A.
4) Mulțimea funcțiilor integrabile pe A este o algebră, iar integrala este o funcțională liniară.

$$\int_A (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_A f\,dx + \beta \int_A g\,dx.$$

5) Dacă f este integrabilă pe A, atunci $|f|$ este integrabilă pe A și

$$\left|\int_A f\,dx\right| \leqslant \int_A |f(x)|\,dx.$$

6) Integrala este o funcțională pozitivă (și monotonă)

$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_A f\,dx \geqslant 0 \text{ și } \left(f \leqslant g \Longrightarrow \int_A f\,dx \leqslant \int_A g\,dx\right).$$

7) Formula mediei: dacă f și g sînt integrabile pe A și dacă $g \geqslant 0$ (sau $g \leqslant 0$) atunci există un număr μ cuprins între marginile m și M ale funcției f, astfel ca

$$\int_A fg\,dx = \mu \int_A g\,dx.$$

Pentru fiecare interval I_i cu extremitățile a_i și b_i, $a_i < b_i$ să notăm cu $m(I_i)$ lungimea sa:

$$m(I_i) = b_i - a_i.$$

Să notăm de asemenea cu $m(A)$ suma lungimilor $m(I_i)$ ale intervalelor I_i care o compun

$$m(A) = m(I_1) + m(I_2) + \ldots + m(I_n) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \ldots + (b_n - a_n).$$

8) Dacă $f(x) \equiv \alpha$ pe A, atunci

$$\int_A dx = \alpha\, m(A).$$

Într-adevăr:

$$\int_A \alpha\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} \alpha\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \alpha\, dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha(b_i - m_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \alpha m(A).$$

Luînd în formula mediei $g(x) \equiv 1$ rezultă că:

9) Dacă f este integrabilă pe A, există un număr μ cuprins între marginile m și M ale lui f astfel ca

$$\int_A f\, dx = \mu m(A).$$

10) Proprietatea de creditate. Dacă f este integrabilă pe A, atunci f este integrabilă pe orice submulțime $A' \subset A$, care este reuniune a unei familii finite de intervale.

11) Proprietatea de aditivitate a integralei ca funcție de mulțime. Dacă A este integrabilă pe A și dacă A este reuniunea unui număr finit de mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, disjuncte două cîte două, unde $A_1, \ldots, A_n$ sînt reuniuni finite de intervale, atunci

$$\int_A f\, dx = \int_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} f\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f\, dx.$$

Mulțimile care sînt reuniuni finite de intervale mărginite formează un clan $\mathcal{M}$: reuniunea, intersecția și diferența a două astfel de mulțimi sînt mulțimi de același fel.

Lungimea $m(A)$ a mulțimilor $A \in \mathcal{M}$ este pozitivă și aditivă:

1) $m(A \geqslant 0)$;

2) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, dacă $A \cap B = \varnothing$.

Fie f o funcție definită pe R și integrabilă pe fiecare mulțime $A \in \mathcal{M}$. Să notăm

$$\mu(A) = \int_A f\, dx.$$

Proprietatea de aditivitate a integralei, ca funcție de mulțime, se scrie astfel:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ dacă } A \cap B = \varnothing.$$

Așadar, funcția $A \to \mu(A)$ definită pe $\mathcal{M}$ este o măsură reală. Ea se numește *integrala nedefinită* a funcției f.

Dacă funcția f este *pozitivă*, atunci integrala sa nedefinită este o măsură pozitivă.

Se spune că măsura μ este absolut continuă în raport cu măsura m, dacă $m(A) = 0$ implică $\mu(A) = 0$.

Din formula mediei

$$\mu(A) = \int_A f\, dx = \lambda\, m(A)$$

rezultă că dacă $m(A) = 0$, atunci $\mu(A) = 0$, deci integrala nedefinită a funcției este absolut continuă în raport cu măsura m.

Observație. Dacă funcția f nu este definită pe toată dreapta, ci numai pe o mulțime $M \in \mathcal{M}$, o prelungim pe toată dreapta, dîndu-i valoarea zero pe $\mathbf{C}M$. Să notăm tot cu f prelungirea astfel obținută. Atunci

$$\int_A f = \int_{A \cap M} f, \text{ deci } \int_A f = 0 \text{ dacă } A \cap M = \varnothing.$$

§ 4. Primitive

1. Integrala nedefinită

Fie f o funcție definită pe un interval I (mărginit sau nemărginit) și *integrabilă pe orice interval compact conținut în* I. Fie α un punct oarecare din I, pe care îl menținem fixat. Pentru orice punct $x \in I$, funcția f este integrabilă pe intervalul compact $[x, \alpha]$ sau $[\alpha, x]$ (după cum $x \leqslant \alpha$ sau $\alpha \leqslant x$).

Să notăm

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt.$$

Funcția $F(x)$ este definită pentru orice punct $x \in I$.

Dacă a și b sînt două puncte din I, avem

$$\int_\alpha^a f + \int_a^b f = \int_\alpha^b f,$$

deci

$$\int_a^b f = \int_\alpha^b f - \int_\alpha^a f$$

sau, cu notația de mai sus,

$$\int_a^b f = F(b) = F(a).$$

O b s e r v a ț i i. 1° Să presupunem că $\alpha \leqslant x$ și să notăm $I_x = [\alpha, x]$. Atunci

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt = \int_{I_x} f(t)\,dt = \mu(I_x).$$

Așadar, valoarea funcției F într-un punct $x \geqslant \alpha$ este egală cu valoarea integralei nedefinite μ a lui f, pentru intervalul $I_x = [\alpha, x]$.

Din această cauză, funcția de punct $F(x)$ se numește de asemenea, prin abuz de limbaj, *integrala nedefinită* a funcției f.

2° Pentru fiecare punct $\alpha \in I$ obținem cîte o funcție $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$.

Cunoașterea integralei funcției f pe orice interval compact din I ne permite să definim funcția F. Reciproc, dacă am putea determina pe altă cale funcția F, am putea apoi calcula foarte ușor integrala funcției f, din egalitatea

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Vom arăta mai departe că, pentru anumite funcții, acest lucru este posibil. Pentru aceasta va trebui mai întîi să studiem proprietățile funcției F.

Propoziția 1. Funcția $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ **este continuă pe** I.

Fie x_0 un punct oarecare din I. Să presupunem întîi că x_0 nu este o extremitate a intervalului I; există atunci un interval $[a, b]$ conținut în I, și care conține în *interiorul* său pe x_0. Funcția f este integrabilă pe $[a, b]$, deci este mărginită pe acest interval. Fie

$$M = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} f(t).$$

Pentru orice $x \in (a, b)$ avem

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^x |f(t)|\,dt\right| \leqslant M|x - x_0|.$$

Dar

$$\lim_{x \to x_0} |x - x_0| M = 0$$

și deci

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in (a,b)}} F(x) = F(x_0),$$

adică F este continuă în punctul x_0, relativ la intervalul (a,b). Dar intervalul (a, b) este o vecinătate a lui x_0, deci F este continuă în punctul x_0 și relativ la intervalul I.

Dacă x_0 este extremitatea stîngă a intervalului I, se consideră un interval $[x_0,b] \subset I$ cu $x_0 < b$. Funcția f este integrabilă și deci mărginită pe intervalul $[x_0, b]$; fie $M = \sup_{x_0 \leqslant t \leqslant b} f(t)$. Pentru orice $x \in (x_0,b]$, avem

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \leqslant M(x - x_0),$$

de unde, iarăși, se deduce că $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, adică F este continuă în x_0.

Dacă x_0 este extremitatea dreaptă a intervalului I, demonstrația se face la fel.

Observații. 1° Dacă funcția f este mărginită pe întregul interval I, nu mai este nevoie să demonstrăm propoziția separat pentru punctele interioare, și separat pentru extremități. Notînd, în acest caz,

$$M = \sup_{t \in I} |f(t)|$$

avem, pentru orice $x' \in I$ și $x'' \in I$,

$$|F(x') - F(x'')| = \left| \int_{x''}^{x'} f(t)\,dt \right| \leqslant M |x' - x''|.$$

Așadar, dacă f este mărginită pe I (în particular, dacă intervalul I este mărginit și f este integrabilă pe I), funcția F este lipschitziană pe I, deci este uniform continuă pe I și, cu atît mai mult, continuă pe I.

2° Relația $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$ înseamnă:

$$\lim_{x \to x_0} \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{x_0} f(t)\,dt.$$

Această egalitate ne permite să calculăm integrala pe intervalul $[\alpha, x_0]$, cunoscînd integrala pe celelalte intervale compacte conținute în $[\alpha, x_0]$.

Propoziția 2. Funcția F este derivabilă în orice punct $x_0 \in I$ în care funcția f este continuă și $F'(x_0) = f(x_0)$.

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece f este continuă în x_0, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice $t \in I$ cu $|t - x_0| < \delta(\varepsilon)$, să avem $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$, sau

$$f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Fie $x > x_0$ cu $x - x_0 < \delta(\varepsilon)$. Pentru orice $t \in [x_0, x]$ avem $f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$, deci

$$\int_{x_0}^{x} (f(x_0) - \varepsilon)dt \leqslant \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \leqslant \int_{x_0}^{x} (f(x_0) + \varepsilon)dt,$$

adică

$$[f(x_0) - \varepsilon]\,(x - x_0) \leqslant F(x) - F(x_0) \leqslant [f(x_0) + \varepsilon]\,(x - x_0)$$

și, împărțind cu $x - x_0 > 0$,

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < f(x_0) + \varepsilon.$$

Fie $x < x_0$ cu $x_0 - x < \delta(\varepsilon)$. Pentru orice $t \in [x, x_0]$ avem $f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$ deci

$$\int_{x}^{x_0} [f(x_0) - \varepsilon]\,dt \leqslant \int_{x}^{x_0} f(t)dt \leqslant \int_{x}^{x_0} [f(x_0) + \varepsilon]\,dt,$$

adică

$$[f(x_0) - \varepsilon]\,(x_0 - x) \leqslant F(x_0) - F(x) \leqslant [f(x_0) + \varepsilon]\,(x_0 - x)$$

și, împărțind cu $x_0 - x > 0$, obținem

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

sau

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$

Aşadar, oricare ar fi $x \neq x_0$ cu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, avem

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

sau

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Rezultă atunci că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

deci F este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$.

O b s e r v a ţ i i. 1° Dacă F este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$, nu rezultă că f este continuă în x_0.

În adevăr, plecînd de la o funcţie g continuă pe I (deci integrabilă pe orice interval compact din I) şi punînd

$$F(x) = \int_\alpha^x g(t)\, dt,$$

avem $F'(x_0) = g(x_0)$; dacă modificăm valoarea funcţiei g numai în punctul x_0, obţinem o funcţie f care este integrabilă pe fiecare interval compact din I şi are aceeaşi integrală ca şi g, deci

$$F(x) = \int_\alpha^x f(x)\, dx.$$

Dar $f(x_0) \neq g(x_0)$, deci $F'(x_0) \neq f(x_0)$.

2° Este posibil ca $F'(x_0) = f(x_0)$ fără ca f să fie continuă în x_0, după cum va fi arătat mai departe pe un exemplu.

C o r o l a r. Dacă f este continuă pe întreg intervalul I, atunci funcţia F este derivabilă pe I şi $F' = f$.

Aşadar, dacă funcţia f este continuă pe I, funcţia

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\, dt$$

este o *primitivă* a lui f, oricare ar fi $\alpha \in I$, şi avem

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

oricare ar fi a şi b din I.

2. Formula lui Leibniz-Newton

Egalitatea $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ reduce calculul integralei unei funcții continue f, la găsirea unei primitive F a lui f. Se impune astfel un studiu mai detaliat al primitivelor.

Să reamintim mai întîi definiția primitivelor.

Fie f o funcție definită pe un *interval* I care nu se reduce la un punct.

Definiție. Se spune că funcția f are primitive pe intervalul I dacă există o funcție F definită și derivabilă pe I și a cărei derivată să fie egală cu f.

Dacă $F' = f$, atunci F se numește funcție primitivă a funcției f sau, mai simplu, primitivă a lui f.

Cu această definiție, corolarul precedent se enunță astfel:

Orice funcție continuă pe I are primitive pe I.

Dacă F este o primitivă a lui f, adică dacă $F' = f$, atunci funcția $F + C$ este de asemenea o primitivă a lui f, oricare ar fi numărul real C, deoarece

$$(F + C)' = F' + C' = F' = f.$$

Așadar, dacă f are o primitivă F, atunci ea are o infinitate de primitive. Întreaga familie de funcții $(F + C)_{C\in R}$, obținute din primitiva F prin adăugarea unei constante arbitrare C, este formată din primitive ale lui f.

Mai mult, familia $(F + C)_{C\in R}$ conține *toate* primitivele lui f. Într-adevăr, dacă Φ este o primitivă oarecare a lui f, adică dacă $\Phi' = f$, atunci $\Phi' = F'$, deci funcțiile Φ și F diferă printr-o constantă, $\Phi - F = C$, sau $\Phi = F + C$, adică Φ se obține din F prin adăugarea unei constante convenabile și deci Φ face parte din familia $(F + C)_{C\in R}$.

Pentru familia de primitive $(F + C)_{C\in R}$ se folosește notația mai simplă $F + C$, unde se subînțelege că constanta arbitrară C parcurge *toate* numerele reale.

Fie $F_1 = F + C_1$ o primitivă oarecare a lui f. Atunci

$$F_1(b) - F_1(a) = (F(b) + C_1) - (F(a) + C_1) = F(b) - F(a).$$

Așadar, diferența $F(b) - F(a)$ este aceeași, oricare ar fi primitiva F a lui f.

Propoziția 1. Dacă f este o funcție continuă pe I și dacă $a, b \in I$, atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

oricare ar fi primitiva F a lui f.

Într-adevăr, dacă $\alpha \in I$, egalitatea aceasta este adevărată pentru primitiva

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Deoarece diferența $F(b) - F(a)$ este aceeași, oricare ar fi primitiva F a lui f, rezultă că egalitatea este adevărată oricare ar fi primitiva F a lui f.

Egalitatea din enunțul propoziției precedente se numește *formula lui Leibniz-Newton*. Ea reduce calculul integralei unei funcții *continue* f la găsirea unei primitive particulare F a lui f.

Diferența $F(b) - F(a)$ se mai notează $F(x)\Big|_a^b$:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Cu această notație, formula lui Leibniz-Newton se scrie

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b,$$

unde $F' = f$.

Formula lui Leibniz-Newton este valabilă nu numai pentru funcțiile continue, ci și pentru o clasă mai largă de funcții integrabile, acelea care au și primitive.

Propoziția 2. Dacă funcția f este integrabilă pe intervalul $I = [a, b]$ și dacă are primitive pe acest interval, atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

oricare ar fi primitiva F a lui f.

Fie F o primitivă oarecare a lui f, adică $F' = f$.

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Funcția F este derivabilă, deci continuă pe fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$, astfel încît îi putem aplica teorema creșterilor finite pe acest interval: există un punct $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ astfel ca $F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ sau

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i),\quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Adunînd membru cu membru aceste egalități, obținem

$$\sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i)$$

sau

$$F(b) - F(a) = \sigma_d(f).$$

Fie acum (d_n) un şir de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$. Dacă pentru fiecare diviziune d_n formăm suma integrală $\sigma_{d_n}(f)$ cu punctele intermediare ξ_i rezultate din formula creşterilor finite, avem

$$\sigma_{d_n}(f) = F(b) - F(a).$$

Aşadar, şirul $(\sigma d_n(f))$ este constant, deci $\sigma_{d_n}(f) \to F(b) - F(a)$. Pe de altă parte, funcţia f este integrabilă şi $\nu(d_n) \to 0$, deci şirul sumelor integrale tinde către integrală:

$$\sigma_{d_n}(f) \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Limita şirului fiind unică, deducem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

şi propoziţia este demonstrată.

Înmulţind ambii membri ai egalităţii cu -1, obţinem

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -F(b) + F(a)$$

sau

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = F(x)\Big|_b^a.$$

Aşadar, şi în cazul funcţiilor integrabile care admit primitive, formula lui Leibniz-Newton este adevărată, oricare ar fi relaţia de inegalitate dintre limitele de integrare.

O b s e r v a ţ i i. 1° Există funcţii integrabile care nu au primitive.

Exemplu. Funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2, \text{ dacă } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

definită pe intervalul $[0,2]$ este integrabilă pe acest interval, fiind monotonă. Această funcţie nu are însă proprietatea lui Darboux pe $[0, 2]$, deci nu poate fi derivata altei funcţii, adică nu are primitive pe acest interval.

Se pot da exemple de funcţii care au primitive, dar care nu sînt integrabile.

2° Există funcţii care sînt integrabile şi au primitive, fără a fi continue.

Exemplu. Fie funcţia

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, \text{ dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 \qquad\quad , \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

definită pe [0, 1]. Funcţia F este derivabilă pe [0, 1] şi derivata sa $f = F'$ este

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Aşadar, f are primitiva F. Funcţia f este de asemenea integrabilă pe [0, 1], deoarece este continuă şi deci integrabilă pe orice interval compact $[x, 1]$ cu $x > 0$. Funcţia f nu este însă continuă în 0, deoarece nu are limită în acest punct.

Avem deci $F'(0) = f(0)$, fără ca f să fie continuă în 0.

Fie f o funcţie definită pe un *interval* I şi F o primitivă a sa.

Mulţimea $F + C$ a tuturor primitivelor sale se numeşte — prin abuz de limbaj — *integrala nedefinită* a funcţiei f şi se notează $\int f$ sau $\int f\,dx$ sau $\int f(x)\,dx$:

$$\int f\,dx = F + C$$

sau

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Pentru a face distincţie, integrala propriu-zisă $\int_a^b f(x)\,dx$ se numeşte *integrală definită*.

Deoarece $F'(x) = f(x)$, ultima egalitate se scrie

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Aşadar, dacă se pleacă de la o funcţie şi se aplică întîi operaţia de derivare, iar apoi „operaţia de integrare", se regăseşte funcţia iniţială cu aproximaţia unei constante aditive.

Reciproc, dacă, plecînd de la o funcţie, se aplică întîi „operaţia de integrare" (şi se obţine o familie de funcţii), iar apoi operaţia de derivare, se obţine funcţia iniţială.

Într-adevăr

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Dacă semnul dx, care apare în notaţia integralei nedefinite, se interpretează ca o diferenţială, se obţin alte relaţii utile pentru calcule:

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Într-adevăr:

$$\int d\,F(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$$

şi

$$d\int f(x)\,dx = d\,(F(x) + C) = d\,F(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Exemple.

1) $\int 0\,dx = \int 0'\,dx = 0 + C = C;$

2) $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C;$

3) $\int 3x^2\,dx = \int (x^3)'\,dx = x^3 + C;$

4) $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$, deoarece $\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' = \sin 2x;$

5) $\int (5x^5 + 7)\,dx = \frac{5}{6}x^6 + 7x + C$, deoarece $\left(\frac{5}{6}x^6 + 7x\right)' = 5x^5 + 7.$

O b s e r v a ţ i e. Fie f o funcţie definită pe o mulţime E, care este o reuniune (finită sau infinită) de intervale disjuncte. Dacă există o funcţie F definită şi derivabilă pe E astfel ca $F' = f$, funcţia F se numeşte, încă, primitivă a lui f. Orice funcţie de forma $F + C$ este de asemenea o primitivă a lui f. Familia $(F + C)$ nu conţine însă toate primitivele lui f: există şi alte primitive care nu se pot obţine din F prin adăugarea unei constante; adică, diferenţa a două primitive ale lui f poate să nu fie constantă.

Exemplu. Fie F o primitivă a lui f şi fie I unul din intervalele din care este formată mulţimea E. Funcţia Φ definită pe E astfel:

$$\Phi(x) = \begin{cases} F(x) + 1, & \text{dacă } x \in I \\ F(x) + 2, & \text{dacă } x \notin I \end{cases}$$

este de asemenea o primitivă a lui f, deoarece pentru orice $x \in E$ avem $\Phi'(x) = F'(x) = f(x)$. Dar diferenţa $\Phi - F$ nu este constantă pe E:

$$\Phi(x) - F(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in I, \\ 2, & \text{dacă } x \notin I, \end{cases}$$

deci primitiva Φ nu se poate obţine din primitiva F prin adăugarea unei constante.

Integrala nedefinită $\int f(x)\,dx$ (mulţimea tuturor primitivelor lui f) conţine deci şi alte funcţii pe lîngă cele ale familiei $(F + C)$. Egalitatea

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

nu mai este adevărată în acest caz.

În continuare, toate funcţiile considerate vor fi presupuse definite pe un *interval*, chiar dacă nu va fi menţionat acest fapt în mod explicit.

Pentru funcţiile definite pe un interval, egalitatea

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad (F' = f)$$

este adevărată.

3. Tabloul primitivelor imediate

Din tabloul derivatelor unor funcţii elementare, rezultă următorul tablou de integrale nedefinite (numit tabloul integralelor imediate, sau al primitivelor imediate).

Funcţiile se consideră definite pe un *interval* conţinut în domeniul lor maxim de definiţie.

1) $\int 0\,dx = C;$

2) $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C;$

3) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ dacă $n \neq -1$, (n întreg);

$\int \frac{1}{x^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ dacă $n \neq 1$ (n întreg);

4) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ dacă $\alpha \neq -1$ (α real);

5) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C = \ln K|x|, \quad K > 0;$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C;$

7) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + K;$

$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$

8) $\int \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0;$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + K;$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$

10) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C;$

11) $\int e^x\,dx = e^x + C, \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \; a > 0, \; a \neq 1;$

12) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

13) $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

14) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C;$

15) $\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

Verificarea acestor egalități se poate face imediat prin derivare, conform formulei $\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$

4. Proprietățile primitivelor

În egalitatea de definiție a integralei nedefinite

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (F' = f),$$

constanta arbitrară C poate fi scrisă și în alte forme; esențial este faptul ca ea să parcurgă *toate* numerele reale. Astfel, constanta arbitrară poate fi scrisă $\ln C$, unde C parcurge toate numerele strict pozitive, sau αC unde $\alpha \neq 0$ și C parcurg toate numerele reale, sau $\frac{C}{\alpha}$ unde $\alpha \neq 0$ și C parcurge toate numerele reale sau $C_1 + C_2$, unde C_1 și C_2 (sau numai una din ele) parcurg toate numerele reale.

Propoziția 1. Dacă f și g au primitive pe un interval I, atunci funcția $f + g$ are primitive pe I și

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Fie F o primitivă a lui f, și G o primitivă a lui g; funcțiile F și G sînt derivabile și

$$F' = f, \qquad G' = g,$$

$$(F + G)' = F' + G' = f + g,$$

adică $F + G$ este o primitivă a lui $f + g$.

Să notăm cu C_1 și C_2 constantele arbitrare ale integralelor nedefinite ale funcțiilor f și g:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1, \qquad \int g(x)\,dx = G(x) + C_2,$$

unde C_1 și C_2 parcurg toate numerele reale. Să notăm cu $C_1 + C_2$ constanta arbitrară a integralei nedefinite a funcției $f + g$; avem:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int (F(x) + G(x))'\,dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2 =$$

$$= (F(x) + C_1) + (G(x) + C_2) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Prin inducție completă se deduce că dacă funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ au primitive pe I, atunci și suma lor $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ are primitive pe I și

$$\int (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)\, dx = \int f_1\, dx + \int f_2\, dx + \ldots + \int f_n\, dx.$$

(Integrala sumei este egală cu suma integralelor.)

O b s e r v a ț i e. Egalitatea $\int (f + g)\, dx = \int f\, dx + \int g\, dx$ este o egalitate între două *mulțimi* de funcții. Dacă F, G, H sînt niște primitive *particulare*, respectiv ale funcțiilor f, g și $f + g$:

$$F' = f, \qquad G' = g, \qquad H' = f + g$$

egalitatea $H = F + G$ poate să nu fie adevărată.

Exemplu.

$$f(x) = 2x, \qquad g(x) = 3x^2, \qquad f(x) + g(x) = 2x + 3x^2;$$
$$F(x) = x^2, \qquad G(x) = x^3, \qquad H(x) = x^2 + x^3 - 1.$$

Avem $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, $H'(x) = f(x) + g(x)$.

Dar $F(x) + G(x) = x^2 + x^3 \neq x^2 + x^3 - 1 = H(x)$.

P r o p o z i ț i a 2. Dacă f are primitive pe un interval I și α este un număr real, atunci funcția αf are primitive pe I, iar pentru $\alpha \neq 0$ avem

$$\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx.$$

Fie F o primitivă a lui f; funcția F este derivabilă și

$$F' = f.$$

Atunci funcția αF este de asemenea derivabilă și

$$(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f,$$

adică αF este o primitivă a lui F.

Dacă $\alpha \neq 0$, să notăm cu $\frac{C}{\alpha}$ constanta arbitrară a integralei nedefinite a funcției f:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + \frac{C}{\alpha},$$

unde C parcurge toate numerele reale. Să notăm cu C constanta arbitrară a integralei nedefinite a funcției αf; avem:

$$\int \alpha f(x)\, dx = \int (\alpha F(x))'\, dx = \alpha F(x) + C = \alpha\left(F(x) + \frac{C}{\alpha}\right) = \alpha \int (fx)\, dx.$$

În particular, luînd $\alpha = -1$, obținem

$$\int (-f(x))\, dx = -\int f(x)\, dx.$$

Atunci

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Egalitatea $\int \alpha f\,dx = \alpha \int f\,dx$ pentru $\alpha \neq 0$ este o egalitate între două *mulţimi* de funcţii. Dacă F şi H sînt respectiv primitive *particulare* ale funcţiilor f şi αf, egalitatea $H = \alpha F$ poate să nu fie adevărată.

2° Pentru $\alpha = 0$, avem

$$\int f\,dx = \int 0\,dx = C \quad \text{şi} \quad \alpha \int f\,dx = 0 \int f\,dx = 0.$$

În acest caz egalitatea

$$\int \alpha f\,dx = \alpha \int f\,dx$$

nu mai este adevărată, deoarece mulţimea din membrul stîng este formată din *toate* funcţiile constante, iar mulţimea din membrul drept este formată dintr-o *singură* funcţie, funcţia identic nulă.

3° Fie $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinom definit pe un interval I. Aplicînd cele două propoziţii, deducem că

$$\int P(x)\,dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{a_n} + \ldots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C.$$

Exemple.

1) $\int \frac{5x^3 - 2x^2 - 7x + 3}{x}\,dx = \int \left(5x^2 - 2x - 7 + \frac{3}{x}\right) dx =$

$= \int x^2\,dx - 2\int x\,dx - 7\int dx + 3\int \frac{1}{x}\,dx = 5\,\frac{x^3}{3} - x^2 - 7x + 3 \ln |x| + C;$

2) $\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = -\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\operatorname{arc\,tg} x + C = \operatorname{arc\,ctg} x + C;$

3) $\int \left(2 \sin x - \frac{3}{\cos^2 x}\right) dx = 2\int \sin x\,dx - 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = -2 \cos x -$

$- 3 \operatorname{tg} x + C.$

Cele două propoziţii de mai sus permit să se calculeze primitivele unei funcţii f, dacă se poate scrie ca o combinaţie liniară de funcţii cărora le cunoaştem primitivele

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i;$$

$$\int f\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int \alpha_i f_i\,dx.$$

5. Metode de calcul al primitivelor

Alte metode de calcul al primitivelor sînt: integrarea prin părți (metoda de calcul a primitivelor prin părți) și schimbarea de variabilă (metoda de calcul a primitivelor funcțiilor compuse).

Să observăm mai întîi că

$$\int f\,dx + C = \int f\,dx.$$

Într-adevăr, dacă F este o primitivă a lui f, atunci

$$\int f\,dx = F + K,$$

unde K parcurge toate numerele reale. Atunci

$$\int f\,dx + C = F + K + C,$$

unde $K + C$ parcurge de asemenea toate numerele reale, deci

$$\int f\,dx = F + K + C,$$

de unde

$$\int f\,dx + C = \int f\,dx.$$

Propoziție. Dacă f și g sînt două funcții definite pe un interval I și au derivate continue f' și g' pe I, atunci

$$\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx.$$

Funcțiile f și g sînt continue (fiind derivabile). Deoarece f' și g' sînt continue, prin ipoteză, funcțiile fg' și $f'g$ sînt de asemenea continue, și deci au primitive, astfel încît integralele care apar în egalitatea de mai sus au sens. Rămîne de demonstrat această egalitate. Avem:

$$(fg)' = f'g + fg',$$

deci funcția fg este o primitivă a funcției $f'g + fg'$, deci

$$\int (f'g + fg')\,dx = fg + C.$$

Dar

$$\int (f'g + fg')\,dx = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx,$$

deci

$$\int f'g\,dx + \int fg'\,dx = fg + C,$$

de unde

$$\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx + C.$$

Dar

$$\int f'g\,dx - C = \int f'g\,dx,$$

astfel încît

$$\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx.$$

Egalitatea $\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx$ se numeşte formula de integrare prin părţi (pentru integrale nedefinite).

O b s e r v a ţ i i. 1° Formula de integrare prin părţi este o egalitate între două mulţimi de funcţii. Dacă F_1 este o primitivă particulară a lui fg', iar F_2 este o primitivă particulară a lui $f'g$, este posibil ca $F_1 \neq fg - F_2$.

2° Dacă notăm funcţiile cu u şi v, formula de integrare prin părţi se scrie

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx.$$

Dacă, acum, se interpretează dx ca diferenţială, avem $v'\,dx = dv$ şi $u'\,dx = du$, astfel încît formula se scrie

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

3° Dacă se dă de calculat integrala $\int f\,dx$, căutăm să scriem funcţia f sub forma $f = u \cdot v'$ (sau expresia $f\,dx$ sub forma $f\,dx = u\,dv$) şi apoi aplicăm formula de integrare prin părţi. Dacă se poate calcula integrala $\int vu'\,dx = \int v\,du$ din membrul drept, atunci rezultă şi integrala din membrul stîng.

Exemple.

1) Să se calculeze $\int \ln x\,dx$.

Luăm $u = \ln x$, $dv = dx$.

Deci $du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = x$.

Atunci

$$\int \ln x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \ln x - \int dx = \ln x - x + C =$$
$$= x(\ln x - 1) + C.$$

2) Să se calculeze $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$.

Luăm $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = dx$,

deci $du = \dfrac{1}{1+x^2} dx$, $v = x$.

Atunci

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$
$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C.$$

3) Să se calculeze $\int xe^x \, dx$.

Luăm $u = x$, $dv = e^x dx$,

deci $du = dx$, $v = e^x$.

Atunci

$$\int xe^x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C =$$
$$= e^x(x - 1) + C.$$

4) Să se calculeze $\int x \sin x \, dx$.

Luăm $u = x$, $dv = \sin x \, dx$,

deci

$$du = dx, \quad v = -\cos x \, dx.$$

Atunci

$$\int x \sin x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = -x \cos x + \int \cos x \, dx =$$
$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Observaţie. Dacă am fi luat

$$u = \sin x, \quad dv = x \, dx$$

am fi obţinut

$$du = \cos x \, dx, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Atunci

$$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x \, dx$$

şi am fi obţinut în membrul drept o integrală „mai complicată".

Alegerea funcţiilor u şi v trebuie făcută în mod judicios pentru a obţine o integrală mai uşor de calculat.

Deşi formula de integrare prin părţi este valabilă pentru orice funcţie u şi v cu derivată continuă, această formulă este de un folos practic numai atunci cînd ajungem la o integrală pe care ştim s-o efectuăm.

Uneori este nevoie să aplicăm succesiv de mai multe ori formula de integrare prin părţi pentru a ajunge la o integrală cunoscută.

5) Să se calculeze $I = \int x^2 \sin x \, dx$.

Luăm

$$u = x^2, \quad dv = \sin x \, dx,$$

deci

$$du = 2x \, dx, \quad v = -\cos x.$$

Atunci

$$I = \int x^2 \sin x \, dx = \int u \, dv - \int v \, du = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2J,$$

unde am notat $J = \int x \cos x \, dx$. Mai aplicăm o dată metoda de integrare prin părţi, luînd

$$u = x, \quad dv = \cos x \, dx,$$

deci

$$du = dx, \quad v = \sin x.$$

Atunci

$$J = \int x \cos x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + \frac{C}{2}$$

şi deci

$$I = -x^2 \cos x + 2J = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C,$$

adică

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Observaţie. Dacă în integrala $J = \int x \cos x \, dx$ am fi luat

$$u = \cos x, \; dv = dx$$

am fi avut

$$du = -\sin x \, dx, \; v = \frac{x^2}{2}$$

deci

$$J = x \cos x \, dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \cos x + I$$

şi am fi ajuns la integrala iniţială I, şi nu am fi putut calcula această integrală.

Se poate da o formulă de integrare prin părţi de ordinul n (pentru integrale nedefinite):

P r o p o z i ţ i e. Dacă funcţiile u şi v au derivate de ordinul n continue pe un interval I, atunci

$$\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} + (-1)^1 u'v^{(n-2)} + (-1)^2 u''v^{(n-3)} + \ldots +$$
$$+ (-1)^k u^{(k)}v^{(n-k-1)} + \ldots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v + (-1)^n \int u^{(n)} v\,dx.$$

Într-adevăr:

$$\int u^{(k)} v^{(n-k)}\,dx = u^{(k)} v^{(n-k-1)} - \int u^{(k+1)} v^{(n-k-1)}\,dx,$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, deci

$$(-1)^k \int u^{(k)} v^{(n-k)}\,dx = (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)} + (-1)^{k+1} \int u^{(k+1)} v^{(n-k-1)}\,dx$$

sau

$$(-1)^k \int u^{(k)} v^{(n-k)}\,dx - (-1)^{(k+1)} \int u^{(k+1)} v^{(n-k-1)}\,dx = (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)}.$$

Adunînd membru cu membru cele n egalităţi pentru $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ şi reducînd termenii asemenea din membrul stîng obţinem:

$$\int uv^{(n)}\,dx - (-1)^n \int u^{(n)} v\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)},$$

adică

$$\int uv^{(n)}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)} + (-1)^n \int u^{(n)} v\,dx.$$

Exemplu. Să se calculeze $\int x^n e^x\,dx$.

Luăm

$$u = x^n, \qquad v^{(n)} = e^x$$

deci

$$\begin{aligned} u' &= nx^{n-1} & v^{(n-1)} &= e^x \\ u'' &= n(n-1)\,x^{n-2} & v^{(n-2)} &= e^x \\ &\vdots & v^{(n-k)} &= e^x \\ u^{(k)} &= n(n-1)\ldots(n-k+1)\,x^{n-k} & &\vdots \\ u^{(n-1)} &= n!\,x & v' &= e^x \\ u^{(n)} &= n! & v &= e^x. \end{aligned}$$

Atunci

$$\int x^n e^x\,dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)\,x^{n-k} e^x + (-1)^n \int e^x\,dx =$$
$$= e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)\,x^{n-k}.$$

Metoda de calcul al primitivelor prin schimbarea de variabilă rezultă din următoarea:

Propoziție. **Fie funcțiile** $u(x):I \to J$ **și** $f(t):J \to R$, **unde** I **și** J **sînt intervale. Dacă** $u(x)$ **este derivabilă pe** I, **iar** $f(t)$ **are primitive pe** J, **atunci funcția** $f(u(x))\cdot u'(x):I \to R$ **are primitive pe** I. **În acest caz, dacă**

$$\int f(t) = F(t) + C,$$

atunci

$$\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = F(u(x)) + C.$$

În adevăr, fie $F(t)$ o primitivă a lui $f(t)$ pe I:

$$F'(t) = f(t) \quad \text{și} \quad \int f(t)\,dt = F(t) + C.$$

Deoarece funcțiile $u(x):I \to J$ și $F(t):J \to R$ sînt derivabile, funcția compusă $F(u(x))$: $I \to R$ este derivabilă și

$$[F(u(x))]' = F'(u(x))\cdot u'(x) = f(u(x))\cdot u'(x),$$

deci funcția $F(u(x))$ este o primitivă a funcției $f(u(x))\cdot u'(x)$ pe I

și

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x)) + C.$$

Observații. Dacă se interpretează dx ca diferențială, atunci avem $u'(x)\,dx = du(x)$ și egalitatea precedentă se scrie

$$\int f(u(x))\,du\,(x) = F(u(x)) + C;$$

dacă nu se mai pune în evidență variabila x, se obține

$$\int f(u)\,du = F(u) + C.$$

În această egalitate, u nu este variabilă independentă (ci funcție), dar egalitatea are aceeași formă ca și cînd u ar fi variabilă independentă.

Practic, pentru a calcula integrala nedefinită

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx$$

se procedează astfel: se face înlocuirea $u(x) = t$ și se diferențiază ca o egalitate de funcții: $du(x) = dt$ sau $u'(x)\,dx = dt$.

Făcînd aceste înlocuiri în integrala inițială, se obține (formal) succesiv:

$$\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(u(x)) + C.$$

Se atrage atenţia că egalitatea

$$\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int f(t)\, dt$$

este formală, în sensul procedeului practic de mai sus.

Ea nu trebuie interpretată ca o egalitate obişnuită de funcţii. Într-adevăr, funcţia $f(u(x))\cdot u'(x)$ este definită pe intervalul I, deci şi primitivele sale $\int f(u(x))\cdot u'(x)\, dx$ sînt funcţii definite pe I. Pe de altă parte, funcţia $f(t)$ este definită pe intervalul J, deci şi primitivele sale $\int f(t)\, dt$ sînt definite pe J. Aşadar, funcţiile $\int f(u(x))\, u'(x)\, dx$ şi funcţiile $\int f(t)\, dt$ sînt definite pe intervalele diferite I şi J, deci aceste funcţii nu pot fi egale. Dar chiar dacă $I = J$, cele două mulţimi de funcţii nu sînt egale, decît dacă $u'(x) \equiv 1$, adică dacă $u(x) = x$.

Exemple. 1) Să se calculeze $\int \frac{2x}{x^2+3}\, dx$.

Facem înlocuirea $x^2 + 3 = t$ şi, diferenţiind, obţinem $2x\, dx = dt$. Atunci

$$\int \frac{2x\, dx}{x^2+3} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+3| + C.$$

Putem proceda şi direct, astfel:

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\, dx = \int \frac{(x^2+3)'}{x^2+3}\, dx = \int \frac{1}{x^2+3}\, d(x^2+3) = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C =$$
$$= \ln|x^2+3| + C.$$

2) Să se calculeze $\int \sin x^3 \cdot x^2\, dx$.

Facem înlocuirea $x^3 = t$, deci $3x^2\, dx = dt$. Atunci

$$\int \sin x^3 \cdot x^2\, dx = \frac{1}{3}\int \sin x^3 \cdot 3x^2\, dx = \frac{1}{3}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C$$

sau

$$\int \sin x^3 \cdot x^2\, dx = \int \sin x^3 \cdot \frac{(x^3)'}{3}\, dx = \frac{1}{3}\int \sin x^3 \cdot d(x^3) = \frac{1}{3}\int \sin u\, du =$$
$$= -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C.$$

Aplicînd acest procedeu, din tabloul primitivelor imediate, se obţin primitivele unor funcţii compuse:

1) $\int u^n \cdot u'\, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, n întreg, $n \neq -1$;

2) $\int \frac{u'}{u^n}\, dx = -\frac{1}{(n-1)\, u^{n-1}} + C$, n întreg, $n \neq 1$;

3) $\int u^\alpha u' \, dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \text{ real}, \alpha \neq -1;$

4) $\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| \, C;$

5) $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} dx = 2\sqrt{u} + C;$

6) $\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \operatorname{arc\,tg} u + C;$

7) $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arc\,sin} u + C;$

8) $\int e^u \cdot u' \, dx = e^u + C;$

9) $\int \sin u \cdot u' \, dx = -\cos u + C;$

10) $\int \cos u \cdot u' \, dx = \sin u + C;$

11) $\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \operatorname{tg} u + C;$

12) $\int \frac{u'}{\sin^2 u} dx = -\operatorname{ctg} u + C.$

În aceste formule, u este o funcție de x. Verificarea acestor formule se poate face și direct, prin derivare.

Folosind egalitatea formală

$$\int f(u(x)) \, u'(x) \, dx = \int f(t) \, dt,$$

se poate calcula integrala din membrul stîng, dacă se cunoaște integrala din membrul drept. Să observăm că în integrala din membrul stîng apare derivata $u'(x)$.

Dacă se dă integrala

$$\int f(u(x)) \, dx,$$

nu se mai poate aplica propoziția de mai sus. Totuși, și în acest caz putem folosi schimbarea de variabilă dacă funcția $u(x)$ verifică condiții suplimentare:

Propoziție. **Fie funcțiile $u(x) : I \to J$ și $f(t) : J \to R$, unde I și J sînt intervale. Dacă funcția $f(t)$ este continuă pe J, dacă funcția $u(x)$ este strict monotonă și derivabilă pe I, iar inversa sa $v(t) : J \to I$ are derivată continuă $v'(t)$ pe J și dacă**

$$\int f(t) \, v'(t) \, dt = F(t) + C,$$

atunci

$$\int f(u(x))\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

Să observăm că, deoarece v este funcţia inversă a lui u, avem

$$v(u(x)) = x \text{ pentru orice } x \in I,$$
$$u(v(t)) = t \text{ pentru orice } t \in J,$$

şi

$$u'(x).v'(u(x)) \equiv 1 \text{ pentru orice } x \in I.$$

Deoarece $f(t)$ şi $v'(t)$ sînt presupuse continue, produsul lor $f(t)v'(t)$ este o funcţie continuă pe J, deci are primitive pe J. Fie $F(t)$ o primitivă a funcţiei $f(t)v'(t)$:

$$F'(t) = f(t)v'(t), \int f(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C.$$

Deoarece funcţiile $u(x): I \to J$ şi $F(t): J \to T$ sînt derivabile, funcţia compusă $F(u(x)): I \to R$ este derivabilă şi $[F(u(x))]' = F'(u(x)).u'(x) = f(u(x))\,v'(u(x)).u'(x) = f(u(x))$, deci funcţie $F(u(x))$, este o primitivă a funcţiei $f(u(x))$ pe I şi

$$\int f(u(x))\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

Observaţie. Practic, pentru a calcula integrala nedefinită

$$\int f(u(x))\,\mathrm{d}x$$

se procedează astfel:

Se face înlocuirea

$$u(x) = t,$$

unde $u(x)$ trebuie să fie o funcţie strict monotonă pe I.

Se rezolvă în raport cu x ecuaţia $u(x) = t$ şi se obţine

$$x = v(t).$$

Se diferenţiază această ultimă egalitate:

$$\mathrm{d}x = v'(t)\mathrm{d}t.$$

Se înlocuiesc în integrala iniţială $u(x)$ şi $\mathrm{d}x$ şi se obţine (formal) succesiv:

$$\int f(u(x))\,\mathrm{d}x = \int f(t)v'(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(u(x)) + C.$$

Şi de data aceasta, egalitatea

$$\int f(u(x))\,dx = \int f(t)v'(t)\,dt$$

este formală. Ea nu trebuie considerată ca o egalitate obişnuită de funcţii.

În aplicaţiile curente condiţia ca derivata $v'(t)t$ să fie continuă este verificată, deoarece în aceste aplicaţii intervin funcţii elementare. Aşadar, trebuie să ne fixăm atenţia asupra condiţiei ca funcţia $u(x)$ să fie strict monotonă, adică ecuaţia

$$u(x) = t$$

să aibă, pentru fiecare $t \in J$, o singură soluţie $x = v(t) \in I$.

Exemple. 1) Să se calculeze $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$, $(x \geqslant 0)$.

Se face înlocuirea $\sqrt{x} = t$, $(t > 0)$, deci
$x = t^2$ şi $dx = 2t\,dt$.

Atunci

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{t}{1+t}\,dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt =$$
$$= 2(t - \ln(1+t)) + C = 2\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})^2 + C.$$

2) Să se calculeze $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$, $(x < 1)$.

Se face înlocuirea

$$\sqrt{1-x} = t \quad (t > 0), \text{ deci}$$

$1 - x = t^2$ sau $x = 1 - t^2$, de unde $dx = -2t\,dt$.

Atunci

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{1-t^2}{t}(-2t)\,dt = -2\int (1-t^2)\,dt =$$
$$= -2\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + C = 2t\left(\frac{1}{3}t^2 - 1\right) + C = 2\sqrt{1-x}\left(\frac{1}{3}(1-x) - 1\right) + C.$$

3) Să se calculeze $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $(-1 < x < 1)$.

Se face înlocuirea $x = \sin t$, deci $t = \arcsin x$, $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$

$$dx = \cos t\,dt.$$

Atunci

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$$
$$= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C,$$

deoarece $\frac{\sin 2t}{2} = \sin t \cos t = \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} = x\sqrt{1-x^2}$.

4) Să se calculeze $\int \frac{dx}{\sin x}$, $(-\pi < x < \pi,\ x \neq 0)$.

Se face înlocuirea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $(-\infty < t < \infty,\ t \neq 0)$, deci $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$ și

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Apoi, $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, astfel încît:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Observație. Dacă funcția $\frac{1}{\sin x}$ este definită pe o mulțime care conține punctele $-\pi$ și π, nu mai putem face înlocuirea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, deoarece pentru $x = -\pi$ și $x = \pi$, funcția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nu este definită.

6. Primitivele funcțiilor raționale

Problema găsirii primitivelor este inversă aceleia a derivării. Problema găsirii primitivelor este însă mult mai dificilă decît problema derivării.

Am văzut că derivatele funcțiilor elementare sînt de asemenea funcții elementare, pe care le putem calcula totdeauna.

Primitivele funcțiilor elementare nu sînt însă totdeauna funcții elementare. Pentru unele funcții elementare nici nu se știe dacă primitivele lor sînt tot funcții elementare. Nu există reguli de calcul al primitivelor decît pentru clase restrînse de funcții elementare.

Vom arăta acum că primitivele funcțiilor raționale sînt funcții elementare, și că, dacă se cunosc rădăcinile polinomului de la numitor, primitivele funcțiilor raționale se pot calcula.

Derivatele funcțiilor raționale sînt de asemenea funcții raționale. Primitivele funcțiilor raționale nu sînt însă totdeauna funcții raționale, ci pot fi funcții logaritmice sau funcții arc tg; de exemplu

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x, \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Se va arăta mai departe că primitivele funcțiilor raționale sînt combinații liniare de: funcții raționale, funcții logaritmice și funcții arc tg.

Se numesc fracții simple funcțiile de forma

$$\frac{A}{(x-x_0)^n}, \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^2}$$

definite pe un interval I, unde n este număr natural, iar trinomul $ax^2 + bx + c$ nu are rădăcini reale (deci $a \neq 0$ și $c \neq 0$). În cazul fracției $\frac{A}{(x-x_0)^n}$, rădăcina x_0, a numitorului nu aparține intervalului I.

Primitivele fracțiilor simple sînt funcții elementare, care se pot totdeauna determina, așa cum se arată mai jos:

$$\text{I)} \int \frac{1}{(x-x_0)^n}\,dx$$

1) Dacă $n = 1$, $\int \frac{1}{x-x_0}\,dx = \ln|x-x_0| + C$.

2) Dacă $n \geqslant 2$, $\int \frac{1}{(x-x_0)^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)(x-x_0)^{n-1}} + C$.

$$\text{II)} \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx, \quad (b^2-4ac<0, \text{ deci } a\neq 0,\ c\neq 0).$$

Vom considera pe rînd mai multe cazuri posibile:

3) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\ \text{arc tg}\ \frac{x}{a} + C$.

4) $\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$.

Atunci

5) $\int \frac{Ax+B}{x^2+a^2}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x}{x^2+a^2}\,dx + B\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{A}{2}\ln(x^2+a^2) + \frac{B}{a}\ \text{arc tg}\ \frac{x}{a} + C$.

Dacă $n \geqslant 2$:

6) $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+a^2)^n}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + C$.

7) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x}{(x^2+a^2)^n}\,dx + B\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx =$

$$= -\frac{A}{2}\frac{1}{(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + B\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx.$$

Ultima integrală se calculează cu ajutorul unei formule de recurență:

$$8)\ I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx\right] = \frac{1}{a^2}[I_{n-1} - J],$$

adică

$$I_n = \frac{1}{a^2}[I_{n-1} - J],$$

unde

$$J = \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx.$$

Pentru calculul integralei J se aplică metoda de integrare prin părți, luînd

$$u = x,\quad dv = \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx,$$

deci

$$du = dx,\quad v = -\frac{1}{2(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Atunci

$$J = \int x\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \int u\cdot dv = uv - \int v\,du = -\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n+1}} +$$

$$+ \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx,$$

adică

$$J = -\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}.$$

Atunci

$$I_n = \frac{1}{a^2}[I_{n-1} - J] = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)}I_{n-1}\right].$$

Am obținut astfel următoarea formulă de recurență:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}\right].$$

Ținînd seama că

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arc\ tg}\frac{x}{a} + C,$$

obținem succesiv:

$$I_2 = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2\cdot 1}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2}I_1\right] = \frac{1}{2\cdot a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C$$

$$I_3 = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4}I_2\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right] + C =$$

$$= \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arc\ tg}\frac{x}{a} + C$$

$$I_4 = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{6}\frac{x}{(x^2+a^2)^3} + \frac{5}{6}I_3\right] =$$

$$= \frac{1}{6a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^3} + \frac{5}{24a^4}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{15}{48a^6}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{15}{48a^7}\operatorname{arc\ tg}\frac{x}{a} + C.$$

O b s e r v a ț i e . Procedînd ca mai sus, pentru integrala

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2-a^2)^n}\,dx,$$

unde $n \geqslant 2$, obținem următoarea formulă de recurență:

$$J_n = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}J_{n-1}\right].$$

Ținînd seama că

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

se obțin succesiv integralele J_2, J_3 etc.

Funcția $\frac{1}{(x^2-a^2)^n}$ nu este fracție simplă, deoarece numitorul are rădăcini reale și distincte, anume $-a$ și a.

Să trecem acum la cazul general:

9) $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$, $(b^2-4ac<0$, deci $a \neq 0$, $c \neq 0)$.

Trinomul ax^2+bx+c se poate scrie ca o sumă de două pătrate:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right] \text{ unde } k^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2} > 0$$

Se face înlocuirea $x + \frac{b}{2a} = z$, deci $x = z - \frac{b}{2a}$ și $dx = dz$.

Atunci

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \int \frac{Ax + B}{a^n \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k^2\right]^n} dx = \frac{1}{a^n} \int \frac{Az - \frac{bA}{2a} + B}{(z^2 + k^2)^n} dz =$$

$$= \frac{A}{a^n} \int \frac{z}{(z^2 + k^2)^n} dz + \frac{2aB - bA}{2a^{n+1}} \int \frac{1}{(z^2 + k^2)^n} dz.$$

Prima integrală este de tipul 4 sau 5 (după cum $n = 1$ sau $n \geqslant 2$), iar a doua integrală este de tipul 3 sau 6 (după cum $n = 1$ sau $n \geqslant 2$). Efectuînd aceste integrale și făcînd apoi înlocuirea $z = x + \frac{b}{2a}$, obținem integrala inițială.

O b s e r v a ț i e . De multe ori este mai simplu să punem în evidență la numărător, derivata $2ax + b$ a trinomului $ax^2 + bx + c$ de la numitor (dacă $A \neq 0$):

$$\int \frac{Ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = A \int \frac{x + \frac{B}{A}}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + 2a\frac{B}{A}}{(ax^2 + bx + c)^n} dz =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx + \frac{A}{2a} \int \frac{2a\frac{B}{A} - b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx.$$

Pentru prima din aceste integrale avem:

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \ln |ax^2 + bx + c| + C$$

și, dacă $n \geqslant 2$,

$$\int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = -\frac{1}{(n - 1)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + C.$$

Pentru a doua integrală

$$\int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$$

aplicăm apoi procedeul de mai sus: se scrie trinomul $ax^2 + bx + c$ ca o sumă de pătrate și se face înlocuirea $x + \frac{b}{2a} = z$. Se obține

$$\int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{1}{a^n} \int \frac{1}{(z^2 + k^2)^n} dz,$$

iar ultima integrală este de tipul 3 sau 6 (după cum $n = 1$ sau $n \geqslant 2$).

Exemple:

1) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$

2) $\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = I_3 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x + C.$

3) $\int \frac{5x}{(x^2+3)^7}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{(x^2+3)^7}\,dx = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6(x^2+3)^6} + C = -\frac{5}{12(x^2+3)^6} + C.$

4) $\int \frac{5x-7}{x^2+3}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx - 7\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \frac{5}{2}\ln(x^2+3) - \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$

(ultima integrală este de forma $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ cu $a = \sqrt{3}$).

5) $\int \frac{-3x+4}{(x^2+5)^2}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{2x}{(x^2+5)^2}\,dx + 4\int \frac{1}{(x^2+5)^2}\,dx = \frac{3}{2(x^2+5)} + I_2.$

Ultima integrală este de forma $I_2 = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx$ cu $a = \sqrt{5}$,

deci

$$I_2 = \frac{1}{2\cdot 5}\,\frac{x}{(x^2+5)^2} + \frac{1}{2\cdot 5\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

și deci

$$\int \frac{-3x+4}{(x^2+5)^2}\,dx = \frac{3}{2(x^2+5)} + \frac{2x}{5(x^2+5)^2} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

6) $\int \frac{3}{2x^2+4x+7}\,dx = \int \frac{3}{2\left[(x+1)^2+\frac{5}{2}\right]}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2+\frac{5}{2}}\,dx.$

Se face înlocuirea $x+1 = z$, deci $dx = dz$. Atunci

$$\int \frac{3}{2x^2+4x+7}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{z^2+\frac{5}{2}}\,dz = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{\frac{5}{2}}} + C =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{10}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{5}}z + C = \frac{3}{\sqrt{10}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{5}}(x+1) + C.$$

7) $\int \frac{3}{(2x^2+4x+7)^2}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left[(x+1)^2+\frac{5}{2}\right]^2}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(z^2+\frac{5}{2}\right)^2}\,dz =$

$$= \frac{3}{4}I_2.$$

Ţinînd seama că în ultima integrală $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$, avem:

$$I_2 = \frac{1}{5}\,\frac{z}{z^2+\frac{5}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{5}}z + C = \frac{x+1}{5\left(x^2+2x+\frac{7}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{5}}(x+1) + C,$$

deci

$$\int\frac{3}{(2x^2+4x+7)^2}\,dx = \frac{3}{4}\,\frac{2(x+1)}{5(2x^2+4x+7)} + \frac{3}{4}\,\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{5}{2}}(x+1) + C.$$

$$8)\ \int\frac{6x-4}{x^2-2x+5}\,dx = \int\frac{6x-6+2}{x^2-2x+5}\,dx = 3\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx +$$

$$+\int\frac{2}{x^2-2x+5}\,dx = 3\ln(x^2-2x+5) + 2\int\frac{1}{x^2-2x+5}\,dx.$$

Dar $x^2-2x+5 = (x-1)^2+4$ şi făcînd $x-1=z$, deci $dx = dz$, obţinem

$$\int\frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int\frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx = \int\frac{1}{z^2+4}\,dz = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C.$$

Atunci

$$\int\frac{6x-4}{x^2-2x+5}\,dx = 3\ln(x^2-2x+5) + \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C.$$

$$9)\ \int\frac{5x-3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx = \int\frac{5x-3}{[(x-1)^2+4]^2}\,dx.$$

Facem înlocuirea $x-1=z$, deci $x = z+1$ şi $dx = dz$. Atunci

$$\int\frac{5x-3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx = \int\frac{5z+5-3}{(z^2+4)^2}\,dz = \int\frac{5z+2}{(z^2+4)^2}\,dz =$$

$$= \frac{5}{2}\int\frac{2z}{(z^2+4)^2}\,dz + 2\int\frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = -\frac{5}{2(z^2+4)} + 2I_2 = -\frac{5}{2(x^2-2x+5)} + 2I_2;$$

$$I_2 = \frac{1}{8}\,\frac{z}{z^2+4} + \frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{2} + C = \frac{1}{8}\,\frac{x-1}{(x^2-2x+5)} + \frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C.$$

Aşadar

$$\int\frac{5x-3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx = -\frac{5}{2(x^2-2x+5)} + \frac{1}{4}\,\frac{x-1}{x^2-2x+5} + \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C.$$

Primitivele oricărei funcții raționale $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ definite pe un interval I (pe care numitorul $Q(x)$ nu se anulează în nici un punct) sînt funcții elementare care se pot totdeauna determina (dacă se cunosc rădăcinile numitorului $Q(x)$).

Într-adevăr, dacă grad $P \geqslant$ grad Q, efectuînd împărțirea, obținem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

unde $C(x)$ și $P_1(x)$ sînt două polinoame: $C(x)$ este cîtul împărțirii, iar $P_1(x)$ este restul împărțirii, și grad $P_1 <$ grad Q.

Atunci

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Integrala polinomului $C(x)$ se poate efectua, astfel încît am redus calculul integralei funcției raționale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ la acela al integralei funcției raționale $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ cu gradul numărătorului mai mic decît gradul numitorului.

Se știe din algebră că funcția rațională $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ cu grad $P_1 <$ grad Q se poate scrie (într-un singur mod) ca sumă de fracții simple

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \sum \frac{A}{(x - x_0)^n} + \sum \frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

astfel încît

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}\,dx = \sum \int \frac{A}{(x - x_0)^n}\,dx + \sum \int \frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n}\,dx.$$

Așadar, integrala funcției raționale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se poate totdeauna efectua.

Observație. Ținînd seama de faptul că primitivele fracțiilor simple sînt de forma $k \ln (ax^2 + bx + c)$ sau k arc tg $(ax + b)$ sau funcții raționale, sau combinații liniare de această formă, rezultă că primitivele oricărei funcții raționale sînt combinații liniare de funcții de această formă.

Pentru descompunerea funcției raționale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în fracții simple se procedează în felul următor:

Fiecărei rădăcini reale x_0 a numitorului $Q(x)$, de ordinul n de multiplicitate, îi corespunde în descompunerea menționată o sumă de n fracții simple, de forma

$$\frac{A_n}{(x - x_0)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x - x_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \frac{A_1}{x - x_0}.$$

Fiecărei rădăcini complexe x_1 a numitorului $Q(x)$, de ordinul n de multiplicitate, îi corespunde în descompunerea menționată o sumă de n fracții simple, de forma

$$\frac{B_n x + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n} + \frac{B_{n-1} x + C_{n-1}}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_2 x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{ax^2 + bx + c},$$

unde trinomul $ax^2 + bx + c$ are rădăcina x_1 și conjugata complexă a lui x_1.

Pentru determinarea coeficienților A_n, B_n, C_n etc., se poate aplica metoda coeficienților nedeterminați:

În identitatea

$$(1)\quad \frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_n}{(x - x_0)^n} + \ldots + \frac{A_1}{x - x_0} + \ldots + \frac{B_n x + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n} + \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \ldots$$

se aduc la același numitor $Q(x)$ fracțiile din membrul drept și se obține identitatea

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

de unde $P(x) \equiv P_1(x)$. Polinomul $P_1(x)$ conține coeficienții A_n, B_n, C_n,... Egalînd coeficienții termenilor de același grad ai polinoamelor P și P_1, se obține un sistem de ecuații din care se determină A_n, B_n, C_n etc.

O altă metodă pentru determinarea coeficienților A_n, B_n, C_n, ... este următoarea: În identitatea (1) se dau valori particulare variabilei x și se obține un sistem de ecuații din care se determină A_n, B_n, C_n,...

Exemple. 1) Să se calculeze $\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2}\, dx$ (pe un interval I care nu conține punctul 2).

Avem:

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} \equiv \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1} \equiv$$

$$\equiv \frac{A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x - 2) + (Dx + E)(x^2 + 1)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 + 1)^2}$$

deci

$$2x^2 + 2x + 13 \equiv A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x - 2) + (Dx + E)(x^3 - 2x^2 + x - 2) \equiv$$

$$\equiv (A + D)x^4 + (E - 2D)x^3 + (2A + B + D - 2E)x^2 + (C - 2B - 2D + E)x + (A - 2C - 2E).$$

Atunci

$$A + D = 0, \quad E - 2D = 0, \quad 2A + B + D - 2E = 2,$$
$$C - 2B - 2D + E = 2, \quad A - 2C - 2E = 13.$$

Se obține: $A = 1$, $B = -3$, $C = -4$, $D = -1$, $E = -2$, deci

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} - \frac{x+2}{x^2+1}.$$

Așadar:

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Pentru determinarea coeficientului A se poate proceda astfel:
În identitatea inițială se înmulțește cu $x - 2$ (pentru $x \neq 2$):

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x^2+1)^2} \equiv A + \left[\frac{Bx + C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2+1}\right](x-2).$$

Identitatea aceasta este valabilă pentru orice $x \neq 2$; atunci ea este valabilă și pentru $x = 2$. Așadar, făcînd $x = 2$, obținem $A = 1$.

Atunci

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x-2} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2+1}.$$

Înmulțind acum cu $(x^2 + 1)^2$, obținem:

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{x-2} \equiv Bx + C + (Dx + E)(x^2+1) + \frac{(x^2+1)^2}{x-2}.$$

Această identitate este valabilă pentru orice număr real $x \neq 2$, dar și pentru orice număr complex $x \neq 2$.
Făcînd $x = i$ obținem

$$\frac{-2 + 2i + 13}{i-2} = Bi + C$$

sau

$$2i + 11 = -B - 2Bi + Ci - 2C.$$

Egalînd părțile reale și părțile imaginare, obținem

$$-B - 2C = 11,$$

$$-2B + C = 2,$$

de unde $B = -3$ și $C = -4$.

Atunci

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2+1}.$$

Făcînd în această identitate $x = 0$, obținem

$$\frac{13}{-2} = -\frac{1}{2} - 4 + E.$$

de unde $E = -2$. În sfîrşit, făcînd $x = 1$, obţinem

$$\frac{17}{-4} = -1 - \frac{7}{4} + \frac{D+E}{2},$$

de unde $D + E = -3$, deci $D = -3 - E = -1$. Aşadar,

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} - \frac{x+2}{x^2+1}.$$

2) Să se calculeze $\int \frac{5x^2-20x+17}{(x-2)^3}\,dx$ (pe un interval I, care nu conţine punctul 2).

Avem

$$\frac{5x^2-20x+17}{(x-2)^3} \equiv \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Înmulţind cu $(x-2)^3$, avem

$$5x^2 - 20x + 17 \equiv A + B(x-2) + C(x-2)^2.$$

Făcînd $x = 2$, obţinem $A = -3$.

Derivînd ambii membri, avem

$$10x - 20 \equiv B + 2C(x-2)$$

şi făcînd $x = 2$, obţinem $B = 0$.

Derivînd din nou, avem $10 = 2C$, de unde $C = 5$.

Aşadar

$$\frac{5x^2-20x+17}{(x-2)^3} = -\frac{3}{(x-2)^3} + \frac{5}{x-2},$$

deci

$$\int \frac{5x^2-20x+17}{(x-2)^3}\,dx = -3\int \frac{1}{(x-2)^3}\,dx + 5\int \frac{1}{x-2}\,dx = \frac{3}{2(x-2)^2} + 5\ln|x-2| + C.$$

3) Să se calculeze $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx$ (pe un interval I care nu conţine punctele $-a$ şi a).

Avem

$$\frac{1}{x^2-a^2} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

Înmulţim cu $x - a$:

$$\frac{1}{x+a} \equiv A + \frac{B}{x+a}(x-a);$$

se face $x = a$. Obţinem $A = \frac{1}{2a}$.

În identitatea inițială, înmulțim cu $x + a$:

$$\frac{1}{x-a} = \frac{A}{x-a}(x+a) + B$$

și facem $x = -a$. Obținem $B = -\frac{1}{2a}$.

Așadar

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right),$$

deci

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}\,dx - \int \frac{1}{x+a}\,dx\right] = \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

7. Integrarea funcțiilor continue

Fie f o funcție *continuă* pe un interval I, a și b două puncte din I. Pentru integrarea acestei funcții se poate folosi formula lui Leibniz—Newton

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

unde F este o primitivă (oarecare) a lui f, iar

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Formula lui Leibniz—Newton se obține formal din integrala nedefinită

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

înlăturînd constanta arbitrară C și scriind în ambii membri limitele de integrare.

Pentru funcțiile *continue* (ca și pentru funcțiile integrabile care admit primitive), anumite proprietăți ale integralei se pot demonstra, mai simplu, cu ajutorul primitivelor, fără a recurge la sumele integrale:

1) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$;

2) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$;

3) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx$;

4) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\,(b-a)$, unde ξ este cuprins între a şi b.

Într-adevăr, dacă F este o primitivă a lui f şi G este o primitivă a lui g:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a),$$

atunci:

1) αF este o primitivă a lui αf, deci

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha F(x)\Big|_a^b = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha[F(b) - F(a)] =$$

$$= \alpha \cdot F(x)\Big|_a^b = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2) $F + G$ este o primitivă a lui $f + g$, deci

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = (F(x) + G(x))\Big|_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a) =$$

$$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

$$3)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b + F(x)\Big|_a^c = F(b) - F(a) + F(c) -$$

$$- F(b) = F(c) - F(a) = F(x)\Big|_a^c = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4) Aplicînd teorema creşterilor finite funcţiei F, există un punct ξ cuprins între a şi b astfel ca

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a),$$

deci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = f(\xi)(b-a).$$

Să observăm că simbolul $F(x)\Big|_a^b$ are următoarele proprietăţi:

$$(\alpha F(x))\Big|_a^b = \alpha \cdot F(x)\Big|_a^b,$$

$$(F(x) + G(x))\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b.$$

Aceste proprietăţi au fost verificate în cursul demonstraţiei proprietăţilor 1 şi 2 ale integralei.

§ 5. Metode de integrare

Ca şi pentru integralele nedefinite, pentru calculul integralelor definite ale funcţiilor continue se pot aplica două metode de integrare: integrarea prin părţi şi schimbarea de variabilă.

1. Integrarea prin părţi

Propoziţia 1. Dacă f şi g sînt două funcţii definite pe un interval I, cu derivate f' şi g' continue pe acest interval, şi dacă a şi b sînt două puncte din I, atunci

$$\int_a^b fg'\,dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g\,dx.$$

Într-adevăr fg este derivabilă pe I şi

$$(fg)' = fg' + f'g,$$

adică fg este o primitivă a funcţiei $fg' + f'g$, deci

$$\int_a^b (fg' + f'g)dx = fg\Big|_a^b.$$

Dar

$$\int_a^b (fg' + f'g)dx = \int_a^b fg'dx + \int_a^b f'g\,dx,$$

deci

$$\int_a^b fg'dx + \int_a^b f'g\,dx = fg\Big|_a^b,$$

de unde

$$\int_a^b fg'\,dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g\,dx.$$

Această egalitate se numeşte *formula de integrare prin părţi* (pentru integralele definite).

Observaţie. Propoziţia rămîne adevărată şi dacă derivatele f' şi g' nu sînt continue, ci numai integrabile. Cum f şi g sînt de asemenea integrabile (deoarece fiind derivabile, sînt continue), rezultă că produsele $f'g$ şi fg' sînt integrabile, deci şi funcţia $(fg)' = f'g + fg'$ este integrabilă. Funcţia $(fg)'$ are şi primitive, deci i se poate aplica formula lui Leibniz—Newton, şi demonstraţia continuă ca mai sus.

Pentru integralele definite se poate de asemenea da o formulă de integrare prin părţi de ordinul n:

Propoziția 2. Dacă f și g sînt două funcții definite pe un interval I, care au derivate de ordinul n, $f^{(n)}$ și $g^{(n)}$ continue pe I, și dacă $a, b \in I$, atunci:

$$\int_a^b fg^{(n)}dx = fg^{(n-1)}\Big|_a^b + (-1)^1 f'g^{(n-2)}\Big|_a^b + (-1)^2 f''g^{(n-3)}\Big|_a^b + \ldots +$$

$$+ (-1)^k f^{(k)}g^{(n-k-1)}\Big|_a^b + \ldots + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}g\Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g\,dx.$$

Într-adevăr

$$\int_a^b f^{(k)}\,g^{(n-k)}\,dx = f^{(k)}\,g^{(n-k-1)}\Big|_a^b - \int_a^b f^{(k+1)}g^{(n-k-1)}\,dx,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1,$$

deci

$$(-1)^k \int_a^b f^{(k)}g^{(n-k)}\,dx = (-1)^k f^{(k)}g^{(n-k-1)}\Big|_a^b + (-1)^{k-1}\int_a^b f^{(k+1)}g^{(n-k-1)}\,dx.$$

Adunînd membru cu membru cele n egalități și reducînd termenii asemenea, se obține formula din enunțul propoziției.

Exemplu. Dacă $P(x)$ este un polinom de grad $\leqslant n$, iar α și $\beta \neq 0$ sînt numere reale, avem

$$\int_a^b e^{\beta x}\,P(\alpha x)dx = e^{\beta x}\left[\frac{P(\alpha x)}{\beta} - \frac{\alpha P'(\alpha x)}{\beta^2} + \ldots + (-1)^n \frac{\alpha^n P^{(n)}(\alpha x)}{\beta^{n+1}}\right]\Big|_a^b.$$

Într-adevăr, în formula de integrare prin părți de ordinul n luăm

$$f(x) = P(\alpha x),\ f'(x) = \alpha P'(\alpha x),\ f''(x) = \alpha^2 P''(\alpha x),\ldots.$$

$$\ldots,\ f^{(n-1)}(x) = \alpha^{n-1}\,P^{(n-1)}(\alpha x),\ f^{(n)}(x) = \alpha^n P^{(n)}(\alpha x)$$

$$g^{(n)}(x) = e^{\beta x},\ g^{(n-1)}(x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta},\ g^{(n-2)}(x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta^2},\ldots,\ g'(x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta^{n-1}},\ g(x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta^n},$$

obținem:

$$\int_a^b e^{\beta x}\,P(\alpha x)\,dx = \left(P(\alpha x)\frac{e^{\beta x}}{\beta} - \alpha P'(\alpha x)\frac{e^{\beta x}}{\beta^2} + \ldots +\right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1}\alpha^{n-1}P^{(n-1)}(\alpha x)\frac{e^{\beta x}}{\beta^{(n)}}\right)\Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b \alpha^n\,P^{(n)}(\alpha x)\frac{e^{\beta x}}{\beta^n}dx.$$

Observînd că $P^{(n)}(\alpha x) =$ constant, deoarece $P(\alpha x)$ este un polinom de grad $\leqslant n$, avem

$$\int_a^b \alpha^n P^{(n)}(\alpha x)\frac{e^{\beta x}}{\beta^n}dx = \alpha^n P^{(n)}(\alpha x)\int_a^b \frac{e^{\beta x}}{\beta^n}dx = \alpha^n P^{(n)}(\alpha x)\frac{e^{\beta x}}{\beta^{n+1}}\Big|_a^b$$

și înlocuind în egalitatea precedentă, se obține formula de mai sus.

Luînd în această formulă $\beta = -\alpha \neq 0$, obținem egalitatea următoare

$$\int_a^b e^{-\alpha x} P(\alpha x)\,dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\left[P(\alpha x) + P'(\alpha x) + \ldots + P^{(n)}(\alpha x)\right]\Big|_a^b.$$

O b s e r v a ț i i. 1° Formula este adevărată și dacă se presupune că derivatele $f^{(n)}$ și $g^{(n)}$ nu sînt continue, ci numai integrabile.

2° Din formulele de integrare prin părți pentru integralele definite, se pot deduce formule de calcul al primitivelor luînd una dintre limitele de integrare variabilă:

$$\int_a^x fg'\,dx = fg\Big|_a^x - \int_a^x f'g\,dx$$

sau

$$\int_a^x fg'\,dx = f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a) - \int_a^x f'g\,dx.$$

Atunci

$$\int fg'\,dx = \int_a^x fg'\,dx + C = f(x)\,g(x) - \int_a^x f'g\,dx - f(a)\,g(a) + C = f(x)\,g(x) - \int f'g\,dx.$$

Formula lui Taylor. Din formula de integrare prin părți de ordinul n se poate deduce formula lui Taylor *cu restul sub formă de integrală.*

P r o p o z i ț i a 3. Fie f o funcție definită pe un interval I și $a \in I$. Dacă f are derivată de ordinul $n+1$, continuă pe I, atunci pentru orice $x \in I$ avem:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Se aplică formula de integrare prin părți de ordinul n funcțiilor $F(t) = \frac{(t-x)^n}{n!}$ și $G(t) = f'(t)$, definite pentru $t \in I$. Funcțiile F și G au derivate de ordinul n continue pe I

$$F(t) = \frac{(t-x)^n}{n!}; \quad G^{(n)}(t) = f^{(n+1)}(t);$$

$$F'(t) = \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}; \quad G^{(n-1)}(t) = f^{(n)}(t);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F^{(n-1)}(t) = t - x; \qquad G'(t) = f''(t);$$

$$F^{(n)}(t) = 1; \qquad G(t) = f'(t).$$

$$\int_a^x F(t)\,G^{(n)}(t)\,dt = F(t)G^{(n-1)}(t)\Big|_a^x + (-1)^1 F'(t)G^{(n-2)}(t)\Big|_a^x + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}F^{(n-1)}(t)G(t)\Big|_a^x + (-1)^n \int_a^x F^{(n)}(t)G(t)\,dt,$$

adică

$$\int_a^x \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_a^x + (-1)^1 \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t)\Big|_a^x +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}(t-x) f'(t)\Big|_a^x + (-1)^n \int_a^x f'(t)\,dt = -\frac{(a-x)^n}{n!} f^{(n)}(a) -$$

$$-(-1)^1 \frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) - \ldots - (-1)^{n-1}(a-x) f'(a) + (-1)^n [f(x) - f(a)];$$

ţinînd seama că

$$(t-x)^n = (-1)^n (x-t)^n,$$

$$(a-x)^k = (-1)^k (x-a)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

obţinem

$$(-1)^n \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = -(-1)^n \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) - (-1) \frac{n(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) -$$

$$- \ldots - (-1)^n (x-a) f'(a)^n - (-1)^n f(a) + (-1)^n f(x),$$

de unde, împărţind cu $(-1)^n$ şi scoţînd pe $f(x)$, se obţine

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) +$$

$$+ \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Ca şi la formula de integrare prin părţi, formula lui Taylor, cu restul sub forma integrală, este valabilă şi dacă derivata $f^{(n+1)}$ nu este continuă, ci numai integrabilă.

2° Dacă $f^{(n+1)}$ este continuă pe I, din restul sub forma integrală

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

se poate deduce restul sub forma lui Lagrange

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

unde ξ este cuprins între a şi x.

Într-adevăr, să aplicăm funcţiilor

$$F_1(t) = f^{(n+1)}(t),$$

$$G_1(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$$

formula mediei pentru integrale:

$$\int_a^x F_1(t)\, G_1(t)\,dt = F_1(\xi) \int_a^x G_1(t)\,dt,$$

unde ξ este cuprins între a şi x. Se poate aplica formula mediei, deoarece funcţiile $F_1(t)$ şi $G_1(t)$ sînt continue pe I, iar funcţia $G_1(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$ păstrează acelaşi semn pe intervalul cu extremităţile în a şi x (dacă $a < x$, atunci $a < t < x$, deci $x - t > 0$; dacă $x < a$ atunci $x < t < a$ deci $x - t < 0$).

Înlocuind în formula precedentă pe F_1 şi G_1, obţinem

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = f^{n+1}(\xi)\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_a^x\right) =$$

$$= f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Transcendenţa numărului e

Din exemplul de la nr. 1 deducem că dacă $P(x)$ este un polinom de gradul k şi $\alpha \neq 0$, avem

$$\int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} P(\alpha x)\,dx = -e^{-\alpha x} Q(\alpha x)\Big|_0^1 = -e^{-\alpha} Q(\alpha) + Q(0),$$

unde am notat

$$Q(x) = P(x) + P'(x) + \ldots + P^{(k)}(x).$$

Înmulţind cu e^α în egalitatea de mai sus, obţinem, chiar pentru $\alpha = 0$,

$$e^\alpha Q(0) = Q(\alpha) + \alpha e^\alpha \int_0^1 e^{-\alpha x} P(\alpha x)\,dx = Q(\alpha) + R(\alpha)$$

unde am notat

$$R(\alpha) = \alpha e^\alpha \int_0^1 e^{-\alpha x} P(\alpha x)\,dx.$$

Pentru demonstrarea transcendenţei numărului e, vom folosi polinomul

$$P(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(x-1)^p (x-2)^p \ldots (x-n)^p$$

de grad $np + p - 1$, unde p este un număr prim oarecare.

Derivata de ordin p a factorului $(x-n)^p$ este $p!$, deci derivata de ordin p a polinomului $P(x)$ are numai coeficienţi întregi, multipli ai lui p. Urmează că derivatele de ordin $r \geqslant p$ ale lui $P(x)$ sînt polinoame cu coeficienţi întregi divizibili cu p, deci pentru $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $P^{(r)}(i)$ este un număr întreg multiplu de p.

Deoarece numerele $1, 2, \ldots, n$ sînt rădăcini de ordin p ale lui $P(x)$, rezultă că $P(x)$ şi primele sale $p-1$ derivate se anulează pentru $x = 1, 2, \ldots, n$. De asemenea, $P(x)$ şi primele sale $p-2$ derivate se anulează pentru $x = 0$. Urmează că pentru $x = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, avem

$$Q(i) = P^{(p)}(i) + \ldots + P^{(np+p-1)}(i) = Kp$$

iar pentru $x = 0$ avem

$$Q(0) = P^{(p-1)}(0) + P^{(p)}(0) + \ldots + P^{(np+p-1)}(0) = P^{(p-1)}(0) + K'p =$$

$$= (-1)^{pn}(n!)^p + K'p$$

unde K şi K' sînt numere întregi.

Să presupunem, prin absurd, că e este un număr algebric, soluție a ecuației

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

cu coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ întregi și să arătăm că ajungem la o contradicție. Avem deci

$$a_0 + a_1 e + \ldots + a_n e^n = 0.$$

Să considerăm polinomul

$$P(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(x-1)^p (x-2)^p \ldots (x-n)^p$$

cu p prim oarecare și să înmulțim în egalitatea precedentă cu $Q(0)$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot e^i Q(0) = 0.$$

Folosind egalitatea $e^\alpha Q(0) = Q(\alpha) + R(\alpha)$ pentru $\alpha = i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, obținem

$$a_0 Q(0) + \sum_{i=1}^{n} Q(i) = -\sum_{i=1}^{n} a_i R(i)$$

de unde

$$(-1)^{pn} a_0 (n!)^p + K'' p = -\sum_{i=1}^{n} a_i R(i)$$

unde K'' este întreg. Luînd $p > |a_0|$ și $p > n$, primul termen al sumei din membrul stîng nu are factor prim numărul p, deci nu este multiplu de p și deci primul termen al egalității este un număr întreg $\neq 0$. Vom arăta că membrul drept al egalității este cuprins strict între -1 și 1, și vom ajunge astfel la o contradicție. Avem, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$|R(i)| = e^i \left| \int_0^1 i e^{-ix} P(ix)\, dx \right| = e^i \left| \int_0^i e^{-t} P(t)\, dt \right| < e^i i \sup_{1 \leqslant t \leqslant i} |P(t)| <$$

$$< \frac{e^i i (n!)^p}{(p-1)!} \leqslant \frac{n e^n (n!)^p}{(p-1)!}$$

deci, notînd $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$, avem

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i R(i) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, |R(i)| \leqslant M \sum_{i=1}^{n} |R(i)| \leqslant M n^2 e^n n! \frac{(n!)^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Dar $\lim_{p \to \infty} \frac{y^p}{p!} = 0$, deci, luînd p suficient de mare, obținem ca ultimul termen să fie < 1, deci $\left| \sum_{i=1}^{n} a_i R(i) \right| < 1$ și am ajuns la contradicția enunțată mai sus. Așadar, numărul e este transcendent. Acest fapt a fost demonstrat de *Hermite*.

3. Transcendența numărului π

Demonstrația folosește proprietățile funcțiilor simetrice elementare de rădăcinile unei ecuații și următoarele două observații din teoria ecuațiilor algebrice.

1) *Dacă γ este un număr algebric (real sau complex), soluție a ecuației cu coeficienți întregi*

$$\varphi(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$$

atunci $i\gamma$, $(i = \sqrt{-1})$, este de asemenea algebric.

Într-adevăr, punînd $\gamma' = i\gamma$, avem $\gamma = -i\gamma'$, deci $\varphi(-i\gamma') = 0$, de unde $\varphi(-i\gamma')\,\varphi(i\gamma') = 0$, iar membrul stîng al ultimei egalități este un polinom în γ', cu coeficienți întregi.

2) *Dacă γ este un număr algebric, soluție a ecuației $\varphi(x) = 0$ atunci $\gamma' = \gamma a_n$ este de asemenea un număr algebric, soluție a unei ecuații algebrice canonice, cu coeficienți întregi, în care coeficientul lui x^n este 1.*

Această ecuație este

$$a_n^{n-1}\varphi\left(\frac{x}{a_n}\right) = 0.$$

Să presupunem prin absurd că π este număr algebric, și să arătăm că ajungem la o contradicție. Din cele două observații de mai sus, rezultă că există un număr întreg c, astfel încît numărul πic să verifice o ecuație canonică cu coeficienți întregi:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 = 0.$$

Să notăm $c\beta_1$, $c\beta_2$,..., $c\beta_n$ rădăcinile acestei ecuații. Printre aceste rădăcini se află și πic: există deci m astfel încît $\beta_m = i\pi$, deci

$$1 + e^{\beta_m} = 0$$

deoarece $e^{\beta_m} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$. Atunci

$$(1 + e^{\beta_1})(1 + e^{\beta_2}) \ldots (1 + e^{\beta_n}) = 0.$$

Să dezvoltăm produsul din membrul stîng: vor apare puteri ale lui e avînd exponenți sume formate din numerele $\beta_1,\ldots,\beta_n$. Dacă o asemenea sumă este nulă, puterea lui e este 1. Așadar, după dezvoltare, vom obține o egalitate de forma

$$C + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \ldots + e^{\alpha_s} = 0$$

unde C este întreg iar α_1, α_2,..., α_s sînt sume $\neq 0$, formate din numerele $\beta_1,\ldots,\beta_n$. Dar $c\alpha_1$, $c\alpha_2$,..., $c\alpha_s$ sînt rădăcinile unei ecuații algebrice cu coeficienții întregi, deoarece $c\beta_1,\ldots,c\beta_n$ sînt rădăcinile unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi, deci și sumele formate cu acestea sînt rădăcinile unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi și printre aceste sume se află și $c\alpha_1$, $c\alpha_2$,..., $c\alpha_s$. Să considerăm polinomul de grad $sp + p - 1$.

$$P(x) = \frac{(cx)^{p-1}}{(p-1)!}(cx - c\alpha_1)^p\,(cx - c\alpha_2)^p \ldots (cx - c\alpha_s)^p$$

unde p este un număr prim. Atunci $(p-1)!\,P(x)$ este un polinom în cx, cu coeficienți întregi. Notînd

$$Q(x) = P(x) + P'(x) + \ldots + P^{(sp+p-1)}(x)$$

şi înmulţind cu $Q(0)$ în egalitatea $C + \sum_{i=1}^{s} e^{\alpha_i} = 0$, obţinem

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^{s} e^{\alpha_i} Q(0) = 0$$

şi deoarece $e^{\alpha_i} Q(0) = Q(\alpha_i) + R(\alpha_i)$, avem

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^{s} Q(\alpha_i) = -\sum_{i=1}^{s} R(\alpha_i).$$

Ca şi în demonstraţia transcendenţei lui e, deducem că derivata $P^{(r)}(x)$ se anulează pentru $x = 0$ dacă $r < p - 1$ şi pentru $x = \alpha_i$ dacă $r < p$. Pentru $r \geqslant p$, coeficienţii derivatei $P^{(r)}(x)$ sînt întregi şi divizibili cu p. Dar $P^{(r)}(x)$ este un polinom în cx, deci

$$\sum_{i=1}^{s} P^{(r)}(\alpha_i), \qquad r \geqslant p$$

este o funcţie simetrică întreagă de $c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_s$, cu coeficienţi întregi divizibili cu p. Avem de asemenea

$$P^{(p-1)}(0) = c^{p-2}(-c\alpha_1)^p (-c\alpha_2)^p \ldots (-c\alpha_s)^p.$$

Aşadar

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^{s} Q(\alpha_i) = CP^{(p-1)}(0) + K_p$$

unde K este întreg; luînd p mai mare decît numerele C, c şi decît produsul $\alpha_1 c \cdot \alpha_2 c \ldots \alpha_s c$, deducem că $CQ(0) + \sum_{i=1}^{s} Q(\alpha_i)$ este un număr întreg $\neq 0$.

Să evaluăm acum $\sum_{i=1}^{s} R(\alpha_i)$ şi să arătăm că are modulul < 1. Avem

$$|R(\alpha_i)| \leqslant He^H M$$

unde $H = \max(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_s|)$ şi

$$M = \sup_{|x|<H} |P(x)| < \frac{(|c|H)^{p-1}(2|c|H)^{ps}}{(p-1)!}$$

deci

$$\left| \sum_{i=1}^{s} R(\alpha_i) \right| < K' \frac{K^{p-1}}{(p-1)!}$$

unde K şi K' sînt constante. Deoarece $\lim_{p\to\infty} \frac{K^{p-1}}{(p-1)!} = 0$, pentru p suficient de mare putem realiza ca $\left| \sum_{i=1}^{s} R(\alpha_i) \right| < 1$. Atunci egalitatea

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^{s} Q(\alpha_i) = -\sum_{i=1}^{s} R(\alpha_i)$$

nu poate avea loc, deoarece, după cum s-a arătat mai sus, membrul stîng este întreg, şi am ajuns la o contradicţie.

Aşadar, π este transcendent. Acest fapt a fost demonstrat de *Lindemann*.

4. Schimbarea de variabilă (integrarea funcţiilor compuse)

Fie intervalele I şi J, şi funcţiile

$$u(x) : I \to J, \quad f(t) : J \to R.$$

Propoziţia 1. Dacă $f(t)$ este continuă pe J, iar $u(x)$ are derivată $u'(x)$ continuă pe I, şi dacă a şi b sînt două puncte din I, atunci:

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, dt.$$

Această egalitate se numeşte *prima formulă de schimbare de variabilă.*

Funcţiile $f(t)$ şi $(fu(x)) \cdot u'(x)$ sînt continue, respectiv, pe J şi I, deci au primitive pe aceste intervale. Fie $F(t)$ o primitivă a funcţiei $f(t)$ pe intervalul J:

$$F'(t) = f(t).$$

Atunci funcţia compusă $H(x) = F(u(x))$, definită pe I, este derivabilă pe I şi

$$H'(x) = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x),$$

adică H este o primitivă a funcţiei $f(u(x)) \cdot u'(x)$.

Aşadar

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = H(x)\Big|_a^b = H(b) - H(a) =$$
$$= F(u(b)) - F(u(a)) = F(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, dt.$$

Practic, pentru a calcula integrala

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx$$

se face înlocuirea

$$u(x) = t$$

şi se diferenţiază formal

$$u'(x)\, dx = dt.$$

Limitele de integrare a şi b se înlocuiesc cu limitele de integrare t_1 şi t_2, care se obţin tot din egalitatea $u(x) = t$, înlocuind pe x respectiv cu a şi b:

$$t_1 = u(a), \qquad t_2 = u(b),$$

se obţine

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Funcţia $u(x)$ nu este presupusă monotonă.

2° Nu este nevoie ca derivata $u'(x)$ să fie continuă, ci numai integrabilă. Într-adevăr, deoarece funcţia $f(u(x))$ este de asemenea integrabilă (fiind continuă, ca funcţie compusă a funcţiilor continue $u(t)$ şi $f(x)$, produsul $f(u(x))\ u'(x)$ este o funcţie integrabilă şi având şi primitivă (funcţia $H(x)$), se poate aplica formula lui Leibniz-Newton şi demonstraţia continuă ca mai sus.

3° Formula de schimbare de variabilă se poate scrie şi astfel

$$\int_\alpha^\beta f(x)\ dx = \int_a^b f(u(t))\ u'(t)\ dt,$$

unde s-a notat cu x variabila din J şi cu t variabila din I, iar între limitele de integrare există relaţiile

$$\alpha = u(a), \qquad \beta = u(b).$$

În acest fel putem calcula integrala $\int_\alpha^\beta f(x)\ dx$ cu ajutorul integralei $\int_a^b f(u(t))\cdot u'(t)\ dt$, făcînd următoarele înlocuiri:

$$x = u(t), \qquad dx = u'(t)\ dt.$$

Limitele a şi b se aleg astfel ca $u(a) = \alpha$ şi $u(b) = \beta$. Dacă $u(a') = \alpha$ şi $u(b') = \beta$, se pot alege a' şi b' limitele integralei din membrul drept. Nu este nevoie ca funcţia $u(t)$ să fie biunivocă.

Exemplu. Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\ dx$.

Se face înlocuirea $x = \sin t$, deci $dx = \cos t\ dt$.

Putem alege $t_1 = 0$ şi $t_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, k întreg, deoarece

$$x_1 = \sin t_1 = \sin 0 = 0,\ x_2 = \sin t_2 = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Atunci

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\ dx = \int_0^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\ \cos t\ dt = \int_0^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} |\cos t|\ \cos t\ dt.$$

Dar

$$\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} |\cos t|\ \cos t\ dt = 0, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Într-adevăr: pentru $2n\pi \leqslant t \leqslant 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ şi $2n\pi + \frac{3\pi}{2} \leqslant t \leqslant (2n+1)\pi$ avem $\cos t \geqslant 0$ deci $|\cos t| = \cos t$ şi

$$|\cos t|\ \cos t = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Iar pentru $2n\pi + \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$ avem $\cos t \leqslant 0$, deci $|\cos t| = -\cos t$ şi

$$|\cos t| \cos t = -\cos^2 t = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right).$$

Atunci

$$\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} |\cos t| \cos t \, dt = \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt - \int_{2n\pi+\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t \, dt + \int_{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}^{2(n+1)\pi} \cos^2 dt =$$

$$= \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{2n\pi+\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{2}} + \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}^{2(n+1)\pi} = 0.$$

Aşadar

$$\int_0^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t \, dt = \int_0^{2\pi} |\cos t| \cos t \, dt + \int_{2\pi}^{4\pi} |\cos t| \cos t \, dt + \ldots +$$

$$+ \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} |\cos t| \cos t \, dt + \int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t \, dt = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt =$$

$$= \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Pentru calcul, alegem desigur cazul cel mai simplu: $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Observaţie. Din prima formulă de schimbare de variabilă se deduce o formulă de calcul pentru primitive, luînd una din limite variabile

$$\int_a^x f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{x(a)}^{u(x)} f(t) dt.$$

Propoziţia 2. Dacă $f(t)$ este continuă pe J, iar $u(x)$ este strict monotonă pe I, dacă inversa sa $v = u^{-1}$: $J \to I$ are derivată continuă v' pe J, şi dacă $a, b \in I$, atunci

$$\int_a^b f(u(x)) \, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) v'(t) \, dt.$$

Această egalitate se numeşte a *doua formulă de schimbare de variabilă.*

Să observăm mai întîi că, deoarece $v = u^{-1}$, avem

$$u(v(t)) = t \text{ pentru orice } t \in J,$$

$$v(u(x)) = x \text{ pentru orice } x \in I,$$

$$I \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} J.$$

Funcția $f(u(x))$ este continuă pe I.

$$I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} R$$

$$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow f(u(x)).$$

Fie $F(x) : I \to R$ o primitivă a funcției $f(u(x))$:

$$F'(x) = f(u(x)),\ x \in I.$$

Să considerăm funcția compusă $H(t) = F(v(t)) : J \to R$:

$$J \xrightarrow{v} I \xrightarrow{F} R$$

$$t \longrightarrow v(t) \longrightarrow F(v(t)).$$

Deoarece F și v sînt derivabile, funcția $H(t) = F(v(t))$ este derivabilă pe J și avem

$$H'(t) = F'(v(t)) \cdot v'(t) = f(u(v(t))) \cdot v'(t) = f(t)v'(t),$$

deci $H(t)$ este o primitivă a funcției $f(t) \cdot v'(t)$. Atunci

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = H(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = F(v(t))\Big|_{u(a)}^{u(b)} =$$

$$= F(v(u(b))) - F(v(u(a))) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(u(x))\ \mathrm{d}x.$$

Practic, pentru a calcula integrala

$$\int_a^b f(u(x))\ \mathrm{d}x$$

se face înlocuirea

$$u(x) = t.$$

Se rezolvă apoi în raport cu x, $x = u^{-1}(t) = v(t)$ (sau se face de la început înlocuirea $x = v(t)$); apoi se diferențiază, formal, egalitatea

$$x = v(t).$$

Se obține

$$\mathrm{d}x = v'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Limitele de integrare a și b se înlocuiesc cu limitele de integrare t_1 și t_2, care se obțin tot din egalitatea $u(x) = t$, înlocuind pe x respectiv cu a și b:

$$t_1 = u(a), \qquad t_2 = u(b).$$

Se obține

$$\int_a^b f(u(x))\ \mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_1} f(t) \cdot v'(t)\ \mathrm{d}t.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Nu este nevoie ca derivata $v'(t)$ să fie continuă, ci numai integrabilă.

2° Derivata $v'(t)$ poate fi nulă în unele puncte $t \in J$; adică funcţia $u(x)$ poate să nu fie derivabilă în punctele corespunzătoare $x = v(t) \in I$.

3° În practică, de cele mai multe ori derivabilitatea lui v şi cor inuitatea derivatei v' sînt verificate. Ceea ce trebuie verificat totdeauna este ca funcţia $u(x)$ să fie biunivocă, adică ecuaţia $u(x) = t$ să aibă, pentru fiecare $t \in$ ', o *singură* soluţie, $x = v(t) \in I$. Rezultă atunci că funcţia $u(x)$ este strict monotonă, deoarece este biunivocă şi continuă.

Exemplu. Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{x(\sqrt{x}+1)}\,dx$.

Avem

$$\int_0^1 \sqrt{x(\sqrt{x}+1)}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+1}\,dx.$$

Facem înlocuirea

$$\sqrt{\sqrt{x}+1} = t, \quad \text{deci } t \geqslant 0;$$

pentru $x_1 = 0$ avem $t_1 = 1$, iar pentru $x_2 = 1$ avem $t_2 = \sqrt{2}$.

Apoi

$$\sqrt{x} + 1 = t^2,$$

deci

$$\sqrt{x} = t^2 - 1$$

şi

$$x = (t^2 - 1)^2,$$

deci

$$dx = 4t(t^2 - 1)\,dt.$$

Atunci

$$\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+1}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)\,t\,4t\,(t^2-1)\,dt =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} 4(t^2-1)^2\,t^2 dt = \int_1^{\sqrt{2}} (4t^6 - 8t^4 + 4t^2)\,dt =$$

$$= \left(\frac{4}{7}t^7 - \frac{8}{5}t^5 + \frac{4}{3}t^3\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \left(\frac{4}{7}\sqrt{2^7} - \frac{8}{5}\sqrt{2^5} + \frac{4}{3}\sqrt{2^3}\right) - \left(\frac{4}{7} - \frac{8}{5} + \frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{88}{105}\sqrt{2} - \frac{32}{105}.$$

O b s e r v a ţ i e. Din a doua formulă de schimbare de variabilă se deduce o formulă de calcul al primitivelor, luînd una din limitele de integrare variabilă

$$\int_a^x f(u(x))\,dx = \int_{u(a)}^{u(x)} f(t)\,v'(t)\,dt.$$

§ 6. Integrale reductibile la integrale raționale

1. Considerații preliminare

Pentru funcțiile continue, formula lui Leibniz—Newton reduce problema calculului integralei la aceea a găsirii primitivelor.

Primitivele funcțiilor raționale se pot calcula totdeauna cînd se cunosc rădăcinile polinomului de la numitor și deci se pot calcula și integralele funcțiilor raționale.

Pentru prescurtare, integralele funcțiilor raționale vor fi numite *integrale raționale.*

Dacă, printr-o schimbare de variabilă, o integrală se transformă într-o integrală rațională, spunem că integrala inițială este *reductibilă* la o integrală rațională.

Integralele reductibile la integrale raționale pot fi de asemenea calculate. Luînd una din limitele de integrare variabilă, se obțin primitivele unor funcții care nu sînt raționale.

Se pune astfel problema găsirii unor clase de funcții ale căror integrale sînt reductibile la integrale raționale.

Pentru aceasta să considerăm mai întîi prima formulă de schimbare de variabilă:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int_{u(x_1)}^{u(x_2)} f(t)\,dt.$$

Dacă funcția $f(t)$ este rațională (și numai în acest caz), integrala din membrul drept este o integrală rațională și deci integrala din membrul stîng este reductibilă la o integrală rațională și poate fi calculată.

Așadar: *Integralele de forma*

$$\int_{x_1}^{x_2} R(u(x))\cdot u'(x)dx,$$

unde $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ *este o funcție rațională, iar* $u(x)$ *este o funcție oarecare cu derivata continuă, sînt reductibile la integrale raționale, prin schimbarea de variabilă* $u(x) = t$.

Integralele de forma $\int_{x_1}^{x_2} R(u(x))\cdot dx$ nu sînt însă, în general, reductibile la integrale raționale.

Evident, dacă $u(x)$ este *rațională*, funcția compusă $R(u(x))$ este de asemenea rațională.

Vom încerca să găsim cîteva clase de funcții $u(x)$ care nu sînt raționale, dar pentru care integralele $\int_{x_1}^{x_2} R(u(x))\,dx$ sînt reductibile la integrale

raționale, prin schimbarea de variabilă $u(x) = t$. Pentru aceasta folosim a doua formulă de schimbare de variabilă

$$\int_{x_1}^{x_2} R(u(x))\,dx = \int_{t_1}^{t_2} R(t)\cdot v'(t)\,dt,$$

unde $u(x)$ este o funcție *biunivocă* pe intervalul $I = [x_1, x_2]$, iar $v(t)$ este inversa sa (de asemenea biunivocă) cu derivata $v'(t)$ continuă pe intervalul $J = u(I)$ cu extremitățile în t_1 și t_2:

$$t_1 = u(x_1), \qquad t_2 = u(x_2).$$

Dacă funcția $v'(t)$ este rațională, atunci funcția $R(t)\,v'(t)$ este rațională și deci integrala din membrul stîng este reductibilă la o integrabilă rațională.

Funcția $v'(t)$ este *rațională*, dacă și numai dacă *primitiva* sa $v(t)$ este de forma

$$k \ln r(t), \qquad k \operatorname{arc\,tg} r(t), \qquad r(t)$$

sau o sumă de funcții de acest fel, unde $r(t)$ este o *funcție rațională biunivocă definită pe J*, iar $k \neq 0$.

Prin inversarea funcțiilor $v(t)$ de această formă, obținem funcțiile $u(x)$ căutate.

Ne vom mărgini aici la următoarele cazuri:

1) $v(t) = k \ln t$, $(k \neq 0)$;

2) $v(t) = k \operatorname{arc\,tg} t$, $(k \neq 0)$;

3) $v(t) = \dfrac{\alpha t^n + \beta}{\gamma t^n + \delta}$, $(\alpha\delta \neq \gamma\beta,\ n \in N)$;

4) $v(t) = \dfrac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t + \delta}$, $(\alpha\delta \neq \gamma\beta,\ \alpha \neq 0,\ \gamma \neq 0)$;

5) $v(t) = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t^2 + \delta}$, $(\alpha\delta \neq \gamma\beta,\ \alpha \neq 0,\ \gamma \neq 0)$.

Să găsim pentru fiecare din aceste cazuri funcția $u(x)$ corespunzătoare:

1) $v(t) = k \ln t$, $k \neq 0$.

Dacă punem $x = k \ln t$, avem $e^{\frac{x}{k}} = t$, și deci, notînd $a = \dfrac{1}{k}$

$$u(x) = e^{ax}.$$

2) $v(t) = k \operatorname{arc\,tg} t$, $k \neq 0$.

Dacă punem $x = k \operatorname{arc\,tg} t$, avem $\operatorname{tg}\dfrac{x}{k} = t$ și deci

$$u(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{k}.$$

3) $v(t) = \frac{\alpha t^n + \beta}{\gamma t^n + \delta}$, $\alpha\delta \neq \gamma\beta$.

Dacă punem

$$x = \frac{\alpha t^n + \beta}{\gamma t^n + \delta},$$

atunci

$$x\gamma t^n + x\delta = \alpha t^n + \beta$$

şi, rezolvînd în raport cu t^n,

$$t^n = \frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha},$$

de unde

$$\sqrt[n]{\frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha}} = t$$

şi notînd $-\delta = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, $-\alpha = d$, rezultă

$$u(x) = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}.$$

În particular, unii din coeficienţii α, β, γ, δ pot fi nuli, şi deci şi unii din coeficienţii a, b, c, d pot fi nuli. Să remarcăm însă că avem $ad \neq bc$, deoarece

$$\alpha\delta \neq \gamma\beta.$$

În cazul cînd $n = 1$, $u(x)$ este raţională. Vom considera numai cazul cînd $n \geqslant 2$.

4) $v(t) = \frac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t + \delta}$, $\alpha\delta \neq \gamma\beta$, $\alpha \neq \gamma \neq 0$.

Dacă punem $x = \frac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t + \delta}$, atunci

$$\gamma x t + \delta x = \alpha t^2 + \beta$$

sau

$$\alpha t^2 - \gamma x t + \beta - \delta x = 0$$

şi, rezolvînd în raport cu t, avem

$$t = \frac{\gamma x \pm \sqrt{\gamma^2 x^2 + 4\alpha\,\delta x - 4\alpha\beta}}{2\alpha}.$$

În faţa radicalului se ia un singur semn, acela pentru care $t \in J$.

Luînd $\alpha = \frac{1}{2}$ (ceea ce nu micşorează generalitatea, deoarece putem împărţi la numărătorul şi la numitorul fracţiei $\frac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t + \delta}$ cu 2α) şi, notînd $\gamma^2 = a > 0$, $4\alpha\delta = b$, $-4\alpha\beta = c$,

obținem

$$u(x) = \varepsilon\sqrt{a}\,x \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad a > 0,$$

unde $\varepsilon = 1$ dacă $\gamma > 0$ și $\varepsilon = -1$ dacă $\gamma < 0$.

5) $v(t) = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t^2 + \delta}$, $\alpha\delta \neq \gamma\beta$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$.

Dacă punem $x = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t^2 + \delta}$, atunci

$$\gamma x t^2 + \delta x = \alpha t + \beta$$

sau

$$\gamma x t^2 - \alpha t + \delta x - \beta = 0$$

și, rezolvînd în raport cu t, avem

$$t = \frac{\alpha \pm \sqrt{-4\gamma\delta x^2 + 4\beta\gamma x + \alpha^2}}{2\gamma x}.$$

În fața radicalului se ia un singur semn, acela pentru care $t \in J$. Luînd $\gamma = \dfrac{1}{2}$ (ceea ce nu micșorează generalitatea) și notînd $-4\gamma\delta = a$, $4\beta\gamma = b$, $\alpha^2 = c > 0$, obținem

$$u(x) = \frac{\varepsilon\sqrt{c} \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}}{x},$$

unde $\varepsilon = 1$, dacă $\alpha > 0$, și $\varepsilon = -1$, dacă $\alpha < 0$.

O b s e r v a ț i e. Dacă $\alpha = 0$ sau dacă $\gamma = 0$, cazurile 4 și 5 se reduc la cazul 3.

2. Integrale de funcții exponențiale

$$\int_{x_1}^{x_2} R(e^{ax})\,dx, \qquad a \neq 0,$$

unde $R(u) = \dfrac{P(u)}{Q(u)}$ este o funcție rațională. Pentru ca integrala să aibă sens, adică pentru ca funcția de integrat să fie definită pe intervalul de integrare, se impune condiția:

$$Q(e^{ax}) \neq 0 \qquad \text{pentru orice } x \in [x_1, x_2].$$

Integrala aceasta se reduce la o integrală rațională, făcînd înlocuirea

$$e^{ax} = t.$$

Într-adevăr, avem $x = \frac{1}{a} \ln t$, deci $dx = \frac{1}{at} dt$; notînd

$$t_1 = e^{ax_1} \text{ și } t_2 = e^{ax_2} \text{ obținem}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} R(e^{ax})\, dx = \int_{t_1}^{t_2} R(t) \frac{1}{at} dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)\, dt,$$

unde funcția $R_1(t) = R(t) \frac{1}{at}$ este rațională.

Observație. Luînd una din limitele de integrare variabilă, se obține o primitivă a funcției $R(e^{ax})$ pe intervalul $[x_1, x_2]$.

Exemple. 1) Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx$.

Se face înlocuirea $e^{2x} = t$ deci $x = \frac{1}{2} \ln t$ și $dx = \frac{1}{2t} dt$.

Avem $t_1 = e^0 = 1$ și $t_2 = e$. Atunci

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx = \int_1^e \frac{t}{1 + t} \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{1 + t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln (1 + t) \Big|_1^e = \frac{1}{2} [\ln (1 + e) - \ln 2] = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + e}{2} = \ln \sqrt{\frac{1 + e}{2}}.$$

Pentru calculul unei primitive a funcției $\frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$ (pe un interval oarecare) procedăm astfel:

$$\int_0^x \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^{e^{2x}} \frac{1}{1 + t} dt = \frac{1}{2} \ln (1 + t) \Big|_1^{e^{2x}} =$$

$$= \frac{1}{2} [\ln (1 + e^{2x}) - \ln 2] = \ln \sqrt{1 + e^{2x}} - \ln \sqrt{2}.$$

2) Întregrala $\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{1 - e^{x}} dx$ nu are sens, deoarece funcția de integrat nu este definită în punctul 0 din intervalul de integrare, iar în jurul acestui punct funcția este nemărginită. (Mai departe, la capitolul despre integrale generalizate, se va da un sens acestei integrale.)

3. Integrale de funcții trigonometrice

În mod obișnuit, se numesc integrale trigonometrice integralele de forma

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx,$$

unde $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$ este o funcție rațională de două variabile.

Pentru ca integrala să aibă sens, adică pentru ca funcția de integrat să fie definită pe intervalul de integrare, se impune condiția

$$Q(\cos x, \sin x) \neq 0, \text{ pentru orice } x \in [x_1, x_2].$$

Această integrală se reduce la o integrală rațională, făcînd înlocuirea

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

sau, în anumite condiții, una din înlocuirile

$$\operatorname{tg} x = t, \qquad \cos x = t, \qquad \sin x = t.$$

I) *Înlocuirea* $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Dacă $x \neq (2k+1)\pi$, (k întreg), adică dacă $\frac{x}{2} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, avem

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

deci

$$R(\cos x, \sin x) = R\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right) = R^*\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),$$

unde R^* este o funcție rațională de o variabilă.

a) Dacă $-\pi < x_1 < x_2 < \pi$, atunci $-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, deci $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ este definită pe $[x_1, x_2]$ și

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} R^*\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)dx.$$

Se face înlocuirea

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$$

deci

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

și $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$, deci

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt.$$

Notînd $t_1 = \operatorname{tg} \frac{x_1}{2}$ și $t_2 = \operatorname{tg} \frac{x_2}{2}$, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)\, dt,$$

unde R_1 este o funcție rațională. Am redus astfel integrala inițială la o integrală rațională, în cazul cînd intervalul de integrare $[x_1, x_2]$ este conținut în intervalul $(-\pi, \pi)$.

Să observăm că această condiție a fost impusă numai de schimbarea de variabilă folosită, dar că integrala poate avea sens și fără ca această condiție să fie îndeplinită, dacă $Q(\cos x, \sin x)$ nu se anulează pe intervalul de integrare.

În acest caz se procedează astfel:

b) $$\int_{-\pi}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\pi+\lambda}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx,$$

unde $-\pi < x_2 < \pi$. Pentru integralele din membrul drept, unde $\lambda > 0$, avem $-\pi < -\pi + \lambda < x_2 < \pi$, și deci se poate folosi înlocuirea $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

c) $$\int_{x_1}^{\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \int_{x_1}^{\pi-\lambda} R(\cos x, \sin x)\, dx,$$

unde $-\pi < x_1 < \pi$. Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

d) $$\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\pi+\lambda}^{\pi-\lambda} R(\cos x, \sin x)\, dx.$$

Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

e) Dacă $(2k - 1)\pi \leqslant x_1 < x_2 \leqslant (2k + 1)\pi$, k întreg, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{x_1 - 2k\pi}^{x_2 - 2k\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx$$

și $-\pi \leqslant x_1 - 2k\pi < x_2 - 2k\pi \leqslant \pi$. Integrala din membrul drept este de unul din tipurile precedente. Într-adevăr, să facem în integrala din stînga înlocuirea $x - 2k\pi = z$; atunci $x = z + 2k\pi$ și $dx = dz$,

$$\cos x = \cos(z + 2k\pi) = \cos z, \quad \sin x = \sin(z + 2k\pi) = \sin z.$$

Notînd $z_1 = x_1 - 2k\pi$, $z_2 = x_2 - 2k\pi$ avem,

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{z_1}^{z_2} R(\cos z, \sin z)\,dz =$$

$$= \int_{x_1-2k\pi}^{x_2-2k\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx,$$

unde în ultima integrală am notat variabila de integrare din nou cu x, în loc de z.

Rezultă în particular:

$$\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx,$$

oricare ar fi k întreg.

f) Dacă intervalul de integrare $[x_1, x_2]$ este oarecare, integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx$$

este o sumă de integrale de tipurile precedente.

Într-adevăr, să scriem în ordine crescătoare toate punctele de forma $z = (2k + 1)\pi$, k întreg, cuprinse între x_1 și x_2:

$$x_1 < z_1 < \ldots < z_n < x_2,$$

Pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ avem

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx.$$

Atunci

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{x_1}^{z_1} R(\cos x, \sin x)\,dx + \int_{z_1}^{z_2} R(\cos x, \sin x)\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} R(\cos x, \sin x)\,dx + \int_{z_n}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{z_1} R(\cos x, \sin x)\,dx + \int_{z_n}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx +$$

$$+ (n-1)\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx.$$

Primele două integrale sînt de tipul *e*).

O b s e r v a ț i e. Dacă se ia una din limitele de integrare variabilă, se obține o primitivă a funcției $R(\cos x, \sin x)$ pe intervalul $(-\pi, \pi)$:

$$\int_a^x R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_0^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Exemple. 1) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\, dx.$$

Se face înlocuirea $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, deci

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2},\ dx = \frac{2}{1 + t^2}\, dt,$$

$$t_1 = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ t_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Atunci

$$I = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{\frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1 + t^2}\, dt = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{1 + t}\, dt =$$

$$= \ln|1 + t| \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \ln 2 - \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ln \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}.$$

2) Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{4\pi} \frac{1}{2 + \sin x}\, dx.$$

Avem

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{2 + \sin x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \sin x}\, dx + \int_{\pi}^{3\pi} \frac{1}{2 + \sin x}\, dx + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{1}{2 + \sin x}\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \sin x}\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2 + \sin x}\, dx + \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{2 + \sin x}\, dx = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2 + \sin x}\, dx =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \pi > 0}} \int_{-\pi + \lambda}^{\pi - \lambda} \frac{2}{2 + \sin x}\, dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, deci

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2},\ dx = \frac{2}{1 + t^2}\, dt;$$

$$t_1 = t_1(\lambda) = \operatorname{tg} \frac{-\pi + \lambda}{2},\ t_2 = t_2(\lambda) = \operatorname{tg} \frac{\pi - \lambda}{2}.$$

Atunci

$$\int_{-\pi+\lambda}^{\pi-\lambda} \frac{2}{2+\sin x}\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{t^2+t+1}\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \frac{4}{3}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{2t_2+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{2t_1+1}{\sqrt{3}}\right].$$

Avem

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} t_1 = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{tg} \frac{-\pi+\lambda}{2} = -\infty \text{ și } \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} t_2 = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{tg} \frac{\pi-\lambda}{2} = +\infty,$$

deci

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t_1+1}{\sqrt{3}} = \lim_{t_1\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t_1+1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{2}$$

și

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t_2+1}{\sqrt{3}} = \lim_{t_1\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t_2+1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2},$$

astfel încît

$$I = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_{-\pi+\lambda}^{\pi-\lambda} \frac{2}{2+\sin x}\,dx = \frac{4}{3}\left[\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t_2+1}{\sqrt{3}} - \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t_1+1}{\sqrt{3}}\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{4}{3}\pi.$$

II) *Înlocuirea* $\operatorname{tg} x = t$. În general, înlocuirea $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ duce la o integrală rațională mai greu de calculat.

Uneori se pot folosi alte înlocuiri, care duc la integrale raționale mai simple.

În cazul cînd funcția $R(\cos x, \sin x)$ *îndeplinește condiția*

$$R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$$

se face schimbarea $\operatorname{tg} x = t$.

În adevăr, dacă $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, avem $\cos x \neq 0$ și

$$\sin x = \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x \operatorname{tg} x,$$

deci

$$R(\cos x, \sin x) = R(\cos x, \cos x \operatorname{tg} x) = R_1(\cos x, \operatorname{tg} x),$$

unde $R_1(u, v)$ este o funcție rațională de două variabile.

Funcția $R_1(\cos x, \operatorname{tg} x)$ este pară în $\cos x$. Într-adevăr,

$$R_1(-\cos x, \operatorname{tg} x) = R(-\cos x, -\cos x \operatorname{tg} x) = R(-\cos x, -\sin x) =$$
$$= R(\cos x, \sin x) = R_1(\cos x, \operatorname{tg} x).$$

Rezultă că funcția $R_1(\cos x, \operatorname{tg} x)$ conține numai puterile pare ale lui $\cos x$:

$$R_1(\cos x, \operatorname{tg} x) = R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x),$$

unde $R_2(u, v)$ este o funcție rațională de două variabile. (Dacă numărătorul și numitorul funcției R_2 conțin numai puterile impare ale lui $\cos x$, se simplifică cu $\cos x \not\equiv 0$ și rămîn numai puterile pare ale lui $\cos x$.)

Din egalitatea

$$R(\cos x, \sin x) = R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x)$$

rezultă, pe de o parte, că funcția $R(\cos x, \sin x)$ conține numai puterile lui $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ și $\sin x \cos x$:

$$R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x) = R_2\left(\cos^2 x, \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x}\right),$$

iar pe de altă parte

$$R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x) = R_2\left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \operatorname{tg} x\right) = R_3(\operatorname{tg} x),$$

unde R_3 este o funcție rațională de o singură variabilă.

a) Dacă $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, funcția $\operatorname{tg} x$ este definită pe intervalul $[x_1, x_2]$ și

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} R_3(\operatorname{tg} x)\, dx.$$

Se face înlocuirea

$$\operatorname{tg} x = t,$$

deci $x = \operatorname{arc\,tg} t$ și $dx = \frac{1}{1 + t^2} dt$.

Notînd $t_1 = \operatorname{tg} x_1$ și $t_2 = \operatorname{tg} x_2$, obținem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} R_3(\operatorname{tg} x) = \int_{t_1}^{t_2} R_3(t) \frac{1}{1 + t^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} R_4(t)\, dt;$$

unde R_4 este o funcție rațională.

Am redus astfel integrala inițială la o integrală rațională, în cazul cînd intervalul $[x_1, x_2]$ este conținut în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Deoarece pentru $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, avem

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

putem face direct în integrala inițială înlocuirile

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

sau, deoarece funcția $R(\cos x, \sin x)$ conține numai puterile funcțiilor $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, și $\sin x \cos x$, putem face direct în integrala inițială înlocuirile

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Să observăm că integrala poate avea sens fără ca intervalul $[x_1, x_2]$ să fie conținut în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, dacă $Q(\cos x, \sin x)$ nu se anulează pe intervalul de integrare.

În acest caz se procedează astfel:

b) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx$$

unde $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea $\operatorname{tg} x = t$.

c) $$\int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x)\,dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} R(\cos x, \sin x)\,dx,$$

unde $-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}$. Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea $\operatorname{tg} x = t$.

d) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x)\,dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} R(\cos x, \sin x)\,dx.$$

Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea $\operatorname{tg} x = t$.

e) Dacă $(2k-1)\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k întreg, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{x_1-k\pi}^{x_2-k\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx$$

şi $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 - k\pi < x_2 - k\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Integrala din membrul drept este de unul din tipurile precedente.

Într-adevăr, să facem în integrala inițială înlocuirea $x - k\pi = z$; atunci $x = z + k\pi$, $dx = dz$,

$$\cos^2 x = \cos^2(z + k\pi) = \cos^2 z, \quad \sin^2 x = \sin^2(z + k\pi) = \sin^2 z$$

$$\sin x \cos x = \sin(z + k\pi)\cos(z - k\pi) = \sin z \cos z.$$

Notînd $z_1 = x_1 - k\pi$, $z_2 = x_2 - k\pi$ avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} R^*(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x \cos x)\,dx =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} R^*(\cos^2 z, \sin^2 z, \sin z \cos z)\,dz = \int_{z_1}^{z_2} R(\cos z, \sin z)\,dz =$$

$$= \int_{x_1 - k\pi}^{x_2 - k\pi} R(\cos x, \sin x)dx,$$

unde în ultima integrală am notat variabila de integrare din nou cu x în loc de z.

În particular,

$$\int_{(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x)\,dx.$$

f) Dacă intervalul de integrare $[x_1, x_2]$ este oarecare, integrala:

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx$$

este o sumă de integrale de tipurile precedente. Într-adevăr, să scriem în ordine crescătoare toate punctele de forma $z = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, k întreg, cuprinse între x_1 şi x_2:

$$x_1 < z_1 < z_2 < \ldots < z_n < x_2.$$

Pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ avem

$$\int_{z_i}^{z_i+1} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x)\,dx.$$

Atunci

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{x_1}^{z_1} R(\cos x, \sin x)\,dx + \int_{z_1}^{z_2} R(\cos x, \sin x)\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} R(\cos x, \sin x)\,dx + \int_{z_n}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{z_1} R(\cos x, \sin x)\,dx + \int_{z_n}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx +$$

$$+ (n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R \cos x, \sin x)\,dx.$$

Primele două integrale sînt de tipul *e*).

O b s e r v a ț i e. Dacă se ia una din limitele de integrare variabilă, se obține o primitivă a funcției $R(\cos x, \sin x)$ pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\int_0^x R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_0^{\operatorname{tg} x} R(t)\,dt.$$

Exemplu. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx.$$

Aici

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{1}{\sin x \cos x + 2} \text{ și}$$

$$R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x).$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$. Pentru aceasta despărțim integrala inițială într-o sumă de integrale:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx +$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx +$$

$$+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} \frac{2}{\sin x \cos x + 2}\,dx.$$

Pentru ultima integrală se aplică schimbarea de variabilă

$$\operatorname{tg} x = t, \text{ deci } dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt, \sin x \cos x = \cos^2 x \operatorname{tg} x = \frac{1}{1+t^2}\,t = \frac{t}{1+t^2}.$$

Notînd $t_1 = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\lambda\right)$ și $t_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)$, avem

$$\int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} \frac{2}{\sin x \cos x + 2}\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{\frac{t}{1+t^2}+2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{2t^2+t+2}\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}t+1}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}\,dt = \frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\Bigg|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arc\,tg} \frac{4t+1}{\sqrt{15}}\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \frac{4}{\sqrt{15}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{4t_2+1}{\sqrt{15}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{4t_1+1}{\sqrt{15}}\right).$$

Avem

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} t_1(\lambda) = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\lambda\right) = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} t_2(\lambda) = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right) = \infty,$$

deci

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{arc\,tg}\frac{4t_2+1}{\sqrt{15}} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \operatorname{arc\,tg}\frac{4t_1+1}{\sqrt{15}} = -\frac{\pi}{2}.$$

Aşadar

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin x \cos x + 2}\,dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} \frac{2}{\sin x \cos x + 2}\,dx =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{15}} \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{4t_2+1}{\sqrt{15}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{4t_1+1}{\sqrt{15}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{15}}.$$

III) *Înlocuirea* $\sin x = t$. Această înlocuire se poate folosi în cazul cînd funcția $R(\cos x, \sin x)$ este impară în $\cos x$:

$$R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x).$$

Dacă $R(\cos x, \sin x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}$, unul din polinoamele $P(\cos x, \sin x)$ și $Q(\cos x, \sin x)$ este impar în $\cos x$ (conține numai puterile impare ale

lui cos x) iar celălalt este par în cos x (conține numai puterile pare ale lui cos x).

Dacă $P(-\cos x, \sin x) = -P(\cos x, \sin x)$, atunci

$$Q(-\cos x, \sin x) = Q(\cos x, \sin x), \text{ deci}$$

$$P(\cos x, \sin x) = P_1(\cos^2 x, \sin x)\cos x$$

$$Q(\cos x, \sin x) = Q_1(\cos^2 x, \sin x)$$

și

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{P_1(\cos^2 x, \sin x)}{Q_1(\cos^2 x \sin x)}\cos x = R_1(\cos^2 x, \sin x)\cos x.$$

Dacă $Q(-\cos x, \sin x) = -Q(\cos x, \sin x)$, atunci

$$P(-\cos x, \sin x) = P(\cos x, \sin x), \text{ deci}$$

$$P(\cos x, \sin x) = P_1(\cos^2 x, \sin x),$$

$$Q(\cos x, \sin x) = Q_2(\cos^2 x, \sin x)\cos x$$

și

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{P_1(\cos^2 x, \sin x)}{Q_1(\cos^2 x, \sin x)\cos x} = \frac{P_1(\cos^2 x, \sin x)}{Q_1(\cos^2 x, \sin x)\cos^2 x}\cos x = R_1(\cos^2 x, \sin x)\cos x.$$

Așadar, în orice caz avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} R_1(\cos^2 x, \sin x)\cos x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} R_1(1 - \sin^2 x, \sin x)(\sin x)'\,dx.$$

Se aplică prima formulă de schimbare de variabilă, făcînd înlocuirea

$$\sin x = t, \text{ deci } \cos x\,dx = dt.$$

Notînd $t_1 = \sin x_1$ și $t_2 = \sin x_2$, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} R_1(1 - t^2, t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} R_2(t)\,dt,$$

unde R_2 este o funcție rațională.

Am redus astfel integrala inițială la o integrală rațională.

IV) *Înlocuirea* $\cos x = t$. Această înlocuire se poate folosi în cazul cînd funcția $R(\cos x, \sin x)$ este impară în sin x:

$$R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x).$$

Raționînd ca în cazul precedent, deducem că

$$R(\cos x, \sin x) = R_1(\cos x, \sin^2 x)\sin x$$

şi deci

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} R_1(\cos x, \sin^2 x) \sin x\, dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} R_1(\cos x, 1 - \cos^2 x)(-\cos x)'\, dx.$$

Se aplică prima formulă de schimbare de variabilă, făcînd înlocuirea

$$\cos x = t, \text{ deci } -\sin x\, dx = dt.$$

Notînd $t_1 = \cos x_2$ şi $t_2 = \cos x_2$, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t, 1 - t^2)(-dt) = \int_{t_1}^{t_2} R_2(t)\, dt,$$

unde R_2 este o funcţie raţională.

Am redus astfel şi în acest caz integrala iniţială la o integrală raţională.

Exemple. 1) $\int_0^{5\pi} \cos^2 x \sin^5 x\, dx = \int_0^{5\pi} \cos^2 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x\, dx.$

Se face înlocuirea $\cos x = t$, deci $-\sin x\, dx = dt$.

Avem $t_1 = \cos 0 = 1$, şi $t_2 = \cos 5\pi = \cos \pi = -1$. Atunci

$$\int_0^{5\pi} \cos^2 x \cdot \sin^4 x\, dx = -\int_1^{-1} t^2(1 - t^2)^2 dt = \int_{-1}^{1} (t^6 - 2t^4 + t^2)\, dt =$$

$$= \left(\frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{7} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{105}.$$

$$2) \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x} \cos x\, dx.$$

Se face înlocuirea $\sin x = t$, deci $\cos x\, dx = dt$.

Avem $t_1 = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, $t_2 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Atunci

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x} \cos x\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + t}{1 - t}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\ln 3 - \ln \frac{1}{3}\right] = \ln 3.$$

4. Integrale de funcţii iraţionale

În mod obişnuit se numesc integrale iraţionale, integralele funcţiilor la care variabila apare sub radical.

1) *Integralele de forma:*

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx,$$

unde $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$ este o funcție rațională de două variabile, sînt reductibile la integrale raționale.

Pentru ca integrala să aibă sens, adică pentru ca funcția de integrat să fie definită pe intervalul de integrare, se impun condițiile:

1) $Q\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$;

2) $cx + d \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$; în cazul cînd $c \neq 0$, această condiție înseamnă $-\frac{d}{c} \notin [x_1, x_2]$;

3) $\frac{ax+b}{cx+d} \geqslant 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, dacă n este par.

Vom impune în plus condiția

4) $ad \neq bc$.

(Dacă $ad = bc$, funcția $\frac{ax+b}{cx+d}$ este *constantă*, și integrala este rațională, astfel încît se calculează direct.) Pentru calculul integralei se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t, \text{ adică } \frac{ax+b}{cx+d} = t^n.$$

Cînd x parcurge intervalul $I = [x_1, x_2]$, t parcurge un *interval* J, deoarece funcția $\frac{ax+b}{cx+d}$ este *continuă* pe I. Să observăm că $a - ct^n \neq 0$ pentru orice $t \in J$. Într-adevăr, să presupunem, prin absurd, că ar exista un punct $x_0 \in I$, astfel încît pentru punctul corespunzător $t_0 \in J$ să avem $a - ct_0^n = 0$.

Dacă $c \neq 0$, atunci $t_0^n = \frac{a}{c}$, deci

$$\frac{ax_0 + b}{cx_0 + d} = t_0^n = \frac{a}{c},$$

de unde rezultă că $ad = bc$, ceea ce contrazice ipoteza 4).

Dacă $c = 0$, atunci avem și $a = 0$ și deci $ad = 0$ și $bc = 0$, adică $ad = bc$, ceea ce iarăși contrazice ipoteza 4).

Înlocuirea precedentă stabilește o corespondență biunivocă între intervalele I și J; considerată ca o ecuație în x, are o singură soluție în I pentru fiecare $t \in J$. Într-adevăr, din

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

deducem

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} = r(t),$$

unde $r(t)$ este o funcție rațională definită pe întreg intervalul J (deoarece $a - ct^n \neq 0$ pentru $t \in J$). Atunci

$$dx = r'(t)\, dt,$$

unde $r'(t)$ este de asemenea o funcție rațională pe J.

Notînd $t_1 = \sqrt[n]{\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}}$ și $t_2 = \sqrt[n]{\frac{ax_2 + b}{cx_2 + d}}$, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx = \int_{t_1}^{t_2} R(r(t),\ t)\ r'(t)\ dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)\, dt,$$

unde $R_1(t)$ este o funcție rațională.

Am redus astfel integrala inițială la o integrală rațională, care se poate calcula.

O b s e r v a ț i e. Luînd una din limitele de integrare variabilă, se obține o primitivă a funcției de integrat, pe intervalul $[x_1, x_2]$:

$$\int_{x_1}^{x} R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx = \int_{t_1}^{\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}} R_1(t)\, dt.$$

Cazuri particulare

a) Integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt[n]{ax + b})\, dx$$

este de forma precedentă, cu $c = 0$ și $d = 1$.

Condiția 2) $cx + d \neq 0$ este verificată de la sine, deoarece $cx + d \equiv 1$

Condiția 4) $ad \neq bc$ devine în acest caz

$$a \neq 0,$$

deoarece $ad = a$ și $bc = 0$.

Se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{ax + b} = t \text{ adică } ax + b = t^n$$

și integrala se reduce la o integrală rațională.

b) Integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt[n]{x})\, dx$$

este de asemenea de forma precedentă cu $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ și $d = 1$. Condiția 2) $cx + d \neq 0$ și condiția 4) $ad \neq bc$ sînt verificate de la sine.

Condiția 3) $\frac{ax+b}{cx+d} \geqslant 0$ devine în acest caz $x \geqslant 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, adică $0 \leqslant x_1 < x_2$, dacă n este par.

Se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{x} = t, \text{ adică } x = t^n$$

și integrala se reduce la o integrală rațională.

Exemple. 1) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\frac{7}{9}}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}\,dx.$$

Integrala este definită pe intervalul de integrare, deoarece numitorul nu se anulează pe acest interval, iar radicalii de ordin impar au sens și pentru numere negative.

Integrala se poate scrie astfel

$$I = \int_{-\frac{7}{9}}^{0} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{1}{x+1}\,dx.$$

Se face înlocuirea

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t, \text{ deci } x = \frac{t^3+1}{t^3-1},$$

$$x + 1 = \frac{2t^3}{t^3-1} \text{ și } dx = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt.$$

Limitele de integrare:

$$t_1 = -\frac{1}{2},\ t_2 = -1. \text{ Atunci}$$

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} t \cdot \frac{t^3-1}{2t^3} \cdot \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{-3}{t^3-1}\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \left(\frac{-1}{t-1} +\right.$$

$$\left. + \frac{t+2}{t^2+t+1}\right) dt = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}.$$

2) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Se face înlocuirea $\sqrt{x+1} = t$, deci $x + 1 = t^2$ și $x = t^2 - 1$, iar $dx = 2t\,dt$.
Limitele de integrare: $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.
Atunci

$$I = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,2t\,dt = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t}\,dt = \int_0^1 \left(2t - 2 + \frac{2}{1+t}\right) dt =$$

$$= (t^2 - 2t + 2\ln(1+t))\Big|_0^1 = 1 - 2 + 2\ln 2 = -1 + 2\ln 2.$$

3) Integrala $\int_{-2}^{0} \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$ nu are sens, deoarece $\sqrt{x+1}$ nu are sens pentru $x < -1$.

4) Integrala $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}\,dx$ nu are sens (deocamdată), deoarece numitorul se anulează la capetele intervalului de integrare.

II) *Integralele de forma:*

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right)dx$$

unde $R(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}) = \frac{P(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})}{Q(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})}$ este o funcţie raţională de $k+1$ variabile, iar $n_1, n_2, \ldots, n_k, m_1, m_2, \ldots, m_k$ sînt numere naturale, sînt reductibile la integrale raţionale.

Pentru ca integrala să aibă sens, se impun următoarele condiţii:

1) $Q\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right) \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$.

2) $cx + d \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$.

3) $\frac{ax+b}{cx+d} \geqslant 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, dacă unul din numerele $n_1, n_2, \ldots, n_k$ este par.

Se impune în plus condiţia

4) $ad \neq bc$,

care asigură că funcţia $\frac{ax+b}{cx+d}$ nu este constantă.

Fie *n cel mai mic multiplu comun* al numerelor $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Numărul n este par dacă şi numai dacă unul din numerele $n_1, n_2, \ldots, n_k$ este par.

Notînd $\frac{n}{n_1} = p_1, \ldots, \frac{n}{n_k} = p_k$, numerele $p_1, \ldots, p_k$ sînt naturale, şi pentru $i = 1,2, \ldots, k$ avem:

$$\sqrt[n_i]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_i}} = \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_i p_i}} = \left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)^{m_i p_i}.$$

Atunci

$$R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right) =$$

$$= R\left[x, \left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)^{m_1 p_1}, \ldots, \left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)^{m_k p_k}\right] = R_1\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

unde R_1 este o funcție rațională, și astfel integrala inițială s-a redus la integrala

$$\int_{x_2}^{x_1} R_1\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

care este de tipul precedent. Se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \quad \text{adică} \quad \frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

unde n este cel mai mic multiplu comun al indicilor radicalilor, n_1, n_2 ,..., n_k, și integrala se reduce la o integrală rațională.

Pentru integrala de forma

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{(ax+b)^{m_k}})\, dx$$

se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{ax+b} = t, \quad \text{adică} \quad ax+b = t^n,$$

iar pentru integrala de forma

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{x^{m_k}})\, dx$$

se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{x} = t \quad \text{adică} \quad x = t^n.$$

Exemple. 1) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{\frac{1}{64}}^{1} \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}\, dx.$$

Se face înlocuirea $\sqrt[6]{x} = t$, $(t \geqslant 0)$, deci $x = t^6$ și $dx = 6t^5 dt$.

Avem

$\sqrt{x} = t^3$ și $\sqrt[3]{x^2} = t^4$. Limitele de integrare: $t_1 = \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$, $t_2 = \sqrt[6]{1} = 1$.

Atunci

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^6-1}{t^6(t^3+t^4)} 6t^5\, dt = 6\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^6-1}{t^4(t+1)}\, dt = 6\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^5-t^4+t^3-t^2+t-1}{t^4}\, dt =$$

$$= 6\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right) dt = 6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln t+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= 6\left(\frac{1}{2}-1+\ln 1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - 6\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}+2-\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{-47}{4} + 6\ln 2.$$

2) Integrala $\int_0^1 \frac{x-1}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\,dx$ nu are sens, deoarece numitorul se anulează în punctul 0 din intervalul de integrare, şi în jurul acestui punct funcţia de integrat este nemărginită.

3) Să se calculeze

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+1}\,dx.$$

Funcţia de integrat este definită pe intervalul de integrare. Se face schimbarea $\sqrt[6]{x+1}=t$, $(t\geqslant 0)$, deci $x=t^6-1$ şi $dx=6t^5\,dt$.

Avem

$\sqrt{x+1}=t^3$ şi $\sqrt[3]{x+1}=t^2$. Limitele de integrare

$$t_1=\sqrt[6]{-1+1}=0;\quad t_2=\sqrt[6]{0+1}=1.$$

Atunci

$$I=\int_0^1\frac{t^3}{t^2+1}\,6t^5\,dt=6\int_0^1\frac{t^8}{t^2+1}\,dt=6\int_0^1\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arc\,tg}\,t\right)\Big|_0^1=6\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-1+\operatorname{arc\,tg}\,1\right)=-\frac{152}{35}+\frac{3}{2}\pi.$$

4) Integrala $\int_{-2}^{0}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$ nu are sens, deoarece pe intervalul $[-2,-1]$, conţinut în intervalul de integrare, funcţia de integrat nu este definită (din cauză că funcţia $\sqrt{x+1}$ nu este definită).

5) Integrala $I=\int_{-2}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}+2}\,dx$ este definită pe intervalul de integrare deoarece numitorul nu se anulează, iar $\sqrt[3]{x+1}$ are sens şi dacă $x+1<0$). Se face schimbarea

$$\sqrt[3]{x+1}=t\ (t \text{ poate fi şi pozitiv şi negativ}),$$

deci

$$x=t^3-1 \text{ şi } dx=3t^2dt. \text{ Limitele de integrare}$$

$$t_1=\sqrt[3]{-2+1}=-1,\quad t_2=\sqrt[3]{0+1}=1.$$

Atunci

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{t+2}\,3t^2dt=3\int_{-1}^{1}\left(t-2+\frac{4}{t+2}\right)dt=3\left(\frac{t^2}{2}-2t+4\ln(t+2)\right)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=12\,(\ln 3-1).$$

III) *Integralele de forma:*

$$\int_{x_1}^{x_2}R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx,$$

unde $R(u, v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ este o funcție rațională de două variabile, sînt reductibile la integrale raționale. Pentru ca integrala să aibă sens, se impun următoarele condiții:

1) $Q(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \not\equiv 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$.
2) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$.

Se impun în plus condițiile

3) $a \not\equiv 0$ și $b^2 - 4ac \not\equiv 0$, adică trinomul $ax^2 + bx + c$ este de gradul doi și nu are rădăcinile egale.

Dacă $a = 0$, integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt{bx + c})\, dx$$

și este de tipul I. Prin înlocuirea $\sqrt{bx + c} = t$ se reduce la o integrală rațională.

Dacă $b^2 - 4ac = 0$, trinomul $ax^2 + bx + c$ are rădăcini egale:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$$

și $a \geqslant 0$ (deoarece $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ și $(x - \alpha)^2 \geqslant 0$). În acest caz integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt{a}(x - \alpha))dx = \int_{x_1}^{x_2} R_1(x)\, dx$$

adică este o integrală rațională.

Pentru calculul integralei vom deosebi trei cazuri:

a) *Cazul* $a > 0$. În acest caz se face înlocuirea

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}\, x = t \text{ adică } \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\, x + t.$$

Cînd x parcurge intervalul $I = [x_1, x_2]$, t parcurge un *interval* J, deoarece funcția $\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}x$ este *continuă* pe I.

Să observăm că $b - 2\sqrt{a}\, t \not\equiv 0$ pentru orice $t \in J$, adică t nu poate lua valoarea $\frac{b}{2\sqrt{a}}$.

Într-adevăr, dacă ar exista un punct $x_0 \in I$ astfel ca pentru punctul corespunzător t_0 să avem $b - 2\sqrt{a}\ t_0 = 0$ adică $t_0 = \frac{b}{2\sqrt{a}}$, atunci

$$\sqrt{ax_0^2 + bx_0 + c} = \sqrt{a}\, x_0 + \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

și, ridicînd la pătrat,

$$ax_0^2 + bx_0 + c = ax_0^2 + bx_0 + \frac{b^2}{4a},$$

adică $c = \frac{b^2}{4a}$ sau $b^2 - 4ac = 0$, ceea ce contrazice condiția 3).

Egalitatea $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$ stabileşte o corespondenţă biunivocă între intervalele I şi J. Considerată ca o ecuaţie în x, are o singură soluţie în I pentru fiecare valoare a lui $t\in J$. Într-adevăr, să observăm că, deoarece $\sqrt{ax^2+bx+c}\geqslant 0$, avem de asemenea $\sqrt{a}x+t\geqslant 0$. Prin ridicare la pătrat obţinem:

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2$$

sau

$$bx+c=2\sqrt{a}xt+t^2,$$

de unde

$$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}=r(t),$$

unde $r(t)$ este o funcţie *raţională* definită pe J $\left(\text{deoarece } t\neq\frac{b}{2\sqrt{a}}, \text{ pentru } t\in J\right)$.

Deoarece ecuaţia iniţială are ambii membri *pozitivi*, iar ecuaţia obţinută prin ridicare la pătrat are soluţia $x=r(t)$, rezultă că şi ecuaţia iniţială are soluţia $x=r(t)$.

Atunci

$$\mathrm{d}x=r'(t)\,\mathrm{d}t,$$

unde $r'(t)$ este de asemenea o funcţie raţională pe J, şi

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}r(t)+t.$$

Notînd $t_1=\sqrt{ax_1^2+bx_1+c}-\sqrt{a}x_1$ şi $t_2=\sqrt{ax_2^2+bx_2+c}-\sqrt{a}x_2$, avem:

$$I=\int_{t_1}^{t_2}R[r(t),\sqrt{a}r(t)+t]r'(t)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}R_1(t)\,\mathrm{d}t,$$

unde $R_1(t)$ este o funcţie raţională. Am redus astfel integrala iniţială la o integrală raţională, care se poate calcula.

O b s e r v a ţ i i. 1° Dacă trinomul ax^2+bx+c are rădăcini complexe şi $a>0$, condiţia $ax^2+bx+c\geqslant 0$ este verificată de la sine.

În cazul cînd trinomul are rădăcini reale şi distincte, $\alpha<\beta$, condiţia $ax^2+bx+c\geqslant 0$ este îndeplinită dacă rădăcinile sînt de aceeaşi parte a intervalului de integrare, adică dacă:

$$x_1<x_2<\alpha \text{ sau } \beta<x_1<x_2.$$

2° În cazul cînd $a>0$ se poate de asemenea folosi una din înlocuirile

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=-\sqrt{a}x+t,\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x-t$$

sau

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=-\sqrt{a}x-t.$$

b) *Cazul* $b^2 - 4ac > 0$. În acest caz trinomul $ax^2 + bx + c$ are rădăcini reale și distincte, $\alpha < \beta$, deci

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)\,(x - \beta).$$

Vom impune condiția ca cel puțin una dintre rădăcini, de exemplu α, să nu aparțină intervalului de integrare. Atunci $x - \alpha \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, și

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)\,(x - \beta)} = \sqrt{a\frac{x - \beta}{x - \alpha}}\,|x - \alpha|$$

iar integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx = \int_{x_1}^{x_2} R_1\left(x, \sqrt{a\frac{x - \beta}{x - \alpha}}\right)dx$$

și este de tipul I. Se face înlocuirea

$$\sqrt{a\frac{x - \beta}{x - \alpha}} = t, \quad (t \geqslant 0)$$

și integrala se reduce la o integrală rațională. Se poate face direct înlocuirea următoare (care rezultă din cea precedentă):

$\sqrt{a(x - \alpha)\,(x - \beta)} = (x - \alpha)t$, ($t \geqslant 0$ dacă $x > \alpha$ sau $t \leqslant 0$ dacă $x < \alpha$), adică

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)\,t,$$

care este mai ușor de reținut.

O b s e r v a ț i i. Dacă $\alpha \notin [x_1, x_2]$, se poate face înlocuirea

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = a(x - \alpha)\,t.$$

Dacă $\beta \notin [x_1, x_2]$, se poate face una din înlocuirile

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \beta)t \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = a(x - \beta)t.$$

c) *Cazul* $c > 0$. În acest caz se face înlocuirea

$$u(x) = t,$$

unde funcția $u(x)$ este definită pe $I = [x_1, x_2]$, astfel:

$$u(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x} \text{ dacă } x \neq 0,\ x \notin [x_1, x_2],$$

și $u(0) = \frac{b}{2\sqrt{c}}$ dacă $0 \in [x_1, x_2]$.

Funcția $u(x)$ este continuă pe întreg intervalul I. În punctele $x \neq 0$ acest fapt este evident. Să arătăm că, dacă $0 \in I$, funcția $u(x)$ este continuă în 0, adică

$$\lim_{x \to 0} u(x) = u(0) = \frac{b}{2\sqrt{c}}.$$

Pentru $x \neq 0$, avem

$$\frac{\sqrt{ax^2+b+c}-\sqrt{c}}{x}=\frac{ax^2+bx+c-c}{x\left[\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}\right]}=$$

$$=\frac{ax^2+bx}{x\left[\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}\right]}=\frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}},$$

deci

$$\lim_{x\to 0} u(x)=\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}}=\frac{b}{2\sqrt{c}}=u(0).$$

Egalitatea $u(x)=t$ se scrie

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+tx,$$

valabilă pentru orice $x\in I$ (chiar pentru $x=0$).
Cînd x parcurge pe $I=[x_1, x_2]$, t parcurge un interval $J=u(I)$. Corespondenţa stabilită de ultima egalitate este biunivocă, această egalitate considerată ca o ecuaţie în x are o singură soluţie în I pentru fiecare $t\in J$.

Într-adevăr, dacă $t=\frac{b}{2\sqrt{c}}$, avem

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+\frac{b}{2\sqrt{c}}x$$

sau

$$ax^2+bx+c=c+bx+\frac{b^2}{4c}x^2$$

sau

$$\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)x=0$$

şi deoarece am presupus $b^2-4ac\neq 0$, rezultă

$$x=0.$$

Dacă $t\neq\frac{b}{2\sqrt{c}}$, adică $x\neq 0$, prin ridicare la pătrat obţinem

$$ax^2+bx+c=(\sqrt{c}+tx)^2=c+2\sqrt{c}tx+t^2x^2,$$

adică

$$ax^2+bx=2\sqrt{c}tx+t^2x^2$$

şi împărţind cu $x\neq 0$,

$$ax+b=2\sqrt{c}t+t^2x,$$

de unde

$$(a-t^2)x=2\sqrt{c}t-b.$$

Să observăm că $t^2 \neq a$, oricare ar fi $t \in J$. Într-adevăr, dacă ar exista un punct $x_0 \neq 0$ din I, astfel ca pentru punctul corespunzător $t_0 \in J$ să avem $t_0^2 \neq a$, atunci $a \geqslant 0$ și $t_0 = \sqrt{a}$ și înlocuind în ultima egalitate am obține

$$0 = 2\sqrt{c}\sqrt{a} - b$$

sau $b = 2\sqrt{a}\sqrt{c}$ adică $b^2 = 4ac$, ceea ce contrazice condiția 3.

Din egalitatea de mai sus deducem

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2} = r(t)$$

și această egalitate este valabilă chiar pentru $t = \frac{b}{2\sqrt{c}}$ și $x = 0$. Funcția rațională $r(t)$ este deci definită pe tot intervalul J.
Atunci

$$dx = r'(t)\mathrm{d}t,$$

unde $r'(t)$ este o funcție rațională definită pe J, și

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tr(t)$$

fie că $x \neq 0$, fie că $x = 0$.

Notînd

$$t_1 = \frac{\sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} - \sqrt{c}}{x_1} \text{ sau } t_1 = \frac{b}{2\sqrt{c}}$$

(după cum $x_1 \neq 0$ sau $x_1 = 0$) și

$$t_2 = \frac{\sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c} - \sqrt{c}}{x_2} \text{ sau } t_2 = \frac{b}{2\sqrt{c}}$$

(după cum $x_2 \neq 0$ sau $x_2 = 0$) integrala inițială devine

$$I = \int_{t_1}^{t_2} R[r(t), \sqrt{c} + tr(t)]\, r'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)\mathrm{d}t,$$

unde $R_1(t)$ este o funcție rațională. Am redus integrala inițială la o integrală rațională care se poate efectua.

O b s e r v a ț i i. 1° În aplicațiile practice, nu ne mai preocupăm de faptul dacă 0 aparține sau nu intervalului de integrare; se face înlocuirea

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx$$

și se fac calculele ca și cînd $x \neq 0$.

Se poate face de asemenea înlocuirea

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - tx.$$

2° Dacă $0 \notin [x_1, x_2]$ se poate folosi una din înlocuirile

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{c} + tx \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{c} - tx.$$

3° Este posibil ca în același timp trinomul $ax^2 + bx + c$ să aibă rădăcini reale și distincte ($b^2 - 4ac > 0$) și să fie îndeplinite condițiile $a > 0$ și $c > 0$. Atunci se poate efectua una oarecare din înlocuirile indicate în aceste cazuri.

Exemple. 1) Să se calculeze integrala $I = \int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}\,dx$.

a) Coeficientul lui x^2 este 1; sîntem în cazul $a > 0$. Se face, de exemplu, înlocuirea

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = -\sqrt{1}\,x + t.$$

Ridicînd la pătrat obținem

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2xt + t^2$$

sau

$$-x + 1 = -2xt + t^2, \text{ de unde}$$

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}, \quad dx = 2\,\frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2}\,dt$$

și

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t^2 - t + 1}{2t - 1}.$$

Limitele de integrare: $t_1 = 1$ și $t_2 = 2$. Atunci

$$I = \int_1^2 \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t - 1)^2}\,dt = \int_1^2 \left[\frac{2}{t} - \frac{3}{2t - 1} + \frac{3}{(2t - 1)^2}\right] dt =$$

$$= \left(2 \ln |t| - \frac{3}{2} \cdot \ln |2t - 1| - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t - 1}\right)\Bigg|_1^2 = \ln \frac{4}{\sqrt{27}} + 1.$$

b) Termenul liber este 1; sîntem și în cazul $c > 0$. Se face, de exemplu, înlocuirea

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{1} - tx.$$

Ridicînd la pătrat, obținem

$$x^2 - x + 1 = 1 - 2tx + t^2x^2$$

sau

$$x^2 - x = -2tx + t^2x^2$$

sau

$$x - 1 = -2t + t^2x,$$

de unde

$$x = \frac{2t - 1}{t^2 - 1}$$

și

$$dx = -2\,\frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2}\,dt,$$

iar

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = -\frac{t^2 - t + 1}{t^2 - 1}.$$

Limitele de integrare:

$$t_1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{-x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{1}{2}, \text{ iar } t_2 = 0.$$

Atunci

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{2t^2 - 2t + 2}{(t-2)(t+1)(t-1)^2}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \left\{ \frac{2}{t-2} - \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2t-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(t-1)^2} \right\} dt = \left(2 \ln |t-2| - \frac{1}{2} \ln |t+1| - \frac{3}{2} \ln |t-1| + \frac{1}{t-1} \right) \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{0} =$$

$$= \ln \frac{4}{\sqrt[3]{27}} + 1.$$

Observație. Înlocuirea $\sqrt{x^2 - x + 1} = -\sqrt{1} + tx$ nu se poate folosi din cauză că $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{x}$ nu există. Această înlocuire se poate folosi dacă intervalul de integrare nu conține pe 0.

2) Să se calculeze integrala

$$I = \int_5^6 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx.$$

a) Coeficientul lui x^2 este 1. Sîntem în cazul III, 3, $a > 0$. Se face înlocuirea $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{1}\,x - t$. Ridicînd la pătrat, obținem

$$x^2 - 4 = x^2 + t^2 - 2xt,$$

de unde

$$-4 = t^2 - 2xt$$

sau

$$x = \frac{t^2 + 4}{2t}.$$

Atunci

$$dx = \frac{t^2 - 4}{2t^2}\,dt$$

și

$$\sqrt{x^2 - 4} = -\frac{t^2 - 4}{2t}.$$

Limitele de integrare $t_1 = 5 - \sqrt{21}$, $t_2 = 6 - \sqrt{32}$.

Integrala devine

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{-2t}{t^2 - 4} \cdot \frac{t^2 - 4}{2t^2}\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t}\,dt = -\ln \Big|_{t_1}^{t_2} = -\ln \frac{t_2}{t_1} = -\ln \frac{6 - \sqrt{32}}{5 - \sqrt{21}}.$$

b) Trinomul are rădăcinile reale și distincte — 2 și 2. Sîntem în cazul III, 2. Se face înlocuirea

$$\sqrt{x^2-4} = (x-2)\,t,$$

de unde

$$x^2 - 4 = (x-2)^2\,t^2$$

sau

$$x + 2 = (x-2)\,t^2,$$

deci

$$x = \frac{2t^2+2}{t^2-1}$$

și

$$\mathrm{d}x = \frac{-8t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t,$$

iar

$$\sqrt{x^2-4} = \frac{4t}{t^2-1}.$$

Limitele de integrare $t_1 = \frac{\sqrt{21}}{3}$, $t_2 = \sqrt{2}$.

Atunci

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^2-1}{4t}\,\frac{-8t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{-2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|_{t_1}^{t_2} = \ln\left|\frac{t_2+1}{t_2-1}\right| - \ln\left|\frac{t_1+1}{t_1-1}\right| = \ln\frac{(t_2+1)(t_1+1)}{(t_2-1)(t_1-1)} =$$

$$= \ln\frac{(\sqrt{2}+1)\left(\frac{\sqrt{21}}{3}-1\right)}{(\sqrt{2}-1)\left(\frac{\sqrt{21}}{3}+1\right)} = \ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{21}+3)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{21}-3)}.$$

IV) *Integralele binoame* sînt de forma:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt[m]{x^{m'}}\,\sqrt[p]{(a\sqrt[n]{x^{n'}} + b)^{p'}}\,\mathrm{d}x,$$

unde m', n', p' sînt numere întregi. Presupunem fracțiile $\frac{m'}{m}$, $\frac{n'}{n}$, $\frac{p'}{p}$ ireductibile.

Pentru ca integrala să aibă sens, adică pentru ca funcția de integrat să fie definită pe $[x_1, x_2]$ se impun următoarele condiții:

1) $x \geqslant 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, dacă unul din numerele m sau n este par; această condiție este echivalentă cu condiția

$$0 \leqslant x_1 < x_2$$

(dacă, de exemplu, m este par, trebuie ca $x^{m'} \geqslant 0$ și deoarece fracția $\frac{m'}{m}$ este ireductibilă, m' este impar, deci trebuie ca $x \geqslant 0$).

2) $x \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, dacă unul din numerele m' și n' este $\leqslant 0$; această condiție este echivalentă cu condiția

$$0 \notin [x_1, x_2].$$

3) $a\sqrt[n]{x^{n'}} + b \geqslant 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, dacă p este par.

4) $a\sqrt[n]{x^{n'}} + b \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, dacă $p' \leqslant 0$.

Vom impune de asemenea condiția

5) $a \neq 0$ și $b \neq 0$.

Dacă $a = 0$, integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} k \sqrt[m]{x^{m'}}\, dx,$$

unde $k = \sqrt[p]{b^{p'}}$ și se calculează direct, deoarece se cunoaște o primitivă a funcției $x^{m'}$ (sau se face înlocuirea $\sqrt[m]{x} = t$ și se reduce la o integrală rațională).

Dacă $b = 0$, integrala devine

$$\int_{x_2}^{x_1} k' \sqrt[m]{x^{m'}}\, \sqrt[np]{x^{n'p'}}\, dx,$$

unde $k' = \sqrt[p]{a^{p'}}$ și este o integrală de tipul II. Se face înlocuirea $\sqrt[r]{x} = t$ adică $x = t^r$ unde $r = mnp$, și se reduce la o integrală rațională.

Condițiile $a \neq 0$ și $b \neq 0$ s-au impus pentru a înlătura cazurile deja tratate.

Notînd $\alpha = \frac{m'}{m}$, $\beta = \frac{n'}{n}$, $\gamma = \frac{p'}{p}$, integrala se scrie

$$I = \int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha}(ax^{\beta} + b)^{\gamma}\, dx.$$

Vom deosebi trei cazuri în care integrala binomă se reduce la o integrală rațională.

a) Cazul cînd γ este întreg.

Deoarece fracția $\gamma = \frac{p'}{p}$ este ireductibilă, condiția ca γ să fie întreg revine la aceea ca $p = 1$ sau $p = -1$. Notînd $\varepsilon = 1$ dacă $p = 1$ și $\varepsilon = -1$ dacă $p = -1$, avem $\gamma = \varepsilon p'$ și integrala se scrie

$$I = \int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha}(ax^{\beta} + b)^{\varepsilon p'}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt[m]{x^{m'}}\, (a\sqrt[n]{x^{n'}} + b)^{\varepsilon p'}\, dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} R\left(\sqrt[m]{x^{m'}},\ \sqrt[n]{x^{n'}}\right) dx,$$

unde $R(u, v)$ este o funcție rațională de două variabile, deci, în acest caz integrala este de tipul II. Se face înlocuirea

$$\sqrt[r]{x} = t \text{ adică } x = t^r,$$

unde r este un multiplu comun al numitorilor lui α și β, de exemplu $r = mn$, și se reduce la o integrală rațională, care se poate calcula.

b) Cazul cînd $\frac{\alpha+1}{\beta}$ este întreg.

În acest caz se face înlocuirea

$$\sqrt[p]{ax^\beta + b} = t \text{ adică } ax^\beta + b = t^p,$$

unde p este numitorul lui γ, și se reduce la o integrală rațională, care se poate efectua.

Într-adevăr, să facem mai întîi înlocuirea

$$x^\beta = z, \text{ deci } x = z^{\frac{1}{\beta}} \text{ și } dx = \frac{1}{\beta} z^{\frac{1}{\beta}-1}\, dz.$$

Notînd $z_1 = x_1^\beta$ și $z_2 = x_2^\beta$, integrala devine

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\beta} z^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} (az + b)^\gamma\, dz = \int_{z_1}^{z_2} R(z, (az+b)^\gamma) dz =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} R[z, \sqrt[p]{(az+b)^{p'}}]\, dz,$$

unde $R(u, v)$ este o funcție rațională de două variabile $\left(\frac{\alpha+1}{\beta} - 1 \text{ este întreg}\right)$; integrala obținută este de tipul I. Se face acum înlocuirea

$$\sqrt[p]{az+b} = t \text{ adică } az + b = t^p$$

și se reduce la o integrală rațională care se poate calcula. Aplicarea celor două înlocuiri succesive

$$x^\beta = z \text{ și } az + b = t^p$$

este echivalentă cu aplicarea directă a înlocuirii

$$ax^\beta + b = t^p.$$

c) Cazul cînd $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma$ este întreg.

În acest caz se face înlocuirea

$$\sqrt[p]{\frac{ax^\beta + b}{x^\beta}} = t \text{ adică } \frac{ax^\beta + b}{x^\beta} = t^p \text{ sau } ax^\beta + b = x^\beta t^p,$$

unde p este numitorul lui γ. Pentru a putea folosi această înlocuire trebuie să presupunem că $x \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, adică $0 \notin [x_1, x_2]$. Înlocuirea aceasta ne duce la o integrală rațională, care se poate calcula.

Într-adevăr, avem

$$I = \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha (ax^\beta + b)^\gamma\, dx = \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha [x^\beta (a + bx^{-\beta})]^\gamma\, dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha+\beta\gamma} (bx^{-\beta} + a)^\gamma\, dx = \int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha'} (bx^{\beta'} + a)^\gamma\, dx,$$

unde $\alpha' = \alpha + \beta\gamma$ și $\beta' = -\beta$. Ultima integrală este de tipul precedent, adică $\frac{\alpha'+1}{\beta'}$ este întreg. Într-adevăr:

$$\frac{\alpha'+1}{\beta'} = \frac{\alpha+\beta\gamma+1}{-\beta} = -\left(\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma\right),$$

iar $\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma$ este întreg, prin ipoteză. Dacă în ultima integrală se face înlocuirea

$$bx^{\beta'} + a = t^p,$$

unde p este numitorul lui γ, se obține o integrală rațională. Dar înlocuirea aceasta înseamnă

$$bx^{-\beta} + a = t^p \text{ sau } ax^{\beta} + b = x^{\beta}t^p.$$

O b s e r v a ț i e. Matematicianul rus Cebîșev a demonstrat că cele trei cazuri expuse mai sus sînt singurele cazuri în care o integrală binomă se poate reduce la o integrală rațională.

Exemple. 1) Să se calculeze integrala

$$I = \int_1^{32} \frac{(\sqrt[6]{x}-1)^2}{\sqrt[6]{x^7}}\,dx.$$

Integrala se scrie

$$I = \int_1^{32} x^{-\frac{7}{6}}\left(x^{\frac{1}{6}}-1\right)^2 dx,$$

unde $\alpha = -\frac{7}{6}$, $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = 2$. Aici γ este întreg. (Integrala este de tipul IV, 1.) Se face înlocuirea $x = t^6$, deci $dx = 6t^5\,dt$. Avem

$t = \sqrt[6]{x}$ deci $t_1 = \sqrt[6]{1} = 1$ și $t_2 = \sqrt[6]{32} = 2$. Atunci

$$I = \int_1^2 t^{-7}(t-1)^2\,6t^5\,dt = 6\int_1^2 \frac{t^2-2t+1}{t^2}\,dt =$$

$$= 6\int_1^2 \left(1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt = 6\left(t-\ln t^2-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^2 = 9-12\ln 2.$$

2). Să se calculeze integrala

$$I = \int_1^{16} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{16} x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}} dx.$$

Este o integrală binomă cu $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{3}$. Avem

$$\frac{\alpha+1}{\beta} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2, \text{ întreg. Se face schimbarea}$$

$$x^{\frac{1}{4}} + 1 = t^3, \text{ deci } x = (t^3-1)^4 \text{ și } dx = 12t^2(t^3-1)^3\,dt.$$

Avem $t = \sqrt[3]{\frac{1}{x^4} + 1}$, deci $t_1 = \sqrt[3]{1+1} = \sqrt[3]{2}$, $t_2 = \sqrt[3]{2+1} = \sqrt[3]{3}$. Atunci

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (t^3 - 1)^{-2}\, t \cdot 12\, t^2\, (t^3 - 1)^3\, dt = \int_{t_1}^{t_2} 12\, t^3\, (t^3 - 1)\, dt =$$

$$= 12 \int_{t_1}^{t_2} (t^6 - t^3)\, dt = 12 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) \Bigg|_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} = 12 \left(\frac{9\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{2}}{7} - \frac{3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}}{4} \right) =$$

$$= \frac{45}{7}\sqrt[3]{3} - \frac{6}{7}\sqrt[3]{2}.$$

3) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-1}^{-2} \frac{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}{x^6}\, dx = \int_{-1}^{-2} x^{-6} (2x^3 + 1)^{\frac{2}{3}}\, dx.$$

Este o integrală binomă cu $\alpha = -6$, $\beta = 3$ și $\gamma = \frac{2}{3}$. Avem

$\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma = \frac{-6+1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-5}{3} + \frac{2}{3} = -1$, întreg. Se face înlocuirea

$$2x^3 + 1 = x^3 t^3, \text{ adică } 2 + \frac{1}{x^3} = t^3, \text{ de unde}$$

$$-\frac{3}{x^4}\, dx = 3t^2\, dt.$$

Avem $t = \sqrt[3]{2 + \frac{1}{x^3}}$, deci $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{\sqrt[3]{15}}{2}$. Atunci

$$I = \int_{-1}^{-2} x^{-6} x^2 \left(2 + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} dx = \int_{-1}^{-2} x^{-4} \left(2 + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} dx =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} t^2 \cdot t^2\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} t^4\, dt = -\frac{t^5}{5}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{t_1^5 - t_2^5}{5} = \frac{32 - 15\sqrt[3]{15^2}}{5 \cdot 32}.$$

4) Integrala $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}{x^6}\, dx$ nu are sens, deoarece funcția nu este definită în punctul 0 din intervalul de integrare și este nemărginită în jurul acestui punct.

5) Integrala $\int_{-1}^{1} x^6 \sqrt[3]{(2x^3+1)^2}\, dx$ are sens. Funcția este definită pe tot intervalul de integrare. Avem $\alpha = 6$, $\beta = 3$, $\gamma = \frac{2}{3}$ și $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma = 3$, întreg. Totuși, nu se poate aplica schimbarea $2x^3 + 1 = x^3 t^3$, deoarece această schimbare se poate folosi numai dacă $x \neq 0$ pe tot intervalul de integrare, adică dacă intervalul de integrare nu conține pe 0.

6) Integrala $\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt[3]{x}}$ nu are sens, pentru că $\sqrt[4]{x}$ nu are sens pentru $x \in [-2, -1]$.

§ 7. Metode de calcul aproximativ al integralei

Formula lui Leibniz-Newton poate fi folosită pentru calculul integralei unei funcții numai atunci cînd se cunoaște o primitivă a acestei funcții. Or, primitivele se cunosc numai pentru cîteva clase restrînse de funcții elementare. Pentru alte funcții (chiar elementare), cărora nu li se cunosc primitivele sau pentru funcții integrabile care nu au primitive, formula lui Leibniz-Newton nu mai poate fi folosită. În acest caz ne mulțumim să calculăm integrala cu aproximație, prin diferite metode.

De exemplu, dacă se dă funcția prin graficul ei, nici nu se poate pune problema calculului exact al integralei, deoarece valorile funcției nu pot fi determinate decît aproximativ, prin măsurare.

Orice problemă de aproximare este indisolubil legată de evaluarea erorii comise. Nu are nici un sens să spunem că am calculat cu aproximație valoarea integralei, dacă nu precizăm că eroarea nu întrece un anumit număr.

Așadar, ori de cîte ori se dă un procedeu de calcul aproximativ al integralei, trebuie să se dea în același timp și un procedeu de evaluare a erorii.

În principiu metodele de calcul aproximativ al integralei unei funcții f constau în a aproxima funcția f cu o funcție mai simplă φ, căreia i se poate calcula ușor integrala și a lua integrala funcției φ în locul integralei funcției f.

1. Metoda dreptunghiurilor

Această metodă constă în a aproxima o funcție dată cu o funcție în scară (constantă pe intervale), adică în a aproxima graficul funcției cu o linie poligonală cu laturile paralele cu axele.

Fie f o funcție integrabilă pe un interval $[a, b]$ d o diviziune a acestui interval:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

și $\sigma_d(f)$ o sumă integrală corespunzătoare acestei diviziuni:

$$\sigma_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i), \quad x_i \leqslant \zeta_i \leqslant x_{i+1}.$$

Dacă luăm diviziunea d suficient de fină (adică dacă norma diviziunii este suficient de mică) putem realiza ca suma integrală să difere oricît de puțin de integrala funcției f. Putem aproxima astfel integrala cu sume integrale:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i).$$

Putem să simplificăm calculele, luînd cele n intervale parțiale egale între ele:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b - a}{n}$$

şi luînd punctele intermediare la extremitatea din stînga a intervalelor parţiale: $\xi_i = x_i$. Obţinem atunci următoarea formulă de aproximare:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})].$$

Dacă luăm punctele intermediare la extremitatea din dreapta a intervalelor parţiale: $\xi_i = x_{i+1}$, obţinem următoarea formulă de aproximare:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b)].$$

Fiecare din cele două formule de aproximare se numeşte *formula dreptunghiurilor*, iar metoda aceasta de aproximare a integralei se numeşte *metoda dreptunghiurilor*.

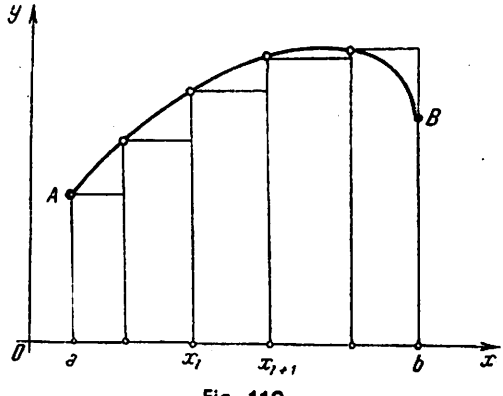


Fig. 110

Justificarea acestei denumiri este că, dacă funcţia f este *pozitivă*, fiecare termen $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ al sumei integrale $\sigma_d(f)$ reprezintă aria unui dreptunghi (fig. 110).

În ceea ce priveşte evaluarea erorii, ea rezultă din inegalitatea

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sigma_d(f)\right| \leqslant S_d(f) - s_d(f),$$

unde s_d şi S_d sînt sumele Darboux. Evaluarea erorii este dată de diferenţa sumelor Darboux.

În acest fel putem calcula eroarea *după* ce am calculat suma integrală. Dacă eroarea este mai mare decît cea dorită, va trebui să luăm mai multe puncte de diviziune, să calculăm o nouă sumă integrală şi, din nou, eroarea comisă.

Acest procedeu nu este satisfăcător: este de dorit să ştim de la început numărul n al intervalelor diviziunii, necesar pentru a realiza o aproximaţie dorită.

În anumite cazuri acest lucru este posibil, după cum rezultă din următoarea

Propoziţie. Dacă funcţia f este derivabilă şi dacă derivata sa f' este mărginită, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sigma_d(f)\right| \leqslant \frac{M'(b-a)^2}{n},$$

unde $M' = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

Într-adevăr

$$S_d(f) - s_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i),$$

unde M_i și m_i sînt respectiv marginea superioară și marginea inferioară a funcției f pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$.

Deoarece f este continuă pe intervalul compact $[x_i, x_{i+1}]$, ea își atinge marginile pe acest interval: există două puncte x_i' și x_i'' din $[x_i, x_{i+1}]$, astfel ca

$$f(x_i') = M_i, f(x_i'') = m_i,$$

deci

$$S_d - s_d = \sum [f(x_i') - f(x_i'')] (x_{i+1} - x_i).$$

Aplicînd formula creșterilor finite, există un punct ξ_i cuprins între x_i' și x_i'', deci $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, astfel ca

$$f(x_i) - f(x_i'') = f'(\xi_i)(x_i' - x_i'').$$

Atunci

$$S_d - s_d = \left| \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)\ (x_i' - x_i'')\ (x_{i+1} - x_i) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f'(\xi_i)|\ |(x_i' - x_i'')|\ (x_{i+1} - x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M'(x_{i+1} - x_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} M' \frac{(b-a)^2}{n^2} = n \cdot M' \frac{(b-a)^2}{n^2} = M' \frac{(b-a)^2}{n},$$

de unde

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx - \sigma_d(f) \right| \leqslant \frac{M'(b-a)^2}{n}.$$

Astfel, dacă dorim ca eroarea să fie mai mică decît $\varepsilon > 0$, este suficient să luăm

$$n \geqslant \frac{M'(b-a)^2}{\varepsilon}$$

deoarece, în acest caz,

$$\frac{M'(b-a)^2}{n} < \varepsilon \text{ și deci}$$

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx - \sigma_d(f) \right| < \varepsilon.$$

Exemplu. Fie funcția $f(x) = x$ definită pe $[0, 1]$. Avem $f'(x) \equiv 1$, deci $M' = 1$, și $b - a = 1$.

Pentru a calcula integrala cu două zecimale exacte, $\varepsilon = 10^{-2}$, este suficient să luăm

$$n \geqslant \frac{M'(b-a)^2}{\varepsilon} = 100.$$

Din acest exemplu se vede că metoda dreptunghiurilor nu este totdeauna convenabilă, deoarece necesită un număr mare de puncte de diviziune, deci calcule numeroase, pentru a realiza aproximații mai bune.

Pentru o diviziune aleasă, eroarea este cu atît mai mică, cu cît panta tangentei la grafic este mai mică și, mai ales, cu cît intervalul de integrare este mai mic.

2. Metoda trapezelor

Această metodă constă în a aproxima funcția dată cu o funcție poligonală (liniară pe intervale) sau, în limbaj geometric, în a aproxima graficul funcției cu o linie poligonală cu vîrfurile pe grafic.

Fie f o funcție integrabilă pe $[a, b]$ și d o diviziune a intervalului. Să considerăm două sume integrale, luînd punctele intermediare la extremitatea stîngă a intervalelor parțiale:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i),$$

sau la extremitatea dreaptă a intervalelor parțiale:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\,(x_{i+1} - x_i).$$

Fiecare din aceste sume aproximează integrala lui f. Semisuma acestor sume integrale

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

se află cuprinsă între sumele integrale și deci aproximează și ea integrala lui f:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i).$$

Pentru simplificarea calculelor, se iau intervalele parțiale egale între ele

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b - a}{n}.$$

Obținem astfel următoarea formulă de aproximare

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b - a}{2n}[f(a) + f(b) + 2\,(f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))]$$

numită *formula trapezelor*. Această metodă de aproximare se numește *metoda trapezelor*.

Justificarea acestei denumiri este că, dacă funcția f este *pozitivă*, fiecare termen $\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i)$ al sumei S_n reprezintă aria unui trapez, cu înălțimea $x_{i+1}-x_i$ și bazele $f(x_i)$ și $f(x_{i+1})$ (fig. 111).

Evaluarea erorii comise prin această aproximare rezultă din inegalitatea

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \leqslant S_d(f) - s_d(f),$$

S_d și s_d fiind sumele Darboux.

În unele cazuri putem determina dinainte numărul n al intervalelor diviziunii, pentru a realiza o aproximație dorită, așa cum rezultă din următoarea

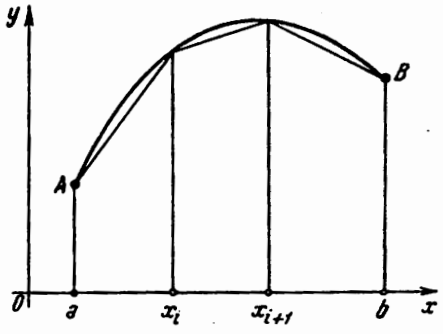


Fig. 111

Propoziție. Dacă f are derivata de ordinul doi f'' integrabilă, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \leqslant \frac{M''(b-a)^3}{12n^2},$$

unde $M'' = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|$.

Fie $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$. Aplicînd formula de integrare prin părți, avem

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,d(x-\alpha) = f(\beta)(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(x)(x-\alpha)\,dx.$$

Aplicînd din nou formula de integrare prin părți, obținem

$$\int_\alpha^\beta f'(x)(x-\alpha)\,dx = \int_\alpha^\beta f'(x)(x-\alpha)\,d(x-\beta) = -\int_\alpha^\beta (x-\beta)\,d[f'(x)(x-\alpha)] =$$

$$= -\int_\alpha^\beta f''(x)(x-\alpha)(x-\beta)\,dx - \int_\alpha^\beta f'(x)(x-\beta)\,dx.$$

Aplicăm din nou formula de integrare prin părți ultimei integrale

$$\int_\alpha^\beta f'(x)(x-\beta)\,dx = \int_\alpha^\beta (x-\beta)\,df(x) = f(\alpha)(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Făcînd aceste înlocuiri în prima egalitate, obținem

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f(\beta)(\beta-\alpha) + \int_\alpha^\beta f''(x)(x-\alpha)(x-\beta)\,dx + f(\alpha)(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

adică

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(x)(x-\alpha)(x-\beta)\,dx,$$

de unde

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta |f''(x)|(x-\alpha)(\beta-x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}M''\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,dx.$$

Dar

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-\alpha+\alpha-x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [(x-\alpha)(\beta-\alpha) - (x-\alpha)^2]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x-\alpha)^2}{2}(\beta-\alpha) - \frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]\Bigg|_\alpha^\beta = \frac{(\beta-\alpha)^3}{12},$$

deci

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)\right| \leqslant \frac{M''(\beta-\alpha)^3}{12}.$$

Luînd $\alpha = x_i$ şi $\beta = x_{i+1}$, obţinem

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_{i+1}}^{x_i} f(x)\,dx - \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M''(x_{i+1}-x_i)^3}{12} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M''(b-a)^3}{12n^3} = n\frac{M''(b-a)^3}{12n^3} = \frac{M''(b-a)^3}{12n^2}.$$

Astfel, dacă dorim ca eroarea să fie mai mică decît $\varepsilon > 0$, este suficient să luăm

$$n \geqslant \sqrt{\frac{M''(b-a)^3}{12\varepsilon}},$$

deoarece atunci $\frac{M''(b-a)^3}{12n^2} < \varepsilon$ şi deci

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| < \varepsilon.$$

Exemplu. Fie funcţia $f(x) = x^2$ definită pe $[0, 1]$. Avem $f'(x) = 2x$ şi $f''(x) = 2$, deci $M'' = 2$, iar $b - a = 1$.

Pentru a calcula integrala cu o eroare mai mică decît $\varepsilon = 10^{-2}$, luăm

$$n \geqslant \sqrt{\frac{M''(b-a)^3}{12}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{12}} > 4.$$

Astfel, luînd $n = 5$ avem $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{3}{5}$, $x_4 = \frac{4}{5}$, $x_5 = 1$.

Atunci

$$f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = \frac{1}{25}, \quad f(x_2) = \frac{4}{25}, \quad f(x_3) = \frac{9}{25}, \quad f(x_4) = \frac{16}{25}, \quad f(x_5) = 1$$

și

$$S_5 = \frac{b-a}{2 \cdot 5}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{2}{25} + \frac{8}{25} + \frac{18}{25} + \frac{32}{25} + 1\right] = \frac{85}{250} = 0{,}34.$$

Valoarea exactă a integralei este

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333.$$

Avem într-adevăr

$$\int_0^1 x^2\,dx - S_5 \approx 0{,}0066 < 0{,}01.$$

Dacă vrem să calculăm valoarea integralei cu 4 zecimale exacte (cu o eroare mai mică decît $\varepsilon = 10^{-4}$), luăm

$$n > \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{12}} = 10\sqrt{\frac{2 \cdot 100}{12}} > 40.$$

O b s e r v a ţ i e. Metoda trapezelor necesită calcule mai puţine decît metoda dreptunghiurilor. Pentru a realiza o eroare mai mică decît $\varepsilon > 0$, trebuie să luăm prin metoda dreptunghiurilor

$$n \geqslant \frac{M'(b-a)^2}{\varepsilon},$$

iar prin metoda trapezelor

$$b \geqslant \frac{\sqrt{M''}(b-a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{12}\sqrt{\varepsilon}}.$$

Ţinem seama de faptul că dacă $\varepsilon < 1$, atunci $\varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$, deci $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < \frac{1}{\varepsilon}$.

Metoda trapezelor este mai avantajoasă decît cea a dreptunghiurilor dacă $b - a > 1$, deoarece în acest caz

$$(b-a)^{\frac{2}{3}} < (b-a)^2.$$

3. Formula lui Simpson

Metoda de aproximare, care conduce la formula lui Simpson, constă în a aproxima funcţia dată pe anumite intervale cu un polinom de gradul doi, adică în a aproxima graficul funcţiei pe anumite intervale cu o parabolă (fig. 112).

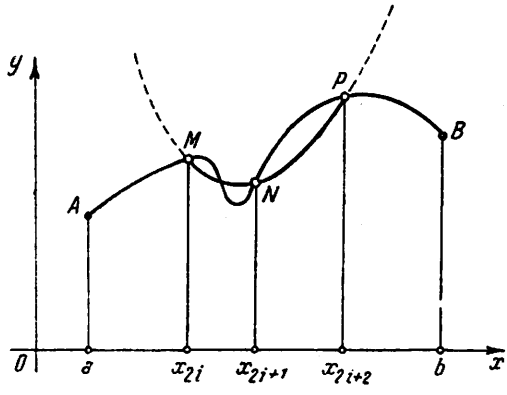


Fig. 112

Fie f o funcţie definită pe $[a,b]$ şi d o diviziune a intervalului, formată din $2n$ intervale parţiale egale

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2i} < x_{2i+1} < x_{2i+2} < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

$$x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{2n} = h,$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1.$$

Să notăm $x_{2i} = \alpha$, $x_{2i+1} = \alpha + h$, $x_{2i+2} = \alpha + 2h$,

$$f(x_{2i}) = y_{2i}, \quad f(x_{2i+1}) = y_{2i+1}, \quad f(x_{2i+2}) = y_{2i+2}.$$

Prin punctele (α, y_{2i}), $(\alpha + h, x_{2i+1})$, $(\alpha + 2h, y_{2i+2})$ trece o parabolă şi numai una, cu axa paralelă cu Oy:

$$y = A\,x^2 + Bx + C = p_i(x).$$

Avem

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2h} p_i(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\alpha+2h} (Ax^2 + Bx + C)\mathrm{d}x = \left(\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right)\Big|_{\alpha}^{\alpha+2h} =$$

$$= 2h\left[A\alpha^2 + B\alpha + C + 2A\,\alpha h + Bh + \frac{4Ah^2}{3}\right].$$

Scriind că parabola trece prin cele trei puncte, obţinem

$$y_{2i} = A\alpha^2 + B\alpha + C,$$

$$y_{2i+1} = A\,(\alpha + h)^2 + B(\alpha + h) + C,$$

$$y_{2i+1} = A(\alpha + 2h)^2 + B(\alpha + 2h) + C.$$

Scăzînd membru cu membru prima ecuaţie din celelalte două, obţinem:

$$y_{2i+1} - y_{2i} = 2A\alpha h + Bh + Ah^2;$$

$$y_{2i+2} + y_{2i} = A\alpha h^2 + 2Bh + 4Ah^2.$$

Înmulțind prima ecuație cu -2 și adunînd, rezultă

$$A = \frac{y_{2i} - y_{2i+1} + y_{2i+2}}{2h^2}.$$

Să observăm că

$$y_{2i+1} = A\alpha^2 + 2A\alpha h + Ah^2 + B\alpha + Bh + C =$$
$$= A\alpha^2 + B\alpha + C + 2A\alpha h + Bh + \frac{4Ah^2}{3} - \frac{Ah^2}{3},$$

de unde

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2h} p_i(x)\,dx = 2h\left[y_{2i+1} + \frac{Ah^2}{3}\right]$$

și, înlocuind pe A cu valoarea obținută mai sus

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2h} p_i(x)\,dx = 2h\left[y_{2i+1} + \frac{y_{2i} - 2y_{2i+1} + y_{2i+2}}{6}\right] = \frac{h}{3}[y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}].$$

Procedînd astfel pe fiecare interval $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, obținem

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p_i(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1}[y_{2i} + y_{2i+1} + y_{2i+2}] =$$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4\,(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2\,(y_2 + y_2 + \cdots + y_{2n-2})].$$

Această valoare aproximează integrala funcției f

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)^3}{6n}\{f(a) + f(b) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})] +$$
$$+ 2\,[f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2n-2})]\}.$$

Această formulă de aproximare se numește *formula lui Simpson.*

Evaluarea erorii comise prin această aproximare este dată de următoarea

Propoziție. Dacă f are derivată de ordinul patru mărginită, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_{2n}\right| \leqslant \frac{M^{IV}(b-a)^5}{2880\,n^4},$$

unde $M^{IV} = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{IV}(x)|$, iar S_{2n} este suma din formula lui Simpson.

Să notăm $x_{2i} = c - h$, $x_{2i+1} = c$, $x_{2i+2} = c + h$. Atunci

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)].$$

Să notăm

$$R(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx - \frac{t}{3}[f(c-t) + 4f(c) + f(c+t)], \quad t \leqslant h.$$

Să remarcăm că, dacă F este o primitivă a lui f, avem

$$\int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx = F(c+t) - F(c-t)$$

şi derivînd în raport cu t obţinem

$$\left(\int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx\right)' = (F(c+t) - F(c-t))' = F'(c+t) + F'(c-t) = f(c+t) + f(c-t).$$

Derivînd acum funcţia $R(t)$ în raport cu t, obţinem

$$R'(t) = f(c+t) - f(c-t) - \frac{1}{3}[f(c-t) + 4f(c) + f(c+t)] -$$

$$- \frac{t}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)],$$

adică

$$R'(t) = \frac{2}{3}[f(c+t) + f(c-t)] - \frac{4}{3}f(c) - \frac{t}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)].$$

Mai derivăm o dată:

$$R''(t) = \frac{2}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{1}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)] -$$

$$- \frac{t}{3}[f''(c+t) + f''(c-t)] = \frac{1}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{t}{3}[f''(c+t) + f''(c-t)].$$

În sfîrşit, derivînd încă o dată, obţinem

$$R'''(t) = -\frac{t}{3}[f'''(c+t) - f'''(c-t)].$$

Să aplicăm acum formula creşterilor finite funcţiei $f'''(x)$ pe intervalul $[c-t, c+t]$: există un punct $\xi_1 \in (c-t, c+t)$, astfel ca

$$f'''(c+t) - f'''(c-t) = 2t f^{IV}(\xi_1)$$

şi deci

$$R'''(t) = -\frac{2t^2}{3} f^{IV}(\xi_1).$$

Notînd cu M şi m marginile funcţiei f^{IV} pe $[c-h, c+h]$, avem

$$m \leqslant f^{IV}(\xi_1) \leqslant M,$$

de unde

$$-\frac{2t^2}{3} M \leqslant -\frac{2t^2}{3} f^{IV}(\xi_1) < -\frac{2t^2}{3} m,$$

adică

$$-\frac{2t^2}{3}M \leqslant R'''(t) \leqslant -\frac{2t^2}{3}m.$$

Să observăm că $R''(0) = 0$, $R'(0) = 0$ și $R(0) = 0$.
Integrînd ultimele inegalități între 0 și u, obținem

$$-\int_0^u \frac{2t^2}{3}M\,dt \leqslant \int_0^u R'''(t)\,du \leqslant -\int_0^u \frac{2t^2}{3}m\,dt,$$

adică $-\frac{2u^3}{9}M \leqslant R''(u) \leqslant -\frac{2u^3}{9}m$, pentru orice $0 \leqslant u \leqslant h$; integrînd aceste inegalități între 0 și z, avem

$$-\int_0^z \frac{2u^3}{9}M\,du \leqslant \int_0^z R''(u)\,du \leqslant -\int_0^z \frac{2u^3}{9}m\,du,$$

adică

$$-\frac{2z^4}{18}M \leqslant R'(z) \leqslant -\frac{z^4}{18}m \text{ pentru } 0 \leqslant z \leqslant h.$$

Integrînd acum între 0 și h, obținem

$$-\int_0^h \frac{z}{18}M\,dz \leqslant \int_0^h R'(z)\,dz < -\int_0^h \frac{z^4}{18}m\,dz,$$

adică

$$-\frac{h^5}{90}M \leqslant R(h) \leqslant \frac{h^5}{90}m.$$

Există atunci un punct $\xi_{2i} \in [c-h, c+h]$, astfel ca

$$R(h) = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi_{2i}),$$

adică

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)] = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi_{2i})$$

sau

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+1}} f(x)\,dx - \frac{(b-a)}{6n}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] = -\frac{(b-a)}{90\cdot(2n)^5}f^{IV}(\xi_{2i}).$$

Atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_{2n}\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} - \frac{b-a}{6n}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})]\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1} -\frac{(b-a)^5}{2880\,n^5}f^{IV}(\xi_{2i})\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(b-a)^5}{2880\,n^5}|f^{IV}(\xi_{2i})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(b-a)^5}{2880\,n^5}M^{IV} = n\cdot\frac{(b-a)^5}{2880\,n^5}M^{IV} = \frac{M^{IV}(b-a)^5}{2880\,n^4}.$$

Astfel, dacă dorim ca eroarea să fie mai mică decît $\varepsilon > 0$, este suficient să luăm

$$n \geqslant \sqrt[4]{\frac{M^{IV}(b-a)^5}{2880\,\varepsilon}}.$$

Observaţie. Pentru a realiza o aproximaţie dorită, formula lui Simpson necesită, în general, calcule mai puţine decît formulele precedente.

§ 8. Aplicaţiile integralei în geometrie şi fizică

1. Aria unei suprafeţe plane mărginite de o curbă

Fie f o funcţie *pozitivă* definită pe un interval $[a, b]$. Graficul funcţiei f este situat deasupra axei Ox.

Să notăm cu F mulţimea punctelor din plan mărginită de axa Ox, graficul AB al funcţiei f şi dreptele $x = a$, $x = b$ paralele cu axa Oy:

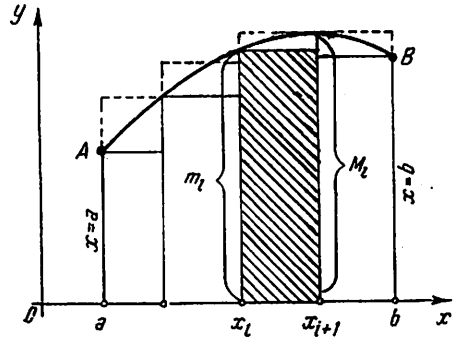


Fig. 113

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Propoziţia 1. Dacă funcţia f este integrabilă (în sensul lui Riemann), atunci mulţimea F este măsurabilă (în sensul lui Jordan) şi

$$s(F) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Să considerăm sumele Darboux corespunzătoare acestei diviziuni

$$s_d = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i), \qquad S_d = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i),$$

unde

$$m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x), \qquad M_i = \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x).$$

Aşadar

$$m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i, \qquad \text{pentru orice } x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Produsul $m_i(x_{i+1} - x_i)$ reprezintă aria dreptunghiului cu baza pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ şi înălţimea m_i. Acest dreptunghi este complet conţinut în mulţimea F.

Cele n dreptunghiuri de acest fel formează un poligon P *interior* mulţimii F, şi a cărui arie este egală cu suma inferioară Darboux

$$s(P) = s_d,$$

Produsul $M_i(x_{i+1} - x_i)$ reprezintă aria unui dreptunghi cu baza pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ și înălțimea M_i. Acest dreptunghi conține porțiunea din mulțimea F care se proiectează pe axa Ox pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$.

Cele n dreptunghiuri de acest fel formează un poligon Q *exterior* mulțimii F, și a cărui arie este egală cu suma superioară Darboux

$$s(Q_1) = S_d.$$

Fie (d_n) un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, cu $\nu(d_n) \to 0$. Deoarece funcția f este integrabilă, avem

$$\lim_{n\to\infty} s_{d_n} = \lim_{n\to\infty} S_{d_n} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dacă pentru fiecare diviziune d_n notăm cu P_n poligonul interior și cu Q_n poligonul exterior obținut ca mai sus, avem

$$P_n \subset F \subset Q_n$$

și

$$s(P_n) = s_{d_n}, \qquad s(Q_n) = S_{d_n},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} s(P_n) = \lim_{n\to\infty} s(Q_n) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Rezultă atunci că mulțimea F este măsurabilă și aria sa $s(F)$ este egală cu limita comună a ariilor celor două șiruri de poligoane (P_n) și (Q_n):

$$s(F) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

O b s e r v a ț i i. 1° Propoziția reciprocă este de asemenea adevărată: dacă mulțimea F este măsurabilă (în sensul lui Jordan), atunci funcția f este integrabilă (în sensul lui Riemann).

2° Graficul funcției integrabile $f \geqslant 0$ are arie nulă, deoarece este conținut în frontiera mulțimii măsurabile F, iar frontiera unei mulțimi măsurabile are arie nulă.

3° Dacă funcția f este integrabilă, mulțimea

$$F' = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y < f(x)\},$$

obținută din mulțimea F scoțînd punctele graficului funcției f, este de asemenea măsurabilă — ca diferență a două mulțimi măsurabile — și aria sa este egală cu aria lui F

$$s(F') = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Fie acum f_1 și f_2 două funcții definite pe $[a, b]$ astfel încît $f_1 \leqslant f_2$:

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \quad \text{pentru orice} \quad x \in [a, b].$$

Graficul funcției f_1 este situat sub graficul funcției f_2. Să notăm cu F mulțimea punctelor cuprinse între graficele celor două funcții și dreptele $x = a$, $x = b$:

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}.$$

Propoziția 2. Dacă funcțiile f_1 și f_2 sînt integrabile, mulțimea F este măsurabilă și

$$s(F) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx.$$

Deoarece funcțiile f_1 și f_2 sînt integrabile, ele sînt mărginite. Există deci un număr m astfel încît

$$m \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \quad \text{pentru orice} \quad x \in [a, b].$$

Atunci

$$0 \leqslant f_1(x) - m \leqslant f_2(x) - m \quad \text{pentru orice} \quad x \in [a, b].$$

Notînd $k = -m$, $\varphi_1 = f_1 + k$, $\varphi_2 = f_2 + k$, avem

$$0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x), \quad x \in [a, b].$$

Dacă funcțiile f_1 și f_2 sînt *pozitive*, putem lua $m = 0$, deci $k = 0$ și atunci $\varphi_1 = f_1$, $\varphi_2 = f_2$. Funcțiile φ_1 și φ_2 sînt de asemenea integrabile.

Să notăm cu F' mulțimea punctelor cuprinse între graficele funcțiilor φ_1, φ_2 și dreptele $x = a$, $x = b$.

$$F' \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}.$$

Mulțimea F' s-a obținut din mulțimea F printr-o translație paralelă cu axa Oy, deci cele două mulțimi sînt echivalente; dacă una din ele este măsurabilă, atunci și cealaltă este măsurabilă și au aceeași arie.

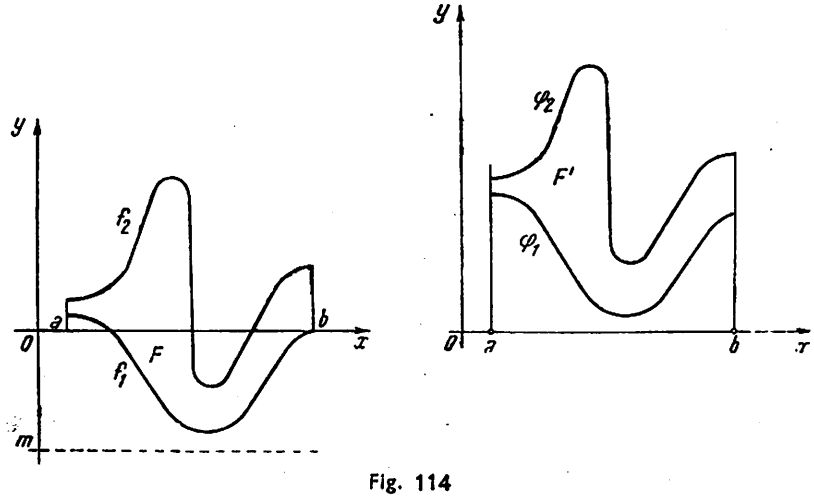


Fig. 114

Notînd

$$F_1 = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant \varphi_1(x)\},$$

$$F_2 = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\},$$

mulțimile F_1 și F_2 sînt măsurabile și

$$s(F_1) = \int_a^b \varphi_1(x)\,dx, \quad s(F_2) = \int_a^b \varphi_2(x)\,dx.$$

Mulțimea F' este diferența mulțimilor F_2 și F_1:

$$F' = F_2 - F_1,$$

deci F' este măsurabilă și

$$s(F') = s(F_2) - s(F_1) = \int_a^b \varphi_2(x)\,dx - \int_a^b \varphi_1(x)\,dx = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b [f_2(x) + k - (f_1(x) + k)]\,dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

Rezultă atunci că și mulțimea F este măsurabilă și

$$s(F) = s(F') = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

O b s e r v a ț i e. Propoziția 1 este un caz particular al propoziției 2, cu $f_1(x) \equiv 0$ și $f_2 = f$.

C o r o l a r u l 1. Dacă f este integrabilă, mulțimea

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x) \quad \text{sau} \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$$

este măsurabilă și

$$s(F) = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Să considerăm funcțiile

$$f_1 = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f_2 = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Deoarece f este integrabilă, funcția $|f|$ este integrabilă și deci și funcțiile f_1 și f_2 sînt integrabile. Avem

$$f = f_1 - f_2, \quad |f| = f_1 + f_2.$$

Funcţiile f_1 şi f_2 se numesc, respectiv, partea pozitivă şi partea negativă a funcţiei f. Ele se pot defini şi astfel:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } f(x) \leqslant 0 \\ f(x) & \text{dacă } f(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{dacă } f(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{dacă } f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Avem

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\},$$

deci F este măsurabilă şi

$$s(F) = \int_a^b [f_2(x) + f_1(x)]\, dx = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

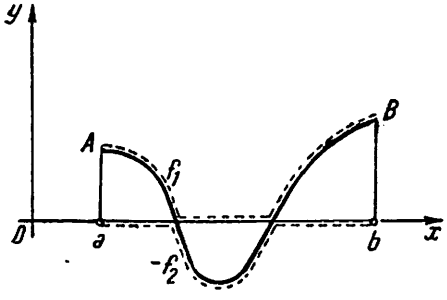


Fig. 115

Corolarul 2. Graficul unei funcţii integrabile oarecare este o mulţime măsurabilă cu aria nulă.

Într-adevăr, graficul funcţiei este conţinut în frontiera mulţimii măsurabile F.

Observaţii. 1° Dacă $f \leqslant 0$ şi este integrabilă, mulţimea F cuprinsă între graficul său, axa Ox şi dreptele $x = a$, $x = b$, este măsurabilă şi

$$s(F) = -\int_a^b f(x)\, dx,$$

deoarece $|f| = -f$.

2° Ţinînd seama de faptul că ecuaţia graficului funcţiei f este

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

aria mulţimii F, mărginită de curba $y = f(x)$, axa Ox şi dreptele $x = a$, $x = b$, se scrie adesea

$$s(F) = \int_a^b |y|\, dx.$$

Exemple. 1) Să se găsească aria suprafeţei cuprinsă între parabolele $y = x^2$ şi $y^2 = x$.

Cele două parabole se intersectează în punctele (0, 0) şi (1, 1).

Cele două parabole sînt graficele funcţiilor $f_1(x) = x^2$ şi $f_2(x) = \sqrt{x}$ definite pe [0, 1]. Aria S căutată este

$$S = \int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]\, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

2) Să se găsească aria elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Vom calcula aria unui sfert de elipsă, cuprinsă în primul cadran. Porțiunea de elipsă din primul cadran are ecuația

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

deci

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

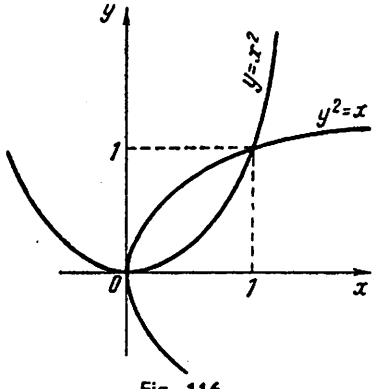


Fig. 116

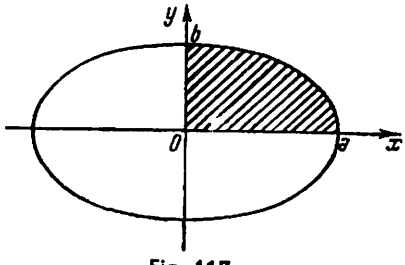


Fig. 117

Să facem înlocuirea $x = a \sin t$, deci $dx = a \cos t\,dt$ și $0 = a \sin t_1$, $a = \sin t_2$, de unde $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Atunci

$$S = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt =$$

$$= 4ab\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

În cazul cînd elipsa este un cerc, $a = b = R$, rezultă că suprafața cercului este πR^2.

2. Aria unei suprafețe plane mărginite de o curbă dată în coordonate polare

Fie $\rho = f(\theta)$ ecuația unei curbe în coordonate polare, unde $f(\theta)$ este o funcție pozitivă definită pe un interval $[\alpha, \beta]$. Fiecărui $\theta \in [\alpha, \beta]$ îi corespunde în plan punctul de coordonate polare $(\theta, f(\theta))$. Să notăm

cu F sectorul cuprins între curbă și dreptele care trec prin origine și au pantele $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$:

$$F = \{(\theta, \rho) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant f(\theta)\}.$$

Propoziția 3. Dacă funcția f este integrabilă, atunci mulțimea F este măsurabilă și

$$s(F) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\, d\theta.$$

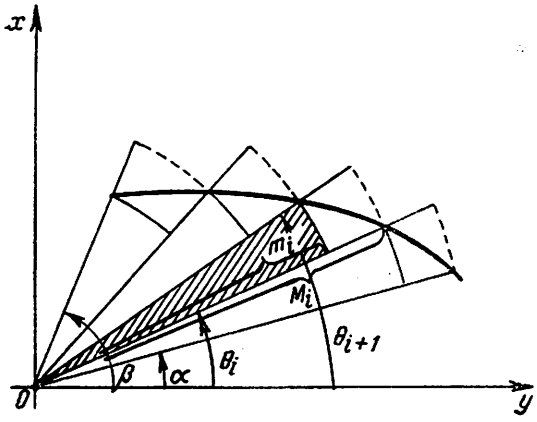


Fig. 118

Fie d o diviziune a intervalului $[\alpha\ \beta]$:

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_i < \theta_{i+1} < \ldots < \theta_n = \beta$$

și m_i, M_i, marginile funcției $f(\theta)$ pe intervalul parțial $[\theta_i,\ \theta_{i+1}]$.

Pentru fiecare indice i, să considerăm sectorul de cerc cu centrul în origine, unghiul la centru $\theta_{i+1} - \theta_i$ și raza m_i. Acest sector de cerc este conținut în mulțimea F și aria sa este

$$\frac{1}{2} m_i^2(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Reuniunea celor n sectoare de cerc este o mulțime măsurabilă A, complet conținută în mulțimea F, și cu aria

$$s(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} m_i^2(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Pentru fiecare indice i să considerăm acum sectorul de cerc cu centrul în origine, unghiul la centru $\theta_{i+1} - \theta_i$ și raza M_i.

Aria sa este

$$\frac{1}{2} M_i^2(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Reuniunea celor n sectoare de cerc de acest fel este o mulțime măsurabilă B, care conține mulțimea F, și cu aria

$$s(B) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} M_i^2(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Să observăm că, deoarece $m_i = \inf\limits_{\theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1}} f(\theta)$, avem

$$\frac{1}{2} m_i^2 = \inf_{\theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1}} \frac{1}{2} f^2(\theta)$$

și de asemenea

$$\frac{1}{2}M_i^2 = \sup_{\theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1}} \frac{1}{2}f^2(\theta),$$

astfel încît $s(A)$ și $s(B)$ sînt egale cu sumele Darboux ale funcției $h(\theta) = \frac{1}{2}f^2(\theta)$:

$$s_d\left(\frac{1}{2}f^2\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} m_i(\theta_{i+1} - \theta_i);$$

$$S_d\left(\frac{1}{2}f^2\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} M_i(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Să luăm un șir de diviziuni (d_n) ale intervalului $[\alpha, \beta]$, cu $\nu(d_n) \to 0$. Deoarece f este integrabilă, $\frac{1}{2}f^2$ este de asemenea integrabilă și

$$\lim_{n\to\infty} s_{d_n}\left(\frac{1}{2}f^2\right) = \lim_{n\to\infty} S_{d_n}\left(\frac{1}{2}f^2\right) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}f^2(\theta)\,d\theta.$$

Dacă, pentru fiecare diviziune d_n, notăm cu A_n și B_n mulțimile măsurabile formate, ca mai sus, din sectoare de cercuri, avem

$$A_n \subset F \subset B_n;$$

$$s(A_n) = s_{d_n}\left(\frac{1}{2}f^2\right), \quad s(B_n) = S_{d_n}\left(\frac{1}{2}f^2\right),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} s(A_n) = \lim_{n\to\infty} s(B_n) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta.$$

Rezultă atunci că mulțimea F este măsurabilă și aria sa este egală cu limita comună a ariilor șirurilor de mulțimi (A_n) și (B_n):

$$s(F) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta.$$

Observație. Deoarece ecuația curbei care mărginește suprafața F este $\rho = f(\theta)$, aria mulțimii F se scrie adesea

$$s(F) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\theta.$$

Exemple. 1) Ecuația, în coordonate polare, a cercului cu centrul în origine și raza R este

$$\rho \equiv R.$$

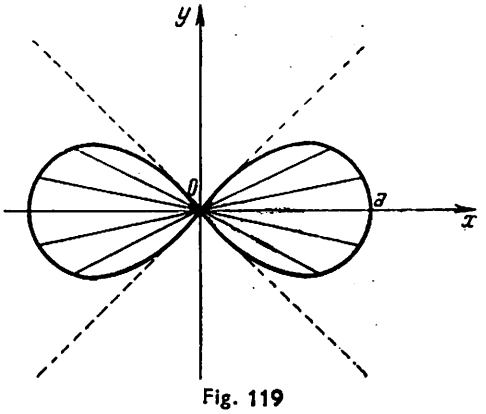


Fig. 119

Aria S a cercului este

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 \, d\theta = \frac{1}{2} R^2\theta \Big|_0^{2\pi} = \pi R^2.$$

2) Ecuația lemniscatei, în coordonate polare, este

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Pentru reprezentarea lemniscatei facem următorul tablou:

φ	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
ρ	0	$\frac{\pm a}{\sqrt{2}}$	$\pm a$	$\frac{\pm a}{\sqrt{2}}$	0

Aria unei bucle a lemniscatei este

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\varphi = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$

Aria lemniscatei este $S = a^2$.

3. Volumul corpurilor de rotație

Fie f o funcție pozitivă definită pe un interval $[a, b]$. Să considerăm mulțimea F cuprinsă între curba $y = f(x)$, axa Ox și dreptele $x = a$, $x = b$:

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Prin rotirea în jurul axei Ox, această mulțime descrie un corp de rotație K. Se spune adesea că corpul K este născut prin rotația curbei $y = f(x)$ în jurul axei Ox.

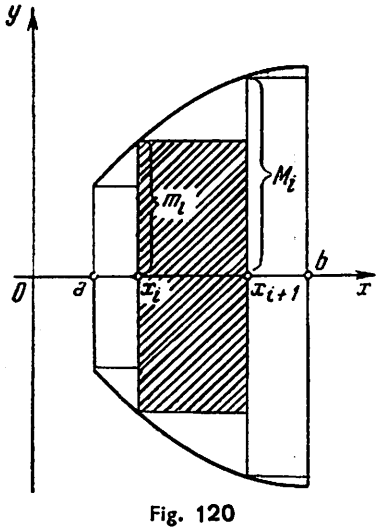


Fig. 120

Fiecare punct $(x, f(x))$ de pe curba $y = f(x)$ descrie un cerc cu centrul pe axa Ox, în punctul x, și cu raza $f(x)$.

Propoziția 1. Dacă funcția este integrabilă, mulțimea K este măsurabilă și

$$v(K) = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Să notăm cu m_i și M_i marginile funcției f pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$.

Dreptunghiul cu baza pe $[x_i, x_{i+1}]$ și înălțimea m_i descrie prin rotație un cilindru conținut în corpul K; acest cilindru are baza razei m_i și înălțimea $x_{i+1} - x_i$, deci volumul său este

$$\pi m_i^2 (x_{i+1} - x_i).$$

Cei n cilindri de acest fel formează o mulțime măsurabilă A, complet conținută în corpul K, și al cărei volum este

$$v(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i^2 (x_{i+1} - x_i).$$

Dreptunghiul cu baza pe $[x_i, x_{i+1}]$ și înălțimea M_i descrie prin rotație un cilindru cu raza bazei M_i și înălțimea $x_{i+1} - x_i$. Aria sa este

$$\pi M_i^2 (x_{i+1} - x_i).$$

Cei n cilindri de acest fel formează o mulțime măsurabilă B, care conține corpul K, și al cărei volum este

$$v(B) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i^2 (x_{i+1} - x_i).$$

Să observăm că

$$\pi m_i^2 = \pi \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} (f(x))^2 = \pi \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f^2(x);$$

$$M_i = \pi \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} (f(x))^2 = \pi \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f^2(x),$$

astfel încît $v(A)$ și $v(B)$ sînt egale cu sumele Darboux ale funcției $h = \pi f^2$.

$$s_d(\pi f^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i^2 (x_{i+1} - x_i),$$

$$S_d(\pi f^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i^2 (x_{i+1} - x_i).$$

Să luăm un șir (d_n) de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$. Deoarece f este integrabilă, funcția πf^2 este de asemenea integrabilă și

$$\lim_{n \to \infty} s_{d_n}(\pi f^2) = \lim_{n \to \infty} S_{d_n}(\pi f^2) = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx.$$

Dacă pentru fiecare diviziune d_n notăm cu A_n și B_n mulțimile măsurabile formate ca mai sus, din cilindri, avem

$$A_n \subset K \subset B_n$$

și

$$\lim_{n \to \infty} v(A_n) = \lim_{n \infty} v(B_n) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Rezultă atunci că mulțimea K este măsurabilă, iar volumul său este egal cu limita comună a volumelor celor două șiruri de mulțimi (A_n) și (B_n)

$$v(K) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Observații. 1° Condiția ca funcția f să fie pozitivă nu este esențială. În adevăr, dacă f nu este pozitivă, curbele $y = f(x)$ și $y = |f(x)|$ descriu prin rotație același corp K, deci

$$V(K) = \int_a^b |f(x)|^2\, dx = \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

2° Dacă f este integrabilă, suprafața S născută prin rotația curbei $y = f(x)$ are volum nul, deoarece este conținută în frontiera mulțimii măsurabile K.

3° Dacă f este integrabilă, corpul K', născut din rotația mulțimii

$$F' = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y < f(x)\}$$

în jurul axei Ox, și care se obține din K, scoțînd punctele de pe suprafața laterală S, este de asemenea o mulțime măsurabilă și are același volum ca și K.

$$v(K') = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

4° Deoarece ecuația curbei care dă naștere corpului K este

$$y = f(x),$$

volumul corpului K se scrie adesea

$$v(K) = \pi \int_a^b y^2\, dx.$$

Fie acum f_1 și f_2 două funcții pozitive pe $[a, b]$, astfel ca $f_1 \leqslant f_2$, și fie

$$F = \{(x, y) \mid \ a \leqslant x \leqslant b,\ \ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}.$$

Prin rotirea în jurul axei Ox, această mulțime descrie un corp K. Corpul K este mărginit de suprafețele născute prin rotația curbelor $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ și de planele $x = a$, $x = b$.

Propoziția 2. Dacă f_1 și f_2 sînt integrabile, mulțimea K este măsurabilă și

$$v(K) = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\, dx.$$

Într-adevăr, să notăm cu K_1 și K_2 corpurile născute prin rotirea în jurul axei Ox a mulțimilor

$$F_1 = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f_1(x)\}$$
$$F_2 = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f_2(x)\}.$$

Mulțimile K_1 și K_2 sînt măsurabile și

$$v(K_1) = \pi \int_a^b f_1^2(x)\, dx, \qquad v(K_2) = \pi \int_a^b f_2^2(x)\, dx.$$

Avem $F = F_2 - F_1$ și $K = K_2 - K_1$, deci K este o mulțime măsurabilă — ca diferență a două mulțimi măsurabile — și

$$v(K) = v(K_2) - v(K_1) = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\, dx.$$

Exemple. 1) Sfera cu centrul în origine și raza R poate fi obținută prin rotirea semicercului $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$ în jurul axei Ox. Volumul v al sferei este deci

$$v = \pi \int_{-R}^{R} y^2\, dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R =$$

$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

2) Curba $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leqslant x \leqslant a$ dă naștere, prin rotirea în jurul axei Ox, unui elipsoid de revoluție. Volumul v al elipsoidului este:

$$v = \pi \int_{-a}^{a} y^2\, dx = 2\pi \int_0^a \frac{b}{a}(a^2 - x^2)\, dx = 2\pi \frac{b}{a}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a =$$

$$= 2\pi \frac{b}{a}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = 4\pi a^2 b.$$

4. Lungimi de arce

În capitolul referitor la studiul curbelor se va da definiția curbelor rectificabile și a lungimii acestor curbe.

În acest capitol vom defini lungimea unor curbe particulare care sînt grafice de funcții.

Graficul unei funcții *continue* f se numește *curbă continuă* sau mai simplu, curbă. Ecuația curbei este

$$y = f(x).$$

Graficul unei funcții f cu *derivată continuă* se numește *curbă netedă*. Fie f o funcție cu *derivată continuă* f', definită pe un interval $[a, b]$, și fie C curba $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Lungimea $l(C)$ a curbei C se definește prin egalitatea:

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Justificarea acestei definiții este următoarea:

Să luăm pe curba C mai multe puncte, în ordine, de la A spre B:

$A = M_0, M_1, \ldots, M_i, M_{i+1}, \ldots, M_n = B.$

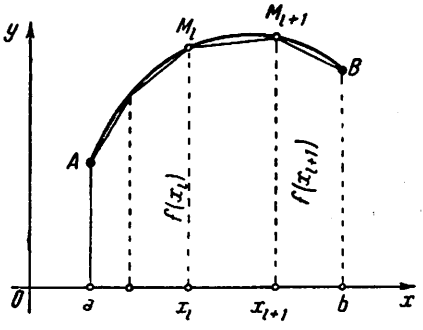


Fig. 121

Unind aceste puncte în ordinea indicată, se obține o linie poligonală P, cu vîrfurile pe curbă.

Alegerea punctelor M_i revine la alegerea unei diviziuni d a intervalului $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

astfel încît coordonatele punctului M_i sînt $(x_i, f(x_i))$.

Lungimea segmentului M_iM_{i+1} este

$$l(M_iM_{i+1}) = \sqrt{[x_{i+1} - x_i]^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}.$$

Să aplicăm funcției f teorema creșterilor finite pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$: există un punct $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, astfel încît

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i).$$

Atunci

$$l(M_iM_{i+1}) = \sqrt{[x_{i+1} - x_i]^2 + [f'(\xi_i)]^2\,[x_{i+1} - x_i]^2} =$$

$$= \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\ (x_{i+1} - x_i).$$

Procedînd astfel pe fiecare interval parțial, deducem că lungimea liniei poligonale P este:

$$l(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\ (x_{i+1} - x_i),$$

unde punctele intermediare ξ_i sînt acelea obținute prin aplicarea teoremei creșterilor finite. Să observăm că, dacă notăm $h(x) = 1 + f'^2(x)$ avem $h(\xi_i) = 1 + f'^2(\xi_i)$, deci

$$l(P) = \sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i).$$

Lungimea $l(P)$ a liniei poligonale este deci egală cu o sumă integrală a funcției h:

$$\sigma_d(h) = \sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i).$$

Fie (d_n) un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, cu $\nu(d_n) \to 0$. Deoarece f' este continuă, funcția $h = 1 + f'^2$ este de asemenea continuă, deci integrabilă.

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(h) = \int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx.$$

Dacă pentru fiecare diviziune d_n notăm cu P_n linia poligonală corespunzătoare, avem

$$\lim_{n\to\infty} l(P_n) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Observăm că, pe măsură ce diviziunea d este mai fină, cu intervale parțiale mai multe și mai mici, linia poligonală corespunzătoare P are laturi mai multe și mai mici, deci se apropie, ca formă, din ce în ce mai mult de curba C. Este deci natural să luăm drept lungime a curbei C un număr $l(C)$, de care lungimile liniilor poligonale să se apropie din ce în ce mai mult pe măsură ce diviziunea este mai fină.

Un asemenea număr este integrala funcției $h = 1 + f'^2$. De aceea se ia, prin definiție,

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

O b s e r v a ț i i . 1° După ce se va da definiția generală a curbelor rectificabile și a lungimii lor, egalitatea precedentă va rezulta ca o teoremă.

2° Deoarece ecuația curbei C este $y = f(x)$, lungimea curbei C se scrie adesea

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Exemplu. Să verificăm cu această formulă că lungimea cercului $x^2 + y^2 = R^2$ este $2\pi R$.

Ecuația unui sfert de cerc, din semiplanul superior, cuprins între cele două bisectoare este

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad -\frac{R}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Avem

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

și

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2},$$

deci, notînd cu L lungimea cercului, avem

$$\frac{1}{4} L = \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= R \arcsin \frac{x}{R}\Big|_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} = R\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = R\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = R\frac{\pi}{2},$$

de unde $L = 4 \cdot R\frac{\pi}{2} = 2\pi R$.

Observații. 1° Funcția $\sqrt{R^2 - x^2}$ nu este derivabilă în punctele $-R$ și R; în jurul acestor puncte, derivata este nemărginită. De aceea, nu se poate calcula cu ajutorul formulei precedente lungimea semicercului $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$. Pentru acest motiv s-a recurs la calculul lungimii unui sfert de cerc, deoarece pe intervalul $\left[-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right]$ funcția $\sqrt{R^2 - x^2}$ are *derivată continuă*. Această precauție va fi de prisos după ce se vor defini integralele generalizate.

2° Exemplul precedent constituie o verificare a formulei de calcul pentru lungimea cercului. Prin acest exemplu nu se demonstrează că lungimea cercului este $2\pi R$, deoarece în calcule s-au folosit valorile funcției arcsin, și anume: numărul π, a cărui definiție a presupus cunoscută lungimea cercului.

Totuși, dacă se definește numărul π (și funcțiile trigonometrice) într-un mod care să nu implice lungimea cercului, de exemplu cu ajutorul seriilor, atunci exemplul precedent constituie o demonstrație a faptului că lungimea cercului este $2\pi R$.

3° Avem $l(P) \leqslant l(C)$, oricare ar fi linia poligonală P înscrisă în curba C. Într-adevăr, prin trecerea de la o diviziune d la o diviziune mai fină, d', avem $l(P) \leqslant l(P')$. Dacă (d_n) este un șir de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$, aranjate după finețe, șirul $(l(P_n))$ este crescător și $l(P_n) \to l(C)$, deci $l(P_n) \leqslant l(C)$.

5. Suprafețe de rotație

În capitolul relativ la studiul suprafețelor în spațiu, se va da definiția ariei acestor suprafețe.

În acest capitol vom defini aria unei suprafețe născute prin rotirea unei *curbe netede* în jurul axei Ox.

Fie f o funcție pozitivă cu *derivată continuă* pe un interval $[a, b]$. Graficul C al acestei funcții este o curbă netedă.

Prin rotirea curbei în jurul axei Ox, ia naștere o suprafață de rotație S. Aria $\sigma(S)$ a acestei suprafețe se definește prin egalitatea

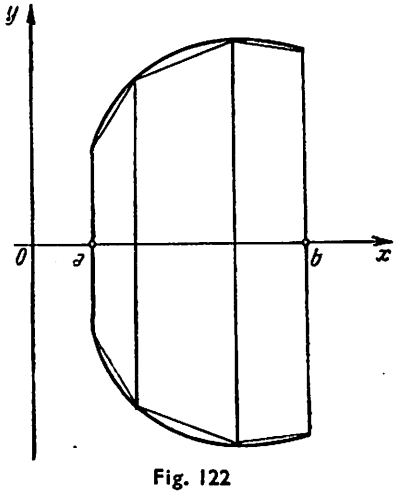


Fig. 122

$$\sigma(S) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Justificarea acestei definiții este următoarea:

Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Pentru fiecare punct x_i, să notăm cu M_i punctul de coordonate $(x_i, f(x_i))$ de pe curba C. Unind aceste puncte, obținem o linie poligonală P, care prin rotație în jurul axei Ox dă naștere unei suprafețe Σ, formată din mai multe trunchiuri de con.

Intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ îi corespunde trunchiul de con cu razele cercurilor de bază $f(x_i)$ și $f(x_{i+1})$ și generatoarea $l(M_i M_{i+1})$. Aria laterală a acestui trunchi de con este deci

$$2\pi \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} l(M_i M_{i+1}) = 2\pi \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + [f(x_{i+1})-f(x_i)]^2} =$$

$$= 2\pi \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_{i+1}-x_i),$$

unde am aplicat teorema creșterilor finite funcției f pe intervalul

$$[x_i, x_{i+1}],\ \xi_i \in [\,x_{i+1}-x_i\,].$$

Aria suprafeței Σ este

$$\sigma(\Sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_{i+1}-x_i).$$

În membrul drept putem face să apară suma integrală

$$\sigma_d(h) = \sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_i)\,(x_{i+1}-x_i)$$

a funcției $h(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$, anume

$$\sigma_d(h) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_{i+1}-x_i).$$

Să arătăm că, dacă luăm diviziunea d suficient de fină, putem realiza ca diferența $\sigma(\Sigma) - \sigma_d(h)$ să fie oricît de mică.

Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Deoarece funcția f este continuă pe intervalul compact $[a, b]$, ea este uniform continuă pe acest interval: numărului $\varepsilon > 0$ ales îi corespunde un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, oricare ar fi punctele x' și x'' din $[a, b]$ cu $|x' - x''| < \delta$, să avem

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2\pi\, l(C)\,(b-a)},$$

unde $l(C)$ este lungimea curbei C.

Fie atunci d o diviziune cu $\nu(d) < \delta$, deci $x_{i+1} - x_i < \delta$ pentru fiecare i, și cu atît mai mult

$$\xi_i - x_i < \delta, \qquad x_{i+1} - \xi_i < \delta,$$

deci

$$|f(\xi_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2\pi\, l(C)(b-a)}$$

$$|f(x_{i+1}) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{2\pi\, l(C)\,(b-a)}$$

și

$$|f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)| \leqslant |f(x_i) - f(\xi_i)| + |f(x_{i+1}) - f(\xi_i)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\pi l(C)\,(b-a)}.$$

Observînd că $\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} = l(M_i\,M_{i+1}) \leqslant l(C)$, avem

$$|\sigma(\Sigma) - \sigma_d(h)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \pi[f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)]\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,(x_{i+1} - x_i)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \pi|f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)|\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,(x_{i+1} - x_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{l(C)\,(b-a)}\, l(C)\,(x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Să luăm acum un șir (d_n) de diviziuni ale intervalului $[a, b]$, cu $\nu(d_n) \to 0$. Să notăm cu Σ_n suprafața de rotație formată din trunchiuri de con, corespunzătoare diviziunii d_n. Din cele de mai sus rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma(\Sigma_n) - \sigma_{d_n}(h)| = 0,$$

deoarece, pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $\nu(d_n) < \delta(\varepsilon)$ și deci

$$|\sigma(\Sigma_n) - \sigma_{d_n}(h)| < \varepsilon.$$

Pe de altă parte, funcția $h = 2\pi f\sqrt{1 + f'^2}$ este continuă, deci integrabilă, și deci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(h) = \int_a^b h(x)\,dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Atunci

$$\sigma(\Sigma_n) = [\sigma(\Sigma_n) - \sigma_{d_n}(h)] + \sigma_{d_n}(h),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\Sigma_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(h) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Pe măsură ce diviziunea d este mai fină, linia poligonală se apropie din ce în ce mai mult, ca formă, de curba C, deci suprafața Σ se apropie din ce în ce mai mult, ca formă, de suprafața S.

Este deci natural să luăm ca arie a suprafeței S un număr $\sigma(S)$, de care aria $\sigma(\Sigma)$ să se apropie din ce în ce mai mult, pe măsură ce diviziunea d este mai fină. Un asemenea număr este integrala funcției $h = 2\pi f\sqrt{1 + f'^2}$. De aceea, se ia, prin definiție:

$$\sigma(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Observații. 1° După ce se va da definiția generală a ariei unei suprafețe în spațiu, egalitatea precedentă va rezulta ca o teoremă.

2° Dacă funcția f nu este pozitivă, atunci

$$\sigma(S) = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Într-adevăr, în acest caz, razele bazelor trunchiului de con construit pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ sînt $|f(x_i)|$ și $|f(x_{i+1})|$. Se alege funcția $h(x) = |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}$ și se procedează ca mai sus.

3° Deoarece ecuația curbei care dă naștere suprafeței S este

$$y = f(x),$$

aria suprafeței S se scrie adesea

$$\sigma(S) = 2\pi \int_a^b |y|\sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

6. Centre de greutate

După cum se știe din fizică, centrul de greutate al unor corpuri simple se poate determina ușor. Dacă un corp are o axă de simetrie, centrul de greutate se află pe această axă.

Dacă se dă un sistem de n corpuri, care au centrele de greutate cu coordonatele respectiv

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n),$$

în raport cu un sistem de axe de coordonate, și masele respectiv

$$m_1, m_2, \ldots, m_n,$$

atunci coordonatele (x_G, y_G, z_G) ale centrului de greutate sînt date de egalitățile:

$$x_G = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum m_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i z_i m_i}{\sum_i m_i}.$$

Dacă cele n corpuri sînt omogene și au aceeași densitate ρ, atunci masele lor sînt proporționale cu volumele lor, $m_i = \rho V_i$, iar coordonatele centrului de greutate sînt date de egalitățile:

$$x_G = \frac{\sum_i x_i v_i}{\sum_i v_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i y_i v_i}{\sum_i v_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i z_i v_i}{\sum_i v_i}.$$

Dacă, în plus, cele n corpuri au formă de plăci plane sau sînt filiforme, masele sînt proporționale cu ariile $m_i = kS_i$, respectiv cu lungimile, $m_i = kl_i$; în acest caz formulele precedente devin

$$x_G = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i}, \quad y_G = \frac{\sum y_i S_i}{\sum S_i}, \quad z_G = \frac{\sum z_i S_i}{\sum S_i},$$

respectiv

$$x_G = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}, \quad y_G = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}, \quad z_G = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i}.$$

Ne propunem acum să definim centrul de greutate al unei suprafețe plane mărginite de o linie curbă.

Fie f o funcție continuă pe un interval $[a, b]$. Să considerăm figura $abBA$ mărginită de axa Ox, curba $y = f(x)$ (graficul funcției f) și dreptele $x = a$, $x = b$. Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$; în fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$ să alegem punctul $\xi_i = \frac{(x_i + x_{i+1})}{2}$ la mijlocul intervalului și să construim dreptunghiul cu baza pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ și înălțimea $f(\xi_i)$.

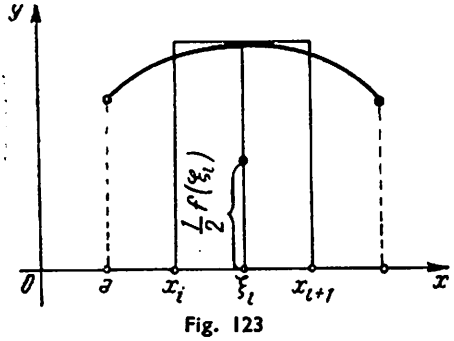


Fig. 123

Centrul de greutate al dreptunghiului este $\left(\xi_i, \frac{1}{2}f(\xi_i)\right)$, iar aria sa este $S_i = f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)$. Pentru sistemul format din cele n dreptunghiuri corespunzătoare diviziunii d, coordonatele centrului de greutate sînt:

$$\bar{x}(d) = \frac{\sum_i \xi_i f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)}{\sum_i f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)}, \quad \bar{y}(d) = \frac{\sum_i \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)}{\sum_i f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)}.$$

Observăm că la numitor se află o sumă integrală a funcției $f(x)$, iar la numărător se află respectiv sumele integrale ale funcțiilor $xf(x)$ și $\frac{1}{2} f^2(x)$. Dacă luăm un șir (d_n) de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$, șirurile de sume

integrale tind respectiv către integralele $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b xf(x)\,dx$, $\int_a^b \frac{1}{2}f^2(x)\,dx$, și deci șirurile $\bar{x}(d_n)$ și $\bar{y}(d_n)$ tind respectiv către rapoartele

$$x_G = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}, \quad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Prin definiție (x_G, y_G) este centrul de greutate al figurii $abBA$.

Exemplu. Se dă figura mărginită de parabola $y^2 = x$ și dreapta $x = 1$ (fig. 125). Se cere centrul său de greutate.

Deoarece figura are axa Ox ca axă de simetrie, centrul de greutate se află pe această axă, deci $y_G = 0$. Rămîne de calculat x_G. Dacă notăm cu S_1 și S_2 ariile celor două părți ale figurii, separate de axa Ox, și cu x_1, x_2 abscisele centrelor lor de greutate, avem $S_1 = S_2$, $x_1 = x_2$ și

$$x_G = \frac{x_1S_1 + x_2S_2}{S_1 + S_2} = \frac{x_1S_1 + x_1S_1}{S_1 + S_2} = x_1.$$

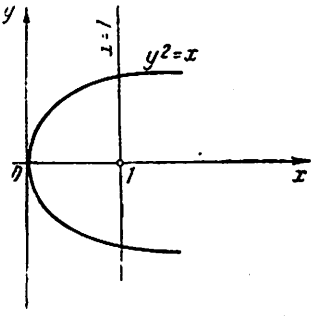


Fig. 124

Dar

$$x_1 = \frac{\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx}{\int_0^1 \sqrt{x}\,dx};$$

$$\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5};$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3};$$

deci

$$x_G = x_1 = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}.$$

7. Lucrul mecanic

Dacă un corp se deplasează rectiliniu, pe distanța d, sub acțiunea unei forțe constante F, dirijate de-a lungul direcției de deplasare, lucrul mecanic efectuat de forța F pe distanța d este egal cu produsul Fd dintre forță și deplasare.

Să considerăm acum un mobil care se deplasează de-a lungul axei Ox, de la a la b, sub acțiunea unei forțe $F(x)$, dirijată de-a lungul axei Ox, și care este funcție *continuă* de x. Ne propunem să definim și în acest caz lucrul mecanic efectuat de forța $F(x)$ de la a la b.

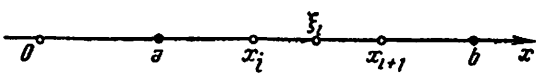


Fig. 125

Să luăm o diviziune d a intervalului $[a, b]$

$$d : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

În fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$ să alegem un punct ξ_i și să considerăm produsul $F(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)$. Acest produs reprezintă lucrul efectuat pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ de o forță constantă, egală cu $F(\xi_i)$.

Suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

reprezintă lucrul mecanic total efectuat de diferitele forțe constante $F(\xi_i)$ pe intervalele corespunzătoare $[x_i, x_{i+1}]$. Suma precedentă este o sumă integrală a funcției $F(x)$. Intuitiv, ne dăm seama ușor că luînd diviziuni din ce în ce mai fine, cu intervalele parțiale din ce în ce mai mici, variația forței $F(x)$ într-un asemenea interval parțial este din ce în ce mai mică, iar forța variabilă $F(x)$ diferă din ce în ce mai puțin, pe un interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$ de forța constantă $F(\xi_i)$. Dar, pe măsură ce luăm diviziuni mai fine, lucrul mecanic

$$\sum_{i=0}^{n} F(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i),$$

efectuat de forțele constante $F(\xi_i)$, se apropie din ce în ce mai mult de integrala funcției $f(x)$:

$$\int_a^b F(x)\,dx.$$

De aceea, prin definiție, lucrul mecanic L efectuat de forța $F(x)$ pe intervalul $[a, b]$ se definește prin egalitatea

$$L = \int_a^b F(x)\,dx.$$

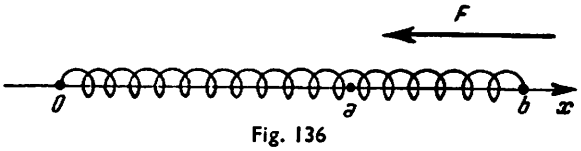


Fig. 136

Exemplu. Un corp este atras de un resort, fixat cu un capăt într-un punct O, cu o forță proporțională cu distanța de la poziția corpului la punctul O. Să se afle lucrul mecanic cînd corpul se deplasează de la b la a (fig. 126).

Avem $F(x) = -k(x)$, unde $k > 0$ este un coeficient de proporționalitate. Am luat forța cu semnul $-$, deoarece ea este dirijată în sensul negativ al axei Ox. Avem:

$$L = \int_b^a F(x)\,dx = -\int_b^a k\,x\,dx = -\,k\,\frac{x^2}{2}\Big|_b^a = \frac{k}{2}\,(b^2 - a^2).$$

Capitolul VIII

FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

§ 1. Spațiile R^n

1. Spațiul cu n dimensiuni

Notăm cu R^n produsul cartezian a n mulțimi egale cu dreapta reală R, $(n \in N)$:

$$R^n = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ ori}}.$$

Mulțimea R^n este formată din toate grupele ordonate posibile de n numere reale $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Un element al mulțimii R^n va fi notat cu o singură literă, x:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

În cazul cînd $n = 1$, mulțimea R^1 este dreapta reală R.

Pentru $n = 2$, R^2 este mulțimea perechilor de numere reale (x_1, x_2), sau mulțimea punctelor din plan.

Din această cauză R^2 se numește spațiul cu două dimensiuni. Punctele din planul R^2 vor fi notate adesea (x, y), în loc de (x_1, x_2). Totdeauna va reieși din text dacă prin (x, y) se înțelege un punct din plan sau un interval de pe dreaptă.

Pentru $n = 3$, R^3 este mulțimea grupelor ordonate de trei numere reale (x_1, x_2, x_3), sau a punctelor din spațiu. Din această cauză R^3 se numește spațiul cu trei dimensiuni. Punctele din spațiu vor fi notate adesea (x, y, z), în loc de (x_1, x_2, x_3).

Prin analogie, R^n se numește spațiul cu n dimensiuni, iar elementele sale se numesc puncte. Dacă

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

este un punct din R^n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *coordonatele* sau *proiecțiile* punctului x; x_1 este prima coordonată (sau proiecția pe prima axă), x_2 este a doua coordonată (sau proiecția pe a doua axă) etc.

Funcția $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to x_n$, care face să corespundă fiecărui punct din R^n, coordonata sa de ordin i, se numește *proiecția* pe axa de ordin i și se notează cu pr_i:

$$\mathrm{pr}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1,\ \mathrm{pr}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_2, \ldots,\ \mathrm{pr}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n.$$

2. Structura de spațiu vectorial pe R^n

Pe spațiul R^n se pot defini o parte din structurile de pe dreaptă și anume structura algebrică și structura topologică. Se poate defini și o structură de ordine, dar nu este utilă pentru studiul care urmează.

Începem cu structura algebrică.

I) *Adunarea*. Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ două puncte din R^n. Se definește suma $x + y$ a acestor puncte astfel:

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n).$$

A aduna punctele x și y revine la a le aduna coordonatele de același ordin.

Punctul $O = (0, 0, \ldots, 0)$ care are toate coordonatele nule se numește *originea* spațiului R^n.

Punctul $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ se numește *opusul* punctului $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Se verifică imediat următoarele proprietăți ale adunării:

1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + 0 = x$;
4) $x + (-x) = 0$.

Așadar, R^n este *grup comutativ* pentru această adunare.

II) *Înmulțirea cu scalari*. Pentru orice număr $\alpha \in R$ și orice punct $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ din R^n se definește produsul αx (sau $x\alpha$) astfel:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

A înmulți pe x cu α revine la a înmulți toate coordonatele lui x cu α.

Se verifică imediat următoarele proprietăți:

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
8) $1 \cdot x = x$.

Așadar, R^n este un *spațiu vectorial* pentru operațiile $x + y$ și αx. De aceea punctele x din R^n se mai numesc și *vectori*, iar coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se mai numesc *componentele vectorului* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Numerele reale α iau în acest caz numele de *scalari*, iar produsul αx se numește *produsul cu scalari*.

III) *Înmulțirea vectorilor.* Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ două puncte din R^n. Se definește produsul xy al acestor puncte astfel:

$$xy = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n).$$

A înmulți punctele x și y revine la a le înmulți coordonatele de același ordin.

Punctul $e = (1, 1, \ldots, 1)$ este element neutru pentru înmulțire. Dacă $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $\ldots$, $x_n \neq 0$, atunci punctul $y = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$ este inversul punctului $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Se verifică imediat următoarele proprietăți:

9) $x(yz) = (xy)z$;
10) $xy = yx$;
11) $x(y + z) = xy + xz$;
12) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Așadar R^n este o *algebră* pentru operațiile $x + y$, αx și xy.

În cele ce urmează va interesa mai mult structura de spațiu vectorial pe R^n și mai puțin cea de algebră.

Pentru exemplificare, să arătăm la ce revine adunarea, înmulțirea și înmulțirea cu scalari în cazul spațiilor R^1 și R^2.

În spațiul $R^1 = R$, elementele sînt numere. Adunarea $x + y$ și înmulțirea xy se reduc la adunarea și înmulțirea obișnuită a numerelor x și y, iar produsul cu scalari αx se reduce, de asemenea, la înmulțirea obișnuită a numerelor α și x.

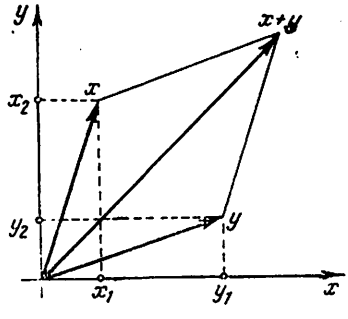


Fig. 127

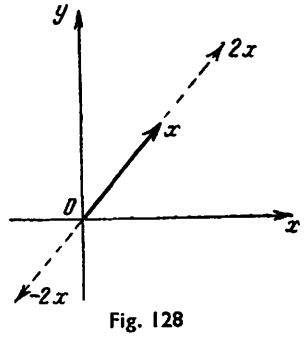


Fig. 128

Dacă $x = (x_1, x_2)$ și $y = (y_1, y_2)$ sînt două puncte din R^2, punctul $x + y$ este al patrulea vîrf al paralelogramului cu celelalte trei vîrfuri în O, x și y.

Dacă se identifică punctul x cu vectorul său de poziție $\vec{x}$, coordonatele x_1 și x_2 ale punctului x sînt componentele vectorului $\vec{x}$. Această identificare justifică denumirea de vectori dată punctelor x.

Adunarea punctelor din plan se face deci după regula paralelogramului, de adunare a forțelor sau a vectorilor, așa cum se definește în fizică.

Înmulțirea cu scalari α x revine la amplificarea cu $|\alpha|$ a lungimii vectorului, păstrînd sensul vectorului dacă $\alpha > 0$ sau schimbîndu-i sensul dacă $\alpha < 0$.

Vectorii $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,..., $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ formează o *bază* în spațiul R^n; aceasta înseamnă că, dacă $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un punct din R^n, atunci

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i.$$

Așadar, orice vector x este o combinație liniară a vectorilor din bază, coeficienții combinației liniare fiind coordonatele lui x.

În spațiul R^3, vectorii din bază e_1, e_2, e_3 se mai notează respectiv $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Un vector (x, y, z) se scrie atunci $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

3. Produsul scalar

În afară de operațiile $x + y$ și αx al căror rezultat este un *vector* din R^n, se mai definește o operație între vectori din R^n, al cărui rezultat este însă un număr (scalar); de aceea, această operație se numește *produs scalar*.

Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ două puncte din R^n. Se definește *produsul scalar* dintre x și y ca fiind *numărul*, notat $(x\,|\,y)$, dat de egalitatea

$$(x\,|\,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Produsul scalar $(x\,|\,y)$ este deci suma produselor coordonatelor de același ordin ale vectorilor x și y.

Produsul scalar se mai notează, adesea, cu $<x, y>$ sau $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

Observații. 1° În spațiul R^1, produsul scalar coincide cu produsul obișnuit: $(x\,|\,y) = xy$.

2° În spațiul R^2 și R^3, produsul scalar $(x\,|\,y)$ coincide cu produsul scalar definit în fizică, și anume produsul lungimilor vectorilor cu cosinusul unghiului format de cei doi vectori.

Produsul scalar al vectorului x cu el însuși este

$$(x\,|\,x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Se observă că $(x\,|\,x) \geqslant 0$. Avem $(0\,|\,0) = 0$; reciproc, dacă $(x\,|\,x) = 0$, atunci $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, deci $x_i = 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, adică $x = (0, 0, \ldots, 0)$.

Proprietățile produsului scalar sînt următoarele:

1) $(x\,|\,x) \geqslant 0$; $(x\,|\,x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$;
2) $(x\,|\,y) = (y\,|\,x)$;
3) $(x + y\,|\,z) = (x\,|\,z) + (y\,|\,z)$;
4) $\alpha(x\,|\,y) = (\alpha x\,|\,y) = (x\,|\,\alpha y)$;
5) $(zx\,|\,y) = (x\,|\,zy)$

Se deduce, de asemenea, că $(0\,|\,x) = (0\,|\,x) = 0$, deoarece

$$(0\,|\,x) = (0 + 0\,|\,x) = (0\,|\,x) + (0\,|\,x).$$

Exemple. $(e_1 \mid e_1) = 1$, $(e_2 \mid e_2) = 1$, ..., $(e_n\,|e_n) = 1$; $(e_1\,|e_2) = 0$; $(e_1\,|e_3) = 0$; $(e_2\,|e_3) = 0$,..., $(e_i\,|e_j) = 0$ dacă $i \neq j$,

Dacă folosim simbolul lui Kronecker, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } i = j \\ 0 \text{ dacă } i \neq j, \end{cases}$

atunci

$$(e_i \mid e_j) = \delta_{ij}.$$

Se spune că doi vectori x și y din R^n sînt *ortogonali* dacă produsul lor scalar este zero: $(x \mid y) = 0$. Astfel, dacă $i \neq j$, vectorii e_i și e_j sînt ortogonali (vectorii din bază sînt ortogonali doi cîte doi).

4. Norma în spațiul R^n

Pe dreaptă s-a definit distanța $|x - y|$ între două puncte x și y, cu ajutorul modulului.

În spațiul R^n se definește *norma* unui vector x, notată $\|x\|$, cu ajutorul căreia se definește apoi distanța dintre două puncte din R^n.

Norma $\|x\|$ a unui vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este numărul dat de egalitățile

$$\|x\| = \sqrt{(x\,|x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Rezultă că:

$$\|x\|^2 = (x\,|x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Așadar, norma $\|x\|$ se definește cu ajutorul produsului scalar.

Pentru vectorii din bază avem $\|e_1\| = 1$, $\|e_2\| = 1$, ..., $\|e_n\| = 1$.

În particular, $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$, $\|\vec{k}\| = 1$.

Proprietățile normei sînt asemănătoare cu cele ale modulului:

1) $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inegalitatea triunghiului).
4) $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$

Din aceste proprietăți rezultă încă următoarele proprietăți:

5) $\|-x\| = \|x\|$.
6) $\|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
7) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\|$.

Primele două proprietăți se deduc imediat din definiția normei și proprietățile produsului scalar.

De exemplu, proprietatea 2 se demonstrează astfel:

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x\,|\,\alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x\,|\,x)} = |\alpha|\,\sqrt{(x\,|\,x)} = |\alpha|\,\|x\|.$$

Luînd apoi $\alpha = -1$, obținem proprietatea 5. Proprietățile 6 și 7 se deduc din proprietatea 3 la fel ca și proprietățile corespunzătoare ale modulului. Proprietatea 4 se demonstrează astfel:

$$\|x\,y\|^2 = (xy\,|\,xy) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} x_i^2 y_j^2 = \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_j^2\right) = \|x\|^2 \|y\|^2,$$

de unde $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. Rămîne de demonstrat numai proprietatea 3. Pentru aceasta vom demonstra mai întîi două inegalități.

1) $|(x\,|\,y)| \leqslant \dfrac{\|x\|^2}{2} + \dfrac{\|y\|^2}{2}$.

Pentru demonstrație se folosește următoarea inegalitate dintre numere

$$|ab| \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

(deoarece $0 \leqslant (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leqslant a^2 + b^2 + 2|ab|$).

Atunci:

$$|(x\,|\,y)| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i\,y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^2}{2} + \frac{y_i^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2,$$

de unde rezultă inegalitatea 1.

Să observăm că, dacă $x \neq 0$, atunci, în baza proprietății 2,

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|x\|}\,x\right\| = \frac{1}{\|x\|}\,\|x\| = 1.$$

O altă inegalitate de care avem nevoie este

2) *Inegalitatea lui Schwarz*: $|(x\,|\,y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.

Dacă $\|x\|\,\|y\| = 0$, atunci sau $\|x\| = 0$, deci $x = 0$, sau $\|y\| = 0$, deci $y = 0$. În ambele cazuri avem $(x\,|\,y) = 0$, deci inegalitatea lui Schwarz este verificată cu egalitate.

Să presupunem acum că $\|x\|\,\|y\| \neq 0$; atunci $\|x\| \neq 0$ și $\|y\| \neq 0$, deci

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1 \text{ și } \left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1.$$

Să aplicăm inegalitatea 1 vectorilor

$$x' = \frac{x}{\|x\|} \text{ și } y' = \frac{y}{\|y\|}$$

ținînd seama de faptul că $\|x'\| = 1$ și $\|y'\| = 1$:

$$|(x'\,|\,y')| \leqslant \frac{\|x'\|}{2} + \frac{\|y'\|^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

adică

$$\left(\frac{x}{\|x\|}\,\middle|\,\frac{y}{\|y\|}\right) \leqslant 1.$$

Înmulțind ambii membri cu $\|x\|\,\|y\|$ se obține inegalitatea lui Schwarz. Putem acum trece la demonstrarea inegalității triunghiului:

$$\|x+y\|^2 = (x+y\,|\,x+y) = (x\,|\,x) + (y\,|\,y) + 2(x\,|\,y) \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,|(x\,|\,y)\,| \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| =$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2,$$

de unde

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

O b s e r v a ț i i. 1° În spațiul $R^1 = R$, norma $\|x\|$ a unui număr x este egală cu modulul său $|x|$:

$$\|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

2° În planul R^2 avem

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Norma $\|x\|$ reprezintă distanța de la origine la punctul x. Inegalitatea triunghiului exprimă în acest caz faptul că într-un triunghi, o latură este mai mică decît suma celorlalte două laturi.

De asemenea, în spațiul R^3 norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ reprezintă distanța de la origine la punctul x (lungimea vectorului de poziție al punctului x).

3° Un spațiu vectorial E pe care s-a definit o normă $\|x\|$ cu proprietățile 1, 2 și 3 se numește *spațiu vectorial normat* sau *spațiu normat*. Dacă, în plus, E este o algebră, iar norma verifică și condiția 4, atunci E se numește *algebră normată*.

Așadar R^n este un *spațiu normat* și chiar o *algebră normată*.

Pe spațiul R^n se pot defini și alte norme, de exemplu

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

sau

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|,$$

Cînd vrem să facem distincție, norma definită mai înainte se notează $\|x\|_2$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Se poate arăta că $\|x\|_1$ și $\|x\|_\infty$ verifică proprietățile 1, 2 și 3 ale normei.

Cele trei norme sînt *diferite* și definesc, pe același spațiu vectorial R^n, spații normate diferite.

În continuare, cînd va fi vorba de spațiul normat R^n, se va subînțelege că ne referim la norma $\|x\|_2$.

Din punct de vedere topologic, cele trei norme sînt însă echivalente, în sensul că definesc aceeași

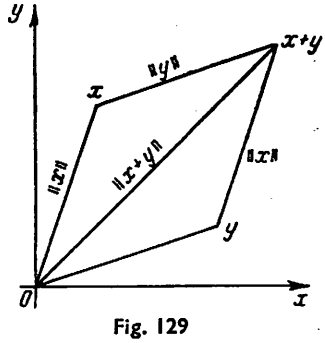


Fig. 129

topologie pe R^n. Mai precis, convergența, mulțimile deschise, mulțimile închise etc. sînt aceleași, oricare ar fi norma folosită.

4° Norma $\|x\|_2$ a fost dedusă din produsul scalar $\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)}$. Normele $\|x\|_1$ și $\|x\|_\infty$ nu se pot însă deduce dintr-un produs scalar.

5. Distanța în R^n

Cu ajutorul normei se poate defini în R^n distanța dintre două puncte la fel cum s-a definit în R^1 distanța cu ajutorul modulului.

Prin definiție, distanța $d(x, y)$ dintre două puncte x și y din R^n este dată de egalitatea

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Proprietățile distanței se deduc imediat din proprietățile normei:

1) $d(x, y) \geqslant 0$; $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$ (inegalitatea triunghiului).

Să demonstrăm ultima proprietate:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leqslant \|x - z\| + \|y - z\| =$$

$$= d(x, z) + d(z, y).$$

Observații. 1° Dacă pe o mulțime E s-a definit o funcție reală $(x, y) \to d(x, y)$, $(x, y \in E)$, cu proprietățile 1, 2 și 3 de mai sus, această funcție se numește *metrică* sau *distanță*, iar E se numește *spațiu metric*.

Pe un spațiu normat se poate defini o distanță cu ajutorul normei, $d(x, y) = \|x - y\|$. Un spațiu normat este deci și un spațiu vectorial metric.

Există însă spații vectoriale metrice, în care distanța nu poate fi dedusă dintr-o normă.

2° Pe spațiul R^n, normele $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ și $\|x\|_\infty$ definesc distanțe *diferite*. În continuare vom considera pe R^n numai distanța definită de norma $\|x\|_2$.

3° Pe dreapta reală, unde norma este egală cu modulul, avem $d(x, y) = |x - y|$, deci distanța definită mai sus este aceeași cu distanța obișnuită.

În planul R^2 avem

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

deci aceasta este distanța obișnuită între două puncte din plan.

§ 2. Topologia în R^n

1. Vecinătățile unui punct din R^n

Fie n intervale pe o dreaptă, I_1, I_2, ..., I_n. Produsul lor cartezian $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n \subset R^n$ se numește *interval n-dimensional*:

$$I = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, \ldots, x_n \in I_n\}.$$

Intervalele I_1, I_2, ..., I_n se numesc *laturile* intervalului n-dimensional. Avem

$$\mathrm{pr}_1 I = I_1, \mathrm{pr}_2 I = I_2, \ldots, \mathrm{pr}_n I = I_n.$$

Laturile unui interval n-dimensional pot fi închise la un capăt sau la ambele capete, mărginite sau nemărginite.

În planul R^2, un interval bidimensional cu laturile mărginite este un dreptunghi.

În spațiul R^3, un interval tridimensional cu laturile mărginite este un paralelipiped.

Dacă *toate* intervalele I_1, I_2, ..., I_n sînt *deschise*, atunci I se numește *interval n-dimensional deschis* (fig. 131).

Dacă *toate* intervalele I_1, I_2, ..., I_n sînt *închise*, atunci I se numește *interval n-dimensional închis* (fig. 132).

Dacă *toate* intervalele I_1, I_2, ..., I_n sînt *mărginite*, atunci I se numește *interval n-dimensional mărginit* (fig. 133).

În continuare, prin interval n-dimensional vom înțelege interval n-dimensional *deschis și mărginit*, afară de cazul cînd se va specifica în mod expres contrariul.

Fie acum a un punct din spațiul R^n și $r > 0$ un număr.

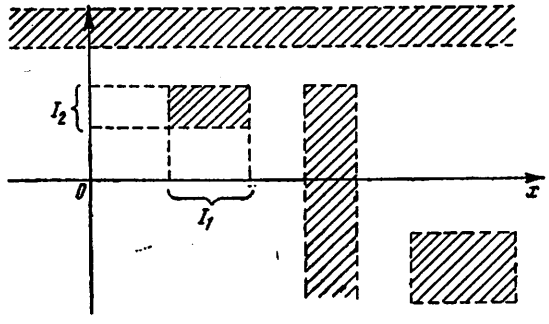


Fig. 130

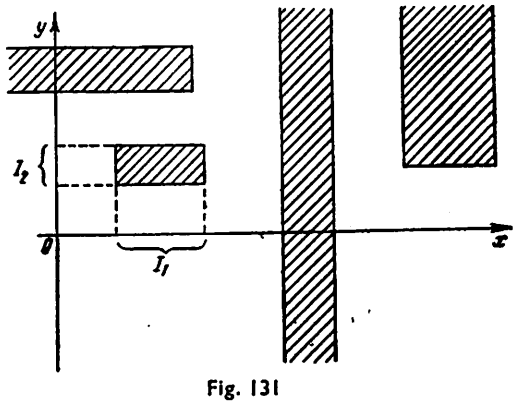


Fig. 131

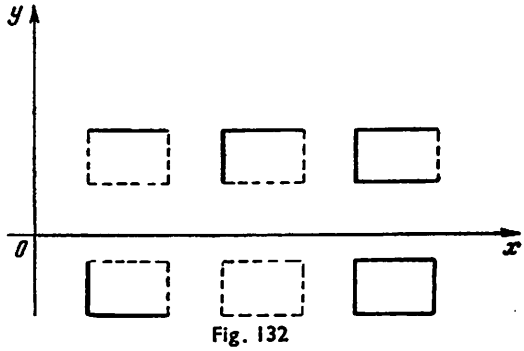


Fig. 132

Vom numi sferă (deschisă), cu centrul în a și raza r, mulțimea

$$V_r(a) = \{x \mid x \in R^n, \quad \|x - a\| < r\},$$

formată din toate punctele $x \in R^n$ — a căror distanță la a este $< r$.

În cazul spațiului $R^1 = R$, o sferă $V_r(a)$ este un interval $(a - r, a + r)$ cu centrul în a.

În cazul spațiului R^2, o sferă $V_r(a)$ este un cerc cu centrul în a și raza r (punctele din interiorul cercului, fără punctele de pe circumferință).

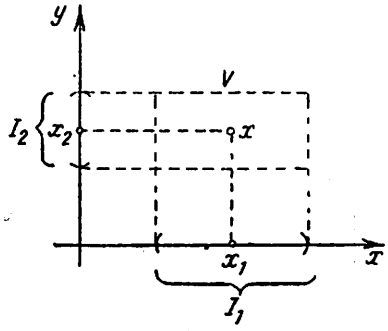


Fig. 133

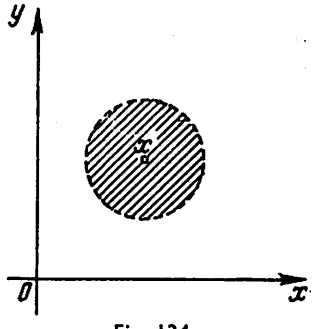


Fig. 134

În cazul spațiului R^3, o sferă $V_r(a)$ este o sferă cu centrul în a și raza r (punctele din interiorul sferei, fără punctele de pe suprafața sferei).

Mulțimea

$$W_r(a) = \{x \mid x \in R^n, \quad \|x - a\| \leqslant r\}$$

se numește *sferă închisă* cu centrul în a și raza r.

În continuare, cînd va fi vorba despre sfere, se va subînțelege că sînt sfere deschise.

Propoziție. Orice sferă cu centrul în a conține un interval n-dimensional care conține pe a și, reciproc, orice asemenea interval conține o sferă cu centrul în a:

Fie $V_r(a)$ o sferă cu centrul în a și cu raza r; avem: $x \in V_r(a)$ dacă și numai dacă $\|x - a\| < r$ sau

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|^2} < r,$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Să considerăm acum intervalele unidimensionale:

$$I_1 = \left(a_1 - \frac{r}{\sqrt{n}}, \; a_1 + \frac{r}{\sqrt{n}}\right), \ldots, I_n = \left(a_n - \frac{r}{\sqrt{n}}, \; a_n + \frac{r}{\sqrt{n}}\right);$$

fie $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$. Evident, $a_1 \in I_1, \ldots, a_n \in I_n$, deci $a \in I$. Să arătăm că $I \subset V_r(a)$. Fie $x \in I$ oarecare. Aceasta înseamnă că $x_i \in I_i$ sau $|x_i - a_i| < \frac{r}{\sqrt{n}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Atunci $|x_i - a_i|^2 < \frac{r^2}{\sqrt{n}}$, deci

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2} < \sqrt{n\frac{r^2}{n}} = r,$$

adică $\|x - a\| < r$, sau $x \in V_r(a)$. Aşadar, $I \subset V_r(a)$. Reciproc, fie $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ un interval n-dimensional care conţine pe a; intervalul I conţine un interval $J = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$ cu centrul în a, şi cu intervalele $J_1, \ldots, J_n$ de aceeaşi lungime:

$$J_1 = (a_1 - r, a_1 + r) \subset I_1, \ldots, J_n = (a_n - r, a_n + r) \subset I_n.$$

Să arătăm că $V_r(a) \subset J$, de unde va rezulta că $V_r(a) \subset I$.
Într-adevăr, dacă $x \in V_r(a)$, atunci $\|x - a\| < r$ sau

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2} < r,$$

deci $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 < r^2$ şi atunci, cu atît mai mult $|x_i - a_i|^2 < r^2$ sau

$$|x_i - a_i| < r, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

adică $x_1 \in J_1$, $x_2 \in J_2$, ..., $x_n \in J_n$, de unde $x \in J$. Aşadar, $V_r(a) \subset J \subset I$.

Definiţie. **Se numeşte vecinătate a unui punct $a \in R^n$, orice mulţime care conţine o sferă $V_r(a)$ cu centrul în a.**

Evident, orice sferă cu centrul în a este o vecinătate a lui a. Din propoziţia precedentă deducem că orice interval n-dimensional care conţine pe a este o vecinătate a lui a. Mai mult, din propoziţia precedentă rezultă imediat următoarea

Propoziţie. **O mulţime V este vecinătate a unui punct $a \in R^n$, dacă şi numai dacă există un interval n-dimensional I, astfel ca $a \in I \subset V$.**

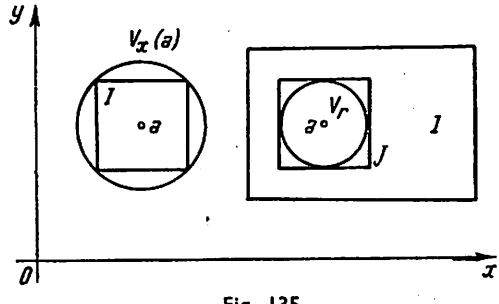


Fig. 135

Vecinătățile unui punct $a \in R^n$ au aceleași proprietăți ca și vecinătățile unui punct de pe dreaptă.

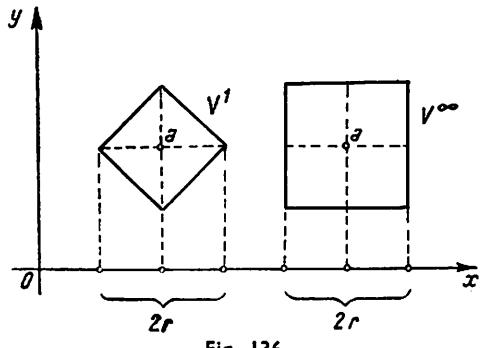


Fig. 136

Observație. Cu ajutorul normelor $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ și $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ se pot defini de asemenea „sferele"

$$V_r^1(a) = \{x \mid x \in R, \|x - a\|_1 < r\} \text{ și}$$
$$V_r^\infty(a) = \{x \mid x \in R, \|x - a\|_\infty < r\}.$$

Fiecare din acestea definește aceeași topologie pe R^n ca și vecinătățile precedente.

În plan, $V_r^1(a)$ este un pătrat cu centrul în a, cu diagonala $2r$ și laturile paralele cu bisectoarele axelor de coordonate. Ar putea fi numită vecinătate rombică.

Tot în plan, $V_r^\infty(a)$ este un pătrat cu centrul în a și latura $2r$, cu laturile paralele cu axele. Se numește vecinătate pătratică.

2. Mulțimi deschise

O dată definite vecinătățile unui punct în spațiul R^n, toate considerațiile relative la mulțimile de pe dreaptă se transpun fără nici o modificare la mulțimi din R^n. Demonstrațiile relative la mulțimile de pe dreaptă, în care intervine modulul $|x|$, se transpun de asemenea în spațiul R^n, înlocuind modulul $|x|$ cu norma $\|x\|$ (adică folosind vecinătățile sferice).

Fie A o submulțime a spațiului R^n și un punct $a \in A$.

Vom spune că a este *punct interior al lui* A, dacă există o vecinătate V a lui a, conținută în A,

$$a \in V \subset A,$$

adică dacă A este ea însăși o vecinătate a lui a.

Mulțimea punctelor interioare ale lui A se numește *interiorul* lui A și se notează Int A sau $\mathring{A}$. Evident, $\mathring{A} \subset A$.

O mulțime este *deschisă* dacă este formată numai din puncte interioare, adică dacă este egală cu interiorul său, $A = \text{Int } A$. Așadar, o mulțime este deschisă dacă și numai dacă este vecinătatea fiecărui punct al său.

Exemple de mulțimi deschise: sferele (deschise), intervalele deschise n-dimensionale, mulțimea vidă $\varnothing$, spațiul total R^n.

Se demonstrează ca și pentru mulțimile deschise de pe dreaptă că:

1) Reuniunea unei familii oarecare de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

2) Intersecția unei familii *finite* de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

Propoziție. Proiecțiile unei mulțimi deschise $G \subset R^n$ sînt mulțimi deschise pe dreaptă.

Fie $G_1 = \mathrm{pr}_1 G$. Să arătăm că G_1 este formată numai de puncte interioare, de unde va rezulta că G_1 este deschisă. Fie $x_1 \in G_1$ oarecare. Există un punct $x \in G$ astfel ca $x_1 = \mathrm{pr}_1 x$. Dar G este deschisă, deci x este punct interior al său. Există deci un interval n-dimensional I a lui x, astfel ca $x \in I \subset G$. Trecînd la proiecții, obținem $\mathrm{pr}_1 x \in \mathrm{pr}_1 I \subset \mathrm{pr}_1 G$, adică, notînd $I_1 = \mathrm{pr}_1 I$, avem $x_1 \in I_1 \subset G_1$ și I_1 este un interval deschis, deci x_1 este un punct interior al lui G_1.

Pentru celelalte proiecții, demonstrația se face la fel.

3. Mulțimi închise. Frontieră

Un punct $a \in R^n$ este *aderent* mulțimii A, dacă orice vecinătate V a lui a conține cel puțin un punct $x \in A$, adică dacă

$$V \cap A \neq \emptyset.$$

Dacă $a \in A$, atunci a este punct aderent al lui A, pentru că, oricare ar fi vecinătatea V a lui a, avem $a \in V \cap A$ (eventual putem avea $V \cap A = \{a\}$).

Pot exista însă puncte aderente mulțimii A, fără să aparțină lui A.

Mulțimea punctelor aderente lui A se numește *aderența lui A*, sau *închiderea lui A* și se notează $\bar{A}$.

Evident, $A \subset \bar{A}$.

O mulțime A este *închisă* dacă este egală cu închiderea sa, $A = \bar{A}$.

Se demonstrează ca și pe dreaptă că o mulțime A este închisă, dacă și numai dacă complementara sa $\mathbf{C}A$ este deschisă.

Exemple de mulțimi închise: sferele închise $W_r(a)$, intervalele închise n-dimensionale, R^n, $\emptyset$, mulțimile finite.

De asemenea, se demonstrează ca și pentru mulțimile închise de pe dreaptă că:

1) Reuniunea unei familii finite de mulțimi închise este o mulțime închisă.

2) Intersecția unei familii oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă.

Un punct $a \in R$ este *punct frontieră* al lui A, dacă este aderent atît lui A, cît și lui $\mathbf{C}A$, adică dacă orice vecinătate V a lui a conține și puncte din A și puncte din $\mathbf{C}A$, $V \cap A \neq \emptyset$, $V \cap \mathbf{C}A \neq \emptyset$.

Mulțimea punctelor frontieră ale lui A se numește *frontiera* lui A și se notează $\mathrm{Fr}\, A$.

Avem $\mathrm{Fr}\, A = \mathrm{Fr}\, \mathbf{C}A$ și $\mathrm{Fr}\, A = \bar{A} - \mathrm{Int}\, A$.

4. Puncte de acumulare

Un punct $a \in R^n$ este *punct de acumulare* pentru mulțimea A, dacă orice vecinătate V a lui a conține cel puțin un punct $x \neq a$ din A. Un punct de acumulare al lui A poate să aparțină lui A, sau să nu-i aparțină.

Rezultă că orice punct de acumulare al lui A este în același timp punct aderent al lui A, deci mulțimea punctelor de acumulare ale lui A este conținută în închiderea $\bar{A}$ al lui A.

Un punct a aderent lui $A (a \in \bar{A})$, care nu aparține lui $A, (a \notin A)$, este în mod necesar punct de acumulare al lui A.

Punctele lui A nu sînt în mod necesar puncte de acumulare ale lui A. Punctele lui A care nu sînt de acumulare se numesc puncte *izolate*. Așadar, un punct $b \in A$ este punct izolat, dacă există o vecinătate V a lui b, care nu mai conține nici un alt punct din A, afară de b:

$$V \cap A = \{b\}.$$

Se demonstrează, ca și pe dreaptă, că a este punct de acumulare al lui A, dacă și numai dacă, orice vecinătate a lui a conține o infinitate de puncte din A (adică mulțimea $V \cap A$ este infinită). Rezultă că o mulțime finită nu are nici un punct de acumulare.

O mulțime A este închisă dacă și numai dacă își conține toate punctele sale de acumulare.

5. Mulțimi mărginite. Mulțimi compacte. Mulțimi conexe

Se spune că o mulțime $A \subset R^n$ este *mărginită*, dacă există o sferă, pe care-o putem presupune cu centrul în origine, care conține mulțimea A. Aceasta înseamnă că există un număr M astfel încît pentru orice $x \in A$ să avem $\| x \| \leqslant M$.

A spune că mulțimea A este mărginită înseamnă, de asemenea, că $\sup_{x \in A} \| x \| < +\infty$.

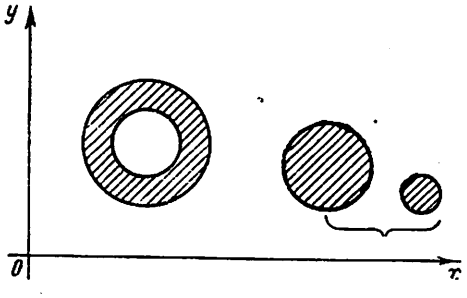


Fig. 137

Observație. Deoarece în spațiul R^n nu mai avem o relație de ordine, nu se mai pot defini mulțimi majorate sau minorate, și nici marginile unei mulțimi.

Mulțimile închise și mărginite din R^n se numesc *mulțimi compacte*.

Orice mulțime finită este închisă și mărginită, deci este compactă.

Orice sferă închisă și orice interval n-dimensional închis și mărginit sînt mulțimi compacte.

Sferele deschise și intervalele deschise n-dimensionale nu sînt compacte.

O mulţime $A \subset R$ este *conexă*, dacă nu există nici o pereche de mulţimi *deschise* G_1 şi G_2 astfel ca:

$$A \subset G_1 \cup G_2,\ A \cap G_1 \neq \Phi,\ A \cap G_2 \neq \Phi \text{ şi } (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \Phi.$$

În limbajul obişnuit, a spune că mulţimea A este conexă revine la aceea că „este formată dintr-o singură bucată".

Sferele şi intervalele n-dimensionale sînt conexe.
În plan, o coroană circulară este conexă.
O reuniune de două cercuri închise şi disjuncte nu este conexă.

O mulţime deschisă şi conexă se numeşte *domeniu*.

§ 3. Şiruri de puncte din spaţiul R^n

1. Şiruri convergente. Proprietăţi

O funcţie $f: N \to R^n$ definită pe mulţimea N a numerelor naturale, cu valori în R^n, se numeşte *şir de puncte din spaţiul* R^n.

Vom nota un şir de puncte din R^n, ca de obicei

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots$$

sau, prescurtat: $(x_k)_{k \in N}$ sau, mai simplu, (x_k).

Şirurile convergente de puncte din R^n se definesc la fel ca şirurile convergente de numere.

Definiţie. Un punct $x_0 \in R^n$ este limita unui şir (x_k) de puncte din R^n, dacă în afara fiecărei vecinătăţi a lui x_0 se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului. Se scrie $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x_0$ sau $x_k \to x_0$.

Dacă $V_\varepsilon(x_0)$ este o vecinătate a lui x_0, atunci relaţia $x_k \in V_\varepsilon(x_0)$ este echivalentă cu $\| x_k - x_0 \| < \varepsilon$.

Obţinem astfel o definiţie echivalentă a limitei unui şir de puncte din R^n, dată de:

Propoziţia 1. Un punct $x_0 \in R^n$ este limita unui şir (x_k) de puncte din R^n, dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $k \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $\|x_k - x_0\| < \varepsilon$.

Din propoziția următoare rezultă o definiție echivalentă cu cea de mai sus, în care se folosește convergența șirului normelor, care este un șir de *numere*.

Propoziția 2. $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ **dacă și numai dacă** $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_0\| = 0$.

Demonstrația rezultă imediat din propoziția 1.

Șirurile care au limită se numesc *șiruri convergente*.

Toate proprietățile șirurilor convergente de numere, în care nu intervine relația de ordine, se păstrează și pentru șirurile convergente de puncte din spațiul R^n și demonstrațiile sînt aceleași sau se deduc, mai simplu, din proprietățile corespunzătoare ale șirurilor de numere:

1) *Limita unui șir convergent este unică.*

Să presupunem, prin absurd, că $x_k \to x_0$ și $x_k \to x_0'$, iar $x_0 \neq x_0'$. Aceasta înseamnă că $\|x_k - x_0\| \to 0$ și $\|x_k - x_0'\| \to 0$.

Atunci

$$\|x_0 - x_0'\| = \|x_0 - x_k + x_k - x_0'\| \leqslant \|x_0 - x_k\| + \|x_k - x_0'\| \to 0$$

și pe baza criteriului de convergență de la șirurile de numere rezultă că $\|x_0 - x_0'\| = 0$, adică $x_0 - x_0' = 0$, ceea ce contrazice presupunerea că $x_0 \neq x_0'$.

2) *Criteriu de convergență. Fie (α_k) un șir de numere. Dacă*

$$\|x_k - x_0\| \leqslant \alpha_k,\ k \in N \text{ și } \alpha_k \to 0, \text{ atunci } x_k \to x_0.$$

Într-adevăr, pe baza criteriului de convergență de la șirurile de numere, rezultă că $\|x_k - x_0\| \to 0$, deci $x_k \to x_0$.

3) *Dacă $x_k \to x_0$, atunci $\|x_k\| \to \|x_0\|$:*

$$\|\lim_{k\to\infty} x_k\| = \lim_{k\to\infty} \|x_k\|.$$

Demonstrația rezultă din inegalitatea

$$\big|\|x_k - x_0\|\big| \leqslant x_k - x_0$$

folosind criteriul precedent.

Observație. Dacă $\|x_k\| \to \|x_0\|$, nu rezultă că șirul (x_k) este convergent. Dacă însă $\|x_k\| \to 0$, atunci $x_k \to 0$.

4) *Orice șir convergent (x_k) de puncte din R^n este mărginit, adică există un număr M astfel ca $\|x_k\| \leqslant M$, oricare ar fi $k \in N$.*

Într-adevăr, dacă $x_k \to x_0$, atunci $\|x_k\| \to \|x_0\|$.

Așadar șirul de numere $(\|x_k\|)$ este convergent, deci este mărginit: există atunci un număr $M > 0$, astfel ca $\|x_k\| \leqslant M$, oricare ar fi $k \in N$.

Observație. A spune că un șir (x_k) de puncte din R^n este mărginit, revine la a spune că șirul de numere format cu normele $(\|x_k\|)$ este mărginit.

Dacă șirul (x_k) este mărginit, nu rezultă că este convergent.

5) *Dacă $x_k \to x_0$ și $y_k \to y_0$, atunci $x_k + y_k \to x_0 + y_0$:*

$$\lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = \lim_{k\to\infty} x_k + \lim_{k\to\infty} y_k.$$

Într-adevăr

$$\|(x_k + y_k) - (x_0 + y_0)\| = \|(x_k - x_0) + (y_k - y_0)\| \leqslant \|x_k - x_0\| + \|x_k - y_0\|.$$

Prin ipoteză, $\|x_k - x_0\| \to 0$ şi $\|y_k - y_0\| \to 0$, deci $\|x_k - x_0\| + \|y_k - y_0\| \to 0$. Pe baza criteriului de convergenţă deducem atunci că $x_n + y_n \to x_0 + y_0$.

Proprietatea este adevărată şi pentru suma mai multor şiruri convergente.

6) *Dacă* $x_k \to x_0$ *şi* $y_k \to y_0$, *atunci* $x_k y_k \to x_0 y_0$:

$$\lim_{k\to\infty} (x_k y_k) = \lim_{k\to\infty} x_k \lim_{k\to\infty} y_k$$

Într-adevăr,

$$\|x_k y_k - x_0 y_0\| = \|x_k(y_k - y_0) + (x_k - x_0)y_0\| \leqslant \|x_k\| \ \|y_k - y_0\| + \|y_k - x_0\| \ \|x_0\| \to 0.$$

7) *Dacă* $x_k \to x_0$ *şi* $y_k \to y_0$, *atunci* $(x_k \mid y_k) \to (x_0 \mid y_0)$:

$$\lim_{k\to\infty} (x_k \mid y_k) = (\lim_{k\to\infty} x_k \mid \lim_{k\to\infty} y_k) = \sum_{i=1}^{m} \lim_{k\to\infty} x_{ik} \lim_{k\to\infty} y_{ik}$$

8) *Dacă* $x_k \to x_0$ şi $\alpha_k \to \alpha_0$, $(\alpha_k, \alpha_0 \in R)$, *atunci* $\alpha_k x_k \to \alpha_0 x_0$:

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha_k x_k) = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \cdot \lim_{k\to\infty} x_k.$$

Într-adevăr

$$\|\alpha_k x_k - \alpha_0 x_0\| = \alpha_k (x_k - x_0) + (\alpha_k - \alpha_0)x_0\| \leqslant |\alpha_k| \ \|x_k - x_0\| + |\alpha_k - \alpha_0| \ \|x_0\| \to 0.$$

În particular, luînd $\alpha_k = \alpha$ pentru orice k, rezultă că *dacă* $x_k \to x_0$, *atunci* $\alpha x_k \to \alpha x_0$:

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha x_k) = \alpha \lim_{k\to\infty} x_k.$$

Pentru $\alpha = -1$ deducem că, dacă $x_k \to x_0$, atunci $-x_k \to -x_0$:

$$\lim_{k\to\infty} (-x_k) = -\lim_{k\to\infty} x_k.$$

Folosind apoi proprietatea 5, rezultă că:

dacă $x_k \to x_0$ *şi* $y_k \to y_0$, *atunci* $x_k - y_k \to x_0 - y_0$:

$$\lim_{k\to\infty} (x_k - y_k) = \lim_{k\to\infty} x_k - \lim_{k\to\infty} y_k.$$

O b s e r v a ţ i e. Mulţimea şirurilor convergente de puncte din R^n este o *algebră*, iar operaţia de trecere la limită este liniară şi multiplicativă.

9) *Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi are aceeaşi limită.*

Demonstraţia se face la fel ca pentru subşiruri ale şirurilor numerice, folosind definiţia cu vecinătăţi a limitei.

10) *Prin schimbarea ordinei termenilor unui şir convergent se obţine tot un şir convergent şi cu aceeaşi limită.*

Pentru demonstraţie se foloseşte definiţia cu vecinătăţi a limitei.
Se demonstrează la fel următoarea proprietate:

11) *Prin scoaterea sau adăugarea unui număr finit de termeni, la un şir convergent, se obţine tot un şir convergent şi cu aceeaşi limită.*

12) *Un punct $a \in R^n$ este punct de acumulare al unei mulțimi $A \in R^n$ dacă și numai dacă există un șir $x_k \to a$, format din puncte distincte din A.*

Demonstrația se face la fel ca și pentru mulțimi de numere, folosind vecinătățile $V_k(a)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

13) *O mulțime $A \in R^n$ este închisă dacă și numai dacă, o dată cu orice șir convergent de puncte din A, limita șirului aparține de asemenea lui A.*

Demonstrația este identică cu cea de la mulțimile de numere.

2. Șiruri fundamentale. Criteriul lui Cauchy

Definiție. Un șir (x_k) de puncte din spațiul R^n este un șir fundamental (sau șir Cauchy), dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $p \geqslant N(\varepsilon)$ și $q \geqslant N(\varepsilon)$ să avem

$$\| x_p - x_q \| < \varepsilon.$$

Orice șir convergent de puncte din R^n este un șir fundamental.

Demonstrația se face ca și pentru șiruri de numere, înlocuind modulul cu norma.

Observație. Toate proprietățile precedente rămîn valabile pentru șiruri de puncte dintr-un spațiu normat oarecare.

Proprietățile în enunțul și demonstrația cărora n-a intervenit norma, ci numai vecinătățile, rămîn valabile în spații topologice mai generale.

Pentru demonstrarea criteriului lui Cauchy pentru șiruri de puncte din R^n avem nevoie de o propoziție care stabilește o legătură între limita unui șir de puncte din R^n și limitele șirurilor de coordonate.

Această propoziție este de asemenea utilă pentru a da demonstrații mai simple pentru alte proprietăți.

Pentru a evita confuziile, dacă x_k este un termen al șirului $(x_k)_{k \in N}$ de puncte din R^n, vom nota cu $x_{i,k}$ sau x_{ik} coordonata sa de ordin i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}).$$

Așadar, $x_{ik} = \mathrm{pr}_i x_k$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Propoziția 1. **Un șir $(x_k)_{k \in N}$ de puncte din R^n are limita $a \in R^n$ dacă și numai dacă, pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, n$, șirul coordonatelor $(x_{ik})_{k \in N}$ are limita $a_i = pr_i a$.**

Pentru demonstrație se folosesc inegalitățile:

$$|\alpha_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Prima inegalitate rezultă astfel:

$$\alpha_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2, \text{ deci } |\alpha_i| = \sqrt{\alpha_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}.$$

A doua inegalitate rezultă astfel:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^2| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_i||\alpha_j| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right)^2,$$

deci

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Vom folosi aceste inegalităţi luînd

$$\alpha_i = x_{ik} - a_i \quad i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

Atunci

$$|x_{ik} - a_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - a_i)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_{ik} - a_i|$$

sau

$$|x_{ik} - a_i| \leqslant \| x_k - a \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_{ik} - a_i|, \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

Dacă $x_k \to a$, atunci $x_k - a \to 0$ şi deci, conform criteriului de convergenţă de la şirurile de numere, rezultă

$$x_{ik} \xrightarrow[k]{} a_i$$

pentru fiecare proiecţie, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Reciproc, să presupunem că

$$x_{1k} \xrightarrow[k]{} a_1, \; x_{2k} \xrightarrow[k]{} a_2, \ldots, \; x_{nk} \xrightarrow[k]{} a_n.$$

Atunci

$$|x_{1k} - a_1| \xrightarrow[k]{} 0, \; |x_{2k} - a_2| \xrightarrow[k]{} 0, \ldots, |x_{nk} - a_n| \xrightarrow[k]{} 0,$$

deci $\sum_{i=1}^{n} |x_k - a_i| \xrightarrow[k]{} 0$.

Din inegalităţile de mai sus rezultă atunci că

$$\| x_k - a \| \to 0 \text{ , adică } x_k \to a.$$

O b s e r v a ț i i. 1° În cazul planului R^2, unde un punct este notat (x, y), x și y fiind coordonatele sale, propoziția precedentă se transcrie astfel:

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0. \end{cases}$$

Iar în cazul spațiului R^3, propoziția precedentă se transcrie astfel:

$$(x_n, y_n, z_n) \to (x_0, y_0, z_0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \\ z_n \to z_0. \end{cases}$$

2° Din propoziția precedentă rezultă de asemenea următoarea definiție echivalentă a unui șir convergent de puncte din R^n:

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, *dacă și numai dacă, pentru orice număr* $\varepsilon > 0$, *există un număr* $N(\varepsilon)$, *astfel încît pentru orice* $k \geqslant N(\varepsilon)$ *să avem* $|x_{ik} - a_i| < \varepsilon$, *oricare ar fi* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Această definiție se poate deduce, de altfel, din definiția cu vecinătăți, folosind numai vecinătățile pătratice.

C r i t e r i u l l u i C a u c h y. Un șir $(x_k)_{k\in N}$ de puncte din $\mathbf{R}^n$ este șir convergent dacă și numai dacă este șir fundamental.

Dacă (x_k) este un șir convergent, atunci el este șir fundamental, după cum s-a specificat mai înainte. Reciproc, să presupunem că (x_k) este șir fundamental și să arătăm că este convergent. Se folosesc inegalitățile:

$$|x_{ip} = x_{iq}| \leqslant \| x_p - x_q \| \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, , \ldots, n \\ p, q = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

Deoarece $(x_k)_{k\in N}$ este șir fundamental, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $p \geqslant N(\varepsilon)$ și $q \geqslant N(\varepsilon)$, să avem $\| x_p - x_q \| < \varepsilon$, și cu atît mai mult $|x_{ip} - x_{iq}| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Așadar, fiecare șir de coordonate $(x_{ik})_{k\in N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ este un șir fundamental de numere, și deci este convergent:

$$x_{1k} \xrightarrow[k]{} a_1, \; x_{2k} \xrightarrow[k]{} a_2, \ldots, \; x_{mk} \xrightarrow[k]{} a_n.$$

Conform propoziției precedente șirul (x_k) este convergent și are limita $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

O b s e r v a ț i i. Un spațiu metric în care fiecare șir fundamental este convergent se numește *spațiu complet.*

Un spațiu normat complet se numește spațiu Banach.

O algebră normată completă se numește *algebră Banach.*

Rezultă că spațiul normat R^n este complet, deci este un spațiu Banach.

Un spațiu Banach în care norma se poate deduce dintr-un produs scalar se numește spațiu Hilbert. Un spațiu Hilbert cu n dimensiuni se numește spațiu euclidian n-dimensional.

Rezultă că spaţiul Banach R^n, cu norma $\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)}$, este un spaţiu Hilbert, cu n dimensiuni, adică un spaţiu euclidian n-dimensional.

R^n este de asemenea un spaţiu Banach pentru normele $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ şi $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. Aceste norme nu se pot deduce dintr-un produs scalar deci, pentru aceste norme, R^n nu este spaţiu Hilbert.

3. Lema lui Cesàro. Teorema lui Weierstrass-Bolzano. Teorema lui Borel-Lebesgue

Lema lui Cesàro. Orice şir mărginit de puncte din R^n conţine un subşir convergent.

Pentru simplificarea scrisului, vom da demonstraţia acestei leme în cazul spaţiului R^3.

Fie $(x_n, y_n, z_n)_{n \in N}$ un şir mărginit din R^3. Din inegalităţile

$$|x_n| < \|(x_n, y_n, z_n)\|,$$
$$|y_n| < \|(x_n, y_n, z_n)\|,$$
$$|z_n| < \|(x_n, y_n, z_n)\|,$$

rezultă că şirurile coordonatelor, (x_n), (y_n), (z_n), sînt de asemenea mărginite, deci li se poate aplica lema lui Cesàro pentru şirurile numerice.

Şirul (x_n), fiind mărginit, conţine un subşir convergent

$$x'_n \to x_0.$$

Să extragem din şirul (y_n) subşirul (y'_n) format din termenii care au aceiaşi indici ca şi cei ai subşirului (x'_n) în şirul (x_n).

Subşirul (y'_n) este de asemenea mărginit, deci conţine un subşir convergent

$$y''_n \to y_0.$$

Să extragem din şirul (z_n) subşirul (z''_n) format din termenii care au aceiaşi indici ca şi cei ai subşirului (y''_n) în şirul (y_n).

Subşirul (z''_n) este de asemenea mărginit, deci conţine un subşir convergent

$$z'''_n \to z_0.$$

Să reţinem din şirurile (x_n) şi (y_n) acei termeni care au aceiaşi indici ca şi cei ai subşirului (z'''_n) în şirul (z_n). Obţinem subşirurile (x'''_n) şi (y'''_n).

Cum (x'''_n) este şi subşir al şirului (x'_n), avem

$$x'''_n \to x_0.$$

De asemenea, deoarece (y_n''') este și subșir al șirului (y_n'') avem

$$y_n''' \to y_0.$$

Atunci $((x_n''', y_n''', z_n'''))_{n\in N}$ este un subșir convergent al șirului inițial $((x_n, y_n, z_n))_{n\in N}$:

$$(x_n''', y_n''', z_n''') \to (x_0, y_0, z_0)$$

și lema este demonstrată.

Teorema lui Weierstrass-Bolzano. Orice mulțime mărginită și infinită are cel puțin un punct de acumulare.

Deoarece A este infinită, putem extrage un șir (x_k) de puncte *distincte* din A. Șirul (x_k) este mărginit, deoarece A este mărginită. Conform lemei lui Cesàro șirul (x_k) conține un subșir convergent

$$x_{nk} \to x_0.$$

Rezultă că fiecare vecinătate a lui x_0 conține o infinitate de termeni ai subșirului (x_{nk}), adică o infinitate de puncte din A, deci x_0 este punct de acumulare al mulțimii A.

Propoziție. Dacă mulțimea $A \subset R^n$ este compactă, atunci proiecțiile sale $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt mulțimi compacte pe dreaptă.

Deoarece A este compactă, este mărginită; proiecțiile sale $A_1, A_2, \ldots$, sînt de asemenea *mărginite*.

Rămîne de arătat că proiecțiile sînt mulțimi închise.

Vom face demonstrația numai pentru mulțimea A_1.

Fie $x_{1k} \xrightarrow[k]{} a_1$ un șir convergent de puncte din A_1; să arătăm că și limita sa a_1 aparține lui A_1, de unde va rezulta că A_1 este închisă.

Deoarece $x_{1k} \in A_1$, există un șir (x_k) de puncte din A, ale căror proiecții pe prima axă sînt termenii șirului (x_{1k})

$$\mathrm{pr}_1 x_k = x_{1k}.$$

Șirul (x_k) este mărginit (deoarece A este mărginită). El conține deci un subșir convergent $x_{k_p} \xrightarrow[p]{} b$ și, deoarece A este închisă, limita șirului aparține de asemenea lui A, $b \in A$.

Atunci $x_{1k_p} \xrightarrow[p]{} b_1$ și deoarece $b \in A$, avem $b_1 \in A_1$.

Dar $(x_{1k_p})_{p\in N}$ este un subșir al șirului $(x_{1k})_{k\in N}$, deci are aceeași limită, $x_{1k_p} \xrightarrow[p]{} a_1$; limita unui șir convergent fiind unică, rezultă că $a_1 = b_1$ și deci $a_1 \in A_1$.

Observație. Dacă toate proiecțiile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt mărginite, rezultă că și A este mărginită. Dacă toate proiecțiile sînt închise, nu rezultă însă că și A este închisă. Așadar, dacă proiecțiile sînt compacte, nu rezultă că A este compactă.

Teorema lui Borel-Lebesgue. Din orice acoperire cu mulțimi deschise a unei mulțimi compacte $A \subset R^n$, se poate extrage o acoperire finită a mulțimii A.

Fie (G_α) o familie de mulțimi deschise care acoperă pe A. Pentru fiecare punct $x \in A$, există o mulțime deschisă G_α din familie, astfel ca $x \in G_\alpha$; x este deci punct interior al lui G_α. Există atunci o vecinătate dreptunghiulară I_α a lui x, astfel ca $x \in I_\alpha \subset G_\alpha$. Am obținut astfel o familie de vecinătăți dreptunghiulare (I_α) care acoperă pe A.

Să notăm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ proiecțiile mulțimii compacte A. Aceste proiecții sînt de asemenea mulțimi compacte.

Fie $(I_\alpha^1), (I_\alpha^2), \ldots, (I_\alpha^n)$ familiile de intervale deschise liniare, obținute cu proiecțiile intervalelor n-dimensionale ale familiei (I_α). Familia (I_α^i) acoperă mulțimea compactă A_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, deci conform teoremei lui Borel-Lebesgue de pe dreaptă, există un număr *finit* de intervale din (I_α^i) care acoperă pe A_i. Intervalele n-dimensionale de forma $I_\alpha = I_{\alpha 1}^1 \times \times I_{\alpha 2}^2 \times \ldots \times I_{\alpha n}^n$, formate cu acele intervale care acoperă respectiv mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sînt în număr *finit*. Aceste intervale n-dimensionale acoperă mulțimea $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ și cu atît mai mult mulțimea A, deoarece $A \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Fiecare asemenea interval I_α este conținut într-o mulțime G_α. Obținem astfel un număr finit de mulțimi G_α care acoperă mulțimea A.

Observație. Teorema reciprocă este de asemenea adevărată. Așadar:

O mulțime $A \subset R^n$ este compactă dacă și numai dacă, din orice acoperire a lui A cu mulțimi deschise, se poate extrage o acoperire finită. Într-un spațiu topologic oarecare, acest enunț se ia ca definiție a mulțimilor compacte. Într-un spațiu normat cu o infinitate de dimensiuni, o mulțime închisă și mărginită poate să nu fie compactă.

§ 4. Funcții definite pe mulțimi din R^n

1. Funcții vectoriale de variabilă vectorială

Fie E o mulțime din R^n și $f : E \to R^m$ o funcție definită pe E cu valori în spațiul cu m dimensiuni.

Argumentul funcției f este un vector din R^n, iar valorile funcției sînt, de asemenea, vectori. Spunem că f este o *funcție vectorială de variabilă vectorială.*

O variabilă vectorială x din R^n este echivalentă cu n variabile reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (care sînt coordonatele lui x).

Valorile funcției se notează

$$f(x) \text{ sau } f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

iar funcția f se mai numește *funcția* (vectorială) *de n variabile reale.*

În cazul cînd $R^m = R^1$, f este o *funcție reală de n variabile reale.*

Exemple. 1) Funcția *proiecție* $\mathrm{pr}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1$ este o funcție reală de n variabile reale. De asemenea, proiecțiile $\mathrm{pr}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_2, \ldots, \mathrm{pr}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n$ sînt funcții reale de n variabile.

2) Funcția sumă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ și funcția produs $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$ sînt funcții reale de n variabile reale.

Fiind dată o funcție vectorială $f : E \to R^m$, putem obține m funcții reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ definite pe E, prin compunerea funcției f cu funcțiile proiecție:

$$f_1 = \mathrm{pr}_1 \circ f,\ f_2 = \mathrm{pr}_2 \circ f,\ \ldots,\ f_m = \mathrm{pr}_m \circ f.$$

Pentru fiecare $x \in E$ avem

$$f_1(x) = \mathrm{pr}_1 f(x),\ f_2(x) = \mathrm{pr}_2 f(x),\ \ldots,\ f_m(x) = \mathrm{pr}_m f(x)$$

și deci

$$f(x) = (f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x)).$$

Convenim să scriem această ultimă egalitate astfel:

$$f = (f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_m).$$

Funcțiile reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ se numesc *componentele reale ale funcției vectoriale* f.

Pe de altă parte, m funcții reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ definite pe o aceeași mulțime $E \subset R^n$ pot fi considerate totdeauna ca fiind componentele reale ale unei funcții vectoriale $f : E \to R^m$.

Ținînd seama de aceste considerații, putem reduce totdeauna studiul unei funcții vectoriale la studiul unor funcții reale.

De multe ori este însă mai simplu studiul direct al funcției vectoriale.

Dacă mulțimea de definiție E este o parte a dreptei, funcțiile $f : E \to R^m$ sînt funcții vectoriale de o singură variabilă reală.

Dacă E este o parte a planului R^2, funcțiile $f : E \to R^m$ sînt funcții vectoriale de două variabile reale și se notează $f(x, y)$.

La fel se definesc funcțiile vectoriale de trei variabile reale $f(x, y, z)$.

Dacă E este un interval n-dimensional (mărginit sau nemărginit) $E = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, atunci cînd variabilele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ parcurg respectiv intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$, variabila vectorială $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ parcurge tot intervalul n-dimensional E.

Dacă însă E nu este interval n-dimensional (ci, de exemplu, sferă), fiecare variabilă reală parcurge o mulțime care depinde de valorile fixate ale celorlalte variabile.

Pentru anumite valori *fixate* $x_2, x_3, \ldots, x_n$, să considerăm mulțimea tuturor punctelor $x \in E$, care au coordonatele de ordin $\geqslant 2$ egale respectiv cu $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Proiecția acestei mulțimi pe prima axă este mulțimea

$$E_1 = \{x_1 \mid x_1 \in R,\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in E\}.$$

Această mulțime depinde, în general, de valorile $x_2, x_3, \ldots, x_n$, alese.

Pentru valorile fixate $x_2, x_3, \ldots, x_n$, funcția de o singură variabilă $f_1 : x_1 \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definită pe mulțimea E_1, se numește *funcție parțială* a funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Pentru fiecare sistem de numere $x_2, x_3, \ldots, x_n$ pentru care mulțimea corespunzătoare E_1 nu este vidă, obținem cîte o funcție parțială $x_1 \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Se definesc în mod asemănător funcțiile parțiale de forma
$f_2 : x_2 \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n : x_n \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Să exemplificăm considerațiile precedente în cazul funcțiilor de două variabile. Pentru simplitate să notăm cu (x, y) un punct oarecare din plan. Funcțiile de două variabile se notează atunci cu $f(x, y)$.

Exemple. 1) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ definită pe cercul cu centrul în O și raza 1, $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Pentru $y = \frac{1}{2}$ obținem funcția parțială

$$f_1(x) = f\left(x, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{4} - x^2}$$

definită pe intervalul $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Pentru $y = \frac{1}{3}$ obținem funcția parțială $f_1(x) = f\left(x, \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{8}{9}}$ definită pe intervalul $\left[-\frac{\sqrt{8}}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right]$.

Pentru $y = 0$ obținem funcția parțială $f_1(x) = f(x, 0) = \sqrt{1 - x^2}$, definită pe intervalul $[-1, 1]$.

Pentru $x = \frac{1}{5}$ obținem funcția parțială $f_2(y) = f\left(\frac{1}{5}, y\right) = \sqrt{\frac{24}{25} - y^2}$ definită pe intervalul $\left[-\frac{\sqrt{24}}{5}, \frac{\sqrt{24}}{5}\right]$.

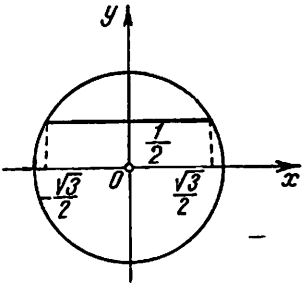


Fig. 138

2) $f(x, y) = \arcsin\frac{x}{y}$ definită pe mulțimea punctelor (x, y) din plan pentru care $\left|\frac{x}{y}\right| \leqslant 1$ și $y \neq 0$, ($-y \leqslant x \leqslant y$ dacă $y > 0$ și $y \leqslant x \leqslant -y$ dacă $y < 0$).

Mulțimea de definiție este porțiunea din plan care conține axa Ox cuprinsă între bisectoarele axelor de coordonate, fără origine.

3) $f(x, y) = x + y$ definită pe R^2.

4) $f(x, y) = xy$ definită pe R^2.

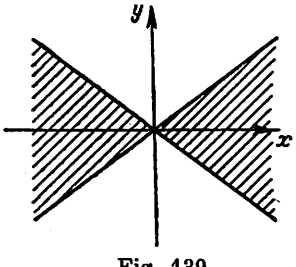


Fig. 139

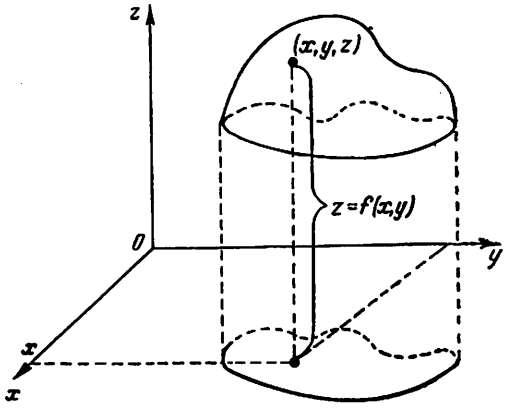


Fig. 140

5) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ definită pe mulțimea
$E = \{(x, y) \mid x, y \in R, y \neq 0\}$ formată din tot planul afară de axa Oy.
6) $f(x, y) = x^y$ definită pe mulțimea
$E = \{(x, y) \mid x, y \in R, x > 0\}$, adică pe semiplanul de la dreapta axei Oy, fără axa Oy.

Graficul unei funcții reale de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definită pe o mulțime $E \subset R^n$, este format din toate punctele din spațiul R^{n+1}, de forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ unde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$.

Graficul unei funcții de două variabile $f(x, y)$ definită pe o mulțime E din plan este o mulțime din spațiul cu trei dimensiuni:

$$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in E, z = f(x, y)\}.$$

Graficul unei funcții de două variabile este o „suprafață" în spațiu.

2. Aplicații. Curbe și suprafețe.
Transformări punctuale

1) *Curbe plane.* Fie f o funcție definită pe un interval I de pe dreaptă, cu valori în plan.

Această funcție face să corespundă fiecărui punct $t \in I$, punctul $f(t)$ din plan; f este o funcție vectorială (cu valori în plan) de o variabilă reală.

Fie φ și ψ cele două componente reale ale funcției f:

$$f(t) = (\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in I.$$

Funcțiile φ și ψ sînt funcții reale de variabila t.

Dacă notăm $f(t) = (x, y)$ atunci

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Ansamblul celor două funcții φ și ψ constituie o *reprezentare parametrică*, iar argumentul lor t se numește *parametru*.

Cînd parametrul t parcurge intervalul I, punctul $f(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ din plan parcurge o mulțime de puncte din plan. Această mulțime de puncte din plan, împreună cu reprezentarea parametrică, se numește curbă plană. Egalitățile $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I$ se numesc ecuațiile parametrice ale curbei plane.

2) *Curbe strîmbe.* Fie f o funcție vectorială definită pe un interval I, cu valori în spațiul R^3. Funcția vectorială f are în acest caz trei componente reale, φ, ψ, χ. Anume, dacă notăm $f(t) = (x, y, z)$, atunci

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in I.$$

Ansamblul funcțiilor φ, ψ și χ constituie de asemenea o *reprezentare parametrică.*

Cînd parametrul t parcurge intervalul I, punctul $f(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ parcurge, o mulțime de puncte din spațiu. Această mulțime din spațiu, împreună cu reprezentarea parametrică, se numește curbă în spațiu (sau, uneori, curbă strîmbă).

Mai multe reprezentări parametrice diferite pot defini aceeași curbă strîmbă.

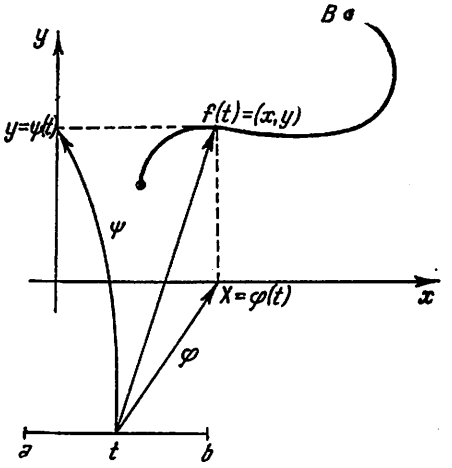


Fig. 141

Egalitățile $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ (unde $t \in I$) se numesc ecuațiile parametrice ale curbei.

3) *Suprafețe.* Fie f o funcție definită pe o mulțime E din plan, cu valori în spațiul R^3; f este o funcție de două variabile, pe care să le notăm u și v, $(u, v) \in E$. Așadar, funcția se notează $f(u, v)$. Avînd valorile în spațiul R^3, această funcție are trei componente reale, φ, ψ, χ, definite pe E:

$$f(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)).$$

Dacă se notează $f(u, v) = (x, y, z)$ atunci

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \ (u, v) \in E \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Obținem astfel o reprezentare parametrică, cu doi parametri, u și v.

Cînd perechea de parametri (u, v) parcurge mulțimea E, punctul $f(u, v)$ parcurge o mulțime de puncte din spațiu, $f(E)$, care împreună cu reprezentarea parametrică constitue suprafața în spațiu.

Să fixăm o valoare v_0 a parametrului v. În acest caz, dacă parametrul u parcurge mulțimea valorilor pentru care $(u, v) \in E$, se obține funcția

parțială $u \to f(u, v_0)$, de o singură variabilă, cu valori în spațiu, deci o reprezentare cu un singur parametru

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v_0), \\ y = \psi(u, v_0), \\ z = \chi(u, v_0). \end{cases}$$

Această reprezentare definește o curbă în spațiu, conținută în suprafața $f(E)$, numită curba $v = v_0$.

De asemenea, dacă se fixează o valoare u_0 a parametrului u, și dacă parametrul v parcurge mulțimea valorilor pentru care $(u_0, v) \in E$, se obține funcția parțială $v \to f(u_0, v)$ de o singură variabilă cu valori în spațiu, deci o reprezentare cu un singur parametru

$$\begin{cases} x = \varphi(u_0, v), \\ y = \psi(u_0, v), \\ z = \chi(u_0, v). \end{cases}$$

Această reprezentare definește de asemenea o curbă pe suprafața $f(E)$, numită curba $u = u_0$.

Observație. În volumul II noțiunile de curbă și suprafață vor fi mai bine precizate.

4) *Transformări punctuale în plan.* Fie E și F două mulțimi din plan și T o aplicație *biunivocă* a mulțimii E pe mulțimea F.

$$T : E \to F, \qquad E, F \subset R^2.$$

Fiecărui punct $(u, v) \in E$ îi corespunde punctul $T(u, v) \in F$. Funcția $T(u, v)$ este o funcție vectorială de două variabile. Ea are două componente reale, f și g, definite pe E.

$$T(u, v) = (f(u, v), g(u, v)), \quad (u, v) \in E.$$

Dacă se notează $T(u, v) = (x, y)$, atunci

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in E.$$

Dacă γ este o curbă conținută în mulțimea E dată de reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} u = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}, \quad t \in I,$$

atunci $\Gamma = T(\gamma)$ este o curbă conținută în mulțimea $F = T(E)$ dată de reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = f(\alpha(t), \beta(t)) \\ y = g(\alpha(t), \beta(t)) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Funcția biunivocă $T : E \to F$ se numește de obicei *transformare punctuală* de la mulțimea E la mulțimea F. Funcția sa inversă $\overset{-1}{T} : F \to E$, care este de asemenea biunivocă, este o funcție vectorială de două variabile: fiecărui punct $(x, y) \in F$ îi corespunde punctul $(u, v) = \overset{-1}{T}(x, y) \in E$; avem

$$\overset{-1}{T}\, T(u, v) = (u, v) \quad T \cdot \overset{-1}{T}(x, y) = (x, y), \quad \begin{matrix} (u, v) \in E \\ (x, y) \in F \end{matrix}.$$

Funcția $\overset{-1}{T}$ este de asemenea o transformare punctuală de la mulțimea F la E.

Funcția vectorială $\overset{-1}{T}$ are două componente reale φ și ψ definite pe F. Dacă se notează $(u, v) = \overset{-1}{T}(x, y)$, atunci

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}, \quad (x, y) \in F.$$

Între componentele f și g ale lui T și componentele φ și ψ ale lui $\overset{-1}{T}$ avem următoarele relații:

$$\begin{cases} \varphi(f(u, v), g(u, v)) = u \\ \psi(f(u, v), g(u, v)) = v \end{cases}, \quad (u, v) \in E;$$

$$\begin{cases} f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = x \\ g(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = y \end{cases}, \quad (x, y) \in F.$$

Sistemul $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}$

se obține rezolvînd în raport cu x și y sistemul

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}$$

și, reciproc, ultimul sistem se obține din primul, rezolvîndu-l în raport cu u și v.

5) *Transformări punctuale în spațiu.* Putem considera transformări punctuale T între două mulțimi E și F din spațiul cu trei dimensiuni.

În acest caz funcția biunivocă T are trei componente reale f, g, h, definite pe E. Dacă se notează $T(u, v, w) = (x, y, z)$, atunci

$$\begin{cases} x = f(u, v, w) \\ y = g(u, v, w), \ (u, v, w) \in E. \\ z = h(u, v, w) \end{cases}$$

Aplicația inversă $\overset{-1}{T} : F \to E$ are de asemenea trei componente reale φ, ψ, χ, definite pe F. Dacă se notează $\overset{-1}{T}(x, y, z) = (u, v, w)$, atunci

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y, z) \\ v = \psi(x, y, z), \ (x, y, z) \in F. \\ w = \chi(x, y, z) \end{cases}$$

Primul sistem se obține din ultimul, rezolvîndu-l în raport cu x, y și z, deci pentru $(u, v, w) \in E$ avem

$$\begin{cases} u = \varphi(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)), \\ v = \psi(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)), \\ w = \chi(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)). \end{cases}$$

Ultimul sistem se obține din primul rezolvîndu-l în raport cu u, v, și w, deci pentru $(x, y, z) \in F$ avem

$$\begin{cases} x = f(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)), \\ y = g(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)), \\ z = h(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)). \end{cases}$$

3. Operații cu funcții vectoriale

Fie E o mulțime din R^n, f și g două funcții definite pe E cu valori în spațiul R^m. Suma $f + g$ și produsul fg sînt funcții definite pe E cu valori în R^m, astfel:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ pentru } x \in E$$
$$(fg)(x) = f(x)\, g(x), \text{ pentru } x \in E.$$

Produsul αf al funcției f cu numărul real α este funcție definită pe E cu valori în R^m astfel:

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \text{ pentru } x \in E.$$

Mulțimea tuturor funcțiilor definite pe E cu valori în R^m este o *algebră* pentru operațiile $f + g$, fg și αf.

Folosind produsul scalar din R^m, se definește *funcția reală* $(f \mid g)$ pe E prin egalitatea $(f \mid g)(x) = (f(x) \mid g(x))$, pentru $x \in E$.

Folosind componentele reale ale funcțiilor f și g, avem

$$(f|g)\ (x) = (f(x)|g(x)) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\ g_i(x),$$

adică

$$(f|g) = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i.$$

Putem apoi defini funcția pozitivă $\|f\|$ pe E prin egalitatea

$$\|f\|\ (x) = \|f(x)\|, \text{ pentru } x \in E.$$

Avem atunci

$$\|f\| = \sqrt{(ff)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} f_i^2}.$$

4. Compunerea funcțiilor vectoriale

Fie mulțimile $E \subset R^n$, $F \subset R^m$ și funcțiile $f : E \to F$, $g : F \to R^p$. Să considerăm de asemenea funcția compusă $h = g \circ f : E \to R^p$:

$$h(x) = g(f(x)),\ x \in E.$$

Să cercetăm cum se comportă componentele reale ale funcțiilor vectoriale față de operația de compunere a acestor funcții.

Funcția vectorială f are valori în $F \subset R^m$, deci are m componente reale, $f_1, f_2, \ldots, f_m : E \to R$

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Funcția vectorială g are valori în R^p, deci are p componente reale, $g_1, g_2, \ldots, g_p : F \to R$

$$g = (g_1, g_2, \ldots, g_p).$$

Se definește de asemenea produsul $\varphi \cdot f$ cu o funcție reală $\varphi : E \to R$ prin egalitatea $(\varphi f)\ (x) = \varphi(x)\ f(x)$, $x \in E$.

Operațiile de adunare, înmulțire și înmulțire cu scalari (sau cu funcții scalare) ale funcțiilor vectoriale se reduc la operațiile respective efectuate asupra componentelor lor reale.

Astfel, dacă $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ și $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$, atunci

$$f + g = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots, f_m + g_m):$$
$$fg = (f_1 g_1, f_2 g_2, \ldots, f_m g_m)$$
$$\alpha f = (\alpha f_1, \alpha f_2, \ldots, \alpha f_m)$$
$$\varphi f = (\varphi f_1, \varphi f_2, \ldots, \varphi f_m).$$

Într-adevăr, pentru orice $x \in E$ avem

$$(f + g)\ (x) = f(x) + g(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) + (g_1(x), \ldots, g_m(x)) =$$
$$= (f_1(x) + g_1(x), \ldots, f_m(x) + g_m(x)) = ((f_1 + g_1)\ (x), \ldots, (f_m + g_m)\ (x)),$$

adică

$$f + g = (f_1 + g_1, \ldots, f_m + g_m).$$

La fel se demonstrează celelalte egalități.

Funcția vectorială $h = g \circ f$ are valori în R^p, deci are p componente reale $h_1, h_2, \ldots, h_p : E \to R$

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_p).$$

Atunci

$$h_1 = g_1 \circ f, \; h_2 = g_2 \circ f, \; \ldots, \; h_p = g_p \circ f.$$

Într-adevăr pentru orice $x \in E$, avem $f(x) \in F$, deci

$$h(x) = g(f(x)) = (g_1(f(x)), g_2(f(x)), \ldots, g_p(f(x))),$$

iar, pe de altă parte,

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x, \ldots, h_p(x)),$$

deci

$$h_1(x) = g_1(f(x)), h_2(x), = g_2(f(x)) \ldots, h_p(x) = g_p(f(x)),$$

de unde rezultă egalitățile de mai sus.

Așadar: *a compune funcția g cu funcția f revine la a compune componentele reale ale lui g cu funcția f.*

Sau: pentru a obține componentele reale ale funcției compuse $h = g \circ f$, se compun componentele reale ale funcției g cu funcția f.

Studiul compunerii funcțiilor vectoriale se reduce astfel la acela al compunerii unei funcții reale cu o funcție vectorială, rezultatul fiind o funcție reală.

Mai departe, problema compunerii unei funcții reale g cu o funcție vectorială f se poate reduce numai la compunerea funcțiilor reale, folosind componentele reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ al funcției f.
În acest caz, pentru orice $x \in E$, avem

$$h(x) = g(f(x)) = g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)).$$

Scriind apoi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, avem

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Așadar, dîndu-se m funcții reale de n variabile definite pe $E \subset R^n$,

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$$

și funcția reală $g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ de m variabile definite pe mulțimea

$$F \subset f_1(E) \times f_2(E) \times \ldots \times f_m(E) \subset R^m,$$

obținem funcția reală h de n variabile definită pe E:

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Exemple. 1) Fie $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$ o reprezentare parametrică ce definește o curbă r din plan, și fie h o aplicație *strict crescătoare* a intervalului $[\alpha, \beta]$ pe intervalul $[a, b]$:

$$h : [\alpha, \beta] \to [a, b].$$

Funcțiile compuse $\varphi = f \circ h$, $\psi = g \circ h$ definite pe intervalul $[\alpha, \beta]$ constituie o reprezentare parametrică ce definește aceeași curbă în plan:

$$\begin{cases} x = \varphi(\tau) \\ y = \psi(\tau) \end{cases}, \quad \tau \in [\alpha, \beta].$$

Într-adevăr, fie $(x_0, y_0) \in \Gamma$ un punct oarecare: există un punct $t_0 \in [a, b]$ astfel ca

$$x_0 = f(t_0),$$
$$y_0 = g(t_0).$$

Deoarece funcția h este biunivocă, există un punct $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ astfel ca $t_0 = h(\tau_0)$; atunci

$$\varphi(\tau_0) = f(h(\tau_0)) = f(t_0) = x_0,$$
$$\psi(\tau_0) = g(h(\tau_0)) = g(t_0) = y_0,$$

deci punctul (x_0, y_0) aparține și curbei γ definite de reprezentarea parametrică (φ, ψ), adică $\Gamma \subset \gamma$.

Reciproc, fie $(x_0, y_0) \in \gamma$. Există un punct $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$, astfel ca

$$x_0 = \varphi(\tau_0),$$
$$y_0 = \psi(\tau_0).$$

Să notăm $t_0 = h(\tau_0) \in [a, b]$.
Atunci

$$f(t_0) = f(h(\tau_0)) = \varphi(\tau_0) = x_0,$$
$$g(t_0) = g(h(\tau_0)) = \psi(\tau_0) = y_0,$$

deci

$(x_0, y_0) \in \Gamma$, adică $\gamma \subset \Gamma$. Rezultă atunci că $\gamma = \Gamma$.

Trebuie să arătăm acum că cele două reprezentări stabilesc aceeași ordine de parcurgere pe curba Γ.

Fie $\tau_1 < \tau_2$ din $[\alpha, \beta]$ și fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ punctele corespunzătoare de pe Γ:

$$x_1 = \varphi(\tau_1), \qquad x_2 = \varphi(\tau_2),$$
$$y_1 = \psi(\tau_1), \qquad y_2 = \psi(\tau_2).$$

În ordinea de parcurgere stabilită de reprezentarea (φ, ψ) întîlnim întîi punctul M_1, apoi punctul M_2.

Fie $t_1 = h(\tau_1)$ și $t_2 = h(\tau_2)$. Deoarece h este strict crescătoare, avem $t_1 < t_2$. Punctelor t_1 și t_2 le corespund, respectiv, tot punctele M_1 și M_2 pe curba Γ:

$$x_1 = \varphi(\tau_1) = f(h(\tau_1)) = f(t_1), \; x_2 = \varphi(\tau_2) = f(h(\tau_2)) = f(t_2),$$
$$y_1 = \psi(\tau_1) = g(h(\tau_1)) = g(t_1), \; y_2 = \psi(\tau_2) = g(h(\tau_2)) = g(t_2).$$

Deoarece $t_1 < t_2$, înseamnă că și în ordinea stabilită de reprezentarea (f, g) întîlnim întîi punctul M_1 și apoi punctul M_2.

Cele două reprezentări definesc deci aceeași ordine pe mulțimea Γ, deci definesc aceeași curbă.

Considerații asemănătoare se pot face pentru curbe în spațiul R^3.

2) Fie $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v), \\ z = h(u, v) \end{cases}$ $(u, v) \in E \subset R^2$ o reprezentare cu doi parametri,

care definește o suprafață S în spațiu.

Fie T o transformare punctuală (aplicație biunivocă) a mulțimii $F \subset R^2$ pe mulțimea $E \subset R^2$, $T : F \to E$:

$$T(U, V) = (u, v), \qquad (U, V) \in F, \qquad (u, v) \in E.$$

Atunci, funcțiile compuse $\varphi = f \circ T$, $\psi = g \circ T$, $\chi = h \circ T$ definite pe F determină de asemenea o reprezentare cu doi parametri ce definesc aceeași suprafață:

$$\begin{cases} x = \varphi(U, V) \\ y = \psi(U, V), \\ z = \chi(U, V) \end{cases} \qquad (U, V) \in F,$$

unde

$$\begin{aligned} \varphi(U, V) &= \varphi(T(U, V)) = f(u, v) \\ \psi(U, V) &= g(T(U, V)) = g(u, v), \qquad (u, v) \in E. \\ \chi(U, V) &= h(T(U, V)) = h(u, v) \end{aligned}$$

5. Inversarea funcțiilor vectoriale

Fie $E \subset R^n$ și $F \subset R^m$, T o aplicație biunivocă a mulțimii E pe mulțimea F, și T aplicația sa inversă

$$T : E \longrightarrow F$$

$$T^{-1} : F \longrightarrow E$$

$$T^{-1}T(x) = x, \qquad x \in E$$

$$T^{-1}T(y) = y, \qquad y \in F.$$

Funcția T are valori în $F \subset R^m$, deci are m componente reale, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ definite pe $E \subset R^n$

$$T = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Funcția $\overset{-1}{T}$ are valori în $E \subset R^n$, deci are n componente reale $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ definite pe $F \subset R^m$

$$\overset{-1}{T} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

Să stabilim ce legătură există între componentele reale ale celor două funcții inverse:

Avem:

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)), \qquad x \in E \subset R^n.$$

$$\overset{-1}{T}(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_n(y)), \qquad y \in F \subset R^m.$$

Pentru fiecare $y \in F$, există un punct $x \in E$ și numai unul, astfel încît $y = T(x)$, și anume punctul $x = \overset{-1}{T}(y)$. Altfel spus, pentru fiecare vector $y \in F$, ecuația

$$y = T(x),$$

cu necunoscuta vectorială x, are o soluție x în E și numai una, și anume

$$x = \overset{-1}{T}(y).$$

Fie $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in F$, și $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$.

Egalitatea $y = T(x)$ se scrie

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m) = T(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)),$$

adică

$$y_1 = f_1(x), \; y_2 = f_2(x), \ldots, y_m = f_m(x)$$

sau

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Ecuația vectorială $y = T(x)$ este echivalentă cu un sistem de m ecuații scalare.

Relația $x = \overset{-1}{T}(y)$ (echivalentă cu relația $y = T(x)$) se scrie

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overset{-1}{T}(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_n(y)),$$

adică

$$x_1 = \varphi_1(y), \; x_2 = \varphi_2(y), \ldots, x_n = \varphi_n(y)$$

sau

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_m). \end{cases}$$

A spune că pentru fiecare $y \in F$, ecuația $y = T(x)$ are o soluție și numai una, $x = \overline{T}^{-1}y$ în E, revine la a spune că, pentru fiecare sistem de valori $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, sistemul (1) de m ecuații cu n necunoscute are o singură soluție $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dată de egalitățile (2). Așadar, componentele reale ale funcțiilor vectoriale T și $\overline{T}^{-1}$ reprezintă, respectiv, funcțiile din membrul drept al ecuațiilor sistemului (1), și funcțiile din membrul drept ale soluțiilor (2) ale sistemului (1).

6. Funcții mărginite

Fie f o mulțime definită pe o mulțime $E \subset R^n$ cu valori în R^m.

Definiție. Se spune că funcția f este mărginită (pe mulțimea E) dacă mulțimea valorilor $f(E) \subset R^m$ este mărginită.

Aceasta înseamnă că există o sferă $V_r(a)$ în R^m care conține mulțimea valorilor $f(E)$.

Există de asemenea o sferă $V_M(O)$ cu centrul în O și care conține sfera $V_r(a)$, deci conține și mulțimea $f(E)$: dacă luăm $M = \|a\| + r$, atunci $V_r(a) \subset V_M(O)$. Într-adevăr, dacă $x \in V_r(a)$, atunci $\|x - a\| < r$, deci $\|x\| = \|x - a + a\| \leqslant \|x - a\| + \|a\| < r + \|a\| = M$, adică $x \in V_M(O)$ și deci $V_r(a) \subset V_M(O)$.

Așadar, în definiția funcțiilor mărginite (și a mulțimilor mărginite) putem folosi numai sfere cu centrul în origine.

A spune că $f(E) \subset V_M(a)$, înseamnă că $\|f(x)\| < M$ pentru orice $x \in E$. Obținem astfel o definiție echivalentă cu cea precedentă dată de următoarea:

Propoziție. Funcția f: $E \to R^m$ este mărginită dacă și numai dacă există un număr M astfel încît, pentru orice $x \in E$, să avem $\|f(x)\| \leqslant M$.

Corolar. Funcția vectorială f: $E \to R^m$ este mărginită dacă și numai dacă funcția reală $x \to \|f(x)\|$ definită pe E este mărginită (adică dacă $\sup_{x \in E} \|f(x)\| < +\infty$).

Observație. Dacă funcția f nu are valori reale, ci într-un spațiu cu $n \geqslant 2$ dimensiuni, nu mai au sens noțiunile de funcție majorată sau minorată și nici marginile funcției, deoarece într-un asemenea spațiu nu avem o relație de ordine.

Propoziție. Funcția vectorială f este mărginită dacă și numai dacă toate componentele sale reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt mărginite.

Într-adevăr, pentru orice $x \in E$, avem

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

şi

$$|f_i(x)| \leqslant \|f(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|.$$

Dacă funcţia $f(x)$ este mărginită, atunci funcţia reală $\|f(x)\|$ este mărginită, şi din prima inegalitate deducem că funcţia $|f_i(x)|$, deci şi $f_i(x)$, este mărginită, pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, m$.

Reciproc, dacă funcţiile $f_i(x)$ sînt mărginite, atunci şi funcţiile $|f_i(x)|$ sînt mărginite, deci şi suma lor $\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|$ este mărginită. Din a doua inegalitate rezultă că funcţia $\|f(x)\|$, deci şi funcţia $f(x)$, este mărginită.

Studiul funcţiilor vectoriale mărginite se reduce astfel la studiul funcţiilor reale mărginite.

Pentru funcţiile *reale* (de mai multe variabile) se poate da o definiţie a funcţiilor majorate sau minorate, cum şi a marginilor unei funcţii, deoarece mulţimea valorilor este conţinută în dreapta reală, pe care avem definită relaţia de ordine.

Proprietăţile marginilor unei funcţii reale de mai multe variabile sînt aceleaşi ca şi pentru funcţiile reale de o singură variabilă.

§ 5. Limite. Continuitate

1. Limite de funcţii vectoriale

Definiţia limitei unei funcţii reale se extinde şi pentru funcţii vectoriale.

Fie mulţimea $E \subset R^n$, x_0 un *punct de acumulare* pentru E şi funcţia vectorială $f : E \to R^m$.

Definiţie. Se spune că un vector $l \in R^m$ este limita funcţiei f în punctul x_0, dacă pentru orice vecinătate U a lui l (în R^m) există o vecinătate V a lui x_0 (în R^n) astfel încît, oricît ar fi $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in U$. Se scrie

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ (sau } f(x) \to l \text{ cînd } x \to x_0).$$

Propoziţiile următoare dau definiţii echivalente ale limitei. Demonstraţia lor se face la fel ca şi în cazul funcţiilor reale de o singură variabilă.

Propoziţia 1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, **dacă şi numai dacă, pentru orice şir** $x_k \to x_0$, $x_k \in E$, $x_k \neq x_0$, **avem** $f(x_k) \to l$.

Propoziţia 2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, **dacă şi numai dacă, pentru orice număr** $\varepsilon > 0$, **există un număr** $\delta(\varepsilon) > 0$, **astfel încît, oricare ar fi** $x \neq x_0$ **din** E **cu** $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$, **să avem** $\|f(x) - l\| < \varepsilon$.

Se pot, de asemenea, da enunțuri în care se folosesc numai ε sau numai δ:

Propoziția 3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, **dacă și numai dacă, pentru orice** număr $\varepsilon>0$, **există o vecinătate** V **a lui** x_0 (V **depinde de** ε), **astfel încît condițiile** $x\in V\cap E$ **și** $x\neq x_0$ **implică** $\|f(x) - l\| < \varepsilon$.

Propoziția 4. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, **dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate** U **a lui** l, **există un număr** $\delta>0$ **(care depinde de** U**) astfel încît, condițiile** $x\in E$, $x\neq x_0$ **și** $\|x - x_0\|<\delta$ **implică** $f(x)\in U$.

Observații. 1° În cazul spațiului R^p cu $p \geqslant 2$, nu am introdus puncte improprii, la infinit. Așadar, dacă $f : E\subset R^n \to R^m$, $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, atît punctul x_0 cît și limita l sînt puncte obișnuite, respectiv în spațiile R^n și R^m.

2° În cazul funcțiilor vectoriale de *o singură variabilă* (reală) $f: E\subset R\to R^m$, se pot considera și limitele $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ dacă $+\infty$ sau $-\infty$ sînt puncte de acumulare ale mulțimii E.

Definiția limitei, propoziția 1 și propoziția 3 conțin și acest caz.

3° În cazul funcțiilor *reale* de mai multe variabile f: $E\subset R^n\to R$, limita l poate fi $+\infty$ și $-\infty$.

Definiția, propoziția 1 și propoziția 4 de mai sus conțin și acest caz.

4° În cazul funcțiilor vectoriale de *o singură variabilă reală* $f : E\subset R\to R^m$ se pot defini limitele laterale într-un punct x_0, la fel ca și pentru funcțiile reale de o singură variabilă.

Dacă $x_p = (x_{1p}, x_{2p}, \ldots, x_{np})$ și $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, condiția $x_p \xrightarrow[p]{} a$ este echivalentă cu condițiile

$$x_{1p} \xrightarrow[p]{} a_1,\ x_{2p} \xrightarrow[p]{} a_2,\ \ldots,\ x_{np} \xrightarrow[p]{} a_n.$$

De aceea, în loc de $\lim_{x\to a} f(x)$, limita se mai notează și astfel:

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \cdots\cdots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Astfel, pentru o funcție de două variabile $f(x, y)$, limita sa în punctul x_0, y_0 se scrie

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y).$$

Se spune că aceasta este limita funcției f cînd x și y tind independent (dar simultan) către x_0 și, respectiv, y_0. În acest caz, propoziția 2 se poate transcrie astfel:

$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = l$, *dacă și numai dacă, pentru orice număr* $\varepsilon > 0$, *există un număr* $\delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încît oricare ar fi* $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ *din* E cu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ *și* $|y - y_0| < \delta(\varepsilon)$, *să avem* $\|f(x, y) - l\| < \varepsilon$.

Se definește limita funcției $f: E \subset R^n \to R^m$ relativ la o submulțime $A \subset E$, într-un punct de acumulare a al lui A, la fel ca și pentru funcții reale de o singură variabilă:

Un vector $l \in R^m$ este limita funcției f în punctul a relativ la submulțimea A, dacă pentru orice șir $x_p \to a$, $x_p \in A$, $x_p \neq a$, avem $f(x_p) \to l$. Se notează

$$l = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x).$$

Dacă $\lim_{x \to a} f(x)$ există, atunci și $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ există și cele două limite sînt egale. Dacă însă există $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$, nu rezultă neapărat că există $\lim_{x \to a} f(x)$.

În particular, dacă A este intersecția mulțimii E cu o *dreaptă*, care trece prin a, atunci $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ se numește limita funcției f *după o direcție*.

De exemplu, în cazul unei funcții $f(x, y)$ de două variabile reale, dacă ecuația dreptei este $y = h(x)$, limita se scrie $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ y = h(x)}} f(x, y)$. Se zice că aceasta este limita funcției f cînd x și y tind simultan dar *dependent* pe dreapta $y = h(x)$, respectiv către x_0 și y_0. În fapt, aceasta este o limită a funcției compuse de o singură variabilă $f(x, h(x))$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} f(x, h(x)).$$

Toate proprietățile limitelor de funcții reale, care nu implică relația de ordine și produsul, se păstrează și pentru funcțiile vectoriale și demonstrațiile sînt aceleași.

1) *Limita unei funcții vectoriale într-un punct, dacă există, este unică.*

2) *Dacă* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, *atunci* $\lim_{x \to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$.

Observație. Dacă $\lim_{x \to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$, nu rezultă că $\lim_{x \to x_0} f(x)$ există.

Dacă însă $\lim_{x \to x_0} \|f(x)\| = 0$, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *dacă și numai dacă* $\lim_{x \to x_0} [f(x) - l] = 0$, *adică dacă și numai dacă* $\lim_{x \to x_0} \|f(x) - l\| = 0$.

4) *Dacă* $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, *atunci există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît $f(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \neq x_0$ din $V \cap E$.*

5) *Funcția f are limită în x_0 dacă și numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît oricare ar fi x', $x'' \in V \cap E$, $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$, să avem $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.*

6) **Criteriu.** *Dacă* $f : E \to R^m$ *și* $h : E \to R$, *dacă* $\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$, *și dacă există un vector* $l \in R^m$ *și o vecinătate* V *a lui* x_0, *astfel încît să avem*

$$\|f(x) - l\| \leqslant h(x)$$

pentru orice $x \neq x_0$ *din* $V \cap E$, *atunci*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

7) *Dacă* $f : E \to R^m$ *și* $g : E \to R^m$ *au limite în* x_0, *atunci funcțiile* $f + g$, $fg : E \to R^m$ *au limită în* x_0 *și*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$$

8) *Dacă* $f : E \to R^m$ *și* $\varphi : E \to R$ *au limita în* x_0, *atunci funcția* $\varphi f : E \to R^m$ *are limită în* x_0 *și*

$$\lim_{x \to x_0} [\varphi(x) f(x)] = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) \lim_{x \to x_0} f(x).$$

În particular, pentru $\varphi(x) = \alpha$, deducem $\lim_{x \to x_0} \alpha\,(f(x)) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Observații. Funcțiile $f : E \to R^m$ care au limită în x_0 formează o algebră, iar operația de trecere la limită este liniară și multiplicativă pe acest spațiu.

Propoziția următoare reduce studiul limitelor de funcții vectoriale la cel al limitelor componentelor reale:

Propoziție. Fie funcția $f : E \subset R^n \to R^m$ **și** $f_1, f_2, \ldots, f_m : E \to R$ **componentele sale reale:** $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. **Atunci:** $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ **dacă și numai dacă** $\lim_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, **unde** $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \in R^m$.

Pentru demonstrație se folosește propoziția asemănătoare de la șirurile de puncte din R^m:

Fie $x_k \xrightarrow[k]{} x_0$, $x_k \in E$, $x_k \neq x_0$. Avem

$$f(x_k) \to l \Longleftrightarrow f_i(x_k) \to l_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

deci

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f_i(x) = l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Observații. 1° Toate proprietățile precedente se pot obține din această propoziție, dacă în prealabil s-au demonstrat aceste proprietăți pentru funcțiile reale *de mai multe variabile*. Demonstrațiile acestor proprietăți se fac însă mai simplu, folosind direct definițiile limitei vectoriale ca și în cazul funcțiilor reale de o singură variabilă.

2° Este posibil ca pentru o funcție vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ una din componentele sale reale să aibă limita infinită. În acest caz funcția vectorială nu mai are limită. Se poate extinde propoziția precedentă și în acest caz, dacă se adaugă spațiului R^n puncte la infinit.

Astfel, în cazul planului R^2, ar trebui să adăugăm o mulțime infinită de puncte la infinit, de forma:

$$(-\infty, -\infty);\ (-\infty, +\infty),\ (+\infty, -\infty),\ (+\infty, +\infty),\ (-\infty, a), (a, -\infty),$$
$$(+\infty, a),\ (a, +\infty),\ a \in R.$$

Această convenție ar complica studiul care urmează.
În asemenea situații este de preferat a cerceta limitele componentelor reale.

Exemple. 1) $f(x, y) = x + y$, definită pe R^2

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x + y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} (x + y) = a + b = f(a, b).$$

2) $f(x, y) = xy$, definită pe R^2

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} xy = ab = f(a, b).$$

3) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, definită pentru $y \neq 0$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = f(a, b), \text{ dacă } b \neq 0.$$

4) $f(x, y) = x^y$, definită pentru $x > 0$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} x^y = a^b = f(a, b), \text{ dacă } a > 0.$$

2. Limite iterate

Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcție vectorială de n variabile, $f: E \subset R^n \to R^m$. Din această funcție putem obține funcții vectoriale de o singură variabilă, și anume, funcțiile sale parțiale:

$$f_1 : x_1 \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$f_2 : x_2 \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n : x_n \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Se pot considera atunci limitele acestor funcții de o singură variabilă:

$$\lim_{x_i\to a_i} f_i(x_i) = \lim_{x_i\to a_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

dacă a_i este punct de acumulare al mulțimii $E_i = \{x_i \mid x_i \in R, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E\}$. Limita funcției f_i este un număr care depinde de celelalte $n-1$ variabile reale, diferite de x_i.

Se poate considera apoi

$$\lim_{x_j \to a_j} \lim_{x_i \to a_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad i \neq j.$$

Această limită este un număr care depinde de celelalte $n-2$ variabile diferite de x_i și x_j. Se poate considera limita iterată a acestei funcții în raport cu toate variabilele pe rînd. Această limită este un număr care nu mai depinde de nici una din variabile. Aceasta se numește *limita iterată* a funcției f.

De exemplu, pentru funcțiile de două variabile $f(x, y)$ se pot considera limitele iterate

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) \text{ și } \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

Se spune că acestea sînt limitele funcției $f(x, y)$ cînd x și y tind *succesiv*, respectiv către x_0 și y_0. Legătura dintre limite și limitele iterate este dată de următoarea

Propoziție. Dacă există limita funcției într-un punct și una din limitele iterate în acest punct, atunci aceste limite sînt egale.

Pentru a simplifica scrisul, vom da demonstrația în cazul funcțiilor de două variabile $f : E \subset R^2 \to R^m$. Fie (x_0, y_0) un punct de acumulare al mulțimii E; să presupunem că există limitele

$$l = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \text{ și } l_{12} = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y).$$

Vom arăta că $l = l_{12}$.

Pentru fiecare $x \in \mathrm{pr}_1 E$ să notăm

$$F(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y),$$

deci

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = l_{12}.$$

Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Deoarece $l = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, există o vecinătate V a lui (x_0, y_0), astfel încît să avem

$$\| f(x, y) - l \| < \varepsilon$$

oricare ar fi $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ din V. Deoarece pentru fiecare $x \in \mathrm{pr}_1 E$, există $\lim_{y \to y_0} f(x, y) = F(x)$, atunci

$$\lim_{y \to y_0} \| f(x, y) - l \| = \| F(x) - l \|.$$

Trecînd la limită în inegalitatea precedentă, obținem

$$\| F(x) - l \| \leqslant \varepsilon$$

pentru orice x, astfel ca $(x, y_0) \in V$. Rezultă atunci

$$\lim_{x \to x_0} \| F(x) - l \| = \| \lim_{x \to x_0} F(x) - l \| = \| l_{12} - l \| < \varepsilon.$$

Deoarece $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că $l = l_{12}$.

O b s e r v a ţ i i. 1° Dacă există numai una din cele trei limite

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x),\quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y),\quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y)$$

nu rezultă că şi celelalte două limite există.

Este posibil ca numai una sau numai două din aceste limite să existe.

2° Dacă limita nu există, limitele iterate pot exista amîndouă şi să fie diferite.

3° Este posibil ca, deşi (x_0, y_0) este punct de acumulare al mulţimii E, mulţimea $\{x \mid x\in R, (x, y)\in R\}$ să nu aibă pe x_0 ca punct de acumulare, oricare ar fi y. În acest caz nu are sens $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$, oricare ar fi y.

De exemplu, dacă E este un segment de dreaptă paralel cu axa Oy, proiecţia sa pe axa Ox este formată dintr-un singur punct.

3. Continuitatea funcţiilor vectoriale

Definiţia continuităţii funcţiilor reale de o singură variabilă se extinde şi pentru funcţii vectoriale.

Fie funcţia $f : E\subset R^n\to R^m$ şi un punct $x_0\in E$.

D e f i n i ţ i e. Se spune că funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît oricare ar fi $x\in V\cap E$ să avem $f(x)\in U$.

Următoarele propoziţii dau definiţii echivalente ale continuităţii:

P r o p o z i ţ i a 1. Funcţia f este continuă în punctul x_0, dacă şi numai dacă, pentru orice şir $x_p\xrightarrow[p]{} x_0$, $x_p\in E$, avem $f(x_p)\xrightarrow[p]{} f(x_0)$.

P r o p o z i ţ i a 2. Funcţia f este continuă în x_0, dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon>0$, există un număr $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încît oricare ar fi $x\in E$ cu $\|x-x_0\|<\delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$.

P r o p o z i ţ i a 3. Funcţia f este continuă în punctul x_0, dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon>0$, există o vecinătate V a lui x_0 (V depinde de ε) astfel încît, oricare ar fi $x\in V\cap E$, să avem $\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$.

P r o p o z i ţ i a 4. Funcţia f este continuă în punctul x_0, dacă şi numai dacă, pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$, există un număr $\delta>0$ (care depinde de U) astfel încît oricare ar fi $x\in E$ cu $\|x-x_0\|<\delta$ să avem $f(x)\in U$.

P r o p o z i ţ i a 5. Funcţia f este continuă în punctul $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in E$, dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon>0$ (sau pentru orice vecinătate U a lui $f(a)$) există un număr $\delta(\varepsilon)>0$, astfel încît oricare ar fi punctul $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E$ cu $|(x_1-a_1)|<\delta$, $|x_2-a_2|<\delta, \ldots, |x_n-a_n|<\delta$ să avem $\|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\|<\varepsilon$ (respectiv $f(x)\in U$).

Dacă x_0 este punct de acumulare pentru E se poate da o definiție a continuității cu ajutorul limitei:

Propoziția 6. Funcția f est econtinuă în punctul x_0 dacă și numai dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, adică dacă și numai dacă

$$\lim_{x\to x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = 0.$$

Se spune că funcția f este *continuă pe mulțimea* E, dacă este continuă în fiecare punct din E.

Proprietățile funcțiilor reale continue, care nu implică relația de ordine, rămîn valabile și pentru funcțiile vectoriale continue:

1) *Dacă funcția* $f(x)$ *este continuă în punctul* x_0 (sau pe E), *atunci funcția* $\|f(x)\|$ *este continuă în* x_0 (respectiv pe E).

Proprietatea reciprocă nu este în general adevărată.

2) *Dacă* f *este continuă în* x_0 *și* $f(x_0) \neq 0$, *există o vecinătate* V *a lui* x_0 *pe care funcția este diferită de* 0.

3) *Dacă* f *este continuă în* x_0, *există o vecinătate* V *a lui* x_0, *pe care funcția* f *este mărginită.*

4) *Dacă* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *există în* R^m, *atunci* f *se poate prelungi prin continuitate în punctul* x_0, *punînd* $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

5) *Dacă* f *și* g *sînt continue în* x_0 (sau pe E), *iar* $\varphi : E\to R$ *este continuă în* x_0 (sau pe E), *atunci funcțiile* $f+g, fg, (f|g)$ *și* φf *sînt continue în* x_0 (sau pe E). *În particular, funcția* αf *este continuă în* x_0 (sau pe E) *oricare ar fi* $\alpha \in R$.

Observație. Mulțimea funcțiilor vectoriale definite pe $E \subset R^n$ și continue în $x_0 \in E$ (sau pe E) este o *algebră*.

6) *Fie mulțimile* $E \subset R^n$ *și* $F \subset R^m$. *Dacă funcția* $f : E\to F$ *este continuă în punctul* $x_0 \in E$, *iar funcția* $g : F\to R^p$ *este continuă în punctul* $y_0 = f(x_0) \in F$, *atunci funcția compusă* $g\circ f : E\to R^p$ *este continuă în* $x_0 \in E$.

Dacă f este continuă pe E și g este continuă pe F, atunci funcția compusă $g\circ f$ este continuă pe E.

Propoziție. Funcția vectorială f: $E \subset R^n \to R^m$ este continuă într-un punct $x_0 \in E$, dacă și numai dacă fiecare din componentele sale reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$: $-E\to R$ este continuă în x_0.

Propoziția rezultă din inegalitățile

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leqslant \|f(x) - f(x_0)\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(x_0)|$$

aplicînd, de exemplu, definiția cu ε și δ a continuității.

O b s e r v a ț i e. Propoziția precedentă reduce studiul continuității funcțiilor vectoriale de mai multe variabile la acela al continuității componentelor lor reale de mai multe variabile.

Exemple. Funcțiile $f(x, y) = x + y$, $f(x, y) = xy$, $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $f(x, y) = x^y$ sînt continue pe toată mulțimea lor de definiție.

Fie $A \subset R$ și $f : A \to R$. *Dacă funcția f este continuă pe A, atunci funcția vectorială $x \to (x, f(x))$ definită pe A cu valori în plan este continuă pe A. Imaginea mulțimii A prin funcția vectorială $F(x) = (x, f(x))$ este chiar graficul funcției reale $f(x)$.*

4. Continuitate parțială

Fie funcția $f : E \subset R^n \to R^m$ și $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punct din E. Să considerăm funcția parțială (de o singură variabilă)

$$f_i : x_i \to f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

definită pe mulțimea

$$E_i = \{x_i \mid x_i \in R, (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in E\}.$$

Dacă funcția parțială f_i este continuă în punctul $a_i \in E$, spunem că funcția f este continuă (parțial) în raport cu variabila x_i în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

A spune că funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$ este continuă parțial în raport cu x_i în punctul a înseamnă că, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, oricare ar fi $x_i \in E_i$ cu $|x_i - a_i| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f_i(x_i) - f_i(a_i)\| < \varepsilon$, adică

$$\|f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)\| < \varepsilon.$$

Dacă funcția f este continuă în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, vom spune adesea că este continuă în acest punct *în raport cu ansamblul variabilelor*, pentru a deosebi de continuitatea parțială în raport cu cîte o variabilă.

P r o p o z i ț i e. Dacă funcția f este continuă într-un punct $a = (a_1, \ldots, a_n)$ (în raport cu ansamblul variabilelor), atunci ea este continuă în acest punct în raport cu fiecare variabilă.

Într-adevăr, dacă funcția f este continuă în punctul a, atunci:

Pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi punctul $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ cu $|x_1 - a_1| < \delta$, $|x_2 - a_2| < \delta$, $\ldots$, $|x_n - a_n| < \delta$, să avem

$$\|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\| < \varepsilon.$$

Rezultă atunci, în particular, că, dacă $|x_1 - a_1| < \delta$, $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$, avem

$$\|f(x_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\| < \varepsilon$$

și deci funcția f este continuă în raport cu variabila x_1 în punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Continuitatea în raport cu celelalte variabile se demonstrează la fel.

O b s e r v a ț i e. Dacă funcția f este continuă într-un punct în raport cu fiecare variabilă în parte, nu rezultă că ea este continuă în acest punct în raport cu ansamblul variabilelor.

Exemplu. Fie funcția $f(x, y)$ definită pe R^2 astfel:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ dacă } x \neq 0 \text{ și } y \neq 0, \ f(0, 0) = 0.$$

Avem $f(x, 0) \equiv 0$ pentru orice $x \in R$, deci $\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$, adică f este continuă în origine în raport cu variabila x.

De asemenea, $f(0, y) \equiv 0$ pentru orice $y \in R$, deci $\lim_{y \to 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0)$, adică f este continuă în origine în raport cu variabila y.

Dar funcția nu este continuă în origine (în raport cu ansamblul variabilelor) deoarece nu are limită în acest punct.

Într-adevăr, pentru $x \neq 0$ avem

$$f(x, y) = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Fie dreapta $y = mx$ care trece prin origine, cu coeficientul unghiular m. Dacă luăm șirul $(x_n, y_n) \to 0$ de puncte pe această dreaptă, avem $y_n = mx_n$ pentru orice $n \in N$ și $f(x_n, y_n) = \frac{m}{1 + m^2}$, deci $f(x_n, y_n) \to \frac{m}{1 + m^2}$.

Limita $\frac{m}{1 + m^2}$ *depinde* de dreapta pe care se află șirul de puncte $(x_n, y_n) \to 0$.

Pentru drepte diferite, cu coeficienți unghiulari diferiți, obținem limite diferite, deci funcția nu are limită în origine.

5. Funcții vectoriale uniform continue

Fie funcția $f : E \subset R^n \to R^m$.

D e f i n i ț i e. Funcția f este uniform continuă (pe E) dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi punctele $x', x'' \in E$, cu $\|x' - x''\| < \delta$, să avem $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

P r o p o z i ț i e. O funcție vectorială $f : E \subset R^n \to R^m$ este uniform continuă dacă și numai dacă toate componentele sale reale $f_1, f_2, \ldots, f_m : E \to R$ sînt uniform continue.

Propoziția rezultă din inegalitățile

$$|f_i(x') - f_i(x'')| \leqslant \|f(x') - f(x'')\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f_i(x') - f_i(x'')|$$

deoarece inegalitatea $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$ implică $|f_i(x') - f_i(x'')| < \varepsilon$, pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, n$, iar inegalitățile $|f_i(x') - f_i(x'')| < \frac{\varepsilon}{n}$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ implică $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

Propoziția precedentă reduce studiul funcțiilor vectoriale (de mai multe variabile) uniform continue la studiul continuității uniforme a componentelor lor reale (care sînt funcții reale de mai multe variabile).

Propoziție. Dacă funcția f este uniform continuă (în raport cu ansamblul variabilelor), atunci ea este uniform continuă în raport cu fiecare variabilă (pentru valori fixate ale celorlalte variabile).

Într-adevăr, a spune că f este uniform continuă înseamnă că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi punctele

$$x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \text{ și } x'' = (x''_1, \ldots, x''_n) \text{ din } E \text{ cu } |x' - x''| < \delta$$

să avem

$$\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon,$$

adică

$$\|f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) - f(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)\| < \varepsilon.$$

Dacă luăm $x'_2 = x''_2 = a_2, \ldots, x'_n = x''_n = a_n$, atunci

$$|x'_1 - x''_1| = \|(x'_1, a_2, \ldots, a_n) - (x'', a_2, \ldots, a_n)\|,$$

deci, dacă $|x'_1 - x''_1| < \varepsilon$, avem

$$\|f(x'_1, a_2, \ldots, a_n) - f(x''_1, a_2, \ldots, a_n)\| < \varepsilon,$$

adică f este uniform continuă în raport cu variabila x_1, atunci cînd se dau celorlalte variabile valori fixate $a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Continuitatea uniformă în raport cu celelalte variabile se demonstrează la fel.

Observație. Dacă f este uniform continuă în raport cu fiecare variabilă, nu rezultă că ea este uniform continuă.

Exemplu. Funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{dacă } x = y = 0 \end{cases},$$

definită pe pătratul $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, nu este continuă în origine (deci nu este uniform continuă).

Pentru orice $y \in [-1,1]$, funcția parțială $x \to f(x, y)$, definită pe intervalul compact $[-1,1]$, este continuă, deci uniform continuă.

De asemenea, pentru orice $x \in [-1,1]$, funcția parțială $y \to f(x, y)$, definită pe $[-1, 1]$, este continuă, deci uniform continuă.

6. Funcții vectoriale continue pe mulțimi compacte

Proprietățile funcțiilor reale de o singură variabilă, și continue pe o mulțime compactă, se păstrează și pentru funcțiile vectoriale și cu aceleași demonstrații (înlocuind modulul cu norma):

1) *O funcție vectorială continuă pe o mulțime compactă este mărginită pe această mulțime.*

2) *O funcție vectorială continuă pe o mulțime compactă este uniform continuă.*

3) *O funcție vectorială continuă transformă o mulțime compactă tot într-o mulțime compactă.*

4) *O funcție reală de n variabile, continuă pe o mulțime compactă $E \subset R^n$, își atinge efectiv marginile pe această mulțime.*

Observație. Pe spațiul R^m cu $m \geqslant 2$, nu s-a definit o relație de ordine, deci pentru funcțiile vectoriale cu valori în R^m nu au sens marginile acestei funcții.

În acest caz se poate enunța o proprietate pentru funcția reală $\|f(x)\|$:

5) *Dacă f este o funcție vectorială continuă pe o mulțime compactă E, atunci există un punct $x_M \in E$ astfel încît* $\|f(x_M)\| = \sup_{x \in E} \|f(x)\|$.

Se ține seama de faptul că funcția reală $\|f(x)\|$ este continuă pe E și se aplică proprietatea 4.

Observație. Fie $A \subset R$ o mulțime compactă și o funcție reală continuă $f : A \to R$. *Graficul funcției f este o mulțime compactă în plan.*

Într-adevăr, graficul lui f este egal cu imaginea mulțimii A prin funcția vectorială continuă $F(x) = (x, f(x))$ definită pe A cu valori în R^2.

7. Funcții vectoriale continue pe mulțimi conexe

Pentru funcțiile continue, pe toată mulțimea de definiție, se pot da anumite criterii de continuitate cu ajutorul imaginilor inverse.

Fie $E \subset R^n$, $E' \subset R^{n'}$ și funcția $f : E \to E'$ astfel ca $f(E) = E'$.

Propoziție. Fnncția f este continuă pe mulțimea E, dacă și numai dacă, pentru orice mulțime deschisă $G' \subset R^{n'}$, există o mulțime deschisă $G \subset R^n$, astfel ca

$$G \cap E = f^{-1}(G' \cap E').$$

Să presupunem întîi că f îndeplinește condiția din enunț și să arătăm că este continuă pe E. Fie $x_0 \in E$ oarecare și fie V' o vecinătate a lui $f(x_0)$; V' este deschisă în $R^{n'}$.

Conform presupunerii există deci o mulțime deschisă $G \subset R^n$, astfel ca $G \cap E = f^{-1}(V' \cap E')$. Dar $f(x_0) \in V' \cap E'$, deci $x_0 \in f^{-1}(V' \cap E')$, adică $x_0 \in G \cap E$. În particular $x_0 \in G$ și, deoarece G este deschisă, x_0 este punct interior al său; există deci o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $x_0 \in V \subset G$. Oricare ar fi $x \in V \cap E$ avem deci $x \in G \cap E = f^{-1}(V' \cap E')$, deci $f(x) \in V' \cap E'$, și deci $f(x) \in V'$. Așadar, f este continuă în x_0. Cum x_0 a fost ales arbitrar în E, rezultă că f este continuă pe E.

Reciproc, să presupunem că f este continuă pe E și fie $G' \subset R^{n'}$ o mulțime deschisă.

Dacă $f^{-1}(G' \cap E') = \varnothing$, atunci luăm $G = \varnothing$ (care este deschisă în R^n) și deci

$$G \cap E = \varnothing = f^{-1}(G' \cap E').$$

Să presupunem, așadar, că $f^{-1}(G' \cap E') \neq \varnothing$, adică $G' \cap E' \neq \varnothing$. Să notăm $H = f^{-1}(G' \cap E')$, deci $f(H) = G' \cap E'$ și să arătăm că există o mulțime deschisă G în R^n, astfel ca $G \cap E = H = f^{-1}(G' \cap E')$. Evident, $H \subset E$.

Fie $x_0 \in H$ oarecare; atunci $f(x_0) \in f(H) = G' \cap E' \subset G'$ și, deoarece G' este deschisă, $f(x_0)$ este punct interior al său; există o vecinătate V' a lui $f(x_0)$, astfel ca

$$f(x_0) \in V' \subset G'.$$

Deoarece f este continuă în x_0, lui V' îi corespunde o vecinătate V a lui x_0, astfel ca pentru orice $x \in V \cap E$ să avem $f(x) \in V'$, adică $f(V \cap E) \subset V' \subset G'$; deoarece avem, de asemenea, $f(V \cap E) E'$, rezultă că $f(V \cap E) \subset G' \cap E'$, și deci

$$V \cap E \subset f^{-1}(G' \cap E') = H.$$

Cum x_0 a fost ales arbitrar, deducem că pentru orice punct $x \in H$ există o vecinătate V_x a lui x, astfel ca

$$V_x \cap E \subset H.$$

Să notăm $G = \bigcup_{x \in H} V_x$. Evident, $H \bigcup \bigcup_{x \in H} V_x$, deci $H \subset G$; cum avem, de asemenea, $H \subset E$, rezultă că

$$H \subset G \cap E.$$

Pe de altă parte,

$$G \cap E = (\bigcup_{x \in H} V_x) \cap E = \bigcup_{x \in H} (V_x \cap E) \subset H.$$

Din incluziunile $H \subset G \cap E$ și $G \cap E = H$, deducem

$$G \cap E = H = f^{-1}(G' \cap E')$$

și propoziția este complet demonstrată.

Corolar. Funcția f este continuă pe E dacă și numai dacă, pentru orice mulțime închisă $M' \subset R^{n'}$, există o mulțime închisă $M \subset R^{n'}$, astfel ca

$$M \cap E = f^{-1}(M' \cup E').$$

Pentru demonstrație se folosește propoziția precedentă, cu mulțimile deschise $G' = \complement M'$ și $G = \complement M$.

Propoziție. Imaginea unei mulțimi conexe printr-o funcție continuă este o mulțime conexă.

Fie $E \subset R^n$ o mulțime conexă și o funcție continuă $f : E \to R^n$. Să notăm $E' = f(E)$ și să arătăm că E' este conexă.

Să presupunem prin absurd că E' n-ar fi conexă. Aceasta înseamnă că există două mulțimi deschise G_1' și G_2' în $R^{n'}$, astfel ca

$$E' \subset G_1' \cup G_2',\ G_1' \cap E' \neq \varnothing,\ G_2' \cap E' \neq \varnothing \text{ și } E' \cap G_1' \cap G_2' = \varnothing.$$

Deoarece f este continuă pe E, mulțimilor deschise G_1' și G_2' în $R^{n'}$ le corespund două mulțimi deschise G_1 și G_2 în R^n, astfel ca

$$G_1 \cap E = \overset{-1}{f}(G_1' \cap E'),\ G_2 \cap E = \overset{-1}{f}(G_2' \cap E').$$

Deoarece $G_2' \cap E' \neq \varnothing$ și $G_2' \cap E' \neq \varnothing$, deducem că

$$G_1 \cap E \neq \varnothing \text{ și } G_2 \cap E \neq \varnothing.$$

Deoarece $E' \cap G_1' \cap G_2' = \varnothing$, rezultă că $E \cap G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

Într-adevăr

$$E \cap G_1 \cap G_2 = (E \cap G_1) \cap (E \cap G_2) = \overset{-1}{f}(E' \cap G_1') \cap \overset{-1}{f}(E_2' \cap G_2') =$$

$$= \overset{-1}{f}((E' \cap G_1') \cap (E' \cap G_2')) = \overset{-1}{f}(G_1' \cap G_2' \cap E').$$

În sfîrșit, deoarece $E' \subset G_1' \cup G_2'$, rezultă că $E \subset G_1 \cup G_2$.

Într-adevăr, $E' = E' \cap (G_1' \cup G_2') = (E' \cap G_1') \cup (E' \cap G_2')$. Atunci

$$E = \overset{-1}{f}(E') = \overset{-1}{f}((E' \cap G_1') \cup (E' \cap G_2')) = \overset{-1}{f}(E' \cap G_1') \cup \overset{-1}{f}(E' \cap G_2') =$$

$$= (E \cup G_1) \cup (E \cap G_2) = E \cap (G_1 \cup G_2).$$

și deci

$$E \subset G_1 \cup G_2.$$

Presupunerea că E' nu este conexă conduce la existența a două mulțimi deschise G_1 și G_2 în R^n cu proprietățile următoare:

$$E' \subset G_1 \cup G_2,\ E' \cap G_1 \neq \varnothing,\ E \cap G_2 \neq \varnothing,\ E' \cap G_1 \cap G_2 = \varnothing$$

Aceasta înseamnă că mulțimea E nu este conexă, ceea ce contrazice ipoteza din enunțul propoziției. Urmează, așadar, că E' este conexă și propoziția este demonstrată.

Observații. 1° Există și alte funcții care transformă mulțimile conexe tot în mulțimi conexe, și care nu sînt continue.

Vom spune că o funcție are proprietatea lui Darboux dacă transformă mulțimile conexe tot în mulțimi conexe.

Rezultă că funcțiile vectoriale continue au proprietatea lui Darboux.

2° Fie $I \subset R$ un interval și o funcție reală continuă $f = I \to R$. *Graficul funcției f este o mulțime conexă în plan.*

Într-adevăr, graficul lui f este egal cu imaginea intervalului I prin funcția vectorială continuă $F(x) = (x, f(x))$ definită pe I cu valori în R^2.

8. Derivata funcţiilor vectoriale de o variabilă

Fie I un interval pe dreaptă, $f: I \to R^n$ o funcţie vectorială şi $f_1, f_2, \ldots, f_n: I \to R$ componentele sale reale

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Ca şi pentru funcţii reale, spunem că *funcţia f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ dacă există limita*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Limita însăşi se numeşte *derivata funcţiei f în punctul x_0* şi se notează cu $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă f este derivabilă în fiecare punct din I, spunem că f este derivabilă pe I.

Trebuie să observăm că derivata $f(x_0)$ este un vector din spaţiul R^n, iar funcţia derivată f' are valori în R^n.

Se definesc în mod asemănător derivatele de ordin superior.

Propoziţia următoare reduce studiul derivatei unei funcţii vectoriale la acela al derivatelor componentelor sale reale.

Propoziţie. Funcia f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ dacă şi numai dacă toate componentele sale reale $f_1, \ldots, f_n$ sînt derivabile în x_0. În acest caz avem

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_n'(x_0)).$$

În adevăr avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{f_1(x) - f_2(x_0)}{x - x_0}, \ldots, \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}\right).$$

Se aplică apoi proprietatea corespunzătoare de la limite de funcţii.

Corolar. Funcţia f este derivabilă pe I dacă şi numai dacă componentele sale reale sînt derivabile pe I. În acest caz avem

$$f' = (f_1', f_2', \ldots, f_n').$$

Proprietăţile funcţiilor reale derivabile, în care nu este implicată relaţia de ordine, rămîn adevărate şi pentru funcţii vectoriale derivabile.

1) *Dacă f este derivabilă în x_0 (sau pe I), atunci f este continuă în x_0 (sau pe I).*

2) *Dacă* $f, g : I \to R^n$ *sînt funcții derivabile în* x_0 *(sau pe* I*), iar* $\varphi : I \to R$ *este o funcție reală derivabilă în* x_0 *(sau pe* I*), atunci funcțiile* $f+g$, fg, $(f|g)$, φg, αf *sînt derivabile în* x_0 *(sau pe* E*) și avem*

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(fg)' = f'g + fg'$$
$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$$
$$(\varphi g)' = \varphi' g + \varphi g'$$
$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

Dacă, în plus, g *nu se anulează în* x_0 *(sau pe* I*), atunci* $\frac{f}{g}$ *este derivabilă în* x_0 *(sau pe* I*) și avem*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Demonstrațiile sînt aceleași ca și pentru funcții reale.

Teorema creșterilor finite nu mai este însă valabilă sub forma unei egalități, ci sub forma unei inegalități.

Teorema. **Fie** $f: I \to R^n$ **o funcție și** $a < b$ **două puncte din** I**. Dacă:**

1) f **este continuă pe intervalul închis** $[a, b]$;

2) f **este derivabilă pe intervalul deschis** (a, b); **atunci**

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \|f'(x)\| (b - a).$$

Dacă f' este nemărginită, avem $\sup_{a \leqslant x \leqslant b} \|f'(x)\| = +\infty$ și inegalitatea este satisfăcută.

Să presupunem că f' este mărginită și să alegem un număr oarecare $M > \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \|f'(x)\|$. Fie c un punct astfel ca $a < c < b$. Deoarece f este derivabilă în c avem

$$\lim_{x \to c} \frac{\|f(x) - f(c)\|}{|x - c|} = \|f'(c)\| < M.$$

Există o vecinătate $V \subset (a, b)$ a lui c, astfel încît să avem

$$\frac{\|f(x) - f(c)\|}{|x - c|} < M, \text{ pentru } x \neq c \text{ din } V,$$

deci

$$\|f(x) - f(c)\| \leqslant M|x - c|, \text{ pentru orice } x \in V.$$

Să notăm cu A mulțimea punctelor din $[a, b]$ care verifică inegalitatea precedentă. Mulțimea A nu este vidă, deoarece $V \subset A$. Mulțimea A este mărginită. Fie $a' = \inf A$ și $b' = \sup A$. Avem $a', b' \in [a, b]$. Deoarece f este continuă pe $[a, b]$, este continuă în a'. Luînd un șir $x_n \to a'$ de puncte din A avem

$$\|f(x_n) - f(c)\| < M|x_n - c|,$$

de unde, prin trecere la limită,

$$\|f(a') - f(c)\| \leqslant M\,|a' - c|.$$

La fel se arată că

$$\|f(b') - f(c)\| \leqslant M\,|b' - c|.$$

Atunci

$$\|f(b') - f(a')\| = \|f(b') - f(c) - (f(a') - f(c))\| \leqslant$$
$$\leqslant \|f(b') - f(c)\| + \|f(a') - f(c)\| \leqslant M\,(b' - c) + M\,|a' - c| = M\,(b' - c) +$$
$$+ M(c - a') = M(b' - a'),$$

adică

$$\|f(b') - f(a')\| \leqslant M(b' - a').$$

Să arătăm acum că $a' = a$ şi $b' = b$. Dacă, prin absurd, am avea $a < a'$, raţionînd ca mai sus cu a' în loc de c, putem găsi o vecinătate $V' \subset (a, b)$ a lui a', astfel încît să avem

$$\|f(x) - f(a')\| \leqslant M\,|x - a'|, \text{ pentru } x \in V'.$$

Atunci, pentru orice $x < a'$ din V' avem

$$\|f(x) - f(c)\| = \|f(x) - f(a') + f(a') - f(c)\| \leqslant \|f(x) - f(a')\| +$$
$$+ \|f(a') - f(c)\| \leqslant M\,|x - a| + M\,|a' - c| = M(a' - x) + M(c - a') = M(c - x),$$

deci orice $x < a'$ din V' aparţine mulţimii A, ceea ce contrazice faptul că a' este marginea inferioară a mulţimii A. Aşadar $a' = a$. La fel se arată că $b' = b$.

Inegalitatea de mai sus se scrie

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b - a).$$

Deoarece $M > \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \|f'(x)\|$ a fost ales arbitrar, deducem

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \|f'(x)\|\,(b - a)$$

şi teorema este demonstrată.

9. Viteza şi acceleraţia în mişcarea în spaţiu

Să considerăm un mobil M care se mişcă în spaţiul R^3 într-un interval de timp I. În fiecare moment $t \in I$ să notăm cu $r(t)$ punctul din R^3 în care se află mobilul M. Acest mobil descrie o traiectorie C, anume imaginea intervalului I prin funcţia vectorială $r(t)$. Dacă notăm cu $x(t)$, $y(t)$ şi $z(t)$ componentele vectorului $r(t)$, în fiecare moment t, atunci

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I \\ z = z(t) \end{cases}$$

este o reprezentare parametrică a traiectoriei mobilului M. Avem

$$r = (x,\ y,\ z) = xi + yj + zk.$$

Să presupunem că funcția vectorială $r(t)$ este derivabilă de două ori pe I.

Derivata întîi $r'(t)$ se numește *viteza mobilului* și se notează de obicei cu $v(t)$:

$$v(t) = r'(t) = (x'(t),\ y'(t),\ z'(t)) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k.$$

Viteza $v(t)$ este tot o funcție vectorială definită pe I. Pentru fiecare punct $t_0 \in I$, vectorul viteză $v(t_0)$ este tangent la curba C în punctul $r(t_0)$.

Derivata a doua $r''(t)$ se numește *accelerația* mobilului și se notează de obicei cu $a(t)$:

$$a(t) = v'(t) = r''(t) = (x''(t),\ y''(t),\ z''(t)) = x''(t)i + y''(t)j + z''(t)k.$$

Și accelerația este o funcție vectorială definită pe I.

10. Integrarea funcțiilor vectoriale de o variabilă

Fie $f\colon [a, b] \to R^n$ o funcție vectorială și $f_1, \ldots, f_n\colon [a, b] \to R$ componentele sale reale

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Ca și pentru funcții reale, spunem că *funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă există un vector $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n) \in R^n$ cu proprietatea că oricare ar fi șirul (d_n) de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu normele $\nu(d_n) \to 0$ și oricare ar fi punctele intermediare ξ_i în fiecare diviziune, șirul corespunzător $\sigma_{d_n}(f)$ al sumelor Riemanniene are limita I.*

Limita I se numește *integrala funcției f pe intervalul $[a, b]$* și se notează $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Propoziția următoare reduce studiul unei funcții vectoriale integrabile la acela al componentelor sale reale.

Propoziție. Funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă toate componentele sale reale, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt integrabile pe $[a, b]$. În acest caz

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \left(\int_a^b f_1\,\mathrm{d}x,\ \int_a^b f_2\,\mathrm{d}x,\ \ldots,\ \int_a^b f_n\,\mathrm{d}x\right).$$

Demonstrația folosește proprietatea corespunzătoare de la limite de funcții.

Folosind această propoziție, deducem că toate proprietățile integralei funcțiilor reale, în care nu intervine relația de ordine, rămîn adevărate pentru funcții vectoriale.

Dăm întîi următorul criteriu de integrabilitate:

1) *Funcția f este integrabilă dacă și numai dacă există un vector $I \in R^n$ cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît oricare ar fi diviziunea d cu norma $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ și oricare ar fi punctele intermediare, să avem $\|\sigma_d(f) - I\| < \varepsilon$.*

2) *Orice funcție integrabilă este mărginită.*

Din criteriul lui Lebesgue pentru funcții reale se deduce următorul criteriu pentru funcții vectoriale.

3) *f este integrabilă dacă și numai dacă este mărginită și continuă aproape peste tot.*

În particular, funcțiile continue sînt integrabile.

4) *Mulțimea funcțiilor integrabile $f:[a, b] \to R^n$ este o algebră, iar integrala $\int_a^b f\,dx$ este liniară pe această algebră.*

5) *Proprietatea de integrabilitate este ereditară. Dacă $a \leqslant c \leqslant b$, atunci*

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx.$$

6) *Dacă f este integrabilă, atunci funcția reală $\|f\|$ este integrabilă și avem*

$$\left\| \int_a^b f(x)\,dx \right\| \leqslant \int_a^b \|f(x)\|\,dx, \qquad a < b.$$

În adevăr, pentru fiecare sumă integrală avem

$$\|\sigma_d(f)\| = \left\|\sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)\right\| \leqslant \sum \|f(\xi_i)\|(x_{i+1}) = \sigma_d(\|f\|).$$

Se alege apoi un șir (d_n) de diviziuni cu norma $\nu(d_n) \to 0$ și se trece la limită.

7) *Dacă f este integrabilă și $\|f(x)\| \leqslant M$, atunci*

$$\left\| \int_a^b (f(x)\,dx \right\| \leqslant M(b - a).$$

8) *Funcția $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ este continuă.*

9) *Dacă f este continuă într-un punct x_0, atunci funcția $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ este derivabilă în x_0 și avem $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Spunem că *o funcție vectorială F: $[a, b] \to R^n$ este o primitivă a funcției vectoriale f:$[a, b] \to R^n$ dacă F este derivabilă și $F' = f$.*

Studiul primitivelor funcțiilor vectoriale se reduce la acele al primitivelor componentelor sale reale, cu ajutorul propoziției următoare.

Propoziție. Funcția vectorială $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ este o primitvă a funcției $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dacă și numai dacă pentru fiecare i funcția reală F_i este o primitivă a funcției f_i.

De aici deducem că orice funcție continuă are primitive. Are loc formula lui Leibniz-Newton.

Dacă f este integrabilă și are primitive pe $[a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

oricare ar fi primitiva F a lui f.

Are loc *formula de integrare prin părți*, atît pentru integrale nedefinite cît și pentru integrale definite, funcțiile f și g fiind ambele vectoriale sau una vectorială și alta scalară.

De asemenea, au loc *formulele de schimbare de variabilă*, în aceleași condiții ca și pentru funcții reale, funcția u fiind presupusă reală.

§ 6. Derivate parțiale. Diferențiale

1. Derivate parțiale

Fie $f(x, y)$ o funcție *reală* de două variabile definită pe o mulțime $E \subset R^2$ și fie (x_0, y_0) un punct interior al lui E.

Definiție. Spunem că funcția $f(x, y)$ are în punctul (x_0, y_0) derivată parțială în raport cu variabila x, dacă există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

și este finită. Limita însăși se numește derivata parțială în raport cu x a funcției $f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0) și se notează $f'_x(x_0, y_0)$ sau $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, sau $D_x f(x_0, y_0)$:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Se definește în mod asemănător derivata parțială în raport cu y a funcției $f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0), notată $f'_y(x_0, y_0)$ sau $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, sau $D_y f(x_0, y_0)$, prin egalitatea

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

dacă limita există și este finită.

În loc de „derivata parțială în raport cu x (respectiv cu y)" se mai spune derivata parțială în raport cu prima variabilă (respectiv cu a doua variabilă) și se notează $D_1 f(x_0, y_0)$ (respectiv $D_2 f(x_0, y_0)$), mai ales atunci cînd nu este necesar să se specifice modul în care se notează variabilele.

Spunem că funcția $f(x, y)$ are derivată parțială în raport cu x (respectiv cu y) pe o mulțime $A \subset E$, dacă are derivată parțială în raport cu x (respectiv cu y) în fiecare punct $(x, y) \in A$.

Dacă funcția f are derivată parțială în raport cu x (respectiv cu y) pe mulțimea A, funcția $f_x(x,y)$ (respectiv funcția $f'_y(x,y)$) definită pe A se numește derivată parțială a funcției f în raport cu x (respectiv în raport cu y) și se notează $f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, D_x f, D_1 f$ (respectiv $f'_y, \frac{\partial f}{\partial y}, D_y f, D_2 f$).

În loc să spunem că funcția f are derivată parțială în raport cu x (respectiv cu y) într-un punct (x, y) sau pe A, se spune adesea că derivata f'_x (respectiv derivata f'_y) există în punctul (x, y) sau pe A.

Practic derivata parțială f'_x se calculează considerînd pe y *constant* și derivînd ca o funcție de o singură variabilă, x. Derivata parțială în raport cu y se calculează în mod asemănător.

Exemple. 1) Fie funcția $f(x, y) = x^2y^3 - x^y$ definită pe semiplanul deschis $x > 0$. Avem

$$f'_x(x, y) = 2xy^3 - yx^{y-1}, \; f'_y(x, y) = 3x^2y^2 - x^y \ln x.$$

2) $f(x, y) = x + y$ definită pe R^2

$$f'_x(x, y) \equiv 1, \; f'_y(x, y) \equiv 1.$$

3) $f(x, y) = xy$ definită pe R^2

$$f'_x(x, y) = y, \; f'_y(x, y) = x.$$

4) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ definită pentru orice (x, y) cu $y \neq 0$

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{y}, \; f'_y(x, y) = -\frac{x}{y^2}.$$

O b s e r v a ț i i. 1° Derivata parțială a funcției $f(x, y)$ în raport cu x, în punctul (x_0, y_0), se poate defini chiar dacă (x_0, y_0) nu este punct interior al lui E.

Dacă mulțimea E conține un segment de dreaptă paralel cu axa Ox, care trece prin punctul (x_0, y_0), atunci are sens limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

deoarece (x_0, y_0) este punct de acumulare al acestui segment. În acest caz, se poate defini $f'_x(x_0, y_0)$. De asemenea, dacă E conține un segment de dreaptă paralel cu axa Oy care trece prin (x_0, y_0), se poate defini $f'_y(x_0, y_0)$.

Dacă mulțimea E nu conține nici un segment de dreaptă care să treacă prin $(x_0 y_0)$ și care să fie paralel cu una din axe, atunci nu are sens nici una din derivatele parțiale în punctul (x_0, y_0).

De exemplu, dacă E este un segment de dreaptă neparalel cu axa Ox, sau o circumferință, derivatele parțiale nu au sens în nici un punct din E.

2° Să considerăm proiecția $E(y_0)$ pe axa Ox a mulțimii punctelor din E care au ordonata y_0:

$$E(y_0) = \{x \mid x \in R, (x, y_0) \in E\}.$$

Mulțimea $E(y_0)$ conține punctul x_0 în interiorul său.

Să considerăm funcția parțială

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

definită pentru $x \in E(y_0)$. Funcția $f(x, y)$ are derivata parțială în raport cu x în punctul (x_0, y_0), dacă și numai dacă funcția $\varphi(x)$ de o singură variabilă este derivabilă în punctul x_0. În acest caz,

$$f'_x(x_0, y_0) = \varphi'(x_0).$$

În mod asemănător, să considerăm mulțimea

$$E(x_0) = \{y \mid y \in R, \quad (x_0, y) \in E\}$$

și funcția parțială definită pe $E(x_0)$:

$$\psi(y) = f(x_0, y).$$

Funcția $f(x, y)$ are derivata parțială în raport cu y în (x_0, y_0) dacă și numai dacă funcția $\psi(y)$ este derivabilă în y_0. În acest caz avem

$$f'_y(x_0, y_0) = \psi'(y_0).$$

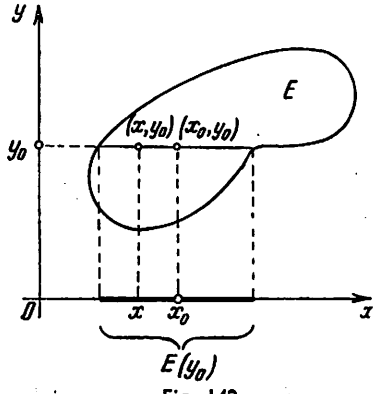


Fig. 142

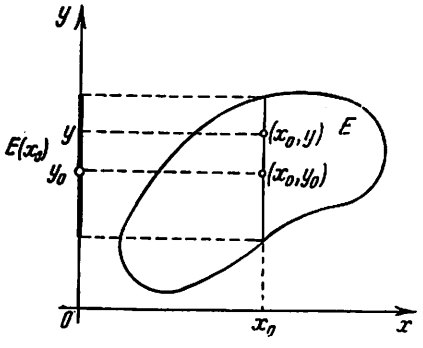


Fig. 143

Propoziția 1. Dacă derivata parțială f'_x (respectiv f'_y) există în punctul (x_0, y_0), atunci f este continuă în punctul (x_0, y_0) în raport cu x (respectiv cu y).

Într-adevăr, deoarece funcția $\varphi(x) = f(x, y_0)$ este derivabilă în x_0, ea este continuă în x_0. Aceasta înseamnă că funcția $f(x, y)$ este continuă parțial în raport cu x în punctul (x_0, y_0).

Observație. Dacă există ambele derivate parțiale $f'_x(x_0, y_0)$ și $f'_y(x_0, y_0)$, atunci funcția $f(x, y)$ este continuă în (x_0, y_0) în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu în mod necesar în raport cu ansamblul variabilelor.

Exemplu. Fie funcția $f(x, y)$ definită pe R^2 astfel:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \text{ și } f(0, 0) = 0.$$

Avem $f(x, 0) \equiv 0$, deci $f'_x(x, 0) \equiv 0$ și $f'_x(0, 0) = 0$. De asemenea, $f'_y(0, 0) = 0$. Funcția $f(x, y)$ are în origine derivate parțiale în raport cu fiecare variabilă, dar nu este continuă

în acest punct. Într-adevăr, pe dreapta $y = mx$, $(m \neq 0)$, funcția este constantă:

$$f(x, y) = \frac{mx^2}{x^2 + mx^2} = \frac{m}{1 + m^2}, \quad x \neq 0,$$

deci $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \dfrac{m}{1 + m^2} \neq f(0, 0)$.

Propoziția 2. **Fie (x_0, y_0) un punct interior al lui E. Dacă derivatele parțiale f'_x și f'_y există pe o vecinătate V a lui (x_0, y_0) atunci pentru orice punct $(x, y) \in V$ există un număr ξ cuprins între x_0 și x și un număr η cuprins între y_0 și y astfel încît:**

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(\xi, y)\,(x - x_0) + f'_y(x_0, \eta)\,(y - y_0).$$

Să alegem un punct arbitrar $(x, y) \in V$ și să-l menținem fix. Avem

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0).$$

Să notăm

$$\varphi(t) = f(t, y), \ \psi(t) = f(x_0, t), \ (t, y) \in V, \ (x_0, t) \in V.$$

Funcțiile $\varphi(t)$ și $\psi(t)$ sînt derivabile:

$$\varphi'(t) = f'_x(t, y), \ \psi'(t) = f'_y(x_0, t).$$

Aplicînd teorema creșterilor finite funcțiilor $\varphi(t)$ și $\psi(t)$, deducem că există un punct ξ cuprins între x_0 și x, astfel ca

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'_x(\xi)\,(x - x_0),$$

adică

$$f(x, y) - f\,(x_0, y) = f'_x(\xi, y)\,(x - x_0)$$

și există un punct η cuprins între y_0 și y, astfel ca

$$\psi(y) - \psi(y_0) = \psi'_y(\eta)\,(y - y_0),$$

adică

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, \eta)\,(y - y_0).$$

Atunci

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(\xi, y)\,(x - x_0) + f'_y(x_0, \eta)\,(y - y_0).$$

Această egalitate se numește *formula lui Lagrange* pentru funcții de două variabile. Această formulă va fi precizată mai departe, astfel:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(\xi, \eta)\,(x - x_0) + f'_y(\xi, \eta)\,(y - y_0).$$

O b s e r v a ț i e. Notînd $\varphi(t) = f(t, y_0)$, $\psi(t) = f(x, t)$ și, raționînd ca mai sus, deducem că există un număr ξ' cuprins între x_0 și x și un număr η' cuprins între y_0 și y, astfel încît

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(\xi', y_0)(x - x_0) + f'_y(x, \eta')(y - y_0).$$

P r o p o z i ț i a 3. Fie (x_0, y_0) un punct interior al lui E. Dacă funcția f are derivate parțiale mărginite într-o vecinătate V a lui (x_0, y_0), atunci ea este continuă în (x_0, y_0) (în raport cu ansamblul variabilelor).

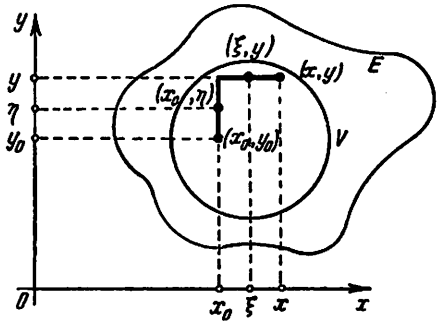


Fig. 144

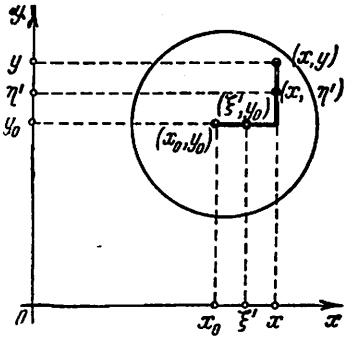


Fig. 145

Prin ipoteză, există un număr M, astfel ca

$$|f'_x(x, y)| \leqslant M \text{ și } |f'_y(x, y)| \leqslant M \text{ pentru orice } (x, y) \in V.$$

Avem

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant |f'_x(\xi, y)(x - x_0) + f'_y(x, \eta)(y - y_0)| \leqslant$$
$$\leqslant M(|x - x_0| + |y - y_0|).$$

Dar $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (|x - x_0| + |y - y_0|) = 0$, și deci

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} |f(x, y) - f(x_0, y_0| = 0,$$

de unde

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

adică f este continuă în (x_0, y_0).

C o r o l a r u l 1. Dacă f'_x și f'_y există pe o vecinătate a lui (x_0, y_0) și sînt continue în (x_0, y_0), atunci funcția f este continuă în (x_0, y_0).

Într-adevăr, dacă f'_x și f'_y sînt continue în (x_0, y_0), există o vecinătate V a lui (x_0, y_0) pe care aceste funcții sînt mărginite.

Corolarul 2. Dacă derivatele parțiale f'_x și f'_y există pe E și sînt continue sau sînt mărginite pe E, atunci funcția f este continuă pe E.

Observații. 1° Dacă $f(x, y, z)$ este o funcție reală de trei variabile definită pe o mulțime $E \subset R^3$ și dacă $(a, b, c) \in E$, se definesc derivatele sale parțiale, în număr de trei, astfel:

$$\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial x} = f'_x(a, b, c) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b, c) - f(a, b, c)}{x - a},$$

$$\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial y} = f'_y(a, b, c) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y, c) - f(a, b, c)}{y - b},$$

$$\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial z} = f'_z(a, b, c) = \lim_{z \to c} \frac{f(a, b, z) - f(a, b, c)}{z - c}.$$

Exemplu. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ definită pe R^3;

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad f'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$(x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

2° Dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcție reală de n variabile definită pe o mulțime $E \subset R^n$, ea poate avea n derivate parțiale într-un punct $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E$. De exemplu, derivata parțială în raport cu x_i se definește astfel:

$$\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_i} = f'_{x_i}(a_1, \ldots, a_n) =$$

$$= \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{x_i - a_i}.$$

3° Deoarece derivatele parțiale ale unei funcții de mai multe variabile sînt, de fapt, derivatele funcțiilor sale parțiale care sînt funcții de o singură variabilă, rezultă că *operațiile algebrice efectuate asupra funcțiilor care au derivate parțiale duc tot la funcții care au derivate parțiale, iar regulile de derivare a sumei, diferenței, produsului, cîtului etc. sînt aceleași ca și pentru funcții de o variabilă.*

4° Fie $f(x, y)$ o funcție *vectorială* de două variabile definită pe o mulțime $E \subset R^2$ cu valori în R^m, și $(a, b) \in E$. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_m$ componentele *reale* ale funcției vectoriale f:

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Se spune că funcția vectorială f este derivată parțială în raport cu x în punctul (a, b), dacă toate componentele sale reale au derivată parțială în raport cu x în punctul (a, b).

Derivata parțială $\frac{\partial f(a, b)}{\partial x}$ se definește ca fiind *vectorul* din R^m care are drept componente derivatele parțiale în raport cu x ale funcțiilor $f_1, f_2, \ldots, f_m$

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1(a, b)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial f_m(a, b)}{\partial x}\right) \in R^m.$$

Această derivată parțială se poate defini direct prin egalitatea

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = f'_x(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \in R^m,$$

unde limita sa consideră în R^m.

La fel se definesc derivatele parțiale ale unei funcții vectoriale de n variabile cu valori în R^m, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Toate proprietățile relative la derivatele parțiale ale funcțiilor reale de două variabile rămîn adevărate și pentru derivatele parțiale ale funcțiilor reale sau vectoriale de mai multe variabile.

2. Diferențiabilitatea funcțiilor de mai multe variabile

Fie $f(x, y)$ o funcție reală de două variabile definită pe o mulțime $E \subset R^2$ și (a, b) un punct *interior* al lui E.

Definiție. Se spune că funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul (a, b) dacă există două numere reale λ și μ, și o funcție $\omega(x, y)$ definită pe E, continuă în punctul (a, b) și nulă în acest punct:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0,$$

astfel încît pentru orice punct $(x, y) \in E$ să avem egalitatea:

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Dacă E este o mulțime *deschisă*, se spune că *f este diferențiabilă pe E dacă este diferențiabilă în fiecare punct din E.*

Observații. 1° În această definiție, faptul esențial este că $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = 0$.

Este suficient ca funcția $\omega(x, y)$ care verifică egalitatea precedentă să fie definită numai pe o vecinătate V a lui (a, b) cu excepția punctului (a, b), deoarece în punctul (a, b) se poate prelungi prin continuitate, punînd $\omega(a, b) = 0$, iar în punctele $(x, y) \in V$ se definește prin egalitatea

$$\omega(x, y) = \frac{f(x, y) - f(a, b) - \lambda(x - a) - \mu(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}},$$

astfel încît funcția prelungită $\omega(x, y)$ verifică egalitatea de definiție a diferențiabilității, pentru orice $(x, y) \in E$.

2° Pentru simplificarea scrisului, vom nota

$$\rho = \rho(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

ρ reprezintă distanța dintre punctele (x, y) și (a, b), adică

$$\rho = \| (x, y) - (a, b) \| = \| (x-a, y-b) \|.$$

Cu această notație, egalitatea de definiție a diferențiabilității se scrie

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda (x-a) + \mu(y-b) + \omega(x, y)\rho.$$

Avem $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ y\to b}} \rho(x, y) = 0.$

3° Deoarece $|x-a| \leqslant \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ și

$|y-b| \leqslant \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, avem

$$\frac{|x-a|}{\rho(x, y)} \leqslant 1 \text{ și } \frac{|y-b|}{\rho(x, y)} \leqslant 1.$$

4° Chiar dacă funcția f nu este diferențiabilă, în punctul (a, b) pentru două numere date λ și μ, există o *singură* funcție ω (x, y) definită pe E (cu excepția lui (a, b)), care verifică egalitatea

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x-a) + \mu(y-b) + \omega(x, y)\rho$$

pentru orice $(x, y) \in E$, diferit de (a, b).

Într-adevăr, dacă o altă funcție $\omega'(x, y)$ verifică egalitatea

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x-a) + \mu(y-b) + \omega'(x, y)\rho$$

pentru orice $(x, y) \in E$, diferit de (a, b), atunci pentru $(x, y) \neq (a, b)$ avem

$$\omega(x, y) = \frac{f(x, y) - f(a, b) - \lambda(x-a) - \mu(y-b)}{\rho}$$

și

$$\omega'(x, y) = \frac{f(x, y) - f(a, b) - \lambda(x-a) - \mu(y-b)}{\rho},$$

de unde $\omega(x, y) = \omega'(x, y)$ pentru orice $(x, y) \neq (a, b)$ din E.

Funcțiile ω și ω' pot fi diferite numai în punctul (a, b). Dacă punem condiția ca aceste funcții să aibă valoarea 0 în punctul (a, b), atunci ele sînt egale pe toată mulțimea E.

Înainte de a trece la studiul proprietăților funcțiilor diferențiabile să stabilim un rezultat care va fi util mai departe.

Lemă. Dacă funcția $\omega(x, y)$, definită pe E, are limita 0 în punctul (a, b), atunci există două funcții ω_1 și ω_2 definite pe E care au limita 0 în (a, b) și care verifică egalitatea:

$$\omega(x, y)\rho = \omega_1(x, y)\ (x-a) + \omega_2(x, y)\ (y-b),\ (x, y) \in E.$$

Reciproc, dacă funcțiile ω_1 și ω_2, definite pe E, au limita 0 în punctul (a, b), atunci există o funcție $\omega(x, y)$ cu limita 0 în punctul (a, b), care să verifice egalitatea precedentă.

Să presupunem întîi că se dă funcția $\omega(x, y)$ cu

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = 0.$$

Definim funcțiile ω_1 și ω_2 astfel:

$$\omega_1(x, y) = \omega(x, y)\frac{x-a}{\rho(x, y)}, \quad \omega_2(x, y) = \omega(x, y)\frac{y-b}{\rho(x, y)}, \quad (x, y) \neq (a, b).$$

Atunci

$$|\omega_1(x, y)| = |\omega(x, y)|\frac{|x-a|}{\rho} \leqslant |\omega(x, y)|,$$

deci

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega_1(x, y) = 0$$

și la fel se arată că

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega_2(x, y) = 0.$$

Pe de altă parte, pentru $(x, y) \neq (a, b)$ avem

$$\omega_1(x, y)(x-a) + \omega_2(x, y)(y-b) = \omega(x, y)\frac{(x-a)^2}{\rho(x, y)} + \omega(x, y)\frac{(y-b)^2}{\rho(x, y)} =$$

$$= \omega(x, y)\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{\rho(x, y)} = \omega(x, y)\rho(x, y).$$

Reciproc, să presupunem că sînt date funcțiile $\omega_1(x, y)$ și $\omega_2(x, y)$ cu

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Definim atunci funcția $\omega(x, y)$ astfel:

$$\omega(x, y) = \frac{\omega_1(x, y)(x-a) + \omega_2(x, y)(y-b)}{\rho(x, y)}, \quad (x, y) \neq (a, b),$$

deci

$$\omega(x, y)\rho(x, y) = \omega_1(x, y)(x-a) + \omega_2(x, y)(y-b),$$

pentru orice $(x, y) \in E$, și

$$|\omega(x, y)| \leqslant |\omega_1(x, y)|\frac{|x-a|}{\rho(x, y)} + |\omega_2(x, y)|\frac{|y-b|}{\rho(x, y)} \leqslant$$

$$\leqslant |\omega_1(x, y)| + |\omega_2(x, y)|,$$

de unde

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = 0.$$

Observație. Pentru o funcție ω dată putem găsi mai multe perechi de funcții ω_1 și ω_2 care să verifice lema precedentă.

Se poate lua, de exemplu,

$$\omega_1(x, y) = \omega(x, y) \frac{\rho(x, y)}{|x-a| + |y-b|} \frac{|x-a|}{x-a},$$

$$\omega_2(x, y) = \omega(x, y) \frac{\rho(x, y)}{|x-a| + |y-b|} \frac{|y-b|}{y-b}.$$

Pentru două funcții date ω_1 și ω_2, există o singură funcție ω definită pe E (cu excepția lui (a, b)) care să verifice lema.

Folosind această lemă, rezultă imediat

Propoziția 3. Funcția f este diferențiabilă în punctul (a, b) dacă și numai dacă există două numere reale λ și μ, și două funcții ω_1 și ω_2 definite pe E, continue în (a, b) și nule în acest punct:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega_i(x, y) = \omega_i(a, b) = 0, \; i = 1, 2$$

astfel încît pentru orice $(x, y) \in E$ să avem egalitatea

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x-a) + \mu(y-b) + \omega_1(x, y)(x-a) + \omega_2(x, y)(y-b).$$

Această egalitate se poate scrie și astfel:

$$f(x, y) - f(a, b) = [\lambda + \omega_1(x, y)](x-a + [\mu + \omega_2(x, y)](y-b).$$

Observație. Ca și în definiția diferențiabilității este suficient ca funcțiile ω_1 și ω_2 să fie definite pe o vecinătate V a lui (a, b), cu excepția punctului (a, b), dar să aibă limita 0 în acest punct. Ele se prelungesc atunci prin continuitate în punctul (a, b), iar în afara lui V se prelungesc în mod unic, astfel încît să fie verificată egalitatea de mai sus.

Propoziția 4. Dacă funcția f este diferențiabilă în punctul (a, b), atunci ea are derivate parțiale în (a, b) și

$$f'_x(a, b) = \lambda, \; f'_y(a, b) = \mu.$$

Egalitatea de definiție a diferențiabilității se scrie atunci astfel:

$$f(x, y) - f(a, b) = f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b) + \omega(x, y)\rho.$$

sau

$$f(x,y) - f(a, b) = [f'_x(a, b) + \omega_1(x, y)](x - a) + [f'_y(a,b) + \omega_2(x, y)](y - b).$$

Într-adevăr, dacă în egalitatea de definiție a diferențiabilității,

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

se ia $y = b$, se obține

$$f(x, b) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \omega(x, b)\,|x - a|.$$

Pentru $x \neq a$ deducem

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lambda + \omega(x, b)\frac{|x - a|}{x - a}.$$

Dar $|\omega(x, b)\frac{|x - a|}{x - a}| = |\omega(x, b)|$ și $\lim\limits_{x\to 0}|\omega(x, b)| = |\omega(a, b)| = 0$,

deci

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lambda,$$

adică funcția f are în punctul (a, b) derivata parțială în raport cu x și $f'_x(a, b) = \lambda$.

Se demonstrează în mod analog că f are în punctul (a, b) derivata parțială în raport cu y și $f'_y(a, b) = \mu$.

Corolar. Dacă f este diferențiabilă pe E, atunci ea are derivate parțiale f'_x și f'_y pe E.

Observație. Propoziția reciprocă nu este adevărată: există funcții care au derivate parțiale dar care nu sînt diferențiabile.

Exemplu. Funcția $f(x, y)$ definită pe R^2 astfel:

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \text{ și } f(0, 0) = 0$$

are derivate parțiale nule în origine:

$$f(x, 0) \equiv 0, \text{ deci } f'_x(x, 0) \equiv 0 \text{ și } f'_x(0, 0) = 0;$$

$$f(0, y) \equiv 0, \text{ deci } f'_y(0, y) \equiv 0 \text{ și } f'_y(0, 0) = 0.$$

Avem apoi, pentru $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 = \frac{xy}{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2} =$$

$$= f'_x(0, 0)(x - 0) + f'_y(0, 0)(y - 0) + \frac{xy}{x^2 + y^2}\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}.$$

Dar funcția $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ *nu are limită* în origine, deci funcția f nu este diferențiabilă în origine.

Așadar, pentru funcții de două sau mai multe variabile, noțiunea de diferențiabilitate nu este echivalentă cu aceea de derivabilitate parțială.

Propoziția 5. Dacă funcția f este diferențiabilă în punctul (a, b), atunci ea este continuă în acest punct.

Într-adevăr, toți termenii din membrul drept al egalității

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\rho,$$

prin care se definește diferențiabilitatea, au limita 0 în punctul (a, b), deci

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} [f(x, y) - f(a, b)] = 0,$$

de unde

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = f(a, b),$$

adică f este continuă în (a, b).

Corolar. Dacă f este diferențiabilă pe E atunci ea este continuă pe E.

Observații. 1° Propoziția reciprocă nu este adevărată: există funcții continue care nu sînt diferențiabile.

Exemplu. Funcția $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ definită pe R^2 este continuă în orice punct.

Avem $f(x, 0) = |x|$ și funcția $|x|$ nu este derivabilă în punctul 0, deci $f'_x(0, 0)$ nu există. La fel se arată că $f'_y(0, 0)$ nu există. Rezultă că funcția f nu este diferențiabilă în origine, deoarece nu are derivate parțiale în acest punct.

2° Chiar dacă funcția f are derivate parțiale și este și continuă într-un punct, nu rezultă că este diferențiabilă în acel punct.

Exemplu. Funcția $f(x, y)$ definită pe R^2 astfel:

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \text{ și } f(0, 0) = 0$$

are derivate parțiale în origine, $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$ și este continuă în origine, deoarece

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}}|y| \leqslant |y|$$

și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y| = 0$, deci

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0).$$

După cum s-a văzut într-un exemplu precedent, această funcție nu este diferențiabilă în origine.

Ultimele două propoziții arată că existența derivatelor parțiale și continuitatea unei funcții sînt condiții necesare (dar nu suficiente) pentru diferențiabilitatea sa.

Propoziția următoare dă condiții suficiente de diferențiabilitate.

Propoziția 6. Dacă funcția f are derivate parțiale f'_x și f'_y într-o vecinătate V a lui (a, b) și dacă aceste derivate parțiale sînt continue în (a, b), atunci funcția f este diferențiabilă în (a, b).

Aplicînd formula lui Lagrange, pentru fiecare punct $(x, y) \in V$, există un număr ξ cuprins între a și x și un număr η cuprins între b și y, astfel încît

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) &= f'_x(\xi, y)\ (x - a) + f'_y(a, \eta)\ (y - b) = \\ &= f'_x(a, b)\ (x - a) + f'_y(a, b)\ (y - b) + \\ &+ [f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b)]\ (x - a) + [f'_y(a, \eta) - f'_y(a, b)]\ (x - b) = \\ &= f'_x(a, b)\ (x - a) + f'_y(a, b)\ (y - b) + \omega_1(x, y)\ (x - a) + \omega_2(x, y)\ (y - b), \end{aligned}$$

unde am notat

$$\omega_1(x, y) = f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b),$$
$$\omega_2(x, y) = f'_y(a, \eta) - f'_y(a, b),$$

pentru $(x, y) \in V$. Să arătăm că aceste funcții au limita 0 în punctul (a, b). Pentru aceasta, fie $(x_n, y_n) \to (a, b)$ un șir oarecare de puncte din V, adică $x_n \to a$ și $y_n \to b$. Raționînd ca mai sus, pentru fiecare punct (x_n, y_n) găsim un număr ξ_n cuprins între a și x_n și un număr η_n cuprins între b și y_n care verifică formula lui Lagrange, deci pentru care

$$\omega_1(x_n, y_n) = f'_x(\xi_n, y_n) - f'_x(a, b),$$
$$\omega_2(x_n, y_n) = f'_y(a, \eta_n) - f'_y(a, b).$$

Să observăm că, deoarece $x_n \to a$, iar ξ_n se află între a și x_n, avem $\xi_n \to a$; de asemenea, $\eta_n \to b$. Deoarece funcțiile f'_x și f'_y sînt continue în (a, b), deducem

$$f'_x(\xi_n, y_n) \to f'_x(a, b),$$
$$f'_y(a, \eta_n) \to f'_y(a, b),$$

deci $\omega_1(x_n, y_n) \to 0$ și $\omega_2(x_n, y_n) \to 0$. Deoarece șirul $(x_n, y_n) \to (a, b)$ a fost ales arbitrar, rezultă

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega_1(x, y) = 0 \text{ și } \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega_2(x, y) = 0.$$

Funcțiile ω_1 și ω_2 se prelungesc apoi în mod unic în exteriorul vecinătății V, astfel încît să avem

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) = f'_x(a, b)\ (x - a) + f'_y(a, b)\ (y - b) + \omega_1(x, y)\ (x - a) + \\ + \omega_2(x, y)\ (y - b), \end{aligned}$$

deci f este diferențiabilă în (a, b).

Corolar. **Dacă derivatele parțiale f'_x și f'_y există și sînt continue pe E, atunci f este diferențiabilă pe E.**

Observație. Propoziția reciprocă nu este adevărată: există funcții diferențiabile într-un punct, ale căror derivate parțiale nu sînt continue în acest punct.

Exemplu. Fie funcția $f(x, y)$ definită pe R^2 astfel:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \text{ și } f(0, 0) = 0.$$

Să arătăm mai întîi că funcția este diferențiabilă în origine. Pentru $(x, y) \neq (0,0)$ avem

$$f(x, y) - f(0, 0) = (x^2 + y^2) \text{ sau } \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) + \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}.$$

Notînd $\omega(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$, avem

$$|\omega(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$$

și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ deci $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \omega(x, y) = 0$.

Așadar, funcția f este diferențiabilă în origine. Rezultă în particular $f'_x(0, 0) = 0$ și $f'_y(0, 0) = 0$.

Să calculăm acum derivatele parțiale în punctele $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f'_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Aceste derivate parțiale nu au limită în origine și deci cu atît mai mult nu sînt continue în origine, deoarece funcțiile

$$\sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ și } \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

nu au limită în origine.

O b s e r v a ț i i. 1° Se definește diferențiabilitatea unei funcții reale $f(x, y, z)$ de trei variabile, definită pe o mulțime $E \subset R^3$, într-un punct interior $(a, b, c) \in E$, prin egalitatea

$$f(x, y, z) - f(a, b, c) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \nu(z - c) + \omega(x, y, z)\rho,$$

unde λ, μ, ν sînt numere, $\rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$, iar

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b \\ z \to c}} \omega(x, y, z) = \omega(a, b, c) = 0.$$

Se demonstrează că $\lambda = f'_x(a, b, c)$, $\mu = f'_y(a, b, c)$, $\nu = f'_z(a, b, c)$.

2° Pentru o funcție reală de n variabile, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definită pe o mulțime $E \subset R^n$, se definește diferențiabilitatea într-un punct interior $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \subset E$ prin egalitatea

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a_i) + \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rho,$$

unde λ_i sînt numere, $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} = \|x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n\|$,

iar funcția $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are limita 0 în punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

3° Fie $f(x, y)$ o funcție *vectorială* de două variabile, definită pe o mulțime $E \subset R^n$ cu valori în R^m, și fie $f_1, f_2, \ldots f_m$ componentele sale reale: $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Se spune că funcția f este diferențiabilă în punctul (a, b), dacă toate componentele sale reale sînt diferențiabile în (a, b). O definiție echivalentă este următoarea: $f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul (a, b) dacă există doi vectori $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ și $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ din R^m și o funcție vectorială $\omega(x, y)$ definită pe E cu valori în R^m, continuă în (a, b), și nulă în (a, b), astfel încît pentru orice $(x, y) \in E$ să avem

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Notînd cu $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ componentele reale ale lui ω, ele sînt continue și nule în (a, b). Egalitatea vectorială precedentă este echivalentă cu următoarele n egalități scalare:

$$f_i(x, y) - f_i(a, b) = \lambda_i(x - a) + \mu_i(y - b) + \omega_i(x, y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, adică diferențiabilitatea lui f este echivalentă cu diferențiabilitatea componentelor sale reale $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Avem $\lambda_i = \dfrac{\partial f_i(a, b)}{\partial x}$ și $\mu_i = \dfrac{\partial f_i(a, b)}{\partial y}$, deci

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \left(\frac{\partial f_1(a, b)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial f_m(a, b)}{\partial x}\right) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}$$

$$\text{și } \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) = \left(\frac{\partial f_1(a, b)}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial f_m(a, b)}{\partial y}\right) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}.$$

Considerații asemănătoare se pot face pentru funcții vectoriale $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variabile cu valori în R^m.

Toate celelalte proprietăți relative la diferențiabilitatea funcțiilor reale de două variabile sînt adevărate și pentru funcții reale sau vectoriale de mai multe variabile.

4° Diferențiabilitatea unei funcții $f(x, y)$ definită pe o mulțime $E \subset R^2$ se poate defini în orice punct de acumulare $(a, b) \in E$, chiar dacă (a, b) nu este punct interior al lui E, prin aceeași egalitate

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\rho.$$

Dacă f este diferențiabilă în (a, b), atunci f este continuă în (a, b).

Este însă posibil ca derivatele parțiale să nu aibă sens în punctul (a, b) și deci propozițiile 2 și 4 nu mai au sens în acest caz.

Exemplu. Fie funcția $f(x, y) = x + y$ definită pe mulțimea

$$E = \{(x, y) \mid x \leqslant y \leqslant 2x)\}.$$

Funcția f este diferențiabilă în origine, deoarece

$$f(x, y) - f(0, 0) = x + y = 1 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0) + 0 \cdot \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2},$$

deci

$$\lambda = 1, \ \mu = 1 \text{ și } \omega(x, y) \equiv 0.$$

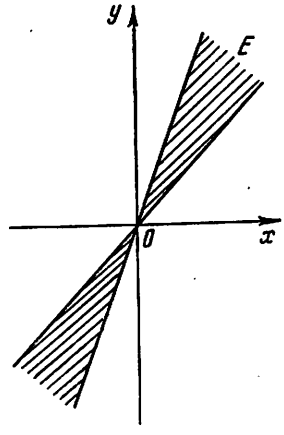


Fig. 146

Derivatele parțiale nu au sens în origine, deoarece mulțimea E nu conține nici un segment de dreaptă care să treacă prin origine și să fie paralel cu una din axele de coordonate.

3. Diferențiala funcțiilor de mai multe variabile

Fie $f(x, y)$ o funcție reală definită pe o mulțime $E \subset R^2$ și diferențiabilă într-un punct interior $(a, b) \in E$:

$$f(x, y) - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \omega(x, y)\rho,$$

unde $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = 0$.

Diferența $x - a$ se numește creșterea primei variabile de la a la x, iar diferența $y - b$ se numește creșterea celei de-a doua variabile de la b la y.

Diferența $f(x, b) - f(a, b)$ se numește creșterea funcției corespunzătoare creșterilor $x - a$ și $y - b$ ale argumentelor.

Deoarece funcția ω are limita 0 în (a, b), avem următoarea relație de aproximare

$$f(x, y) - f(a, b) \approx f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Așadar, creșterea funcției f poate fi aproximată cu funcția *liniară* $f'_x(a, b)(x - a) + f'_x(a, b)(y - b)$, definită pentru orice $(x, y) \in R^2$.

Definiție. Funcția liniară de două variabile $f'_x(a, b)\ (x - a) + f'_y(a, b)\ (y - b)$ **se numește diferențiala funcției** $f(x, y)$ **în punctul** (a, b) **și se notează** $df(a, b)$:

$$df(a, b)(x, y) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Diferențiala este definită pe tot planul, deoarece diferențele $x - a$ și $y - b$ au sens pentru orice x și y reali.

Relația de aproximație a creșterii funcției f se scrie atunci

$$f(x, y) - f(a, b) \approx df(a, b)\ (x, y)$$

și ea are sens numai pentru acele valori ale lui x și y pentru care membrul stîng are sens, adică pentru $(x, y) \in E$.

Pentru calcule este util să se scrie diferențiala în alte forme.

Să notăm creșterile variabilelor cu u și v:

$$x - a = u, \qquad y - b = v.$$

Atunci

$$df(a, b)\ (u, v) = f'_x(a, b)u + f'_y(a, b)v,\ (u, v) \in R^2$$

unde u și v sînt considerate variabile independente.

Dacă funcția f este diferențiabilă pe toată mulțimea E, diferențiala sa într-un punct arbitrar (x, y) din E se scrie

$$df(x, y)\ (u, v) = f'_x(x, y)u + f'_y(x, y)v.$$

Diferențiala funcției f pe mulțimea E este deci o funcție de patru variabile, x, y, u și v, unde perechea (x, y) parcurge mulțimea E, iar perechea (u, v) parcurge tot planul.

Să considerăm funcțiile

$$\varphi(x, y) = x,$$
$$\psi(x, y) = y,$$

definite pe R^2. Prima funcție φ este *proiecția pe axa Ox*, iar a doua funcție, ψ, este *proiecția pe axa Oy*. Aceste funcții sînt diferențiabile pe R^2. Avem

$$\varphi'_x(x, y) \equiv 1, \qquad \varphi'_y(x, y) \equiv 0,$$
$$\psi'_y(x, y) \equiv 0, \qquad \psi'_y(x, y) \equiv 1,$$

deci

$$d\varphi(x, y)\ (u, v) \equiv u \quad \text{și} \quad d\psi(x, y)\ (u, v) \equiv v.$$

Diferențialele funcțiilor φ și ψ se notează respectiv dx și dy:

$$dx(u, v) = d\varphi(x, y)\ (u, v) = u, \qquad dy(u, v) = d\psi(x, y)\ (u, v) = v.$$

Cu aceste notații, diferențiala funcției f se scrie

$$df(x, y) = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy$$

sau, dacă nu se mai pun în evidență variabile x și y,

$$df = f'_x\,dx + f'_y\,dy, \text{ sau } df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Se observă că dacă interpretăm — în *mod formal* — pe ∂f ca un produs *simbolic* între ∂ și f, în membrul drept se poate da f factor comun — în mod formal:

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right) f.$$

Se pune astfel în evidență *operatorul de diferențiere*:

$$d = \frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy.$$

Exemple. 1) $\frac{\partial(x+y)}{\partial x} = 1$ și $\frac{\partial(x+y)}{\partial y} = 1$, deci $d(x+y) = 1\cdot dx + 1\cdot dy = dx + dy$.

2) $\frac{\partial(xy)}{\partial x} = y$, $\frac{\partial(xy)}{\partial y} = x$, deci $d(x\cdot y) = y\cdot dx + x\,dy$.

3) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$, deci $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$.

4) $\frac{\partial}{\partial x}(x^y) = yx^{y-1}$, $\frac{\partial}{\partial y}(x^y) = x^y \ln x$, deci $d(x^y) = yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy$.

O b s e r v a ț i i. 1° Pentru o funcție de trei variabile $f(x, y, z)$, operatorul de diferențiere este

$$d = \frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\,dz,$$

iar diferențiala sa este

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\,dz\right) f = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz,$$

unde dz este diferențiala funcției $x(x, y, z) = z$.

2° Pentru o funcție de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diferențiala este

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i$$

unde dx_i este diferențiala funcției $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$

iar operatorul de diferențiere este

$$\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i.$$

3° Pentru o funcție *vectorială* $f(x, y)$ definită pe o mulțime $E \subset R^2$ cu valori în R^m, se definește diferențiala într-un punct interior $(a, b) \in E$, în care este diferențiabilă, prin egalitatea

$$\mathrm{d}f(x, y; a, b) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b),$$

unde derivatele parțiale sînt vectori din R^m. Diferențiala este deci o *funcție vectorială* cu valori în R^m. Făcînd aceleași considerații ca mai sus, diferențiala funcției vectoriale f se scrie ca și pentru funcțiile scalare:

$$\mathrm{d}f = f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)f.$$

4. Derivate parțiale de ordin superior

Fie $f(x, y)$ o funcție reală de două variabile definită pe o mulțime $E \subset R^2$. Pentru simplificarea expunerii vom presupune că mulțimea E este deschisă, adică este formată numai din puncte interioare, deci derivatele parțiale f'_x și f'_y au sens în fiecare punct $(x, y) \in E$. Funcțiile f'_x și f'_y se numesc derivate parțiale de ordinul întîi ale funcției f.

Dacă derivatele parțiale f'_x și f'_y există pe E, ele sînt funcții de două variabile, deci se poate pune problema existenței derivatelor parțiale ale funcțiilor f'_x și f'_y.

Dacă există derivatele parțiale ale funcțiilor f'_x și f'_y ele se numesc *derivate parțiale de ordinul doi* ale funcției f și se notează astfel:

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2};$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};$$

$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$

$$f''_{y^2} = (f'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

O funcție de două variabile $f(x, y)$ poate avea *patru* derivate de ordinul doi. Funcțiile f''_{xy} și f''_{yx} se numesc derivate parțiale *mixte* de ordinul doi.

O funcție de trei variabile $f(x, y, z)$ poate avea *nouă* derivate parțiale de ordinul doi:

$$f''_{x^2},\ f''_{xy},\ f''_{xz},\ f_{yx},\ f''_{y^2},\ f''_{yz},\ f''_{zx},\ f''_{zy},\ f''_{z^2}.$$

O funcție de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ poate avea n derivate parțiale de ordinul întîi și n^2 derivate parțiale de ordinul doi:

$$f''_{x_i y_j} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Observație. Este posibil ca una sau mai multe derivate parțiale de ordinul doi să nu existe într-un punct sau pe o submulțime $A \subset E$.

Exemplu. Funcția $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ nu are derivate parțiale de ordinul întîi în origine, deci nu are nici derivate parțiale de ordinul doi în origine.

Se definesc în mod asemănător derivatele parțiale de ordinul trei, ca fiind derivatele parțiale ale derivatelor parțiale de ordinul doi, și la fel se definesc derivatele parțiale de un ordin n oarecare.

Exemplu. Fie funcția $f(x, y) = x^3y - y^2x^2$ definită pe R^2. Avem

$$f'x = 3x^2y - 2y^2x, \quad f'_y = x^3 - 2yx^2;$$

$$f''_{x^2} = 6xy - 2y^2, \quad f''_{xy} = 3x^2 - 4yx, \quad f''_{xy} = 3x^2 - 4xy, \quad f''_{y^2} = -2x^2;$$

$$f'''_{x^2y} = 6x - 4y, \quad f'''_{x^3} = 6y, \quad f'''_{xyx} = 6x - 4y, \quad f'''_{y^2} = 6x - 4y \text{ etc.}$$

Se obsearvă că $f''_{xy} = f''_{yx}$, $f'''_{x^2y} = f'''_{xyx} = f'''_{yx^2}$, adică în derivatele parțiale mixte, ordinea în care se derivează în raport cu diferitele variabile nu are importanță, ci numai numărul de ori de care se derivează în raport cu fiecare variabilă în parte.

În general, derivatele parțiale mixte f''_{xy} și f''_{yx} nu sînt egale, și la fel derivatele parțiale mixte f'''_{x^2y}, f'''_{xyx}, f'''_{yx^2} nu sînt egale.

Următoarele două propoziții dau condiții suficiente pentru egalitatea derivatelor parțiale mixte.

Criteriul lui Schwarz. Dacă funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale mixte de ordinul doi f''_{xy} și f''_{yx} într-o vecinătate V a unui punct $(a, b) \in E$, și dacă f''_{xy} și f''_{yx} sînt continue în (a, b), atunci

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

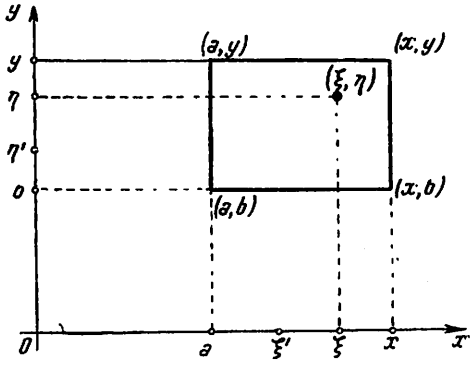


Fig. 147

Să alegem un punct arbitrar (x, y) din V, astfel ca $x \neq a$ și $y \neq b$ și să-l menținem fix. Să notăm

$$R(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b)}{(x - a)(y - b)}.$$

Să considerăm funcția

$$\varphi(t) = \frac{f(t, y) - f(t, b)}{y - b}$$

definită pe intervalul $[a, x]$ sau $[x, a]$, după cum $a < x$ sau $x < a$. Funcția $\varphi(t)$ este derivabilă pe acest interval și

$$\varphi'(t) = \frac{f'_x(t, y) - f'_x(t, b)}{y - b}.$$

Avem apoi

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y) - f(x, b)}{y - b},$$

$$\varphi(a) = \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b},$$

deci $R(x, y)$ se scrie astfel

$$R(x, y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}.$$

Aplicînd acum funcției φ teorema creșterilor finite, deducem că există un punct ξ cuprins între a și x astfel încît să avem

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(\xi),$$

adică

$$R(x, y) = \varphi'(\xi) = \frac{f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, b)}{y - b}.$$

Funcția $\varphi_1(\tau) = f'_x(\xi, \tau)$, definită pe intervalul $[b, y]$ sau $[y, b]$ după cum $b < y$ sau $y < b$, este derivabilă pe acest interval, deoarece f''_{xy} există pe V, și

$$\varphi'_1(\tau) = f''_{xy}(\xi, \tau).$$

Aplicînd teorema creșterilor finite funcției φ_1, deducem că există un punct η cuprins între b și y, astfel ca

$$\frac{\varphi_1(y) - \varphi_1(b)}{y - b} = \varphi'_1(\eta),$$

adică

$$\frac{f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, b)}{y - b} = f''_{xy}(\xi, \eta),$$

de unde

$$R(x, y) = f''_{xy}(\xi, \eta).$$

Printr-un raționament analog, folosind funcția

$$\psi(t) = \frac{f(x, t) - f(a, t)}{x - a},$$

deducem că există un punct η' cuprins între b și y, astfel ca

$$R(x, y) = \frac{f'_y(x,\eta') - f'_y(a,\eta')}{x - a}.$$

Folosind apoi funcția $\psi_1(\tau) = f'_y(\tau, \eta')$, deducem că există un punct ξ' cuprins între a și x, astfel ca

$$R(x, y) = f''_{yx}(\xi', \eta').$$

Așadar

$$f''_{xy}(\xi, \eta) = f''_{yx}(\xi', \eta').$$

Fie acum un șir $(x_n, y_n) \to (a, b)$ de puncte din V, cu $x_n \neq a$ și $y_n \neq b$. Avem $x_n \to a$ și $y_n \to b$.

Din cele de mai sus rezultă că pentru fiecare punct (x_n, y_n) există două numere ξ_n și ξ'_n cuprinse între a și x_n, și două numere η_n și η'_n cuprinse între b și y_n, astfel ca

$$f''_{xy}(\xi_n, \eta_n) = f''_{yx}(\xi'_n, \eta'_n).$$

Avem $\xi_n \to a$, $\xi'_n \to a$, $\eta_n \to b$, $\eta'_n \to b$, deci

$$(\xi_n, \eta_n) \to (a, b) \text{ și } (\xi'_n, \eta') \to (a, b).$$

Funcțiile f''_{xy} și f''_{yx} fiind continue în (a, b) deducem

$$f''_{xy}(\xi_n, \eta_n) \to f''_{xy}(a, b) \text{ și } f''_{yx}(\xi'_n, \eta'_n) \to f''_{yx}(a, b).$$

Trecînd la limită în egalitățile

$$f''_{xy}(\xi_n, \eta_n) = f_{yx}(\xi_n, \eta'_n),$$

rezultă

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Corolar. Dacă derivatele parțiale mixte f''_{xy} și f''_{yx} există și sînt continue pe E, atunci ele sînt egale pe E:

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Observații. 1° O propoziție asemănătoare este valabilă pentru derivate parțiale de ordin superior: dacă mai multe derivate parțiale mixte, în care variabilele în raport cu care se derivează intervin de același număr de ori, există pe o vecinătate a lui (a, b) și sînt continue în (a, b), atunci aceste derivate sînt egale în (a, b).

De exemplu, dacă f'''_{x^2y}, f'''_{xyx} și f'''^2_{yx} există pe o vecinătate V a lui (a, b) și sînt continue în (a, b), atunci

$$f'''_{x^2y}(a, b) = f'''_{xyx}(a, b) = f'''^2_{yx}(a, b).$$

2° Propoziția este adevărată și pentru funcții reale sau vectoriale de trei sau mai multe variabile.

3° Este valabilă următoarea teoremă, mai generală:

Dacă f'_x, f'_y și f''_{xy} există într-o vecinătate V a lui (a, b) și dacă f''_{xy} este continuă în (a, b), atunci f''_{yx} există în (a, b) și $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a, b)$.

(Pentru demonstrație, v — M. Nicolescu, Analiză matematică, vol. II. p. 422).

Criteriul lui Young. Dacă funcția f are derivate parțiale de ordinul întîi f'_x și f'_y într-o vecinătate V a lui (a, b) și dacă f'_x și f'_y sînt diferențiabile în (a,b), atunci derivatele parțiale mixte de ordinul doi există în (a, b) și sînt egale în acest punct:

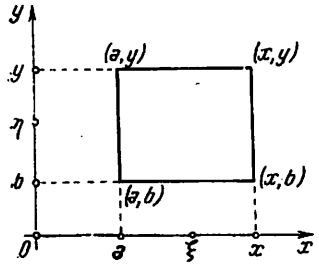


Fig. 148

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Existența derivatelor parțiale de ordinul doi rezultă din faptul că f'_x și f'_y fiind diferențiabile în (a,b), ele au derivate parțiale în (a,b).

Să alegem un punct arbitrar $(x, y) \in V$, astfel ca $x \neq a$ și $y \neq b$ și să-l menținem fix. Să notăm

$$R(x, y) = f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b).$$

Să considerăm funcția

$$\varphi(t) = f(t, y) - f(t, b)$$

definită pe intervalul $[a, x]$ sau $[x, a]$, după cum $a < x$ sau $x < a$. Funcția $\varphi(t)$ este derivabilă pe acest interval și

$$\varphi'(t) = f'_x(t, y) - f'_x(t, b).$$

Avem apoi

$$\varphi(x) = f(x, y) - f(x, b),$$
$$\varphi(a) = f(a, y) - f(a, b),$$

astfel încît $R(x, y)$ se scrie

$$R(x, y) = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Aplicînd funcției φ teorema creșterilor finite, deducem că există un punct ξ cuprins între a și x astfel încît să avem

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)\ (x - a),$$

de unde

$$R(x,y) = \varphi'(\xi)\ (x - a) = [f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, b)]\ (x - a) =$$
$$= [f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b) - (f'_x(\xi, b) - f'_x(a, b)]\ (x - a).$$

Dar funcția f'_x este diferențiabilă în (a, b), deci

$$f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b) = (f'_x)'_x(a, b)(\xi - a) + (f'_x)'_y(a, b)(y - b) + \\ + \omega_1(\xi, y)(\xi - a) + \omega_2(\xi, y)(y - b),$$

unde

$$\lim_{\substack{\xi \to a \\ y \to b}} \omega_i(\xi, y) = \omega_i(a, b) = 0, \quad i = 1, 2.$$

De asemenea

$$f'_x(\xi, b) - f'_x(a, b) = (f'_x)'_x(a, b)(\xi - a) + (f_x)'_y(a, b)(b - b) + \\ + \omega_3(\xi, b)(\xi - a) + \omega_4(\xi, b)(b - b),$$

de unde

$$\lim_{\xi \to a} \omega_3(\xi, b) = \omega_3(a, b) = 0.$$

Deoarece $(f'_x)'_y = f''_{xy}$, $R(x, y)$ se scrie

$$R(x, y) = [f''_{xy}(a, b)(y - b) + \omega_1(\xi, y)(\xi - a) + \omega_2(\xi, y)(y - b) + \\ + \omega_3(\xi, b)(\xi - a)](x - a) = f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \omega_2(\xi, y)(x - a)(y - b) + \\ + \omega_5(\xi, y)(\xi - a)(x - a),$$

unde am notat

$$\omega_5(\xi, y) = \omega_1(\xi, y) + \omega_3(\xi, b),$$

deci

$$\lim_{\substack{\xi \to a \\ y \to b}} \omega_5(\xi, y) = \omega_5(a, b) = 0.$$

Plecînd de la funcția

$$\psi(t) = f(x, t) - f(a, t)$$

și făcînd un raționament analog, deducem că

$$R(x, y) = f''_{yx}(a, b)(x - a)(y - b) + \omega'_2(x, \eta)(x - a)(y - b) + \\ + \omega'_5(x, \eta)(\eta - b)(y - b),$$

unde η este cuprins între b și y și

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \eta \to b}} \omega'_2(x, \eta) = \lim_{\substack{x \to a \\ \eta \to b}} \omega'_5(x, \eta) = 0.$$

Atunci

$$f''_{xy}(a,b)(x - a)(y - b) + \omega_2(\xi,y)(x - a)(y - b) + \omega_5(\xi,y)(\xi - a)(x - a) = \\ = f''_{yx}(a,b)(x - a)(y - b) + \omega'_2(x, \eta)(x - a)(y - b) + \omega'_5(x,\eta)(\eta - b)(y - b).$$

Împărțind în ambii membri ai egalității cu $(x-a)(y-b)$, obținem:

$$f''_{xy}(a,b)+\omega_2(\xi,y)+\omega_5(\xi,y)\frac{\xi-a}{y-b}=f''_{yx}(a,b)+\omega'_2(x,\eta)+\omega'_5(x,\eta)\frac{\eta-b}{x-a}.$$

Să luăm acum un șir $(x_n, y_n)\to(a, b)$ cu $x_n\neq a$, $y_n\neq b$, astfel ca $x_n-a=y_n-b$ pentru orice n. Din cele de mai sus rezultă că pentru fiecare punct (x_n, y_n) putem găsi un număr ξ_n cuprins între a și x_n, deci $|\xi_n-a|\leqslant|x_n-a|=|y_n-b|$, și un punct η_n cuprins între b și y_n, deci $|\eta_n-b|\leqslant|y_n-b|=|x_n-a|$, astfel încît

$$f''_{xy}(a,b)+\omega_2(\xi_n,y_n)-\omega_5(\xi_n,y_n)\frac{\xi_n-a}{y_n-b}=$$

$$=f''_{yx}(a,b)+\omega'_2(x_n,\eta_n)+\omega'_5(x_n,\eta_n)\frac{\eta_n-b}{x_n-b}.$$

Deoarece $x_n\to a$ și $y_n\to b$, avem $\xi_n\to a$, și $\eta_n\to b$, deci

$$\omega_2(\xi_n,y_n)\to\omega_2(a,b)=0,$$

$$\omega'_2(x_n,\eta_n)\to\omega'_2(a,b)=0.$$

Apoi $\left|\omega_5(\xi_n,y_n)\frac{\xi_n-a}{y_n-b}\right|\leqslant|\omega_5(\xi_n,y_n)|\to 0,$

$$\left|\omega'_5(x_n,\eta_n)\frac{\eta_n-b}{x_n-b}\right|\leqslant|\omega'_5(x_n,\eta_n)|\to 0.$$

Trecînd la limită în egalitatea de mai sus, obținem

$$f''_{xy}(a,b)=f''_{yx}(a,b).$$

Corolarul 1. Dacă f'_x și f'_y există și sînt diferențiabile pe E, atunci toate derivatele parțiale de ordinul doi există pe E, iar derivatele parțiale mixte sînt egale pe E, $f''_{xy}=f''_{yx}$.

Observații. 1° O propoziție asemănătoare este valabilă pentru derivatele parțiale de ordin superior: dacă derivatele parțiale de ordinul $n-1$ există pe o vecinătate V a lui (a, b) și sînt diferențiabile în (a, b), atunci există toate derivatele parțiale de ordinul n în (a, b) și derivatele mixte, în care variabilele în raport cu care se derivează intervin de același număr de ori, sînt egale în (a, b).

2° Propoziția este adevărată și pentru funcții reale sau vectoriale de mai multe variabile.

Din criteriul lui Young rezultă un criteriu asemănător cu criteriul lui Schwarz.

Corolarul 2. Dacă toate derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției f există într-o vecinătate V a lui (a, b) și dacă sînt continue în (a, b), atunci

$$f''_{xy}(a,b)=f''_{yx}(a,b).$$

Într-adevăr, funcția f'_x este diferențiabilă în (a, b) deoarece derivatele sale parțiale f''_{x^2} și f''_{xy} sînt continue în (a, b). De asemenea, f'_y este diferențiabilă în (a, b), deoarece derivatele sale parțiale f''_{yx} și f''_{y^2} sînt continue în (a, b). Conform criteriului lui Young avem atunci $f''_{yx}(a, b) = f''_{xy}(a, b)$.

5. Diferențiale de ordin superior

Fie $f(x, y)$ o funcție reală de două variabile definită pe o mulțime $E \subset R^2$ și (a, b) un punct în interiorul lui E.

Definiție. Se spune că funcția f este diferențiabilă de n ori în punctul (a, b), sau că are diferențială de ordinul n în (a, b), dacă toate derivatele parțiale de ordinul $n - 1$ ale lui f există într-o vecinătate V a lui (a, b) și sînt diferențiabile în (a, b).

Se spune că f este diferențiabilă de n ori pe E dacă este diferențiabilă de n ori în fiecare punct din E.

Folosind criteriul lui Young, rezultă că:

Dacă f este diferențiabilă de n ori în (a, b), atunci toate derivatele parțiale de ordinul n există în (a, b), iar ordinea de derivare în (a, b) pînă la ordinul n inclusiv nu are importanță.

Propoziție. Dacă funcția $f(x, y)$ are într-o vecinătate V a lui (a, b) toate derivatele parțiale de ordin n și dacă aceste derivate parțiale sînt continue în (a, b), atunci f este diferențiabilă de n ori în (a, b).

Într-adevăr, toate derivatele parțiale de ordinul $n - 1$ au derivate parțiale în f continue în (a, b), deci toate derivatele parțiale de ordinul $n - 1$ sînt diferențiabile în (a, b).

Diferențiala de ordinul n în punctul (a, b) se definește prin egalitatea

$$\mathrm{d}^n f(a, b)(x, y) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right]^n f(a, b),$$

unde exponentul n înseamnă că se dezvoltă — formal — suma din paranteză după regula binomului lui Newton și apoi se înmulțește — formal — cu $f(a, b)$.

Prin aceleași calcule ca și la diferențiala de ordinul 1 se obține

$$\mathrm{d}^n f(a, b) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n f(a, b).$$

Dacă nu se mai pun în evidență variabilele diferențialei, se scrie

$$\mathrm{d}^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n f.$$

S-a pus astfel în evidență operatorul de diferențiere de ordinul n,

$$\mathrm{d}^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n,$$

care este — formal — puterea a n-a a operatorului de diferențiere de ordinul întîi. Avem de asemenea

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

Pentru funcții de trei sau mai multe variabile, diferențiabilitatea de ordinul n se definește ca și pentru funcțiile de două variabile.

Diferențiala de ordinul n a unei funcții de trei variabile $f(x, y, z)$ se scrie

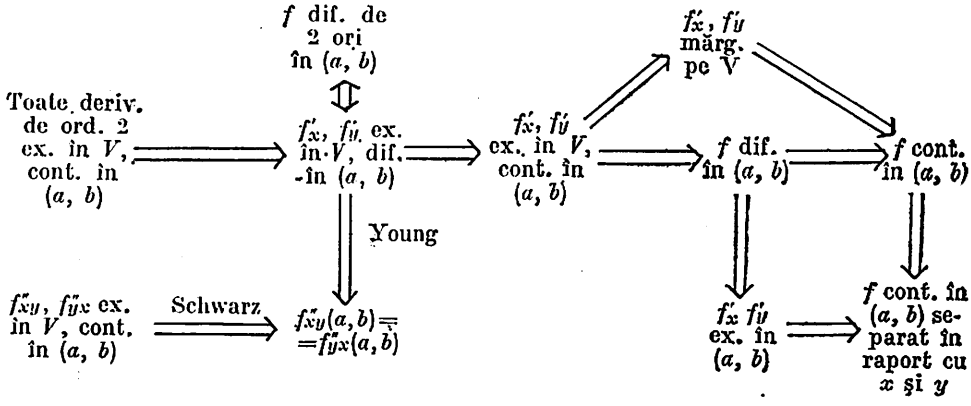
$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right)^n f,$$

iar a unei funcții de k variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ se scrie

$$d^n f = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i\right)^n f.$$

Se definește în mod asemănător diferențiala de ordinul n a unei funcții vectoriale, de două sau mai multe variabile.

Schema de implicații a propozițiilor:



Schema poate fi repetată spre stînga indefinit, cu derivatele și diferențialele de ordinul 3, 4 etc.

6. Diferențialele și derivatele parțiale ale funcțiilor compuse

Operațiile algebrice efectuate asupra funcțiilor cu derivate parțiale sau asupra funcțiilor diferențiabile conduc la funcții de același fel. (Pentru funcțiile cu derivate parțiale, acest fapt a fost menționat mai înainte, iar pentru funcțiile diferențiabile va rezulta mai departe.)

Importanța noțiunii de diferențiabilitate constă în faptul că ea se conservă și prin operația de compunere a funcțiilor, în timp ce existența derivatelor parțiale poate să nu fie conservată prin această operație, așa cum va fi arătat printr-un exemplu.

Fie E și F două mulțimi din plan. Pentru a simplifica expunerea vom presupune că E și F sînt *deschise*, adică sînt formate din puncte interioare.

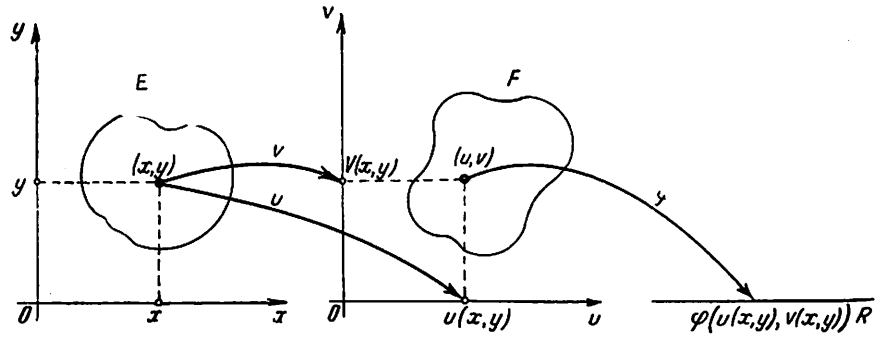


Fig. 149

Fie $u(x, y)$, $v(x, y)$ două funcții reale definite pe E, astfel ca

$$(u(x, y), v(x, y)) \in F \text{ pentru orice } (x, y) \in E.$$

Fie $\varphi(u, v)$ o funcție reală definită pe F.

Putem atunci considera funcția compusă

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$$

definită pentru $(x, y) \in E$, cu valori reale.

Am notat cu aceleași litere u și v atît funcțiile definite pe E cît și coordonatele punctelor din F, pentru simplificarea calculelor care urmează.

Fie (a, b) un punct din E și (c, d) punctul din F corespunzător lui (a, b) prin funcțiile u și v:

$$c = u(a, b), \quad d = v(a, b).$$

Teorema 1. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile în punctul $(a, b) \in E$ și funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă în punctul corespunzător $(c, d) \in F$, atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ este diferențiabilă în (a, b).

Să scriem întîi că funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile în punctul (a, b):

$$u(x, y) - u(a, b) = u'_x(a, b)(x - a) + u'_y(a, b)(y - b) + \omega_1(x, y)\rho,$$

$$v(x, y) - v(a, b) = v'_x(a, b)(x - a) + v'_y(a, b)(y - b) + \omega_2(x, y)\rho,$$

unde $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ și

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega_i(x, y) = \omega_i(a, b) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Să scriem acum că funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă în punctul (c, d), unde $c = u(a, b)$ și $d = v(a, b)$:

$$\varphi(u, v) - \varphi(c, d) = [\varphi'_u(c, d) + \omega_3(u, v)](u - c) + [\varphi'_v(c, d) + \omega_4(u, v)](v - d)$$

unde $\lim\limits_{\substack{u\to c\\ v\to d}} \omega_i(u, v) = \omega_i(c, d) = 0, \ i = 3, 4.$

Să observăm că funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt continue în (a, b) (fiind diferențiabile), deci funcțiile compuse

$$\omega_3(u(x, y), v(x, y)), \quad \omega_4(u(x, y), v(x, y))$$

sînt continue în (a, b); avem deci

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega_i(u(x, y), v(x, y)) = \omega_i(u(a, b), v(a, b)) = \omega_i(c, d) = 0, \ i = 3, 4.$$

Să scriem acum creșterea funcției compuse $f(x, y)$:

$$f(x, y) - f(a, b) = \varphi(u(x, y), v(x, y)) - \varphi(u(a, b), v(a, b)) =$$

$$= \varphi(u(x, y), v(x, y)) - \varphi(c, d) = [\varphi'_u(c, d) + \omega_3(u(x, y), v(x, y))][u(x, y) - c] +$$

$$+ [\varphi'_v(c, d) + \omega_4(u(x, y), v(x, y))][v(x, y) - d] =$$

$$= [\varphi'_u(c, d) + \omega_3][u(x, y) - u(a, b)] + [\varphi'_v(c, d) + \omega_4][v(x, y) - v(a, b)],$$

unde am notat, pentru prescurtare

$$\omega_i = \omega_i(u(x, y), v(x, y)), \ i = 3, 4.$$

Mai departe, înlocuind creșterile funcțiilor $u(x, y)$ și $v(x, y)$ obținem:

$$f(x, y) - f(a, b) = [\varphi'_u(c, d) + \omega_3][u'_x(a, b)(x - a) + u'_y(a, b)(y - b) + \omega_1\rho] +$$

$$+ [\varphi'_v(c, d) + \omega_4][v'_x(a, b)(x - a) + v'_y(a, b)(y - b) + \omega_2\rho],$$

unde am notat $\omega_i = \omega_i(x, y), \ i = 1, 2.$

Făcînd înmulțirile, obținem:

$$f(x, y) - f(a, b) = [\varphi'_u(c, d)\, u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d)\, v'_x(a, b)](x - a) +$$

$$+ [\varphi'_u(c, d)\, u'_y(a, b) + \varphi'_v(c, d)\, v'_y(a, b)](y - b) +$$

$$+ [(\varphi'_u(c, d) + \omega_3)\, \omega_1 + (\varphi'_v(c, d) + \omega_4)\, \omega_2]\, \rho +$$

$$+ [u'_x(a, b)\, \omega_3 + v'_x(a, b)\, \omega_4](x - a) + [u'_y(a, b)\, \omega_3 + v'_y(a, b)\, \omega_4](y - b).$$

Parantezele care înmulțesc pe ρ, $(x - a)$ și $(y - b)$, au limita 0 în punctul (a, b); ultimii trei termeni se pot deci scrie în forma $\omega(x, y)\,\rho$, unde $\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = 0$. Atunci

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\,\rho,$$

unde am notat

$$\lambda = \varphi'_u(c, d)\, u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d)\, v'_x(a, b),$$
$$\mu = \varphi'_u(c, d)\, u'_y(a, b) + \varphi'_v(c, d)\, v'_y(a, b),$$

deci f este diferențiabilă în punctul (a, b) și teorema este demonstrată.

Dacă ținem seama de faptul că $\lambda = f'_x(a, b)$ și $\mu = f'_y(a, b)$, obținem următoarele formule de derivare parțială a funcțiilor compuse

$$f'_x(a, b) = \varphi'_u(c, d)\, u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d)\, v'_x(a, b),$$
$$f'_y(a, b) = \varphi'_u(c, d)\, u'_y(a, b) + \varphi'_v(c, d)\, v'_y(a, b)$$

sau:

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(c, d)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(a, b)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(c, d)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(a, b)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(c, d)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(a, b)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(c, d)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(a, b)}{\partial y}.$$

Aceste formule se scriu într-o formă incompletă, dar mai ușor de reținut, astfel:

$$f'_x = \varphi'_u u'_x + \varphi'_v v'_x,$$
$$f'_y = \varphi'_u u'_y + \varphi'_v v'_y$$

sau:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dacă în membrul drept se dă — în mod formal — factor comun φ, se obțin formulele

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \left(\frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\varphi,$$
$$\frac{\partial}{\partial u} f = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\varphi.$$

În aceste formule, literele u și v care apar la numitor desemnează *variabilele* funcției $\varphi(u, v)$, iar literele u și v care apar la numărător desemnează *funcții* de x și y.

Corolarul 1. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile pe E, iar funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă pe F, atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ este diferențiabilă pe E.

Avem:

$$df = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy.$$

Într-adevăr, se înlocuiesc $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ din formula

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

cu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Observație. În formula de diferențiere a funcției compuse să desfacem parantezele și să dăm factor comun pe $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ și $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$.

Obținem:

$$df = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

dar

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy,$$

deci

$$df = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv.$$

Pe de altă parte

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv.$$

Așadar, diferențialele funcțiilor f și φ au aceeași formă. Acest fapt constituie ceea ce se numește „*invarianța diferențialei față de operația de compunere a funcțiilor*".

Trebuie observat însă că această invarianță a diferențialei este formală (spre deosebire de „invarianța diferențiabilității" față de operația de compunere, care este reală). Într-adevăr, dacă folosim notația completă a diferențialei, avem:

$$df(x, y) = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}du(x, y) + \frac{\partial \varphi(u(x, y)\, v(x, y))}{\partial v}dv(x, y).$$

Deci în egalitatea $df = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,dv$, du și dv sînt diferențialele *funcțiilor* $u(x, y)$ și $v(x, y)$ definite pe E, iar pe de altă parte

$$d\varphi(u, v) = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}\,du + \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}\,dv,$$

deci în egalitatea $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,dv$, du și dv sînt diferențialele variabilelor u și v ale funcției $\varphi(u, v)$, sau, mai precis, diferențialele funcțiilor proiecție pe axele Ou și Ov, definite pe mulțimea F.

O altă proprietate invariantă prin operația de compunere este *existența și continuitatea derivatelor parțiale, așa cum rezultă din:*

Corolarul 2. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate parțiale continue pe E, iar funcția $\varphi(u, v)$ are derivate parțiale continue pe F, atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parțiale continue pe E.

Într-adevăr, deoarece funcțiile $u(x, y)$ $v(x, y)$ și $\varphi(u, v)$ au derivate parțiale continue, ele sînt diferențiabile (și deci și continue). Atunci funcția compusă este diferențiabilă, deci are derivate parțiale date de formulele:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

Toate funcțiile din membrul drept sînt continue, fie prin ipoteză, cum sînt derivatele parțiale ale funcțiilor $u(x, y)$ și $v(x, y)$, fie ca funcții compuse de funcții continue cum sînt

$$\frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v}.$$

Rezultă deci că $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sînt continue.

Observație. Dacă derivatele parțiale ale funcțiilor $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt continue numai în (a, b) și derivatele parțiale ale funcției $\varphi(u, v)$ sînt continue numai în (c, d), rezultă că aceste funcții sînt diferențiabile în punctele respective, deci funcția compusă este diferențiabilă și are derivate parțiale în (a, b), dar nu rezultă că funcția compusă are derivate parțiale în celelalte puncte.

Teoremele precedente rămîn adevărate — și cu aceleași demonstrații — pentru funcții reale (sau vectoriale) de oricîte variabile. Să enunțăm teorema în cazul general:

Fie $E \subset R^n$ și $E \subset R^m$ două mulțimi deschise, $n \geqslant 1$ și $m \geqslant 1$.

Teorema 1'. Dacă

$$u_1(x_1, x_2,\ldots, x_n),\ u_2(x_1, x_2,\ldots, x_n),\ldots,\ u_m(x_1, x_2,\ldots, x_n)$$

sînt m funcții reale de n variabile, diferențiabile (respectiv cu derivate parțiale continue) pe mulțimea E, astfel încît

$$(u_1(x_1,\ldots, x_n),\ u_2(x_1,\ldots, x_n),\ldots,\ u_m(x_1,\ldots, x_n))\in F$$

pentru orice $(x_1, x_2,\ldots, x_n)\in E$ și dacă

$$\varphi(u_1, u_2,\ldots, u_m)$$

este o funcție reală (sau cu valori în R^p) de m variabile diferențiabilă (sau cu derivate parțiale continue) pe mulțimea F, atunci funcția compusă:

$$f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \varphi(u_1(x_1, x_2,\ldots, x_n),\ u_2(x_1,\ldots, x_n),\ldots,\ u_m(x_1, x_2,\ldots, x_n))$$

este diferențiabilă (respectiv are derivate parțiale continue) pe E și

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\,\mathrm{d}u_j,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\quad i = 1, 2,\ldots, n.$$

Acest caz general se poate pune sub o formă foarte simplă.

Să notăm cu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ punctele din $E\subset R^n$ și cu $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ punctele $F\subset R^m$.

Funcțiile reale $u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definite pe $E\subset R^n$ se scriu atunci $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)$, iar funcția vectorială $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ definită pe $F\subset R^m$ cu valori în R^p se scrie atunci $\varphi(u)$.

Funcțiile $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)$ sînt componentele reale ale unei funcții vectoriale $u(x) : E\subset R^n \to F\subset R^m$:

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)).$$

Funcția compusă $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ se scrie deci

$$f(x) = \varphi(u(x))$$

și este o funcție vectorială definită pe $E\subset R^n$ cu valori în R^p.

$$E\subset R^n \xrightarrow{u} F\subset R^m \xrightarrow{\varphi} R^p$$

$$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow \varphi(u(x))$$

$$x \longrightarrow f(x).$$

Ultima teoremă se formulează astfel:

Dacă funcțiile $u(x)$ și $\varphi(u)$ sînt diferențiabile respectiv pe $E\subset R^n$ și $F\subset R^m$, atunci și funcția compusă $f(x) = \varphi(u(x))$ este diferențiabilă pe $E\subset R^n$.

Această formulare este asemănătoare cu aceea a teoremei de derivabilitate (sau diferențiabilitate) a funcțiilor reale de o singură variabilă.

Cazuri particulare

I) m = 1, n oarecare, adică $E \subset R^n$, $F \subset R$:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) : E \to R, \quad \varphi(u) : F \to R,$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(u(x_1, x_2, \ldots, x_n)) : E \to R,$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \frac{d\varphi}{du} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \frac{d\varphi}{du} du = \varphi'(u)\, du,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

În cazul cînd $\varphi(u)$ este o funcție elementară, se obțin regulile de diferențiere cunoscute pentru funcții de o variabilă.

Exemple (u este o funcție diferențiabilă de una sau mai multe variabile).

1) $du^n = nu^{n-1}\, du$ (n real oarecare);

2) $d\sin u = \cos u\, du$;

3) $d\cos u = -\sin u\, du$;

4) $d\operatorname{tg} u = \frac{1}{\cos^2 u} du$;

5) $d\operatorname{ctg} u = -\frac{1}{\sin^2 u} du$;

6) $d\arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$;

7) $d\arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$;

8) $d\operatorname{arctg} u = \frac{1}{1+u^2} du$;

9) $d\operatorname{arcctg} u = -\frac{1}{1+u^2} du$;

10) $d\ln u = \frac{1}{u} du$;

11) $de^u = e^u\, du$;

12) $da^u = a^u \ln a\, du$.

Pentru cazul cînd $m = 1$ și $n = 2$, adică $E \subset R^2$ și $F \subset R$:

$$u(x, y) : E \to R, \quad \varphi(u) : F \to R,$$

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y)),$$

avem

$$df = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

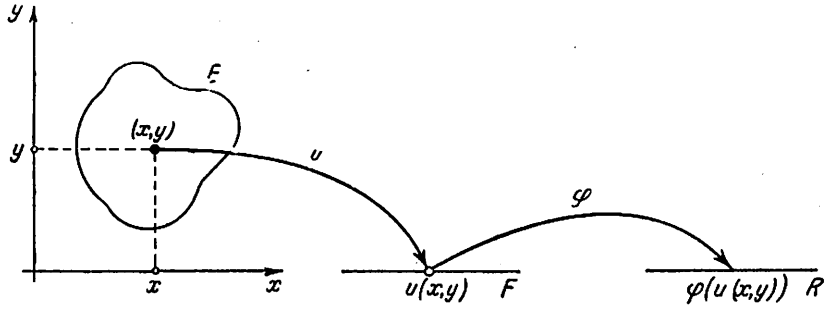


Fig. 150

Pentru cazul cînd $m = 1$ și $n = 3$, adică $E \subset R^3$ și $F \subset R$:

$$u(x, y, z) : E \to R, \quad \varphi(u) : F \to R,$$

$$f(x, y, z) = \varphi(u(x, y, z)) : E \to R,$$

avem

$$df = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

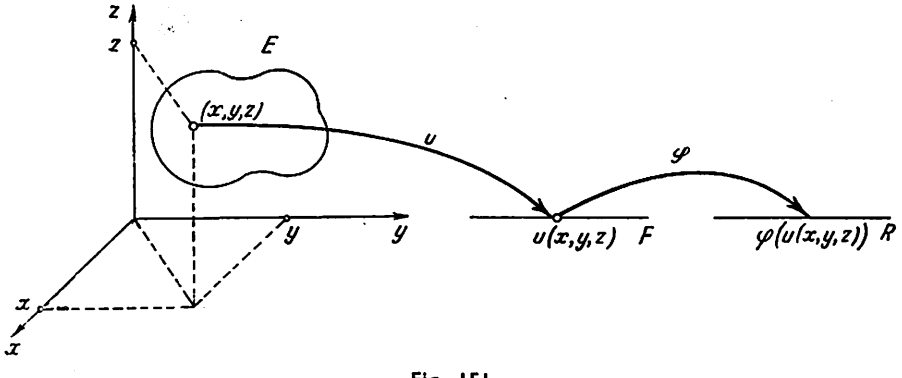


Fig. 151

II) $m = 2$, n oarecare, adică $E \subset R^n$, $F \subset R^2$:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ v(x_1, x_2, \ldots, x_n) : E \to R,\ \varphi(u, v) : F \to R;$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(u(x_1, x_2, \ldots, x_n), v(x_1, x_2, \ldots, x_n)) : E \to R;$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Luînd funcția $\varphi(u, v)$ de una din formele $\varphi(u, v) = u + v$, $\varphi(u, v) = u - v$, $\varphi(u, v) = \alpha u$, $\varphi(u, v) = uv$, $\varphi(u, v) = \frac{u}{v}$, $\varphi(u, v) = u^v$ rezultă că suma a două funcții diferențiabile este o funcție diferențiabilă și de asemenea produsul unei funcții diferențiabile cu un scalar. Așadar, mulțimea funcțiilor diferențiabile într-un punct sau pe o mulțime este un spațiu vectorial. Se obțin următoarele reguli de diferențiere (ca și pentru funcții de o variabilă)

1) $d(u + v) = du + dv$; 2) $d(u - v) = du - dv$;

3) $d(\alpha u) = \alpha du$; 4) $d(uv) = vdu + udv$;

5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$; 6) $d(u^v) = vu^{v-1}\, du + u^v \ln u\, dv$.

Aici, u și v sînt funcții diferențiabile de una sau mai multe variabile. Prin recurență se demonstrează că regulile privind diferențiala sumei și a produsului rămîn valabile și pentru mai multe funcții diferențiabile: $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$d(u_1 + u_2 + \ldots + u_m) = du_1 + du_2 + \ldots + du_m,$$

$$d(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_m) = \sum_{j=1}^{m} u_1 \cdot u_2, \ldots, u_{j-1} \cdot du_j \cdot u_{j+1} \ldots u_m.$$

Ultimele reguli se obțin de asemenea din teorema generală, luînd $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$, respectiv

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) = u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_m.$$

Pentru cazul cînd $m = 2$, $n = 3$, adică $E \subset R^3$, $F \subset R^2$,

$$u(x, y, z),\ v(x, y, z) : E \to R,\ \varphi(u, v) : F \to R,$$

$$f(x, y, z) = \varphi(u(x, y, z), v(x, y, z)) : E \to R,$$

avem

$$df = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

O b s e r v a ț i e. Pentru a calcula diferențiala unei funcții diferențiabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, trebuie mai întîi să calculăm derivatele sale parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Atunci

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Folosind regulile de diferențiere date mai sus, putem calcula direct diferențiala lui f. Rezultă atunci și derivatele parțiale ale lui f, anume: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ este coeficientul lui dx_i.

Exemple. 1) $f(x, y) = \sin xy$ definită pe R^2. Avem

$$df(x, y) = d(\sin xy) = \cos xy \cdot d(xy) = \cos xy \cdot (dx \cdot y + x\, dy) =$$
$$= y \cos xy\, dx + x \cos xy\, dy,$$

deci

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(\sin xy)}{\partial x} = y \cos xy,$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(\cos xy)}{\partial y} = x \cos xy.$$

$$2)\ d(\ln \sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} =$$
$$= \frac{2x\, dx + 2y\, dy}{2(x^2 + y^2)} = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy,$$

deci

$$\frac{\partial(\ln \sqrt{x^2 + y^2})}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial(\ln \sqrt{x^2 + y^2})}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

III) $n = 1$, m oarecare adică $E \subset R$, $F \subset R^m$;

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x) : E \to R, \quad \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) : F \to R$$
$$f(x) = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) : E \to R;$$

avem

$$df = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{du_j}{dx} dx = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} du_j;$$

$$f'(x) = \frac{d\varphi}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{du_j}{dx}.$$

Pentru cazul cînd $n = 1$ și $m = 2$, adică $E \subset R$ și $F \subset R^2$:

$$u(x)\, v(x) : E \to R, \quad \varphi(u, v) : F \to R;$$
$$f(x) = \varphi(u(x), v(x)) : E \to R,$$

avem

$$df = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{dv}{dx}\right)dx, \quad \frac{df}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Pentru cazul cînd $n = 1$ și $m = 3$, adică $E \subset R$, $F \subset R^3$,

$$u(x), v(x), w(x) : E \to R, \quad \varphi(u, v, w) : F \to R$$
$$f(x) = \varphi(u(x), v(x), w(x)) : E \to R,$$

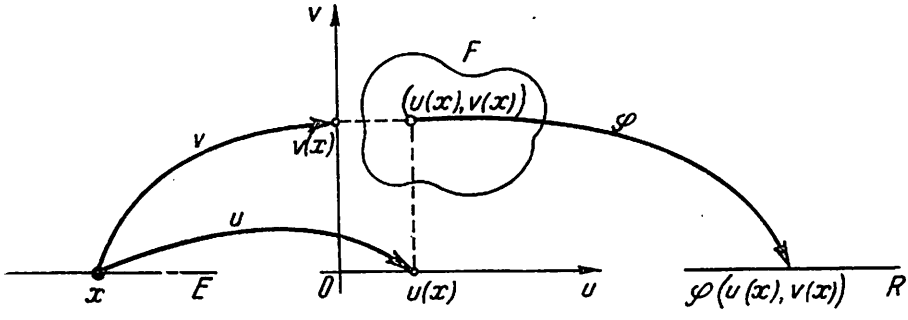


Fig. 152

avem

$$df = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{dw}{dx}\right)dx,$$
$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

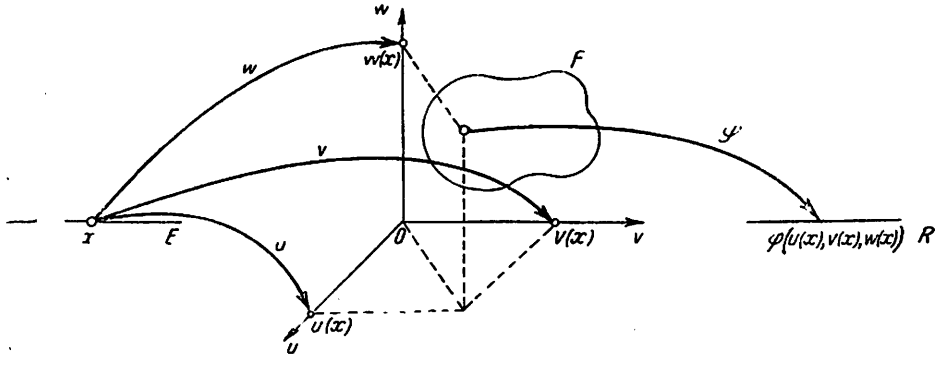


Fig. 153

IV) $n = 2$, m oarecare, adică $E \subset R^2$, $F \subset R^m$:

$$u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, n_m(x, y) : E \to R, \quad \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) : F \to R$$
$$f(x, y) = \varphi(u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, u_m(x, y)) : E \to R;$$

avem

$$df = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x} dx + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial y} dy = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} du_j;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial y}.$$

Pentru cazul cînd $n = 2$ și $m = 3$, adică $E \subset R^2$ și $F \subset R^3$:

$$u(x, y),\ v(x, y),\ w(x, y) : E \to R,\ \varphi(u, v, w) : F \to R;$$

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y),\ v(x, y),\ w(x, y)) : E \to R;$$

avem

$$df = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\right) dy;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Teorema următoare asigură existența derivatelor parțiale ale funcției compuse (dar nu neapărat a diferențialei):

Teorema 2. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate parțiale în raport cu x (sau cu y) în punctul $(a, b) \in E$, iar funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă în punctul corespunzător $(c, d) \in F$, atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parțiale în raport cu x (sau cu y) în punctul (a, b), date de formulele următoare:

$$f'_x(a, b) = \varphi'_u(c, d) \cdot u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d) \cdot v'_x(a, b);$$

$$f'_y(a, b) = \varphi'_u(c, d) \cdot u'_y(a, b) + \varphi'_v(c, d) \cdot v'_y(a, b).$$

Conform ipotezei, avem

$$u'_x(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{u(x, b) - u(a, b)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{u(x, b) - c}{x - a}, \quad c = u(a, b);$$

$$v'_x(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{v(x, b) - v(a, b)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{v(x, b) - d}{x - a}, \quad d = v(a, b);$$

$$\varphi(u, v) - \varphi(c, d) = [\varphi'_u(c, d) + \omega_1(u, v)](u - c) + [\varphi'_v(c, d) + \omega_2(u, v)](v - d),$$

unde $\lim\limits_{\substack{u \to c \\ v \to d}} \omega_i(u, v) = \omega_i(c, d) = 0, \ i = 1, 2.$

Atunci

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \frac{\varphi(u(x, b)\, v(x, b)) - \varphi(u(a, b)\, v(a, b))}{x - a} =$$

$$= \frac{\varphi(u(x, b), v(x, b)) - \varphi(c, d)}{x - a} = [\varphi'_u(c, d) + \omega_1(u(x, b), v(x, b))] \frac{u(x, b) - c}{x - a} +$$

$$+ [\varphi'_v(c, d) + \omega_2(u(x, b), v(x, b))] \frac{v(x, b) - d}{x - a}.$$

Funcțiile de o singură variabilă $u(x, b)$, $v(x, b)$ sînt continue în a, deoarece sînt derivabile în a; funcția $\omega_i(u, v)$ este continuă în punctul corespunzător (c, d). Rezultă că funcția compusă $\omega_i(u(x, b), v(x, b))$ este continuă în punctul a:

$$\lim_{x\to a} \omega_i(u(x, b), v(x, b)) = \omega_i(u(a, b), v(a, b)) = \omega_i(c, d) = 0.$$

Atunci

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = [\varphi'_u(c, d) + \lim_{x\to a} \omega_1] \lim_{x\to a} \frac{u(x, b) - c}{a - a} +$$

$$+ [\varphi'_v(c, d) + \lim_{x\to a} \omega_2] \lim_{x\to a} \frac{v(x, b - d)}{a - a} = \varphi'_u(c, d)\, u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d) \cdot v'_x(a, b),$$

deci $f'_x(a, b)$ există și este finită, și ea este dată de formula din enunțul teoremei.

Corolar. **Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate parțiale pe E, iar funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă pe F, atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parțiale pe E, date de formulele**

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(u, (x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

Observație. Dacă funcția $\varphi(u, v)$ nu este diferențiabilă în punctul (c, d), atunci este posibil ca funcția compusă

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$$

să nu aibă derivate parțiale în acest punct, chiar dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt *diferențiabile* în (a, b), iar $\varphi(u, v)$ are derivate parțiale în (c, d)

Exemplu. Fie funcțiile

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = x^2 + y^2$$

definite pe $E = R^2$ și funcția $\varphi(u, v)$ definită pe $F = R^2$, astfel:

$$\varphi(u, v) = \frac{uv}{u^2 + v^2} \text{ dacă } (u, v) \neq (0, 0) \text{ și } \varphi(0, 0) = 0.$$

Punctului $(a, b) = (0, 0) \in E$ îi corespunde punctul $(c, d) = (0, 0) \in F$, deoarece $c = u(0, 0) = 0$ și $d = v(0, 0) = 0$.

Funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile în $(0, 0)$ (și chiar pe tot planul), iar funcția $\varphi(u, v)$ are derivate parțiale în $(0, 0)$, dar nu este diferențiabilă în acest punct.

Funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ nu are derivate parțiale în $(0, 0)$. Într-adevăr, dacă $(x, y) \neq (0, 0)$, atunci

$$u(x, y) = v(x, y) = x^2 + y^2 \neq 0, \text{ deci}$$

$$f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2, x^2 + y^2) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{2},$$

iar dacă $(x, y) = (0, 0)$, avem $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$, deci

$$f(0, 0) = \varphi(0, 0) = 0.$$

Atunci, dacă $x \neq 0$, avem

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{x - 0} = \frac{1}{2x}$$

și acest raport nu are limită în punctul 0, deci funcția f nu are derivată parțială în raport cu x în punctul $(0, 0)$.

La fel se arată că f nu are derivată parțială în raport cu y în punctul $(0, 0)$.

7. Diferențialele și derivatele parțiale de ordin superior ale funcțiilor compuse

Ne vom mărgini la studiul funcțiilor de două variabile.

Rezultatele rămîn adevărate și pentru funcții de oricîte variabile.

Fie E și F două mulțimi deschise din plan, $u(x, y)$, $v(x, y)$ două funcții reale definite pe E, astfel încît $(u(x, y), v(x, y)) \in F$ pentru orice $(x, y) \in E$ și funcția reală $\varphi(u, v)$ definită pe F.

Să considerăm funcția compusă f definită pe E:

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y)).$$

Fie (a, b) un punct din E și $(c, d) \in F$ punctul corespunzător,

$$c = u(a, b), \quad d = v(a, b).$$

Teorema 1. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate de ordinul doi în punctul $(a, b) \in E$, iar funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă de două ori într-o vecinătate a punctului corespunzător $(c, d) \in F$, atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parțiale de ordinul doi în (a, b) și

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

unde derivatele parțiale ale funcțiilor $u(x, y)$ și $v(x, y)$ se calculează în punctul (a, b), iar cele ale funcției $\varphi(u, v)$ în punctul corespunzător (c, d).

Deoarece funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă de două ori pe întreaga vecinătate U a lui (c, d), ea are *derivate parțiale* $\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}$ și $\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}$ *diferențiabile pe* U. Atunci funcția $\varphi(u, v)$ este de asemenea *diferențiabilă pe* U. Fără

a micșora generalitatea putem presupune că derivatele parțiale φ'_u și φ'_v există pe toată mulțimea de definiție F, considerînd, la nevoie, funcția $\varphi(u, v)$ definită numai pe U. Deoarece funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate parțiale de ordinul doi în punctul (a, b) ele au derivate parțiale de ordinul întîi pe o mulțime V care conține un segment paralel cu Ox și un segment paralel cu Oy, ambele trecînd prin (a, b). Putem raționa cu restricțiile funcțiilor $u(x, y)$ și $v(x, y)$ la mulțimea V, de aceea, fără a micșora generalitatea, putem presupune că derivatele parțiale ale funcțiilor $u(x, y)$ și $v(x, y)$ există pe toată mulțimea E.

Deoarece funcțiile $u(x, y)$, $v(x, y)$ au derivate parțiale pe E, iar funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă pe F, rezultă că funcția compusă are derivate parțiale pe E și

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

Toate funcțiile din membrul drept au derivate parțiale în (a, b); funcțiile $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ au derivate parțiale în (a, b) deoarece, prin ipoteză, funcțiile u și v au derivate parțiale de ordinul doi în acest punct; iar funcțiile

$$\frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v}$$

au derivate parțiale în (a, b), deoarece funcțiile u și v au derivate parțiale în (a, b), iar funcțiile $\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}$ sînt diferențiabile în punctul corespunzător (c, d).

Rezultă deci că și funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ au derivate parțiale în (a, b), adică funcția compusă f are derivate parțiale de ordinul doi în (a, b). Derivatele parțiale de ordinul doi ale lui f în punctul (a, b) se calculează astfel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Dar

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

și

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

astfel încît

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

La fel se calculează și celelalte trei formule.

Cele patru formule se pot scrie, în mod simbolic, astfel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}\right)\varphi;$$

Observație. În demonstrație s-a folosit faptul că funcția $\varphi(u, v)$ este de două ori diferențiabilă pe o întreagă vecinătate a lui (c, d). Dacă $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă de două ori numai în (c, d), putem deduce că funcția compusă $f(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul întîi doar în punctul (a, b).

Corolar. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate parțiale de ordinul doi pe E, iar funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă de două ori pe E, atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parțiale de ordinul doi pe E.

Observații. 1° Dacă derivatele parțiale mixte ale funcțiilor u și v sînt egale,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},$$

rezultă că și derivatele parțiale mixte ale funcției compuse sînt egale:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

2° Pentru ca $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ să existe este suficient ca $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ și $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ să existe; există atunci și $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial v}{\partial x}$. Nu este necesară existența celorlalte derivate parțiale de ordinul doi ale funcțiilor u și v și nici existența derivatelor de ordinul întîi în raport cu y ale funcțiilor u și v.

De asemenea, pentru ca $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ să existe, este suficient să existe $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ și $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, dar nu în mod necesar celelalte derivate de ordinul doi și nici $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial v}{\partial x}$.

Pentru existența derivatei $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ se folosește existența derivatelor de ordinul doi $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ și a derivatelor de ordinul întîi ale funcțiilor u și v, atît în raport cu x cît și în raport cu y, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

De asemenea, pentru existența derivatei $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se folosește existența derivatelor de ordinul doi $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ și a derivatelor de ordinul întîi ale funcțiilor u și v atît în raport cu x cît și în raport cu y.

Teorema 2. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile de două ori în punctul $(a, b) \in E$, iar funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă de două ori într-o vecinătate a punctului corespunzător (c, d), atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ este diferențiabilă de două ori în punctul (a, b) și

$$\mathrm{d}^2 f = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \mathrm{d}u^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \mathrm{d}v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \mathrm{d}^2 u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \mathrm{d}^2 v,$$

unde derivatele parțiale ale funcției φ sînt calculate în punctul (c, d), iar diferențialele funcțiilor u și v sînt calculate în punctul (a, b).

Deoarece funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile de două ori în (a, b), ele au derivate parțiale de ordinul întîi într-o vecinătate V a lui (a, b) și diferențiabile în (a, b). Rezultă că și funcția compusă f are derivate parțiale de ordinul întîi în vecinătatea V:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

Toate funcțiile din membrul drept al acestor egalități sînt diferențiabile în (a, b): derivatele parțiale ale funcțiilor $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile în (a, b) deoarece aceste funcții sînt de două ori diferențiabile în (a, b); de asemenea, funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile în (a, b) (fiind de două ori diferențiabile în acest punct), iar $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ și $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ sînt diferențiabile în punctul corespunzător (c, d) (deoarece φ este de două ori diferențiabilă într-o vecinătate a acestui punct); atunci și funcțiile compuse

$$\frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v}$$

sînt diferențiabile în (a, b). Rezultă deci că $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sînt diferențiabile în (a, b), adică funcția compusă f este diferențiabilă de două ori în (a, b).

Deducem de aici că funcția compusă f are toate derivatele de ordinul doi în (a, b), iar derivatele mixte sînt egale în (a, b).

Atunci

$$d^2f = d(df) = d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,dv\right) = d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\cdot du +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,d(du) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\cdot dv + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot d(dv).$$

Dar

$$d(du) = d^2u, \qquad d(dv) = d^2v \quad \text{și}$$

$$d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u}\,du + \frac{\partial}{\partial v}\,dv\right)\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\,du + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\,dv;$$

$$d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u}\,du + \frac{\partial}{\partial v}\,dv\right)\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\,du + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\,dv.$$

Atunci

$$d^2f = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\,du + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\,dv\right)du + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,d^2u + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\,du + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\,dv\right)dv + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,d^2v =$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\,du^2 + 2\,\frac{\partial^2 v}{\partial u \partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\,dv^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,d^2v.$$

Această formulă se scrie, simbolic, astfel:

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial u}\,du + \frac{\partial}{\partial v}\,dv\right)^2 \varphi + \left(\frac{\partial}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial}{\partial v}\,d^2v\right)\varphi.$$

O b s e r v a ț i i. 1° Dacă funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă de două ori numai în (c, d), putem deduce că funcția compusă are derivate parțiale de ordinul întîi numai în (a, b), deci nu mai rezultă că $f(x, y)$ este diferențiabilă de două ori în (a, b).

2° Formula diferențialei de ordinul doi a funcției compuse se poate obține și din egalitatea

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2,$$

înlocuind derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției compuse f, date de formulele din teorema 1.

3° Diferențiala de ordinul doi a funcției φ este

$$d^2\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial u}\,du + \frac{\partial}{\partial v}\,dv\right)^2 \varphi.$$

Se observă că d^2f și $d^2\varphi$ diferă prin termenul

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial}{\partial v}\,d^2v\right)\varphi,$$

astfel încît nu se mai poate vorbi de invarianța diferențialei de ordinul doi față de operația de compunere.

Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt liniare,

$$u(x, y) = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$v(x, y) = a_2x + b_2y + c_2,$$

atunci

$$d^2u(x, y) = 0,\ d^2v(x, y) = 0,$$

deci

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}d^2u + \frac{\partial}{\partial v}d^2v\right)\varphi = 0,$$

adică, formal, avem $d^2f = d^2\varphi$; în acest caz și diferențiala de ordinul doi este invariantă față de operația de compunere.

De asemenea, în acest caz, derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției compuse $f(x, y)$ se scriu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\varphi;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\varphi;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\varphi.$$

Luînd în particular

$$u(x, y) = x,$$
$$v(x, y) = y,$$

avem chiar egalitate între funcțiile f și φ

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y)) = \varphi(x, y).$$

3° Dacă funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă de două ori și dacă se cunosc derivatele sale parțiale de ordinul doi, atunci se poate calcula diferențiala sa:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Reciproc, dacă se cunoaște diferențiala de ordinul doi, rezultă și derivatele parțiale de ordinul doi: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ este coeficientul lui dx^2, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ este coeficientul lui dy^2, iar $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ este jumătatea coeficientului lui $dx\,dy$.

Exemplu. Fie funcția $f(x, y) = \sin\sqrt{xy}$ definită pentru $xy > 0$, adică în cadranele 1 și 3, fără punctele de pe axe.

Avem

$$df(x, y) = d(\sin\sqrt{xy}) = \cos\sqrt{xy}\, d\sqrt{xy} = \cos\sqrt{xy}\,\frac{d(xy)}{2\sqrt{xy}} = \cos\sqrt{xy}\,\frac{y\,dx + x\,dy}{2\sqrt{xy}}.$$

$$d^2f(x, y) = d(df(x, y)) = d\cos\sqrt{xy}\cdot\frac{y\,dx + x\,dy}{2\sqrt{xy}} + \cos\sqrt{xy}\, d\frac{y\,dx + x\,dy}{2\sqrt{xy}} =$$

$$= -\sin\sqrt{xy}\,\frac{y\,dx + x\,dy}{2\sqrt{xy}}\cdot\frac{y\,dx + x\,dy}{2\sqrt{xy}} +$$

$$+ \cos\sqrt{xy}\,\frac{\sqrt{xy}\,d(y\,dx + x\,dy) - (y\,dx + x\,dy)\,d\sqrt{xy}}{2\,xy} =$$

$$= -\sin\sqrt{xy}\,\frac{y^2\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + x^2\,dy^2}{4\,xy} +$$

$$+ \cos\sqrt{xy}\,\frac{\sqrt{xy}(dy\,dx + dx\,dy) - (y\,dx + x\,dy)\,\dfrac{y\,dx + x\,dy}{2\sqrt{xy}}}{2\,xy} =$$

$$= -\sin\sqrt{xy}\,\frac{y^2\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + x^2\,dy^2}{4\,xy} +$$

$$+ \cos\sqrt{xy}\,\frac{2\sqrt{xy}\,dx\,dy - y^2\,dx^2 - 2xy\,dx\,dy - x^2\,dy^2}{4\,xy\sqrt{xy}},$$

deci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{4\,xy}\left(y^2\sin\sqrt{xy} + \frac{y^2}{\sqrt{xy}}\cos\sqrt{xy}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{4\,xy}\left(x^2\sin\sqrt{xy} + \frac{x^2}{\sqrt{xy}}\cos\sqrt{xy}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{4\,xy}\left(xy\sin\sqrt{xy} + \frac{xy}{\sqrt{xy}}\cos\sqrt{xy} - 1\right).$$

Teoremele precedente rămîn valabile și pentru derivatele parțiale sau diferențialele de un ordin n oarecare ale funcțiilor compuse.

Teoremă. Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile de n ori (sau au derivate parțiale de ordinul n) pe E, iar funcția $\varphi(u, v)$ este diferențiabilă de n ori pe F, atunci funcția compusă $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ este diferențiabilă de n ori (respectiv are derivate parțiale de ordinul n) pe E.

Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate parțiale de ordinul n continue pe E, iar funcția $\varphi(u, v)$ are derivate parțiale de ordinul n continue pe F, atunci funcția compusă $f(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul n continue pe E.

Demonstrația se face prin inducție completă și o lăsăm pe seama cititorului, ca exercițiu.

O b s e r v a ț i i. 1° Teorema este adevărată și în cazul general în care avem m funcții reale de n variabile

$$u_1(x_1, \ldots, x_n),\ u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots,\ u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

definite pe o mulțime $E \subset R^n$, și o funcție reală (sau cu valori în E^p) de m variabile

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

definite pe o mulțime $F \subset R^m$.

2° Dacă funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt liniare

$$u(x, y) = a_1 x + b_1 y + c_1,$$

$$v(x, y) = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

diferențiala de ordinul n a funcției compuse $f(x, y)$ se scrie ca și diferențiala de ordinul n a funcției $\varphi(u, v)$:

$$\mathrm{d}^n f = \left(\frac{\partial}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)^n \varphi = \mathrm{d}^n \varphi.$$

Demonstrația se face prin inducție completă, ținînd seama că, în acest caz, avem $\mathrm{d}^2 u = \mathrm{d}(\mathrm{d}u) = 0$, $\mathrm{d}^2 v = \mathrm{d}(\mathrm{d}v) = 0$.

Pentru $n = 2$, formula a fost deja demonstrată. Să presupunem că este adevărată pentru n oarecare:

$$\mathrm{d}^n f = \left(\frac{\partial}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)^n \varphi = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n \varphi}{\partial u^{n-i} \partial v^i} (\mathrm{d}u)^{n-i} (\mathrm{d}v)^i$$

și să demonstrăm că va rămîne adevărată și pentru $n + 1$. Pentru aceasta, aplicăm operatorul de diferențiere

$$\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

diferențialei de ordinul n, $\mathrm{d}^n f$:

$$\mathrm{d}^{n+1} f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^n f) = \mathrm{d}\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i}\, \partial v^i} (\mathrm{d}u)^{n-i} (\mathrm{d}v)^i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left[\mathrm{d}\left(\frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i} \partial v^i}\right) \cdot (\mathrm{d}u)^{n-i} \cdot (\mathrm{d}v)^i + \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i}\, \partial v^i}\, \mathrm{d}((\mathrm{d}u)^{n-i} (\mathrm{d}v)^i)\right],$$

dar

$$\mathrm{d}\left((\mathrm{d}u)^{n-i} (\mathrm{d}v)^i\right) = \mathrm{d}(\mathrm{d}u)^{n-i} \cdot (\mathrm{d}v)^i + (\mathrm{d}u)^{n-i}\, \mathrm{d}(\mathrm{d}v)^i =$$

$$= (n - i)\, (\mathrm{d}u)^{n-i-1}\, \mathrm{d}(\mathrm{d}u) \cdot (\mathrm{d}v)^i + (\mathrm{d}u)^{n-i}\, i(\mathrm{d}v^{i-1})\, \mathrm{d}(\mathrm{d}v) = 0,$$

iar

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i} \partial v^i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i}\, \partial v^i} =$$

$$= \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1-i}\, \partial v^i}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+i}\, \partial v^{i+1}}\,\mathrm{d}v,$$

astfel încît

$$d^{n+1}f = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left[\frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1-i} \partial v^i} (du)^{n+1-i} (dv)^i + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n-i} \partial v^{i+1}} (du)^{n-i} (dv)^{i+1} \right].$$

În această sumă, coeficientul lui

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1-i} \partial v^i} (du)^{n+1-i} (dv)^i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

este

$$C_n^i + C_n^{i-1} = C_{n+1}^i,$$

iar coeficientul lui $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1}} (du)^{n+1}$ este $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$, deci

$$d^{n+1}f = C_{n+1}^0 \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1}} + \sum_{i=0}^{n} C_{n+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1-i} \partial v^i} (du)^{n+1-i} (dv)^i =$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1-j} \partial v^j} (du)^{n+1-j} (dv)^j = \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right)^{n+1} f.$$

8. Formula lui Taylor

Fie $f(x, y)$ o funcție reală de două variabile definită pe o mulțime $E \subset R^2$ și un punct interior $(a, b) \in E$.

Să presupunem că funcția f este *diferențiabilă* de n ori în punctul (a, b), deci are toate derivatele parțiale de ordinul n în punctul (a, b), iar în derivatele parțiale mixte pînă la ordinul n inclusiv nu are nici o importanță ordinea variabilelor în raport cu care se derivează.

Pentru fiecare punct $(x, y) \in E$ să considerăm polinomul de două variabile, de gradul n,

$$T_n(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (y - b) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} (x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} (x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} (y - b)^2 \right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i} (x - a)^{n-i} (y - b)^i$$

sau,

$$T_n(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right) f(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^2 f(a, b) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^n f(a, b).$$

Polinomul $T_n(x, y)$ definit pe E se numește *polinomul lui Taylor de gradul n*, atașat funcției $f(x, y)$ în punctul (a, b).

Dacă pentru fiecare $(x, y) \in E$ notăm

$$R_n(x, y) = f(x, y) - T_n(x, y),$$

atunci

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y),$$

adică

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right) f(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^2 f(a, b) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^n f(a, b) + R_n(x, y)$$

pentru orice $(x, y) \in E$. Această egalitate, valabilă pentru orice $(x, y) \in E$, se numește *formula lui Taylor* de ordinul n, corespunzătoare funcției $f(x, y)$ în punctul (a, b).

Funcția $R_n(x, y)$ definită pe E se numește *restul de ordinul n* al formulei lui Taylor.

Să observăm că pentru $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^k f(a, b) = \mathrm{d}^k f(a, b)\,(x, y) = \mathrm{d}^k f(a, b),$$

astfel încît, formula lui Taylor se mai poate scrie astfel:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(a, b) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a, b) + \ldots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(a, b) + R_n(x, y).$$

Dacă $(x, y) = (a, b)$, avem $T_n(a, b) = f(a, b)$ și $R_n(a, b) = 0$.

În cazul cînd restul $R_n(x, y)$ este o funcție continuă în (a, b),

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} R_n(x, y) = R_n(a, b) = 0,$$

atunci pentru valori ale lui x și y suficient de apropiate de a și b, putem realiza ca diferența $f(x, y) - T_n(x, y)$ să fie cît dorim de mică; pentru asemenea valori ale lui x și y funcția $f(x, y)$ poate fi aproximată cu polinomul $T_n(x, y)$. Vom arăta că, în anumite condiții, avem nu numai

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} R_n(x, y) = 0,$$

dar chiar

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \frac{R_n(x, y)}{\rho^n(x, y)} = 0,$$

unde

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Teoremă. **Dacă funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă de $n+1$ ori într-o vecinătate V a lui (a, b), atunci, pentru orice punct $(x, y) \in V$, există un punct $(\xi, \eta) \in V$ pe segmentul care unește punctele (a, b) și (x, y), astfel încît să avem**

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^{n+1} f(\xi, \eta) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}^{n+1} f(\xi, \eta)$$

și

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}\, f(a, b) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a, b) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(a, b) + \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1} f(\xi, \eta).$$

Fie (x_0, y_0) un punct *arbitrar* în V. Să unim punctele (a, b) și (x_0, y_0) printr-un segment I.

Să considerăm funcțiile

$$x(t) = a + (x_0 - a)t,$$

$$y(t) = b + (y_0 - b)t$$

definite pentru $t \in [0,1]$. Cînd t parcurge segmentul $[0,1]$, punctul corespunzător $(x(t), y(t))$ din plan parcurge segmentul I.

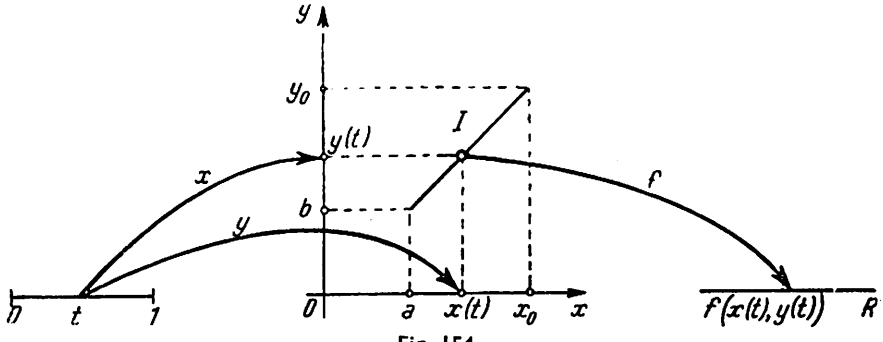


Fig. 154

Într-adevăr, pentru orice punct (x', y') de pe segmentul I există un punct $t' \in [0,1]$, astfel ca

$$x' = a + (x_0 - a)\,t' = x(t'),$$

$$y' = b + (y_0 - b)\,t' = y(t').$$

Pentru $t = 0$ avem $x(0) = a$, $y(0) = b$, iar pentru $t = 1$ avem $x(1) = x_0$, $y(1) = y_0$.

Să considerăm funcția compusă

$$F(t) = f(x(t), y(t)) = f(a + (x_0 - a)\,t,\ b + (y_0 - b)t)$$

definită pentru $t \in [0,1]$. Deoarece funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ sînt diferențiabile de orice ordin pe $[0,1]$, iar funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă de $n + 1$ ori pe V, rezultă că funcția compusă $F(t)$ este diferențiabilă de $n + 1$ ori pe $[0,1]$ și deoarece $\mathrm{d}^2x(t) = 0$, $\mathrm{d}^2y(t) = 0$, avem pentru $k = 1, 2, \ldots, n + 1$

$$\mathrm{d}^kF(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x(t) + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y(t)\right)^k f(x(t), y(t)).$$

Dar $\mathrm{d}x(t) = (x_0 - a)\,\mathrm{d}t$ și $\mathrm{d}y(t) = (y_0 - b)\,\mathrm{d}t$, astfel încît

$$\mathrm{d}^kF(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y_0 - b)\right)^k f(x(t), y(t))\,(\mathrm{d}t)^k,$$

deci, derivata de ordinul k a funcției $F(t)$ este

$$F^{(k)}(t) = \frac{\mathrm{d}^kF(t)}{\mathrm{d}t^k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y_0 - b)\right)^k f(x(t), y(t)).$$

Atunci

$$F^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y_0 - b)\right)^k f(a, b),$$

deoarece $x(0) = a$, $y(0) = b$. Funcția $F(t)$ fiind derivabilă de $n + 1$ ori pe $[0,1]$, se poate scrie formula lui Mac Laurin cu restul în forma lui Lagrange:

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\tau),$$

unde τ depinde de t și este cuprins între 0 și t. Pentru $t = 1$ obținem

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\tau),$$

unde τ este cuprins între 0 și 1. Notînd $\xi = x(\tau)$, $\eta = y(\tau)$ și observînd că $F(1) = f(x_0, y_0)$, iar $F(0) = f(a, b)$, ultima formulă devine

$$f(x_0, y_0) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y_0 - b)\right) f(a, b) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y_0 - b)\right)^n f(a, b) + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y_0 - b)\right)^{n+1} f(\xi, \eta),$$

unde punctul (ξ, η) se află pe segmentul I care unește punctele (a, b) și (x_0, y_0).

Deoarece punctul (x_0, y_0) a fost ales arbitrar în V, rezultă că, pentru orice punct $(x, y) \in V$, există un punct (ξ, η) pe segmentul ce unește (a, b) cu (x, y), astfel încît să avem

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right) f(a, b) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^n f(a, b) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^{n+1} f(\xi, \eta),$$

deci restul $R_n(x, y)$ este

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^{n+1} f(\xi, \eta)$$

și teorema este demonstrată.

Faptul că $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \frac{R_n(x, y)}{\rho^n(x, y)} = 0$ va fi demonstrat într-un caz mai general, în condiții mai puțin restrictive.

Formula lui Lagrange. **Dacă $f(x, y)$ este diferențiabilă într-o vecinătate V a lui (a, b), atunci pentru orice $(x, y) \in V$ există un punct $(\xi, \eta) \in V$, cu ξ cuprins între a și x și η cuprins între b și y, astfel ca**

$$f(x, y) - f(a, b) = f'_x(\xi, \eta)(x-a) + f'_y(\xi, \eta)(y-b).$$

Observație. În formula lui Lagrange demonstrată anterior se folosea numai existența derivatelor parțiale f'_x și f'_y într-o vecinătate a lui V, în schimb derivatele f'_x și f'_y se luau în puncte diferite.

Teoremă. Dacă funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul n continue într-o vecinătate V a lui (a, b), atunci restul se poate scrie în forma

$$R_n(x, y) = \frac{1}{n!}\omega(x, y)\ \rho^n(x, y),$$

unde funcția $\omega(x, y)$ este continuă în (a, b) și nulă în acest punct:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0.$$

Într-adevăr, deoarece funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul n continue în V, rezultă că $f(x, y)$ este diferențiabilă de n ori în V, deci se poate scrie formula lui Taylor de ordinul $n-1$:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right) f(a, b) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^{n-1} f(a, b) +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^n f(\xi, \eta)$$

pentru orice $(x, y) \in V$, unde ξ se află cuprins între a și x, iar η între b și y. Restul $R_{n-1}(x, y)$ este aici

$$R_{n-1}(x, y) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^n f(\xi, \eta).$$

Dacă se dezvoltă după formula binomului lui Newton, coeficientul lui $(x - a)^{n-i}(y - b)^i$ este

$$C_n^i \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial x^{n-i} \partial y^i}.$$

Dar derivatele parțiale sînt continue în V, deci și în punctul (a, b), și, ținînd seama că ξ și η depind de x și y și că dacă $x \to a$ și $y \to b$ avem $\xi \to a$ și $\eta \to b$, rezultă că

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} C_n^i \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = C_n^i \frac{\partial^n f(a, b)}{\partial x^{n-i} \partial y^i}$$

și deci

$$C_n^i \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = C_n^i \frac{\partial^n f(a, b)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} + \omega_i(x, y),$$

unde $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega_i(x, y) = \omega_i(a, b) = 0.$

Așadar:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^n f(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} (x - a)^{n-i} (y - b)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n f(a, b)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} (x - a)^{n-i} (y - b)^i + \sum_{i=0}^{n} \omega_i(x, y) (x - a)^{n-i} (y - b)^i =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^n f(a, b) + \omega(x, y)\, \rho^n,$$

unde am notat $\rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$,

$$\omega(x, y) = \frac{1}{\rho^n} \sum_{i=0}^{n} \omega_i(x, y) (x - a)^{n-i} (y - b)^i,$$

$$\omega(a, b) = 0.$$

Deoarece $|x - a| \leqslant \rho$ și $|y - b| \leqslant \rho$, avem

$$|\omega(x, y)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |\omega_i(x, y)| \frac{|x - a|^{n-1}}{\rho^{n-i}} \cdot \frac{|y - b|^i}{\rho^i} \leqslant \sum_{i=0}^{n} |\omega_i(x, y)|$$

și, deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} |\omega_i(x, y)| = 0$, rezultă că

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = 0 = \omega(a, b).$$

Așadar

$$R_{n-1}(x, y) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^n f(a, b) + \frac{1}{n!}\omega(x, y)\rho^n,$$

deci

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right) f(a, b) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^{n-1} f(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^n f(a, b) + \frac{1}{n!}\omega(x, y)\,\rho^n.$$

Am obținut deci formula lui Taylor de ordinul n, cu restul $R_n(x, y) = \frac{1}{n!}\omega(x, y)\,\rho^n(x, y)$, unde

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

și

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0.$$

O b s e r v a ț i i. 1° Ultima teoremă este valabilă dacă f este diferențiabilă de n ori în V, și derivatele parțiale de ordinul n sînt continue numai în (a, b).

Într-adevăr, în demonstrație au fost folosite numai aceste condiții.

2° Propoziția analogă pentru funcții de o singură variabilă a fost demonstrată în ipoteza că funcția $f(x)$ are derivata de ordinul n numai în a.

3° Cele două teoreme rămîn adevărate și pentru funcții de mai multe variabile, fie că aceste funcții au valori reale, fie că au valori vectoriale.

Caz particular. Dacă funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate V a lui (a, b), atunci pentru orice $(x, y)\in V$ avem

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)\,(x-a) + f'_y(a, b)\,(y-b) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[f''_{x^2}(a, b)\,(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)\,(x, a)\,(y-b) + f''_{y^2}(a, b)\,(y-b)^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\omega(x, y)\left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right],$$

unde $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0.$

9. Extremele funcțiilor de mai multe variabile

Fie $f(x, y)$ o funcție reală de două variabile, definită pe o mulțime $E \subset R^2$.

Definiție. Un punct $(a, b) \in E$ se numește punct de maxim local (respectiv de minim local) al funcției $f(x, y)$, dacă există o vecinătate V a lui (a, b) astfel încît, pentru orice $(x, y) \in V \cap E$ să avem $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ (respectiv $f(x, y) \geqslant f(a, b)$).

Punctele de maxim (local) și punctele de minim (local) se numesc puncte de extrem (local) ale funcției.

Dacă (a, b) este un punct de maxim local (respectiv de minim local) al funcției $f(x, y)$, valoarea sa $f(a, b)$ în acest punct se numește maxim local (respectiv minim local) al funcției.

Maximele și minimele locale ale funcției se numesc extremele (locale) ale funcției.

Propoziția 1. Dacă funcția f are derivate parțiale într-un punct de extrem (a, b) din interiorul mulțimii E, atunci derivatele parțiale se anulează în acest punct:

$$f'_x(a, b) = 0, \quad f'_y(a, b) = 0.$$

Într-adevăr, funcția parțială $\varphi(x) = f(x, b)$, definită pe mulțimea

$$E_b = \{x \mid x \in R, \quad (x, b) \in E\}$$

este derivabilă în punctul a, $\varphi'(a) = f'_x(a, b)$, iar a este punct de extrem al acestei funcții și punct interior al mulțimii E_b, deci, conform teoremei lui Fermat, avem $\varphi'(a) = 0$, adică $f'_x(a, b) = 0$. La fel se arată că $f'_y(a, b) = 0$.

Observații. 1° Propoziția 1 este o generalizare a teoremei lui Fermat pentru funcții de două variabile.

2° Propoziția 1 rămîne adevărată și dacă (a, b) nu este punct interior al lui E, dar dacă mulțimea E conține un segment paralel cu Ox și un segment paralel cu Oy, care conține punctul (a, b) astfel că (a, b) nu se află la nici una din extremitățile acestor două segmente.

Definiție. Un punct interior $(a, b) \in E$ se numește punct staționar al funcției $f(x, y)$, dacă funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul (a, b) și dacă diferențiala sa este nulă în acest punct, $df(a, b) = 0$.

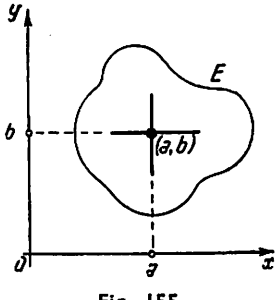


Fig. 155

Deoarece diferențiala funcției $f(x, y)$ în (a, b) este

$$df(a, b) = f'_x(a, b)\, dx + f'_y(a, b) dy,$$

avem $df(a, b) = 0$ dacă și numai dacă $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$.

Așadar, a spune că (a, b) este un *punct staționar* al funcției $f(x, y)$, înseamnă că *funcția este diferențiabilă în punctul* (a, b) *și are derivatele parțiale nule în acest punct.*

Propoziția 2. Orice punct de extrem local din interiorul mulțimii E în care funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă este punct staționar al funcției.

Într-adevăr, conform propoziției 1, avem

$$f'_x(a, b) = 0 \text{ și } f'_y(a, b) = 0,$$

deci (a, b) este punct staționar al funcției.

Observație. Propoziția reciprocă nu este adevărată: există puncte staționare care nu sînt puncte de extrem.

Exemplu. Fie funcția $f(x, y) = x^2 - y^2$, definită pe R^2.

Avem $f'_x(x, y) = 2x$ și $f'_y(x, y) = -2y$, deci

$$f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0.$$

Funcția este diferențiabilă în punctul (0, 0) (deoarece derivatele parțiale sînt continue), deci (0, 0) este punct staționar al funcției. Punctul (0, 0) nu este însă punct de extrem al funcției.

Într-adevăr, pentru punctele de forma $(x, 0)$, de pe axa Ox, avem

$$f(x, 0) = x^2 \geqslant 0 \geqslant f(0, 0),$$

iar pentru puncte de forma $(0, y)$, de pe axa Oy, avem

$$f(0, y) = -y^2 \leqslant 0 \leqslant f(0, 0),$$

astfel încît, în (0, 0) funcția nu are nici minim local, nici maxim local.

Situația este asemănătoare cu aceea a funcțiilor de o singură variabilă pentru care există puncte în care derivata întîi se anulează, dar care nu sînt puncte de extrem (ci puncte de inflexiune).

Punctele staționare ale funcției $f(x, y)$ care nu sînt puncte de extrem ale sale se numesc *puncte șa* ale lui $f(x, y)$.

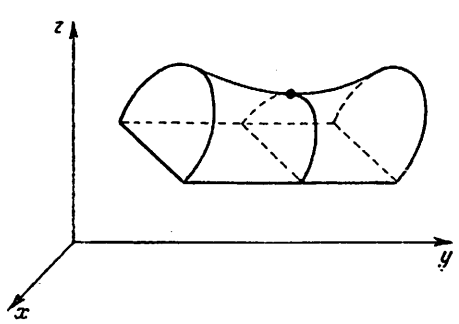


Fig. 156

Intrepretare geometrică. Graficul funcției $f(x, y)$ este o suprafață S a cărei ecuație este

$$z = f(x, y).$$

Dacă funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul (a, b), suprafața S are plan tangent în punctul corespunzător $(a, b, f(a, b))$, a cărui ecuație este

$$z - f(a, b) = f'_x(a, b)\,(x - a) + f'_y(a, b)\,(y - b).$$

Dacă (a, b) este punct staționar, suprafața S are în punctul $(a, b, f(a, b))$ plan tangent paralel cu planul xOy. Într-adevăr, $f'_x(a, b) = 0$ și $f'_y(a, b) = 0$, deci ecuația planului tangent devine $z - f(a, b) = 0$, adică

$$z = f(a, b),$$

adică este un plan paralel cu planul xOy.

Din considerațiile precedente rezultă că, dacă E este o mulțime *deschisă*, și dacă funcția $f(x, y)$ este *diferențiabilă* pe E, punctele staționare ale lui f sînt toate soluțiile (x, y) ale sistemului

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Cum orice punct de extrem local este punct staționar, rezultă că punctele de extrem local se află printre soluțiile sistemului de mai sus (dar nu toate soluțiile sistemului sînt puncte de extrem).

Ca și pentru funcții de o singură variabilă, pentru a identifica printre punctele staționare unele puncte de extrem (dar nu neapărat toate punctele de extrem) va trebui să recurgem la derivatele parțiale de ordinul doi.

Teorema. Dacă (a, b) este un punct staționar al funcției $f(x, y)$ și dacă funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate V a lui (a, b) atunci:

1) Dacă $f''^2_x f''^2_y - [f''_{xy}]^2 > 0$, derivatele parțiale fiind calculate în (a, b), atunci (a, b) este un punct de extrem local al funcției $f(x, y)$ și anume:

dacă $f''^2_x(a, b) > 0$, (a, b) este punct de minim,

dacă $f''_{x^2}(a, b) < 0$, (a, b) este punct de maxim.

2) Dacă $f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 < 0$, atunci (a, b) nu este punct de extrem al funcției $f(x, y)$.

Deoarece (a, b) este punct staționar, avem

$$f'_x(a, b) = 0 \text{ și } f'_y(a, b) = 0.$$

Deoarece funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul doi continue pe o vecinătate V a lui (a, b), putem scrie formula lui Taylor de ordinul doi, pentru $(x, y) \in V$:

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)\,(x - a) + f'_y(a, b)\,(y - b) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,[f''_{x^2}(a, b)\,(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)\,(x - a)(y - b) + f''_{y^2}(a, b)\,(y - b)^2] +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\omega(x, y)\,\rho^2,$$

unde $\rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ și $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = 0.$

Ținînd seama că derivatele parțiale de ordinul întîi sînt nule și notînd, pentru prescurtare,

$$A = f''_{x^2}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{y^2}(a, b),$$

obținem:

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2}[A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 + \omega(x, y)\rho^2].$$

Pentru $\rho \neq 0$, să notăm $\alpha(x, y) = \frac{x-a}{\rho}$, $\beta(x, y) = \frac{y-b}{\rho}$. Atunci

$$\alpha^2(x, y) + \beta^2(x, y) \equiv 1, \text{ oricare ar fi punctul } (x, y) \neq (a, b),$$

de unde:

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2}[A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega]\rho^2.$$

Să observăm că dacă punctul (x, y) înconjură într-un mod oarecare punctul (a, b), punctul (α, β), care îi corespunde, descrie un cerc cu centrul în origine și cu raza 1. Dacă (x, y) se deplasează pe o dreaptă ce trece prin (a, b), punctul (α, β) rămîne neschimbat.

Să presupunem întîi că $f''_{x^2}f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 > 0$, adică $AC - B^2 > 0$. Rezultă că trinomul $A\gamma^2 + 2B\gamma + C$ are rădăcini complexe și deci nu se anulează pentru nici o valoare a lui γ. Atunci forma pătratică $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$ nu se anulează în nici un punct (α, β), deoarece $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Dar $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$ este funcție continuă de (α, β) și la fel $|A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2|$; modulul formei pătratice își atinge minimul pe cercul unitate $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ și, deoarece nu se anulează, acest minim, μ este strict pozitiv, $\mu > 0$. Dar $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = 0$, deci există un cerc (disc circular) V cu centrul în (a, b) și raza suficient de mică, astfel încît să avem

$$|\omega(x, y)| < \mu \leqslant |A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2|$$

pentru orice $(x, y) \in V$. Rezultă că în V, funcția

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega$$

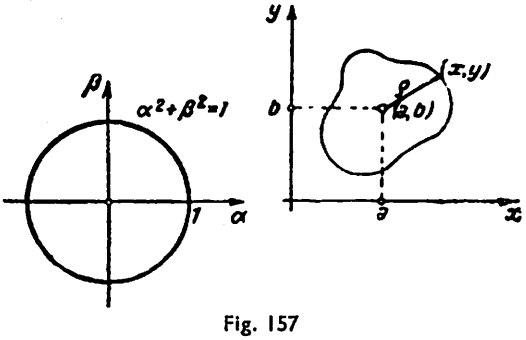


Fig. 157

are același semn cu funcția $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$, iar aceasta are același semn cu A. Cum $\rho^2 \geqslant 0$, deducem că diferența

$$f(x, y) - f(a, b)$$

păstrează în V un semn constant, semnul lui A.

Dacă $A > 0$, atunci $f(x, y) - f(a, b) > 0$, deci (a, b) este un punct de minim; dacă $A < 0$, atunci $f(x, y) - f(a, b) < 0$, deci (a, b) este un punct de maxim.

Să presupunem acum că $f''_{x^2}f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 < 0$, adică $AC - B^2 < 0$.

Rezultă că trinomul $A\gamma^2 + 2B\gamma + C$ are rădăcini reale și distincte, $\gamma_1 < \gamma_2$, și deci are un semn pentru valori ale lui γ cuprinse între rădăcini, și semn contrar pentru valori ale lui γ în afara rădăcinilor. Să observăm că atunci cînd punctul (x, y) înconjură punctul (a, b), α și β iau toate valorile cuprinse între -1 și 1 și deci raportul $\frac{\alpha}{\beta}$ ia toate valorile reale, deci atît valori în afara rădăcinilor γ_1 și γ_2, cît și valori între aceste rădăcini. Atunci $\left(A\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2B\frac{\alpha}{\beta} + C\right)\beta^2$ ia atît valori strict negative cît și valori strict pozitive.

Fie (x_1, y_1) un punct astfel încît pentru valorile (α_1, β_1) corespunzătoare să avem $\beta_1 \neq 0$ și $\left[A\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2 + 2B\frac{\alpha_1}{\beta_1} + C\right]\beta_1^2 = a > 0$. Cînd punctul (x, y) descrie dreapta d_1 ce unește punctul (x_1, y_1) cu (a, b), (α, β) rămîne neschimbat, deci $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = a > 0$. Există atunci un cerc V_1 cu centrul în (a, b) și raza suficient de mică astfel încît pentru $(x, y) \in V_1$ să avem $|\omega(x, y)| < a$. Rezultă că pentru orice punct (x, y) din $V_1 \cap d_1$ avem

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega > 0.$$

Fie acum (x_2, y_2) un punct astfel încît pentru valorile (α_2, β_2) corespunzătoare să avem $\beta_2 \neq 0$ și $\left[A\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2 + 2B\frac{\alpha_2}{\beta_2} + C\right]\beta_2 = b < 0$. Avem $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = b > 0$ pe dreapta d_2 ce unește punctul (x_2, y_2) cu punctul (a, b). Există atunci un cerc V_2 cu centrul în (a, b) astfel încît pentru $(x, y) \in V_2$ să avem $|\omega(x, y)| < |b|$. Rezultă că pentru orice (x, y) din $V_2 \cap d_2$ avem

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega < 0.$$

Notînd cu V un cerc cu centrul în (a, b) conținut în V_1 și în V_2, deducem că în interiorul cercului V funcția $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega$ ia valori > 0 pe dreapta d_1 și valori < 0 pe dreapta d_2.

Rezultă că în orice vecinătate a lui (a, b) diferența $f(x, y) - f(a, b)$ ia valori de semne contrare și deci (a, b) nu este punct de extrem.

Teorema este astfel complet demonstrată.

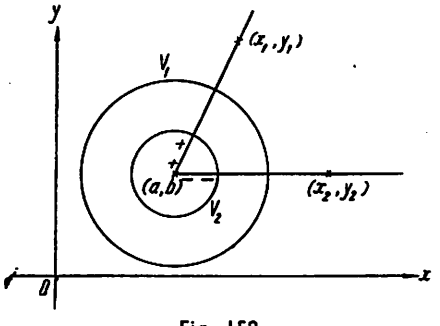


Fig. 158

Așadar, în orice vecinătate a punctului (a, b) diferența $f(x, y) - f(a, b)$, care are același semn cu $A\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2B\frac{\alpha}{\beta} + C$, ia valori de semne contrare, și deci (a, b) nu este punct de extrem.

Teorema este astfel demonstrată.

Exemple. 1) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$. Rezolvăm sistemul

$$f'_x = 3x^2 + 3y = 0.$$

$$f'_y = 3y^2 + 3x = 0$$

pentru a afla punctele staționare. Se obțin soluțiile $(0, 0)$ și $(-1, -1)$.

Pentru a vedea dacă aceste puncte staționare sînt sau nu puncte de extrem, calculăm derivatele parțiale de ordinul doi

$$f''_{x^2} = 6x, \qquad f''_{y^2} = 6y, \qquad f''_{xy} = 3.$$

Avem:

$$f''_{x^2}(0, 0) = 0, \qquad f''_{y^2}(0, 0) = 0, \qquad f''_{xy}(0, 0) = 3;$$

în acest caz,

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 = 0 \cdot 0 - 3^2 = -9 < 0,$$

deci $(0, 0)$ nu este punct de extrem.

Avem apoi $f''_{y^2}(-1, -1) = -6$, $f''_{y^2}(-1, -1) = -6$, $f''_{xy}(-1, -1) = 3$; în acest caz,

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 = 36 - 9 = 27 > 0,$$

deci $(-1, -1)$ este punct de extrem; deoarece $f''_{x^2}(-1, -1) = -6 < 0$, rezultă că $(-1, -1)$ este punct de maxim.

2) $f(x, y) = x^4 + 4x^2y + x^3 + 4y^2$. Rezolvînd sistemul $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ se obțin punctele staționare $(0, 0)$ și $\left(0, -\frac{8}{3}\right)$. Avem

$$f''_{x^2}\left(0, -\frac{8}{3}\right) = -\frac{64}{3}, \quad f''_{y^2}\left(0, -\frac{8}{3}\right) = -8, \quad f''_{xy}\left(0, -\frac{8}{3}\right) = 0, \text{ deci:}$$

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 > 0.$$

Așadar, $\left(0, -\frac{8}{3}\right)$ este punct de extrem și anume de maxim, deoarece $f''_{x^2} < 0$. Avem apoi $f''_{x^2}(0, 0) = 0$, $f''_{y^2}(0, 0) = 8$, $f''_{xy}(0, 0) = 0$, deci $f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 = 0$, în acest caz, nu putem afirma nimic pe baza teoremei precedente. Un studiu direct asupra funcției arată că $(0, 0)$ nu este punct de extrem.

O b s e r v a ț i e. Dacă $f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 = 0$, derivatele fiind calculate în punctul staționar (a, b), nu putem afirma nimic despre acest punct. În unele cazuri este punct de extrem al funcției f, în alte cazuri nu este punct de extrem.

Exemple. 1) $f(x, y) = x^2 + y^4$. Punctul $(0, 0)$ este punct staționar: avem

$$f''_{x^2}(0, 0) = 2, \qquad f''_{y^2}(0, 0) = 0, \qquad f''_{xy}(0, 0) = 0, \text{ deci}$$

$f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 = 0$. Avem apoi $f(0, 0) = 0$ și $f(x, y) > 0$ pentru $(x, y) \neq (0, 0)$; deci $(0, 0)$ este un punct de minim al funcției.

2) $f(x, y) = x^2 + y^3$. Punctul (0, 0) este punct staționar; avem

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 = 0,$$

și (0, 0) nu este punct de extrem.

Într-adevăr, $f(0, 0) = 0$, $f(0, y) = y^3 < 0$ dacă $y < 0$ și $f(0, y) = y^3 > 0$ dacă $y > 0$.

Fie acum $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcție de n variabile, definită pe o mulțime $E \subset R^n$.

Se definește ca mai sus un punct de maxim (respectiv minim) local $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ prin condiția

$f(x) \leqslant f(a)$ (respectiv $f(x) \geqslant f(a)$) pentru x într-o vecinătate V a lui a.

Rezultă că dacă a este punct staționar din interiorul lui E, atunci derivatele parțiale ale lui f se anulează în a:

$$f'_{x_1}(a) = 0, \qquad f'_{x_2}(a) = 0, \ldots, \qquad f'_{x_n}(a) = 0.$$

Punctul $a \in E$ este punct staționar al funcției f, dacă f este diferențiabilă în a și dacă $df(a) = 0$.

Pentru a determina *punctele staționare* ale unei funcții diferențiabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pe o mulțime deschisă $E \subset R^n$, se rezolvă sistemul derivatelor sale parțiale:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Se demonstrează ca mai sus următoarea teoremă generală.

Teoremă. **Fie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punct staționar al funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Să presupunem că funcția $f(x_1, \ldots, x_n)$ are derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate V a lui a.**

1) Dacă forma pătratică $\varphi = \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_i \alpha_j$ este definită, atunci a este un punct de extrem, și anume un punct de maxim sau de minim, după cum $\varphi < 0$ sau $\varphi > 0$.

2) Dacă forma pătratică φ este nedefinită, atunci a nu este punct de extrem al funcției.

Se pleacă de la formula lui Taylor

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \frac{1}{2} \omega(x) \rho^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_i \alpha_j + \omega \right] \rho^2 = \frac{1}{2} [\varphi + \omega] \rho^2,$$

unde:

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2},\ \lim_{x\to a}\omega(x) = \omega(a) = 0 \text{ și } \alpha_i = \frac{x_i - a_i}{\rho}.$$

Dacă forma pătratică φ este definită, ea nu se anulează; pe de altă parte $|\varphi|$ fiind continuă, își atinge minimul μ pe mulțimea $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$, și deci $\mu > 0$. Se găsește apoi o vecinătate V a lui a, în care ω are valori mai mici decît μ. În această vecinătate diferența $f(x) - f(a)$ are semnul lui φ. Dacă $\varphi > 0$, avem $f(x) - f(a) > 0$ pentru $x \in V$, deci a este punct de minim; dacă $\varphi < 0$, avem $f(x) - f(a) < 0$ pentru $x \in V$, deci a este punct de maxim.

Dacă forma pătratică φ nu este definită, ia în orice vecinătate a lui a atît valori > 0 cît și valori < 0; rezultă că în orice vecinătate a lui a, diferența $f(x) - f(a)$ ia atît valori > 0 cît și valori < 0, și deci a nu este punct de extrem.

10. Funcții omogene și teorema lui Euler

Fie $E \subset R^n$ un con, adică o mulțime care o dată cu un punct $x = (x_1, \ldots, x_n)$ conține întreaga semidreaptă care unește punctul x cu originea $0 \in R^n$, cu excepția eventual a originii. Fie funcția reală $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ definită pe E.

Se spune că funcția f este omogenă de grad k, dacă pentru orice număr $t > 0$ și orice $x \in E$ avem

$$f(tx) = t^k f(x),$$

adică

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Exemple: 1) Funcția $ax^2 + bxy + cy^2$ este omogenă de grad 2;

2) Funcția $\sqrt{x^2 + xy}$ este omogenă de grad 1;

3) Funcția $\dfrac{1}{x^\alpha - y^\alpha}$ este omogenă de grad $-\alpha$;

4) Funcția $\sqrt{x + y}$ este omogenă de grad $\dfrac{1}{2}$;

5) Funcția $\dfrac{y}{x}$ este omogenă de grad 0.

Teorema lui Euler. Dacă funcția $f(x)$ este omogenă de grad k și diferențiabilă într-un punct $a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, atunci

$$a_1 f'_{x_1}(a) + a_2 f'_{x_2}(a) + \ldots + a_n f'_{x_n}(a) = t^k f(a).$$

Deoarece $f(x)$ este omogenă, pentru orice $t > 0$ avem

$$\varphi(t) = f(ta_1, ta_2, \ldots, ta_n) = t^k f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Deoarece $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este diferențiabilă în punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, funcția din membrul stîng al egalității este derivabilă în raport cu t în punctul 1 și avem

$$\frac{d\varphi(1)}{dt} = \left[\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(ta_1, ta_2, \ldots, ta_n)\frac{d(ta_i)}{dt}\right]_{t=1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i f'_{x_i}(a).$$

De asemenea,

$$\frac{d\varphi(1)}{dt} = [kt^{k-1}f(a_1, \ldots, a_n)]_{t=1} = kf(a_1, \ldots, a_n) = kf(a),$$

de unde

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f'_{x_i}(a) = kf(a).$$

Corolar. **Dacă funcția $f(x)$ este omogenă de grad k și diferențiabilă în orice punct $x \neq 0$ din E, atunci**

$$x_1 f'_{x_1}(x) + x_2 f'_{x_2}(x) + \ldots + x_n f'_{x_n}(x) = kf(x)$$

pentru orice $x \neq 0$ din E.

Teorema reciprocă. **Dacă funcția $f(x)$ este diferențiabilă în orice punct $x \neq 0$ din E și dacă în aceste puncte verifică egalitatea**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f'_{x_i}(x) = kf(x),$$

atunci $f(x)$ este omogenă de grad k.

Fie $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ un punct arbitrar din E. Să considerăm funcția

$$\varphi(t) = \frac{f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)}{t^k}$$

definită pentru $t \in (0, +\infty)$. Avem

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t^{k+1}}\left(\sum_{i=1}^{n} tx_i f'_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) - kf(tx_1, \ldots, tx_n)\right) = 0$$

pentru orice $t \in (0, +\infty)$, deci φ este constantă pe $(0, +\infty)$. Urmează că pentru orice $t > 0$ avem

$$\varphi(t) = \varphi(1),$$

adică

$$\frac{f(tx_1, \ldots, tx_n)}{t^k} = f(x_1, \ldots, x_n),$$

de unde

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n)$$

și deci f este omogenă de gradul k.

§ 7. Funcții implicite

1. Funcții implicite de una sau mai multe variabile

Să considerăm ecuația

$$F(x, y) = 0,$$

unde $F(x, y)$ este o funcție reală de două variabile, definită pe o mulțime $E \subset R^2$. Să notăm cu E_x proiecția lui E pe axa Ox:

$$E_x = \mathrm{pr}_x E = \{x \mid \text{există } y \in R, \text{ cu } (x, y) \in E\}$$

și fie $A \subseteq E_x$.

O funcție $f(x): A \to R$ se numește soluție (în raport cu y) a ecuației $F(x, y) = 0$ pe mulțimea A, dacă

$$F(x, f(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in A.$$

O ecuație $F(x, y) = 0$ poate avea (în raport cu y) una sau mai multe soluții pe o mulțime A, sau poate să nu aibă nici o soluție.

Exemple. 1) Fie funcția $F(x, y) = x - y^2$ definită pe R^2 și ecuația $x - y^2 = 0$. Această ecuație are, în raport cu y, o infinitate de soluții pe mulțimea $[0, +\infty)$.

Într-adevăr, să considerăm două mulțimi disjuncte oarecare A_1 și A_2, astfel ca $A_1 \cup A_2 = [0, +\infty)$.

Funcția $f(x)$ definită pe $[0, +\infty)$ prin egalitățile:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dacă } x \in A_1 \\ -\sqrt{x} & \text{dacă } x \in A_2 \end{cases}$$

verifică ecuația $x - y^2 = 0$, deoarece $x - f^2(x) \equiv 0$.

Dintre toate soluțiile în raport cu y ale ecuației $x - y^2 = 0$, numai două sînt funcții continue, și anume funcțiile

$$f_1(x) = \sqrt{x} \text{ și } f_2(x) = -\sqrt{x}.$$

Dintre cele două soluții continue ale ecuației $x - y^2 = 0$, numai una verifică „condiția inițială" $f(1) = 1$.

2) Ecuația $x^2 + y^2 + 1 = 0$, $(x, y) \in R^2$ nu are nici o soluție (reală), nici în raport cu y, nici în raport cu x.

3) Ecuația $x - 2y = 0$, $(x, y) \in R^2$ are o singură soluție în raport cu y pe R, funcția $f(x) = \frac{1}{2} x$.

Să considerăm de asemenea ecuația

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0,$$

unde $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ este definită pe o mulțime $E \subset R^{n+1}$. O funcție de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definită pe o mulțime $A \subset R^n$ este soluție în raport cu y a acestei ecuații, pe mulțimea A, dacă

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \equiv 0$$

pentru orice punct $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$.

Să observăm că dacă notăm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ecuația $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ se scrie

$$F(x, y) = 0,$$

iar soluția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se scrie $f(x)$.

Așadar, putem considera numai ecuații de forma $F(x, y) = 0$, în care x este o variabilă reală sau vectorială.

Dacă există o *singură* funcție $f(x)$ definită pe o mulțime A care să verifice ecuația $F(x, y) = 0$ și, eventual, și alte condiții suplimentare, spunem că funcția $f(x)$ este definită de ecuația $F(x, y) = 0$.

Se spune de asemenea că rezolvînd ecuația $F(x, y) = 0$ în raport cu y, se obține funcția $y = f(x)$.

Funcțiile definite cu ajutorul ecuațiilor se numesc funcții definite implicit sau, mai simplu, *funcții implicite*.

În acest paragraf vom enunța cîteva propoziții care dau condiții suficiente de existență a funcțiilor implicite. După cum aceste condiții sînt mai mult sau mai puțin restrictive, rezultă pentru funcția implicită proprietăți mai multe sau mai puține.

Propoziția 1. **Fie $A \subset R^n$, $n \geqslant 1$, x_0 un punct interior al lui A, $B \subset R$ și y_0 un punct interior al lui B; fie funcția reală $F(x, y)$ definită pe $A \times B$. Dacă:**

1) $F(x_0, y_0) = 0$,

și dacă există o vecinătate $U \subset A^a$ lui x_0 și o vecinătate $V \supseteq B$ a lui y_0 astfel încît:

2) **pentru orice punct $x \in U$ fixat, funcția $y \to F(x, y)$ (de variabilă reală y) este continuă și strict monotonă pe V;**

3) **pentru orice punct $y \in V$ fixat, funcția $x \to F(x, y)$ (de variabilă vectorială x) este continuă în x_0;**

atunci:

a) **există o vecinătate U_0 a lui x_0 și o vecinătate V_0 a lui y_0, astfel ca pentru orice punct $x \in U_0$ fixat, ecuația în y, $F(x, y) = 0$ să aibă o singură soluție în V_0, $y = f(x)$:**

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in U_0,$$

b) **funcția implicită $f(x)$: $U_0 \to V_0$ definită de ecuația $F(x, y) = 0$ verifică egalitatea $f(x_0) = y_0$ și este continuă în x_0.**

Alegem $\alpha, \beta \in V$, astfel ca $\alpha < y_0 < \beta$, și notăm $V_0 = (\alpha, \beta)$. Conform ipotezei 2, pentru $x = x_0$, funcția $y \to F(x_0, y)$ (de variabilă reală y) este strict monotonă pe $[\alpha, \beta]$; deoarece $F(x_0, y_0) = 0$, iar $\alpha < y_0 < \beta$, rezultă că funcția $F(x_0, y)$ are semne diferite în α și β. Pentru a face o alegere să presupunem că

$$F(x_0, x) < 0, \quad F(x_0, \beta) > 0.$$

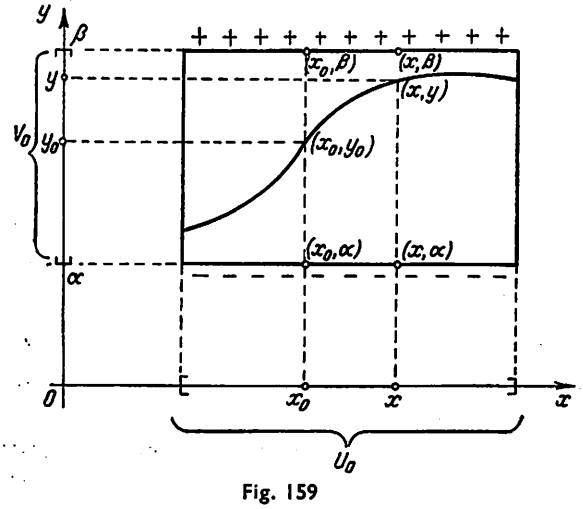


Fig. 159

Conform ipotezei 3, funcția $x \to F(x, \alpha)$ (de variabilă vectorială x) este continuă în x_0; deoarece $F(x_0, \alpha) < 0$, există o vecinătate $U' \subset U$ a lui x_0 astfel ca

$$F(x, \alpha) < 0$$

pentru orice $x \in U'$.

De asemenea, conform ipotezei 3, funcția $x \to F(x, \beta)$ este continuă în x_0; deoarece $F(x_0, \beta) > 0$, există o vecinătate $U'' \subset U$ a lui x_0, astfel ca

$$F(x, \beta) > 0 \text{ pentru orice } x \in U''.$$

Dacă luăm $U_0 = U' \cap U''$, U_0 este o vecinătate a lui x_0 și

$$F(x, \alpha) < 0, \; F(x, \beta) > 0 \text{ pentru orice } x \in U_0.$$

Fie acum $x' \in U_0$ arbitrar. Conform ipotezei 2, funcția $y \to F(x', y)$, de variabilă y, este continuă și strict monotonă pe $[\alpha, \beta]$. Deoarece este continuă, are proprietatea lui Darboux. Din inegalitățile

$$F(x', \alpha) < 0, \; F(x', \beta) > 0$$

rezultă că există un punct y', astfel ca $\alpha < y' < \beta$ și $F(x', y') = 0$. Deoarece funcția $y \to F(x', y)$ este strict monotonă există un singur punct $y' \in (\alpha, \beta)$ care verifică egalitatea $F(x', y') = 0$.

Deoarece $x' \in U_0$ a fost ales arbitrar, rezultă că, pentru orice punct $x \in U_0$ fixat, există un singur punct $y = f(x) \in V_0$ astfel ca $F(x, y) = 0$, și astfel punctul a este demonstrat.

Pentru $x = x_0$, avem $F(x_0, y_0) = 0$, și cum y_0 este singurul punct din V_0 cu această proprietate, deducem că $f(x_0) = y_0$.

Rămîne de demonstrat continuitatea lui $f(x)$ în x_0. Să observăm că vecinătatea V_0 a lui y_0 a fost aleasă arbitrar. Din demonstrația punctului a rezultă deci că pentru orice vecinătate V a lui $y_0 = f(x_0)$ există o vecinătate U a lui x_0, astfel ca pentru orice $x \in U$ să avem $f(x) \in V$. Aceasta înseamnă că funcția $f(x)$ este continuă în x_0 și astfel propoziția este demonstrată.

În ceea ce privește continuitatea funcției implicite, se pot face unele precizări.

Corolar. Dacă, în propoziția 1, ipoteza 3 se înlocuiește prin condiția:

3') pentru orice $y \in V$ fixat, funcția $x \to F(x, y)$ este continuă pe U (nu numai în x_0),
atunci funcția implicită $f(x)$ este continuă pe U_0 nu numai în x_0).

Într-adevăr, fie $a \in U_0$ un punct arbitrar; să notăm $b = f(a) \in V_0$.

Funcția $F(x, y)$ verifică ipotezele propoziției 1 relativ la punctul (a, b), în loc de (x_0, y_0), și deci există o vecinătate $U_1 \times V_1 \subset U_0 \times V_0$ a lui (a, b) și o funcție *unică* $g(x): U_1 \to V_1$, astfel ca $g(a) = b$ și $F(x, g(x)) = 0$ pentru $x \in U_1$. În plus, funcția $g(x)$ este *continuă* în a.

Dar avem de asemenea $f(a) = b$ și $F(x, f(x)) = 0$ pentru $x \in U_1 \subset U_0$.

Din unicitatea funcției g rezultă că $g(x) = f(x)$ pentru $x \in U_1$, și deci funcția f este continuă în punctul a. Cum punctul a a fost ales arbitrar în U_0, rezultă că funcția $f(x)$ este continuă în orice punct $x \in U_0$.

În teorema următoare se dau condiții suficiente pentru ca funcția implicită să fie derivabilă.

Teorema 1. Fie $A \subset R^n$, $n \geqslant 1$, $B \subset R$, $x_0 \in \operatorname{Int} A$, $y_0 \in \operatorname{Int} B$; fie funcția reală $F(x, y)$ definită pe $A \times B$. Dacă:

1) $F(x_0, y_0) = 0$;

2) funcția $F(x_1 x_2, \ldots, x_n, y) = F(x, y)$ are derivate parțiale F'_{x_1}, $F'_{x_2}, \ldots, F'_{x_n}, F'_y$ continue pe o vecinătate $U \times V$ a lui (x_0, y_0);

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$;

atunci:

a) există o vecinătate U_0 a lui x_0 și o vecinătate V_0 a lui y_0 și o funcție unică $y = f(x)$: $U_0 \to V_0$, astfel ca

$$f(x_0) = y_0 \text{ și } F(x, f(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in U_0;$$

b) funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x)$ are derivate parțiale $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_n}$ continue pe U_0, și pentru fiecare i avem

$$f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \quad x \in U_0;$$

c) dacă F are derivate parțiale de ordinul k continue pe $U \times V$, atunci funcția implicită f are derivate parțiale de ordinul k continue pe U_0.

Să arătăm mai întîi că funcția $F(x, y)$ verifică ipotezele propoziției precedente.

Deoarece F'_y este continuă și diferită de 0 în (x_0, y_0), ea este diferită de 0 pe o întreagă vecinătate a lui (x_0, y_0). Putem presupune că această vecinătate este $U \times V$:

$$F'_y(x, y) \neq 0 \text{ pentru } x \in U \text{ și } y \in V.$$

Ipoteza 1 este aceeași în propoziție ca și în teoremă.

Conform ipotezei 2 a teoremei, funcția $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = F(x, y)$ este diferențiabilă, deci continuă, pe $U \times V$. În particular, pentru fiecare $y \in V$ fixat, funcția $x \to F(x, y)$ este continuă pe U, astfel încît ipoteza 3 a propoziției (și chiar ipoteza 3' a corolarului) este verificată.

Deoarece pentru $x \in U$ fixat, funcția $y \to F(x, y)$ are derivata $F'(x, y) \neq 0$ pentru $y \in V$, rezultă că funcția $y \to F(x, y)$ este strict monotonă pe V; fiind derivabilă, această funcție este continuă pe V și astfel și ipoteza 2 a propoziției este verificată.

Rezultă atunci punctul a din concluzia propoziției, care este și punctul a din concluzia teoremei. În plus, conform corolarului, funcția implicită f este continuă pe întreaga vecinătate U_0.

Să arătăm că funcția $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are derivate parțiale continue pe U_0. Vom demonstra mai întîi că această funcție este diferențiabilă pe U_0.

Fie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punct arbitrar din U_0 și $b = f(a) \in V_0$. Deoarece funcția $F(x, y) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ este diferențiabilă pe $U \times V$, ea este diferențiabilă în punctul $(a, b) \in U \times V$, deci, pentru orice punct $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$ și orice $y \in V$ putem scrie egalitatea

$$F(x, y) - F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [F'_{x_i}(a, b) + \omega_i(x, y)](x_i - a_i) +$$
$$+ [F'_y(a, b) + \omega(x, y)](y - b),$$

unde:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega_i(x, y) = \omega_i(a, b) = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0.$$

În particular, luînd $x \in U_0$ și y de forma $y = f(x) \in V_0$, avem $F(x, y) = F(x, f(x)) = 0$; de asemenea, $F(a, b) = F(a, f(a)) = 0$. Atunci egalitatea precedentă devine

$$\sum_{i=1}^{n} [F'_{x_i}(a, b) + \omega_i(x, f(x))](x_i - a_i) + [F'_y(a, b) + \omega(x, f(x))](f(x) - f(a)) = 0.$$

Deoarece funcția $f(x)$ este continuă în punctul a, iar funcțiile $\omega_i(x, y)$ și $\omega(x, y)$ sînt continue în punctul corespunzător $(a, f(a)) = (a, b)$, rezultă că funcțiile compuse $\omega_i(x, f(x))$ și $\omega(x, f(x))$ sînt continue în punctul a și

$$\lim_{x\to a} \omega_i(x, f(x)) = \omega_i(a, f(a)) = \omega_i(a, b) = 0;$$

$$\lim_{x\to a} \omega(x, f(x)) = \omega(a, f(a)) = \omega(a, b) = 0.$$

Deoarece $\lim_{x\to a}[F'_y(a, b) + \omega(x, f(x))] = F'_y(a, b) \neq 0$, există o vecinătate U_1 a lui a astfel ca pentru $x \in U_1$ să avem:

$$F'_y(a, b) + \omega(x, f(x)) \neq 0.$$

Din egalitatea de mai sus, obținem atunci, pentru $x \in U_1$,

$$f(x) - f(a) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{F'_{x_i}(a, b) + \omega_i(x, f(x))}{F'_y(a, b) + \omega(x, f(x))}(x_i - a_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{F'_{x_i}(a, b)}{F'_y(a, b)} + \Omega_i(x)\right](x_i - a_i),$$

unde am notat $\Omega_i(x) = \dfrac{F'_{x_i}(a, b) + \omega_i(x, f(x))}{F'_y(a, b) + \omega(x, f(x))} - \dfrac{F'_{x_i}(a, b)}{F'_y(a, b)}$.

Deoarece $\lim_{x\to a} \Omega_i(x) = 0$, rezultă că funcția $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este diferențiabilă în punctul a, iar derivatele sale parțiale în punctul a sînt date de egalitățile

$$f'_{x_i}(a) = -\frac{F'_{x_i}(a, b)}{F'_y(a, b)} = -\frac{F'_{x_i}(a, f(a))}{F'_{x_y}(a, f(a))}.$$

Deoarece punctul a a fost ales arbitrar în U_0, rezultă că funcția f este diferențiabilă în orice punct $x \in U_0$, iar derivatele sale parțiale în x sînt:

$$f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Dar funcțiile F'_{x_i} și F'_y sînt continue prin ipoteză pe $U \times V$, iar funcția f este continuă pe U_0. Rezultă că funcțiile compuse $F'_{x_i}(x, f(x))$ și $F'_y(x, f(x))$ sînt continue pe U_0 și deci și derivata $f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}$ este continuă pe U_0.

Demonstrația punctului c se face prin inducție completă. Pentru $k = 1$, afirmația a fost deja demonstrată la punctul b. Să o presupunem adevărată pentru $k = p$ și s-o demonstrăm pentru $k = p + 1$.

Să presupunem deci că funcția $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = F(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul $p + 1$, continue pe $U \times V$. Atunci ea are derivate parțiale de ordinul p, continue pe $U \times V$ și deci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are derivate parțiale de ordinul p, continue pe U_0.

Pe de altă parte, funcțiile $F'_{x_1}, F'_{x_2}, \ldots, F'_{x_n}, F'_y$ au derivate parțiale de ordinul p, continue pe $U \times V$. Atunci funcțiile compuse

$$F'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \ldots, F'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$
$$F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

au derivate parțiale de ordinul p continue pe U_0, și deci, pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, n$, funcția

$$f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))}{F'_y(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))}$$

are derivate parțiale de ordinul p continue pe U_0. Aceasta înseamnă că funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are derivate parțiale de ordinul $p + 1$ continue pe U_0.

Prin inducție completă, rezultă deci că punctul c este adevărat pentru orice k.

Teorema este astfel complet demonstrată.

Observație. Dacă se modifică ipotezele teoremei, rezultă și concluzii diferite. Se pot obține astfel mai multe teoreme de existență a funcțiilor implicite.

Din teorema de existență a funcțiilor implicite se poate deduce o teoremă de existență a funcțiilor reciproce.

Propoziție. Fie I și J două intervale, $(x_0, y_0) \in \text{Int } I \times J$ și funcția $f(x)$: $I \to J$. Dacă:

1) $f(x_0) = y_0$; 2) $f'(x)$ există într-o vecinătate U a lui x_0; 3) $f'(x_0) \neq 0$; atunci: a) există o vecinătate $U_0 \times V_0$ a lui (x_0, y_0) și o funcție $\varphi(y)$: $V_0 \to U_0$ astfel ca $\varphi(y_0) = x_0$ și $f(\varphi(y)) \equiv y$ pentru $y \in V_0$;

b) funcția $\varphi(y)$ are derivata continuă pe V_0 și $\varphi'(y) = -\dfrac{1}{f'(\varphi(y))}$.

Într-adevăr, să considerăm funcția $F(x, y) = f(x) - y$ definită pe $I \times J$ Avem $F'_x(x, y) \equiv f'(x)$ și $F'_y(x, y) \equiv -1$.

Ipotezele teoremei precedente sînt verificate, și astfel rezultă concluzia acestei propoziții.

2. Sisteme de funcții implicite

Să considerăm sistemul de ecuații

$$(1)\quad \begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{cases}$$

unde $F_i(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sînt n funcții reale de $m + n$ variabile, definite pe o mulțime $E \subset R^{m+n}$.

Spunem că un sistem de n funcții reale

$$(2)\quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, \ldots, x_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{cases}$$

de m variabile, definite pe o mulțime $A \subset R^m$, este o soluție a sistemului de ecuații (1), în raport cu variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$, pe mulțimea A, dacă avem

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_m;\ f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) \equiv 0 \\ &F_2(x_1, \ldots, x_m;\ f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) \equiv 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_n(x_1, \ldots, x_m;\ f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) \equiv 0 \end{aligned}$$

pentru $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in A$.

În cazul cînd sistemul (1) are pe mulțimea A o *singură* soluție (2), spunem că funcțiile $f_1, \ldots, f_n$ sînt definite implicit de sistemul de ecuații (1), sau că sînt funcții implicite. Se spune de asemenea că sistemul de funcții (2) s-a obținut din sistemul de ecuații (1), prin rezolvare în raport cu variabilele $y_1, \ldots, y_n$.

După cum la funcțiile implicite de una sau mai multe variabile au jucat un rol important derivatele parțiale, pentru sistemele de funcții, un rol analog va avea un anumit determinant de derivate parțiale.

Să presupunem că funcțiile $F_1, F_2, .., F_n$ au derivate parțiale în raport cu variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pe mulțimea E. Determinantul de funcții

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}, \ldots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}, \ldots, & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_n}{\partial y_2}, \ldots, & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

se numește *determinantul funcțional* al funcțiilor $F_1, F_2, \ldots, F_n$ în raport cu variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ și se notează

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}.$$

Determinantul funcțional se mai numește *iacobian* (de la numele matematicianului Jacobi) și se mai notează cu litera J. În cazul unei singure funcții F avem

$$\frac{D(F)}{D(y)} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Pentru simplificarea scrisului, vom nota, ca de obicei, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Dacă notăm $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, atunci F este o *funcție vectorială* definită pe E cu valori în R^n, iar sistemul (1) se scrie atunci, simplu,

$$F(x, y) = 0. \tag{1'}$$

De asemenea, dacă notăm $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, atunci f este o *funcție vectorială* definită pe $A \subset R^m$, cu valori în R^n, iar sistemul (2) se scrie, simplu

$$y = f(x). \tag{2'}$$

A spune că sistemul (2) este o soluție a sistemului (1) revine la a spune că funcția vectorială (2') este o soluție a ecuației vectoriale (1'), adică

$$F(x, f(x)) = 0 \text{ pentru } x \in A.$$

În acest fel, un sistem de n funcții implicite *reale*, definite de un sistem de n ecuații, este echivalent cu o singură funcție implicită *vectorială*, definită de o ecuație vectorială. În acest caz, iacobianul se notează $\frac{D(F)}{D(y)}$.

Teorema 2. Fie $E \subset R^{m+n}$ și $(x_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0; y_1^0, \ldots, y_n^0) \in \operatorname{Int} E$; fie funcția vectorială $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$: $E \to R^n$.

Dacă:

1) $F(x_0, y_0) = 0$;

2) **funcțiile reale** $F_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ **au derivate parțiale continue** $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $(1 \leqslant j \leqslant m)$, $\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$ **într-o vecinătate** $U \times V$ **a punctului** (x_0, y_0);

3) **iacobianul** $\frac{D(F)}{D(y)} = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$ **este** $\neq 0$ **în punctul** (x_0, y_0);

atunci:

a) **există o vecinătate** $U_0 \times V_0$ **a lui** (x_0, y_0), $(U_0 \subset R^m, V_0 \subset R^n)$, **și o funcție vectorială unică** $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$: $U_0 \to V_0$, **astfel ca** $y_0 = f(x_0)$ **și** $F(x, f(x)) = 0$ **pentru orice** $x \in U_0$;

b) **funcțiile reale** $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ **au derivate parțiale continue pe** U_0 **și**

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_i, y_2, \ldots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_i)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}};$$

c) **dacă funcțiile** $F_1, F_2, \ldots, F_n$ **au derivate parțiale de ordinul** k **continue pe** $U \times V$, **atunci funcțiile** $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ **au derivate parțiale de ordinul** k **continue pe** U_0.

Demonstrația se face prin inducție completă asupra lui n.

Pentru $n = 1$ (un sistem format dintr-o singură ecuație, care definește o singură funcție reală implicită), teorema a fost deja demonstrată (teorema 1).

Să presupunem teorema adevărată pentru un sistem de $n - 1$ funcții implicite, definite de un sistem de $n - 1$ ecuații, și s-o demonstrăm pentru un sistem de n funcții implicite definite de un sistem de n ecuații.

Să presupunem deci condițiile 1, 2 și 3 din enunțul teoremei.

Deoarece iacobianul $\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}$ este $\neq 0$ în punctul $(x_0, y_0) = (x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, rezultă că cel puțin un determinant minor (de ordinul $n - 1$) este $\neq 0$ în acest punct. (Dacă toți determinanții minori ar fi nuli, dezvoltînd iacobianul după elementele unei linii, ar rezulta că iacobianul este nul în (x_1, y_0)).

Pentru a face o alegere, să presupunem că determinantul minor $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}$ este $\neq 0$ în punctul (x_0, y_0).

Rezultă atunci că sistemul de $n-1$ ecuații

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = 0 \\ F_2(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-1}(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = 0 \end{cases}$$

îndeplinește condițiile 1, 2, 3 din enunțul teoremei și deci, conform presupunerii, poate fi rezolvat în raport cu $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, în jurul punctului $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0, y_n^0)$: există o vecinătate U' a lui $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$, o vecinătate $V' = V_1' \times V_2' \times \ldots \times V_{n-1}' \times V_n'$ a punctului $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{n-1}^0, y_n^0)$ și $n-1$ funcții

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x, y_n) : U' \times V_n' \to V_1' \\ y_2 &= h_2(x, y_n) : U' \times V_n' \to V_2' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} &= h_{n-1}(x, y_n) : U' \times V_n' \to V_{n-1}' \end{aligned}$$

astfel încît

$$y_1^0 = h_1(x_0, y_n^0),\ y_2^0 = h_2(x_0, y_n^0),\ \ldots,\ y_{n-1} = h_{n-1}(x_0, y_n^0).$$

Pentru $(x, y_n) \in U' \times V_n'$ avem

$$\begin{aligned} &F_1(x, h_1(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n)) \equiv 0 \\ &F_2(x, h_1(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n)) \equiv 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_n(x, h_1(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Funcțiile $h_1(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n)$ au derivate parțiale continue pe $U' \times V_n'$.

Sistemul

$$(1)\quad \begin{cases} F_1(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ F_2(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{cases}$$

este echivalent, pentru $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in U' \times V_1' \times V_2' \times \ldots \times V_n'$, cu sistemul

$$(1')\quad \begin{cases} y_1 = h_1(x, y_n) \\ y_2 = h_2(x, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = h_{n-1}(x, y_n) \\ F_n(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = 0, \end{cases}$$

iar acesta este echivalent pe $U' \times V_1' \times \ldots \times V_n'$ cu sistemul

$$(1'') \quad \begin{cases} y_1 = h_1(x, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = h_{n-1}(x, y_n) \\ F_n(x, h_1(x, y_n), h_2(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n), y_n) = 0, \end{cases}$$

care se obține din sistemul (1') înlocuind în F_n pe $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ respectiv cu $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$.

Să notăm

$$\Phi(x, y_n) = F_n(x, h_1(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n), y_n)$$

pentru $(x, y_n) \in U' \times V_n'$.

Funcția $\Phi(x, y_n)$ verifică ipotezele teoremei 1, pentru a putea fi rezolvată în raport cu y_n în jurul punctului (x_0, y_n^0). Într-adevăr,

$$1) \quad \Phi(x_0, y_n^0) = F_n(x_0, h_1(x_0, y_n^0), \ldots, h_{n-1}(x_0, y_n^0), y_n^0) = \\ = F_n(x_0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0, y_n^0) = 0.$$

2) Funcția $\Phi(x, y_n)$ are derivate parțiale continue în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_m$, și y_n pe mulțimea $U' \times V_n'$, deoarece funcțiile $h_i(x, y_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, au derivate parțiale continue pe $U' \times V_n'$, iar funcția $F_n(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ are derivate parțiale continue pe $U' \times V_1' \times \ldots \times V_{n-1}' \times V_n'$.

$$3) \quad \Phi'_{y_n}(x_0, y_n^0) \neq 0.$$

Într-adevăr:

$$\Phi'_{y_n} = \frac{\partial F_n}{\partial y_1}\frac{\partial h_1}{\partial y_n} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial h_{n-1}}{\partial y_n} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} =$$

$$= -\frac{\partial F_n}{\partial y_1}\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(y_n, y_2, \ldots, y_{n+1})}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n+1})}} - \ldots - \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-2}, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-1})}} \neq 0.$$

Derivatele parțiale ale funcțiilor h_i sînt calculate în punctul (x_0, y_n^0), iar cele ale funcțiilor F_j în punctul corespunzător $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$.

Rezultă atunci că există o vecinătate $U_0 \times V_n^0$ a lui (x_0, y_n^0) și o funcție $y_n = f_n(x) : U_0 \to V_n^0$ astfel ca

$$y_n^0 = f_n(x_0) \text{ și } \Phi(x, f_n(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in U_0,$$

adică

$$F_n(x, h_1(x, f_n(x)), \ldots, h_{n-1}(x, f_n(x)), f_n(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in U_0.$$

Funcția $y_n = f_n(x)$ are derivate parțiale continue pe U_0.

Să notăm $V_1^0 = V_1'$, $V_2^0 = V_2'$, ..., $V_{n-1}^0 = V_{n-1}'$ și $V_0 = V_1^0 \times V_2^0 \times \ldots \times V_n^0$. Sistemul (1″) este echivalent pe mulțimea $U_0 \times V_0$ cu sistemul

$$(1''') \quad \begin{cases} y_1 = h_1(x, y_n) \\ y_2 = h_2(x, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = h_{n-1}(x, y_n) \\ y_n = f_n(x). \end{cases}$$

Să înlocuim în primele $n - 1$ ecuații pe y_n cu f_n și să notăm

$$f_1(x) = h_1(x, f_n(x)), \ldots, f_{n-1}(x) = h_{n-1}(x, f_n(x)).$$

Atunci sistemul (1‴) este echivalent pe $U_0 \times V_0$ cu sistemul

$$(2) \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = f_{n-1}(x) \\ y_n = f_n(x). \end{cases}$$

Sistemul (2) reprezintă soluția sistemului (1) pe mulțimea $U_0 \times V_0$. Avem evident

$$y_1^0 = f_1(x_0), \ldots, y_n^0 = f_n(x_0),$$

adică $y_0 = f(x_0)$.

Deoarece funcțiile $h_1(x, y_n), \ldots, h_{n-1}(x, y_n)$ și $f_n(x)$ au derivate parțiale continue pe $U_0 \times V_n^0$, rezultă că funcțiile compuse

$$f_i(x) = h_i(x, f_n(x)), \; 1 \leqslant i \leqslant n - 1$$

au derivate parțiale continue pe U_0.

Dacă în identitățile (pentru $x \in U_0$)

$$\begin{cases} F_1(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \equiv 0 \\ F_2(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \equiv \end{cases}$$

derivăm în raport cu x_i, obținem identitățile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i} \equiv 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_n}\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i} \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i} \equiv 0. \end{cases}$$

Din acest sistem de n ecuații se scot cele n derivate parțiale ale funcțiilor $f_1, \ldots, f_n$ în raport cu x_i, folosind regula lui Krammer:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_i, y_2, \ldots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_i)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}.$$

În acest fel punctele a și b ale teoremei au fost demonstrate.

Demonstrația punctului c se face prin inducție completă asupra lui k. Pentru $k = 1$, punctul c a fost demonstrat mai sus.

Să presupunem că afirmația este adevărată pentru $k = p$; din existența și continuitatea derivatelor parțiale ale funcțiilor $F_1, \ldots, F_n$, rezultă existența și continuitatea derivatelor parțiale de ordinul p ale funcțiilor $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Să arătăm atunci că afirmația rămîne adevărată pentru $k = p + 1$. Să presupunem deci că funcțiile $F_1, \ldots, F_n$ au derivate parțiale de ordinul $p + 1$ continue pe $U_0 \times V_0$; atunci aceste funcții au derivate parțiale de ordinul p continue pe această mulțime, și, conform presupunerii, rezultă că funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ au derivate parțiale de ordinul p continue pe U_0.

Dar

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_i, y_2, \ldots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}}$$

unde, în membrul drept s-au făcut înlocuirile $y_1 = f_1(x), \ldots, y_n = f_n(x)$.

Funcțiile care apar în membrul drept au derivate parțiale de ordinul p continue. Rezultă atunci că $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}$ are derivate parțiale de ordinul p continue pe U_0, adică f_1 are derivate parțiale de ordinul $p + 1$ continue pe U_0.

Pentru celelalte funcții $f_2, \ldots, f_n$, demonstrația se face la fel.

Rezultă deci, prin inducție completă, că punctul c este adevărat pentru orice k.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

3. Transformări regulate

Fie $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcție vectorială definită pe o mulțime $E \subset R^n$, cu valori în R^n, și fie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ componentele sale reale (definite tot pe E).

Definiție. Spunem că funcția vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ este o transformare regulată într-un punct interior $x_0 \in E$, dacă funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ au derivate parțiale continue într-o vecinătate a lui x_0, și dacă iacobianul $\frac{D(f)}{D(x)} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ este $\neq 0$ în punctul x_0.

Propoziția 1. Dacă transformarea f este regulată în punctul interior $x_0 \in E$, atunci f este regulată într-o întreagă vecinătate a lui x_0.

Într-adevăr, iacobianul

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

este o funcție continuă în punctul x_0 (deoarece derivatele parțiale $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sînt continue într-o vecinătate V' a lui x_0, deci în x_0) și este $\neq 0$ în acest punct, deci există o vecinătate V'' a lui x_0 pe care iacobianul este $\neq 0$. Atunci, în vecinătatea $V = V' \cap V''$ a lui x_0, derivatele parțiale $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sînt continue și iacobianul este $\neq 0$, deci f este o transformare regulată pe V.

Observație. Propoziția 1 ne îndreptățește să vorbim de „transformare regulată în *jurul* lui x_0" în loc de „transformare regulată în x_0".

Propoziția 2. Orice transformare regulată într-un punct este continuă în acel punct.

Într-adevăr, dacă $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ este o transformare regulată în x_0, atunci funcțiile reale $f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ au derivate parțiale continue într-o vecinătate V a lui x_0, deci sînt diferențiabile și deci continue în această vecinătate. Rezultă atunci că funcția vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ este continuă în vecinătatea V a lui x_0; în particular este continuă în x_0.

Propoziția 3. Iacobianul unei transformări regulate pe un domeniu D păstrează același semn pe acest domeniu.

În adevăr, un domeniu D este o mulțime *conexă* și deschisă, iar iacobianul este o funcție *continuă* pe D. Dacă iacobianul ar lua două valori de semne diferite, ar trebui să existe un punct $x_0 \in D$ în care iacobianul să se anuleze, deci în care transformarea să nu fie regulată, ceea ce ar contrazice ipoteza că transformarea este regulată pe întreg domeniul D. Rezultă deci că iacobianul păstrează același semn (fără a se anula) pe D.

Teorema următoare generalizează teorema de derivabilitate a funcțiilor inverse de o variabilă reală.

Teorema. **Dacă $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ este o transformare regulată într-o vecinătate U a unui punct interior $x_0 \in E$, atunci:**

1) există o vecinătate $U_0 \subset U$ a lui x_0 și vecinătate V_0 a lui $y_0 = f(x_0)$, astfel încît restricția lui f la U_0 este o aplicație biunivocă a lui U_0 pe V_0;

2) aplicația reciprocă $\varphi: V_0 \to U_0$, a restricției lui f la U_0, este o transformare regulată în punctul y_0;

3) avem

$$\frac{D(\varphi(y_0))}{D(y)} = \frac{1}{\dfrac{D(f)\,(x_0)}{D(x)}}.$$

Demonstrație. Să considerăm funcția vectorială

$$F(x, y) = f(x) - y$$

definită pentru $(x, y) \in E \times R^n$, cu valori în R^n. Pentru componentele reale $F_1, F_2, .., F_n$ ale lui F avem

$$F_i(x, y) = f_i(x) - y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vom arăta că funcția vectorială $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ îndeplinește condițiile pentru ca ecuația $F(x, y) = 0$ (adică ecuația $f(x) = y$) să poată fi rezolvată în raport cu x.

Să observăm că (x_0, y_0) este *punct interior* al mulțimii $E \times R^n$, deoarece x_0 este punct interior al lui E, iar y_0 este punct interior al lui R^n.

1) $F(x_0, y_0) = f(x_0) - y_0 = 0$.

2) Funcțiile F_i au derivate parțiale $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}$, continue într-o vecinătate a lui (x_0, y_0).

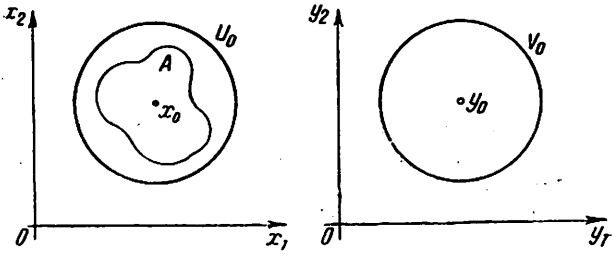


Fig. 160

Într-adevăr, deoarece f este regulată în vecinătatea U a lui x_0, există derivatele parțiale $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ continue pe U, și $\frac{D(f)}{D(x)} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0$ pe U.

Fie V o vecinătate oarecare a lui y_0. Atunci $U \times V$ este o vecinătate a lui (x_0, y_0), și pentru $(x, y) \in U \times V$ avem $\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$, $\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial y_j} = -\delta_{ij}$, ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$).

Derivatele $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ sînt constante, deci sînt continue; derivatele $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ sînt de asemenea continue pe $U \times V$, deoarece pentru $(x, y) \in U \times V$ avem:

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ y' \to y}} \frac{\partial F_i(x', y')}{\partial x_j} = \lim_{x' \to x} \frac{\partial f_i(x')}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i(x, y)}{\partial x_j}.$$

3) $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0$ în punctul (x_0, y_0), deoarece

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$$

și ultimul determinant este $\neq 0$ pentru $x \in U$ (și y oarecare).

Conform teoremei relative la funcțiile vectoriale implicite, există o vecinătate $U' \times V_0 \subset U \times V$ a lui (x_0, y_0), astfel încît, pentru orice punct $y \in V_0$, există un punct *unic* $x = \varphi(y) \in U'$, astfel ca să avem $F(x, y) = 0$, adică $f(x) - y = 0$ sau $f(x) = y$. Aceasta înseamnă că fiecare punct $y \in V_0$ este imaginea $f(x)$ a unui singur punct $x \in U'$, deci y_0 este punct interior al mulțimii $f(U')$. Punctul 1 este astfel demonstrat.

De aici rezultă că f este biunivocă pe mulțimea $U_0 = f^{-1}(V_0) \subset U'$, deoarece dacă x', $x'' \in U_0$, atunci $f(x') \in V_0$ și $f(x'') \in V_0$ și din egalitatea $f(x') = f(x'') = y$ rezultă atunci, pe baza celor de mai sus, că există un *singur* $x \in U'$ astfel ca $f(x) = y$; atunci $x' = x$ și $x'' = x$, deci $x' = x''$ și deci f este biunivocă pe U_0.

Deoarece f este continuă în x_0, vecinătății U' a lui $y_0 = f(x_0)$ îi corespunde o vecinătate U'' a lui x_0, astfel ca $f(U'') \subset V_0$. Rezultă că $U'' \subset U_0$ și deci x_0 este punct interior al lui A. Cu aceasta punctul 1 este demonstrat.

Funcția $\varphi(y): V_0 \to U_0$, care a rezultat mai sus (din teorema funcțiilor vectoriale implicite), are derivate parțiale continue pe V_0 și verifică egalitățile

$$\varphi(y_0) = x_0 \text{ și } F(\varphi(y), y) = 0 \text{ pentru } y \in V_0, \text{ adică:}$$
$$f(\varphi(y)) = y \text{ pentru } y \in V_0.$$

Rezultă că φ este inversa funcției biunivoce $f: U_0 \to V_0$.

Pentru a arăta că φ este o transformare regulată pe V_0 rămîne de arătat că determinantul său funcțional este $\neq 0$ pe V_0.

Pentru aceasta plecăm de la egalitatea vectorială

$$f(\varphi(y)) = y, \; y \in V_0$$

sau de la egalitățile scalare

$$f_i(\varphi_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varphi_n(y_1, \ldots, y_n)) = y_i, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

pe care le derivăm în raport cu y_j, după regula de derivare a funcțiilor compuse:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_j} = \delta_{ij},$$

adică

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} = \delta_{ij}, \; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

De aici rezultă că produsul matricelor $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$ și $\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j}\right)$ este matricea unitate (δ_{ij}). Dar determinantul unui produs de matrice este egal cu produsul determinanților matricelor:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right| \cdot \left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j}\right| = |\delta_{ij}| = 1.$$

Pe de altă parte, determinantul matricelor $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$ și $\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j}\right)$ sînt, respectiv, iacobienii $\frac{D(f)}{D(x)}$ și $\frac{D(\varphi)}{D(y)}$.

Așadar:

$$\frac{D(f)}{D(x)} \cdot \frac{D(\varphi)}{D(y)} = 1.$$

De aici rezultă că

$$\frac{D(\varphi)}{D(y)} \neq 0 \text{ pe } V_0,$$

deci φ este o transformare regulată pe V_0 și că

$$\frac{D(\varphi)}{D(x)} = \frac{1}{\frac{D(f)}{D(x)}}.$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Corolar. Dacă f este o transformare regulată pe o mulțime deschisă $G \subset E$, atunci $f(G)$ este deschisă.

Într-adevăr, pentru orice punct $x \in G$, punctul $f(x)$ este punct interior al mulțimii valorilor $f(G)$, deci această mulțime este formată numai din puncte interioare, și deci este deschisă.

O b s e r v a ț i e. Dacă f este regulată pe o mulțime deschisă $G \subset E$, nu rezultă că f este biunivocă pe G. Teorema afirmă, numai, că fiecare punct $x \in G$ are o vecinătate V_x pe care funcția f este biunivocă. Se spune că funcția f este *local biunivocă* pe o mulțime G, dacă fiecare punct din G are o vecinătate pe care f este biunivocă.

Așadar, o transformare regulată este local biunivocă, dar nu neapărat biunivocă pe întreaga mulțime G.

Exemple. 1) Transformarea

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

definită pentru $\rho \in R$ și $\varphi \in R$ are determinantul funcțional:

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho.$$

Transformarea este regulată în orice punct (ρ, φ) cu $\rho \neq 0$. Această transformare nu este însă biunivocă pe mulțimea $\{(\rho, \varphi) \mid \rho \neq 0\}$. Într-adevăr, două puncte diferite (ρ, φ) și $(\rho, \varphi + 2k\pi)$, $k \neq 0$ întreg, au aceeași imagine prin transformarea de mai sus.

În vecinătatea unui punct (ρ_0, φ_0), cu $\rho_0 \neq 0$, transformarea este biunivocă și admite o transformare inversă.

Să calculăm derivatele lui ρ și φ în raport cu x și y fără a rezolva sistemul de mai sus în raport cu ρ și φ.

Să derivăm în raport cu x cele două ecuații:

$$1 = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial x} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

De aici:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}.$$

În mod analog, derivînd ecuațiile de mai sus în raport cu y, obținem:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{\rho}.$$

Fie E și F două mulțimi din R^n. Pentru a simplifica expunerea vom presupune că E și F sînt deschise, deci sînt formate numai din puncte interioare. Fie apoi funcțiile vectoriale $u(x): E \to F$ și $\varphi(u): F \to R^n$, și funcția compusă $f(x) = \varphi(u(x)): E \to R^n$.

Teorema următoare generalizează teorema de derivare a funcțiilor compuse de o variabilă.

T e o r e m ă. Dacă $u(x)$ este o transformare regulată într-un punct $x_0 \in E$, iar $\varphi(u)$ este o transformare regulată în punctul corespunzător $u_0 = u(x_0) \in F$, atunci $f = \varphi \circ u$ este o transformare regulată în punctul x_0 și

$$\frac{D(f)}{D(x)} = \frac{D(\varphi)}{D(u)} \cdot \frac{D(u)}{D(x)},$$

unde $\frac{D(f)}{D(x)}$ și $\frac{D(u)}{D(x)}$ se calculează în punctul x_0, iar $\frac{D(\varphi)}{D(u)}$ se calculează în punctul $u_0 = u(x_0)$.

Deoarece $u(x)$ este o transformare regulată în x_0, este o vecinătate V a lui x_0, în care componentele reale $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ale lui u au derivate parțiale continue și $\frac{D(u)}{D(x)} \neq 0$. Deoarece $\varphi(u)$ este o transformare regulată în punctul u_0 există o vecinătate U a lui u_0 în care componentele reale $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ale lui φ au derivate parțiale continue și $\frac{D(\varphi)}{D(u)} \neq 0$. Putem alege U și V astfel ca $u(x) \in U$ pentru $x \in V$.

Rezultă atunci că funcțiile reale compuse

$$f_1(x) = \varphi_1(u(x)) = \varphi_1(u_1(x_1, \ldots, x_n), u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n))$$

$$f_2(x) = \varphi_2(u(x)) = \varphi_2(u_1(x_1, \ldots, x_n), u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n))$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(x) = \varphi_n(u(x)) = \varphi_n(u_1(x_1, \ldots, x_n), u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n))$$

au derivate parțiale continue pe V. Dar $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt componentele reale ale funcției vectoriale compuse $f(x) = \varphi(u(x))$. Pentru a arăta că f este regulată în x_0, rămîne de arătat că $\frac{D(f)}{D(x)} \neq 0$ în x_0. Să derivăm funcția $f_i(x)$ în raport cu x_j, ca pe o funcție compusă, din egalitatea de mai sus

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi_i(u(x))}{\partial u_1} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\varphi_i(u(x))}{\partial u_n} \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_j},$$

adică:

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(u(x))}{\partial u_k} \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \; x \in V.$$

Aceste egalități implică următoarea egalitate de matrice:

$$\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial \varphi_i(u(x))}{\partial u_k}\right) \left(\frac{\partial u_k(x)}{\partial x_i}\right), \quad x \in V.$$

De aici rezultă o egalitate asemănătoare pentru determinanții acestor matrice, care sînt determinanți funcționali:

$$\frac{D(f(x))}{D(x)} = \frac{D(\varphi(u(x)))}{D(u)} \cdot \frac{D(u(x))}{D(x)}, \quad x \in V.$$

Deoarece determinanții din membrul drept sînt $\neq 0$ în punctul x_0, rezultă că $\frac{D(f)}{D(x)} \neq 0$ în x_0, deci f este o transformare regulată în x_0.

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

4. Dependență funcțională

Fie $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$, m funcții *reale* definite pe o mulțime $E \subset R^n$.

Definiție. Spunem că o funcție reală $\varphi: E \to R$ depinde de funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ pe o mulțime $A \subset E$, dacă există o funcție reală de m variabile $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ definită pe o mulțime $B \subset R^m$, astfel încît să avem

$$\varphi(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

pentru orice $x \in A$.

Observații. 1° Funcția $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ poate fi constantă în raport cu unele variabile. În acest caz, φ depinde de funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$, dacă și numai dacă depinde de o parte din aceste funcții.

2° Dacă funcția φ este constantă, ea depinde de orice sistem de funcții $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Într-adevăr, luînd funcția $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \text{constant}$, avem

$$\varphi(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = \text{const.}$$

Exemple. 1) Fie $f(x)$ o aplicație biunivocă a unui interval I pe un interval J, și $f^{-1}: J \to I$ funcția sa inversă. Avem: $f^{-1}(f(x)) = x$ pentru orice $x \in I$. Dacă $\varphi(x)$ este o funcție reală definită pe I, avem

$$\varphi(x) = \varphi(f^{-1}(f(x))) = (\varphi \circ f^{-1})(f(x)), \qquad x \in I.$$

Notînd $\Phi(y) = \varphi \circ f^{-1}(y)$, pentru $y \in J$, avem

$$\varphi(x) = \Phi(f(x)) \text{ pentru } x \in I.$$

Am demonstrat astfel că: orice funcție $\varphi: I \to R$ depinde de orice funcție biunivocă $f: I \to R$.

2) Fie funcțiile:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,\ g(x, y, z) = x + y + z,\ h(x, y, z) = xy + yz + xz$$

definite pe R^3. Avem, pentru orice punct $(x, y, z) \in R^3$,

$$g^2(x, y, z) = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = f(x, y, z) + 2h(x, y, z)$$

De aici:

$$f = g^2 - 2h,$$

deci f depinde pe R^3 de funcțiile g și h, și

$$h = \frac{1}{2}(g^2 - f).$$

Să observăm că funcția g nu depinde de funcțiile f și h. Într-adevăr, pentru $x = 1, y = 0, z = 0$, avem: $f(1, 0, 0) = 1$, $g(1, 0, 0) = 1$, $h(1, 0, 0) = 0$; pentru $x = -1, y = 0, z = 0$, avem: $f(-1, 0, 0) = 1$, $g(-1, 0, 0) = -1$, $h(1, 0, 0) = 0$.

Oricare ar fi funcția $\Phi(u, v)$, avem

$$\Phi(f(1, 0, 0), h(1, 0, 0)) = \Phi(1, 0) = \Phi(f(-1, 0, 0), h(-1, 0, 0))$$

și deci nu putem avea

$$g(x, y, z) = \Phi(f(x, y, z), h(x, y, z))$$

pentru orice $(x, y, z) \in R$, deoarece $g(1, 0, 0) \neq g(-1, 0, 0)$.

3) Funcția $f(x) = x^2$ depinde de funcția $g(x) = x^3$, pe R, deoarece

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^3)^2} = \sqrt[3]{(g(x))^2}, \quad x \in R.$$

Funcția g nu depinde însă de f pe mulțimea R.

Într-adevăr, $f(-1) = f(1) = 1$, în timp ce $g(-1) = -1$ și $g(1) = 1$, deci, oricare ar fi funcția $\Phi(y)$, avem

$$\Phi(f(-1)) = \Phi(1) = \Phi(f(1)),$$

în timp ce $g(-1) \neq g(1)$ și deci nu putem avea

$$g(x) = \Phi(f(x))$$

pentru orice $x \in R$.

Să observăm însă că pentru $x \geqslant 0$ avem $x = \sqrt{x^2}$ și deci

$$g(x) = x^3 = (\sqrt{x^2})^3 = (\sqrt{f(x)})^3,$$

adică funcția g depinde de funcția f pe semidreapta $(0, +\infty)$.

Definiție. Spunem că funcțiile reale $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_m(x)$, definite pe o mulțime $E \subset R^n$, sînt în dependență funcțională pe o mulțime $A \subset E$, dacă cel puțin una din ele depinde de celelalte pe mulțimea A.

Spunem că funcțiile reale f_1, f_2,..., f_n sînt independente într-un punct interior $x_0 \in E$, dacă nici una din funcții nu depinde de celelalte, în nici o vecinătate a lui x_0. Funcțiile f_1, f_2, ..., f_n sînt independente pe o mulțime deschisă $G \subset E$, dacă sînt independente în orice punct $x \in G$.

Exemplu. Funcțiile $f(x) = x^2$ și $g(x) = \begin{cases} -1, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$,

definite pe R, sînt independente în jurul originii.

Într-adevăr, oricare ar fi funcția $\Phi(y)$, avem

$$\Phi(f(-x)) = \Phi(x^2) = \Phi(f(x)),$$

în timp ce pentru $x \neq 0$, avem $g(-x) \neq g(x)$. Așadar, nu putem avea

$$g(x) = \Phi(f(x)) \text{ pentru } x \neq 0.$$

Aceasta înseamnă că g nu depinde de f în nici o vecinătate a originii.

De asemenea, oricare ar fi funcția $\Phi(y)$, avem

$$\Phi(g(x)) = \begin{cases} \Phi(-1), & x \leqslant 0 \\ \Phi(1), & x > 0 \end{cases},$$

deci funcția compusă $\Phi(g(x))$ ia numai două valori, în orice vecinătate a originii, în timp ce mulțimea valorilor funcției $f(x) = x^2$ este infinită, în orice vecinătate a originii. Așadar, nu putem avea

$$f(x) = \Phi(g(x))$$

în nici o vecinătate a originii, deci f nu depinde de g în nici o vecinătate a originii. Rezultă că f și g sînt independente în jurul originii.

Propoziție. Dacă funcțiile reale $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_m(x)$, definite pe o mulțime $E \subset R^n$, sînt în dependență funcțională pe o mulțime $A \subset E$, atunci imaginea mulțimii A în spațiul R^m prin funcția vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ nu conține nici un punct interior.

Demonstrație. Mulțimea $B = f(A)$ este formată din toate punctele de forma $y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ cînd x parcurge mulțimea A. Deoarece funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt în dependență funcțională pe mulțimea A, una din aceste funcții, de exemplu f_m, depinde de celelalte funcții pe mulțimea A: există o funcție reală

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$$

astfel ca

$$f_m(x) = \Phi(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \text{ pentru } x \in A.$$

Rezultă că orice punct $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m)$ din $B = f(A)$, trebuie să verifice egalitatea

$$y_m = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}),$$

deoarece există un punct $x \in A$ astfel ca $y = f(x)$, adică astfel ca

$$y_1 = f_1(x), \ldots, y_m = f_m(x).$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, avem $y_m + \varepsilon \neq y_m$, deci

$$y_m + \varepsilon \neq \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$$

și deci punctul $(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m + \varepsilon)$ nu mai aparține lui B.

Aceasta înseamnă că orice vecinătate V a punctului $y = (y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m) \in B$ conține puncte de forma $(y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m + \varepsilon)$ dinafara lui B; rezultă că punctul $y = (y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m)$ nu este punct interior al lui B. Cum punctul y a fost ales arbitrar, deducem că B nu are nici un punct interior.

Teoremă. Fie funcțiile reale $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$ definite pe o mulțime $E \subset R^n$. Dacă aceste funcții au derivate parțiale într-o vecinătate a unui punct interior $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E$ și dacă rangul matricei funcționale $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, în punctul x_0, este egal cu numărul funcțiilor, atunci funcțiile sînt independente în punctul a.

Conform ipotezei, matricea funcțională

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

are în punctul x_0 rangul m. Aceasta înseamnă că cel puțin un determinant de ordinul m este $\neq 0$ în punctul x_0. Rezultă de aici că $m \leqslant n$.

Trebuie să arătăm că, în orice vecinătate V a punctului a, nici una din funcții nu depinde de celelalte.

Să presupunem, prin absurd, că există o vecinătate V a lui a, astfel încît, una din funcții, de exemplu f_m, depinde pe mulțimea V de celelalte funcții. Conform propoziției precedente, imaginea mulțimii V, prin funcția vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, nu conține nici un punct interior în R^m.

În particular, punctul $b = f(a) = (fa_1, a_2, \ldots, a_n)$ nu este punct interior al mulțimii $f(V)$. Pe de altă parte, să presupunem că determinantul funcțional de ordinul m

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

este $\neq 0$ în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)$. Fixînd $x_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, x_n = a_n$, funcția vectorială de m variabile

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)$$

este o transformare regulată în punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in E \cap R^m$. Atunci punctul $b = F(a_1, a_2, \ldots, a_m) = f(a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)$ este un punct interior al imaginii prin funcția F a unei vecinătăți U a punctului $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in E \cap R^m$ pe care o putem alege astfel ca $(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_{m+1}, \ldots, a_n) \in V$ pentru, $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in U$. Rezultă atunci că $F(U) \subset f(V)$ și deci b este punct interior și al mulțimii $f(V)$. Am ajuns astfel la o contradicție. Rezultă atunci că funcțiile $f_1, \ldots, f_m$ sînt independente în punctul x_0.

Corolar. Dacă $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ este o transformare regulată într-un punct $a \in E$, atunci funcțiile reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt independente în punctul a.

Într-adevăr, $\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0$ în punctul a, deci rangul matricei funcționale este egal cu numărul funcțiilor, și deci funcțiile $f_1, \ldots, f_m$ sînt independente în punctul a.

Teorema. **Fie funcțiile reale** $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$ **definite pe o mulțime** $E \subset R^n$ **și un punct interior** $a \in E$.

Dacă funcțiile f_i **au derivate parțiale** $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ **continue într-o vecinătate** U **a lui** a **și dacă rangul matricei funcționale** $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ **este egal cu** $s \leqslant m$ **pe vecinătatea** U, **atunci printre funcțiile** $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_m(x)$ **există** s **funcții independente pe** U, **iar celelalte** $m - s$ **funcții depind de acestea.**

Demonstrație. Deoarece rangul matricei funcționale $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ este egal cu s pe mulțimea U, există un determinant de ordin s, care nu se anulează pe U. Pentru a face o alegere, să presupunem că:

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_s)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_s)} \neq 0 \text{ pe } U.$$

Conform teoremei precedente, funcțiile f_1, f_2, ..., f_s sînt independente pe mulțimea U. Să considerăm sistemul

$$(1)\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_s) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) - y_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_s(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_s) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) - y_s = 0 \end{cases}$$

unde funcțiile $F_1, \ldots, F_s$ sînt definite pe $E \times R^s$. Să notăm:

$$b_1 = f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_s = f_s(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_s)$$

și să arătăm că sistemul (1) poate fi rezolvat în raport cu variabilele $x_1, \ldots, x_s$, în jurul punctului $(a, b) = a_1, \ldots, a_s; a_{s+1}, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_s)$. Acesta este un punct interior al mulțimii $E \times R^s$, deoarece $(a_1, \ldots, a_n)$ este punct interior al lui E și $(b_1, \ldots, b_s)$ este interior lui R^s. Avem apoi:

$$F_i(a_1, \ldots, a_s; a_{s+1}, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_s) = f_1(a_1, \ldots, a_s; a_{s+1}, \ldots, a_n) - b_s = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, s.$$

Funcțiile F_i au derivate parțiale $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ și $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ continue într-o vecinătate a punctului (a, b), ceea ce rezultă din egalitățile:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \; i = 1, 2, \ldots, s, \; j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j} = -\delta_{ij}, \; i, j = 1, 2, \ldots, s.$$

Atunci:

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)} = \frac{D(f_1, \ldots, f_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)} \neq 0$$

într-o vecinătate a punctului (a, b).

Conform teoremei relative la sistemele de funcții implicite, există o vecinătate U^s a punctului $(a_1, \ldots, a_s)$ și o vecinătate $U^{n-s} \times V^s$ a punctului $(a_{s+1}, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_s)$, astfel încît, pentru orice punct $(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_s) \in V_s \times U^{n-s}$, sistemul (1) are o soluție și *numai una* $(x_1, \ldots, x_s) \in U^s$:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s = \varphi_s(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Funcțiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ au derivate parțiale continue pe $V^s \times U^{n-s}$.

Să scriem că (2) este o soluție a sistemului (1):

$$(3) \quad \begin{cases} f_1(\varphi_1 y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_s(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n); x_{s+1}, \ldots, x_n) - y_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_s(\varphi_1(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1} \ldots, x_n), \ldots, \varphi_s(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n); x_{s+1}, \ldots, x_n) - y_s = 0, \end{cases}$$

pentru $(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_s) \in V^s \times U^{n-s}$.

Avem de asemenea:

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(f_1(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n); x_{s+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s = \varphi_s(f_1(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n); x_{s+1}, \ldots, x_n) \end{cases}$$

pentru $(x_{s+1}, \ldots, x_n) \in U^{n-s}$ și $(x_1, \ldots, x_s)$ într-o vecinătate U_0^s a punctului $(a_1, \ldots, a_s)$, aleasă astfel ca imaginea sa prin funcția continuă $f = (f_1, \ldots, f_s)$ să fie conținută în V^s.

Să presupunem că $s < m$; fie r un număr natural astfel ca $a < r < m$. Să arătăm că funcția f_r depinde de funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_s$ pe o vecinătate a lui a. Pentru aceasta, să considerăm funcția compusă

$$(5) \quad F_r(y_1, y_2, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= f_r(\varphi_1(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_s(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n); x_{s+1}, \ldots, x_n).$$

Vom arăta că funcția F_r este constantă în raport cu variabilele $x_{s+1}, \ldots, x_n$. Fie $s < k < n$. Să derivăm în raport cu variabila x_k, în egalitățile (2) și în (5):

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} + \cdots + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_s}\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s \\ \dfrac{\partial F_r}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} + \cdots + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_s}\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_k}. \end{cases}$$

Toate derivatele $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}$ sînt calculate în punctul $(y_1, \ldots, y_s, x_{s+1}, \ldots, x_n)$, iar derivatele $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}, \dfrac{\partial f_r}{\partial x_j}$, în punctul corespunzător $(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n)$ unde $x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Pentru ca sistemul (6) de $s+1$ ecuații cu s necunoscute $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k}$ să fie compatibil, trebuie ca determinantul sistemului să fie nul:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_s}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_s}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1}\frac{\partial f_s}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_s}{\partial x_s}\frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}\frac{\partial f_r}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_r}{\partial x_s}\frac{\partial f_r}{\partial x_k} - \frac{\partial F_r}{\partial x_k} \end{vmatrix} = 0$$

sau:

$$\begin{vmatrix} \frac{D(f_1, \ldots, f_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)} & \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \cdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \end{matrix} \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_r}{\partial x_s} & \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \end{vmatrix} - \frac{D(f_1, \ldots, f_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)}\frac{\partial F_r}{\partial x_k} = 0.$$

Însă, prin ipoteză, primul determinant al acestei relații este nul pe U, iar $\frac{D(f_1, \ldots, f_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)} \not\equiv 0$ pe U. Rezultă că:

$$\frac{\partial F_r(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n)}{\partial x_k} = 0,$$

deci F_r nu depinde de variabila x_k, cu $k > s$. Să notăm atunci

$$(7) \qquad \Phi_r(y_1, y_2, \ldots, y_s) = F_r(y_1, y_2, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= f_r(\varphi_1(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_s(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n); x_{s+1}, \ldots, x_n$$

pentru $(y_1, y_2, \ldots, y_s) \in V^s$. Luînd acum $y_1, \ldots, y_s$ de forma

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_s = f_s(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) \end{cases}$$

pentru $(x_1, \ldots, x_s) \in U_0^s$ şi $(x_{s+1}, \ldots, x_n)$ oarecare în U^{n-s} şi înlocuind în $\Phi_s(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ apoi ţinînd seama că în acest caz

$$\varphi_1(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) = x_1$$
$$\varphi_2(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) = x_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_s(y_1, \ldots, y_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) = x_s$$

şi făcînd aceste înlocuiri şi în al doilea membru al egalităţii (7), obţinem:

$$\Phi_r(f_1(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n)) =$$
$$= f_r(x_1, x_2, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n), \text{ pentru } (x_1, \ldots, x_s; x_{s+1}, \ldots, x_n) \in U^s \times U^{n-s},$$

adică

$$f_r = \Phi_r(f_1, \ldots, f_s) \text{ pe } U_0^s \times U^{n-s}.$$

Aceasta înseamnă că f_r depinde de $f_1, \ldots, f_s$ pe o vecinătate a punctului $a = (a_1, \ldots, a_n)$ şi cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Corolar. Dacă numărul funcţiilor $f_1, \ldots, f_m$ este mai mare decît numărul variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, atunci funcţiile nu pot fi independente.

Într-adevăr, avem $n < m$, iar rangul matricei funcţionale poate fi cel mult n, deci mai mic decît numărul funcţiilor. Se aplică atunci teorema precedentă.

Exemple. 1) Fie funcţiile $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
$g(x, y, z) = x + y + z$
$g(x, y, z) = xy + yz + xz.$

Matricea funcţională este:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}.$$

Determinantul de ordinul 3 al acestei matrice este identic nul:

$$\frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)} \equiv 0,$$

deci rangul matricei este < 3. Rezultă că funcţiile f, g, h nu sînt independente.
Matricea formată cu derivatele primelor două funcţii este

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şi are rangul 2 în fiecare punct diferit de origine. Rezultă că cele două funcţii f şi g sînt independente în orice domeniu care nu conţine originea.

2) Să considerăm funcțiile liniare

$$f(x, y, z) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,$$
$$g(x, y, z) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,$$
$$h(x, y, z) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Determinantul funcțional al acestor funcții este

$$\frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Dacă determinantul este $\neq 0$, cele trei funcții liniare sînt independente.
Dacă determinantul $= 0$ dar, de exemplu,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

atunci funcțiile f și g sînt independente, dar h depinde liniar de f și g.
Dacă toți minorii de ordinul doi sînt nuli, dar, de exemplu $a_{11} \neq 0$, atunci funcțiile g și h depind liniar de funcția f.

5. Extreme condiționate

Fie $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcție reală definită pe o mulțime $E \subset R^n$ și fie $A \subset E$.

Spunem că funcția $f(x)$ are într-un punct $a \in A$ un *extrem relativ la mulțimea* A, dacă restricția funcției $f(x)$ la mulțimea A are în punctul a un extrem obișnuit.

A spune că funcția $f(x)$ are în punctul a un maxim (respectiv un minim) relativ la mulțimea A înseamnă deci că există o vecinătate V a lui a, astfel încît să avem

$$f(x) \geqslant f(a) \text{ respectiv } f(x) \leqslant f(a)$$

pentru orice punct $x \in V \cap A$.

Extremele funcției $f(x)$ relative la o submulțime $A \subset E$ se numesc *extreme condiționate*.

Mai departe, vom considera un sistem de $k < n$ funcții reale $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots, F_n(x)$ definite pe E, iar mulțimea A va fi definită ca mulțime a soluțiilor sistemului

$$(1) \quad \begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Așadar, $A = \{x \mid x \in E, F_1(x) = 0,\ F_2(x) = 0, \ldots, F_n(x) = 0\}$. În acest caz extremele funcției $f(x)$ relative la mulțimea A se mai numesc *extreme condiționate de sistemul* (1). A considera restricția funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la mulțimea A înseamnă a considera valorile funcției f numai pentru acele valori ale argumentelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care verifică sistemul (1). Aceasta se exprimă spunînd că cele n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt legate între ele prin cele k relații ale sistemului (1); extremele condiționate ale funcției $f(x)$ se mai numesc, de aceea, *extreme cu legături*.

Teorema următoare dă condiții necesare de existență a punctelor de extrem condiționat.

Teorema. **Fie a un punct care verifică sistemul (1). Să presupunem că funcția $f(x)$ și funcțiile $F_1(x), \ldots, F_k(x)$ au derivate parțiale continue într-o vecinătate V a lui a și că matricea funcțională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ are în punctul a rangul k (egal cu numărul relațiilor sistemului (1)).**

Dacă a este punct extrem al funcției $f(x)$, condiționat de sistemul (1), atunci există k numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ astfel încît să avem:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1(a)}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2(a)}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k(a)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1(a)}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2(a)}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k(a)}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1(a)}{\partial x_n} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2(a)}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k(a)}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Demonstrație

Deoarece matricea funcțională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ are în punctul a rangul k, există un determinant funcțional de ordin k al acestei matrice, $\neq 0$ în punctul a. Pentru a face o alegere, să presupunem că

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_k)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_k)} \neq 0 \text{ în punctul } a.$$

Sistemul (1) se poate rezolva în raport cu variabilele $x_1, \ldots, x_k$ în jurul punctului $a = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. Într-adevăr, prin ipoteză avem $F_1(a) = 0$, $F_2(a) = 0, \ldots, F_n(a) = 0$; funcțiile $F_1, \ldots, F_k$ au derivate parțiale continue într-o vecinătate a lui a, iar iacobianul acestor funcții în raport cu variabilele $x_1, \ldots, x_k$ este $\neq 0$ în punctul a. Conform teoremei relative la sistemele de funcții implicite, există o vecinătate $V^k \subset A$ a punctului $(a_1, \ldots, a_k)$ în spațiul R^k și o vecinătate V^{n-k} a punctului $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ în spațiul R^{n-k}, astfel

încît pentru orice punct $(x_{k+1},\dots, x_n) \in V^{n-k}$ sistemul (1) să aibă o soluție *unică* $(x_1, x_2,\dots, x_k)$ în V^k:

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{k+1},\dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_{k+1},\dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = \varphi_k(x_{k+1},\dots, x_n). \end{cases}$$

Avem $a_1 = \varphi_1(a_{k+1},\dots, a_n)$, $a_2 = \varphi_2(a_{k+1},\dots, a_n),\dots, a_k = \varphi_k(a_{k+1},\dots,a_n)$.

Funcțiile $\varphi_1, \varphi_2,\dots,\varphi_k$ au derivate parțiale continue pe mulțimea V^{n-k}. Să scriem că (3) este o soluție a sistemului (1):
pentru orice punct $(x_{k+1},\dots, x_n) \in V^{n-k}$ avem

$$(4)\quad \begin{cases} F_1(\varphi_1(x_{k+1},\dots, x_n),\dots,\varphi_k(x_{k+1},\dots, x_n); x_{k+1},\dots, x_n) = 0 \\ F_2(\varphi_1(x_{k+1},\dots,x_n),\dots, \varphi_k(x_{k+1},\dots, x_n); x_{k+1},\dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k(\varphi_1(x_{k+1},\dots,x_n),\dots, \varphi_k(x_{k+1},\dots, x_n); x_{k+1},\dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Diferențialele acestor funcții sînt nule pe V^{n-k}, în particular în punctul $(a_{k+1},\dots, a_n)$

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\mathrm{d}\varphi_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\mathrm{d}\varphi_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_k}\mathrm{d}\varphi_k + \frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}}\mathrm{d}x_{k+1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\mathrm{d}\varphi_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\mathrm{d}\varphi_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_k}\mathrm{d}\varphi_k + \frac{\partial F_2}{\partial x_{k+1}}\mathrm{d}x_{k+1} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}\mathrm{d}\varphi_1 + \frac{\partial F_k}{\partial x_2}\mathrm{d}\varphi_2 + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial x_k}\mathrm{d}\varphi_k + \frac{\partial F_k}{\partial x_{k+1}}\mathrm{d}x_{k+1} + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n = 0. \end{cases}$$

În (5), $\mathrm{d}\varphi_1,\dots, \mathrm{d}\varphi_k$ reprezintă diferențialele funcțiilor $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ calculate în punctul $(a_{k+1},\dots, a_n)$, iar $\mathrm{d}x_{k+1}, \dots, \mathrm{d}x_n$ sînt variabile independente; derivatele funcțiilor $F_1,\dots,F_k$ sînt calculate în punctul $(a_1,\dots,a_n)$. Să considerăm acum funcția compusă

$$(6)\ F(x_{k+1},\dots, x_n) = f(\varphi_1(x_{k+1},\dots, x_n),\dots, \varphi_k(x_{k+1},\dots, x_n), x_{k+1},\dots, x_n)$$

definită pentru $(x_{k+1},\dots, x_n) \in V^{n-k}$. Deoarece funcția $f(x_1, \dots, x_n)$ are în punctul $a = (a_1, \dots, a_n)$ un extrem, condiționat de sistemul (1), funcția $F(x_{k+1}, \dots, x_n)$are în punctul $(a_{k+1}, \dots, a_n)$ un extrem obișnuit.

Într-adevăr, $a_1 = \varphi_1(a_{k+1},\dots, a_n),\dots, a_k = \varphi_k(a_{k+1},\dots, a_n)$ și dacă, de exemplu, a este punct de maxim condiționat pentru $f(x)$, avem:

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n) \geqslant f(a_1, a_2,\dots, a_n)$$

pentru orice punct $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ care verifică sistemul (1), dintr-o anumită vecinătate a lui $(a_1, a_2,\ldots, a_n)$. Atunci, pentru $(x_{k+1},\ldots, x_n)\in V^{n-k}$, luînd valorile $x_1,\ldots,x_k$ date de sistemul (3), punctul $(x_1, x_2,\ldots,x_k; x_{k+1},\ldots, x_n)$ verifică sistemul (1) așa cum rezultă din (4), iar inegalitatea precedentă se scrie, ținînd seama de (6),

$$F(x_{k+1},\ldots, x_n) \geqslant F(a_{k+1},\ldots, a_n),$$

deci $(a_{k+1},\ldots, a_n)$ este punct de maxim pentru funcția F.

În acest caz diferențiala acestei funcții în punctul $(a_{k+1},\ldots, a_n)$ este nulă:

$$(7)\quad dF = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,d\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,d\varphi_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\,d\varphi_k + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}\,dx_{k+1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n = 0.$$

Și aici, $d\varphi_1,\ldots, d\varphi_k$ sînt diferențialele funcțiilor $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ în punctul $(a_{k+1},\ldots,a_n)$, iar $dx_{k+1},\ldots, dx_n$ sînt variabile independente; derivatele funcției f sînt calculate în punctul $(a_1,\ldots, a_n)$.

Ținînd seama de ecuațiile (5) și (7), pentru orice sistem de numere $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ avem egalitatea:

$$(8)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)d\varphi_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)d\varphi_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)d\varphi_k +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}}\right)dx_{k+1} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)dx_n = 0.$$

Vom alege numerele $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ așa fel încît coeficienții diferențialelor $d\varphi_1, d\varphi_2,\ldots, d\varphi_k$ să se anuleze:

$$(2')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k\dfrac{\partial F_k}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} + \lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k\dfrac{\partial F_k}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_k} + \lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial x_k} + \ldots + \lambda_k\dfrac{\partial F_k}{\partial x_k} = 0 \end{cases}$$

derivatele fiind calculate în punctul $a = (a_1,\ldots,a_n)$.

Acest lucru este posibil, deoarece determinantul coeficienților lui $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ din sistemul (2') este

$$\frac{D(F_1,\ldots, F_k)}{D(x_1,\ldots, x_k)},$$

calculat în punctul $(a_1,\ldots,a_n)$, iar acesta este $\neq 0$. Cu aceste valori obținute pentru $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_k$, egalitatea (8) se scrie (derivatele funcțiilor $f, F_1,\ldots,F_k$ fiind calculate în $a = (a_1,\ldots, a_n)$):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}}\right) dx_{k+1} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right) dx_n = 0.$$

Pentru ca această egalitate să aibă loc pentru orice valori ale variabilelor independente $dx_{k+1},\ldots, dx_n$ este necesar și suficient să se anuleze coeficienții acestor variabile:

$$(2'') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_{k+1}} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial x_{k+1}} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Egalitățile (2') și (2'') formează sistemul (2) de egalități ce trebuia demonstrat.

O b s e r v a ț i e. Orice punct $a = (a_1,\ldots,a_n)$ care verifică sistemul (1), în care matricea funcțională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ are rangul k, și care verifică și sistemul (2) pentru anumite valori $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, se numește punct *staționar* al funcției $f(x)$, condiționat de sistemul (1); coeficienții $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_k$ se numesc *multiplicatorii lui Lagrange*. Valorile $\lambda_1,\ldots, \lambda_k$ se schimbă o dată cu punctul staționar a.

Teorema de mai sus se poate enunța astfel:

Orice punct de extrem condiționat este punct staționar condiționat.

Afirmația reciprocă nu este, în general, adevărată: există puncte staționare condiționate în care funcția nu are extreme condiționate.

Să observăm că în sistemul (2) apar derivatele parțiale ale funcției

$$f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \ldots + \lambda_k F_k(x)$$

definită pentru $x = (x_1, x_2,\ldots,x_n) \in E$.

Astfel, pentru o funcție $f(x)$ cu derivate parțiale continue pe o mulțime deschisă $E \subset R^n$, rezultă calea de urmat pentru aflarea punctelor staționare condiționate de sistemul (1) în care funcțiile $F_1(x),\ldots, F_k(x)$ au derivate parțiale continue pe E:

1) Se formează funcția ajutătoare

$$\Phi(x_1,\ldots, x_n, \lambda_1,\ldots, \lambda_k) = f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \ldots + \lambda_k F_k(x),$$

cu coeficienții $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_k$ nedeterminați.

2) Se formează sistemul de $n + k$ ecuații

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(x_1,\ldots, x_n, \lambda_1,\ldots, \lambda_k)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi(x_1,\ldots, x_n, \lambda_1,\ldots, \lambda_k)}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \Phi(x_1,\ldots, x_n, \lambda_1,\ldots, \lambda_k)}{\partial x_n} = 0 \\ F_1(x_1,\ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x_1,\ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

cu $n + k$ necunoscute, $x_1, x_2,\ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_k$, și se caută soluțiile acestui sistem.

3) Dacă $x_1, x_2,\ldots,x_n, \lambda_1,\ldots, \lambda_k$ este o soluție a acestui sistem, atunci punctul $(x_1,\ldots, x_n)$ este punct staționar condiționat al funcției $f(x)$.

Printre punctele staționare condiționate astfel obținute se află și punctele de extrem condiționat ale funcției $f(x)$.

Vom căuta acum condiții suficiente care să ne permită să identificăm, dintre punctele staționare, unele puncte de extrem condiționat.

Fie $a = (a_1,\ldots,a_n)$ un *punct staționar* al funcției $f(x)$ condiționat de sistemul (1). Aceasta înseamnă pe de o parte că $F_1(a) = 0,\ldots, F_k(a) = 0$, iar pe de altă parte că există k numere $\lambda_1,\ldots, \lambda_k$ astfel ca să fie satisfăcut sistemul (2).

Vom presupune că funcția $f(x)$ și funcțiile $F_1(x),\ldots, F_k(x)$ *au derivate parțiale de ordinul doi, continue într-o vecinătate a punctului a.*

Pentru a vedea dacă a este sau nu punct de extrem condiționat, va trebui să studiem semnul diferenței

$$f(x) - f(a) = f(x_1,\ldots,x_n) - f(a_1,\ldots,a_n)$$

pentru punctele $x = (x_1,\ldots,x_n)$ care verifică sistemul (1), deci pentru care $F_1(x) = 0,\ldots,F_k(x) = 0$. Să observăm că, pentru asemenea puncte x, avem $\Phi(x) = f(x)$ și deci

$$f(x) - f(a) = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Așadar, studiul semnului diferenței $f(x) - f(a)$, pentru punctele x care verifică sistemul (1), se reduce la studiul diferenței

$$\Phi(x) - \Phi(a)$$

pentru asemenea puncte x. Dar punctul a verifică sistemul (2); aceasta înseamnă că a este punct staționar obișnuit pentru funcția $\Phi(x)$, deci derivatele sale parțiale de ordinul întîi se anulează în a.

Pe de altă parte, funcția $\Phi(x)$ are derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a lui a, deci putem scrie formula lui Taylor de ordinul doi:

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi(a)}{\partial x_i \partial x_j}\,dx_i\,dx_j + \frac{1}{2}\,\omega(x)\rho^2 = \frac{1}{2}\,d^2\Phi + \frac{1}{2}\,\omega\rho^2,$$

unde:

$$\lim_{x\to a}\omega(a) = 0 \text{ și } \rho = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2},$$

iar $dx_i = x_i - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dacă diferențiem relațiile sistemului (1), obținem k relații liniare în diferențialele $dx_1, \ldots, dx_n$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n = 0\\
&\frac{\partial F_2}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}dx_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial F_k}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n}dx_n = 0
\end{aligned}$$

derivatele parțiale fiind calculate în punctul a.

Deoarece matricea acestui sistem liniar este matricea funcțională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ care are rangul k, se pot exprima k diferențiale în funcție de celelalte $n - k$; introducînd aceste k diferențiale în formula lui Taylor de mai sus, obținem în membrul drept o formă pătratică $\sum A_{ij}\,dx_i\,dx_j$. După cum această formă pătratică este definită sau nu, diferența $\Phi(x) - \Phi(a) = f(x) - f(a)$ păstrează în jurul lui a același semn sau nu păstrează același semn, adică a este sau nu este punct de extrem condiționat. În cazul cînd $\sum A_{ij}\,dx_i\,dx_j$ este definită pozitiv, avem un minim condiționat, iar cînd este definită negativ, avem un maxim condiționat.

Exemplu. Să se găsească extremele funcției

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz$$

condiționate de ecuația $xyz = 1$, în domeniul $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Formăm funcția

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z) = xy + xz + yz + \lambda xyz$$

și apoi sistemul

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = y + z + \lambda yz = 0\\[2ex]
\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = x + z + \lambda xz = 0\\[2ex]
\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = x + y + \lambda xy = 0\\[2ex]
F(x, y, z) = xyz - 1 = 0.
\end{cases}$$

Acest sistem are soluția:

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 1,\ \lambda = -2.$$

Funcția ajutătoare este acum:

$$\Phi(x, y, z) = xy + xz + yz - 2xyz.$$

Pentru a vedea dacă punctul staționar (1, 1, 1) este punct de extrem condiționat, calculăm diferențiala $d^2\Phi$, în punctul (1, 1, 1)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = y + z - 2yz;\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = x + z - 2xz;\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = x + y - 2xy;$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0;\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} = 1 - 2z;\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z} = 1 - 2y.\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z} = 1 - 2x.$$

În punctul (1, 1, 1) avem $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$ și

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z} = -1.$$

Diferențiala a doua a lui Φ calculată în punctul (1, 1, 1) este

$$d^2\Phi = -(dx\,dy + dy\,dz + dx\,dz).$$

Să diferențiem relația $xyz = 1$:

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0.$$

În punctul staționar (1, 1, 1), această relație devine

$$dx + dy + dz = 0,$$

de unde $dz = -dx - dy$; înlocuind dz în $d^2\Phi$ obținem

$$d^2\Phi = dx^2 + dx\,dy + dy^2.$$

Această formă pătratică este definită pozitiv, deci punctul (1, 1, 1) este un punct de minim condiționat.

Capitolul IX

SERII DE NUMERE. ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

§ 1. Serii de numere

1. Definiţia seriilor convergente

Pînă acum ştim ce înseamnă suma unei mulţimi de numere, oricît de mare, dar finită. Nu ştim însă ce înseamnă suma unei mulţimi infinite de numere; de exemplu, nu ştim ce înseamnă suma

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

a unui şir de numere $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

În acest capitol, vom da un sens, în anumite cazuri, sumei unui şir de numere.

Convenim să numim *serie de numere* un şir de numere despărţite între ele prin semnul $+$:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Deocamdată, semnul $+$ nu are semnificaţia de adunare. Vom scrie, prescurtat, această serie*, astfel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ sau } \sum_{n \in N} u_n, \text{ sau } \sum_{n} u_n, \text{ sau încă } \sum u_n.$$

Numerele $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ se numesc termenii seriei.

Mulţimea indicilor poate parcurge o mulţime de numere întregi, diferită de cea a numerelor naturale. Putem astfel considera serii de forma:

$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ notate $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sau serii de forma:

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+p} + \ldots \text{ notate } \sum_{n=k+1} u_n \text{ sau } \sum_{n>k} u_k \text{ etc.}$$

* În acest capitol vor fi considerate numai serii de numere reale. Majoritatea rezultatelor rămîn adevărate pentru serii de numere complexe sau pentru serii de elemente dintr-un spaţiu Banach.

Să considerăm sumele următoare, formate cu termenii seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$:

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Am obținut astfel un șir $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, numit șirul sumelor parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Avem

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \text{ pentru orice } n \in N.$$

Să observăm că, reciproc, dîndu-se un șir (S_n), putem forma o serie $\sum_n u_n$ ale cărei sume parțiale să fie termenii șirului (S_n), luînd

$$u_1 = S_1$$
$$u_2 = S_2 - S_1$$
$$u_3 = S_3 - S_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n = S_n - S_{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

În acest fel, o serie $\sum_n u_n$ este perfect determinată de șirul sumelor sale parțiale (S_n). De aceea studiul seriei $\sum_n u_n$ se reduce la studiul șirului (S_n).

Se impune, în primul rînd, următoarea

Definiție. **Vom spune că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, dacă șirul (S_n) al sumelor parțiale este convergent. Dacă S este limita șirului sumelor parțiale, vom spune că S este suma seriei și vom scrie**

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Așadar, $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$

Dacă şirul (S_n) al sumelor parţiale nu are limită sau dacă limita sa este $+\infty$ sau $-\infty$, vom spune că seria $\sum_n u_n$ este *divergentă*.

Dacă $\lim S_n = +\infty$, vom spune că suma seriei $\sum_n u_n$ este $+\infty$ şi vom scrie $\sum_n^{n\to\infty} u_n = +\infty$; de asemenea, dacă $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ vom spune că seria $\sum_n u_n$ are suma $-\infty$, şi vom scrie $\sum_n u_n = -\infty$. Dacă însă şirul (S_n) nu are limită, nici finită nici infinită, nu vom da nici un sens operaţiei de adunare $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$
Vom spune în acest caz că seria $\sum_n u_n$ este *oscilantă*.

Exemple. 1) *Seria geometrică.* Fie r un număr oarecare. Să considerăm seria $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$ Această serie se numeşte *seria geometrică*, cu raţia r. Să formăm sumele parţiale ale acestei serii, în cazul cînd $r \neq 1$:

$$S_1 = 1 = \frac{1-r}{1-r}$$

$$S_2 = 1 + r = \frac{1-r^2}{1-r}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = 1 + r + \ldots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Şirul (S_n) este deci diferenţa a două şiruri: şirul constant $\left(\frac{1}{1-r}\right)$ care are limita $\frac{1}{1-r}$, şi şirul $\left(\frac{r^n}{1-r}\right)$. Dacă $0<r<1$, atunci şirul (r^n) are limita 0, deci şi şirul $\left(\frac{r^n}{1-r}\right)$ are limita 0. Urmează că şirul (S_n) este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r} + \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}.$$

Dacă $r > 1$, şirul (r^n) are limita $+\infty$ şi cum $1 - r < 0$, rezultă că şirul $\left(\frac{r^n}{1-r}\right)$ are limita $-\infty$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{1-r} = +\infty.$$

Dacă $r < -1$, şirul (r^n) este nemărginit şi nu are limită, deci nici şirul (S_n) nu are limită şi deci seria este divergentă şi nu are sumă.

În cazul cînd $r = 1$, avem $S_n = n$, deci $\lim S_n = +\infty$.

În cazul cînd $r = -1$, avem $S_n = 1 + (-1)^n$ deci seria este divergentă și nu are sumă.

Așadar: dacă $0 < |r| < 1$, seria este convergentă și $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$; dacă $|r| > 1$, seria este divergentă; dacă $r > 1$ avem $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = +\infty$.

2) Să considerăm seria $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ și să formăm șirul sumelor parțiale:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 - 1 = 0$$
$$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$
$$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{2n-1} = 1$$
$$S_{2n} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Așadar, șirul sumelor parțiale este $1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$ care nu are limită. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nu este convergentă (este divergentă și nu are sumă, adică este oscilantă).

Deoarece studiul seriilor revine la studiul șirurilor sumelor parțiale, este de așteptat ca o serie întreagă de rezultate privind șirurile să se extindă asupra seriilor.

2. Influența unui număr finit de termeni asupra convergenței seriilor

Fie seria $\sum_n u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$

1) Dacă schimbăm ordinea unui număr finit de termeni, $u_{n1}, u_{n2}, \ldots u_{np}$ ai seriei $\sum_n u_n$, obținem o nouă serie.

Dacă notăm cu S_n sumele parțiale ale seriei $\sum_n u_n$ și cu σ_n sumele parțiale ale seriei noi, pentru $n > \max(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ avem $S_n = \sigma_n$. Așadar:

Dacă seria $\sum_n u_n$ este convergentă, seria obținută este convergentă și are aceeași sumă.

Dacă seria $\sum_n u_n$ *este divergentă, seria obţinută este divergentă* (dacă $\sum_n u_n$ are suma $+\infty$ sau $-\infty$, seria obţinută are de asemenea suma $+\infty$, respectiv $-\infty$).

Observaţie. Dacă schimbarea ordinii afectează o mulţime infinită de termeni ai seriei, afirmaţia de mai sus nu mai este în general adevărată, după cum va fi arătat mai departe.

2) *Dacă la o serie convergentă adăugăm sau înlăturăm un număr finit de termeni, seria obţinută este tot convergentă* (dar are altă sumă, în general).

Dacă la o serie divergentă adăugăm sau scădem un număr finit de termeni, seria obţinută este tot divergentă (dacă $\sum u_n$ are suma $+\infty$ sau $-\infty$, seria obţinută are tot suma $+\infty$ sau $-\infty$).

Într-adevăr, fie seria $\sum_n u_n$. După 1, putem considera că termenii înlăturaţi sînt cei de la început, $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Seria obţinută are sumele parţiale

$$\sigma_n = S_{n+p} - S_p,$$

iar şirul (σ_n) este convergent dacă şi numai dacă şirul $(S_{n+p} - S_n)_{n\in N}$ este convergent, deci seria obţinută este convergentă dacă şi numai dacă seria $\sum_n u_n$ este convergentă.

Dacă adăugăm un număr finit de termeni seriei $\sum_n u_n$, obţinem o serie $\sum_n v_n$. Atunci putem considera că seria $\sum_n u_n$ se obţine prin înlăturarea unui număr finit de termeni din seria $\sum_n v_n$, deci seria $\sum_n v_n$ este convergentă dacă şi numai dacă seria $\sum_n u_n$ este convergentă.

Observaţie. Deoarece termenii nuli nu au influenţă asupra comportării seriei, chiar dacă sînt în număr infinit, putem totdeauna să-i înlăturăm şi să considerăm că seria este formată numai din termeni diferiţi de zero.

3) Fie $\sum_n u_n$ o serie, şi fie (S_n) şirul sumelor parţiale. Să aranjăm toţi termenii seriei în grupe, fiecare grupă fiind formată dintr-un număr finit de termeni consecutivi. Să efectuăm în fiecare grupă suma termenilor. Să considerăm apoi seria $\sum_p v_p$ a acestor sume. Dacă notăm cu σ_p sumele parţiale ale acestei serii, atunci şirul (σ_p) este un subşir al şirului (S_n), cum se poate constata uşor. Deducem de aici:

Dacă seria $\sum_n u_n$ *este convergentă, seria* $\sum_p v_p$ *este convergentă şi are aceeaşi sumă.*

Dacă seria $\sum_n u_n$ *este divergentă dar are suma* $+\infty$ *sau* $-\infty$, *atunci seria* $\sum_p v_p$ *este divergentă şi are, respectiv, tot suma* $+\infty$ *sau* $-\infty$.

O b s e r v a ţ i e. Dacă seria $\sum_n u_n$ este divergentă dar nu are sumă, s-ar putea ca seria $\sum_p v_p$ să fie convergentă.

Exemplu. Fie seria $\sum u_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. Să considerăm seria $\sum v_p = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots$; această serie este convergentă şi are suma 0.

4) *Restul seriei.* Fie $\sum_n u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ o serie convergentă. Să considerăm seria $\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n = u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \ldots$, obţinută din prima serie prin înlăturarea primilor p termeni, $u_1 + u_2 + \ldots + u_p$. Această serie este de asemenea convergentă şi avem:

$$\sum_{n=1}^{n} u_n = (u_1 + u_2 + \ldots + u_p) + \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n.$$

Suma seriei $\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n$ se numeşte *restul de ordin p* al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Dacă notăm cu S suma seriei şi cu R_p restul de ordin p, egalitatea de mai sus se scrie $S = S_p + R_p$. De aici, $R_p = S - S_p$.

Cum şirul (S_p) este convergent către S, rezultă că:

Resturile unei serii convergente formează un şir convergent către 0.

3. Proprietăţi ale şirului termenilor şi ale sumelor parţiale

1) *Dacă seria* $\sum_n u_n$ *este convergentă, şirul sumelor parţiale este mărginit.*

Într-adevăr, şirul (S_n) al sumelor este convergent şi deci mărginit.

O b s e r v a ţ i e. Afirmaţia reciprocă nu este în general adevărată. O serie poate avea şirul sumelor parţiale mărginit, fără să fie convergentă.

Exemplu. Seria $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ este divergentă deşi şirul sumelor parţiale 1, 0, 1, 0,... este mărginit.

În anumite condiţii, afirmaţia reciprocă este însă adevărată:

2) *Dacă seria* $\sum_n u_n$ *este formată din termeni pozitivi, iar şirul sumelor parţiale este mărginit, seria este convergentă.*

Într-adevăr, şirul (S_n) al sumelor parţiale este crescător, deoarece $u_{n+1}>0$, deci $S_n<S_n+u_{n+1}=S_{n+1}$; fiind şi mărginit, şirul (S_n) este convergent, deci seria este convergentă.

O b s e r v a ţ i e. Dacă şirul sumelor parţiale este nemărginit, fiind crescător, are limita $+\infty$; deci seria este divergentă şi are suma $+\infty$.

3) *Dacă seria* $\sum_n u_n$ *este convergentă, şirul* (u_n) *al termenilor săi este convergent către* 0.

Fie (S_n) şirul sumelor parţiale. Prin ipoteză, (S_n) are o limită $S\in R$. Avem $u_n = S_n - S_{n-1}$. Aşadar, şirul (u_n) este diferenţa a două şiruri convergente (S_n) şi (S_{n-1}) care au aceeaşi limită S. Rezultă că (u_n) este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Proprietatea 3) se poate enunţa în următoarea formulare echivalentă:

4) *Dacă şirul termenilor nu este convergent către zero, seria este divergentă.*

O b s e r v a ţ i e. Afirmaţia reciprocă nu este în general adevărată. O serie poate avea şirul termenilor convergent către 0, fără ca seria să fie convergentă.

Exemplu. Să considerăm *seria armonică*

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Şirul termenilor $\left(\frac{1}{n}\right)$ este convergent către zero. Totuşi seria este divergentă. Într-adevăr, să aranjăm toţi termenii seriei în grupe finite de termeni astfel:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{16}\right)+$$
$$+\dots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)+\dots$$

Să observăm că:

$$1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\dots+\frac{1}{2^n}>\underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\dots+\frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{ termeni}}>\frac{1}{2}.$$

Aşadar

$$S_{2n} > \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{n \text{ ori}} = \frac{n}{2}.$$

Cum şirul $\left(\frac{n}{2}\right)$ are limita $+\infty$, rezultă că şirul (S_{2n}) are limita $+\infty$. Aşadar, şirul (S_n) al sumelor parţiale nu poate avea o limită finită $S \in R$, deoarece conţine un subşir divergent cu limita $+\infty$). Urmează că seria armonică este divergentă.

O b s e r v a ţ i e. Multă vreme nu s-a ştiut că seria armonică este divergentă şi s-a căutat să se adune un număr cît mai mare de termeni ai săi, pentru a se obţine o sumă parţială cît mai aproape de „suma" seriei. Aceasta se explică prin faptul că seria armonică este „foarte încet" divergentă.

Într-adevăr, să remarcăm că

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} < \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} < \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} < \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}_{2^{n-1} \text{ ori}} = 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Atunci suma parţială $S_{2^{n-1}}$ verifică inegalitatea

$$S_{2^{n-1}} < n.$$

Aşadar, dacă adunăm 2^{n-1} termeni, suma obţinută, este mai mică decît n. Pentru a ne face o imagine mai exactă, vom scrie inegalitatea precedentă pentru cîteva valori ale lui n:

$$\begin{array}{ll} S_3 < 2 & S_{255} < 8 \\ S_7 < 3 & S_{511} < 9 \\ S_{15} < 4 & S_{1023} < 10 \\ S_{31} < 5 & S_{2047} < 11 \\ S_{63} < 6 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{127} < 7 & S_{1073741} < 30 \end{array}$$

4. Operaţii cu serii

P r o p o z i ţ i e. Dacă seriile $\sum_n u_n$ şi $\sum_n v_n$ sînt convergente şi au respectiv suma S şi T, atunci:

1) Suma $\sum_n (u_n + v_n)$ este convergentă şi are suma $S + T$

$$\sum_n (u_n + v_n) = \sum_n u_n + \sum_n v_n.$$

2) **Seria** $\sum_n \alpha u_n$ **este convergentă, oricare ar fi** $\alpha \in R$, **şi are suma** αS:

$$\sum_n \alpha u_n = \alpha \sum_n u_n.$$

Demonstraţie. Fie (S_n) respectiv (T_n) şirurile sumelor parţiale ale seriilor $\sum_n u_n$ şi $\sum_n v_n$. Dacă notăm cu σ_n sumele parţiale ale seriei $\sum_n (u_n + v_n)$ avem

$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = S_n + T_n.$$

Cum şirurile (S_n) şi (T_n) sînt convergente prin ipoteză, şirul (σ_n) este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n = S + T,$$

deci seria $\sum_n (u_n + v_n)$ este convergentă şi are suma $S + T$. Dacă notăm cu Z_n sumele parţiale ale seriei $\sum_n \alpha u_n$, avem

$$Z_n = \alpha u_1 + \alpha u_2 + \ldots + \alpha u_n = \alpha(u_1 + \ldots + u_n) = \alpha S_n,$$

deci şirul (Z_n) este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha S.$$

Rezultă că seria $\sum_n \alpha u_n$ este convergentă şi are suma αS.

C o r o l a r. Dacă seria $\sum_n v_n$ **este convergentă şi are suma** T, **atunci seria** $\sum_n (-v_n)$ **este convergentă şi are suma** $-T$:

$$\sum_n (-v_n) = -\sum_n v_n.$$

Dacă $\sum_n u_n = S$ **şi** $\sum_n v_n = T$, **atunci seria** $\sum_n (u_n - v_n)$ **este convergentă şi are suma** $S - T$:

$$\sum_n (u_n - v_n) = \sum_n u_n - \sum_n v_n.$$

O b s e r v a ţ i i. 1° Dacă seria $\sum (u_n + v_n)$ (sau seria $\sum (u_n - v_n)$) este convergentă nu rezultă că seriile $\sum u_n$ şi $\sum v_n$ sînt convergente.

Exemplu. Seriile $\sum u_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ și $\sum v_n = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ sînt oscilante, dar seria $\sum (u_n + v_n) = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$ este convergentă.

2° Propoziția și corolarul rămîn adevărate dacă seriile $\sum u_n$ și $\sum v_n$ sînt divergente și au sumele S și T egale cu $+\infty$ sau $-\infty$, în cazul cînd $S + T$, $S - T$, αT au sens. În cazul cînd $S + T$ nu are sens, despre seria $\sum_n (u_n + v_n)$ nu putem afirma nimic. Uneori este convergentă, alteori are sumă infinită, iar alteori este oscilantă.

Exemple:

1) $\sum u_n = 1 + 2 + \ldots + n + \ldots = +\infty,$

$\sum v_n = -1 - 2 - \ldots - n - \ldots = -\infty,$

$\sum (u_n + v_n) = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0.$

2) $\sum u_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots = +\infty,$

$\sum v_n = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n} - \ldots = -\infty,$

$\sum (u_n + v_n) = 0 + \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(3 - \frac{1}{3}\right) + \ldots +$

$+ \left(n - \frac{1}{n}\right) + \ldots = +\infty,$

3) $\sum u_n = 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots = +\infty,$

$\sum v_n = -1 - 4 - 3 - 6 - \ldots = -\infty,$

$\sum (u_n + v_n) = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ nu are sumă.

3° Dacă $\sum_n u_n = +\infty$ și $\alpha = 0$, atunci seria $\alpha \sum_n u_n = \sum 0$, deci are totdeauna suma 0.

5. Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

Studiul unei serii comportă, ca și pentru șiruri, două probleme:
1) Stabilirea faptului dacă seria este convergentă sau divergentă.
2) În cazul cînd seria este convergentă, aflarea sumei seriei.

De cele mai multe ori ne mulțumim numai cu rezolvarea primei probleme, deoarece problema a doua este greu sau imposibil de rezolvat, în majoritatea exemplelor concrete. De altfel, o dată stabilit faptul că o serie este convergentă, adunînd un număr destul de mare de termeni ai săi obținem un număr oricît de apropiat de suma seriei, număr care aproximează suma seriei cu o eroare oricît de mică.

În cele ce urmează vor fi date criterii suficiente (cu excepţia criteriului general al lui Cauchy, care este necesar şi suficient) pentru stabilirea convergenţei sau divergenţei seriilor.

Criteriul general al lui Cauchy. **O serie $\sum_n u_n$ este convergentă dacă şi numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \geqslant 1$, să avem:**

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Fie (S_n) şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_n u_n$. Prin definiţie, seria este convergentă dacă şi numai dacă şirul (S_n) este convergent, iar şirul (S_n) este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental, adică dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \geqslant 1$, să avem

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Criteriul rezultă atunci din faptul că

$$S_{n+p} - S_n = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \\ = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}.$$

Observaţie. Acest criteriu are o importanţă teoretică fundamentală. Din el se deduc toate celelalte criterii. Practic însă acest criteriu este foarte greu de aplicat; de aceea vor fi date alte criterii suficiente (dar nu necesare), mai uşor de aplicat în cazurile întîlnite frecvent.

Criteriul lui Abel. **Dacă $\sum_n u_n$ este o serie care are şirul sumelor parţiale mărginit, şi dacă (α_n) este un şir descrescător de numere pozitive convergent către 0, atunci seria**

$$\sum_n \alpha_n u_n = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \ldots$$

este convergentă.

Demonstraţie. Deoarece şirul (S_n) al sumelor parţiale este mărginit, există un număr $M > 0$, astfel încît $|S_n| < M$, oricare ar fi $n \in N$. Vom arăta că seria $\sum_n \alpha_n u_n$ verifică criteriul lui Cauchy. Pentru aceasta să observăm că $u_{m+1} = S_{m+1} - S_m$, şi că

$$|\alpha_p - \alpha_{p+1}| = \alpha_p - \alpha_{p+1} > 0, \text{ şi deci}$$

$$|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| = \\ = |\alpha_{n+1}(S_{n+1} - S_n) + \alpha_{n+2}(S_{n+2} - S_{n+1}) + \ldots + \alpha_{n+p}(S_{n+p} - S_{n+p-1})| = \\ = |-\alpha_{n+1}S_n + S_{n+1}(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + \ldots + S_{n+p-1}(\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + \alpha_{n+p}S_{n+p}| \leqslant \\ \leqslant \alpha_{n+1}|S_n| + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})|S_{n+1}| + \ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})|S_{n+p-1}| + \alpha_{n+p}|S_{n+p}| < \\ < M[\alpha_{n+1} + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + \ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + \alpha_{n+p}] = 2M\alpha_{n+1}.$$

Fie $\varepsilon>0$. Deoarece şirul (α_n) este convergent către 0, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n>N(\varepsilon)$ să avem $\alpha_n<\frac{\varepsilon}{2M}$. Atunci pentru orice $n>N(\varepsilon)$ şi orice $p\geqslant 1$, deducem

$$|\alpha_{n+1}u_{n+1}+\alpha_{n+2}u_{n+2}+\ldots+\alpha_{n+p}u_{n+p}|<\varepsilon$$

şi deci seria $\sum_n \alpha_n u_n$ verifică criteriul lui Cauchy, de unde rezultă că este convergentă.

6. Serii alternate

Se numeşte serie alternată, o serie pentru care produsul a doi termeni consecutivi este <0 (adică doi termeni consecutivi oarecare sînt de semne contrare). O serie alternată este deci de forma

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots$$

sau de forma

$$-u_1+u_2-u_3+u_4+\ldots$$

unde, $u_i>0$ i $=1, 2, 3\ldots$

Deoarece ultima serie se reduce la cea precedentă prin înmulţire cu -1, vom considera în continuare numai serii alternate de forma $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots$, cu primul termen >0.

Criteriul lui Leibniz. **O serie alternată $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots(u_i>0)$ pentru care şirul modulelor termenilor (u_n) este descrescător şi convergent către 0 este convergentă.**

Să considerăm seria

$$1-1+1-1+\ldots+1-1+\ldots$$

Ea are sumele parţiale 1, 0, 1, 0,..., 1, 0,..., deci sînt mărginite. Deoarece şirul (u_n) este descrescător şi convergent către 0, din criteriul lui Abel rezultă că seria

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots$$

este convergentă.

Exemplu.

Seria armonică alternată $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ verifică criteriul lui Leibniz, deci este convergentă.

Într-adevăr, şirul modulelor termenilor $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ este descrescător şi convergent către 0.

Să calculăm, pentru o serie alternată convergentă care verifică condiţiile criteriului lui Leibniz, eroarea pe care o facem luînd în locul sumei sale o sumă parţială. Presupunem $u_1 > 0$.

Pentru aceasta să considerăm separat sumele cu indice impar şi cele cu indice par:

$$S_1 = u_1 \qquad S_2 = u_1 - u_2$$
$$S_3 = u_1 - (u_2 - u_3) < u_1 = S_1 \qquad S_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) > S_2$$
$$S_5 = S_3 - (u_4 - u_5) < S_3 \qquad S_6 = S_4 + (u_5 - u_6) > S_4.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Şirul sumelor impare $(S_{2n-1})_{1 \leqslant n < +\infty}$ este descrescător, iar şirul sumelor pare $(S_{2n})_{1 \leqslant n < +\infty}$ este crescător. Ele sînt subşiruri ale şirului $(S_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ al sumelor parţiale, care este convergent către suma S a seriei. Aşadar, avem următoarea situaţie:

$$S_2 < S_4 < \ldots < S_{2n} < \ldots < S < \ldots < S_{2n+1} < \ldots < S_3 < S_1$$

Avem apoi

$$0 < S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1},$$

de unde

$$0 < S - S_{2n} < u_{2n+1}.$$

De asemenea

$$0 < S_{2n+1} - S_{2n+2} = u_{2n+2},$$

de unde

$$0 < S_{2n+1} - S < u_{2n+2}.$$

Cele două cazuri de mai sus se pot scrie în mod unitar astfel:

$$0 < (-1)^n (S - S_n < u_{n+1}.$$

Am demonstrat astfel următoarea

Teoremă. Dacă pentru seria alternantă $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$ în care şirul (u_n) este descrescător şi convergent către zero, înlocuim suma S a seriei cu suma parţială S_n a unui număr finit n de termeni, facem o eroare mai mică decît primul termen neglijat u_{n+1}. Eroarea este prin lipsă dacă n este par, şi prin adaos dacă n este impar.

§ 2. Serii absolut convergente

1. Serii absolut convergente. Serii semiconvergente

Vom spune că o serie

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

este absolut convergentă, dacă seria modulelor

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

este convergentă. Evident, dacă toți termenii seriei sînt pozitivi și dacă seria este convergentă, ea este și absolut convergentă.

Teoremă. Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Fie $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ o serie absolut convergentă. Aceasta înseamnă că seria $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$ este convergentă. Fie $\varepsilon > 0$. Conform criteriului general al lui Cauchy, există $N(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ și oricare ar fi $p \geqslant 1$, să avem

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Cum

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|,$$

rezultă că seria $\sum u_n$ verifică de asemenea criteriul general al lui Cauchy deci este convergentă.

Observație. Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată. Seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

este convergentă, dar seria modulelor

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

este divergentă.

O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numește serie semiconvergentă.

Seria armonică alternată este deci semiconvergentă.

Seriile absolut convergente au o proprietate asemănătoare cu aceea a sumei unei mulțimi finite de numere: comutativitatea. Pentru a efectua suma unei mulțimi finite de numere, nu are influență ordinea în care le adunăm.

Teoremă. Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor, se obţine tot o serie absolut convergentă şi cu aceeaşi sumă.

Fie seria absolut convergentă

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

şi fie S suma sa. Seria modulelor

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

este de asemenea convergentă. Să notăm cu S_n sumele parţiale ale seriei $\sum u_n$. Fie $\varepsilon > 0$; există un număr $N = N(\varepsilon)$, astfel încît să avem

$$|S - S_N| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi

$$|u_{N+p}| + |u_{N+p+1}| + \dots + |u_{N+q}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ oricare ar fi } p \geqslant 1 \text{ şi } q > p.$$

Fie

$$v_1 + v_2 + \dots + v_m + \dots$$

o serie obţinută din seria $\sum_n u_n$ prin schimbarea ordinii termenilor săi. Să notăm cu T_n sumele parţiale ale seriei $\sum_n v_n$. Există un număr N_1 (care depinde de N, deci de ε), astfel încît pentru $m \geqslant N_1$, suma T_m să conţină toţi termenii $u_1, u_2, \dots, u_N$. Evident, suma T_m conţine şi alţi termeni, în plus,

$$u_{N+k_1} + u_{N+k_2} + \dots + u_{N+k_m}.$$

Avem însă

$$|u_{N+k_1} + \dots + u_{N+k_m}| \leqslant |u_{N+k_1}| + |u_{N+k_2}| + \dots + |u_{N+k_m}| \leqslant$$

$$\leqslant |u_{N+1}| + |u_{N+2}| + \dots + |u_{N+k_m}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aşadar

$$|T_m - S_N| = |u_{N+k_1} + \dots + u_{N+k_m}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi deci, pentru $m \geqslant N_1(\varepsilon)$, avem

$$|S - T_m| \leqslant |S - S_N| + |S_N - T_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că şirul (T_m) are limita S. Deducem deci că seria $\sum v_n$ este convergentă şi are aceeaşi sumă S.

Făcînd raţionamentul de mai sus asupra seriei $\sum_n |u_n|$, deducem că seria $\sum |v_n|$ este convergentă, adică seria $\sum v_n$ este absolut convergentă.

Această proprietate de comutativitate nu o au însă seriile semiconvergente. Mai mult:

Teoremă (Riemann). Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor, astfel încît seria obţinută să aibă ca sumă un număr dat, finit sau infinit, sau să fie oscilantă.

Fie seria semiconvergentă

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Seria modulelor

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

este divergentă. Să punem

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$
$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|$$

şi să notăm cu a_n *suma* termenilor pozitivi care se află printre primii n termeni şi cu $-b_n$ suma termenilor negativi care se află printre primii n termeni ai seriei $\sum u_n$. Avem deci

$$S_n = a_n - b_n, \qquad \sigma_n = a_n + b_n$$

şi deci

$$a_n = \frac{S_n + \sigma_n}{2}, \qquad b_n = \frac{\sigma_n - S_n}{2}.$$

Dacă S este suma seriei $\sum u_n$, şirul (S_n) are limita S; şirul (σ_n) are însă limita $+\infty$. Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

Aşadar, seria formată cu termenii pozitivi ai seriei $\sum_n u_n$ este divergentă şi are suma $+\infty$. De asemenea, seria formată cu termenii negativi ai seriei $\sum_n u_n$ este divergentă şi are suma $-\infty$.

Fie A un număr oarecare; să arătăm că putem schimba ordinea termenilor seriei $\sum u_n$, ca să obţinem o serie convergentă cu suma A. Pentru aceasta, să luăm în ordinea în care se prezintă în seria $\sum u_n$ un număr de termeni pozitivi, a căror sumă să fie mai mare ca A (aceasta este posibil deoarece suma seriei termenilor pozitivi este $+\infty$); vom lua, anume, cel mai mic număr de termeni pozitivi care să aibă această proprietate. Vom lua apoi, tot în ordinea în care se prezintă în seria $\sum u_n$, cel mai mic număr de termeni negativi, astfel ca suma tuturor termenilor luaţi de la început să fie mai mică decît A (acest lucru este posibil, deoarece seria termenilor negativi are suma $-\infty$).

Vom lua apoi cel mai mic număr de termeni pozitivi, din cei rămaşi, tot în ordinea din seria $\sum u_n$, astfel ca suma tuturor termenilor luaţi de la început să fie mai mare ca A şi aşa mai departe. În acest mod, aranjăm toţi termenii seriei $\sum u_n$ într-o altă ordine. Vom arăta că seria obţinută este convergentă şi are suma A. Să notăm cu A_n sumele parţiale ale seriei noi, şi cu p_n *numărul* tuturor termenilor pozitivi şi negativi luaţi în primele n operaţii.
Avem

$$A_1 > A,\ A_3 > A,\ \ldots,\ A_{p_n} > A,\ \ldots \text{ dacă } n \text{ este impar.}$$
$$A_2 < A,\ A_4 < A,\ \ldots,\ A_{p_n} < A,\ \ldots \text{ dacă } n \text{ este par.}$$

Dacă n este impar, $A_{p_n} > A$ şi u_{p_n} este pozitiv; cum, de fiecare dată, am luat cel mai mic număr de termeni necesar pentru a depăşi pe A,

avem

$$A_{p_n} - u_{p_n} \leqslant A$$

şi deci

$$0 < A_{p_n} - A \leqslant u_{p_n}.$$

Dacă n este par, $A_{p_n} < A$, şi u_{p_n} este negativ,

deci

$$A_{p_n} - u_{p_n} \geqslant A,$$

de unde

$$0 < A - A_{p_n} \leqslant -u_{p_n}.$$

Aşadar, oricum ar fi n, par sau impar, avem

$$|A - A_{p_n}| \leqslant |u_{p_n}|.$$

Dar, deoarece seria este convergentă, şirul (u_n) este convergent către 0; şirul (u_{p_n}) este un subşir al său, deci are tot limita 0. Rezultă că şirul (A_{p_n}) are limita A. Vrem însă să arătăm că şirul (A_n) al *tuturor* sumelor parţiale ale seriei noi are limita A. Din felul în care au fost aranjaţi în ordine termenii noii serii, rezultă că orice sumă A_k este cuprinsă între două sume A_{p_n} consecutive, una de ordin par şi una de ordin impar

$$A_{p_{2n}} \leqslant A_k \leqslant A_{p_{2n+1}}.$$

Cum sumele extreme au limita A, urmează că şi şirul (A_n) are limita A, adică seria este convergentă şi are limita A.

Procedînd ca mai sus se poate schimba ordinea termenilor seriei $\sum u_n$ ca să obţinem o serie divergentă cu suma $+\infty$.

Într-adevăr, alegem un număr de termeni pozitivi, astfel ca suma lor să fie mai mare ca 1; apoi adăugăm *un* termen negativ; apoi adăugăm un număr de termeni pozitivi, astfel ca suma tuturor termenilor de la început să fie > 2; apoi adăugăm *un* termen negativ; la a n-a operaţie, adăugăm un număr de termeni pozitivi astfel ca suma tuturor termenilor de la început să fie $> n$, apoi adăugăm un termen negativ.
Seria astfel obţinută este divergentă şi are suma $+\infty$.

Se pot aranja termenii seriei $\sum u_n$, astfel ca seria obţinută să fie oscilantă. Luăm un număr de termeni pozitivi cu suma > 1; adăugăm un număr de termeni negativi, ca să obţinem o sumă < 0; adăugăm un număr de termeni pozitivi ca să obţinem

o sumă > 1, și așa mai departe. Sumele obținute formează un șir care nu are limită, deci nici șirul tuturor sumelor parțiale ale seriei nu are limită.

Vom da acum un criteriu de convergență absolută.

Primul criteriu al comparației. **Fie $\sum_n u_n$ și $\sum_n v_n$ două serii; să presupunem că există un număr N astfel încît $|u_n| \leqslant |v_n|$ pentru orice $n \geqslant N$.**

Dacă seria $\sum v_n$ este absolut convergentă, atunci seria $\sum u_n$ este absolut convergentă.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece seria $\sum |v_n|$ este convergentă, după criteriul general al lui Cauchy există un număr $N(\varepsilon)$ (pe care-l putem lua mai mare decît N), astfel încît, oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$ și oricare ar fi $p \geqslant 1$, să avem

$$|v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \cdots + |v_{n+p}| < \varepsilon.$$

Cum

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| \leqslant |v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \cdots + |v_{n+p}|,$$

pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$ și $p \geqslant 1$, avem de asemenea

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon,$$

adică seria $\sum |u_n|$ este convergentă, și deci seria $\sum u_n$ este absolut convergentă.

2. Serii cu termeni pozitivi

Vom considera acum serii

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

în care toți termenii sînt *strict pozitivi*. O asemenea serie sau este convergentă, sau este divergentă și are suma $+\infty$.

Pentru seriile cu termeni pozitivi, proprietatea de convergență este echivalentă cu proprietatea de convergență absolută.

Vom da mai jos cîteva criterii de convergență, care rezultă direct sau indirect din criteriul general al lui Cauchy. În același timp, acestea sînt criterii de convergență absolută pentru serii cu termeni oarecare.

Să reformulăm întîi criteriul comparației pentru serii cu termeni pozitivi:

Primul criteriu al comparației. **Fie $\sum_n u_n$ și $\sum_n v_n$ două serii cu termeni pozitivi. Să presupunem că există un număr N, astfel încît**

$$u_n \leqslant v_n \quad \textbf{pentru orice} \quad n \geqslant N.$$

1) **Dacă seria** $\sum v_n$ **este convergentă, atunci seria** $\sum u_n$ **este convergentă.**

2) **Dacă seria** $\sum u_n$ **este divergentă, atunci seria** $\sum v_n$ **este divergentă.**

Punctul 2 este o formulare echivalentă a punctului 1.

A l d o i l e a c r i t e r i u a l c o m p a r a ţ i e i. **Fie** $\sum_n u_n$ **şi** $\sum_n v_n$ **două serii cu termeni pozitivi. Să presupunem că există un număr** N **astfel încît**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \text{ pentru orice } n \geqslant N.$$

1) **Dacă seria** $\sum v_n$ **este convergentă, atunci seria** $\sum u_n$ **este convergentă.**

2) **Dacă seria** $\sum u_n$ **este divergentă, atunci seria** $\sum v_n$ **este divergentă.**

Demonstraţie. Din inegalităţile de mai sus deducem

$$\frac{u_n}{v_n} \geqslant \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \text{ pentru orice } n \geqslant N, \text{ adică}$$

$$\frac{u_N}{v_N} \geqslant \frac{u_{N+1}}{v_{N+1}} \geqslant \ldots \geqslant \frac{u_n}{v_n} \geqslant \ldots, n \geqslant N.$$

Dacă punem

$$k = \frac{u_N}{v_N} \neq 0, \text{ deducem}$$

$$k \geqslant \frac{u_n}{v_n} \text{ pentru orice } n \geqslant N,$$

adică

$$u_n \leqslant k v_n \text{ pentru orice } n \geqslant N.$$

Se aplică acum primul criteriu al comparaţiei: dacă $\sum v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum k v_n$ este convergentă, deci seria $\sum u_n$ este convergentă.

Dacă $\sum u_n$ este divergentă, atunci seria $\sum k v_n$ este divergentă şi cum $\sum v_n = \sum \frac{1}{k}(k v_n)$, rezultă că seria $\sum v_n$ este divergentă.

O b s e r v a ţ i e. Criteriile de mai sus ne dau posibilitatea de a deduce că o serie este convergentă sau divergentă, comparînd-o cu altă serie despre care ştim că este convergentă sau divergentă.

Deocamdată cunoaştem o singură serie cu termeni pozitivi convergentă: seria geometrică cu raţia $r < 1$:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$$

Cunoaştem de asemenea două serii divergente: seria geometrică cu raţia $r \geqslant 1$

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$$

şi seria armonică

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Evident, serii divergente putem construi cîte dorim, luînd un şir (u_n), care nu este convergent către zero, şi formînd seria

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Pentru a putea folosi uşor criteriile de comparaţie, va trebui să cunoaştem cît mai multe serii convergente.

Aplicaţie. Fie $\sum_n u_n$ **o serie cu termeni pozitivi, astfel ca şirul termenilor** (u_n) **să fie descrescător. Să considerăm şi seria** $\sum 2^n u_{2^n}$. **Dacă una dintre serii este convergentă, atunci şi cealaltă este convergentă.**

Să presupunem întîi că seria $\sum 2^n u_{2^n}$ este convergentă. Să grupăm termenii seriei $\sum u_n$ astfel:

$$u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + \ldots + u_7) + (u_8 + \ldots + u_{15}) + \ldots + (u_{2^n} + \ldots + u_{2^{n+1}-1}) + \ldots$$

Deoarece şirul termenilor este descrescător, avem

$$u_{2^n} + \ldots + u_{2^{n+1}-1} \leqslant \underbrace{u_{2^n} + \ldots + u_{2^n}}_{2^n \text{ ori}} = 2^n u_{2^n}.$$

După criteriul comparaţiei, urmează că şi seria cu termenii grupaţi este convergentă, adică subşirul sumelor parţiale (S_{2^n}) este convergent. Dacă şirul (S_n) ar avea limita $+\infty$, ar urma ca şi subşirul (S_{2^n}) să aibă limita $+\infty$. Urmează deci că şi şirul (S_n) este convergent, şi deci că seria $\sum u_n$ este convergentă.

Să presupunem acum că seria $\sum u_n$ este convergentă. Atunci şi seria următoare, obţinută prin gruparea termenilor, este convergentă:

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + (u_5 + \ldots + u_8) + (u_9 + \ldots + u_{16}) + \ldots + (u_{2^{n-1}+1} + \ldots + u_{2^n}) + \ldots$$

Deoarece şirul termenilor este descrescător, avem

$$u_{2^{n-1}+1} + \ldots + u_{2^n} \geqslant \underbrace{u_{2^n} + \ldots + u_{2^n}}_{2^{n-1} \text{ ori}} = 2^{n-1} u_{2^n}.$$

Urmează că şi seria $\sum 2^{n-1} u_{2^n}$ şi deci şi seria $\sum 2^n u_{2^n}$ este convergentă.

Vom aplica acest rezultat la *seria armonică generalizată:*

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$$

Această serie este convergentă dacă $\alpha>1$ *şi divergentă dacă* $\alpha\leqslant 1$.

Într-adevăr, să considerăm seria $\sum 2^n u_{2^n}$. Avem

$$2^n u_{2^n}=2^n\frac{1}{(2^n)^\alpha}=\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n.$$

Aceasta este o serie geometrică cu raţia $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$. Dacă $\alpha>1$, atunci $\alpha-1>0$, deci $2^{\alpha-1}>1$ şi deci $\frac{1}{2^{\alpha-1}}<1$, adică seria $\sum 2^n u_{2^n}$ este convergentă şi deci şi seria armonică generalizată este convergentă. Dacă $\alpha\leqslant 1$, avem $\frac{1}{2^{\alpha-1}}\geqslant 1$, deci seria $\sum 2^n u_{2^n}$ este divergentă şi deci şi seria armonică generalizată este divergentă.

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy). Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi:

1) dacă există un număr N şi un număr $0<k<1$, astfel încît, pentru orice $n\geqslant N$, să avem $\sqrt[n]{u_n}\leqslant k$, atunci seria este convergentă;

2) dacă avem $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$, pentru o infinitate de termeni, atunci seria este divergentă.

Demonstraţie. 1) Din $\sqrt[n]{u_n}\leqslant k$ pentru $n\geqslant N$ deducem $u_n\leqslant k^n$. Cum $0<k<1$, seria geometrică $1+k+k^2+\ldots+k^n+\ldots$ este convergentă. Pe baza primului criteriu de comparaţie rezultă că şi seria $\sum u_n$ este convergentă.

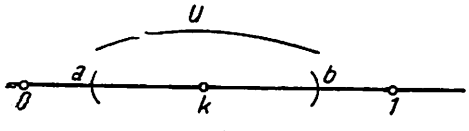


Fig. 161

2) Dacă $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$, atunci $u_n\geqslant 1$. Aşadar, seria are o infinitate de termeni $\geqslant 1$, deci şirul termenilor nu este convergent către 0. Rezultă că nici seria nu este convergentă, deci este divergentă.

Acest criteriu se poate enunţa (punctul 2 într-o formă ceva mai particulară) cu ajutorul limitelor extreme.

Corolarul 1. Fie $\sum u_n$ o serie de termeni pozitivi.
1) Dacă $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$, atunci seria este convergentă.

2) Dacă $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$, atunci seria este divergentă.

Să notăm $k = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Să presupunem întîi că avem $k < 1$ şi să luăm o vecinătate $U = (a,b)$ a lui k, care nu conţine pe 1 (fig. 162). În această vecinătate se află aproape toţi termenii şirului $(\sqrt[n]{u_n})$, adică există un număr N, astfel ca pentru orice $n > N$ să avem $\sqrt[n]{u_n} < b < 1$. Rezultă că seria este convergentă.

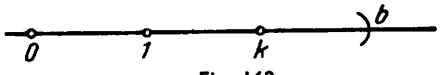


Fig. 162

Să presupunem acum că avem $k > 1$ şi să considerăm vecinătatea $(1, +\infty)$ a lui k. În această vecinătate se află aproape toţi termenii şirului $(\sqrt[n]{u_n})$, deci avem $\sqrt[n]{u_n} > 1$, pentru o infinitate de termeni. Rezultă că seria este divergentă.

Corolarul 2. Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi; să presupunem că şirul $(\sqrt[n]{u_n})$ are limita $k \leqslant \infty$. Atunci:

1) **Dacă $k < 1$, seria este convergentă.**
2) **Dacă $k > 1$, seria este divergentă.**

În adevăr, în acest caz avem $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$.

Observaţii. 1° Dacă şirul $(\sqrt[n]{u_n})$ este convergent şi are limita $k = 1$, nu putem trage nici o concluzie asupra seriei.

De exemplu, seria armonică $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ este divergentă dar şirul $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)$ are limita 1. Într-adevăr, $\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{n} \ln n$ şi şirul $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ are limita 0, deoarece funcţia $\frac{\ln x}{x}$ are, în punctul $+\infty$, limita 0, cum se constată uşor aplicînd regula lui l'Hospital. Cum $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = e^{\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}}}$, rezultă că şirul $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)$ are limita 1.

La fel, seria $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ este divergentă, dar şirul $(\sqrt[n]{u_n})$ are limita 1.

Există de asemenea serii convergenţe, pentru care şirul $(\sqrt[n]{u_n})$ are limita 1. Anume, seria armonică generalizată

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

este convergentă dacă $\alpha > 1$. Totuşi, şirul $\sqrt[n]{n^{-\alpha}} = n^{-\frac{\alpha}{n}}$ are limita 1.

2° În demonstraţia criteriului rădăcinii, s-a folosit convergenţa seriei geometrice cu raţia $r < 1$. Ne vom feri deci să aplicăm criteriul rădăcinii pentru demonstrarea convergenţei seriei geometrice.

Aplicaţii. 1. Fie seria

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

Avem $\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n}$; şirul $\sqrt[n]{u_n}$ are limita $k = 0$, deci seria este convergentă.

2. Fie seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Avem

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3e} < 1$$

şi deci seria este convergentă.

Criteriul raportului (al lui d'Alembert). Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1) **Dacă există un număr N şi un număr $0 < k < 1$, astfel încît pentru orice $n \geqslant N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$, atunci seria este convergentă.**

2) **Dacă există un număr N, astfel ca pentru orice $n \geqslant N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, atunci seria este divergentă.**

Demonstraţie. 1) Din inegalitatea $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, pentru $n \geqslant N$, deducem

$$u_{N+1} \leqslant k u_N$$
$$u_{N+2} \leqslant k u_{N+1} \leqslant k^2 u_N$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{N+p} \leqslant k^p u_N.$$

Aşadar, seria $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ are termenii mai mici decît ai seriei geometrice

$$k u_N + k^2 u_N + k^3 u_N + \ldots + k^p u_N + \ldots, \text{ (cu raţia } k < 1),$$

care este convergentă. Rezultă atunci că şi seria $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$ este convergentă şi deci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2) Din inegalitatea $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ pentru $n \geqslant N$ deducem $0 < u_n \leqslant u_{n+1}$, deci şirul $(u_n)_{n\in N}$ al termenilor este crescător şi nu are limita 0, deci seria este divergentă.

Acest criteriu se poate enunța (punctul 2 într-o formă mai particulară) cu ajutorul limitelor extreme.

Corolarul 1. Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1) **Dacă** $\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, **atunci seria este convergentă.**

2) **Dacă** $\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, **atunci seria este divergentă.**

Să notăm $k = \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ și să presupunem că avem $k < 1$. Să alegem o vecinătate $U = (a, b)$ a lui k astfel ca $b<1$. În această vecinătate se află aproape toți termenii șirului $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, deci există N astfel încît pentru $n > N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} < b$, și deci seria este convergentă.

Să notăm acum $l = \liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ și să presupunem că $l>1$. Alegînd vecinătatea $(1, +\infty)$ a lui l, deducem că în această vecinătate se află aproape toți termenii șirului $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, deci există N astfel ca pentru $n > N$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ și deci seria este divergentă.

Corolarul 2. Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi. Să presupunem că șirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita k. Atunci:

1) **Dacă $k < 1$, seria este convergentă.**

2) **Dacă $k > 1$, seria este divergentă.**

În adevăr, în acest caz, $\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$.

Observații. 1° Deoarece în acest criteriu s-a folosit convergența seriei geometrice, nu putem aplica acest criteriu pentru a demonstra că seria geometrică cu rația $r<1$ este convergentă.

2° Dacă șirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ este convergent și are limita $k = 1$, nu putem trage nici o concluzie.

Exemple. 1) Ştim că seria armonică $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ este divergentă.

Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}$; şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita 1.

2) Seria armonică generalizată $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$ cu $\alpha > 1$ este convergentă. Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$; şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita 1.

Aplicaţii. 1. Fie seria

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Avem

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$, deci şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita 0. Rezultă că seria este convergentă. Se va arăta că suma seriei este numărul e.

2. Fie seria

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots$$

Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$

Criteriul lui d'Alembert nu se poate aplica, deoarece pentru n par suficient de mare avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, iar pentru n impar suficient de mare avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Se aplică criteriul rădăcinii. Avem

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{1}{2} & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Avem $\sqrt[n]{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$ pentru orice n. Rezultă că seria este convergentă.

Criteriul lui Kummer. Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi:

1) Dacă există un şir (a_n) de numere strict pozitive, un număr $\rho > 0$ şi un număr N astfel încît să avem

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant \rho \text{ pentru orice } n \geqslant N,$$

atunci seria este convergentă.

2) Dacă există un şir (a_n) de numere strict pozitive, astfel încît seria $\sum \frac{1}{a_n}$ să fie divergentă, şi un număr N astfel încît $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leqslant 0$, pentru orice $n > N$, atunci seria este divergentă.

Demonstraţie. Fără a micşora generalitatea, vom presupune $N = 1$.

1) Din inegalitatea $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant \rho$ deducem

$$\rho u_{n+1} \leqslant a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1},$$

adică

$$\rho u_1 \leqslant \rho u_1$$
$$\rho u_2 \leqslant a_1 u_1 - a_2 u_2$$
$$\rho u_3 \leqslant a_2 u_2 - a_3 u_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho u_n \leqslant a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n.$$

Notînd cu S_n sumele parţiale ale seriei $\sum u_n$ şi adunînd inegalităţile de mai sus, obţinem

$$\rho S_n \leqslant (\rho + a_1)\, u_1 - a_n u_n \leqslant (\rho + a_1)\, u_1.$$

Deducem că şirul (S_n) este mărginit, şi fiind şi crescător (deoarece seria este cu termeni pozitivi) este convergent, deci seria este convergentă.

2) Din inegalităţile $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leqslant 0$, deducem

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ sau } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Dacă notăm $v_n = \frac{1}{a_n}$, seria $\sum v_n$ este divergentă şi avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

După al doilea criteriu al comparaţiei deducem că seria $\sum_n u_n$ este divergentă.

Din criteriul lui Kummer, deducem

Criteriul lui Raabe şi Duhamel. Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1) Dacă există un număr $k > 1$ şi un număr N astfel încît să avem

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqslant k \text{ pentru orice } n \geqslant N,$$

atunci seria este convergentă.

2) Dacă există un număr N astfel încît

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1 \text{ pentru orice } n \geqslant N,$$

atunci seria este divergentă.

Demonstraţie. Vom aplica criteriul lui Kummer pentru şirul (a_n), unde $a_n = n$. Avem atunci, pentru $n \geqslant N$,

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = n\frac{u_n}{u_{n+1}} - n - 1 = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1.$$

1) Deoarece $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqslant k > 1$, punînd

$$\rho = k - 1 > 0, \text{ deducem că}$$

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant k - 1 = \rho > 0$$

şi deci seria este convergentă.

2) Deoarece $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$, deducem $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 \leqslant 0$

adică

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leqslant 0$$

Deoarece seria $\sum \frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că şi seria $\sum u_n$ este divergentă.

Corolar. Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi. Să presupunem că şirul $\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right]_{1 \leqslant n < +\infty}$ are limita k.

Atunci

1) **dacă** $k > 1$ **seria este convergentă;**

2) **dacă** $k < 1$ **seria este divergentă.**

Într-adevăr, luăm o vecinătate $U = (a, b)$ a lui k care să nu conţină pe 1 şi astfel ca $a \neq 1$. În această vecinătate se află aproape toţi termenii şirului, deci:

1) dacă $k > 1$, avem $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqslant a > 1$,

2) dacă $k < 1$ avem $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leqslant b \leqslant 1$

şi deci condiţiile criteriului lui Raabe-Duhamel sînt verificate.

Exemplu. Fie seria

$$\sum_n \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)},$$

unde $\alpha > 0$. Seria este convergentă dacă $\alpha > 2$, şi divergentă dacă $\alpha < 2$.

Să aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)} - 1 = \frac{\alpha+n}{n+1} - 1 = \frac{\alpha-1}{n+1}.$$

Atunci

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{n}{n+1}(\alpha - 1).$$

Acest şir are limita $k = (\alpha - 1)$. Dacă $\alpha > 2$, atunci $k > 1$, deci seria este convergentă. Dacă $\alpha < 2$, atunci $k < 1$, deci seria este divergentă. Pentru $\alpha = 2$, obţinem $k = 1$, şi criteriul lui Raabe-Duhamel nu ne dă nici o indicaţie. În acest caz seria se scrie

$$\sum \frac{n!}{2 \cdot 3 \ldots (n+1)} = \sum \frac{1}{n+1},$$

adică

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \text{ şi deci este divergentă.}$$

§ 3. Şiruri de funcţii

1. Mulţimea de convergenţă

Fie A o mulţime *oarecare* şi $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un şir de funcţii reale* definite, toate, pe A. Vom însemna prescurtat acest şir de funcţii astfel: $(f_n)_{1 \leqslant n < +\infty}$ sau $(f_n)_{n \in N}$ sau (f_n).

* Majoritatea rezultatelor din acest paragraf rămîn adevărate pentru funcţii cu valori într-un spaţiu Banach.

Fie $a \in A$. Valorile funcţiilor din şirul (f_n) în punctul a formează un *şir de numere*:

$$f_1(a),\ f_2(a),\ldots,\ f_n(a),\ldots$$

Aşadar, pentru fiecare punct $x \in A$, putem considera *şirul de numere* $(f_n(x))_{n\in N}$, format cu valorile funcţiilor din şirul (f_n) în punctul x. Un şir de funcţii (f_n) este deci echivalent cu o familie de şiruri de numere $(f_n(x))_{n\in N,\ x\in A}$, şi anume pentru fiecare punct $x \in A$ cîte un şir de numere.

Vom spune că un punct $a \in A$ este un *punct de convergenţă* al şirului de funcţii (f_n), dacă şirul de numere $(f_n(a))$ este convergent.

Mulţimea punctelor de convergenţă ale şirului de funcţii (f_n) se numeşte *mulţimea de convergenţă* a şirului (f_n).

Fie B mulţimea de convergenţă a şirului (f_n). Pentru fiecare punct $x \in B$, să notăm cu $f(x)$ limita şirului de numere $(f_n(x))$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Am stabilit astfel o corespondenţă $x \to f(x)$ între punctele $x \in B$ şi numerele reale, adică o funcţie reală f definită pe B prin egalitatea

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Funcţia f se numeşte *funcţia limită*, pe mulţimea B, a şirului de funcţii (f_n). Vom spune că şirul (f_n) converge pe mulţimea B către funcţia f.

2. Convergenţa simplă. Convergenţa uniformă

Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe o mulţime A. Vom spune că o funcţie f definită pe A este *limita simplă* (sau punctuală) a şirului (f_n), sau că şirul (f_n) *converge simplu* (sau punctual) *pe* A *către* f, dacă pentru fiecare punct $x \in A$, şirul de numere $(f(x_n))$ este convergent către numărul $f(x)$. Cu alte cuvinte:

Şirul (f_n) *este simplu convergent pe* A *către* f *dacă, oricare ar fi* $x \in A$, *şi oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există un număr* $N(\varepsilon, x)$, *astfel încît pentru orice* $n > N(\varepsilon, x)$ *să avem*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dacă şirul (f_n) este simplu convergent către f, vom scrie astfel:

$$f_n \xrightarrow{s} f.$$

Dacă în definiţia precedentă numărul N depinde numai de ε, nu şi de x, vom spune că şirul (f_n) este uniform convergent pe A către f. Atunci, în definiţia convergenţei uniforme a şirului (f_n) către f, afirmaţia „oricare

ar fi x" trebuie să figureze după afirmaţia despre existenţa numărului N, pentru ca N să nu depindă de x. Aşadar:

Şirul (f_n) este uniform convergent pe A către f, dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$, să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dacă şirul (f_n) este uniform convergent către f, vom scrie astfel:

$$f_n \xrightarrow{u} f.$$

Evident, dacă şirul (f_n) este uniform convergent pe A către f, atunci şirul (f_n) este de asemenea simplu convergent pe A către f. Afirmaţia reciprocă nu este în general adevărată, cum va fi arătat prin cîteva exemple.

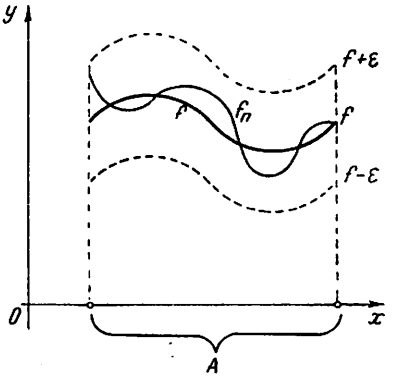


Fig. 163

Mai întîi, vom da o imagine geometrică a convergenţei uniforme (în cazul cînd $A \subset R$). Să desenăm graficul funcţiei f, şi al funcţiilor $f - \varepsilon$ şi $f + \varepsilon$ (fig. 163).

Din definiţia convergenţei uniforme a şirului (f_n) către f, rezultă că există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît dacă $n > N(\varepsilon)$, graficul funcţiei f_n să fie în întregime cuprins în fîşia dintre graficele funcţiilor $f - \varepsilon$ şi $f + \varepsilon$.

Exemple. 1) $A = [0, 1]$; $f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x = 1 \\ 0 \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$

Avem $f_n \xrightarrow{s} f$. Într-adevăr, şirul (f_n) se scrie

$$f_1(x) = x$$
$$f_2(x) = x^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(x) = x^n$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Pentru $x = 1$, avem $f_1(1) = 1$, $f_2(1) = 1, \ldots, f_n(1), \ldots$, deci şirul $(f_n(1))$ este constant şi are limita $1 = f(1)$. Aşadar, în punctul 1, şirul (f_n) este convergent către f.

Dacă $0 \leqslant a < 1$, avem $f_n(a) = a^n$. Se ştie că şirul (a^n) este în acest caz convergent către $0 = f(a)$. Aşadar, pentru orice $x \in [0,1]$, şirul de numere $(f_n(x))$ este convergent către $f(x)$, ceea ce înseamnă că şirul (f_n) este simplu convergent pe $[0,1]$ către f.

Şirul (f_n) nu este însă uniform convergent către f. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că $f_n \xrightarrow{u} f$. Fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$; atunci există un număr $N = N\left(\frac{1}{2}\right)$ astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N$, şi oricare ar fi $x \in [0,1]$ să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}.$$

Pentru $0 \leqslant x < 1$, avem $f(x) = 0$, deci pentru $n \geqslant N$ rezultă $|f_n(x)| < \frac{1}{2}$ sau

$$x^n < \frac{1}{2}.$$

În particular, pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $x^N < \frac{1}{2}$.

Dacă (x_k) este un şir de numere din (0,1) convergent către 1, şirul $\left(x_k^N\right)$ este convergent către 1, deci există un număr $0 < x_{k_0} < 1$, astfel ca $\frac{3}{4} < x_{k_0}^N < 1$, ceea ce este în contradicţie cu inegalitatea $x_{k_0}^N < \frac{1}{2}$.

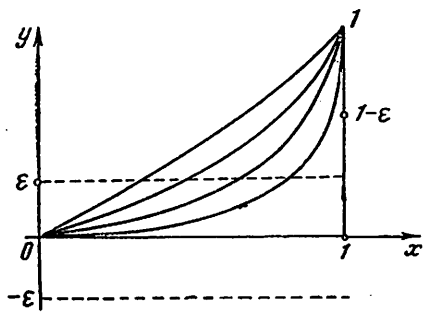


Fig. 164

Aşadar, şirul (f_n) nu este uniform convergent către f.

Explicaţia geometrică: funcţiile $f - \varepsilon$ şi $f + \varepsilon$ sînt definite de următoarele egalităţi:

$$f(x) - \varepsilon = \begin{cases} -\varepsilon \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 - \varepsilon \text{ pentru } x = 1; \end{cases}$$

$$f(x) + \varepsilon = \begin{cases} +\varepsilon \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 + \varepsilon \text{ pentru } x = 1. \end{cases}$$

Oricît de mare ar fi n, graficul funcţiei f_n iese din fîşia determinată de funcţiile $f - \varepsilon$ şi $f + \varepsilon$.

2) $A = [0, 2\pi]$; $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $f(x) \equiv 0$. Avem $f_n \xrightarrow{u} f$. Într-adevăr, şirul $\left(\frac{1}{n}\right)$ este convergent către 0. Pentru $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, dacă $n \geqslant N(\varepsilon)$, atunci $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Atunci pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$, avem

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n} - 0\right| = \frac{\sin nx}{n} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ oricare ar fi } x \in [0, 2\pi].$$

Din diagramă se vede că luînd o fîşie în jurul funcţiei $f(x) \equiv 0$, atunci, pentru n suficient de mare, graficul funcţiei f_n este cuprins în această fîşie.

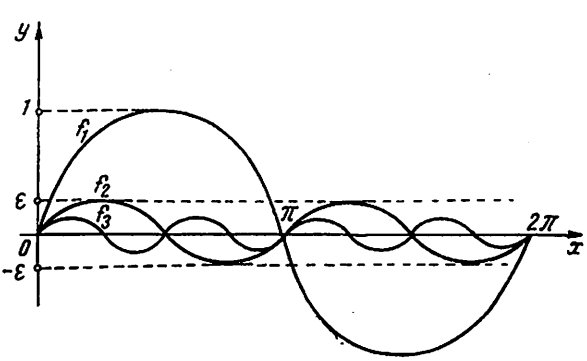


Fig. 165

3) $A = [0, +\infty]$; $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$; $f(x) \equiv 0$. Avem $f_n \xrightarrow{s} f$. Într-adevăr, pentru oricare $x \geqslant 0$, şirul $\left(\frac{x}{x+n}\right)_{n \in N}$ are limita 0, adică şirul $(f_n(x))$ are limita 0.

Şirul (f_n) nu converge însă uniform pe A către $f(x) \equiv 0$.

Într-adevăr, fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dacă (f_n) ar converge uniform către f, ar exista un număr $N = N\left(\frac{1}{2}\right)$ astfel încît pentru $n \geqslant N$ să avem $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$ oricare ar fi $x \in A$, adică $\frac{x}{x+n} < \frac{1}{2}$. În particular, am avea $\frac{x}{x+N} < \frac{1}{2}$ oricare ar fi $x > 0$. Dacă luăm $x = 3N$, atunci $\frac{x}{x+N} = \frac{3N}{3N+N} = \frac{3}{4} < \frac{1}{2}$ şi am ajuns la o contradicţie.

4) Fie (a_n) un şir de numere şi pentru fiecare n să considerăm funcţia *constantă* $f_n(x) = a_n$ definită pe o mulţime A. Dacă şirul de numere (a_n) este convergent, atunci şirul de funcţii (f_n) este uniform convergent pe A.

3. Criterii de convergenţă uniformă

Deoarece convergenţa simplă a şirului de funcţii (f_n) către funcţia f revine, pentru fiecare punct $x \in A$, la convergenţa şirului de numere $(f_n(x))$ către numărul $f(x)$, criteriile de convergenţă de la şirurile de numere se aplică şi în acest caz.

Convergenţa uniformă a şirului de funcţii (f_n) către funcţia f înseamnă însă ceva mai mult decît convergenţa simplă: toate şirurile $(f_n(x))$, pentru toate punctele $x \in A$, sînt „egal convergente" sau „la fel de repede convergente".

Vom da două criterii de convergenţă uniformă.

Primul criteriu este asemănător criteriului lui Cauchy de la şirurile de numere.

Criteriul I (Cauchy). Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe o mulţime A. Şirul (f_n) este uniform convergent către o funcţie f definită pe A, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricare ar fi n, $m \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$, să avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Să presupunem întîi că $f_n \xrightarrow{u} f$. Fie $\varepsilon > 0$; există atunci un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $p \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$ să avem

$$|f_p(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, dacă $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ şi $x \in A$, avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Reciproc, să presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$, să avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

şi să arătăm că există o funcţie f definită pe A, astfel ca $f_n \xrightarrow{u} f$. Din ipoteză, rezultă că pentru fiecare $x \in A$, şirul de numere $(f_n(x))$ este un şir fundamental, deci are ca limită un număr, pe care să-l notăm $f(x)$. Am construit deci o funcţie $x \to f(x)$ definită pe A. Din modul în care a fost construită funcţia f, rezultă că $f_n \xrightarrow{s} f$. Fie $\varepsilon > 0$ şi $N(\varepsilon)$, astfel ca pentru $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ şi $x \in A$ să avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Să luăm $m_0 \geqslant N(\varepsilon)$. Deoarece $f_n \xrightarrow{s} f$, avem $f_n - f_{m_0} \xrightarrow{s} f - f_{m_0}$ şi deoarece, pentru orice $x \in A$ avem

$$|f_n(x) - f_{m_0}(x)| < \varepsilon \text{ dacă } n \geqslant N(\varepsilon),$$

rezultă prin trecere la limită că pentru orice $x \in A$ avem, de asemenea,

$$|f(x) - f_{m_0}(x)| < \varepsilon.$$

Cum m_0 a fost arbitrar $\geqslant N(\varepsilon)$, deducem că oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$ avem

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

adică $f_n \xrightarrow{u} f$.

Dăm acum un criteriu asemănător cu criteriul de convergenţă al şirurilor de numere.

Criteriul II. **Fie (f_n) şi (φ_n) două şiruri de funcţii definite pe A şi f o funcţie definită pe A. Dacă avem**

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varphi_n(x), \text{ pentru orice } n \in N \text{ şi orice } x \in A,$$

şi dacă $\varphi_n \xrightarrow{u} 0$, atunci $f_n \xrightarrow{u} f$.

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\varphi_n \xrightarrow{u} 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$, să avem $\varphi_n(x) < \varepsilon$. Atunci, cu atît mai mult, avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in A$, adică $f_n \xrightarrow{u} f$.

Observaţii. Avem $f_n \xrightarrow{u} f$ dacă şi numai dacă $f_n - f \xrightarrow{u} 0$. Criteriul precedent afirmă că dacă şirul de funcţii $f_n - f$ este majorat de un şir de funcţii uniform convergent către 0, atunci $f_n - f \xrightarrow{u} 0$.

Criteriul II se aplică adesea în cazul particular al următorului

Corolar. **Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe A şi f o funcţie definită pe A. Dacă există un şir de numere (a_n) astfel încît să avem**

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n, \text{ pentru orice } n \in N \text{ şi orice } x \in A$$

şi dacă $a_n \to 0$, atunci $f_n \xrightarrow{u} f$.

În adevăr şirul de funcţii constante $\varphi_n(x) = a_n$ este uniform convergent către 0.

În exemplul 2 de mai sus am avut $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n}$, oricare ar fi $n \in N$ şi oricare ar fi $x \in [0, 2\pi]$, deci se poate aplica criteriul de mai sus.

4. Continuitatea şi convergenţa uniformă

Se ridică în mod natural întrebarea dacă o anumită proprietate, pe care o au toate funcţiile unui şir (f_n), o are şi limita f a acestui şir. Teorema următoare arată că prin *convergenţa uniformă*, proprietatea de *continuitate* a funcţiilor din şir se transmite şi asupra limitei. Vom presupune că $A \subset R$ (sau $A \subset R^n$).

Teorema*. Fie (f_n) un şir uniform convergent pe mulţimea $A \subset R$ către funcţia f. Dacă toate funcţiile f_n sînt continue într-un punct $a \in A$, atunci şi funcţia limită f este continuă în punctul a.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$, există $N = N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $x \in A$ să avem

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

În particular, $|f_N(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Deoarece funcţia f_N este continuă în punctul a, pentru numărul ε ales, există o vecinătate V a lui a, astfel încît, oricare ar fi $x \in V \cap A$, să avem

$$|f_N(x) - f_N(a) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Atunci, pentru orice $x \in V \cap A$, avem

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că f este continuă în a, şi teorema este demonstrată.

Corolar. Limita unui şir uniform convergent de funcţii continue pe A este o funcţie continuă pe A.

Observaţie. 1° Este posibil ca funcţiile (f_n) să nu fie continue, sau convergenţa să nu fie uniformă şi totuşi limita f a şirului să fie continuă.

5. Integrabilitatea şi convergenţa uniformă

Teorema următoare arată că proprietatea de integrabilitate se transmite, de asemenea, asupra limitei uniforme. Vom arăta mai întîi că şi proprietatea de mărginire se conservă prin convergenţa uniformă.

Propoziţie. Dacă (f_n) este un şir de funcţii mărginite pe A şi uniform convergent către o funcţie f, atunci şi limita f este mărginită pe A.

Să alegem $\varepsilon = 1$. Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$, există un număr $N=N(1)$, astfel încît oricare ar fi $x\in A$ să avem

$$|f(x) - f_N(x)| \leqslant 1, \text{ deci } |f(x)| \leqslant |f_N(x)| + 1.$$

Deoarece funcţia f_n este mărginită, există un număr M astfel încît oricare ar fi $x \in A$ să avem $|f_N(x)| \leqslant M$. Rezultă că

$$|f(x)| \leqslant M + 1, \text{ oricare ar fi } x \in A,$$

adică f este mărginită.

Teoremă. Dacă (f_n) este un şir uniform convergent de funcţii integrabile pe un interval $[a, b]$, atunci:

1) **funcţia f este integrabilă;**

2) **şirul integralelor $\left(\int_a^b f_n\,dx\right)$ este convergent, şi avem**

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

Din criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue rezultă că fiecare funcţie f_n este mărginită, iar mulţimea A_n a punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă.

Din propoziţia precedentă deducem în primul rînd că f este mărginită. Din teorema de la numărul precedent rezultă că mulţimea A a punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este conţinută în reuniunea mulţimilor A_n, deci A este neglijabilă. Aplicînd criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, rezultă că f este integrabilă pe $[a,b]$.

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$, există $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n\geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x\in[a,b]$ să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Rezultă atunci că

$$\int_a^b |f_n - f|\,dx < \varepsilon.$$

Din relaţiile

$$\left|\int_a^b f_n\,dx - \int_a^b f\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f|\,dx$$

deducem

$$\left|\int_a^b f_n\,dx - \int_a^b f\,dx\right| < \varepsilon, \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

Observaţie. Deoarece $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, egalitatea demonstrată se scrie

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n\,dx.$$

Teorema precedentă este numită adesea teorema de integrare termen cu termen a şirurilor de funcţii.

6. Derivabilitatea şi convergenţa uniformă

O altă proprietate care se păstrează prin convergenţa uniformă este aceea de a fi funcţii derivate (v. teorema 3).

Teorema 1. Fie (f_n) un şir de funcţii derivabile pe un interval I. Dacă:

1) şirul (f_n) este uniform convergent pe I către o funcţie f;

2) şirul derivatelor (f_n') este uniform convergent pe I către o funcţie g,

atunci f este derivabilă pe I şi $f' = g$.

Demonstraţie. Fie $a \in I$ un punct oarecare; să arătăm că f este derivabilă în a şi că $f'(a) = g(a)$.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece şirul (f_n') este uniform convergent, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît dacă $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ să avem

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Să alegem $n_0 > N(\varepsilon)$. Deoarece $f_m' \xrightarrow{u} g$, rezultă $f_{n_0}' - f_m' \xrightarrow{u} f_{n_0}' - g$; din inegalitatea precedentă deducem că

$$|f_{n_0}'(x) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Deoarece funcţia f_{n_0} este derivabilă în a, pentru ε ales există o vecinătate U a lui a, astfel încît

$$\left|\frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)}{x - a} - f_{n_0}'(a)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

oricare ar fi $x \in U \cap I$.

Putem scrie, de asemenea,

$$\left|\frac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a}-\frac{f_m(x)-f_m(a)}{x-a}\right|=\left|\frac{(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(a)-f_m(a))}{x-a}\right|=$$

$$=|f'_n(c)-f'_m(c)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

dacă n, $m\geqslant N(\varepsilon)$, oricare ar fi $x\in I$, unde c este un anumit punct cuprins între x şi a (s-a aplicat teorema creşterilor finite funcţiei f_n-f_m).

Cum $f_m\overset{u}{\longrightarrow}f$, avem $f_{n_0}-f_m\overset{u}{\longrightarrow}f_{n_0}-f$; din inegalitatea precedentă, deducem, pentru $n=n_0$ şi $m\to\infty$,

$$\left|\frac{f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a)}{x-a}-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3},\text{ oricare ar fi } x\in I.$$

Pentru orice $x\in U\cap I$ deducem atunci

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-g(a)\right|\leqslant\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a)}{x-a}\right|+$$

$$+\left|\frac{f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a)}{x-a}-f'_{n_0}(a)\right|+|f'_{n_0}(a)-g(a)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Aşadar, pentru orice $\varepsilon>0$ putem găsi o vecinătate U a lui a, astfel încît să avem

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-g(a)\right|<\varepsilon,\text{ pentru orice } x\in U\cap I.$$

Aceasta înseamnă că f este derivabilă în a şi că $f'(a)=g(a)$. Cum a a fost ales arbitrar, deducem că f este derivabilă pe I şi că $f'=g$.

Observaţii. 1° Deoarece $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ şi $g=\lim\limits_{n\to\infty}f'_n$, egalitatea $f'=g$ se scrie

$$(\lim_{n\to\infty}f_n)'=\lim_{n\to\infty}f'_n.$$

(derivata limitei este egală cu limita derivatelor). De aceea teorema precedentă este numită *teorema de derivare termen cu termen a şirurilor de funcţii*.

2° Convergenţa uniformă a şirului (f_n) nu atrage convergenţa uniformă a şirului derivatelor.

Exemplu. $I=[0,\pi]$; $f_n(x)=\frac{\cos nx}{n}$, $f(x)\equiv 0$. Avem $f_n\overset{u}{\longrightarrow}f$. În adevăr

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{\cos nx}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

iar şirul $\left(\frac{1}{n}\right)$ are limita 0. Se aplică criteriul II de convergenţă uniformă.

Funcţiile (f_n) sînt derivabile pe I şi $f_n'(x) = -n \sin nx$. Şirul derivatelor (f_n') nu este însă convergent pe I. Pentru $x = \frac{\pi}{2}$ avem $f_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -n \sin n\frac{\pi}{2}$. Acest şir se scrie, pentru $n = 1, 2, \ldots$, astfel:

$$-1, 0, 3, 0, -5, 0, 7, 0, \ldots$$

şi se vede că nu este convergent.

3° Convergenţa uniformă a şirului derivatelor este esenţială. Dacă şirul derivatelor (f_n') converge simplu, dar nu uniform, către g, atunci este posibil ca f să nu fie derivabilă sau, dacă este derivabilă, este posibil ca $f' \neq g$.

Exemplu. $I = R$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} nx$, $f(x) \equiv 0$.

Avem $f_n \xrightarrow{u} f$, deoarece

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{n} \operatorname{arc\,tg} nx\right| \leqslant \frac{1}{n}\frac{\pi}{2}.$$

Funcţiile f_n sînt derivabile pe I şi $f_n'(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2}$.

Şirul (f_n') converge simplu către funcţia

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \neq 0 \\ 1 \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

Dacă şirul (f_n') ar converge uniform, limita sa g ar fi continuă, deoarece şi funcţiile f_n' sînt continue.

Cum funcţia g este discontinuă în origine, rezultă că şirul (f_n) nu converge uniform către g.

Funcţia f este derivabilă pe I şi avem $f'(x) \equiv 0$, dar $f' \neq g$, deoarece în origine avem $f'(0) = 0$ şi $g(0) = 1$.

4°. Deşi convergenţa uniformă a şirului derivatelor este importantă, această condiţie este numai suficientă, dar nu şi necesară pentru concluzia teoremei.

Exemplu. $I = (0, \infty)$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arc\,tg} nx$, $f(x) \equiv 0$. Avem $f_n \xrightarrow{u} f$. Avem apoi $f_n'(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2}$, $g(x) \equiv 0$ şi $f_n' \xrightarrow{s} g$. Deşi şirul (f_n') nu converge uniform către g, avem totuşi $f' = g$.

Dacă intervalul I este *mărginit*, concluzia teoremei precedente rămîne adevărată şi dacă despre şirul (f_n) se ştie că este convergent într-un singur punct. În adevăr, dacă I este mărginit, restul ipotezelor implică convergenţa uniformă pe întregul interval.

Teorema 2. Fie I un interval mărginit şi (f_n) un şir de funcţii derivabile pe I. Dacă:

1) şirul (f_n) este convergent într-un punct $x_0 \in I$;

2) şirul derivatelor (f_n') este uniform convergent pe I către o funcţie g,

atunci

(i) şirul (f_n) este uniform convergent pe I către o funcţie f;

(ii) limita f este derivabilă pe I şi $f' = g$.

Avem de demonstrat doar punctul (i), deoarece punctul (ii) rezultă aplicînd teorema precedentă.

Să notăm cu l lungimea intervalului I. Presupunem $l > 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Din condiţiile 1 şi 2 deducem că există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $m \geqslant N(\varepsilon)$ să avem în acelaşi timp verificate următoarele inegalităţi:

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\varepsilon}{2l}, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Atunci

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|.$$

Dacă notăm $h = f_n - f_m$, primul termen din dreapta se scrie

$$h(x) - h(x_0).$$

Funcţia h este derivabilă pe intervalul închis cu extremităţile în x şi x_0, deci i se poate aplica teorema creşterilor finite; există un număr c cuprins între x şi x_0 astfel încît

$$h(x) - h(x_0) = (x - x_0)h'(c),$$

de unde

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| = |x - x_0|\,|f_n'(c) - f_m'(c)| \leqslant$$

$$\leqslant l\,|f_n'(c) - f_m'(c)| < l\,\frac{\varepsilon}{2l} = \frac{\varepsilon}{2},$$

pentru orice n, $m \geqslant N(\varepsilon)$ şi orice $x \in I$. Urmează deci că

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

oricare ar fi $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in I$. Conform criteriului I de convergenţă uniformă, rezultă că şirul (f_n) converge uniform pe I către o funcţie f.

Fără nici o ipoteză asupra funcţiilor care se derivează, se poate enunţa următorul rezultat, relativ numai la derivate.

Teorema 3. Limita g a unui şir uniform convergent (g_n) de funcţii derivate pe un interval oarecare I este o funcţie derivată.

Să presupunem întîi că intervalul I este mărginit şi fie $x_0 \in I$. Pentru fiecare n, fie f_n o primitivă a funcţiei g_n:

$$f_n' = g_n.$$

Putem alege primitivele f_n astfel încît să avem $f_n(x_0) = 0$. Sîntem acum în condiţiile teoremei precedente. Rezultă că şirul (f_n) este uniform convergent pe I către o funcţie derivabilă f şi că $f' = g$, deci g este, de asemenea, o derivată.

Să presupunem acum că intervalul I este nemărginit. Putem atunci construi un şir crescător (I_n) de intervale mărginite, a căror reuniune să fie egală cu I:

$$I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots \subset I \quad \text{şi} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I.$$

Fie $x_0 \in I_1$, deci $x_0 \in I_n$ pentru fiecare n. Conform primei părţi a demonstraţiei, pe fiecare interval mărginit I_n, funcţia g este derivata unei funcţii F_n definită pe I_n. Putem alege funcţiile F_n astfel ca $F_n(x_0) = 0$. Să observăm că dacă un punct x face parte din două intervale I_n şi I_m, atunci avem $F_n(x) = F_m(x)$. În adevăr, dacă $I_n \subset I_m$ (adică dacă $n < m$), atunci funcţiile F_n şi F_m au pe intervalul I_n aceeaşi derivată g, deci diferenţa lor pe I_n este constantă; dar $F_n(x_0) = F_m(x_0) = 0$, deci $F_n(x) = F_m(x)$ pentru orice $x \in I_n$.

Să definim acum funcţia F pe întregul interval I astfel: dacă un punct x din I se află într-un interval I_n, atunci luăm $F(x) = F_n(x)$. Conform observaţiei de mai sus, numărul $F(x)$ este independent de alegerea particulară a intervalului I_n care conţine pe x.

Funcţia F este derivabilă pe I şi derivata sa este g. În adevăr, fie $a \in I$. Există un interval $I_n \ni a$, deci $F(a) = F_n(a)$. Dar F_n este derivabilă în a şi $F_n'(a) = g(a)$. Rezultă că F este derivabilă în a şi $F'(a) = F_n'(a) = g(a)$. Cum $a \in I$ a fost ales arbitrar, rezultă că F este derivabilă pe I şi $F' = g$, deci g este o derivată.

Observaţie. Teorema precedentă se poate enunţa şi astfel:

Dacă şirul (g_n) este uniform convergent pe I către o funcţie g şi dacă funcţiile g_n au primitive pe I, atunci şi limita g are primitive pe I.

7. Aproximarea uniformă a funcţiilor continue

În teoremele care urmează se arată că funcţiile continue pot fi aproximate uniform cu funcţii aparţinînd unei mulţimi mai restrînse de funcţii continue.

Reamintim că o mulţime $\mathcal{A}$ de funcţii continue definite pe o mulţime A este o algebră dacă suma şi produsul a două funcţii din $\mathcal{A}$ aparţin lui $\mathcal{A}$ şi produsul unei funcţii din $\mathcal{A}$ cu un număr aparţine de asemenea lui $\mathcal{A}$.

Un exemplu de algebră de funcţii continue pe R este mulţimea polinoamelor definite pe R, deoarece suma şi produsul a două polinoame este un polinom, iar produsul unui polinom cu un număr este de asemenea un polinom. Desigur, algebra polinoamelor pe R nu conţine toate funcţiile continue pe R.

Teorema lui Weierstrass-Stone*. **Fie intervalul compact $I = [a, b]$ şi $\mathcal{A}$ o algebră de funcţii continue definite pe I. Dacă:**

1) funcţia identic egală cu 1 pe I, $f(x) \equiv 1$, aparţine lui $\mathcal{A}$;

2) pentru orice puncte $x' \neq x''$ există o funcţie $f \in \mathcal{A}$, astfel încît

$$f(x') \neq (fx'');$$

atunci orice funcţie continuă pe I este limita uniformă a unui şir de funcţii din $\mathcal{A}$.

Nu dăm demonstraţia acestei teoreme.

O consecinţă a acestei teoreme este

Teorema lui Weierstrass. Orice funcţie continuă pe un interval compact $I = [a, b]$ este limita uniformă pe I a unui şir de polinoame.

Într-adevăr, dacă notăm cu $\mathcal{Q}$ algebra polinoamelor, funcţia identic egală cu 1 pe I, $f(x) \equiv 1$ este un polinom, deci aparţine algebrei $\mathcal{Q}$. Dacă $x' \neq x''$ sînt două puncte oarecare din I, pentru funcţia $f(x) = x$ avem $f(x') \neq f(x'')$; dar $f(x) = x$ este un polinom din $\mathcal{Q}$. Aşadar condiţiile teoremei precedente sînt îndeplinite, de unde rezultă teorema lui Weierstrass.

Observaţii. 1° Teorema precedentă afirmă doar că pentru o funcţie continuă f pe I există un şir (f_n) de polinoame uniform convergent către f, dar nu ne dă un procedeu să calculăm aceste polinoame.

Matematicianul sovietic S. N. Bernstein a dat o metodă prin care putem calcula, pentru o funcţie continuă f pe I, un şir (p_n) de polinoame uniform convergent către f. Aceste polinoame se numesc polinoamele lui Bernstein.

2° Dacă ne dăm un număr a, nu există numai un şir de numere (x_n) convergent către a. În mod analog, dacă ne dăm o funcţie continuă f pe I, nu există numai un şir (f_n) de polinoame uniform convergent către f. Polinoamele lui Bernstein formează doar unul din aceste şiruri.

* Teorema rămîne valabilă dacă se înlocuieşte intervalul I cu un spaţiu compact oarecare.

8. Aproximarea funcţiilor continue prin funcţii poligonale

Fie I un interval. O funcţie f definită pe I se numeşte funcţie liniară dacă există două numere m şi n, astfel încît

$$f(x) = mx + n, \text{ pentru orice } x \in I.$$

O b s e r v a ţ i e. Graficul unei funcţii liniare este un segment de dreaptă.

Orice funcţie liniară $f(x) = mx + n$ are primitivele $F(x) = \frac{1}{2} mx^2 + nx + C$.

Dacă I este mărginit, cu extremităţi în a şi b, $a < b$, am numit diviziune a intervalului I un număr de puncte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ astfel ca

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

O funcţie *continuă* f definită pe I se numeşte *funcţie poligonală* dacă există o diviziune a lui I,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

astfel încît restricţia funcţiei f la fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$ să fie liniară.

Graficul unei funcţii poligonale este o linie poligonală.

Orice funcţie poligonală este continuă, deci are primitive. Putem însă demonstra direct acest fapt. Vom demonstra mai întîi următoarea

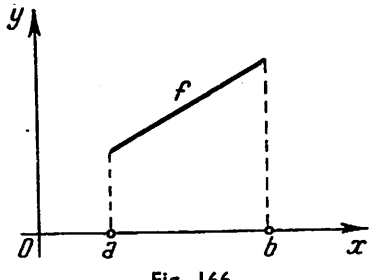


Fig. 166

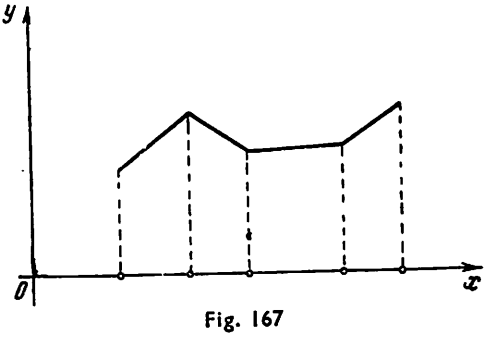


Fig. 167

L e m ă. Fie I_1 şi I_2 două intervale care au în comun cel puţin un punct x_0, şi f o funcţie definită pe $I = I_1 \cup I_2$. Dacă f are primitive pe fiecare din intervalele I_1 şi I_2, atunci f are primitive şi pe reuniunea lor I.

În adevăr, fie $F_1 : I_1 \to R$ o primitivă a lui f pe I_1:

$$F_1'(x) = f(x) \text{ pentru } x \in I_1$$

şi $F_2 : I_2 \to R$ o primitivă a lui f pe I_2:

$$F_2'(x) = f(x) \text{ pentru } x \in I.$$

Să observăm că, pe intersecţia $I_1 \cap I_2$, diferenţa $F_1 - F_2$ este constantă, deoarece cele două funcţii au derivate egale pe $I_1 \cap I_2$:

$$F_1'(x) = F'(x) = f(x) \text{ pentru } x \in I_1 \cap I_2.$$

Avem atunci

$$F_1(x) - F_2(x) = F_1(x_0) - F_2(x_0) \text{ pentru } x \in I_1 \cap I_2.$$

Să definim acum funcţia F pe reuniunea $I_1 \cup I_2$ astfel:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{dacă } x \in I_1 \\ F_2(x) + F_1(x_0) - F_2(x_0) & \text{dacă } x \in I_2. \end{cases}$$

Dacă $x \in I_1 \cap I_2$, funcţia are aceeaşi valoare, prin cele două definiţii, deoarece $F_2(x) + F_1(x_0) - F_2(x_0) = F_2(x) + F_1(x) - F_2(x) = F_1(x)$. Funcţia F este derivabilă pe $I_1 \cup I_2$ şi derivata sa pe $I_1 \cup I_2$ este f, deci f are primitive pe $I_1 \cup I_2$. Din această lemă rezultă imediat următoarea

Propoziţie. Orice funcţie poligonală are primitive.

Într-adevăr, o funcţie poligonală este liniară pe intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$, deci are primitive pe fiecare din aceste intervale. Cum I_1 şi I_2 au în comun un punct, funcţia poligonală are primitive pe $I_1 \cup I_2$; dar $I_1 \cup I_2$ şi I_3 au în comun un punct, deci funcţia poligonală are primitive pe reuniunea $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ ş.a.m.d.

Teorema următoare arată că funcţiile continue pe intervale compacte pot fi aproximate uniform cu funcţii poligonale.

Teoremă. Fie $I = [a, b]$ un interval compact. Pentru orice funcţie f continuă pe I, există un şir (p_n) de funcţii poligonale definite pe I, uniform convergent către f.

Demonstraţie. Deoarece I este compact şi f este continuă pe I, rezultă că f este uniform continuă pe I. Fie $\varepsilon > 0$; există deci un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, oricare ar fi punctele x', $x'' \in I$ cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$, să avem

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Să alegem o diviziune a intervalului I

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

astfel ca distanţa dintre două puncte consecutive ale diviziunii să fie $< \delta(\varepsilon)$, adică

$$|x_{i+1} - x_i| < \delta(\varepsilon), \text{ pentru } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Să considerăm punctele din plan $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_i, f(x_i)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ şi să le unim prin segmente de dreaptă, în ordinea indicată de indici. Obţinem o linie poligonală, care defineşte o funcţie poligonală p_ε. Pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$, această funcţie p_ε este liniară:

$$p_\varepsilon(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \text{ pentru } x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}.$$

Pentru $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$, avem $p_\varepsilon(x) = f(x_{i-1}) +$

$$+ \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

Pentru $x = x_i$, valoarea $p_\varepsilon(x)$ este aceeaşi, fie că o calculăm cu prima formulă, fie cu a doua formulă: $p_\varepsilon(x_i) = f(x_i)$.

Să arătăm că $|p_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$, oricare ar fi $x \in I$.

Fie, într-adevăr, un punct oarecare $x \in I$. Punctul x aparţine unui interval $[x_i, x_{i+1}]$, şi deci

$$|p_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) - f(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x_i) - f(x)| + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \left| \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right|.$$

Dar, deoarece $|x_{i+1} - x_i| < \delta(\varepsilon)$ şi $|x - x_i| < \delta(\varepsilon)$, avem

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ şi } |f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ţinînd seama că $|x - x_i| \leqslant |x_{i+1} - x_i|$ avem $\left| \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right| \leqslant 1$, şi deci:

$$|p_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dacă, în particular, luăm $\varepsilon = \frac{1}{n}$ şi notăm cu p_n funcţia poligonală corespunzătoare, avem:

$$|p_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$$ oricare ar fi $x \in I$ şi deci, conform criteriului II de convergenţă uniformă, şirul (p_n) converge uniform pe I către f.

Putem da acum o demonstraţie directă a faptului că funcţiile continue au primitive.

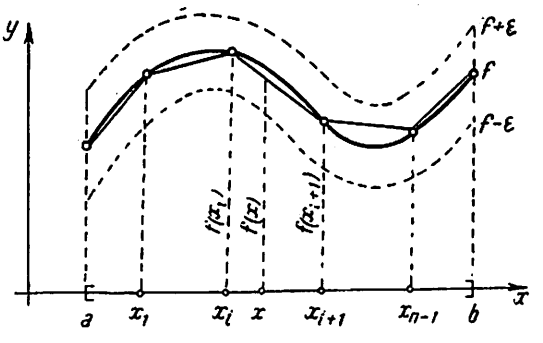


Fig. 168

Corolar. Orice funcţie continuă f pe un interval I are primitive pe I.

Să presupunem întîi că intervalul I este compact. Atunci există un şir (p_n) de funcţii poligonale, uniform convergent către f pe intervalul I. Cum funcţiile poligonale p_n au primitivele pe I, rezultă că şi limita lor uniformă, f, are primitive pe I.

Dacă I nu este compact, există un şir crescător (I_n) de intervale compacte, a căror reuniune este I:

$$I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots \subset I, \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I.$$

Fie $x_0 \in I_1$; atunci $x_0 \in I_n$ oricare ar fi n.

Pe fiecare interval compact I_n, funcţia f are primitive; fie F_n o primitivă a lui f pe intervalul I_n. În plus, putem alege primitivele F_n astfel ca $F_n(x_0) = 0$. Două primitive F_n şi F_m coincid pe $I_n \cap I_m$. Definim acum funcţia F pe intervalul I, astfel:

$$F(x) = F_n(x) \text{ dacă } x \in I_n.$$

Funcţia $F(x)$ este perfect definită pe I, este derivabilă şi derivata sa pe I este f, deci f are primitive pe I.

9. Şiruri de funcţii egal continue şi egal mărginite

Fie A o mulţime de numere * şi (f_n) un şir de funcţii definite pe A. A spune că (f_n) este un şir de funcţii continue pe A înseamnă a spune că fiecare funcţie din şir este continuă în fiecare punct $x \in I$, adică

(f_n) este un şir de funcţii continue pe A, dacă, oricare ar fi $n \in N$, oricare ar fi $x \in A$ şi oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon, x, n) > 0$ astfel încît oricare ar fi $x' \in A$, cu $|x' - x| < \delta(\varepsilon, x, n)$, să avem

$$|f_n(x') - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Dacă funcţiile din şir sînt uniform continue pe A, atunci δ nu mai depinde de punctul x, deci afirmaţia relativă la x trebuie să figureze după afirmaţia relativă la δ:

(f_n) este un şir de funcţii uniform continue pe A, dacă, oricare ar fi $n \in N$ şi oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon, n)$, astfel încît oricare ar fi x', $x'' \in A$, cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon, n)$ să avem

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Este posibil ca δ să nu depindă de n, dar să depindă de punctul x. Vom spune în acest caz că şirul (f_n) este format din funcţii *egal continue*:

(f_n) este un şir de funcţii egal continue pe A, dacă, oricare ar fi punctul $x \in A$ şi oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon, x) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x' \in A$ cu $|x' - x| < \delta(\varepsilon, x)$ şi oricare ar fi $n \in N$, să avem

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon.$$

Dacă δ nu depinde nici de x, nici de n, funcţiile din şir sînt pe de o parte uniform continue, pe de altă parte sînt egal continue, sînt deci *egal uniform continue*: atunci afirmaţiile relative la x şi n trebuie să figureze după afirmaţia relativă la δ:

(f_n) este un şir de funcţii egal uniform continue pe A, dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, oricare ar fi x', $x'' \in A$ cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $n \in N$, să avem

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Vom spune că şirul (f_n) este format din funcţii *mărginite pe A* dacă fiecare funcţie este mărginită pe A, deci:

(f_n) este un şir de funcţii mărginite pe A, dacă, oricare ar fi $n \in N$, există un număr $M(n)$, astfel încît, oricare ar fi $x \in A$, să avem

$$|f_n(x)| < M(n).$$

* A poate fi un spaţiu topologic oarecare, pentru funcţii f_n continue, şi un spaţiu uniform pentru funcţii f uniform continue.

Dacă M nu depinde de n, adică dacă toate funcțiile sînt mărginite de același număr M, vom spune că funcțiile din șir sînt *egal mărginite*. În acest caz, afirmația relativă la n trebuie să figureze după afirmația relativă la M:

(f_n) este un șir de funcții egal mărginite pe A, dacă există un număr M, astfel încît, oricare ar fi $n \in N$ și oricare ar fi $x \in A$, să avem

$$|f_n(x)| < M.$$

Dacă (f_n) este un șir de funcții mărginite și uniform convergent pe o mulțime A, atunci (f_n) este un șir de funcții egal mărginite.

În adevăr, limita f a șirului este mărginită, deci există $M > 0$ astfel încît să avem $|f(x)| \leqslant M$, pentru orice $x \in A$. Deoarece șirul este uniform convergent, luînd $\varepsilon = 1$, există un număr $N = N(1)$, astfel încît pentru orice $n \geqslant N$ și orice $x \in A$ să avem $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$, deci $|f_n(x)| \leqslant |f(x)| + 1 \leqslant M + 1$.

Dacă pentru fiecare $n < N$ alegem un număr M_n astfel ca

$$|f_n(x)| \leqslant M_n \text{ pentru orice } x \in A$$

și notăm $K = \max(M_1, M_2, \ldots, M_{N-1}, M + 1)$, atunci

$$|f_n(x)| \leqslant K, \text{ pentru orice } n \in N \text{ și orice } x \in A,$$

deci (f_n) este un șir de funcții egal mărginite.

Rezultă de aici că *un șir uniform convergent de funcții continue pe un interval compact este egal mărginit.*

S-a arătat la capitolul despre șiruri că din orice șir mărginit se poate extrage un subșir convergent (Lema lui Cesàro). Are loc o teoremă asemănătoare pentru șiruri de funcții, dacă înlocuim proprietatea de mărginire a șirurilor de numere cu proprietatea de egală mărginire și egală continuitate a șirurilor de funcții și convergența șirurilor de numere cu convergența uniformă a șirurilor de funcții:

Teorema (Arzela). Fie $I = [a, b]$ un interval compact. Din orice șir (f_n) de funcții definite pe I, egal continue și egal mărginite, se poate extrage un subșir $(f_{n_p})_{p \in N}$ uniform convergent pe I.

Nu dăm demonstrația acestei teoreme.

§ 4. Serii de funcții

1. Convergența simplă și uniformă

Fie A o mulțime oarecare și $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un șir de funcții reale definite pe A. Putem considera seria de funcții

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$$

formată din termenii șirului de funcții (f_n), despărțite între ele prin semnul $+$. Pentru fiecare punct $a \in A$, să considerăm seria de numere

$$f_1(a) + f_2(a) + \cdots + f_n(a) + \cdots$$

formată cu valorile funcțiilor din șirul (f_n) în punctul a.

O serie de funcţii este deci echivalentă cu o familie de serii de numere, şi anume pentru fiecare punct din A, cîte o serie de numere. Vom însemna prescurtat o serie de funcţii astfel:

$$\sum f_n \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ sau } \sum_{n \in N} f_n \text{ sau } \sum_{n} f_n.$$

Putem aplica seriilor de funcţii atît consideraţiile făcute asupra seriilor de numere, cît şi consideraţiile făcute asupra şirurilor de funcţii.

Să considerăm, ca şi pentru seriile de numere, sumele parţiale ale seriei de funcţii $\sum_n f_n$:

$$S_1 = f_1$$
$$S_2 = f_1 + f_2$$
$$S_3 = f_1 + f_2 + f_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

În acest caz, sumele parţiale sînt funcţii definite pe A. Vom spune că seria de funcţii $\sum_n f_n$ este convergentă într-un punct $a \in A$, dacă şirul sumelor parţiale (S_n) este un şir de funcţii convergent în punctul a.

Dacă seria f_n este convergentă în punctul $a \in A$, vom spune că a este *punct de convergenţă* al seriei.

A spune că a este punct de convergenţă al seriei $\sum_n f_n$ înseamnă a spune că şirul de numere $(S_n(a))$ este convergent. Dar $S_n(a)$ sînt sumele parţiale ale seriei de numere

$$f_1(a) + f_2(a) + \ldots + f_n(a) + \ldots$$

Aşadar:

Seria de funcţii $\sum_n f_n$ este convergentă într-un punct $a \in A$ dacă şi numai dacă seria de numere $\sum_n f_n(a)$ (formată cu valorile în punctul a ale funcţiilor f_n) *este convergentă.*

Vom spune că seria de funcţii $\sum_n f_n$ este absolut convergentă în punctul $a \in A$, dacă seria de numere $\sum_n f_n(a)$ este absolut convergentă.

Mulţimea $N \subset A$ formată din toate punctele de convergenţă ale seriei de funcţii $\sum_n f_n$ se numeşte *mulţimea de convergenţă* a seriei de funcţii $\sum_n f_n$.

Definiţie. **Fie $\sum_n f_n$ o serie de funcţii definite pe A, şi f o funcţie definită pe o submulţime $B \subset A$.**

Vom spune că seria $\sum_n f_n$ este simplu (sau punctual) convergentă pe B către funcția f, dacă șirul sumelor parțiale (S_n) este simplu convergent pe B către f, adică dacă, pentru fiecare $x \in B$, seria de numere $\sum_n f_n(x)$ este convergentă către $f(x)$.

Vom spune că seria $\sum_n f_n$ este uniform convergentă pe B către f, dacă șirul de funcții (S_n) este uniform convergent pe B către f.

Funcția f se numește suma seriei $\sum_n f_n$ pe mulțimea B.

Este util să dăm și altă formă echivalentă definiției de mai sus.

Seria de funcții $\sum_n f_n$ este simplu convergentă pe B către f, dacă, pentru orice $x \in B$, și orice $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon, x)$, astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon, x)$, să avem $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sau

$$|f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dacă N nu depinde de x, ci numai de ε, seria este uniform convergentă pe B către f. În acest caz, afirmația relativă la x trebuie să figureze după afirmația relativă la N:

Seria de funcții $\sum_n f_n$ este uniform convergentă pe B către f, dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ și oricare ar fi $x \in B$, să avem:

$$|f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Exemple. 1) Pentru fiecare număr întreg $n \geqslant 0$, să considerăm funcția f_n definită pe R prin egalitatea $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1 + x^2)^n}$ și să considerăm seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Mulțimea de convergență a acestei serii este toată dreapta. Într-adevăr, fie $x \in R$ un punct oarecare; să considerăm seria de numere

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = x^2 + \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1 + x^2)^n} + \ldots.$$

Aceasta este o serie geometrică cu rația $\dfrac{1}{1 + x^2} \leqslant 1$, deci este convergentă. Dacă $x = 0$, suma seriei este 0. Dacă $x \neq 0$, suma seriei este

$$x^2 \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + x^2}} = \frac{x^2}{\dfrac{x^2}{1 + x^2}} = 1 + x^2.$$

Dacă notăm cu f funcţia definită pe R prin egalităţile

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0, \end{cases}$$

deducem că seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este simplu convergentă pe R către funcţia f. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă pe R, deoarece, pentru fiecare $x \in R$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este formată din numere pozitive.

2) Pentru fiecare număr întreg $n \geqslant 1$, să considerăm funcţia f_n definită pe R prin $f_n(x) = \frac{\sin^n x}{n^2}$, şi seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Această serie este absolut convergentă pe toată dreapta. Într-adevăr, dacă $x \in R$ este un punct oarecare, obţinem seria de numere:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin^2 x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin^n x}{n^2} + \ldots$$

Avem $\left|\frac{\sin^n x}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$ şi, cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha = 2$), deducem din criteriul comparaţiei că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin^n x}{n^2}\right|$ este convergentă, adică seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$ este absolut convergentă.

Se va arăta că seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe R.

3) Pentru fiecare $n \in N$, fie f_n funcţia definită pe R prin egalitatea $f_n(x) = \cos^n x$. Să considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Pentru $x = k\pi$ (k întreg), obţinem seria de numere

$$\sum_n f_n(k\pi) = \cos k\pi + \cos^2 k\pi + \ldots + \cos^n k\pi + \ldots$$

Pentru k par, obţinem seria $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$
Pentru k impar, obţinem seria $-1 + 1 - 1 + \ldots$
În ambele cazuri, seria este divergentă.
Pentru $x \neq k\pi$, seria este însă absolut convergentă, cum se poate constata aplicînd criteriul rădăcinii a lui Cauchy:

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|\cos x|} = |\cos x| < 1.$$

Mulţimea de convergenţe a acestei serii este deci $R - \{k\pi\}_{k \in Z}$.

4) Pentru fiecare $n \in N$ să considerăm funcția f_n definită pe R prin egalitatea $f_n(x) = \frac{e^{n|x|}}{n}$, și seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Această serie nu este absolut convergentă în nici un punct. Într-adevăr, dacă $x \in R$ este oarecare, obținem seria de numere

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{e^{|x|}}{1} + \frac{e^{2|x|}}{2} + \frac{e^{3|x|}}{3} + \ldots + \frac{e^{n|x|}}{n} + \ldots$$

și cum $e^{n|x|} > 1$, avem $\frac{e^{n|x|}}{n} > \frac{1}{n}$; termenii acestei serii sînt mai mari decît termenii corespunzători ai seriei armonice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă. Din criteriul comparației, deducem că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n|x|}}{n}$ este divergentă.

Mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este vidă.

5) Fie (a_n) un șir de numere și pentru fiecare n să considerăm funcția constantă $f_n(x) = a_n$ definită pe o mulțime A. Dacă seria numerică $\sum a_n$ este convergentă, atunci seria de funcții $\sum f_n$ este uniform convergentă pe A.

2. Restul seriei

Să considerăm seria de funcții definite pe o mulțime A:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k = f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+p} + \ldots$$

Această serie se numește restul de rang n al seriei $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$. Dacă restul de rang n este o serie convergentă pe A, vom nota cu R_n suma sa. R_n va fi numit de asemenea restul de ordinul n al seriei $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$.

Propoziție. O serie de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ definite pe A este convergentă (simplu sau uniform) pe A, dacă și numai dacă restul său de orice rang este convergent (simplu sau uniform) pe A.

Într-adevăr, să notăm cu

$$S_m = f_1 + f_2 + \ldots + f_m$$

sumele parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ și cu

$$\sigma_p = f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+p}$$

sumele parţiale ale restului de ordin n. Avem

$$S_{n+p} = S_n + \sigma_p.$$

Din această egalitate deducem că şirul de funcţii $(S_{n+p})_{1\leqslant p<\infty}$ este simplu (sau uniform) convergent pe A, dacă şi numai dacă şirul de funcţii $(\sigma_p)_{1\leqslant p<\infty}$ este simplu (sau uniform) convergent pe A. Adică seria $\sum_n f_n$ este simplu (sau uniform) convergentă pe A, dacă şi numai dacă restul de ordin n este o serie simplu (sau uniform) convergentă pe A.

O b s e r v a ţ i i . 1°. Din demonstraţie rezultă că, dacă un singur rest este convergent (simplu sau uniform) pe A, atunci seria este convergentă (simplu sau uniform) pe A. Rezultă atunci că orice rest este convergent (simplu sau uniform) pe A.

2°. Dacă notăm cu f suma seriei f_n şi cu R_n suma restului de rang n, rezultă atunci că avem

$$f = S_n + R_n.$$

P r o p o z i ţ i e. Fie $\sum_n f_n$ o serie de funcţii convergentă pe A. Seria este simplu (sau uniform) convergentă pe A către o funcţie f, dacă şi numai dacă şirul (R_n) al resturilor este un şir de funcţii simplu (sau uniform) convergent către 0 pe A.

Într-adevăr, din egalitatea $f = S_n + R_n$, deducem

$$f - S_n = R_n.$$

Atunci, conform definiţiei, seria este simplu (sau uniform) convergentă pe A către f, dacă şi numai dacă şirul (S_n) al sumelor parţiale este simplu (sau uniform) convergent pe A către f, adică dacă şi numai dacă $(f - S_n) = (R_n)$ este simplu (sau uniform) convergent către 0 şi A.

Exemplu. Să considerăm funcţiile $f_n : R \to R$ definite astfel:

$$f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \text{ şi seria de funcţii } \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Fie x un punct oarecare din R. Să considerăm restul R al seriei. Seria de numere

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \dots .$$

fiind alternată, iar şirul termenilor fiind descrescător şi convergent către 0, diferenţa $S_n(x) - S(x)$ este mai mică decît termenul

$$|u_{n+1}| = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Cum

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x).$$

avem

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x^2}{1+(1+n)x^2+\ldots+x^{2n+2}} \leqslant \frac{x^2}{(1+n)x^2} \leqslant \frac{1}{1+n}.$$

Deoarece șirul $\left(\frac{1}{1+n}\right)$ are limita zero, șirul resturilor (R_n) este uniform convergent către 0 pe R, și deci seria este uniform convergentă pe R. Seria este de asemenea absolut convergentă pe R, deoarece s-a arătat că seria

$$\sum |f_n(x)| = \sum \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

este convergentă.

3. Criterii de convergență uniformă

Aceste criterii se deduc din cele corespunzătoare de la șirurile de funcții combinate cu cele de la seriile de numere.

Criteriul I (Cauchy). O serie de funcții $\sum f_n$ definite pe A, este uniform convergentă pe A, dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ și $p \geqslant 1$ și oricare ar fi $x \in A$, să avem

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Într-adevăr, dacă notăm cu (S_n) sumele parțiale ale seriei, avem

$$S_{n+p} - S_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+p}.$$

Seria este uniform convergentă pe A, dacă și numai dacă șirul de funcții (S_n) este uniform convergent pe A; după criteriul lui Cauchy pentru șiruri de funcții, șirul (S_n) este uniform convergent pe A, dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricît ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$, $p \geqslant 1$ și oricare ar fi $x \in A$, avem:

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon,$$

adică

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Exemplu. Dacă $f_n(x) = u_n$ este o funcție constantă definită pe R și dacă seria de numere $\sum u_n$ este convergentă, atunci seria de funcții $\sum_n f_n$ este uniform convergentă pe R.

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece seria $\sum u_n$ este convergentă, există $N(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$, să avem

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Atunci, oricare ar fi $x \in R$, $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$, avem

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

deci seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe R.

Din criteriul lui Cauchy vom deduce alt citeriu foarte util în aplicaţii.

Criteriul II. Fie $\sum f_n$ şi $\sum \varphi_n$ două serii de funcţii definite pe A. Dacă avem

$$|f_n(x)| \leqslant \varphi_n(x), \text{ pentru orice } n \in N \text{ şi orice } x \in A$$

şi dacă seria $\sum \varphi_n$ este uniform convergentă pe A, atunci şi seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe A.

Fie $\varepsilon > 0$. Aplicînd seriei $\sum \varphi_n$ criteriul precedent de convergenţă uniformă, găsim un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$ şi oricare ar fi $x \in A$ să avem

$$\varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots + \varphi_{n+p}(x) < \varepsilon.$$

Atunci, pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$, $p \geqslant 1$ şi $x \in A$ avem

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \ldots$$
$$\ldots + |f_{n+p}(x)| \leqslant \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots + \varphi_{n+p}(x) < \varepsilon$$

şi deci, conform primului criteriu de convergenţă uniformă, seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe A.

Criteriul II se aplică adesea în cazul particular al următorului:

Corolar. Fie $\sum f_n$ o serie de funcţii definite pe A şi $\sum a_n$ o serie convergentă de numere pozitive. Dacă avem

$$|f_n(x)| \leqslant a_n, \text{ pentru orice } n \text{ şi orice } x \in A,$$

atunci seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe A.

În adevăr, punînd $\varphi_n(x) = a_n$, seria de funcţii constante $\sum \varphi_n$ este uniform convergentă.

Observaţie. Din acest corolar deducem că este suficient să majorăm o serie de funcţii printr-o serie convergentă de numere, pentru a deduce că seria de funcţii este uniform convergentă.

Exemple. 1) Fie seria de funcţii $\sum_n f_n$, unde pentru fiecare $n \in N$, funcţia f_n este definită pe R prin $f_n(x) = \dfrac{\sin^n x}{x^2}$. Pentru orice $x \in R$ şi orice $n \in N$ avem

$$\frac{|\sin^n x|}{n^2} < \frac{1}{n^2}.$$

Cum seria de numere $\sum \frac{1}{n^2}$ este convergentă, deducem că seria de funcții $\sum f_n$ este uniform convergentă pe R.

2) Pentru fiecare $n \in N$ să considerăm funcția f_n definită pe R prin $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, și să considerăm seria de funcții $\sum f_n$. Această serie este convergentă pe $(1, +\infty)$, deoarece dacă $x > 1$, obținem seria armonică generalizată, cu exponentul $x > 1$:

$$\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots .$$

Pentru $x < 1$, seria este divergentă. Dacă $1 < a < +\infty$, seria este uniform convergentă pe $(a, +\infty)$, deoarece dacă $x \geqslant a$, atunci $n^x \geqslant n^a$, deci $\frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a}$, și seria $\sum_n \frac{1}{n^a}$ este convergentă.

4. Continuitatea, integrabilitatea și derivabilitatea seriilor uniform convergente.

Teorema 1*. Fie $\sum f_n$ o serie de funcții, uniform convergentă pe o mulțime* $A \subset R$, către o funcție f. Dacă toate funcțiile f_n sînt continue într-un punct $x_0 \in A$ (sau pe A), atunci și funcția sumă f este continuă în x_0 (respectiv pe A).

În adevăr, sumele parțiale $S_n = f_1 + \ldots + f_n$ sînt funcții continue în x_0 (respectiv pe A), iar șirul (S_n) converge uniform pe A către f. Se aplică apoi teorema corespunzătoare de la șirurile de funcții.

Teorema 2. Fie $\sum f_n$ o serie de funcții, uniform convergentă pe un interval $[a, b]$ către o funcție f. Dacă toate funcțiile f_n sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci:

1) **funcția f este integrabilă pe $[a, b]$,**

2) **seria integralelor $\sum \int_a^b f_n \, dx$ este convergentă și**

$$\sum \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b f \, dx.$$

În adevăr, sumele parțiale $S_n = f_1 + \ldots + f_n$ sînt funcții integrabile pe $[a, b]$, iar șirul (S_n) converge uniform către f. Din teorema de integrare termen cu termen a șirurilor de funcții rezultă că f este integrabilă pe $[a, b]$, că șirul integralelor $\left(\int_a^b S_n \, dx\right)$ este convergent și

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b S_n \, dx = \int_a^b f \, dx.$$

* A poate fi orice spațiu topologic.

Dar

$$\int_a^b S_n\,dx = \int_a^b f_1\,dx + \ldots + \int_a^b f_n\,dx,$$

deci sumele parţiale ale seriei $\sum \int_a^b f_n\,dx$ converg către $\int_a^b f\,dx$, adică

$$\sum \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

Observaţie. Deoarece $f = \sum f_n$, egalitatea precedentă se scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,dx,$$

iar teorema precedentă se numeşte teorema de integrare termen cu termen a seriilor de funcţii.

Teorema 3. Fie $\sum f_n$ o serie de funcţii derivabile pe un interval I. Dacă:

1) seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe I către o funcţie f,

2) seria derivatelor $\sum f_n'$ este uniform convergentă pe I către o funcţie g,

atunci f este derivabilă pe I şi $f' = g$.

Considerăm sumele parţiale $S_n = f_1 + \ldots + f_n$ care formează un şir de funcţii derivabile pe I şi uniform convergent către f. Derivatele $S_n' = f_1' + \ldots + f_n'$ sînt sumele parţiale ale seriei derivatelor $\sum f_n'$, deci şirul (S_n') converge uniform către g. Din teorema de derivare termen cu termen a şirurilor de funcţii deducem că f este derivabilă pe I şi că $f' = g$.

Observaţie. Deoarece $f = \sum f_n$ şi $g = \sum f_n'$, egalitatea $f' = g$ se scrie

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n',$$

iar teorema precedentă se numeşte teorema de derivare termen cu termen a seriilor de funcţii.

În cazul intervalelor mărginite avem teorema următoare:

Teorema 4. Fie I un interval mărginit şi $\sum f_n$ o serie de funcţii derivabile pe I. Dacă:

1) seria $\sum f_n$ este convergentă într-un punct $x_0 \in I$,

2) seria derivatelor $\sum f_n'$ este uniform convergentă pe I către o funcţie g,

atunci:

(i) seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe I către o funcţie f;

(ii) funcţia f este derivabilă şi $f' = g$.

În adevăr sumele parțiale $S_n = f_1 + \ldots + f_n$ formează un șir de funcții derivabile, convergent în x_0, iar șirul derivatelor $(S_n') = (f_1' + \ldots + f_n')$ este uniform convergent către g. Se aplică atunci teorema corespunzătoare de la șirurile de funcții.

Teorema 5. Suma unei serii uniform convergente $\sum g_n$ de funcții derivate pe un interval oarecare I este o funcție derivată.

Ca și în cazul teoremelor precedente se aplică șirului sumelor parțiale $S_n = g_1 + \ldots + g_n$ teorema corespunzătoare de la șirurile de funcții.

Acest corolar se poate enunța și astfel:

Dacă seria $\sum g_n$ este uniform convergentă pe I către o funcție g și dacă funcțiile g_n au primitive pe I, atunci și g are primitive pe I.

5. Operații cu serii de funcții

Dacă A_1 este mulțimea de convergență a seriei $\sum f_n$ și f suma acestei serii, iar A_2 este mulțimea de convergență a seriei $\sum g_n$ și g suma sa, atunci:

1) *Seria sumă $\sum (f_n + g_n)$ este convergentă pe $A_1 \cap A_2$ și are suma $f + g$.*

2) *Seria $\sum \alpha f_n$ este convergentă pe A_1 și are suma αf.*

Aceste afirmații se demonstrează luînd seriile de numere $\sum f_n(x)$ și $\sum g_n(x)$ și folosind proprietățile seriilor de numere.

§ 5. Serii de puteri

1. Definiția seriilor de puteri

Numim o serie de puteri, o serie de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ definite pe R, unde fiecare funcție f_n este produsul dintre un număr a_n și o funcție putere $x \to x^n$, $f_n(x) = a_n x^n$, $(n \in N)$.

Așadar, o serie de puteri are forma:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \text{ pentru } x \in R,$$

unde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sînt numere. Numărul a_n se numește coeficientul termenului de rang n. O serie de puteri se scrie prescurtat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sau $\sum a_n x^n$.

Toate rezultatele privind seriile de funcţii sînt valabile, evident, şi pentru seriile de puteri.

În studiul seriilor de puteri, ne interesează în primul rînd mulţimea de convergenţă a seriei. Pentru seriile de puteri mulţimea de convergenţă nu este vidă. Ea conţine cel puţin punctul 0, deoarece pentru $x = 0$, seria se scrie

$$a_0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

şi este evident convergentă, suma sa fiind a_0.

Există serii de puteri pentru care mulţimea de convergenţă se reduce numai la 0.

Exemplu. Fie seria de puteri

$$1 + x + 2^2 x^2 + 3^3 x^3 + \ldots + n^n x^n + \ldots.$$

Această serie este convergentă numai în punctul 0. Într-adevăr, fie $x_0 \neq 0$. Să arătăm că seria de numere

$$1 + x_0 + 2^2 x_0^2 + \ldots + n^n x_0^n + \ldots$$

este divergentă. Avem $|n^n x_0^n| = |n x_0|^n$. Dacă $n > \left|\frac{1}{x_0}\right|$, atunci $n|x_0| > 1$ şi deci $(|nx_0|)^n > 1$.

Rezultă că şirul termenilor seriei $(n^n x_0^n)$ nu este convergent către 0, şi deci seria este divergentă.

Este posibil ca mulţimea de convergenţă a unei serii să fie toată dreapta R.

Exemplu. Fie seria de puteri

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Fie $x_0 \in R$ un punct oarecare. Să considerăm seria de numere

$$1 + \frac{x_0}{1!} + \frac{x_0^2}{2!} + \ldots + \frac{x_0^n}{|n!|} + \ldots$$

şi să-i aplicăm criteriul raportului; avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x_0^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x_0^n|} = \frac{|x_0|}{n+1}.$$

Şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita $k = 0 < 1$, deci seria de numere este absolut convergentă.

Cum x_0 a fost arbitrar, rezultă că seria de puteri este convergentă în orice punct de pe dreaptă, adică mulţimea de convergenţă a seriei este toată dreapta.

2. Raza de convergență

Despre mulțimea de convergență a unei serii de puteri ne dă informații teorema următoare:

Teorema I a lui Abel. Pentru orice serie de puteri $\sum a_n x^n$ există un număr R astfel ca $0 \leqslant R \leqslant +\infty$ și astfel încît:

1) Seria este absolut convergentă pe intervalul deschis $(-R, R)$.
2) Pentru orice x, astfel ca $|x| > R$, seria este divergentă.

Pentru orice număr $0 < r < R$, seria este uniform convergentă pe intervalul închis $[-r, r]$.

Numărul R care îndeplinește condițiile 1 și 2 se numește raza de convergență a seriei de puteri, iar intervalul $(-R, R)$ se numește intervalul de convergență al seriei de puteri.

Demonstrație. Dacă seria de puteri este convergentă numai în punctul 0, luînd $R = 0$, teorema este demonstrată.

Vom presupune deci că mulțimea de convergență conține puncte diferite de 0. Fie atunci $x_0 \neq 0$ un punct, în care seria este convergentă, adică astfel ca seria de numere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ să fie convergentă. Termenii acestei serii formează un șir $(a_n x_0^n)$ convergent către 0, deci acest șir este mărginit. Există atunci un număr M astfel încît să avem:

$$|a_n x_0^n| < M \text{ pentru } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Fie x un punct oarecare astfel ca $|x| < |x_0|$. Avem

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Cum $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ este convergentă și, conform criteriului comparației, rezultă că și seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

este convergentă, adică seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este *absolut convergentă*.

Așadar, dacă $x_0 \neq 0$ este un punct de convergență al seriei, atunci orice punct x pentru care $|x| < |x_0|$, este punct de convergență *absolută* a

seriei. Rezultă că mulţimea de convergenţă conţine întreg intervalul $(-|x_0|, |x_0|)$.

De aici deducem că dacă x_1 este un punct de divergenţă al seriei, atunci orice punct x pentru care $|x| > |x_1|$ este punct de divergenţă al seriei.

Într-adevăr, dacă ar exista un punct x_0, cu $|x_0| > x_1$ în care seria este convergentă, atunci, după cele demonstrate mai sus, seria ar fi convergentă şi în x_1 (deoarece $|x_1| < |x_0|$), ceea ce este fals.

Să notăm cu A mulţimea de convergenţă a seriei de puteri.

Avem evident $0 \in A$. Luăm $R = \sup A$. Avem $R > 0$. Să arătăm că R este raza de convergenţă a seriei, adică R îndeplineşte condiţiile 1 şi 2.

1) Fie $x \in (-R, R)$. Avem $|x| < R$. Există deci un punct $x_0 \in A$ cuprins între $|x|$ şi R, $|x| < x_0 < R$. Cum x_0 este punct de convergenţă al seriei, din cele de mai sus rezultă că seria este absolut convergentă în x, deoarece $|x| < x_0$.

2) Dacă $R = +\infty$, inegalitatea $|x| > R$ nu are sens, deci în acest caz condiţia 2 din enunţul teoremei este de prisos.

Să presupunem deci $R < +\infty$. Fie x un punct astfel ca $|x| > R$. Dacă x ar fi punct de convergenţă, atunci orice punct y, astfel ca $R < y < |x|$, ar fi punct de convergenţă, deci $y \in A$, deci R n-ar mai fi marginea superioară a mulţimii A. Am ajunge la o contradicţie. Aşadar, dacă $|x| > R$, seria este divergentă în punctul x.

Astfel, numărul R definit mai sus este raza de convergenţă a seriei.

Rămîne de demonstrat ultima parte a teoremei. Fie r un număr astfel ca $0 < r < R$. Urmează că r este un punct de convergenţă absolută a seriei, adică seria de numere pozitive $\sum |a_n r^n| = \sum |a_n| r^n$ este convergentă.

Pentru orice $x \in [-r, r]$, avem $|x| < r$, şi deci

$$|a_n x^n| = |a_n| |x^n| < |a_n| r^n.$$

Conform criteriului II de convergenţă uniformă a seriilor de funcţii, rezultă că seria $\sum_n a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-r, r]$. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Observaţie. În cazul cînd $0 < R < +\infty$, teorema lui Abel nu spune cum se comportă seria de puteri în punctele $-R$ şi R, extremităţile intervalului de convergenţă. Se poate întîmpla ca unul din aceste puncte sau ambele să fie puncte de divergenţă, sau unul din ele sau ambele să fie puncte de convergenţă, sau, în sfîrşit, seria să fie oscilantă în aceste puncte.

Dacă într-unul din punctele $-R$ sau R seria este absolut convergentă, atunci seria este absolut convergentă şi în celălalt punct.

Într-adevăr, pentru ambele serii, $\sum_n a_n(-R)^n$ și $\sum_n a_n R^n$, seria modulelor este aceeași $\sum_n |a_n| R^n$, deci dacă una este absolut convergentă, atunci și cealaltă este absolut convergentă.

Rezultă că dacă în unul din punctele $-R$ sau R seria este divergentă în celălalt punct seria nu este absolut convergentă.

Exemple. 1) Seria geometrică

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

este absolut convergentă pentru $|x| < 1$, și divergentă pentru $|x| > 1$. Aici raza de convergență este $R = 1$. Pentru $x = 1$, obținem seria de numere

$$1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

care este divergentă și are suma $+\infty$. Pentru $x = -1$, obținem seria de numere pozitive

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots$$

care este oscilantă.

Așadar mulțimea de convergență este $A = (-1, 1)$.

2) Fie seria

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

Să arătăm că $R = 1$. Fie $x_0 > 0$; să considerăm seria de numere pozitive

$$\frac{x_0}{1} + \frac{x_0^2}{2} + \ldots + \frac{x_0^n}{n} + \ldots$$

Să-i aplicăm criteriul lui d'Alembert. Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x_0^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{n_0^n} = \frac{n}{n+1} x_0.$$

Limita acestui șir este $k = x_0$. Dacă $x_0 < 1$, seria este convergentă; dacă $x_0 > 1$, seria este divergentă. Așadar $R = 1$.

Pentru $x = 1$, obținem seria

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

care este divergentă (seria armonică). Pentru $x = -1$, obținem seria

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots$$

care este convergentă, deoarece se obţine din seria armonică alternată prin înmulţire cu -1.

Mulţimea de convergenţă a seriei este deci $[-1, 1)$.

Să observăm că în -1 seria este semiconvergentă, iar pe $(-1, 1)$, seria este absolut convergentă.

3) Seria

$$-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\ldots$$

are mulţimea de convergenţă $(-1, +1]$. În punctul $+1$ seria este semiconvergentă, iar pe $(-1, 1)$ seria este absolut convergentă.

4) Seria

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^\alpha}+\frac{x^3}{3^\alpha}+\ldots+\frac{x^n}{n^\alpha}+\ldots$$

unde $\alpha > 1$, este absolut convergentă pe $[-1, 1]$.

Într-adevăr, fie $x_0 > 0$ un punct oarecare; să considerăm seria de numere pozitive

$$\frac{x_0}{1^\alpha}+\frac{x_0^2}{2^\alpha}+\ldots+\frac{x_0^n}{n^\alpha}+\ldots$$

Să aplicăm criteriul lui d'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\cdot\frac{n^\alpha}{x_0^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha x_0.$$

Şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ are limita $k = x_0$. Dacă $x_0 < 1$, seria este convergentă, şi dacă $x_0 > 1$, seria este divergentă. Aşadar $R = 1$.

Pentru $x = 1$, obţinem seria

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$$

care este convergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha > 1$). Pentru $x = -1$, obţinem seria

$$-\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$$

care este absolut convergentă, deoarece seria modulelor este seria armonică generalizată de mai sus. Aşadar, mulţimea de convergenţă este $A = [-1 + 1]$ şi anume, toate punctele acestei mulţimi sînt puncte de convergenţă absolută:

3. Teorema lui Cauchy-Hadamard

Teorema lui Abel afirmă doar existenţa razei de convergenţă, dar nu dă nici o metodă de a o calcula. O asemenea metodă este dată de teorema următoare, a cărei demonstraţie foloseşte criteriul lui Cauchy.

Teorema lui Cauchy şi Hadamard. Fie $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri şi R raza de convergenţă. Să notăm $\omega = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci

$$R = \frac{1}{\omega} \text{ dacă } 0 < \omega \leqslant +\infty \text{ şi } R = +\infty \text{ dacă } \omega = 0.$$

Demonstraţie. Fie x_0 un punct oarecare; să considerăm seria de numere $\sum_n |a_n|\,|x_0|^n$. Termenii acestei serii sînt $u_n = |a_n|\,|x_0|^n$. Să-i aplicăm criteriul lui Cauchy. Avem

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x_0|,$$

şi deci

$$\overline{\lim_n}\sqrt[n]{u_n} = \overline{\lim_n}\sqrt[n]{|a_n|}\,|x_0| = \omega\,|x_0|.$$

Dacă $\omega = 0$, atunci $\overline{\lim_n}\sqrt[n]{u_n} = 0 < 1$, deci seria $\sum a_n x_0^n$ este absolut convergentă oricare ar fi x_0, deci $R = +\infty$; dacă $\omega = +\infty$, şi $x_0 \neq 0$, avem $\overline{\lim_n}\sqrt[n]{u_n} = +\infty > 1$, deci seria $\sum a_n x_0^n$ este divergentă pentru orice $x_0 \neq 0$, adică $R = 0$; dacă $0 < \omega < +\infty$, atunci: dacă $|x_0| < \frac{1}{\omega}$ avem $\omega\,|x_0| < 1$, şi deci seria $\sum a_n x_0^n$ este absolut convergentă. Dacă $|x_0| > \frac{1}{\omega}$, luăm un punct x_1 astfel ca $|x_1| > |x_0| > \frac{1}{\omega}$. Atunci $\omega\,|x_0| > 1$, şi deci seria $\sum |a_n|\,|x_0|^n$ este divergentă. Din demonstraţia primei teoreme a lui Abel, rezultă că seria $\sum a_n x_1^n$ este divergentă. Aşadar $R = \frac{1}{\omega}$.

Exemple. 1) $\sum_n x^n$; avem $\sqrt[n]{|a^n|} = 1$, deci $\omega = 1$, şi deci $R = 1$.

2) $\sum \frac{x^n}{n!}$; avem $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$, $\omega = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, deci $R = +\infty$.

3) $\sum_n^n n^n x^n$; avem $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^n} = n$, deci $R = 0$.

În multe cazuri, pentru calculul razei de convergenţă R se poate folosi propoziţia următoare, a cărei demonstraţie foloseşte criteriul lui d'Alembert.

Propoziţie. Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri. Să presupunem că şirul $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ are limită (finită sau infinită). Atunci

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Fie $x_0 \neq 0$ un punct oarecare. Să considerăm seria numerică $\sum |a_n| \, |x_0|^n$ şi să-i aplicăm criteriul lui d'Alembert. Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x_0|.$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty, \text{ oricare ar fi } x_0 \neq 0,$$

deci seria este divergentă pentru orice $x_0 \neq 0$, şi deci $R = +\infty$. Să presupunem acum că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = l > 0$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x_0|}{l}.$$

Dacă $|x_0| < l$ atunci $\frac{|x_0|}{l} < 1$, deci seria este convergentă, iar dacă $|x_0| > l$, atunci $\frac{|x_0|}{l} > 1$, deci seria este divergentă. Deducem că l este raza de convergenţă a seriei.

Observaţie. La criteriul lui d'Alembert se foloseşte raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, în timp ce pentru calculul razei de convergenţă se foloseşte raportul $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Exemplu. Să considerăm seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Avem

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = +\infty, \text{ deci } R = +\infty.$$

4. Continuitatea sumei unei serii de puteri

Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri, A mulţimea sa de convergenţă şi R raza sa de convergenţă. Ştim că $0 \in A$, şi că $(-R, R) \subset A \subset [-R, +R]$. Pentru fiecare $x \in A$, să notăm

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Am obţinut astfel o funcţie $x \to S(x)$ definită pe A; această funcţie este suma seriei de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$ pe mulţimea A.

Vom nota cu S această funcţie.

Observaţie. Trebuie reţinut că suma S a seriei de puteri este o funcţie definită numai pe mulţimea A, deşi funcţiile de puteri din care este formată seria sînt definite pe toată dreapta.

Accentuăm acest lucru, deoarece s-ar putea ca funcţia sumă S să se poată exprima prin operaţii asupra funcţiilor elementare, operaţii care au un sens şi pentru puncte care nu aparţin lui A. În acest caz trebuie să facem distincţie între suma S şi funcţia definită prin aceste operaţii.

Exemplu. Să considerăm seria de puteri

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Mulţimea de convergenţă este $A = (-1, 1)$. Este o serie geometrică cu raţia x. Dacă $|x| < 1$, s-a arătat că suma acestei serii este $\frac{1}{1-x}$. Aşadar funcţia sumă S este definită pe $(-1, 1)$ prin egalitatea $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Putem scrie

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \text{ pentru } -1 < x < 1.$$

Totuşi, operaţia $\frac{1}{1-x}$ are sens pentru orice $x \neq 1$. Dacă notăm cu f funcţia definită pe $R - \{1\}$, prin $f(x) = \frac{1}{1-x}$, funcţiile S şi f sînt diferite, deoarece au domenii de definiţie diferite; anume, funcţia S este restricţia funcţiei f, la intervalul $(-1, 1)$. De altfel, pentru $|x| > 1$, egalitatea

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

nu mai este adevărată, deoarece seria din membrul drept este divergentă.

Propoziţie. Suma S a unei serii de puteri $\sum a_n x^n$ este o funcţie continuă pe intervalul de convergenţă.

Fie R raza de convergenţă a seriei şi A mulţimea de convergenţă a seriei. Funcţia sumă S a seriei este definită pe A, deci $S(x)$ are sens pentru orice $x \in (-R, R)$.

Fie $x_0 \in (-R, R)$ un punct oarecare; să arătăm că funcţia S este continuă în x_0. Avem $-R < x_0 < R$, deci există un număr r pozitiv, astfel că $-R < -r < x_0 < r < R$. Dar pe intervalul închis $[-r, r]$ seria este *uniform convergentă*, şi deoarece termenii seriei sînt funcţii continue, rezultă că suma ei S este o funcţie continuă pe $[-r, r]$; în particular este continuă în x_0.

Cum x_0 a fost arbitrar în $(-R, R)$, rezultă că funcţia S este continuă pe tot intervalul $(-R, R)$.

Corolar. Suma S a unei serii de puteri $\sum a_n x^n$ este uniform continuă pe orice interval compact conţinut în intervalul de convergenţă.

Într-adevăr, dacă $I = [a, b]$ este un interval compact conţinut în intervalul de convergenţă, funcţia S este continuă pe I, deci uniform continuă.

O b s e r v a ţ i e. Dacă seria este convergentă şi în punctul $-R$ sau în punctul R, atunci funcţia S este definită şi în $-R$ sau în R.

Propoziţia de mai sus nu spune dacă funcţia S este în acest caz continuă în $-R$ sau R. Acest lucru va reieşi din teorema următoare:

T e o r e m a II a l u i A b e l. Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri şi R raza sa de convergenţă. Dacă seria este convergentă în punctul R (sau în punctul $-R$), atunci suma S a seriei este o funcţie continuă în punctul R (sau în punctul $-R$).

Demonstraţie. Vom demonstra teorema numai pentru cazul cînd seria este convergentă în R. Pentru cazul convergenţei în $-R$, demonstraţia se face la fel.

Presupunem, aşadar, că seria de numere

$$a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \ldots + a_n R^n + \ldots$$

este convergentă.

Să arătăm în acest caz că seria $\sum a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[0, R]$. Fie $\varepsilon > 0$; deoarece seria de numere $\sum a_n R^n$ este convergentă, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$, să avem

$$| a_{n+1} R^{n+1} + a_{n+2} R^{n+2} + \ldots + a_{n+p} R^{n+p} | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Să notăm cu S_n sumele parţiale ale acestei serii. Pentru a simplifica scrisul, vom nota $\sigma_p = S_{n+p} - S_n$, pentru $p \geqslant 1$. Condiţia de mai sus se scrie atunci

$$| \sigma_p | < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru orice } p \geqslant 1.$$

Să remarcăm de asemenea că avem

$$a_{n+1} R^{n+1} = S_{n+1} - S_n = \sigma_1$$

$$a_{n+2} R^{n+2} = S_{n+2} - S_{n+1} = (S_{n+2} - S_n) - (S_{n+1} - S_n) = \sigma_2 - \sigma_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n+p} R^{n+p} = S_{n+p} - S_{n+p-1} = (S_{n+p} - S_n) - (S_{n+p-1} - S_n) = \sigma_p - \sigma_{p-1}.$$

Fie un punct oarecare $x \in [0, R]$; să notăm $y = \frac{x}{R}$. Avem $x = Ry$ şi $0 \leqslant y \leqslant 1$. Atunci, pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$, avem

$$a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots + a_{n+p} x^{n+p} = a_{n+1} R^{n+1} y^{n+1} + a_{n+2} R^{n+2} y^{n+2} + \ldots$$

$$\ldots + a_{n+p} R^{n+p} y^{n+p} = \sigma_1 y^{n+1} + (\sigma_2 - \sigma_1) y^{n+2} + \ldots + (\sigma_p - \sigma_{p-1}) y^{n+p} =$$

$$= \sigma_1 y^{n+1} + \sigma_2 y^{n+2} - \sigma_1 y^{n+2} + \ldots + \sigma_p y^{n+p} - \sigma_{p-1} y^{n+p} =$$

$$= \sigma_1 y^{n+1}(1 - y) + \sigma_2 y^{n+2}(1 - y) + \ldots + \sigma_{p-1} y^{n+p-1}(1 - y) + \sigma_p y^{n+p} =$$

$$= y^{n+1}(1 - y)(\sigma_1 + \sigma_2 y + \sigma_3 y^2 + \ldots + \sigma_{p-1} y^{p-2}) + \sigma_p y^{n+p}.$$

Ţinînd seama că $0 \leqslant y^{n+1} \leqslant 1$, $a < y^{n+p} \leqslant 1$, şi $|\sigma_i| < \frac{\varepsilon}{2}$, $i = 1, 2, \ldots$ deducem

$$|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots + a_{n+p}x^{n+p}| \leqslant$$

$$\leqslant (1-y)(|\sigma_1| + |\sigma_2|y + \ldots + |\sigma_{p-1}|y^{p-2}) + |\sigma_p| \leqslant$$

$$\leqslant (1-y)\frac{\varepsilon}{2}(1 + y + \ldots + y^{p-2}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(1-y)\frac{1-y^{p-1}}{1-y} + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}(1 - y^{p-1}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Conform criteriului lui Cauchy pentru serii de funcţii, deducem că seria $\sum a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[0, R]$. Deoarece termenii seriei sînt funcţii continue pe $[0, R]$, rezultă că şi suma S a seriei este o funcţie continuă pe $[0, R]$ şi în particular S este continuă în R.

O b s e r v a ţ i e. Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri, R — raza sa de convergenţă şi S — suma sa. Dacă se ştie că seria este convergentă în R, şi dacă se cunosc valorile funcţiei pe $(-R, R)$, atunci, funcţia S fiind continuă în R, avem

$$\lim_{x \to R} S(x) = S(R).$$

În acest fel avem posibilitatea să găsim suma seriei în punctul R, cunoscînd suma sa în interiorul intervalului de convergenţă.

Exemplu. Fie seria

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Aveam $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$. Acest şir are limita 1, deci $R = 1$. Pentru $x = 1$, obţinem seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

care este convergentă.

Pentru $x = -1$ obţinem seria

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots$$

care este divergentă, deoarece se obţine din seria armonică prin înmulţire cu -1. Mulţimea de convergenţă a acestei serii este deci $(-1, 1]$. Se va arăta mai departe că pe intervalul deschis $(-1, 1)$ suma seriei este $\ln(1+x)$:

$$S(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Cum S este continuă în punctul 1, avem

$$S(1) = \lim_{x \to 1} S(x) = \lim_{x \to 1} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Aşadar, suma seriei armonice alternate este $\ln 2$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Acest rezultat ne dă posibilitatea să calculăm cu aproximaţie pe $\ln 2$, însumînd un număr suficient de mare de termeni ai seriei armonice alternate. Dar seria armonică alternată converge „foarte încet", aşa încît, trebuie să însumăm un număr foarte mare de termeni, pentru a obţine cîteva zecimale exacte din reprezentarea numărului $\ln 2$ în fracţie zecimală. Practic, pentru calculul logaritmilor, se folosesc alte serii care converg „mai repede".

5. Operaţii cu serii de puteri

Fie $\sum a_n x^n$ şi $\sum b_n x^n$ două serii de puteri. Suma lor $\sum (a_n + b_n)x^n$ este tot o serie de puteri. Dacă R_1 este raza de convergenţă a seriei $\sum a_n x^n$ şi R_2 raza de convergenţă a seriei $\sum b_n x^n$, atunci:

1) *raza R de convergenţă a seriei sumă* $\sum (a_n + b_n)x^n$ *verifică inegalitatea*

$$R \geqslant \inf(R_1, R_2);$$

2) *raza de convergenţă a seriei* $\alpha \sum a_n x^n = \sum \alpha a_n x^n$, $(\alpha \neq 0)$, *este* R_1.

Într-adevăr, dacă x_0 este un punct oarecare astfel ca $|x_0| < R_1$ şi $|x_0| < R_2$, atunci seriile de numere $\sum a_n x_0^n$ şi $\sum b_n x_0^n$ sînt convergente, deci şi seria $\sum (a_n + b_n)x_0^n$ este convergentă.

Rezultă că seria sumă $\sum (a_n + b_n)\, x^n$ este absolut convergentă, deci $|x_0| \leqslant R$. Cum x_0 a fost ales arbitrar astfel ca $|x_0| < R_1$ şi $|x_0| < R_2$, rezultă că $R \geqslant \inf(R_1, R_2)$.

Observaţie. Este posibil ca $R > \inf(R_1, R_2)$. De exemplu, dacă $R_1 < +\infty$ şi dacă $b_n = -a_n$ pentru fiecare $n \in N$, atunci $R_2 = R_1$ şi $R = +\infty$.

Dacă S_1 este suma seriei $\sum a_n x^n$ şi S_2 este suma seriei $\sum b_n x^n$, şi dacă notăm cu S suma seriei $\sum (a_n + b_n)x^n$, atunci

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x) \text{ pentru orice } |x| < R,$$

cum se poate constata imediat, pentru fiecare punct din $(-R, R)$.

Observaţie. Dacă A_1 este mulţimea de convergenţă a seriei $\sum a_n x^n$, A_2, mulţimea de convergenţă a seriei $\sum b_n x^n$, atunci S_1 este definită pe A_1 şi S_2 este definită pe A_2. Mulţimea A de convergenţă a seriei $\sum (a_n + b_n)\, x^n$ conţine mulţimea $A_1 \cap A_2$.

Suma S a seriei $\sum (a_n + b_n) x^n$ este definită pe A, şi

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x).$$

6. Derivarea seriilor de puteri

Fie (x_n) un şir de numere şi $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\, x_n$.

Din definiţia punctelor limită ale unui şir rezultă că există un subşir $(x_{n_p})_{p\in N}$ convergent către ω.

Să observăm că dacă $(y_{n_k})_{k\in N}$ este un subşir oarecare *convergent* al şirului (x_n), limita sa este mai mică decît ω:

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} \leqslant \overline{\lim_{n}}\, x_n = \omega.$$

Reamintim că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, atunci $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \alpha_n x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Fie acum $\sum\limits_{n-0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Să considerăm seria cu derivatele termenilor acestei serii:

$$a_1 + 2a_2\, x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

Am obţinut tot o serie de puteri, pe care o vom numi seria derivatelor.

Teorema următoare arată legătura dintre mulţimile de convergenţă ale celor două serii, şi dintre sumele lor.

Teoremă. Dacă $\sum a_n x^n$ este o serie de puteri şi S suma sa, atunci:

1) Seria derivatelor are aceeaşi rază de convergenţă.

2) Funcţia S este derivabilă pe intervalul de convergenţă şi derivata S' este egală cu suma seriei derivatelor.

Demonstraţie: 1) Fie R raza de convergenţă a seriei $\sum a_n x^n$. Avem $R = \frac{1}{\omega}$ dacă $\omega \neq 0$ şi $R = +\infty$ dacă $\omega = 0$, unde $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Să calculăm raza de convergenţă a seriei derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Pentru fiecare $x \neq 0$ fixat, seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$ este convergentă dacă şi numai dacă seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, x^n$ este convergentă, deoarece seria a doua se obţine din prima prin înmulţire cu numărul x.

Aşadar, seria de puteri $\sum n\, a_n\, x^{n-1}$ are aceeaşi rază de convergenţă cu seria de puteri $\sum n\, a_n\, x^n$. Pentru ultima serie, coeficientul lui x^n este $n a_n$. Avem $\sqrt[n]{n|\, a_n\,|} = \sqrt[n]{n}\, \sqrt[n]{|\, a_n\,|}$; deoarece şirul $(\sqrt[n]{n})$ are limita 1, rezultă că şirul $(\sqrt[n]{n|\, a_n\,|})$ are aceeaşi limită superioară ca şi şirul $(\sqrt[n]{|\, a_n\,|})$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|\, a_n\,|} = \omega$.

Rezultă că seria $\sum n\, a_n\, x^n$, deci şi seria $\sum n\, a_n x^{n-1}$ are aceeaşi rază de convergenţă R, ca şi seria $\sum a_n\, x^n$.

2) Fie $x_0 \in (-R, R)$, şi fie $r > 0$, astfel ca $r < R$ şi $-r < x_0 < r$. Pe segmentul $[-r, +r]$, seria derivatelor este uniform convergentă către suma $\sigma(x)$. Cum seria $\sum a_n x^n$ este convergentă în x_0, rezultă că ea este uniform convergentă pe $[-r, r]$, că suma sa S este derivabilă pe $[-r, r]$, şi că $S' = \sigma$.

În particular, S' este derivabilă în x_0, şi $S'(x_0) = \sigma(x_0)$.

Cum x_0 a fost arbitrar în $(-R, R)$, rezultă că S este derivabilă pe $(-R, R)$ şi că $S' = \sigma$.

O b s e r v a ţ i e. Dacă punem $S(x) = \sum a_n x^n$ pentru $x \in (-R, R)$, teorema de mai sus spune că pentru a deriva suma unei serii de puteri, putem deriva seria termen cu termen:

$$S'(x) = \sum (a_n x^n)' = \sum n a_n x^{n-1}.$$

Putem acum pleca de la seria $\sum n a_n x^{n-1}$ şi să formăm seria derivatelor termenilor săi $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$. Această serie se numeşte seria derivatelor de ordinul 2. Ea are tot raza de convergenţă R, şi suma sa este derivata σ' a sumei seriei $\sum n a_n x^{n-1}$. Putem considera seria derivatelor de orice ordin şi, repetînd raţionamentul, deducem următoarea:

T e o r e m ă. Dacă $\sum a_n x^n$ este o serie de puteri şi R raza sa de convergenţă, atunci,

1) Seria derivatelor de ordin n are aceeaşi rază de convergenţă R.

2) Suma S a seriei este indefinit derivabilă pe intervalul de convergenţă, şi derivata de ordin n, $S^{(n)}$ este egală cu suma seriei derivatelor de ordin n.

Pe baza acestei teoreme, dacă se cunoaşte suma unei serii, se obţine prin derivare suma seriei derivatelor.

Exemple. 1) Avem:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Atunci

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot x + \ldots + n(n-2)x^{n-3} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1 \text{ etc.}$$

2) Să considerăm seria

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

Această serie este convergentă pentru $|x| < 1$. Să notăm cu f suma sa:

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Prin derivare obţinem:

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x} \text{ pentru } |x| < 1;$$

cum derivata funcţiei $g(x) = -\ln(1-x)$ este $g'(x) = \frac{1}{1-x}$, deducem că $f(x) = g(x) + C$. Pentru $x = 0$, avem

$$f(0) = 0 \text{ şi } g(0) = 0, \text{ deci } C = 0 \text{ şi deci } f(x) = g(x).$$

Aşadar avem

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

3) Dacă în exemplul 1 schimbăm x cu $-x$, obţinem

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \ldots + (-1)^n n x^{n-1} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

$$\frac{2}{(1+x)^3} = 2 - 3 \cdot 2 \cdot x + \ldots + (-1)^n n(n-1)x^{n-2} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1 \text{ etc.}$$

4) Dacă în exemplul 1 punem x^2 în loc de x, obţinem

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1$$

şi prin derivare se obţine suma altor serii convergente pentru $|x| < 1$.

5) De asemenea, dacă în exemplul 3 punem x^2 în loc de x, obţinem

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

6) Să considerăm seria

$$\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Să notăm cu R raza sa de convergenţă şi cu f suma sa.
Prin derivare obţinem seria

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots$$

pentru care $R = 1$ şi care are suma $\frac{1}{1-x^2}$. Rezultă că şi seria dată are raza de convergenţă $R = 1$, şi suma sa f are derivata $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Cum funcţia $g(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1+x}$ are aceeaşi derivată, $g'(x) = \frac{1}{1-x^2}$, rezultă că $f = g + C$; dar pentru $x = 0$, avem $f(0) = 0$ şi $g(0) = 0$, deci $C = 0$. Urmează că $f(x) = g(x)$, şi deci

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \text{ pentru } |x|<1.$$

7) Exemplul 6 se poate obţine şi astfel: să considerăm seria de la exemplul 2

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Să schimbăm pe x cu $-x$. Obţinem

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Scăzînd prima serie din ultima, obţinem

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right) \text{ pentru } |x| < 1.$$

Această egalitate, valabilă pentru $|x| < 1$, ne permite să calculăm logaritmul oricărui număr. Fie, într-adevăr, $y > 0$ un număr real oarecare. Să găsim un număr x, astfel ca

$$\frac{1+x}{1-x} = y. \text{ Obţinem } x = \frac{y-1}{y+1}. \text{ Avem } |x| < 1$$

şi deci

$$\ln y = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{(y+1)^3} + \ldots + \frac{1}{2_{n+2}}\frac{(y-1)^{2n+1}}{(y+1)^{2n+1}} + \ldots\right)$$

Seria din paranteză este „foarte repede" convergentă, aşa încît, însumînd un număr mic de termeni, se obţin destule zecimale exacte ale lui $\ln y$.
Acesta este modul în care se calculează tablele de logaritmi.

8) Să reluăm seria de la 5:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \text{ pentru } |x|<1.$$

Să considerăm seria

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Seria derivatelor acesteia este seria de mai sus, deci seria aceasta are raza de convergență $R = 1$. Suma sa f este derivabilă și avem $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pentru $|x| < 1$. Dar funcția $g(x) = \operatorname{arctg} x$ are aceeași derivată, deci $f(x) = \operatorname{arctg} x + C$ pentru $|x| < 1$. Cum pentru $x = 0$ avem $f(0) = 0$ și $\operatorname{arctg} 0 = 0$, rezultă $C = 0$ și deci

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Să observăm că pentru $x = 1$, obținem seria

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

care este convergentă, cum se verifică ușor folosind criteriul lui Leibniz.

Deoarece $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, din teorema 2 a lui Abel obținem

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Această serie poate servi pentru calculul numărului π, dar seria este „încet convergentă", așa încît în practică se folosesc alte serii „mai repede" convergente.

9) Să considerăm seria

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Am văzut că pentru această serie avem $R = +\infty$. Să însemnăm cu $f(x)$ suma sa. Prin derivare obținem

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = f(x).$$

Funcția $f(x)$ are proprietatea că prin derivare se reproduce. Singurele funcții cu această proprietate sînt funcțiile

$$f(x) = Ce^x,$$

deoarece, dacă $f' = f$, atunci $\frac{f'}{f} = 1$, sau $(\ln f)' = 1$, de unde $\ln f = x + \ln C$, de unde $f = Ce^x$. Dar pentru $x = 1$, obținem $f(1) = 1$, și $Ce^1 = 0$, și deci $C = 1$. Așadar $f(x) = e^x$, și deci

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Pentru $x = 1$, obținem

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Această serie servește pentru calculul numărului e.

Aici avem al treilea mod de a defini numărul e, ca sumă a seriei de mai sus, celelalte două moduri fiind: ca limită a şirului $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ şi ca bază a funcţiei exponenţiale care în 0 are derivata 1.

10) Să considerăm seria

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!} x^n + \ldots,$$

unde k este un număr real oarecare. Această serie se numeşte *seria binomială*. Aplicînd criteriul lui d'Alembert se deduce că seria are raza de convergenţă $R = 1$.

Fie f suma acestei serii pe intervalul $(-1, 1)$. Aşadar

$$f(x) = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!} x^n + \ldots$$

pentru $|x| < 1$.

Prin derivare obţinem

$$f'(x) = k + \frac{k(k-1)}{1!} x + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \ldots.$$

pentru $|x| < 1$.

Înmulţind seria aceasta cu x, suma ei este $xf'(x)$. Atunci

$$f'(x) + xf'(x) = k + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{k(k-1)\ldots(k-n)}{n!} + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!} \right] x^n =$$

$$= k\left(1 + \sum \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!} x^n\right) = kf(x) \text{ pentru } |x| < 1.$$

De aici deducem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{1+x} \text{ pentru } |x| < 1.$$

Funcţia din membrul stîng este derivata funcţiei $g(x) = \ln f(x)$; funcţia din membrul drept este derivata funcţiei $h(x) = k \ln (1 + x)$. Aşadar

$$g'(x) = h'(x) \text{ pentru } |x| < 1,$$

deci cele două funcţii diferă printr-o funcţie constantă M

$$g(x) = h(x) + M.$$

Dacă punem $C = e^M$ atunci $M = \ln C$, deci

$$\ln f(x) = k \ln (1 + x) + \ln C$$

sau

$$\ln f(x) = \ln C\ (1 + x)^k,$$

de unde

$$f(x) = C(1 + x)^k.$$

Dar pentru $x = 0$ seria binomială are suma

$$f(0) = 1$$

şi deci

$$1 = C.$$

Aşadar

$$f(x) = (1 + x)^k$$

şi deci, pentru $|x| < 1$,

$$(1 + x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!} x^n + \ldots$$

11) Dînd lui k diferite valori, în seria binomială, obţinem:

pentru $k = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} x^4 + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^n + \ldots$$

pentru $|x| < 1$;

pentru $k = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} x^3 + \ldots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^n + \ldots.$$

pentru $|x| < 1$.

De altfel, seria a doua se obţine din prima prin derivare.
Schimbînd x cu $-x$, în ultima serie, obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^2 + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^n + \ldots..$$

pentru $|x| < 1$.

Înlocuind acum x cu x^2, obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^4 + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n} + \ldots$$

pentru $|x| < 1$.

12) Să considerăm seria

$$x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! 5} x^5 + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n! \, (2n+1)} x^{2n+1} + \ldots$$

Prin derivare, obţinem seria care are suma $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, şi care are raza de convergenţă $R=1$, deci şi seria dată are raza de convergenţă 1. Dacă notăm cu $f(x)$ suma seriei, avem

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pentru } |x| < 1$$

şi cum $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ este derivata funcţiei $x \to \arcsin x$, deducem

$$f(x) = \arcsin x + C \text{ pentru } |x| < 1.$$

Pentru $x = 0$, avem $f(0) = 0$, şi $\arcsin 0 = 0$, deci $C = 0$, şi deci $f(x) = \arcsin x$. Aşadar,

$$\arcsin x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

$$\text{pentru } |x| < 1.$$

Pentru $x = \frac{1}{2}$ avem $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, şi deci

$$\frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{1}{2^{n+1}} + \ldots$$

Această serie permite să calculăm cu aproximaţie numărul π.

7. Serii Taylor

Fie $a \in R$ un punct oarecare. Vom numi seria Taylor o serie de puteri ale funcţiei $(x-a)$, de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

Punînd $y = x - a$, obţinem seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n + \ldots$$

Fie R raza de convergenţă a acestei serii de puteri. Pentru $-R < y < R$, seria este convergentă, şi pentru $|y| > R$ seria este divergentă. Inegalitatea $-R < y < R$ se scrie

$$-R < x - a < R$$

sau

$$a - R < x < a + R,$$

deci seria inițială este convergentă în intervalul $(a - R,\ a + R)$ cu centrul în a.

Toate proprietățile seriilor de puteri se mențin pentru seriile Taylor:

1) Pentru orice serie Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$, există un număr R, $(0 \leqslant R \leqslant +\infty)$ numit raza de convergență, astfel încît:

Seria este absolut convergentă pe intervalul $(a - R,\ a + R)$.

Seria este divergentă pentru $|x - a| > R$.

2) Pentru orice $0 < r < R$, seria este uniform convergentă pe intervalul închis $[a - r,\ a + r]$.

3) Suma seriei este o funcție continuă pe $(a - R,\ a + R)$.

4) Dacă punem $\omega = \overline{\lim_{n}} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci

$$R = \frac{1}{\omega} \text{ dacă } 0 < \omega \leqslant +\infty \text{ și } R = +\infty, \text{ dacă } \omega = 0.$$

5) Suma a două serii Taylor $\sum a_n(x - a)^n$ și $\sum b_n(x - a)^n$ este tot o serie Taylor, cu raza de convergență egală cel puțin cu cea mai mică rază de convergență a celor două serii.

6) O serie Taylor se poate deriva termen cu termen. Seria derivatelor are aceeași rază de convergență și suma sa este derivată sumei Taylor inițiale.

7) Suma unei serii Taylor este indefinit derivabilă în $(a - R,\ a + R)$.

Exemple. 1) Să considerăm seria Taylor

$$1 + (x - a) + (x - a)^2 + \ldots + (x - a)^n + \ldots$$

Este seria geometrică cu rația $x - a$, deci seria este convergentă dacă $|x - a| < 1$ și divergentă dacă $|x - a| > 1$. Raza de convergență este $R = 1$, iar intervalul de convergență este $(a - 1,\ a + 1)$.

Suma seriei pe acest interval este $\dfrac{1}{1 - (x - a)} = \dfrac{1}{1 - x + a}$,

$$\frac{1}{1 - x + a} = 1 + (x - a) + \ldots + (x - a)^n + \ldots \text{ pentru } a - 1 < x < a + 1.$$

Prin derivare se obține

$$\frac{1}{(1 - x + a)^2} = 1 + 2(x - a) + 3(x - a)^2 + \ldots + n(x - a)^{n-1} + \ldots.$$

pentru $a - 1 < x < a + 1$.

$$2) \ln(1 - x + a) = -(x - a)^2 - \frac{(x - a)^2}{2} - \ldots - \frac{(x - a)^n}{n} - \ldots$$

pentru $|x - a| < 1$ adică $a - 1 < x < a + 1$.

$$3) \frac{1}{1 + (x - a)^2} = 1 - (x - a)^2 + (x - a)^4 + \ldots + (-1)^n(x - a)^{2n} + \ldots.$$

pentru $|x - a| < 1$ etc.

8. Dezvoltări în serie

Fie I un interval şi $a \in I$. Fie $f : I \to R$ o funcţie indefinit derivabilă în punctul a. Să considerăm seria Taylor următoare:

$$f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

Această serie se numeşte *seria Taylor a funcţiei f în punctul a*. Ea are o rază de convergenţă $0 \leqslant R \leqslant +\infty$, o mulţime de convergenţă A care conţine cel puţin punctul a, şi un interval de convergenţă $(a - R, a + R) \subset A$.

Suma T a acestei serii este o funcţie definită pe A.

Dacă notăm cu T_n sumele parţiale ale acestei serii

$$T_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a),$$

T_n sînt polinoame definite pe toată dreapta.

Şirul (T_n) al acestor polinoame este convergent pe A către T.

Trebuie observat că mulţimea A de convergenţă a seriei Taylor nu este neapărat o submulţime a intervalului I pe care este definită funcţia f. De altfel, seria Taylor este perfect determinată prin cunoaşterea derivatelor funcţiei f în punctul a, deci de cunoaşterea valorilor funcţiei f într-o anumită vecinătate a punctului a, pe care o putem alege arbitrar, oricît de mică.

Să observăm de asemenea că T_n sînt polinoamele lui Taylor din formulele lui Taylor ataşate funcţiei f în punctul a:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

$$x \in I,$$

unde R_n este *restul formulei lui Taylor* al funcţiei f în punctul a; R_n este o funcţie definită pe I, ca şi f. Avem deci

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad \text{pentru orice} \quad x \in I,$$

de unde

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x) \text{ pentru } x \in I.$$

R_n nu trebuie confundat cu restul seriei Taylor. Pentru a le deosebi, vom nota cu ρ_n restul de rang n al seriei Taylor; *ρ_n este o funcţie definită pe mulţimea A de convergenţă a acestei serii.*

Avem

$$T(x) = T_n(x) + \rho_n(x) \qquad \text{pentru orice } x \in A.$$

Se pune întrebarea dacă avem

$$f(x) = T(x) \qquad \text{pentru } x \in A \cap I,$$

adică dacă suma seriei Taylor a funcției f, pe mulțimea $A \cap I$, este chiar funcția f. Acest lucru nu se întîmplă totdeauna, cum reiese din exemplul următor:

Exemplu. Fie $f : R \to R$ funcția definită prin egalitățile

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

Această funcție este continuă în 0, deoarece $\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$.
Această funcție are derivate de orice ordin în 0 și $f^{(n)}(0) = 0$.
Seria Taylor a acestei funcții în 0 este

$$0 + 0x + 0x^2 + \ldots$$

Raza sa de convergență $R = +\infty$ și suma sa este $T(x) \equiv 0$.
Totuși, pentru $x \neq 0$, avem $f(x) \neq 0$, și deci avem

$$f(0) = T(0), \text{ dar } f(x) \neq T(x) \text{ pentru orice } x \neq 0.$$

Răspunsul întrebării de mai sus este dat de teorema următoare:

Teoremă. Seria Taylor a funcției f în punctul a este convergentă într-un punct $x \in A \cap I$ către valoarea $f(x)$ a funcției f în x, dacă și numai dacă valorile în x ale resturilor R_n ale formulelor lui Taylor formează un șir $(R_n(x))$, convergent către 0.

Într-adevăr, din egalitatea

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x)$$

deducem că $f(x)$ este limita șirului $T_n(x)$, dacă și numai dacă șirul $(R_n(x))$ are limita 0. Cum în acest caz șirul $(T_n(x))$ are ca limită suma $T(x)$ a seriei Taylor, și cum limita unui șir este unică, deducem că $f(x) = T(x)$.

Prin urmare, dacă $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, putem scrie

$$f(x) = f(x) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

Corolar. Fie B o submulțime a mulțimii $A \cap I$. Avem

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

pentru orice $x \in B$, dacă și numai dacă șirul de funcții (R_n) format cu resturile formulelor lui Taylor este convergent pe B către 0.

Egalitatea de mai sus se numește *formula de dezvoltare a funcției f în serie Taylor în jurul punctului a.*

O b s e r v a ţ i e. Dacă $f(x) = T(x)$, atunci $\rho_n(x) = R_n(x)$, deoarece $\rho_n(x) = T(x) - T_n(x)$ şi $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Dacă $0 \in I$ şi f este indefinit derivabilă în 0, atunci seria Taylor a funcţiei f în punctul 0 are forma

$$f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots$$

Această serie se mai numeşte *seria MacLaurin* a funcţiei f.

Exemple de dezvoltări în serie MacLaurin. 1) Să considerăm funcţia $f : R \to R$ definită prin $f(x) = e^x$. Această funcţie este indefinit derivabilă în orice punct. Avem

$$f^{(n)}(x) = e^x, \text{ şi } f^{(n)}(0) = 1, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Formula lui MacLaurin cu restul sub forma lui Lagrange este

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{Cx},$$

unde C_x este un număr cuprins între 0 şi x, $x < C_x < 0$ sau $0 < C_x < x$, şi C_x depinde, în general, şi de n.

Avem

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{Cx}$$

şi

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{Cx} \leqslant e^{|Cx|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Oricare ar fi $x \in R$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, deci suma seriei MacLaurin, pentru orice $x \in R$, este e^x,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Deoarece x este arbitrar, prin aceasta am şi demonstrat că mulţimea A de convergenţă a seriei este toată dreaptă, şi suma ei este e^x pe toată dreapta.

2) Fie funcţia $f : R \to [-1, 1]$ definită prin $f(x) = \sin x$. Funcţia este indefinit derivabilă pe R, şi avem

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{IV}(x) = \sin x$	$f^{IV}(0) = 0$
.....	.....

Seria MacLaurin este

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Se calculează că raza de convergenţă este $R = +\infty$. Aceasta va rezulta de altfel şi din cele ce urmează.

Să considerăm formula lui MacLaurin cu restul în forma lui Lagrange

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(C_x + \frac{2n+1}{2}\pi\right),$$

unde C_x este cuprins între 0 şi x. Restul R_n este

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(C_x + \frac{2n+1}{2}\pi\right)$$

şi cum $\left|\sin\left(C_x + \frac{2n+1}{2}\pi\right)\right| \leqslant 1$, deducem

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Şirul $(R_n(x))$ are limita 0, şi deci $\sin x$ este suma seriei MacLaurin în punctul x Dar x a fost arbitrar, şi deci pentru orice $x \in R$ avem

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Şi în acest caz seria MacLaurin converge pe toată dreapta către funcţia $\sin x$.

3) Funcţia $f : R \to [-1, +1]$ definită prin $f(x) = \cos x$, este indefinit derivabilă.

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin x$	$f'''(0) = 0$
$f^{IV}(x) = \cos x$	$f^{IV}(0) = 1$
.....	.....

Formula lui MacLaurin cu restul lui Lagrange se scrie

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left(C_x + (n+1)\pi\right)$$

şi cum $|\cos\theta| \leqslant 1$, pentru restul acestei formule avem

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$; rezultă că suma seriei MacLaurin este $\cos x$. Cum x a fost arbitrar, pentru orice $x \in R$ avem

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

Prin aceasta s-a şi demonstrat că seria este convergentă pentru orice $x \in R$.

4) Fie $f : (-1, +\infty) \to R$, definită prin $f(x) = \ln(1 + x)$. Funcţia este indefinit derivabilă pe $(-1, +\infty)$.

$$f(x) = \ln(1 + x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1 + x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{(1 + x)^3} \qquad f'''(0) = 2!$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1 + x)^n} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Seria MacLaurin este

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$

S-a arătat că mulţimea de convergenţă a acestei serii este $A = (-1, 1]$. Să arătăm că pe A, suma seriei este $\ln(1 + x)$.

Pentru aceasta considerăm formula lui MacLaurin, cu restul lui Lagrange

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(C_x),$$

unde $0 < C_x < x$, iar C_x depinde şi de n. Dacă $x \in (-1, +1]$ avem $|x| \leqslant 1$, deci $|C_x| < 1$.

Dar

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1 + x)^{n+1}} \text{ şi deci pentru restul } R_n \text{ avem}$$

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n + 1)!} \frac{n!}{(1 + C_x)^{n+1}} = \frac{1}{n + 1}\left|\frac{x}{1 + C_x}\right|^{n+1}.$$

Dacă $0 < x \leqslant 1$, atunci avem $0 < C_x < x$, deci $1 + C_x > 1$

şi deci $\frac{x}{1 + C_x} \leqslant x$. Atunci

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n + 1}|x|^{n+1} \leqslant \frac{1}{n + 1} \text{ şi deci}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Urmează că pentru $x \in [0, 1]$, avem

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$

Egalitatea aceasta este adevărată pentru orice $x \in (-1, 1]$, cum s-a arătat cu ajutorul teoremei de derivare termen cu termen a seriilor de puteri.

Acesta este un exemplu în care mulțimea de definiție a funcției este $=(-1,+\infty)$ și mulțimea de convergență a seriei este $A = (-1, 1]$, iar seria are ca sumă funcția f pe mulțimea $A \cap I = (-1, 1]$.

5) Să considerăm acum funcția $f : R \to R$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{pentru } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pentru } x \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

Această funcție este, evident, idefinit derivabilă în 0, și derivatele sale în 0 sînt egale cu derivatele funcției $x \to \ln(1+x)$ în 0, deci are aceeași serie MacLaurin. Avem deci

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \text{ pentru } x \in \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right].$$

Dar seria este convergentă pe $(-1, 1]$. Așadar, $I = R$, $A = (-1, +1]$

și $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \neq A \cap I$.

6) În exemplul 4, înlocuind x cu $-x$, obținem funcția f definită pe $(-\infty, +1)$ prin $f(x) = \ln(1-x)$. Seria Taylor a acestei funcții este

$$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$$

Pe intervalul $[-1, 1)$, suma acestei serii este $\ln(1-x)$.

Exemple de dezvoltări în serie Taylor. 1) Fie $f(x) = e^x$: $R \to R$, și fie $a \in R$. Avem

$$f(a) = e^a,\ f'(a) = e^a,\ \ldots,\ f^{(n)}(a) = e^a,\ \ldots \text{ și}$$

$$e^x = e^a + \frac{x-a}{1!}e^a + \frac{(x-a)^2}{2!}e^a + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}e^a + \ldots \text{ pentru } x \in R.$$

2) Fie $f(x) = \sin x : R \to R$ și $a \in R$. Avem

$$f(a) = \sin a;\ f'(a) = \cos a,\ f''(a) = -\sin a,\ f'''(a) = -\cos a,\ f^{IV}(a) = \sin a,\ \ldots$$

$$\sin x = \sin a + \frac{x-a}{1!}\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\sin a - \frac{(x-a)^3}{3!}\cos a +$$

$$+ \frac{(x-a)^4}{4!}\sin a + \ldots \text{ pentru orice } x \in R.$$

3) Fie $f(x) = \cos x : R \to R$, $a \in R$. Avem

$$f(a) = \cos a,\ f'(a) = -\sin a,\ f''(a) = -\cos a,\ f'''(a) = \sin a,\ f^{IV}(a) = \cos a,\ \ldots$$

$$\cos x = \cos a - \frac{x-a}{1!}\sin a - \frac{(x-a)^2}{2!}\cos a + \frac{(x-a)^3}{3!}\sin a +$$

$$+ \frac{(x-a)^4}{4!}\cos a + \ldots \text{ pentru orice } x \in R.$$

4) Fie $f(x) = \ln(1 + x) : (-1, +\infty) \to R$, şi fie $a > -1$.

Avem

$$f(a) = \ln(1 + a)$$

$$f'(a) = \frac{1}{1 + a}$$

$$f''(a) = -\frac{1}{(1 + a)^2}$$

.....

$$f^{(n)}(a) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1 + a)^n}$$

.....

$$\ln(1 + x) = \ln(1 + a) + \frac{x - a}{1 + a} - \frac{(x - a)^2}{2(1 + a)^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(x - a)^n}{n(1 + a)^n} + \ldots$$

pentru x în intervalul de convergenţă al seriei. Să calculăm raza de convergenţă.

Avem $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n(1 + a)^n}}$. Acest şir are limita $\frac{1}{1 + a}$, deci avem $R = 1 + a$.

Observăm că intervalul de convergenţă este $(a - R, a + R) = (-1, 1 + 2a)$, deci pentru orice serie Taylor a funcţiei $f(x) = \ln(1 + x)$, intervalul de convergenţă are extremitatea stîngă în punctul -1. Aşadar, cu cît a este mai aproape de -1, cu atît raza de convergenţă a seriei Taylor este mai mică.

5) Prin derivare obţinem

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 + a} - \frac{x - a}{(1 + a)^2} + \ldots + (-1)^n \frac{(x - a)^n}{(1 + a)^{n+1}} + \ldots \text{ pentru } -1 < x < 1 + 2a;$$

$$\frac{1}{(1 + x)^2} = \frac{1}{(1 + a)^2} - \frac{2(x - a)}{(1 + a)^3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{n(x - a)^{n-1}}{(1 + a))^{n+1}} + \ldots$$

pentru $-1 < x < 1 + 2a$.

Schimbînd x în $-x$ şi a în $-a$ avem

$$\frac{1}{1 - x} = \frac{1}{1 - a} + \frac{x - a}{(1 - a)^2} + \ldots + \frac{(x - a)^n}{(1 - a)^{n+1}} + \ldots \text{ pentru } -1 + 2a < x < 1;$$

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = -\frac{1}{(1 - a)^2} - \frac{2(x - a)}{(1 - a)^3} - \ldots - \frac{n(x - a)^{n-1}}{(1 - a)^{n+1}} + \ldots \text{pentru } 1 + 2a < x < 1.$$

CUPRINSUL

Pag.

Prefață 3

Capitolul I

MULȚIMI ȘI FUNCȚII

§ 1. **Apartenență, incluziune, părțile unei mulțimi** 7
1. Exemple de mulțimi 7
2. Elementele unei mulțimi 7
3. Moduri de definire a mulțimilor 8
4. Relația de egalitate 8
5. Relația de apartenență 9
6. Părțile unei mulțimi 9
7. Relația de incluziune 10

2. **Operații cu mulțimile** 11
1. Reuniunea și intersecția 11
2. Diferența. Complementara 12
3. Produs cartezian 13

§ 3. **Funcții** 14
1. Definiția funcției 14
2. Graficul unei funcții 16
3. Familii. Șiruri 17
4. Reuniuni și intersecții de familii 18
5. Restricții și extensiuni de funcții 18
6. Funcții compuse 19

§ 4. **Aplicații biunivoce. Funcții inverse** 21
1. Imagini directe de mulțimi printr-o funcție. Aplicație pe o mulțime 21
2. Imagini reciproce de mulțimi printr-o funcție. Aplicații biunivoce 22
3. Funcții inverse 24

§ 5. **Mulțimi numărabile** 26
1. Corespondența biunivocă a două mulțimi 26
2. Mulțimi numărabile 26

§ 6. **Despre negație** 28

Capitolul II

MULȚIMI DE NUMERE REALE. FUNCȚII REALE

§ 1. **Numere reale** 31
1. Structura algebrică a numerelor reale 31
2. Clase de numere reale 33

Pag.

3. Structura de ordine 35
4. Modulul 38
5. Reprezentarea numerelor reale prin puncte pe o dreaptă 39
6. Reprezentarea perechilor de numere prin puncte din plan 39
7. Intervale 39

§ 2. **Puteri întregi** 41
1. Puteri naturale 41
2. Puteri întregi 42
3. Inegalitatea lui Bernoulli 42

§ 3. **Mulțimi mărginite** 44
1. Mulțimi majorate. Mulțimi minorate. Mulțimi mărginite 44
2. Marginile unei mulțimi 45

§ 4. **Structura topologică pe dreaptă** 47
1. Vecinătățile unui punct pe dreaptă 47
2. Puncte interioare. Mulțimi deschise 48
3. Puncte aderente. Aderența unei mulțimi. Mulțimi închise 51
4. Puncte de acumulare. Teorema lui Weierstrass-Bolzano 54
5. Mulțimi compacte. Teorema lui Borel-Lebesgue 56

§ 5. **Funcții reale** 59
1. Funcții reale, funcții de variabilă reală 59
2. Operații cu funcții reale 59
3. Structura de ordine pe mulțimea funcțiilor reale 62
4. Funcții mărginite 64
5. Funcții monotone 67
6. Oscilația unei funcții pe o mulțime 69
7. Oscilația unei funcții într-un punct 70

Capitolul III

ȘIRURI DE NUMERE

§ 1. **Generalități** 72
1. Denumiri și notații 72
2. Operații cu șiruri 73
3. Șiruri mărginite 74
4. Șiruri monotone 76
5. Subșiruri 77

§ 2. **Șiruri convergente** 78
1. Un exemplu de șir convergent 78
2. Definiția limitei 79
3. Șiruri convergente către 0 83
4. Proprietățile șirurilor convergente 85

§ 3. **Operații cu șiruri convergente** 88
1. Operații cu șiruri convergente către zero 89
2. Operații cu șiruri convergente 90
3. Câtul a două șiruri convergente 93
4. Trecerea la limită în inegalități 96

§ 4. **Șiruri fundamentale (Cauchy)** 97
1. Definiția șirului fundamental 97
2. Subșiruri convergente. Lema lui Cesàro 99
3. Criteriul lui Cauchy 102

Pag.

§ 5. **Şiruri monotone** 105
1. Teorema de convergenţă a şirurilor monotone 105
2. Numărul *e* 108

§ 6. **Proprietăţi suplimentare ale şirurilor convergente** 110
1. Schimbarea ordinii termenilor unui şir convergent 110
2. Puncte de acumulare ale unei mulţimi 111

§ 7. **Puteri şi logaritmi** 113
1. Radicali 113
2. Proprietăţile radicalilor 114
3. Puteri raţionale 115
4. Proprietăţile puterilor raţionale 117
5. Şiruri de puteri raţionale 118
6. Puteri reale 121
7. Proprietăţile puterilor reale 122
8. Logaritmi 125
9. Proprietăţile logaritmilor 128

Capitolul IV

DREAPTA ÎNCHEIATĂ

§ 1. **Mulţimi nemărginite** 132
1. Mulţimi nemajorate 132
2. Mulţimi neminorate 133
3. Mulţimi nemărginite 134
4. Funcţii nemărginite 135

§ 2. **Extinderea structurii topologice la dreapta încheiată** 137
1. Vecinătăţile lui $+\infty$ şi $-\infty$ 137
2. Puncte de acumulare infinite 137

§ 3. **Şiruri cu limita $+\infty$ sau $-\infty$** 138
1. Şiruri cu limita infinită 138
2. Criterii pentru existenţa limitelor infinite 141
3. Şiruri monotone nemărginite 141
4. Proprietăţi ale şirurilor cu limite infinite 143
5. Trecerea la limită în inegalităţi 146
6. Modulul 146

§ 4. **Operaţii cu şiruri care au limită** 147
1. Suma şirurilor care au limită 147
2. Produsul cu scalari al şirurilor care au limită 149
3. Produsul şirurilor care au limită 150
4. Citul şirurilor care au limită 152
5. Aplicaţii 155
6. Puteri 159

§ 5. **Puncte limită ale unui şir** 161

Capitolul V

LIMITE DE FUNCŢII. CONTINUITATE

§ 1. **Limita unei funcţii într-un punct** 166
1. Punerea problemei 166
2. Definiţia limitei cu ajutorul vecinătăţilor 167
3. Definiţia cu ε şi δ a limitei 168

Pag.

4. Definiţia cu şiruri a limitei 172
5. Exemple 174

§ 2. **Limite laterale** 177
1. Limite relative la submulţimi 177
2. Limita la stînga 179
3. Limita la dreapta 180
4. Calculul limitei cu ajutorul limitelor laterale 181

§ 3. **Proprietăţile limitelor de funcţii** 185
1. Proprietăţi ale limitelor 185
2. Proprietăţi ale funcţiilor deduse din proprietăţile limitelor 188
3. Criterii de existenţă a limitelor de funcţii 189
4. Operaţii cu funcţiile care au limită 194
5. Exemple 197
6. Limitele funcţiilor compuse 202

§ 4. **Funcţii continue** 203
1. Definiţia continuităţii 203
2. Puncte de discontinuitate 210
3. Continuitatea relativă la o submulţime 215
4. Continuitatea laterală 216

§ 5. **Proprietăţile funcţiilor continue** 219
1. Operaţii cu funcţii continue 219
2. Proprietăţile locale ale funcţiilor continue 220
3. Prelungirea prin continuitate a unei funcţii 222
4. Proprietatea lui Darboux 224
5. Rezolvarea ecuaţiilor $x^n = a$ şi $a^x = b$ 231
6. Continuitatea funcţiilor compuse 232
7. Continuitatea funcţiilor inverse 232
8. Proprietăţile funcţiilor continue pe mulţimi compacte 234
9. Funcţii uniform continue 236
10. Funcţii semicontinue 240

Capitolul VI

DERIVATE

§ 1. **Originea geometrică şi fizică a derivatei** 242
1. Problema tangentei 242
2. Problema vitezei 243
3. Densitatea liniară a unei bare materiale 244

§ 2. **Derivata** 246
1. Definiţia derivatei 246
2. Continuitatea funcţiilor derivabile 248
3. Derivate laterale 249
4. Derivata pe un interval 254
5. Exemple de funcţii derivabile 255

§ 3. **Operaţii cu funcţii derivabile** 259
1. Operaţii algebrice 259
2. Derivabilitatea funcţiilor compuse 266
3. Derivabilitatea funcţiilor inverse 269

§ 4. **Proprietăţi generale ale funcţiilor derivabile** 277
1. Teorema lui Fermat 277
2. Teorema lui Rolle 280

Pag.

3. Teorema lui Lagrange 282
4. Consecinţe ale teoremei creşterilor finite 285
5. Teorema lui Cauchy 289
6. Teorema lui Darboux 291

§ 5. **Derivate de ordin superior. Formula lui Taylor** 293

1. Derivate de ordin superior 293
2. Operaţii cu funcţii derivabile de n ori 296
3. Formula lui Taylor 301
4. Puncte de extrem ale unei funcţii 307

§ 6. **Regulile lui l'Hospital** 310

1. Cazul $\frac{0}{0}$ 310
2. Cazul $\frac{\infty}{\infty}$ 317
3. Alte cazuri 325

§ 7. **Aplicaţiile derivatelor la studiul funcţiilor** 330

1. Derivata întîi. Intervale de monotonie. Puncte de extrem 330
2. Derivata a doua. Convexitate şi concavitate. Puncte de inflexiune 334
3. Asimptote 341
4. Reprezentarea grafică a funcţiilor 347

§ 8. **Diferenţiale** 350

1. Definiţia diferenţialei 350
2. Diferenţiala funcţiilor compuse 354
3. Diferenţiale de ordin superior 355

§ 9. **Aplicaţiile derivatei în fizică** 356

1. Viteza în mişcarea rectilinie 356
2. Acceleraţia în mişcarea rectilinie 357
3. Viteza şi acceleraţia unghiulară 358
4. Debitul unui lichid 358
5. Intensitatea curentului electric 359
6. Densitatea unei repartiţii liniare de masă 359

Capitolul VII

INTEGRAREA

§ 1. **Mulţimi măsurabile în sensul lui Jordan** 360

1. Mulţimi pe dreaptă măsurabile Jordan 360
2. Mulţimi de măsură Jordan nulă 367
3. Mulţimi neglijabile 370
4. Mulţimi plane măsurabile Jordan 372
5. Mulţimi măsurabile Jordan în spaţiul R^3 374

§ 2. **Integrala în sensul lui Riemann** 375

1. Probleme care conduc la noţiunea de integrală 375
2. Definiţia integralei în sensul lui Riemann 378
3. Criteriul lui Darboux 385
4. Clase de funcţii integrabile 389
5. Criteriul lui Lebesgue 391

§ 3. **Proprietăţile funcţiilor integrabile** 394

1. Spaţiul funcţiilor integrabile. Liniaritatea integralei 394
2. Proprietăţi de monotonie ale integralei 396

Pag.

3. Formule de medie ... 400
4. Proprietatea de ereditate. Aditivitatea integralei ca funcţie de interval ... 402
5. Integrarea pe o reuniune de intervale ... 404

§ 4. **Primitive** ... 407

1. Integrala nedefinită ... 407
2. Formula lui Leibniz-Newton ... 411
3. Tabloul primitivelor imediate ... 416
4. Proprietăţile primitivelor ... 417
5. Metode de calcul al primitivelor ... 420
6. Primitivele funcţiilor raţionale ... 430
7. Integrarea funcţiilor continue ... 441

§ 5. **Metode de integrare** ... 443

1. Integrarea prin părţi ... 443
2. Transcendenţa numărului e ... 447
3. Transcendenţa numărului π ... 449
4. Schimbarea de variabilă (integrarea funcţiilor compuse) ... 451

§ 6. **Integrale reductibile la integrale raţionale** ... 456

1. Consideraţii preliminare ... 456
2. Integrale de funcţii exponenţiale ... 459
3. Integrale de funcţii trigonometrice ... 460
4. Integrale de funcţii iraţionale ... 472

§ 7. **Metode de calcul aproximativ al integralei** ... 491

1. Metoda dreptunghiurilor ... 491
2. Metoda trapezelor ... 494
3. Formula lui Simpson ... 498

§ 8. **Aplicaţiile integralei în geometrie şi fizică** ... 502

1. Aria unei suprafeţe plane mărginite de o curbă ... 502
2. Aria unei suprafeţe plane mărginite de o curbă dată în coordonate polare ... 507
3. Volumul corpurilor de rotaţie ... 510
4. Lungimi de arce ... 513
5. Suprafeţe de rotaţie ... 516
6. Centre de greutate ... 519
7. Lucrul mecanic ... 521

Capitolul VIII

FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE

§ 1. **Spaţiile R^n** ... 523

1. Spaţiul cu n dimensiuni ... 523
2. Structura de spaţiu vectorial pe R^n ... 524
3. Produsul scalar ... 526
4. Norma în spaţiul R^n ... 527
5. Distanţa în R^n ... 530

§ 2. **Topologia în R^n** ... 531

1. Vecinătăţile unui punct din R^n ... 531
2. Mulţimi deschise ... 534
3. Mulţimi închise. Frontieră ... 535
4. Puncte de acumulare ... 536
5. Mulţimi mărginite. Mulţimi compacte. Mulţimi conexe ... 536

Pag.

§ 3. **Şiruri de puncte din spaţiul R^n** 537
1. Şiruri convergente. Proprietăţi 537
2. Şiruri fundamentale. Criteriul lui Cauchy 540
3. Lema lui Cesàro. Teorema lui Weierstrass-Bolzano. Teorema lui Borel-Lebesgue 543

§ 4. **Funcţii definite pe mulţimi din R^n** 545
1. Funcţii vectoriale de variabilă vectorială 545
2. Aplicaţii. Curbe şi suprafeţe. Transformări punctuale 548
3. Operaţii cu funcţii vectoriale 552
4. Compunerea funcţiilor vectoriale 553
5. Inversarea funcţiilor vectoriale 556
6. Funcţii mărginite 558

§ 5. **Limite. Continuitate** 559
1. Limite de funcţii vectoriale 559
2. Limite iterate 563
3. Continuitatea funcţiilor vectoriale 565
4. Continuitate parţială 567
5. Funcţii vectoriale uniform continue 568
6. Funcţii vectoriale continue pe mulţimi compacte 570
7. Funcţii vectoriale continue pe mulţimi conexe 570
8. Derivata funcţiilor vectoriale de o variabilă 573
9. Viteza şi acceleraţia în mişcarea în spaţiu 575
10. Integrarea funcţiilor vectoriale de o variabilă 576

§ 6. **Derivate parţiale. Diferenţiale** 578
1. Derivate parţiale 578
2. Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile 584
3. Diferenţiala funcţiilor de mai multe variabile 593
4. Derivate parţiale de ordin superior 596
5. Diferenţiale de ordin superior 603
6. Diferenţialele şi derivatele parţiale ale funcţiilor compuse 604
7. Diferenţialele şi derivatele parţiale de ordin superior ale funcţiilor compuse 618
8. Formula lui Taylor 626
9. Extremele funcţiilor de mai multe variabile 633
10. Funcţii omogene şi teorema lui Euler. 640

§ 7. **Funcţii implicite** 642
1. Funcţii implicite de una sau mai multe variabile 642
2. Sisteme de funcţii implicite 649
3. Transformări regulate 656
4. Dependenţă funcţională 662
5. Extreme condiţionate 670

Capitolul IX

SERII DE NUMERE. ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

§ 1. **Serii de numere** 678
1. Definiţia seriilor convergente 678
2. Influenţa unui număr finit de termeni asupra convergenţei seriilor 681
3. Proprietăţi ale şirului termenilor şi ale sumelor parţiale 683
4. Operaţii cu serii 685
5. Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare 687
6. Serii alternate 689

Pag.

§ 2. Serii absolut convergente 691
1. Serii absolut convergente. Serii semiconvergente 691
2. Serii cu termeni pozitivi 695

§ 3. Şiruri de funcţii 705
1. Mulţimea de convergenţă 705
2. Convergenţa simplă. Convergenţa uniformă 706
3. Criterii de convergenţă uniformă 709
4. Continuitatea şi convergenţa uniformă 711
5. Integrabilitatea şi convergenţa uniformă 712
6. Derivabilitatea şi convergenţa uniformă 713
7. Aproximarea uniformă a funcţiilor continue 718
8. Aproximarea funcţiilor continue prin funcţii poligonale 719
9. Şiruri de funcţii egal continue şi egal mărginite 722

§ 4. Serii de funcţii 723
1. Convergenţa simplă şi uniformă 723
2. Restul seriei 727
3. Criterii de convergenţă uniformă 729
4. Continuitatea, integrabilitatea şi derivabilitatea seriilor uniform convergente 731
5. Operaţii cu serii de funcţii 733

§ 5. Serii de puteri 733
1. Definiţia seriilor de puteri 733
2. Raza de convergenţă 735
3. Teorema lui Cauchy-Hadamard 738
4. Continuitatea sumei unei serii de puteri 740
5. Operaţii cu serii de puteri 744
6. Derivarea seriilor de puteri 745
7. Serii Taylor 752
8. Dezvoltări în serie 754

Redactor responsabil: GAINA STELIAN
Tehnoredactor: ŢIMPĂU ANA

Dat la cules 05.04.1965. Bun de tipar 24.04.1966. Apărut 1966. Tiraj 12.000+115 ex. leg. 1/2 pergamoid. Hîrtie scris tip I A 80 g/m², ft. 16/70×100. Coli editoriale 44,837. Coli de tipar 48,25. plan 2053. A. 3752. C.Z. pentru bibliotecile mari 517(075.8). C.Z. pentru bibliotecile mici 51.

Tiparul executat sub comanda nr. 50 241 la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii", Piaţa Scînteii nr. 1, Bucureşti — Republica Socialistă România