

Alef.



Algebră

Numere reale, calcul numeric,
numere complexe



Alef./Algebră

Aleph./Algèbre

**Nombres réels, calcul numérique,
nombres complexes**

Terminale CDE

C. GAUTIER

G. GIRARD

D. GERLL

C. THIERCÉ

A. WARUSFEL

L'ensemble N des nombres entiers a été étendu à des "nombres" cardinaux transfinis, traditionnellement désignés par la lettre hébraïque aleph diversement indexée.

Aleph-zéro représente ainsi le cardinal de N lui-même. Aleph-un est le plus petit cardinal supérieur à Aleph-zéro et ainsi de suite.

Classiques Hachette, 79 Boulevard Saint-Germain, Paris.

ALEF./ALGEBRA

**Numere reale, calcul numeric,
numere complexe**

C. GAUTIER

G. GIRARD

D. GERLL

C. TIERCÉ

A. WARUSFEL



Editura didactică și pedagogică — București, 1974.

Traducerea din limba franceză:

**ELISABETA IORGULESCU
ANGELICA IORGULESCU
AFRODITA GÎRLEANU
ECATERINA VASILESCU
NATALIA PFTRIN**

Confruntarea traducerii: prof. univ. dr. CONSTANTIN POPOVICI

Redactor: prof. EUGENIA PANTELIMON

Tehnoredactor: VIORICA CONDOPOL

Prefața

Acest fascicul este consacrat studiului numerelor reale și numerelor complexe.

În prima parte, care a fost tratată în același spirit ca fascicula rezervată numai elevilor clasei terminale C (numere întregi), am hotărît să înlăturăm fără ezitare orice construcție explicită a corpului $\mathbf{R}$. Acesta a fost prezentat ca un corp comutativ total ordonat, în care tăieturile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \\ (x \in A \text{ și } y \in B \implies x < y), \end{array} \right.$$

definesc totdeauna un număr real z astfel că:

$$(x \in A \text{ și } y \in B \implies x \leq z \leq y).$$

Acest fapt fiind admis, urmează o teorie încheiată a lui $\mathbf{R}$ din care decurg într-un mod simplu proprietățile fundamentale ale marginii superioare și ale intervalelor interioare unul altuia care pregătește elevii pentru noțiunea de încadrare, atât de importantă pentru calculul numeric.

Fiind vorba de lucruri axiomatiche, sîntem de părere (ca și J. Dieudonné, de exemplu) că teoria completă a tăieturilor din $\mathbf{Q}$, cît și aceea a șirurilor lui Cauchy, trebuie să rămînă rezervate învățămîntului superior, unde utilitatea și subtilitatea lor sînt mai bine înțelese. Oricum, ele presupun o construcție a lui $\mathbf{Q}$, în afara programei, în timp ce acest corp nu este altul decît intersecția părților lui $\mathbf{R}$ care conțin pe 1, stabile la scădere și împărțire.

Corpul $\mathbf{C}$ al numerelor complexe pune alte probleme. Extensia quadratică cu ajutorul lui $(X^2 + 1)$ fiindu-ne interzisă la acest nivel, conform cu programa, am trecut la identificarea lui $\mathbf{C}$ cu o anumită mulțime de matrice de ordinul 2.

Să reamintim totuși că problemele adunate la nr. 3.160 al fasciculului de algebră terminală C și la nr. 4.96 al prezentei fascicule permit elevilor să urmeze o altă cale mai puțin artificială, fără îndoială (studiul numerelor duale, schițat în acest exercițiu, ne pare, în particular, formator în ceea ce privește înțelegerea adevăratei naturi a unei extensii).

Partea cea mai delicată privea, fără nici o îndoială, noțiunea de argument. În confuzia neînlăturată încă pe de-a întregul, care caracterizează tot ceea ce este unghiular, noi am păstrat în mod hotărît linia noastră de conduită: de a trata întreaga programă cu o scrupulozitate care ne interzice orice „aproximație“, chiar cu prețul unei încălcări încă inevitabile.

Credem că am temperat mult amestecul de aplicații care leagă matricele, unghiurile, măsurile (între altele, Cos și cos, de exemplu), prin folosirea constantă de diagrame elementare foarte intuitive, pe care profesorul nu va neglija s-o mai întărească. Toate acestea sînt încă prea abstracte pentru mulți dintre noi, în prezent; sperăm însă că experiența pedagogică în curs, în care cartea noastră joacă un rol pe care l-am dori pozitiv, va permite nașterea unei noi intuiții care va da accesor noțiunii o perspectivă mai netă și mai stabilă, din care concep-tele esențiale se vor degaja cu o forță pe care poate nu o au încă. Bineînțeles, pentru acest fascicul, cit și pentru celelalte, vom fi foarte interesați de orice observație pe care colegii noștri vor binevoi să ne-o comunice. Aceasta ne va permite, dacă va fi cazul, să înlăturăm anumite greșeli ce ne-ar fi scăpat; acest contact, mai ales, ne va ghida în viitoarele ediții la o mai bună exploatare a calităților pedagogice pe care le supunem acum criticii dascălilor și elevilor lor.

AUTORII

MATEMATICĂ / CLASE TERMINALE

PROGRAME NOI

Decretul din 14 Mai 1971

SECȚIUNEA A

Parte obligatorie

Funcții exponențiale și logaritmice

1. Recapitularea noțiunilor relative la continuitate, la limite, la derivata unei funcții reale de o variabilă reală. Derivata unei funcții compuse.

Se va admite fără demonstrație că dacă o funcție numerică este derivabilă pe un interval și dacă derivata ei este pozitivă sau nulă pe acest interval, atunci ea este crescătoare în sens larg pe acest interval și că imaginea unui interval este tot un interval.

Interpretarea geometrică a derivatei.

Aplicație la studiul și la reprezentarea grafică a citorva funcții simple (numai pe exemple numerice).

Funcția $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

(Nu se va cere candidaților la bacalaureat să demonstreze direct continuitatea unei funcții sau să caute direct o limită; se va mărgini să se folosească teoremele generale, enunțate fără demonstrație, cu privire la limitele sumelor, produselor, citorilor de funcții.)

II. 1. Exemple, scoase din științele umane și naturale, de funcții a căror creștere pe orice interval $[x, x + l]$, pentru orice l dat, este proporțională cu valoarea funcției în punctul x .

2. Studiul șirurilor $n \mapsto f(n)$ astfel că $f(n+1) - f(n) = kf(n)$, $n \in \mathbb{N}$, calculul lui $f(n)$, monotonia lui f ; limita lui f când n tinde spre $+\infty$.

3. Se va admite existența, pentru orice a real strict pozitiv, a unei unice funcții continue și derivabile f_a , definită pe $\mathbb{R}$ astfel ca pentru orice pereche de numere reale (x, y) să avem $f_a(x+y) = f_a(x)f_a(y)$ și $f_a(1) = a$. Calculul lui $f_a(x)$ pentru $x \in \mathbb{Z}$ și $x \in \mathbb{Q}$. (Se va putea admite existența unei rădăcini a n -a pentru orice număr real pozitiv și pentru orice întreg pozitiv n .)

Calculul lui $f_a(x)$ în funcție de $f_a(0)$.

Notăția a^x (funcția exponențială de bază a), proprietățile exponenților: $(ab)^c = a^b c$, $(ab)^c = a^b c$. Semnul și monotonia lui f_a , limita lui f_a când x tinde spre $\pm\infty$.

4. Numărul e . Notățiile $\exp x$ și e^x . Funcția $x \mapsto \exp x$ va fi caracterizată printre funcțiile exponențiale prin faptul că derivata ei este 1 pentru $x = 0$.

Ecuatiile diferențiale $y' = ky$.

5. Funcția reciprocă a funcției $x \mapsto a^x$. Notăția $\text{Log } a$. Logaritmi zecimali și neperieni, notățiile Log sau $\ln$; formula $a^x = e^{x \text{Log } a}$.

Folosirea tabelor și a riglei de calcul.

6. Reprezentarea grafică a funcțiilor exponențiale și logaritmice.

7. Studiul funcțiilor $x \mapsto \frac{a^x}{x^n}$ pentru $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Se va enunța rezultatul cu privire

la limita acestor funcții când x tinde spre $+\infty$. (Orice demonstrație este în afara programei.)

Aplicație la funcțiile logaritmice.

Programa complementară

Calculul probabilităților.

Spații probabilistice finite $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$. Exemple (plecând de la măsura sau nu a cărților, a urnelor, ...).

Variabila aleatoare numerică; evenimente legate de o variabilă aleatoare X (de exemplu părțile lui Ω astfel ca $X(\omega) = a$, sau $X(\omega) < a$ pentru a dat); densitate discretă; funcția

de repartitie, crestere; speranta matematica (sau valoarea medie) si varianța unei variații aleatoare. Probabilitatea condițională a unui eveniment în raport cu un eveniment de probabilitate nenulă. Produs de spații probabilistice finite; exemple.

SECȚIUNEA B

„Rubricile programei au o ordine de enumerare. Această ordine exprimă uneori un exemplu din care profesorii s-ar putea inspira, ci nicidecum ceva obligatoriu; este, de exemplu, la alegere posibilitatea de a schimba I.1 cu 2 (noțiunile de continuitate și de limită) etc...”

I. Studiul funcțiilor numerice de o variabilă reală

1. Noțiunea de continuitate (într-un punct, pe un interval). Definiții, lămurite prin numeroase exemple și contra-exemple. Enunțul proprietăților funcțiilor continue (se vor admite teoremele cu privire la sumă, produsul, cîmul acestor funcții; se va admite că imaginea unui interval printr-o funcție continuă este un interval). Funcția reciprocă a unei funcții continue strict monotonă pe un interval. Exemple.

2. Noțiunea de limită.

Definiții, lămuriri prin numeroase exemple și contra-exemple. Se va arăta unicitatea limitei și se vor admite teoremele cu privire la limita unei sume, produs, cît.

Cazuri particulare de șiruri.

3. Noțiunea de derivată.

Revederea programei anului I B.

Derivata într-un punct a funcției compuse a două funcții derivabile; a funcției reciproce a unei funcții derivabile strict monotone.

Se va admite că dacă o funcție numerică admite o derivată pozitivă sau nulă pe un interval, ea este crescătoare (în sens larg) pe acest interval.

Studiul sensului de variație al unei funcții derivabile cu ajutorul semnelor derivatei ei. Exemple de reprezentare grafică de funcții derivabile pe intervale (se vor evita exemplele care reprezintă dificultăți tehnice).

II. Calculul integral

1. Suma Riemann a unei funcții numerice f de o variabilă reală definită pe un interval închis mărginit $[a, b]$. Se va admite că dacă f este continuă sau monotonă pe porțiuni, există un unic număr real $\int_a^b f(t) dt$ de care sumele lui Riemann se apropie arbitrar cînd

lungimea celui mai mare interval de subdiviziune este suficient de mică.

2. Proprietățile de liniaritate ale integralei unei funcții continue sau monotone pe porțiuni, pe un interval închis mărginit. Media unei asemenea funcții. Legătura cu derivata dacă funcția este continuă. Primitiva unei funcții continue, mulțimea primitivelor; egalitatea $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, f fiind continuă pe $[a, b]$ și admițînd pe F ca primitivă.

Calculul de primitive în cazuri simple; integrarea prin părți.

3. Se vor enunța, fără demonstrație, proprietățile ariilor a căror existență este admisă aci (aditivitatea, unitatea de arie).

Aplicarea calculului integral la evaluarea ariei părții $R \times R$ definită prin $a \leq x \leq b$ $0 \leq y \leq f(x)$, f fiind o funcție pozitivă, monotonă pe porțiuni, apoi o funcție pozitivă continuă.

Extensie la $b < a$ și la o funcție negativă.

III. Funcții elementare

Va fi necesar să se repartizeze diferitele rubrici ale acestui capitol în mai multe perioade ale anului, pentru a putea fi studiate în legătură cu titlurile I și II.

1. Funcțiile $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$); derivate, primitive, reprezentare grafică.

2. Funcțiile $x \mapsto x^r$ ($x > 0$, $r \in \mathbb{Q}$); derivate, primitive.

3. Șiruri aritmetice și geometrice. Suma primilor n termeni.

4. Funcții circulare (recapitulare); derivatele și primitivele lui $x \mapsto \cos(ax + b)$ și $x \mapsto \sin(ax + b)$.
 5. Logaritmul neperian (notația Log)

$$\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0).$$

Limita, cînd variabila pozitivă x tinde spre infinit, a lui $\text{Log } x$ și a lui $\frac{\text{Log } x}{x}$.

Limita, cînd x tinde spre 0, a lui $x \text{Log } x$. Reprezentarea grafică.

6. Funcția exponențială (notația $\exp$).

Proprietăți; derivata; reprezentarea grafică; numărul e ; notația e^x ; limita lui $\frac{e^x}{x}$ cînd x tinde spre $+\infty$.

7. Alte funcții logaritmice și exponențiale. Relații între funcțiile exponențiale și logaritmice de bază a și acelea de bază e .

IV. Statistică și probabilități

Revederea programei anului I B.

SECȚIUNEA D

a) Paragrafele marcate cu o steluță nu pot face obiectul chestiunilor la cursuri, pentru lucrările scrise sau orale, nici nu pot fi folosite, în matematici, cu ocazia unei probleme sau exercițiu, la scris sau la oral, la bacalaureat.

b) Rubricile programei au o ordine de enumerare. Această ordine exprimă uneori o idee din care profesorii s-ar putea inspira, nicidecum ceva obligatoriu; de exemplu, este la alegere de a da în I.3 o altă introducere a numerelor complexe, de a permuta pe II.1 și 2 (noțiunea de continuitate și de limită) etc...

c) De cîte ori va fi ocazie, se va pune în evidență, pe exemplele studiate în diferitele capitole, structurile de grup, subgrup, inel, corp, spațiu vectorial.

I. Numere reale; calcul numeric; numere complexe

1. Însușirea (fără demonstrație) a proprietăților lui $\mathbf{R}$: este un corp comutativ total ordonat (recapitulare); orice parte nevidă majorată admite un cel mai mic majorant; orice interval din $\mathbf{R}$ care conține mai mult de un punct conține un număr rațional.

2. Valorile zecimale apropiate cu aproximație de 10^{-n} , prin lipsă și prin adaos ale unui număr real.

Reprezentarea unui număr real printr-un șir zecimal nelimitat (studiul periodicității nu este în programă). Valorile apropiate ale unui număr real, încadrare, incertitudine absolută și relativă.

Valorile apropiate ale unei sume, ale unei diferențe, ale unui produs, ale unui cît de numere reale ale căror valori apropiate se cunosc.

Vor fi făcute numeroase exerciții de calcul numeric cu ocazia studiului funcțiilor uzuale și cu ocazia problemelor, pentru a pune în practică noțiunile de valori apropiate, de încadrare, de ordin de mărime al unui rezultat, de incertitudine (cf. IV.8).

3. Adunarea și înmulțirea matricilor 2×2 înzestreaază mulțimea $\mathbf{C}$ a matricilor cu coeficienți reali de forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu o structură de corp comutativ. Identificarea lui $\mathbf{R}$

cu un subcorp al lui $\mathbf{C}$ prin aplicația $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}$ este un spațiu vectorial de dimensiune 2 pe $\mathbf{R}$. Notația $a + bi$; număr complex; numere complexe conjugate; modulul unui număr complex.

4. Homomorfismul θ al lui $\mathbf{R}$ pe grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul 1 (a se vedea cursul de anul I); forma trigonometrică a unui număr complex nenul:

$r(\cos x + i \sin x)$ cu $r > 0$ și $x \in \mathbb{R}$; argumentul unui asemenea număr (clasa numerelor x sau, prin abuz de limbaj, unul din ele).

Calculul lui $\cos nx$ și al lui $\sin nx$ ($x \in \mathbb{R}$, $n = 2, 3, 4$) și linearitatea polinoamelor trigonometrice.

Existența și reprezentarea geometrică a rădăcinilor n -a ale unui număr complex ($n \leq 4$).

5. Rezolvarea ecuațiilor de gradul I și de gradul II cu coeficienți complecși; calculul părților reale și imaginare ale rădăcinilor; cazul coeficienților reali.

II. Calculul diferențial

1. Funcții numerice de o variabilă reală: continuitate. Continuitatea „într-un punct”; continuitatea pe un interval; sumă, produs, cît de funcții continue; continuitatea funcției compuse a două funcții continue (fără demonstrație).

Se va admite fără demonstrație următoarea teoremă: „dacă o funcție este continuă pe un interval, imaginea prin funcție a acestui interval este un interval”. Aplicație la o funcție continuă și strict monotonă pe un interval: existența funcției reciproce; monotonia și continuitatea acestei funcții (se va admite continuitatea).

2. Funcții numerice de o variabilă reală: limite.

Limita unei funcții atunci cînd variabila tinde spre un număr real dat, spre infinit. Unicitatea.

Cazuri particulare de șiruri.

Limita unei sume, a unui produs, a unui cît (fără demonstrație).

3. Funcții numerice de o variabilă reală: derivată. Revederea programei anului I D: funcția lineară tangență într-un punct la o funcție dată; notația diferențială; derivata în acest punct.

Funcția derivată; derivata unei sume, a unui produs, a unui cît de funcții derivabile. Interpretarea geometrică a derivatei (reper cartezian); ecuația tangentei.

Definiția derivatelor succesive.

Derivata într-un punct a funcției compuse a două funcții derivabile.

Derivata într-un punct a reciproci unei funcții derivabile și strict monotonă.

Se va admite fără demonstrație că dacă o funcție numerică este derivabilă pe un interval și dacă derivata ei este pozitivă sau nulă ea este crescătoare în sens larg pe acest interval.

Compararea a două funcții care au aceeași funcție derivată pe un interval.

Studiul sensului de variație al unei funcții derivabile cu ajutorul semnului derivatei ei. Reprezentarea grafică.

4. Funcții vectoriale de o variabilă reală.

Aplicația unei părți a lui $\mathbb{R}$ într-un spațiu vectorial euclidian de dimensiune finită.

Continuitatea într-un punct; limita unei funcții cînd variabila tinde spre un număr real dat, spre infinit.

Derivata într-un punct; dacă spațiul vectorial este raportat la o bază, coordonatele, în această bază ale derivatei; funcția derivată.

Derivata unei sume de funcții vectoriale derivabile, a produsului unei funcții vectoriale derivabile printr-o funcție numerică derivabilă.

Derivata produsului scalar a două funcții vectoriale derivabile.

Aplicație la căutarea de tangente. Exemple.

5. Cinematica punctului.

Miscarea unui punct: aplicația unui interval din $\mathbb{R}$ într-un spațiu afin euclidian. Traiectoria.

Vectorul viteze la un moment dat. Fiind ales un reper, coordonatele vectorului viteză în acest reper. Norma vectorului viteză.

Vectorul accelerație la un moment dat. Fiind ales un reper, coordonatele vectorului accelerație în acest reper.

Studiul mișcărilor circulare (viteza unghiulară); studiul mișcărilor helicoidale uniforme.

III. Calculul integral

1. Definiția sumelor lui Riemann a unei funcții numerice de o variabilă reală pe un interval închis, mărginit. Existența integralei pentru o funcție monotonă; notația

$\int_a^b f(x)dx$; primele proprietăți. Se va admite că aceste proprietăți se extind cu funcții continue sau monotone pe porțiuni.

Media unei asemenea funcții pe un interval închis, mărginit.

Legătura cu derivata în puncte în care funcția este continuă.

Primitive; mulțimea primitivelor; egalitatea

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

f fiind continuă pe $[a, b]$ și admitînd pe F ca primitivă.

Calcul de primitive; integrarea prin părți.

2. Se vor enunța fără demonstrație proprietățile ariilor a căror existență este admisă aici (aditivitatea, unitatea de arie...).

Aplicarea calculului integral la evaluarea ariei părții lui $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definită prin:

$$a \leq x \leq b \quad 0 \leq y \leq f(x),$$

f fiind o funcție pozitivă, monotonă pe porțiuni, apoi o funcție pozitivă continuă.

Extensia la $b < a$ și la o funcție negativă.

3*. Aplicații geometrice, mecanice, fizice etc... (calcul de volume, mase, momente de inerție; viteza și distanța parcursă; intensitatea și cantitatea de electricitate; putere și energie etc...).

Valoarea eficace a unui fenomen periodic.

IV. Exemple de funcții de o variabilă reală

Anumite rezultate din acest capitol, deja cunoscute elevilor vor putea să ilustreze capitolele precedente; va fi necesar să se repartizeze diferitele rubrici ale acestui capitol între mai multe etape ale anului.

1. Funcția $x \rightarrow x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$); derivata; primitiva.

2. Funcția $x \rightarrow x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$; $x > 0$); derivata; primitiva.

3. Șiruri aritmetice și geometrice. Suma primilor n termeni.

4. Funcții circulare; derivatele (recapitulare); derivate și primitive ale lui $x \mapsto \cos(ax + b)$ și $x \mapsto \sin(ax + b)$.

5. Logaritm neperian (notația Log)

$$\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0).$$

Limita lui $\text{Log } x$ și $\frac{\text{Log } x}{x}$, cînd variabila pozitivă x tinde spre infinit.

Limita lui $x \text{Log } x$ cînd x tinde spre 0. Reprezentarea grafică.

6. Funcția exponențială (notația $\exp$).

Proprietăți; derivata; reprezentarea grafică; numărul e ; notația e^x ; limita lui $\frac{e^x}{x}$ cînd x tinde spre $+\infty$.

7. Alte funcții logaritmice și exponențiale.

Relații între funcțiile logaritmice și exponențiale de bază a și cele de bază e .

Notația $e^{i\omega x}$ pentru a desemna $\cos x + i \sin x$; ω fiind o constantă reală, derivata funcției $x \mapsto e^{i\omega x}$.

Observație: Studiul de exemple de funcții compuse de tip logaritmice sau exponențiale va fi strict limitat la cazurile în care sînt în cauză intervalele pe care derivata păstrează un semn constant și în care nedeterminările ce trebuie înlăturate sînt numai acelea care au fost enumerate mai sus.

8. Calcul numeric.

Folosirea riglei de calcul;

Folosirea tabelelor; practica interpolării liniare. Tabele de logaritmi.

Întrebuințarea mașinilor de calcul de birou.

9*. Ecuații diferențiale.

Căutarea funcțiilor variabilei reale x o dată sau de două ori derivabile care verifică ecuațiile:
 $y' = ay$, a fiind o constantă reală,
 $y'' + \omega^2 y = 0$, ω fiind o constantă reală nenulă (se va admite că soluțiile formează un spațiu vectorial de dimensiune 2).

V. Elemente de algebră liniară

1. Geometrie vectorială:

- revederea capitoului IV din anul I D;
 - se va admite că spațiul euclidian real este orientabil; produsul vectorial a doi vectori din spațiul euclidian orientat de dimensiune 3.
2. Baricentru într-un spațiu afin. Reper afin.
Reducerea în cazul euclidian al lui

$$I(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2.$$

3. Interpretarea geometrică a unei aplicații $z \mapsto az + b$ (a, b complexe), $a \neq 0$, după identificarea planului cu corpul numerelor complexe, datorită alegerii unui reper ortonormat; grupul asemănărilor directe ale planului.

VI. Probabilități pe o mulțime finită; statistică

1. Spații probabilistice finite (Ω , $\mathcal{B}(\Omega)$, p).

Aplicații măsurabile (sau variabile aleatoare): probabilitatea imagine; funcția de repartiție a unei variabile aleatoare reale.

Perechi de variabile aleatoare reale, legea perechii. Legi marginale. Perechea independentă. Sistem de n variabile aleatoare independente.

2. Valoarea medie a unei variabile aleatoare cu valori în $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{R}^2$. Valoarea medie a sumei a două variabile aleatoare reale a unei perechi, a produsului în cazul unei perechi independente.

Dispersia, abaterea medie a unei variabile aleatoare reale.

3. Inegalitatea lui Bienaymé-Cebîșev. Experiențe repetate, legea mică a numerelor mari.

4. Descrierea statistică a unei populații sau a unui eșantion (revederea programei de statistică din anul I D, titlul VII-1°; exerciții practice din această programă: calculul de coeficienți de corelație).

TERMINALA C ȘI E (Preambul)

a) Paragrafele marcate cu o steluță nu pot face obiectul la cursuri, pentru lucrările scrise sau orale, nici nu pot fi folosite, în matematici, cu ocazia unei probleme sau exercițiu, la scris sau la oral, la bacalaureat.

SECȚIUNEA C

b) Rubricile programei au o ordine de enumerare. Această ordine este uneori o schiță din care profesorii s-ar putea inspira, ci nicidecum ceva obligatoriu; este la alegere, de exemplu, să se permute în I.3 cele trei alineate care privesc numerele întregi, III.1 și 2 (noțiunile de continuitate și de limită), să se dea în II.3 o altă introducere a numerelor complexe etc....

SECȚIUNEA E

b) Rubricile programei au o ordine de enumerare. Această ordine este uneori o schiță din care profesorii s-ar putea inspira, ci nicidecum ceva obligatoriu; este la alegere, de exemplu, să se dea în II.3 o altă introducere a numerelor complexe, să se permute III.1 și 2 (noțiunile de continuitate și de limită) etc..

c) Ori de câte ori va fi ocazie, se va pune în evidență, pe baza exemplelor studiate în diferitele capitole, structurile de grup, subgrup, inel, corp, spațiu vectorial, precum și izomorfismele, homomorfismele (nucleul), automorfismele întâlnite.

SECȚIUNEA C

I. Numere naturale întregi aritmetice

1*. Enunțul proprietăților atribuite mulțimii N a întregilor naturali. Raționament prin recurență. Aplicații ale lui N într-o mulțime X ; notația indicială; exemple.

2. Inelul Z al întregilor relativi; multiplii unui întreg relativ: notația nZ .

Congruențe modulo n ; inelul Z/nZ ; împărțirea euclidiană în Z , în N .

Principiul sistemelor de numerație; bază; numerații zecimale și binare.

3. a) Numere prime în Z ; dacă p este prim, Z/pZ este un corp.

b) Descompunerea unui număr în factori primi; existență, unicitate.

c) Cel mai mare divizor comun și cel mai mic comun multiplu; numere prime între ele; identitatea lui Bézout. (Ordinea lui a), b), c) este, bineînțeles, lăsată la alegerea profesorului.)

SECȚIUNEA E

I. Numere întregi naturale aritmetice

Exemple de raționament prin recurență.

Exemple de folosire a notației indiciale.

Principiul sistemelor de numerație; bază; numerații zecimal și binară.

SECȚIUNEA C ȘI E

II. Numere reale. Calcul numeric. Numere complexe

1. Enumerarea (fără demonstrație) a proprietăților lui R : R este un corp comutativ total ordonat (recapitulare); orice parte nevidă majorată, admite un cel mai mic majorant; orice interval din R care conține mai mult de un punct conține un număr rațional.

2. Valorile zecimale cu aproximație de 10^{-n} , prin lipsă și prin adaos, ale unui număr real. Reprezentarea unui număr real printr-un șir zecimal nelimitat (studiul periodicității nu este în programă).

Valorile aproximative ale unui număr real, încadrare, eroare absolută și relativă.

Valorile aproximative ale unei sume, ale unei diferențe, ale unui produs, ale unui cît de numere reale, ale căror valori cu aproximație se cunosc.

Vor fi făcute numeroase exerciții de calcul numeric cu ocazia studiului funcțiilor uzuale și cu ocazia problemelor, pentru a pune în practică noțiunile de valori aproximative, de încadrare, de ordin de mărime al unui rezultat, de eroare (cf. V.8).

3. Adunarea și înmulțirea matricelor 2×2 înzestrează mulțimea C a matricelor cu coeficienți reali de forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu o structură de corp comutativ. Identificarea lui R cu

un subcorp al lui C prin aplicația $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; C este un spațiu vectorial de dimensiune 2 pe R . Notația $a + bi$; numere complexe; numere complexe conjugate; modulul unui număr complex.

4. Homomorfismul θ al lui R pe grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul 1 (reamintire din anul I); forma trigonometrică a unui număr complex nenul: $r(\cos x + i \sin x)$ cu $r > 0$ și $x \in R$; argumentul unui asemenea număr (clasa numerelor x sau, prin abuz de limbaj, unul dintre ele). Calculul lui $\cos nx$ și al lui $\sin nx$ ($x \in R$, $n = 2, 3, 4$) și liniarizarea polinoamelor trigonometrice.

Existența și reprezentarea geometrică a rădăcinilor de ordinul n ale unui număr complex.

5. Rezolvarea ecuațiilor de gradul I și de gradul II cu coeficienți complecși; calculul părților reale și imaginare ale rădăcinilor; cazul coeficienților reali.

III. Calcul diferențial

1. Funcții numerice de o variabilă reală: continuitate. Continuitatea „într-un punct”; continuitatea pe un interval; sumă, produs, cît, de funcții continui; continuitatea funcției compuse a două funcții continui (fără demonstrație).

Se va admite fără demonstrație următoarea teoremă: „dacă o funcție este continuă pe un interval, imaginea prin funcție, a acestui interval, este un interval”. Aplicație la o funcție continuă și strict monotonă pe un interval; existența funcției reciproce; monotonia și continuitatea acestei funcții (se va admite continuitatea).

2. Funcții numerice de o variabilă reală: limite. Limita unei funcții cînd variabila tinde spre un număr real dat, spre infinit. Unicitate. Caz particular de șiruri. Limita unei sume, a unui produs, a unui cît (fără demonstrație).

3. Funcții numerice de o variabilă reală: derivarea. Revederea programei din anul I: funcția liniară tangentă într-un punct la o funcție dată; notația diferențială; derivata în acest punct. Funcția derivată; derivata unei sume, a unui produs, a unui cît de funcții derivabile.

Interpretarea geometrică a derivatei (reper cartezian); ecuația tangentei. Definiția derivatelor succesive.

Derivata într-un punct a funcției compuse a două funcții derivabile.

Derivata într-un punct a reciprocei unei funcții derivabile și strict monotone.

Se va admite fără demonstrație că dacă o funcție numerică este derivabilă pe un interval și dacă derivata ei este pozitivă sau nulă, ea este crescătoare în sens larg pe acest interval. Compararea a două funcții care au aceeași funcție derivată pe un interval.

Studiul sensului de variație al unei funcții derivabile cu ajutorul semnului derivatei ei. Reprezentarea grafică; exerciții simple de găsirea asimptotelor.

4. Funcții vectoriale de o variabilă reală.

Aplicația unei părți a lui $\mathbb{R}$ într-un spațiu vectorial euclidian de dimensiune finită.

Continuitatea într-un punct; limita unei funcții cînd variabila tinde spre un număr real dat, spre infinit.

Derivata într-un punct; dacă spațiul vectorial este raportat la o bază, coordonatele, în această bază ale derivatei; funcția derivată. Derivata unei sume de funcții vectoriale derivabile, a produsului unei funcții vectoriale derivabile printr-o funcție numerică derivabilă.

Derivata produsului scalar a două funcții vectoriale derivabile.

Aplicație la găsirea de tangente; exemple de conice și de elice circulare.

5. Cinematica punctului.

Mișcarea unui punct: aplicația unui interval din $\mathbb{R}$ într-un spațiu afin euclidian. Traietorie.

Vectorul-viteză la un moment dat. Fiind ales un reper, coordonatele vectorului-viteză în acest reper. Norma vectorului-viteză.

Vectorul-acelerație la un moment dat. Fiind ales un reper, coordonatele vectorului-acelerație în acest reper. Studiul mișcărilor circulare (viteza unghiulară); studiul mișcărilor helicoidale uniforme.

IV. Calcul integral

1. Definiția sumelor Riemann ale unei funcții numerice de o variabilă reală pe un interval închis, mărginit. Existența integralei pentru o funcție monotonă; notația $\int_a^b f(t) dt$;

primele proprietăți.

Se va admite că aceste proprietăți se extind la funcții continui sau monotone pe porțiuni.

Media unei asemenea funcții pe un interval închis, mărginit.

Legătura cu derivata în puncte în care funcția este continuă.

Primitive; mulțimea primitivelor; egalitatea

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

f fiind continuă pe $[a, b]$ și admitând pe F ca primitivă.

Calcul de primitive; integrare prin părți.

2. Se vor enunța, fără demonstrație, proprietățile ariilor a căror existență este admisă aici (aditivitatea, unitatea de arie,...). Aplicarea calculului integral la evaluarea ariei părții lui $R \times R$ definită prin: $a \leq x \leq b$ $0 \leq y \leq f(x)$,

f fiind o funcție pozitivă, monotonă pe porțiuni, apoi o funcție pozitivă continuă. Extensie la $b < a$ și la o funcție negativă.

SECȚIUNEA C ȘI E

3*. Aplicații geometrice, mecanice, fizice etc... (calcul de volume, de mase, momente de inerție; viteză și distanța parcursă; intensitatea și cantitatea de electricitate; putere și energie etc...) Valoarea eficace a unui fenomen periodic.

V. Exemple de funcții de o variabilă reală

Anumite rezultate ale acestui capitol, deja cunoscute elevilor, vor putea să ilustreze capitolele precedente; va fi cazul să se repartizeze diferitele rubrici ale acestui capitol între mai multe momente ale anului.

1. Funcția $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$); derivată; primitive.

2. Funcția $x \mapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q} : x > 0$); derivată; primitive.

3. Progresii aritmetice și geometrice. Suma primilor n termeni.

4. Funcții circulare; derivate (recapitulare); derivatele și primitivele lui $x \mapsto \cos(ax + b)$ și $x \mapsto \sin(ax + b)$.

5. Logaritmul neperian (notația Log și $\ln$). $\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ ($x > 0$). Limita când variabila

pozitivă x tinde spre infinit a lui $\text{Log } x$ și $\frac{\text{Log } x}{x}$. Limita lui $x \text{Log } x$ când x tinde spre 0.

Reprezentarea grafică.

6. Funcția exponențială (notația $\exp$).

Proprietăți; derivata; reprezentarea grafică; numărul e notația e^x ; Limita lui $\frac{e^x}{x}$ când x tinde spre $+\infty$.

7. Alte funcții logaritmice și exponențiale. Relații între funcțiile logaritmice și exponențiale de bază a și acelea de bază e .

SECȚIUNEA C

Definiția lui x^α unde $\alpha \in \mathbb{R}$; derivata funcției $x \mapsto x^\alpha$.

SECȚIUNEA C ȘI E

* Notația e^{ix} pentru a desemna $\cos x + i \sin x$; ω fiind o constantă reală, derivata funcției $x \mapsto e^{i\omega x}$.

Observație: Studiul funcțiilor compuse de tip logaritmice sau exponențiale va fi strict limitat la cazurile în care sînt în evidență intervalele pe care derivata păstrează semn constant și în care nedeterminările de fulăturat sînt numai acelea enumerate mai sus.

SECȚIUNEA C

8. Calcul numeric. Folosirea riglei de calcul; folosirea tabelelor, practica interpolării liniare. Tabele de logaritmi. Folosirea mașinilor de calcul de birou.

SECȚIUNEA E

8. Calcul numeric. Revederea programelor din anul II T și anul I E.

SECȚIUNEA C ȘI E

9*. Ecuații diferențiale. Cercetarea funcțiilor numerice, odată sau de două ori derivabile, de variabilă x care verifică ecuațiile: $y' = ay$, a fiind o constantă reală. $y'' + \omega^2 y = 0$, ω fiind o constantă reală nenulă (se va admite că soluțiile formează un spațiu vectorial de dimensiune 2).

SECȚIUNEA C ȘI E

VI. Elemente de geometrie afină și euclidiană

N.B.: În acest paragraf corpul de bază este $\mathbb{R}$ și dimensiunea n este totdeauna egală cu 2 sau 3. O „transformare a unei mulțimi E ” este o bijecție a lui E pe ea însăși; o aplicație f a lui E în ea însăși este o involuție dacă $f \circ f$ este identitate: aceasta este o transformare a lui E .

1. Suma directă a două subspații vectoriale; subspații vectoriale suplimentare. Aplicația liniară a unui spațiu vectorial E într-un spațiu vectorial F ; imagine și nucleu. Adunarea și compunerea aplicațiilor liniare. Grup liniar. Omotetii vectoriale.

2. Baricentru într-un spațiu afin. Reper afin. Reducerea în cazul euclidian a lui:

$$I(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2.$$

3. Aplicația afină a unui spațiu afin E în el însuși, aplicația liniară asociată. Exemple: proiecția paralelă pe un subspațiu afin; involuții afine, punctele lor fixe; translații și omotetii.

4. Aplicații liniare ale unui spațiu vectorial în el însuși, păstrind norma; transformări ortogonale (izometrii vectoriale), grup ortogonal.

Elemente fixe ale transformărilor ortogonale involutive (simetrii) în planul vectorial și în spațiul vectorial de dimensiune 3. Orientarea planului vectorial euclidian (reamintire din anul I).

Studiul rotațiilor vectoriale din spațiul vectorial euclidian de dimensiune 3 (prin definiție, o asemenea rotație este fie identitatea, fie o transformare ortogonală, care are ca singure elemente fixe cele două drepte vectoriale); grup de rotații vectoriale; orientarea spațiului. Produs vectorial în spațiul vectorial euclidian orientat, de dimensiune 3.

5. Definiția unei izometрии a spațiului afin euclidian. Orice izometrie este o bijecție afină. Grup de izometрии; subgrup de deplasări. Simetrii, translații, rotații în planul afin euclidian: orice deplasare este de unul din aceste ultime două tipuri.

Simetrii, translații, rotații, înșurubări în spațiul afin euclidian de dimensiune 3; se va admite că orice deplasare este de unul din aceste ultime trei tipuri.

Exemple simple de grupuri de izometрии care lasă neschimbată o mulțime dată.

VII. Complemente de geometrie euclidiană plană

1. Unghiul unei perechi de semidrepte vectoriale (reamintire din anul I).

Grupul $\mathcal{A}$ al unghiurilor de semidrepte.

Unghiul unei perechi de drepte vectoriale (mulțimea a două rotații vectoriale care transformă pe prima în a doua).

Grupul $\mathcal{A}'$ al unghiurilor de drepte.

Homomorfismul canonic $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$; nucleul lui.

Izomorfismul lui $\mathcal{A}'$ pe $\mathcal{A}$ dedus din homomorfismul $\alpha \mapsto \alpha + \alpha$ al lui $\mathcal{A}$ pe $\mathcal{A}'$.

Condiția, în cazul unghiurilor de drepte, ca patru puncte să fie conciclice.

2. Asemănări plane (adică aplicații ale planului în el însuși, păstrând rapoartele de distanță). Reprezentarea prin formulele $z' = az + b$ sau $z' = \bar{a}z + b$ atunci când planul a fost identificat cu $\mathbb{C}$ datorită alegerii unui reper ortonormat.

Punctele fixe ale asemănarilor. Grupul asemănarilor planului și subgrupuri remarcabile.

SECȚIUNEA C

3. Studiul curbelor reprezentate, într-un reper ortonormat, prin ecuații de forma:

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \quad (|a| + |b| \neq 0).$$

Diferitele forme ale acestor curbe; existența axelor sau a centrelor de simetrie, a asimptotelor; ecuații reduse; existența tangentei.

Elipsa, hiperbola, parabola definite prin proprietățile punctelor lor care fac să intervină focarele și directoarele (proprietățile tangentelor la conice sînt în afara programei).

Ecuația hiperbolei raportată la asimptotele ei.

SECȚIUNEA E

3. Studiul curbelor reprezentate, într-un reper ortonormat, prin ecuații de forma:

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \quad (|a| + |b| \neq 0).$$

Diferitele forme ale acestor curbe; existența axelor sau a centrelor de simetrie, a asimptotelor. Ecuații reduse: elipsa, hiperbola, parabola.

Existența tangentei. Ecuația hiperbolei raportată la asimptotele ei.

4. Geometrie descriptivă. Chestiunile enumerate mai jos vor fi avantajos studiate în legătură cu cursul de geometrie din această clasă și din clasa anterioară; ele vor servi util la ilustrarea ei.

Rotația în jurul unei axe verticale sau de capăt.

Rabaterea unui plan pe un plan orizontal sau frontal.

Distanța a două puncte, a unui punct la o dreaptă, a unui punct la un plan, unghiul a două drepte.

Proiecția unui cerc: epura.

Reprezentarea unui cilindru de revoluție, a unui con de revoluție a cărui bază circulară este planul orizontal de proiecție.

Construcția prin puncte și tangente a proiecției orizontale (respectiv frontala) a intersecției unei asemenea suprafețe printr-un plan de capăt (respectiv vertical).

Reprezentarea elicei circulare drepte trasată pe un cilindru de revoluție de axă verticală.

SECȚIUNEA C ȘI E

VIII. Probabilități pe o mulțime finită

1. Spații probabilistice finite (Ω , $\mathcal{S}(\Omega)$, p).

Aplicații măsurabile (sau variabile aleatoare): probabilitatea imagine, funcția de repartiție a unei variabile aleatoare reale.

Pereche de variabile aleatoare reale, legea perechii. Legi marginale.

Pereche independentă. Sistem de n variabile aleatoare independente.

2. Valoarea medie a unei variabile aleatoare cu valori în $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{R}^2$.

Valoarea medie a sumei a două variabile aleatoare reale a unei perechi, a produsului în cazul unei perechi independente.

Dispersia, abaterea medie a unei variabile aleatoare reale.

3. Inegalitatea lui Bienaymé-Cebîșev. Experiențe repetate; legea mică a numerelor mari.

Alfabetul grec

A	α	alfa	a
B	β, b	beta	b
Γ	γ	gama	g
Δ	δ	delta	d
E	ϵ	epsilon	e scurt
Z	ζ	zeta	z
H	η	eta	e lung
Θ	θ	teta	th
I	ι	iota	i
K	κ	kapa	k
Λ	λ	lambda	l
M	μ	miu	m
N	ν	niu	n
Ξ	ξ	csi	ks
O	$\omicron$	omicron	o scurt
Π	π	pi	p
P	ρ	ro	r
Σ	σ, ς	sigma	s
T	τ	tau	t
Υ	υ	ipsilon	ü
Φ	φ	fi	ph, f
X	χ	hi	ch
Ψ	ψ	psi	ps
Ω	ω	omega	o lung

1. NUMERE REALE

1.1. Proprietăți ale mulțimii $\mathbb{R}$

1.2. Calcule de aproximări

1.1. PROPRIETĂȚI ALE MULȚIMII $\mathbb{R}$

1.1.1. Corp comutativ total ordonat

1. Reamintim că o mulțime K , înzestrată cu două operații notate cu semnele uzuale $+$ (adunare) și $\times$ (înmulțire) se numește *corp comutativ* dacă este deja un inel comutativ unitar pentru aceste legi, și dacă fiecare element nenul admite un invers pentru înmulțire:

$$\left. \begin{array}{l} a + (b + c) = (a + b) + c \\ a(bc) = (ab)c \end{array} \right\} \text{asociativitate}$$
$$\left. \begin{array}{l} a(b + c) = ab + ac \\ (a + b)c = ac + bc \end{array} \right\} \text{distributivitate}$$
$$\left. \begin{array}{l} a + b = b + a \\ ab = ba \end{array} \right\} \text{comutativitate}$$
$$\left. \begin{array}{l} a + 0 = 0 + a = a \\ a \times 1 = 1 \times a = a \end{array} \right\} \text{elemente neutre}$$
$$\left. \begin{array}{l} a + (-a) = (-a) + a = 0 \\ (a \neq 0) \quad aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \end{array} \right\} \text{elemente simetrice}$$

2. Un astfel de corp comutativ este total ordonat dacă se poate defini, pe mulțimea K , o relație de ordine totală, compatibilă cu adunarea și cu înmulțirea cu un element pozitiv (adică mai mare sau egal cu 0):

$$\left. \begin{array}{l} a \geq a \\ (a \geq b \text{ și } b \geq c) \implies (a \geq c) \\ (a \geq b \text{ și } b \geq a) \implies (a = b) \\ a \not\geq b \implies b \geq a \end{array} \right\} \text{ordine totală}$$

$$\left. \begin{array}{l} (a \geq b) \Rightarrow (a + c \geq b + c) \\ (a \geq b \text{ și } c \geq 0) \Rightarrow (ac \geq bc) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \text{ compatibilitate}$$

3. Vom admite existența unor astfel de corpuri. Să studiem cîteva consecințe ale definițiilor de mai sus, folosind în mod liber simbolurile $\leq$, $>$ și $<$ definite prin relațiile imediate:

$$\begin{aligned} (a \leq b) &\Leftrightarrow (b \geq a); \\ (a > b) &\Leftrightarrow (a \geq b \text{ și } a \neq b); \\ (a < b) &\Leftrightarrow (b > a). \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \boxed{(a + c \geq b + c) \Rightarrow (a \geq b)} \quad (3)$$

Într-adevăr, este suficient să aplicăm implicația (1):

$$(a + c \geq b + c) \Rightarrow (a + c + [-c] \geq b + c + [-c]).$$

$$\blacksquare \quad \boxed{(a \geq b) \Leftrightarrow (a + c \geq b + c)} \quad (4)$$

Aceasta este consecința relațiilor (1) și (3).

$$\blacksquare \quad \boxed{(a > b) \Leftrightarrow (a + c > b + c)} \quad (5)$$

Este suficient să remarcăm că egalitățile $a = b$ și $a + c = b + c$ sînt echivalente și să aplicăm echivalența (4).

$$\blacksquare \quad \boxed{(a > 0) \Rightarrow (-a < 0)} \quad (6)$$

Într-adevăr, se poate scrie:

$$(a > 0) \Rightarrow (a + [-a] > 0 + [-a]).$$

$$\blacksquare \quad \boxed{(a < 0) \Rightarrow (-a > 0)} \quad (7)$$

Aceasta rezultă din implicația:

$$(0 > a) \Rightarrow (0 + [-a] > a + [-a]).$$

$$\blacksquare \quad \boxed{(a > 0) \Leftrightarrow (-a < 0)} \quad (8)$$

Aceasta este o consecință imediată a relațiilor (6) și (7), și a egalității $a = -(-a)$.

$$\blacksquare \quad \boxed{a^2 \geq 0} \quad (9)$$

Dacă a este pozitiv sau nul, atunci, din relația (2):

$$a \geq 0 \implies a^2 = aa \geq a0.$$

Ori, $a0$ este nul, pentru că:

$$a0 + a0 = a(0 + 0) = a0.$$

Dacă a este negativ sau nul, se scrie la fel:

$$-a \geq 0 \implies a^2 = (-a)(-a) \geq (-a)0 = 0.$$

Aceasta dovedește că ecuația $x^2 = k$ nu are rădăcini dacă k este strict negativ.

$$\blacksquare \quad \boxed{1 > 0} \quad (10)$$

Într-adevăr: $1 = 1 \times 1 = 1^2 \neq 0$.

$$\blacksquare \quad \boxed{(a > 0) \implies (a^{-1} > 0)} \quad (11)$$

Dacă am avea: $a^{-1} \leq 0$, am putea atunci să deducem inegalitatea: $aa^{-1} \leq a0$, adică:

$$1 \leq 0,$$

ceea ce este fals.

$$\blacksquare \quad \boxed{(a < 0) \implies (a^{-1} < 0)} \quad (12)$$

Dacă am avea: $a^{-1} \geq 0$, am putea atunci să deducem inegalitatea: $aa^{-1} \leq 0a^{-1}$, adică:

$$1 \leq 0.$$

$$\blacksquare \quad \boxed{(a > 0) \iff (a^{-1} > 0)} \quad (13)$$

Aceasta este o consecință imediată a relațiilor (11) și (12), și a egalității $a = (a^{-1})^{-1}$.

$$\blacksquare \quad \boxed{(a > b \text{ și } c > 0) \implies (ac > bc)} \quad (14)$$

Avem cu ușurință: $ac \geq bc$. Dacă egalitatea ar fi verificată, multiplicând prin c^{-1} care este pozitiv (11), am găsi egalitatea $a = b$, care este falsă.



$$(ac > bc \text{ și } c > 0) \implies (a > b) \quad (15)$$

Ceea ce nu este alta decît relația (14) dacă ținem seama de echivalența:

$$c > 0 \iff c^{-1} > 0.$$

4. Semnalăm încă *regulile semnelor*:

$(a \geq 0 \text{ și } b \geq 0) \implies (a + b \geq 0)$	(16)
$(a \leq 0 \text{ și } b \leq 0) \implies (a + b \leq 0)$	(17)
$(a \geq 0 \text{ și } b > 0) \implies (a + b > 0)$	(18)
$(a \leq 0 \text{ și } b < 0) \implies (a + b < 0)$	(19)
$(a \geq 0 \text{ și } b \geq 0) \implies (ab \geq 0)$	(20)
$(a \leq 0 \text{ și } b \geq 0) \implies (ab \leq 0)$	(21)
$(a \leq 0 \text{ și } b \leq 0) \implies (ab \geq 0)$	(22)
$(a > 0 \text{ și } b > 0) \implies (ab > 0)$	(23)
$(a < 0 \text{ și } b > 0) \implies (ab < 0)$	(24)
$(a < 0 \text{ și } b < 0) \implies (ab > 0)$	(25)

Acestea sînt consecințe imediate ale relațiilor (1), (2), (8), (13) și a tranzitivității relației de ordine. De exemplu:

$$(a \geq 0 \text{ și } b \geq 0) \implies (a + b \geq b \text{ și } b \geq 0);$$

de unde relația (16).

Ipoteza $(a \geq 0 \text{ și } b > 0)$ implică deci:

$$a + b \geq 0,$$

și egalitatea $a + b = 0$ devine imposibilă datorită relației (8) etc. La fel, pentru implicațiile privind produsul, dacă se remarcă proprietatea fundamentală:

$$(ab = 0) \implies (a = 0 \text{ sau } b = 0).$$

5. În sfîrșit, un corp comutativ total ordonat K conține o submulțime izomorfă cu inelul $\mathbb{Z}$ al întregilor relativi:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

cum se vede asociind întregul 0 cu elementul neutru al adunării, întregul 1 cu elementul neutru al înmulțirii, întregul n cu elementul corpului obținut prin adunarea a n elemente egale cu elementul asociat cu 1, întregul $(-n)$ cu opusul elementului asociat lui n ; se poate arăta ușor inegalitatea: $n > 0$, apoi inegalitatea: $0 > -n$, stabilind o bijecție între $\mathbb{Z}$ și o parte a corpu-

lui K , și apoi se poate verifica că această bijecție respectă adunarea, înmulțirea și relația de ordine uzuală a lui $\mathbb{Z}$. (Un corp comutativ total ordonat este deci infinit.) Vom scrie, prin abuz de limbaj:

$$\mathbb{Z} \subset K.$$

1.1.2. Corpul numerelor reale

Vom admite existența unui corp, notat $(\mathbb{R}, +, \times)$ (sau, mai scurt, $\mathbb{R}$), numit corpul *numerelor reale*, deja utilizat în clasele anterioare, și definit prin axiomele următoare.

DEFINIȚIA / Se numește număr real orice element al unei mulțimi $\mathbb{R}$ ce posedă următoarele proprietăți:

1

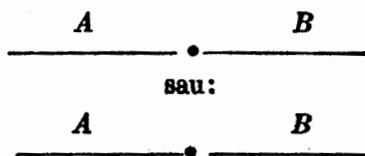
A1 $\mathbb{R}$ poate primi structura de corp comutativ total ordonat.
 A2 Orice egalitate de forma $\mathbb{R} = A \cup B$, unde A și B sînt părți nevide astfel încît orice element al lui A este strict mai mic decît orice element al lui B , implică existența unui număr real mai mare sau egal cu orice element al lui A și mai mic sau egal cu orice element al lui B .

Nu toate corpurile comutative total ordonate satisfac axioma A2; se poate arăta că corpul $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale se poate scrie sub forma cerută (se ia pentru A mulțimea raționalilor r astfel încît: $r < 0$ sau: $r^2 < 2$) fără să existe nici un rațional care să separe A de complementara sa B .

Vom admite că proprietățile A1 și A2 definesc complet un corp, și că el este unic, abstracție făcînd de un izomorfism.

Observații. — 1) Perechea (A, B) din axioma A2 se numește o *tăietură*; A și B sînt evident disjuncte, deci complementare. Realul definit de axioma A2 aparține uneia și numai uneia din cele două submulțimi. El este evident unic.

2) Aceste axiome nu sînt arbitrare: ele sînt justificate de modelul geometric care a servit, istoricește, la elucidarea noțiunii de număr real. Axioma A1 nu este altceva decît un rezumat al unor proprietăți foarte simple, valabile de exemplu pentru numerele raționale, pe care dorim să le păstrăm chiar cînd acestea devin insuficiente (de exemplu, în geometrie, dacă dorim să putem vorbi de lungimile laturii unui pătrat și a diagonalei sale); axioma A2 care nu privește decît relația de ordine, devine foarte intuitivă dacă considerăm numerele reale ca abscisele punctelor unei drepte afine obișnuite; termenul de tăietură evocă partiția acesteia în două semidrepte de natură diferită:



Există, evident, numeroase alte axiomatizări echivalente ale lui $\mathbb{R}$, și construcții explicite ale acestui corp, plecînd de la teoria mulțimilor.

1.1.3. Margini superioare și inferioare

1. Să reamintim câteva definiții simple legate de ordinea într-o mulțime.

DEFINIȚIA / 2 Un majorant (resp. *majorant strict*, *minorant*, *minorant strict*) al unei submulțimi nevide A a unei mulțimi ordonate E este un element mai mare sau egal (resp. strict mai mare, mai mic sau egal, strict mai mic) decât orice element al lui A .
Un element al lui A este un *element minimal*, notat $\min A$ (resp. *maximal*, notat $\max A$) dacă este un minorant (resp. un majorant) al lui A .
Submulțimea A este *majorată* (resp. *minorată*) dacă admite cel puțin un majorant (resp. minorant).

Vom completa acum aceste definiții, bine cunoscute, cu o noțiune nouă mai delicată: aceea de *margină superioară* (sau *inferioară*) a unei submulțimi.

DEFINIȚIA / 3 Un element al unei mulțimi ordonate E este o *margină superioară* (resp. *margină inferioară*) a unei submulțimi nevide A dacă el este majorant al lui A și mai mic sau egal cu orice alt majorant (resp. minorant al lui A și mai mare sau egal orice alt minorant).
Se notează:

$\sup A$ (respectiv $\inf A$).

2. Să semnalăm câteva proprietăți foarte simple ale majoranților, maximumului și marginii superioare ai unei părți A :

a) dacă m este un majorant al lui A , orice element mai mare sau egal cu m este de asemenea un majorant;
b) o margine superioară, dacă există, este în mod necesar unică, ceea ce justifică notația $\sup A$ și expresia „margină superioară a lui A ”;
c) un maxim, dacă există, este o margine superioară a lui A ; el este atunci unic, de unde notația $\max A$ și expresia „maximumul lui A ”. Partea lui $\mathbb{R}$ constituită din întregii relativi ai lui $\mathbb{Z}$ nu admite nici majorant, nici minorant. Numerele raționale astfel că: $r^2 < 2$ formează o parte a lui $\mathbb{R}$ majorată și minorată; numerele $\sqrt{2}$ și $-\sqrt{2}$ sînt respectiv marginea superioară și marginea inferioară a acestei părți; aceștia nu sînt nici maximi nici minimi, căci nu-i aparțin. Aceeași mulțime, considerată de această dată ca parte a corpului $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale, este de asemenea majorată și minorată, dar nu mai admite margine superioară sau inferioară. Să notăm că, într-un corp comutativ total ordonat, mulțimea majoranților unei părți A nu poate fi corpul în întregime cum o arată inegalitatea: $a - 1 < a$ (echivalentă cu: $a < a + 1$, deci cu: $0 < 1$).

3. Să considerăm o parte A a lui $\mathbb{R}$, nevidă și majorată; mulțimea M , formată din toți majoranții lui A și mulțimea M' , complementara lui M în $\mathbb{R}$, nu sînt deci vide. Ele formează o tăietură a lui $\mathbb{R}$ pentru că orice element al lui M' este strict mai mic decât toți majoranții lui A care constituie mulțimea M . Fie a numărul real definit de această tăietură. El este

mai mic sau egal cu orice majorant al lui A . Să presupunem că aparține lui M' ; pentru că acesta nu este un majorant al lui A , există un element x al lui A care este strict mai mare ca a :

$$a < x.$$

Se deduc cu ușurință inegalitățile:

$$2a < a + x < 2x,$$

apoi:

$$a < \frac{a+x}{2} < x \quad (2 = 1 + 1 > 0).$$

Numărul $y = \frac{a+x}{2}$ nu este un majorant al lui A , pentru că este mai mic ca x ; y aparține deci lui M' și, prin urmare, trebuie să fie mai mic sau egal cu a după axioma A2. Cum acesta este inexact, ipoteza de plecare este absurdă și a nu aparține lui M' , ceea ce implică că a este un majorant al lui A , deci marginea superioară a lui A .

TEOREMA / Orice parte nevidă și majorată (respectiv minorată) a corpului $\mathbb{R}$ admite o margine superioară (respectiv inferioară).

4. Am definit marginea superioară a lui A ca *cel mai mic dintre majoranții* lui A . Se poate da o altă definiție acestui număr. Este clar că a este un majorant al lui A și că numerele $(a - \epsilon)$, cu $\epsilon > 0$, nu sînt majoranți; de unde implicațiile:

$$(x \in A) \Rightarrow (x \leq a) \quad (26)$$

$$(\epsilon > 0) \Rightarrow (\exists_{A} y, a - \epsilon < y) \quad (27)$$

Reciproc, aceste două implicații caracterizează complet marginea superioară a lui A .

EXEMPLU. Se consideră șirul definit de relațiile:

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}.$$

Să se calculeze marginea superioară și marginea inferioară a mulțimii numerelor u_n . Șirul studiat este *descrescător*; într-adevăr:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

Pentru $n = 0$, avem: $u_1 < u_0$.

Pentru: $n \geq 1$, se poate atunci scrie:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2u_n} \left[2 - \left(\frac{u_{n-1}^2 + 2}{2u_{n-1}} \right)^2 \right] = \frac{8u_{n-1}^3 - (u_{n-1}^2 + 2)^2}{8u_n u_{n-1}} = \\ &= \frac{4u_{n-1}^3 - u_{n-1}^4 - 4}{4(u_{n-1}^2 + 2)} = -\frac{1}{4} \frac{(u_{n-1}^2 - 2)^2}{u_{n-1}^2 + 2} \leq 0. \end{aligned}$$

În consecință, $u_0 = 2$ este maximumul și deci marginea superioară a mulțimii valorilor lui u_n . Această mulțime este minorată, pentru că avem evident:

$$u_n > 0.$$

Calculul precedent arată că:

$$2 - u_n^2 = -\frac{(u_{n-1}^2 - 2)^2}{4u_{n-1}} \leq 0;$$

de unde inegalitatea între realii pozitivi:

$$u_n \geq \sqrt{2}$$

(presupunem aci existența acestui număr $\sqrt{2}$, deja mult folosit în clasele anterioare). $\sqrt{2}$ este deci un minorant. Să arătăm că el este *cel mai mare* dintre minoranți, deci marginea inferioară. Pentru aceasta, să demonstrăm prin recurență inegalitatea:

$$u_n^2 - 2 \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ea este verificată pentru $n = 0$ pentru că:

$$2 = u_0^2 - 2 = \frac{1}{2^{-1}}$$

Dacă este adevărată pentru n , atunci:

$$u_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4u_{n-1}} (u_n^2 - 2)^2$$

$\frac{1}{4u_{n-1}}$ poate fi majorat prin $\frac{1}{4}$ și $(u_n^2 - 2)^2$ prin $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$; de unde:

$$u_{n+1}^2 - 2 < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^{n-1}},$$

fie:

$$u_{n+1}^2 - 2 < \frac{1}{4^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Această inegalitate, care este deci demonstrată prin recurență, probează convingător că $\sqrt{2}$ este cel mai mare dintre minoranți, căci existența unui minorant: $m > \sqrt{2}$ ar antrena, pentru orice n , inegalitatea:

$$2^n < \frac{1}{m^2 - 2}.$$

Marginile căutate sînt deci 2 și $\sqrt{2}$.

1.1.4. Intervale interioare unul altuia și șiruri adiacente

1. Să reamintim noțiunea de interval a unei mulțimi ordonate E .

DEFINIȚIA / 0 submulțime I a unei mulțimi ordonate E este un interval al lui E dacă satisface implicația:

$$(x \in I \text{ și } y \in I \text{ și } x \leq z \leq y) \implies (z \in I).$$

Prin definiție, mulțimea $[a, b]$ este formată din elemente x astfel încît:

$$a \leq x \leq b.$$

Această mulțime este evident un interval. În $\mathbb{R}$, se vorbește de *interval închis mărginit* (sau, uneori, de *segment*); a și b sînt marginile.

Un șir de intervale $[a_n, b_n]$ se numește *interior unul altuia*, dacă pentru orice întreg n , avem inegalitățile:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

Această noțiune este echivalentă cu incluziunea:

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}].$$

2. Să considerăm un șir de intervale închise mărginite interioare unul altuia și să notăm cu A mulțimea numerelor a_n . Inegalitățile evidente:

$$a_n \leq b_n \leq b_0$$

arată că A este majorat (de toate elementele b_n și, în particular, de b_0). Fie x marginea superioară a lui A . Să arătăm că x este mai mic sau egal cu orice b_n . În caz contrar, ar exista un întreg n astfel încît:

$$b_n < x.$$

Punînd: $\varepsilon = x - b_n > 0$, știm că există un element a_p al lui A astfel încît:

$$x - \varepsilon < a_p,$$

de unde:

$$b_n < a_p.$$

Această inegalitate este vizibil falsă, căci avem: $p \leq n$ (de unde $a_p \leq a_n \leq b_n$), sau: $p \geq n$ (de unde $a_p \leq b_p \leq b_n$). Avem deci pentru orice n :

$$a_n \leq x \leq b_n,$$

și x aparține intervalelor $[a_n, b_n]$.

TEOREMA / Fiînd dat un șir de intervale închise mărginite interioare unul altuia de numere reale, există cel puțin un real care aparține fiecăruia din intervale.

(Se mai poate spune că *intersecția* intervalelor nu este vidă.)

3. Această teoremă nu este adevărată decît pentru intervale închise, căci intervalele deschise:

$$]a, b[= \{x; a < x < b\}$$

nu o satisfac, cum o arată exemplul:

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

4. Cele două șiruri (a_n) și (b_n) sînt unul crescător și celălalt descrescător. Diferența $d_n = b_n - a_n$ este pozitivă sau nulă și definește un șir descrescător, pentru că:

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq b_n - a_{n+1} \leq b_n - a_n.$$

Dacă, mai mult, diferența d_n are ca limită 0 pentru n infinit (de exemplu, dacă $d_n = \frac{1}{n}$ sau $d_n = \frac{1}{2^n}$), se spune că cele două șiruri sînt *adiacente*.

În aceste condiții, numărul x , definit mai înainte, este evident unic și fiecare dintre cele două șiruri admite pe x ca limită, cum o arată inegalitățile:

$$0 \leq x - a_n \leq b_n - a_n,$$

$$0 \leq b_n - x \leq b_n - a_n.$$

5. Nu vom determina aici diferitele tipuri de intervale ale lui $\mathbf{R}$ (cu toate că aceasta este destul de ușor). Există zece asemenea tipuri:

a) intervalele *închise mărginite*:

$$[a, b] = \{x; a \leq x \leq b\};$$

b) intervalele *deschise mărginite*:

$$]a, b[= \{x; a < x < b\};$$

c) intervalele *semideschise la dreapta*:

$$[a, b[= \{x; a \leq x < b\};$$

d) intervalele *semideschise la stînga*:

$$]a, b] = \{x; a < x \leq b\};$$

e) *semidreptele închise la dreapta*:

$$]-\infty, b] = \{x; x \leq b\};$$

f) *semidreptele închise la stînga*:

$$[a, +\infty[= \{x; a \leq x\};$$

g) *semidreptele deschise la dreapta*:

$$]-\infty, b[= \{x; x < b\};$$

h) *semidreptele deschise la stînga*:

$$]a, +\infty[= \{x; a < x\};$$

i) mulțimea $\mathbb{R}$ ea însăși, notată $]-\infty, +\infty[$;

j) mulțimea vidă $\emptyset$ (pe care am putea s-o notăm $]a, a[$).

Este comod uneori să se completeze $\overline{\mathbb{R}}$ prin două elemente, notate $-\infty$ și $+\infty$, pentru a obține o mulțime numită *dreapta încheiată* $\overline{\mathbb{R}}$.

Această mulțime nu mai este un corp, dar $\overline{\mathbb{R}}$ este de asemenea o mulțime total ordonată dacă se introduc relațiile (unde a este un real):

$$-\infty < a, a < +\infty, -\infty < +\infty.$$

În aceste condiții nu mai există decât cinci tipuri de intervale:

$[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $\emptyset$, dacă se înțelege că a și b sînt elemente ale lui $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, nu neapărat ale lui $\mathbb{R}$.

1.1.5. Teorema lui Arhimede

Fie (a, b) o pereche de reali astfel încît să avem: $a > 0$. Se înțelege intuitiv că se poate găsi un întreg n care să satisfacă inegalitatea:

$$na > b.$$

Să demonstrăm această teoremă prin reducere la absurd. Dacă acest rezultat ar fi inexact, s-ar putea considera marginea superioară c a mulțimii A a numerelor de forma na (care ar fi atunci majorată prin b) și inegalitatea pentru orice n :

$$(n+1)a \leq c.$$

Să luăm:

$$\varepsilon = c - na > 0;$$

există un întreg n astfel că:

$$c - \varepsilon < na,$$

sau încă:

$$c < na + \varepsilon,$$

adică:

$$c < (n+1)a,$$

ceea ce contrazice un rezultat anterior.

Se spune că $\mathbb{R}$ este un *corp arhimedian*.

TEOREMA / Pentru orice real b și orice real strict pozitiv a , există un întreg n astfel încît:

3

$$na > b.$$

Această teoremă, cunoscută prin *Arhimede*, este adevărată de asemenea în alte mulțimi decât $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, în special. Ea servește, de exemplu, de bază în teoria împărțirii euclidiene.

Observație. — Se poate verifica cu ușurință că demonstrația teoremelor 2 și 3 nu depinde decât de axioma A1 și de teorema 1.

Cum axioma A2 se poate deduce din axioma A1 și din teoremele 2 și 3 (vom admite aceasta), rezultă că se poate înlocui axioma A2, fie prin teorema 1, fie prin teoremele 2 și 3, pentru a se obține o axiomatică echivalentă a lui R.

1.1.6. Valori aproximative ale unui număr real

Să considerăm un număr real x , un întreg n și mulțimea A_n a întregilor relativi m astfel încît:

$$m \leq 10^n x.$$

Teorema lui Arhimede arată că există un întreg p astfel încît:

$$10^n x < p.$$

p majorează deci mulțimea A_n . Marginea superioară a lui A_n este un număr real q_n ; vom admite că acesta este un număr întreg, element al lui A_n , deci cel mai mare element al lui A_n (o mulțime majorată de întregi relativi admite un maxim).

Se pot deduce inegalitățile:

$$q_n \leq 10^n x < q_n + 1.$$

Numărul real definit prin:

$$a_n = \frac{q_n}{10^n},$$

este un rațional numit *valoare aproximativă prin lipsă a lui x cu aproximație de 10^{-n}* . (Se precizează uneori: *valoare zecimală aproximativă*.)

De asemenea, raționalul:

$$b_n = \frac{q_n + 1}{10^n} = a_n + \frac{1}{10^n}$$

este numit *valoarea aproximativă prin adaos*.

Aceste două numere satisfac inegalitățile:

$$a_n \leq x < b_n.$$

De exemplu, pentru $x = \sqrt{2}$, $n = 3$, se găsesc raționali:

$$a_3 = \frac{1\ 414}{10^3}, b_3 = \frac{1\ 415}{10^3},$$

pentru că:

$$1\ 414 < 1\ 000 \sqrt{2} < 1\ 415,$$

sau încă:

$$(1\ 414)^2 < 2\ 000\ 000 < (1\ 415)^2$$

$$[(1\ 414)^2 = 1\ 999\ 396, (1\ 415)^2 = 2\ 002\ 225].$$

Numerele a_n și b_n definesc două șiruri și un șir de intervale închise mărginite $[a_n, b_n]$ care conține toți x (de fapt, avem chiar relația:

$$x \in [a_n, b_n].$$

Diferența $d_n = b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$ are ca limită 0 pentru n infinit.

Șirul (a_n) este crescător.

Într-adevăr inegalitatea:

$$10^n a_n \leq 10^n x$$

mplică inegalitatea:

$$10^{n+1} a_n \leq 10^{n+1} x;$$

de unde

$$10^{n+1} a_n \leq q_{n+1},$$

și în final:

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (q_{n+1} = 10^{n+1} a_{n+1}).$$

Este mai puțin ușor să se demonstreze că șirul (b_n) este descrescător.

Cele două inegalități:

$$10^{n+1} a_{n+1} \leq 10^{n+1} x < 10^{n+1} b_n$$

au drept consecință inegalitatea:

$$10^{n+1} \left(b_{n+1} - \frac{1}{10^{n+1}} \right) < 10^{n+1} b_n,$$

sau încă:

$$10^{n+1}(b_{n+1} - b_n) < 1.$$

Primul membru fiind un întreg (este egal cu $q_{n+1} - 10q_n - 9$), acest întreg este negativ sau nul; de unde:

$$b_{n+1} - b_n \leq 0.$$

Cele două șiruri (a_n) și (b_n) ale valorilor aproximative ale lui x sînt deci adiacente și x este singurul real conținut în toate intervalele $[a_n, b_n]$.

Cum b_n se obține foarte simplu din a_n , se vede că șirul (a_n) determină în întregime pe x . Doi reali distincți nu pot avea toate valorile aproximative prin lipsă egale între ele (dealtfel x este limita șirului a_n).

TEOREMA / Valorile aproximative prin lipsă ale unui număr real îl determină în întregime. Șirul valorilor aproximative prin lipsă și șirul valorilor aproximative prin adaos sînt două șiruri adiacente.

Numărul 10 nu joacă aici nici un rol esențial; s-ar putea înlocui, natural, printr-un întreg oarecare mai mare sau egal cu 2; el este legat de sistemul nostru familiar de numerație.

1.1.7. Corpul numerelor raționale

Există o mulțime de corpuri $(K, +, \times)$ astfel încît K este o submulțime a lui $\mathbb{R}$, care conține numărul 1, care conține suma, diferența și produsul a două elemente ale lui K precum și cîmul a două numere nenule ale lui K (de exemplu, se poate lua $K = \mathbb{R}$). Intersecția lor — mulțimea numerelor care aparțin fiecăruia din ele — este, evident, de asemenea un corp comutativ total ordonat. Acesta este corpul $\mathbb{Q}$ al *numerelor raționale*.

$\mathbb{Q}$ trebuie să conțină întregii lui $\mathbb{R}$, ca 0, 1, 2, 3, ... $-1, -2, -3, \dots$, precum și inverșii lor $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots$, și produsele acestor inverși prin în-

tregi (de exemplu $\frac{3}{4}$ și $-\frac{5}{6}$); aceste proprietăți se pot demonstra cu ușurință prin recurență. Or, mulțimea acestor produse, numite *fracții*, este, evident, un corp care conține numărul 1; este deci însuși corpul $\mathbb{Q}$. Un număr real x este un rațional, dacă și numai dacă există un întreg n astfel încît produsul nx să fie el însuși un întreg relativ.

Să considerăm un interval I al lui $\mathbb{R}$ care conține cel puțin doi reali x și y ; x și y nu pot avea aceleași valori aproximative prin lipsă.

Există deci un întreg n astfel încît, de exemplu, valoarea aproximativă a lui y prin lipsă cu aproximație de 10^{-n} este strict mai mare ca aceea a lui x :

$$a_n \leq x < a_n + \frac{1}{10^n},$$

$$c_n \leq y < c_n + \frac{1}{10^n},$$

$$a_n < c_n.$$

Numerele $10^n a_n$ și $10^n c_n$ fiind întregi, avem deci:

$$10^n a_n + 1 \leq 10^n c_n,$$

de unde inegalitățile: $x < a_n + \frac{1}{10^n} \leq c_n \leq y$.

Numărul rațional c_n aparține deci intervalului $[x, y]$ și, prin urmare, intervalului I .

TEOREMA / Orice interval real care conține cel puțin două numere conține cel puțin un rațional.

(Se poate deduce că I conține o infinitate de raționali.) Teorema 5 se traduce, în general, spunind că $\mathbb{Q}$ este *dens* în $\mathbb{R}$. Intervalul I conține de asemenea o infinitate de numere iraționale (adică elemente ale complementarei $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ a lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$). Într-adevăr, el conține cel puțin doi raționali a și b , precum și numărul:

$$c = \frac{a + b \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

care vădit este irațional și cuprins între a și b .

1.1.8. Valoarea absolută a unui număr real

1. Să considerăm un număr real x și mulțimea $A = \{x, -x\}$ (dacă x este nul, A nu are decît un singur element). A este majorat, pentru că se poate scrie:

$$\begin{aligned} (x \geq 0) &\implies (-x \leq x), \\ (x \leq 0) &\implies (x \leq -x). \end{aligned}$$

Marginea ei superioară este unul dintre cele două numere x și $(-x)$. Acesta este deci un maxim. Vom pune:

$$|x| = \max \{x, -x\} = \sup \{x, -x\} \quad (28)$$

(Se citește: *valoarea absolută* a lui x sau *modulul* lui x .)

DEFINIȚIA / Valoarea absolută a numărului real x este cel mai mare dintre numerele x și $-x$.

Această valoare absolută generalizează valoarea absolută a unui întreg relativ care este un întreg natural.

Se pot deduce imediat următoarele relații:

$$|x| = |-x| \geq 0 \quad (29)$$

$$|x| = 0 \iff x = 0 \quad (30)$$

$$|x| = x \iff x \geq 0 \quad (31)$$

$$|x| = -x \iff x \leq 0 \quad (32)$$

2. $|x|$ este un element al mulțimii $\mathbb{R}^+$ care este, prin definiție, mulțimea realilor pozitivi sau nuli. Dacă x nu este nul, $|x|$ aparține mulțimii $\mathbb{R}^{*+}$ a

realilor strict pozitivi, mulțime care poate primi structura de grup multiplicativ datorită relațiilor:

$$(x > 0 \text{ și } y > 0) \implies (xy > 0), \quad (23)$$

$$(x > 0) \implies (x^{-1} > 0). \quad (11)$$

Să considerăm egalitățile:

$\begin{aligned} x(-y) &= (-x)y = -xy \\ (-x)(-y) &= xy \end{aligned}$	(33) (34)
--	------------------

(Egalitatea (33) este o simplă consecință a distributivității înmulțirii pentru că:

$$0 = x0 = x(y + [-y]) = xy + x(-y),$$

și:

$$0 = xy + [-xy].$$

Egalitatea (34) se deduce imediat pentru că:

$$xy = -(-xy).$$

Aceste două egalități arată că, în toate cazurile, se poate scrie:

$ xy = x y $	(35)
-----------------	--------

Aplicația valoare absolută definește deci un homomorfism al grupului multiplicativ $(\mathbb{R}^*, \times)$ pe grupul multiplicativ $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$. Nucleul acestui homomorfism, mulțimea elementelor a căror imagine este elementul neutru 1, este mulțimea $\{1, -1\}$.

3. Să studiem valoarea absolută a unei sume: $z = x + y$.

Distingem mai multe cazuri.

a) Dacă x și y sint amindoi pozitivi sau nuli, atunci:

$$x = |x|, y = |y|, z \geq 0;$$

de unde:

$$|z| = z = |x| + |y|.$$

b) Dacă x și y sint amindoi negativi sau nuli, atunci:

$$x = -|x|, y = -|y|, z \leq 0;$$

de unde:

$$|z| = -z = |x| + |y|.$$

c) Dacă x este pozitiv și y negativ, atunci:

$$x = |x|, \quad y = -|y|, \quad z = |x| - |y|.$$

Se deduc inegalitățile:

$$\begin{aligned} z &\leq |x| + |y|, \\ -z &\leq |x| + |y|; \end{aligned}$$

de unde:

$$|z| \leq |x| + |y|.$$

d) În toate cazurile:

$$\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|} \quad (36)$$

Această inegalitate este numită *inegalitatea triunghiulară a lui Minkowsky*.

4. Să grupăm proprietățile fundamentale ale valorii absolute pe care am definit-o (se spune că $\mathbb{R}$ este un *corp valuat*).

$$\begin{aligned} |x| &\geq 0 & (29) \\ |x| &= 0 \iff x = 0 & (30) \\ |xy| &= |x| |y| & (35) \\ |x + y| &\leq |x| + |y| & (36) \end{aligned}$$

Se pot deduce numeroase consecințe.

De exemplu:

$$\boxed{|x - y| \leq |x| + |y|} \quad (37)$$

În particular, să aplicăm inegalitatea triunghiulară sumei:

$$x = (x + y) + (-y);$$

se obține:

$$|x| \leq |x + y| + |-y|,$$

adică:

$$|x| - |y| \leq |x + y|.$$

Se găsește de asemenea:

$$|y| - |x| \leq |x + y|;$$

de unde inegalitatea:

$$\boxed{||x| - |y|| \leq |x + y|} \quad (38)$$

Inegalitatea triunghiulară este foarte importantă. Se poate arăta cu ușurință că aceasta nu este egalitate decât dacă și numai dacă xy este pozitiv sau nul. 5. Elementele lui $\mathbf{R}$ pot fi considerate ca puncte ale unei drepte afine sau vectorii unei drepte vectoriale. Se poate defini o *distanță* între două numere sau două puncte, prin egalitatea:

$$d(x, y) = |y - x| \quad (39)$$

Această distanță are patru proprietăți fundamentale:

$$d(x, y) \geq 0 \quad (40)$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (41)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (42)$$

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad (43)$$

Proprietățile (40) și (41) nu sînt decât consecințe imediate ale relațiilor (29) și (30).

Proprietatea (42) rezultă din egalitatea:

$$x - y = -(y - x).$$

Proprietatea (43) rezultă din inegalitatea triunghiulară aplicată sumei:

$$z - x = (y - x) + (z - y).$$

Se spune că $\mathbf{R}$ este un *spațiu metric*.

Dacă r este un număr strict pozitiv, se numește *bulă deschisă* (respectiv *închisă*) de centru a și de rază r mulțimea numerelor x astfel încît:

$$d(a, x) < r \quad (\text{respectiv } d(a, x) \leq r).$$

Această bulă deschisă (respectiv închisă) nu este altceva decât intervalul mărginit deschis $]a - r, a + r[$ (respectiv închis $[a - r, a + r]$). Aceste noțiuni sînt folosite la studiul limitelor în analiză.

1.1.9. Congruențe în $\mathbf{R}$

Să considerăm un număr real nenul ω . Vom defini pe $\mathbf{R}$ o relație binară, notată prin semnul $\equiv$, citită „ x este congruent cu y mod ω ”, prin echivalența:

$$(x \equiv y [\omega]) \Leftrightarrow (\exists \mathbb{Z}n, x - y = n\omega)$$

($\mathbb{Z}$ este mulțimea întregilor relativi.)

■ Această relație de congruență are următoarele proprietăți:

1. Reflexivitate:

$$(x \cdot x = 0 \omega) \Rightarrow (x \equiv x [\omega]).$$

2. Transitivitate:

$$(x \equiv y [\omega] \text{ și } y \equiv z [\omega]) \Rightarrow (x \equiv z [\omega]).$$

Într-adevăr:

$$(x - y = n \omega \text{ și } y - z = m \omega) \Rightarrow (x - z = [n + m] \omega).$$

3. Simetrie:

$$(x \equiv y [\omega]) \Rightarrow (y \equiv x [\omega]).$$

Într-adevăr:

$$(x - y = n \omega) \Rightarrow (y - x = (-n) \omega).$$

Relația de congruență este deci o relație de echivalență.
Mulțimea x a numerelor congruente cu x nu este vidă, căci este formată din toți realii de forma:

$$y = x + n \omega \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Aceasta este *clasa de congruență* a lui x . Ea conține, în special, pe x însuși.

EXEMPLU. Fie $\omega = 1$. Clasa de congruență a lui 0 nu este alta decât $\mathbb{Z}$; aceea a lui $\frac{1}{3}$ este mulțimea următoare:

$$\dot{x} = \left\{ \dots, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \dots \right\}.$$

Să dăm un alt exemplu; dacă $\omega = 2\pi$, clasa de congruență a lui 0 este mulțimea:

$$\dot{0} = \{ \dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots \}.$$

■ Congruența este *compatibilă* cu adunarea din $\mathbb{R}$, adică se pot înlocui fiecare dintre cei doi termeni ai unei sume prin numere congruente fără a modifica clasa rezultatului. Să punem într-adevăr:

$$\begin{aligned} x + y &= z, & x' + y' &= z', \\ x &\equiv x' [\omega], & y &\equiv y' [\omega]. \end{aligned}$$

Se obține:

$$z' - z = (x' - x) + (y' - y) = n \omega + m \omega,$$

adică:

$$z \equiv z' [\omega].$$

$$(x \equiv x' \text{ și } y \equiv y') \Rightarrow (x + y \equiv x' + y')$$

(Congruențele trebuie să fie, natural, de același *modul* ω .)

■ Mulțimea claselor de congruență este notată de obicei $\mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$. Se poate defini în această mulțime o *adunare*; suma claselor $\dot{x}$ și $\dot{y}$, prin definiție, este clasa lui $(x + y)$:

$$\boxed{\dot{x} + \dot{y} = \overbrace{x + y}^{\cdot}}$$

Proprietățile precedente arată că suma obținută nu depinde, de fapt, de elementele particulare x și y , ci numai de mulțimile $\dot{x}$ și $\dot{y}$.

EXEMPLU. Să luăm $\omega = 1$, $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{7}{5}$.

$$\dot{x} = \left\{ \dots, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \dots \right\}$$

$$\dot{y} = \left\{ \dots, -\frac{12}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \dots \right\}$$

$$\dot{x} + \dot{y} = \left\{ \dots, -\frac{31}{15}, -\frac{16}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{14}{15}, \frac{29}{15}, \dots \right\}$$

$$\left(\text{de exemplu: } -\frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{31}{15} \right).$$

■ Este ușor de verificat că această adunare face din $\mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ un *grup comutativ*. Într-adevăr, egalitățile:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x + 0 = 0 + x = x$$

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

$$x + y = y + x$$

arată că adunarea în mulțimea claselor de congruență este asociativă, admite pe $\dot{0}$ ca element neutru, este astfel că, de exemplu, clasa $\dot{x}$ admite ca opusă clasa $(-\overbrace{x}^{\cdot})$ și este, în fine, comutativă. Acest grup se numește *grup cit* prin relația de congruență.

Observații. 1. Totdeauna se poate presupune ω strict pozitiv, pentru că:

$$x \equiv y [\omega] \longrightarrow x \equiv y [-\omega]$$

de unde:

$$\mathbb{R}/\omega\mathbb{Z} = \mathbb{R}/(-\omega)\mathbb{Z}.$$

2. Se poate traduce regula compatibilității dintre adunare și o congruență, enunțând că totdeauna se pot *aduna* două congruențe de același modul. Totuși, ele nu se pot *înmulți*.

De exemplu:

$$\frac{3}{2} \equiv \frac{1}{2} [1], \frac{1}{5} \equiv -\frac{9}{5} [1],$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{5} \equiv \frac{1}{2} - \frac{9}{5} [1] \left(\frac{17}{10} \equiv -\frac{13}{10} \right),$$

dar:

$$\frac{3}{2} \times \frac{1}{5} \not\equiv \frac{1}{2} \times -\left(\frac{9}{5}\right) [1] \left(\frac{3}{10} \not\equiv -\frac{9}{10} \right).$$

Să observăm, numai, că se pot înmulți cei doi termeni ai unei congruențe cu un același întreg:

$$(x \equiv y [\omega]) \implies (nz \equiv ny [\omega]) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

3. Congruențele modulo π și 2π sînt folosite în analiză la studiul funcțiilor circulare și în geometrie la studiul unghiurilor și rotațiilor.

4. Dacă ω este întreg, se poate atunci vorbi despre restricția congruenței la submulțimea $\mathbb{Z}$ a lui $\mathbb{R}$, căci:

$$(x \in \mathbb{Z} \text{ și } x \equiv y) \implies (y \in \mathbb{Z}).$$

Mulțimea $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ este atunci un inel: studiul lui este foarte important în aritmetică.

5. Dacă ω este 1, grupul cit $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ este folosit în calculul cu logaritmi, cînd se efectuează operații asupra mantiselor logaritmilor fără a se ține seama de caracteristici.

De exemplu:

$$\log_{10} 4 + \log_{10} 30 = \log_{10} 120$$

dă (aproximativ) în $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$\overbrace{0,602\ 06} + \overbrace{0,477\ 12} = \overbrace{0,079\ 18}$$

(egalitatea corespunzătoare în $\mathbb{R}$ se scrie:

$$0,602\ 06 + 1,477\ 12 = 2,079\ 18).$$

1.1.10. Automorfisme ale lui $\mathbb{R}$

(Acest paragraf este rezervat elevilor de la secțiunea C.)

Să determinăm *automorfismele* lui $\mathbb{R}$, adică aplicațiile bijective φ ale lui $\mathbb{R}$ pe el însuși, astfel că:

$$\boxed{\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)} \quad (44)$$

$$\boxed{\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y)} \quad (45)$$

Fie $a = \varphi(1)$. Se poate scrie: $1 \times 1 = 1$; de unde: $a \times a = a$.
Soluțiile ecuației: $a(a - 1) = 0$ sînt $a = 0$ și $a = 1$.
Dacă am avea $a = 0$, ar rezulta că pentru orice x :

$$\varphi(x) = \varphi(x \times 1) = \varphi(x) \varphi(1) = 0.$$

În consecință a este egal cu 1.
Să presupunem demonstrată egalitatea:

$$\varphi(n) = n \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Atunci:

$$\varphi(n + 1) = \varphi(n) + \varphi(1) = n + 1.$$

Această relație este deci verificată prin recurență pentru toți întregii naturali, chiar pentru 0, pentru că:

$$\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0).$$

Se poate deduce $\varphi(-n)$; într-adevăr:

$$0 = \varphi(0) = \varphi(n + [-n]) = \varphi(n) + \varphi(-n);$$

de unde:

$$\varphi(-n) = -\varphi(n).$$

Dacă n este un întreg relativ nenul, atunci:

$$1 = \varphi(1) = \varphi\left(n \times \frac{1}{n}\right) = \varphi(n) \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = n \varphi\left(\frac{1}{n}\right);$$

de unde:

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{Z}^*),$$

și, mai general:

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \varphi(m) \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

Dacă x este un rațional, avem deci:

$$\varphi(x) = x.$$

Să admitem că orice număr pozitiv sau nul este pătratul unui număr real (aceasta rezultă cu destulă ușurință din teorema asupra intervalelor îmbucate care dă o construcție efectivă a valorilor aproximative ale rădăcinii căutate).
Atunci:

$$\begin{aligned} (x \geq 0) &\implies (x = y^2), \\ (x = y^2) &\implies (\varphi(x) = [\varphi(y)]^2), \end{aligned}$$

fie:

$$(x \geq 0) \implies (\varphi(x) \geq 0).$$

Să considerăm șirurile (a_n) și (b_n) ale valorilor aproximative ale unui real x .
Se poate scrie:

$$\begin{aligned}x - a_n &\geq 0, & \varphi(x - a_n) &\geq 0 \\ b_n - x &\geq 0, & \varphi(b_n - x) &\geq 0.\end{aligned}$$

Datorită egalității:

$$\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y),$$

care este o consecință imediată a egalității (44), avem deci:

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \varphi(a_n) &\geq 0 \\ \varphi(b_n) - \varphi(x) &\geq 0.\end{aligned}$$

Dar a_n și b_n sînt raționali.

În consecință:

$$\begin{aligned}\varphi(a_n) &= a_n, & \varphi(b_n) &= b_n, \\ a_n &\leq \varphi(x) \leq b_n.\end{aligned}$$

$\varphi(x)$ aparține deci intersecției tuturor intervalelor închise mărginite îmbucate $[a_n, b_n]$. Dar acestea nu au decît un singur punct comun: x . În consecință, $\varphi(x)$ este egal cu x pentru toate valorile reale ale lui x .

TEOREMA / Identitatea este singurul automorfism al corpului $\mathbb{R}$.

6

(Există corpuri care admit alte automorfisme decît identitatea; este cazul corpului $\mathbb{C}$ al numerelor complexe, cu aplicația definită prin:

$$\varphi(a + ib) = a - ib.)$$

EXERCIȚII

1.1. Să se demonstreze într-un corp comutativ, următoarele relații:

$$\begin{aligned}ab = 0 &\iff a = 0 \text{ sau } b = 0; \\ -(a + b) &= (-a) + (-b); \\ -(ab) &= (-a)b = a(-b); \quad -(a - b) = b + (-a); \\ (-a)b^{-1} &= -(ab^{-1}) = a(-b)^{-1}.\end{aligned}$$

1.2. Să se demonstreze implicațiile de la (16) la (25) de la pagina 22.

1.3. Să se formalizeze demonstrația existenței unui izomorfism între $\mathbb{Z}$ și o parte a lui K , schițată în 5 de la paragraful nr. 1.1.1.

1.4. Să se demonstreze, într-un corp comutativ total ordonat, implicațiile:

$$\begin{aligned}(a \geq b \text{ și } c \geq d) &\implies (a + c \geq b + d); \\ (a \geq b \geq 0 \text{ și } c \geq d \geq 0) &\implies (ac \geq bd).\end{aligned}$$

- 1.5. Să se compare, într-un corp comutativ total ordonat, cele două numere $x + y$ și xy .
 1.6. Să se demonstreze, într-un corp comutativ total ordonat, implicațiile:

$$(a - b > x - y) \implies (a - x > b - y);$$

$$(a \geq b \geq 0) \implies (a^n \geq b^n) \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$(a \geq b \geq 0) \implies [(a^2 + b^2)^3 \geq (a^3 + b^3)^2].$$

- 1.7. Să se demonstreze că există o infinitate de elemente ale unui corp comutativ total ordonat cuprinse între două elemente date.

- 1.8. A și B fiind două submulțimi nevide majorate și minorate ale lui $\mathbb{R}$, să se compare:

$$\sup A; \sup B; \sup (A \cup B); \sup (A \cap B) \text{ (dacă există)}.$$

- 1.9. Același exercițiu cu $\inf$.

- 1.10. A fiind nevidă și inclusă în submulțimea B a lui $\mathbb{R}$, să se demonstreze inegalitățile:

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

- 1.11. Dacă A și B sînt două submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ care admit maximumuri, se întîmplă lucru cu:

$$A \cup B? A \cap B?$$

diferența

$$A - B = \{x; x \in A, x \notin B\}$$

diferența simetrică:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)?$$

- 1.12. A și B fiind două submulțimi nevide majorate și minorate ale lui $\mathbb{R}$, se pune:

$$A + B = \{x; \exists Aa, \exists Bb, x = a + b\}.$$

Să se compare $\sup (A + B)$ cu $(\sup A + \sup B)$.

- 1.13. Să se compare de asemenea $\inf (A + B)$ cu $(\inf A + \inf B)$.

- 1.14. Același exercițiu cu:

$$AB = \{x; \exists Aa, \exists Bb, x = ab\},$$

comparînd $\sup AB$ cu $(\sup A)(\sup B)$, apoi $\inf AB$ cu $(\inf A)(\inf B)$. Putem avea: $\inf AB = (\inf A)(\sup B)$?

- 1.15. Diferența $I - J$ a două intervale ale unei mulțimi ordonate este un interval? Același exercițiu pentru diferența simetrică (a se vedea exercițiul nr. 1.11).

- 1.16. Să se demonstreze că toate intervalele care conțin o parte majorată și minorată a lui $\mathbb{R}$ admit ca submulțime comună un interval particular. Se poate extinde acest rezultat la o parte oarecare a lui $\mathbb{R}$?

- 1.17. Să se demonstreze că elementele A și B ale unei tăieturi sînt intervale ale lui $\mathbb{R}$.

- 1.18. Să se demonstreze că, pentru orice rațional pozitiv r astfel încît: $r^2 < 2$, există un rațional pozitiv s astfel încît:

$$r^2 < s^2 < 2.$$

- 1.19. Același exercițiu cu:

$$r^2 > 2 \text{ și } r^2 > s^2 > 2.$$

1.20. Să se demonstreze că nu există alte intervale ale lui $\mathbb{R}$ decât acelea care sînt enumerate la pagina 28.

1.21. Același exercițiu pentru $\bar{\mathbb{R}}$.

1.22. a, b, c fiind trei elemente strict pozitive ale unui corp comutativ total ordonat, să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2},$$

$$\left(\text{să se compare } \frac{ab}{a+b} \text{ cu } \frac{a+b}{4} \right)$$

Cînd are loc egalitatea?

1.23. Dacă într-un corp comutativ total ordonat se pot scrie inegalitățile:

$$0 \leq a \leq b \leq c \leq 1, \quad c \leq a+b,$$

se pot deduce inegalitățile:

$$0 \leq (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq 3.$$

1.24. x, y și z fiind trei elemente ale unui corp comutativ total ordonat, legate prin inegalitatea:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$$

să se demonstreze că, dacă A este mulțimea numerelor $t = xy + yz + zx$, atunci:

$$\max A = 1, \quad \min A = -\frac{1}{2}.$$

1.25. Să se demonstreze existența unei bijecții φ între $\mathbb{R}$ și intervalul deschis $]0, 1[$.

1.26. Același exercițiu cu intervalul $]a, b[$.

1.27. Același exercițiu cu intervalul $]0, 1[$ (se va putea face să corespundă mai întîi 1 lui $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ lui $\frac{1}{4}$, etc..., și să se deducă o bijecție între intervalul $]0, 1[$ și intervalul $]0, 1[$).

1.28. Să se demonstreze complet proprietățile de la nr. 1.1.7 relative la corpul $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale.

1.29. Să se demonstreze implicația:

$$(|x+y| \leq z \text{ și } |x-y| \leq z) \implies (|x| + |y| \leq z).$$

1.30. Să se demonstreze echivalența:

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y.$$

1.31. Același exercițiu cu semnul $<$.

1.32. Să se studieze în $\mathbb{R}$ legea definită de egalitatea:

$$x * y = |x - y|.$$

1.33. Același exercițiu în $\mathbb{R}^+$.

1.34. Același exercițiu pentru legea definită prin:

$$x * y = x + y + 1.$$

(în $\mathbb{R}$, apoi în $\mathbb{R}^+$).

1.2. CALCULE DE APROXIMĂRI

1.2.1. Aproximări

■ Să considerăm un număr real x . Orice număr real a poate fi considerat ca o „valoare aproximativă” a lui x ; eroarea comisă înlocuind pe x prin a într-un calcul este, prin definiție, numărul $|x - a|$.

În general, această eroare este, fie necunoscută (acesta este cazul când se substituie valorii exacte a unei lungimi, rezultatul unei măsurări efectuate cu un instrument imperfect), fie dificil de folosit (dacă se folosește 1,414 în locul lui $\sqrt{2}$, eroarea nu se poate exprima decât sub o formă complexă, de exemplu cu ajutorul unui număr infinit de zecimale).

Din această cauză se folosește practic, de fapt, o noțiune vecină cu aceea de eroare, noțiunea de *aproximare* (sau *aproximare absolută*).

DEFINIȚIA / Se numește *aproximare absolută* a unei valori aproximative a unui număr real x orice număr mai mare sau egal cu eroarea absolută $|x - a|$.

EXEMPLU. Fie: $x = \pi$, $a = 3,14$.

Următoarele numere sînt aproximări absolute:

$$\frac{1}{500}, \frac{16}{10\,000}, 1.$$

$$\text{Într-adevăr: } |\pi - 3,14| = 0,001\,592\,65... < \frac{16}{10\,000} < \frac{1}{500} < 1.$$

■ Dacă numărul x reprezintă măsura unei mărimi, el va fi afectat de o schimbare de unitate de măsură. De aceea introduce noțiunea de *aproximare relativă* care nu este supusă la această obligație.

DEFINIȚIA / Se numește *aproximare relativă* a unei valori aproximative a unui număr real nenul x , orice număr mai mare sau egal cu eroarea relativă $\left| \frac{x - a}{x} \right|$.

EXEMPLU. Fie: $x = \pi$, $a = 3,14$.

Următoarele numere sînt aproximări relative:

$$\frac{6}{10\,000}, \frac{1}{1\,900}, 1.$$

Într-adevăr:

$$\left| \frac{\pi - 3,14}{\pi} \right| = 0,000\,507\ldots < \frac{1}{1\,900} < \frac{6}{10\,000} < 1.$$

■ Cunoaşterea unei aproximări absolute permite o încadrare:

$$\boxed{(|x - a| \leq r) \Rightarrow (a - r \leq x \leq a + r)} \quad (46)$$

Cunoaşterea unei aproximări relative nu permite o încadrare tot aşa de simplă. Să presupunem, de exemplu: $x > 0$. Cunoaştem valoarea aproximativă a şi o aproximare relativă s :

$$\left(\left| \frac{x - a}{x} \right| \leq s \right) \quad \left(-s \leq \frac{x - a}{x} \leq s \right),$$

sau încă:

$$a \leq (1 + s)x, \quad (1 - s)x \leq a.$$

Să presupunem că s este strict mai mic ca 1 (ceea ce este, natural, cazul din practică). Atunci:

$$\boxed{\frac{a}{1 + s} \leq x \leq \frac{a}{1 - s}} \quad (47)$$

sau încă, $-\frac{s}{1 + s} a \leq x - a \leq \frac{s}{1 - s} a.$

Dacă s este mic (de exemplu: $s < \frac{1}{1\,000}$), se poate deduce o încadrare aproximativă:

$$-as \leq x - a \leq as$$

(ceea ce revine, de fapt, la a admite majorarea $\left| \frac{x - a}{a} \right| \leq s$ şi nu $\left| \frac{x - a}{x} \right| \leq s$).

EXEMPLU. Să se dea o încadrare a unui real x ştiind că 2,718 este o valoare aproximativă cu o aproximare relativă de 10^{-4} .

Să aplicăm formula (47):

$$\frac{2,718}{1,0001} \leq x \leq \frac{2,718}{0,9999},$$

$$-\frac{0,000\,271\,8}{1,0001} \leq x - 2,718 \leq \frac{0,0002718}{0,9999},$$

adică încă:

$$-0,00027177 \dots \leq x - 2,718 \leq 0,00027183 \dots$$

$$2,71772822 \dots \leq x \leq 2,71827183 \dots$$

Vom reține încadrarea:

$$2,7177 < x < 2,7183.$$

1.2.2. Reprezentarea zecimală a unui număr real

Valorile aproximative cele mai folosite sînt, natural, valorile aproximative zecimale, prin lipsă și prin adaos. Fie un real x și perechea (a_n, b_n) a valorilor ei aproximative cu aproximație de 10^{-n} .

Știm că:

$$a_n \leq x < a_n + \frac{1}{10^n}.$$

O aproximare absolută a valorii aproximative a_n (sau a lui b_n) este deci egală cu 10^{-n} .

Din punct de vedere tehnic, nu se dă șirul (a_n) al valorilor aproximative prin lipsă, ci șirul zecimalelor care compun aceste numere. Am văzut într-adevăr că numerele a_n și b_n erau astfel că:

$$10^n a_n = q_n \in \mathbb{Z}, \quad 10^n b_n = q_n + 1 \in \mathbb{Z},$$

$$10^{n+1} a_{n+1} = q_{n+1} \in \mathbb{Z}, \quad 10^{n+1} b_{n+1} = q_{n+1} + 1 \in \mathbb{Z},$$

$$10q_n \leq q_{n+1} \leq 10^{n+1}x < q_{n+1} + 1 \leq 10q_n + 10.$$

Se deduce egalitatea:

$$q_{n+1} = 10q_n + r_n, \quad 0 \leq r_n \leq 9.$$

Darea lui q_0 și a numerelor r_n , întregi scriși cu ajutorul unei singure cifre, echivalează deci cu darea numerelor a_n : aceasta permite să se cunoască x

EXEMPLU. Fie $x = \frac{3}{7}$.

Un calcul clasic permite să se obțină șirurile:

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{4}{10}, a_2 = \frac{42}{10^2},$$

$$a_3 = \frac{428}{10^3}, a_4 = \frac{4285}{10^4}, a_5 = \frac{42857}{10^5},$$

$$a_6 = \frac{428571}{10^6}, a_7 = \frac{4285714}{10^7}$$

sau încă:

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 4, \quad q_2 = 42, \quad q_3 = 428, \quad q_4 = 4\,285, \\ q_5 = 42\,587, \quad q_6 = 428\,571, \quad q_7 = 4\,285\,714, \dots$$

adică:

$$r_0 = 4, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 8, \quad r_3 = 5, \quad r_4 = 7, \quad r_5 = 1, \quad r_6 = 4, \dots$$

Numerele $r_m (m \leq n)$ nu sînt altele decît acelea care apar în scriere, în baza 10, a întregului $10^{n+1}(x - q_0)$:

$$10^{n+1}(x - q_0) = 10^n r_0 + 10^{n-1} r_1 + \dots + 10 r_{n-1} + r_n \quad (48)$$

(De exemplu:

$$10^7 \left(\frac{3}{7} - 0 \right) = 4 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 4.)$$

Scrierea simbolică:

$$x - q_0 = \overline{0, r_0 r_1 r_2 \dots r_{n-1} r_n \dots}$$

este numită *reprezentare zecimală* (sau *dezvoltare zecimală*) a lui x .

Numărul întreg relativ q_0 natural, poate fi scris el însuși în sistemul de bază 10.

De exemplu:

$$\sqrt{2} = 1,41421. \dots;$$

$$-\pi = -4 + 0,85840734641. \dots$$

Dacă x este un număr negativ, se poate de asemenea scrie dezvoltarea zecimală a lui $(-x)$ și a-l face să fie precedat de semnul $(-)$.

De exemplu:

$$-\pi = -3,14159265358. \dots$$

1.2.3. Aproximări ale sumei și diferenței

1. Să considerăm doi reali x și x' , două valori aproximative a și a' și două aproximări absolute r și r' .

Este normal să se considere că $(a + a')$ este o valoare aproximativă a sumei:

$$y = x + x'.$$

Inegalitatea triunghiulară permite să se scrie:

$$|y - a - a'| = |x - a + x' - a'| \leq |x - a| + |x' - a'|,$$

adică:

$$|y - a - a'| \leq r + r'.$$

TEOREMA / 7 O aproximare absolută a unei sume se obține adunând aproximațiile absolute ale fiecărui termen al sumei.

2. Este normal să se considere că $(a - a')$ este o valoare aproximativă a diferenței:

$$z = x - x'.$$

Inegalitatea triunghiulară permite să se scrie:

$$|z - a + a'| = |x - a + a' - x'| \leq |x - a| + |a' - x'|,$$

adică:

$$|z - a + a'| \leq r + r'.$$

TEOREMA / 8 O aproximare absolută a unei diferențe se obține adunând aproximațiile absolute ale fiecărui termen al diferenței.

(Teorema ar fi evident falsă dacă s-ar scădea aproximațiile lui x și x' .)

Rezultatele sînt mai complexe pentru aproximațiile relative.

3. Să presupunem că știm că a și a' sînt amîndouă valori aproximative prin lipsă. Atunci:

$$a \leq x \leq a + r, \quad a' \leq x' \leq a' + r'.$$

Se deduce de îndată că $(a + a')$ este o valoare aproximativă prin lipsă a sumei $(x + x')$.

De asemenea, $(a + a')$ este aproximată prin adaos dacă a și a' sînt approximate prin adaos. Nimic nu se poate spune în cazul particular cînd a și a' sînt valori aproximative de natură diferită.

Să presupunem acum că a este o valoare aproximativă prin adaos și a' prin lipsă. Nu se poate spune nimic despre sumă, dar este evident că $(a - a')$ este o valoare aproximativă prin exces a lui $(x - x')$ și că $(a' - a)$ este o valoare aproximativă prin lipsă a lui $(x' - x)$.

TEOREMA / 9 Suma a două valori aproximative prin lipsă (respectiv prin adaos) este o valoare aproximativă prin lipsă (respectiv prin adaos) a sumei. Se obține o valoare aproximativă prin lipsă (respectiv prin adaos) a diferenței scăzînd o valoare aproximativă prin adaos (respectiv prin lipsă) dintr-o valoare aproximativă prin lipsă (respectiv prin adaos).

1.2.4. Aproximări ale produsului și citului

1. Să considerăm doi reali x și x' strict pozitivi, două valori aproximative a și a' de asemenea strict pozitive și două aproximări relative s și s' .

Este normal să se considere că aa' este o valoare aproximativă a produsului:

$$u = xx'.$$

Se poate verifica cu ușurință egalitatea:

$$xx' - aa' = x'(x - a) + x(x' - a') - (x - a)(x' - a'),$$

sau încă:

$$\boxed{\frac{xx' - aa'}{xx'} = \frac{x - a}{x} + \frac{x' - a'}{x'} - \frac{x - a}{x} \frac{x' - a'}{x'}} \quad (49)$$

Dacă a și a' sint valori aproximative prin lipsă, aa' este de asemenea o valoare aproximativă prin lipsă, cum o arată egalitatea:

$$xx' - aa' = x'(x - a) + a(x' - a').$$

Pe de altă parte numărul:

$$\frac{x - a}{x} \frac{x' - a'}{x'}$$

este pozitiv sau nul. Se deduc inegalitățile:

$$0 \leq \frac{xx' - aa'}{xx'} \leq \frac{x - a}{x} + \frac{x' - a'}{x'}.$$

Suma $(s + s')$ este deci o aproximare relativă a produsului.

2. Dacă a este valoare aproximativă prin lipsă și a' valoare aproximativă prin adaos, se poate scrie:

$$\frac{xx' - aa'}{xx'} = \frac{x - a}{x} + \frac{x' - a'}{x'} \left(1 - \frac{x - a}{x} \right);$$

de unde:

$$\left| \frac{xx' - aa'}{xx'} \right| \leq \left| \frac{x - a}{x} \right| + \left| \frac{a' - x'}{x'} \right| \left| 1 - \frac{x - a}{x} \right|,$$

și chiar:

$$\left| \frac{xx' - aa'}{xx'} \right| \leq \frac{x - a}{x} + \frac{a' - x'}{x'},$$

pentru că $\left| 1 - \frac{x - a}{x} \right|$, egal cu $\frac{a}{x}$, este cuprins între 0 și 1. Și aici $(s + s')$ este deci o aproximare relativă a produsului, dar nu se cunoaște natura valorii aproximative aa' .

3. Să presupunem în fine că a și a' sint valori aproximative prin adaos. Atunci:

$$\frac{aa' - xx'}{xx'} = \frac{a - x}{x} + \frac{a' - x'}{x'} + \frac{a - x}{x} \frac{a' - x'}{x'}.$$

aa' este deci o valoare aproximativă prin adaos și se pot scrie inegalitățile:

$$0 \leq \frac{aa' - xx'}{xx'} \leq s + s' + ss'.$$

Dacă presupunem — ceea ce este în general cazul — că una din erori s sau s' este mică (de exemplu dacă $s < \frac{1}{1\,000}$), se poate neglija termenul ss' ; ($s + s'$) este încă practic o aproximare relativă a produsului.

TEOREMA / Produsul a două valori aproximative (respectiv aproximative prin lipsă, respectiv aproximative prin exces) pozitive a două numere reale strict pozitive este o valoare aproximativă (respectiv aproximativă prin lipsă, respectiv aproximativă prin adaos) a produsului lor. Suma aproximărilor relative ale factorilor este o aproximare relativă a produsului dacă una din valori este aproximativă prin lipsă.

10

Acest rezultat se poate extinde la cazul general fără un risc prea mare dacă una dintre aproximările relative este mică.

Cazurile în care unul cel puțin dintre numerele x sau x' este negativ se tratează ușor cu ajutorul acestei teoreme.

4. Este normal să se considere că numărul $\frac{a}{a'}$, este o valoare aproximativă a cîtului $\frac{x}{x'}$.

Să presupunem că a este aproximat prin lipsă și a' aproximat prin adaos. Se poate scrie:

$$\frac{\frac{x}{x'} - \frac{a}{a'}}{\frac{x}{x'}} = \frac{\frac{a'x - ax'}{a'x}}{\frac{x}{x'}} = \frac{a'(x - a) + a(a' - x')}{a'x}$$

sau încă:

$$\frac{\frac{x}{x'} - \frac{a}{a'}}{\frac{x}{x'}} = \frac{x - a}{x} + \frac{a' - x'}{x'} \frac{ax'}{a'x}.$$

$\frac{a}{a'}$ este deci o valoare aproximativă prin lipsă. Mai mult:

$$\frac{ax'}{a'x} \leq \frac{xx'}{a'x} \leq \frac{xx'}{x'x}.$$

Prin urmare:

$$0 \leq \frac{\frac{x}{x'} - \frac{a}{a'}}{\frac{x}{x'}} \leq \frac{x - a}{x} + \frac{a' - x'}{x'}.$$

Se vede că suma ($s + s'$) este o aproximare a cîtului (să se noteze bine că a și a' sînt de natură diferită).

5. Să presupunem acum că a este aproximat prin adaos și a' aproximat prin lipsă.

Se poate scrie:

$$\frac{\frac{a}{a'} - \frac{x}{x'}}{\frac{x}{x'}} = \frac{a - x}{x} + \frac{x' - a'}{x'} \frac{ax'}{a'x}.$$

$\frac{a}{a'}$ este deci o valoare aproximată prin adaos, dar nu se poate spune nimic, în general, despre aproximarea relativă a lui $\frac{x}{x'}$.

6. În cazul general, egalitatea de mai sus se poate pune sub forma:

$$\frac{\frac{x}{x'} - \frac{a}{a'}}{\frac{x}{x'}} = \frac{x - a}{x} - \frac{x' - a'}{x'} \frac{1 - \frac{x - a}{x}}{1 - \frac{x' - a'}{x'}};$$

de unde inegalitatea:

$$\frac{\frac{x}{x'} - \frac{a}{a'}}{\frac{x}{x'}} \leq \left| \frac{x - a}{x} \right| + \left| \frac{x' - a'}{x'} \right| \frac{1 - \frac{x - a}{x}}{1 - \frac{x' - a'}{x'}}.$$

Dacă cele două aproximări s și s' sînt mici (de exemplu dacă $s \leq s' < \frac{1}{1\,000}$), se poate înlocui practic numărul:

$$\frac{1 - \frac{x - a}{x}}{1 - \frac{x' - a'}{x'}}$$

prin 1. Se deduce atunci că $(s + s')$ este practic de asemenea o aproximare relativă a cîtului.

TEOREMA / Cîtul a două valori aproximative strict pozitive a două numere strict pozitive este o valoare aproximativă a cîtului lor.

11

Dacă numărătorul este aproximat prin adaos și numitorul prin lipsă, cîtul este aproximat prin lipsă. În acest caz suma aproximărilor relative ale termenilor este o aproximare relativă a cîtului.

Se poate extinde acest ultim rezultat la cazul general fără un risc prea mare dacă cele două aproximări relative sînt mici.

EXEMPLU. Se dau încadrările:

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415, \quad 1,732 < \sqrt[3]{3} < 1,733.$$

Să se calculeze numerele definite prin:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}, \quad \beta = (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}).$$

Un calcul direct dă, evident:

$$\alpha = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{2 - 3} = -5 - 2\sqrt{6}, \quad \beta = -1.$$

Să întrebuițăm o altă metodă care ne va permite să folosim rezultatele precedente:

■ Se pot obține imediat încadrările:

$$\begin{aligned} 3,146 &< \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,148; \\ -0,319 &< \sqrt{2} - \sqrt{3} < -0,317. \end{aligned}$$

Vom lua valorile aproximative:

$$a = 3,147, \quad a' = -0,318,$$

cu aproximările relative:

$$\begin{aligned} s &\geq \frac{0,001}{3,146} \text{ (de exemplu } s = \frac{1}{3\,000} \text{)}; \\ s' &\geq \frac{0,001}{0,317} \text{ (de exemplu } s' = \frac{1}{300} \text{)}; \end{aligned}$$

α și β fiind negative vom calcula $|\alpha|$ și $|\beta|$.

■ O valoare aproximativă a lui $|\alpha|$ este egală cu:

$$\frac{a}{|a'|} = \frac{3,147}{0,318} = 9,896\,2\dots$$

O aproximare relativă a cîtelui este practic egală cu suma:

$$s + s' = \frac{1}{3\,000} + \frac{1}{300} = \frac{11}{3\,000} < \frac{1}{250}.$$

O aproximare absolută a lui $|\alpha|$ este deci egală cu $\frac{|\alpha|}{250}$.

Această aproximare este în mod sigur mai mică decît:

$$\frac{10}{250} = 0,04.$$

Se pot deci scrie inegalitățile:

$$\begin{aligned} 9,85 &< |\alpha| < 9,93; \\ -9,93 &< \alpha < -9,85 \\ \text{(de fapt } \alpha &= -5 - 2\sqrt{6} = -9,898\dots\text{)}. \end{aligned}$$

■ O valoare aproximativă a lui $|\beta|$ este egală cu:

$$a |a'| = 3,147 \times 0,318 = 1,000\,746.$$

O aproximare relativă a produsului este de asemenea și aci mai mică decît $\frac{1}{250}$. O aproximare absolută a lui $|\beta|$ este deci mai mică decît $\frac{|\beta|}{250}$, care practic este 0,004.

Se pot deci scrie inegalitățile:

$$\begin{aligned} 0,996 < |\beta| < 1,005; \\ -1,005 < -\beta < -0,996 \end{aligned}$$

(de fapt $\beta = -1$).

Rezultatele de mai sus vor fi folosite pentru calculul numeric.

EXERCIȚII

1.35. Să se calculeze numerele:

$$\begin{aligned} \frac{3 + \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}} + \frac{1 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}; \\ \frac{3 - \sqrt{2}}{5 + \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} \quad (1,414 < \sqrt{2} < 1,415). \end{aligned}$$

1.36. Care este cel mai mare dintre următoarele două numere:

$$\begin{aligned} 23 + \frac{8}{19} + \frac{15}{19^2} + \frac{7}{19^3} + \frac{11}{19^4}, \\ 23 + \frac{8}{19} + \frac{11}{19^2} + \frac{18}{19^3} + \frac{16}{19^4} ? \end{aligned}$$

1.37. Să se demonstreze că scrierea zecimală a unui număr rațional este astfel încît începînd de la un anumit rang n , zecimalele se repetă periodic.

1.38. Să se demonstreze că numărul definit prin:

$$0,721\ 253\ 253\ 253\ \dots$$

este rațional.

1.39. Să se demonstreze că un șir de întregi r_n ($n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r_n \leq 9$) definește dezvoltarea zecimală a unui număr real cuprins între 0 și 1 afară de cazul dacă și numai dacă începînd de la un anumit rang toate numerele r_n sînt egale cu 9.

1.40. $a, b, c, d, a', b', c', d'$, fiind numere reale, să se demonstreze următoarele implicații:

$$\begin{aligned} (a < b \text{ și } c < d) &\implies (a - b < d - c \text{ și } d - a < c - b), \\ (a < a' \text{ și } b' > b) &\implies (a + b < a' + b' \text{ și } a - a' < b + b'), \\ \left(0 < \frac{a}{a'} < \frac{b}{b'} < \frac{c}{c'} < \frac{d}{d'} \right) &\implies \left(\frac{a}{a'} < \frac{a + b + c + d}{a' + b' + c' + d'} \right). \end{aligned}$$

Să se dea exemple numerice în care aceste numere sînt definite prin valori cu aproximație de 10^{-3} .

1.41. Să se calculeze aproximațiile absolute și relative ale numărului π când se iau următoarele valori aproximative:

$$3; 3,14; \frac{22}{7}; 3 + \frac{10}{71}; \frac{355}{113}$$

1.42. Să se calculeze cu aproximație de 10^{-3} numerele:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9};$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7};$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}.$$

1.43. Să se calculeze cu aproximație de 10^{-4} numerele:

$$\frac{7}{11} + \frac{8}{13} + \frac{64}{97} + \frac{53}{91};$$

$$\frac{5}{11} + \frac{7}{22} + \frac{8}{33} + \frac{9}{44}.$$

1.44. Să se calculeze $\pi/\sqrt{2}$ știind că:

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415; \quad 3,141\,592 < \pi < 3,141\,593.$$

1.45. Să se calculeze numărul:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ (volumul unei sfere)}$$

știind că $R = 0,5 + \alpha$ cu $|\alpha| \leq 10^{-3}$.

1.46. Să se calculeze $\frac{1}{\pi}$ cu aproximație de 10^{-4} ($\pi = 3,141\,592\,653\,5\dots$).

1.47. Să se calculeze cu aproximație de 10^{-4} numerele:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9};$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

PROBLEME

1.48. Citeva proprietăți ale părții întregi.

1° Să se demonstreze că pentru orice real x , există un singur întreg relativ $[x]$, numit *partea întreagă* a lui x , astfel încît:

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

2° Să se studieze aplicațiile care asociază lui x succesiv numerele:

$$[x], [-x], [x] + [1 - x], -[x] - [-x].$$

3° Dintre relațiile următoare:

$$x > n, [x] > n, [x] \geq n, x \geq n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

să se aleagă perechile (R, R') de relații astfel ca implicația $(R \implies R')$ să fie adevărată.
(Se va putea trasa o diagramă.)

4° Aceeași problemă cu:

$$x \leq n, [x] \leq n, [x] < n, x < n.$$

5° Aceeași problemă cu:

$$x > y, [x] > [y], [x] \geq [y], x \geq y.$$

6° y fiind strict pozitiv, se pune:

$$f(x, y) = \left[\frac{1}{y} [xy] \right].$$

Să se demonstreze inegalitatea: $f(x, y) \leq [x]$.

Să se demonstreze egalitatea: $f(x, y) = [x]$ dacă y este întreg.

7° y fiind strict mai mare ca 1, se pune:

$$g(x, y) = \left[\frac{1}{[y]} [xy] \right].$$

Să se demonstreze inegalitatea $g(x, y) \geq [x]$ dacă x este pozitiv.

8° Să se determine o pereche (x, y) și o pereche (x', y') astfel ca:

$$f(x, y) < [x] < g(x, y),$$

$$x' < 0, f(x', y') < [x'], g(x', y') < [x'].$$

9° Dacă x este un real și a, b, c trei întregi strict pozitivi, să se demonstreze egalitatea:

$$\left[\frac{x}{abc} \right] = \left[\frac{1}{a} \left[\frac{1}{b} \left[\frac{x}{c} \right] \right] \right].$$

10° Să se traseze grafele aplicațiilor care asociază succesiv lui x numerele:

$$\delta(x) = \left[\frac{1}{x^2 + 1} \right], \quad \omega(x) = \left[\frac{x}{x^2 + 1} \right],$$

$$s(x) = \omega(x) - \omega(-x), \quad v(x) = xs(x).$$

Să se compare $v(x)$ și $|x|$.

11° Să se studieze aplicația definită prin:

$$\varphi = \left[x \mapsto \left[\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \right] ([x] + [1 - x]) \right].$$

12° Să se demonstreze că numerele întregi care aparțin intervalelor $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$ sînt date respectiv de formulele:

$$[b] - [a], [-a] - [-b], [b] + [1 - a].$$

13° a și b fiind doi întregi primi între ei, se pune $x = \frac{a}{b}$. Să se demonstreze egalitatea:

$$[x] + [2x] + \dots + [(b-1)x] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

14° Să se demonstreze egalitatea:

$$\sum_{m=0}^n \left[\frac{2m}{3} \right] = \left[\frac{n^2}{3} \right].$$

15° Să se demonstreze egalitatea:

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] = [x]$$

și generalizarea ei:

$$[nx] = \sum_{m=0}^{n-1} \left[x + \frac{m}{n} \right].$$

Observație. — Practic chestiunile sînt independente între ele.

1.49. 1° Să se demonstreze prin recurență pentru $m \geq 1$, implicația:

$$[m \leq n] \implies \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^m < 1 + \frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n} \right)^2 \right] (n \in \mathbb{N}^*).$$

2° Să se deducă inegalitatea:

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 3.$$

3° Să se deducă inegalitatea:

$$\left(1 + \frac{p}{n} \right)^n < 3^p \quad (p \in \mathbb{N}).$$

4° Să se demonstreze implicația:

$$[n \geq 3] \implies [(n+1)^n < n^{n+1}].$$

5° Să se deducă implicația:

$$[n > m \geq 3] \implies [m^n > n^m].$$

6° Punînd: $a = 1 + \frac{1}{n}$, $b = 1 + \frac{1}{n+1}$, să se demonstreze inegalitatea:

$$a^{n+1} - b^{n+1} < (a - b) (n+1)a^n.$$

7° Să se deducă inegalitatea:

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}.$$

8° Să se demonstreze că A mulțimea numerelor de forma $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ admite o margine superioară.

1.50. 1° P și Q fiind două polinoame cu coeficienți reali, astfel încît Q nu este nul, se notează cu $\frac{P}{Q}$ mulțimea perechilor de polinoame (A, B) astfel încît:

$$PB = QA, \quad B \neq 0.$$

Să se demonstreze că mulțimea fracțiilor raționale $\frac{P}{Q}$ capătă structura de corp comutativ dacă o înzestram cu o adunare și cu o înmulțire astfel încît:

$$\frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q'} = \frac{PQ' + P'Q}{QQ'},$$

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{P'}{Q'} = \frac{PP'}{QQ'}$$

(se vor fundamenta aceste scrieri în care fracția $\frac{P}{Q}$ poate fi înlocuită prin orice altă fracție $\frac{A}{B}$ astfel încît $PB = QA$).

2° Se notează $\frac{P}{Q} > \frac{P'}{Q'}$ dacă și numai dacă se poate găsi un real y astfel ca:

$$(x > y) \implies \left(\frac{P(x)}{Q(x)} > \frac{P'(x)}{Q'(x)} \right).$$

Să se verifice relația: $x^2 > nx$ ($n \in \mathbb{N}$).

3° Să se demonstreze că relația $>$ face din corpul fracțiilor raționale reale un corp comutativ total ordonat în care teorema lui Arhimede nu este verificată.

1.51. x fiind irațional, n și n' întregi relativi, se consideră numerele X de forma:

$$X = nx - n'.$$

Se pune $X = (x, n, n')$.

1° x fiind dat, să se aleagă n și n' pentru ca $X = 0$.

2° x fiind dat, în ce condiții avem: $X = X_1$ cu $X_1 = (x, n_1, n'_1)$?

3° x fiind dat pozitiv, să se demonstreze că există o infinitate de numere X astfel încît:

$$0 < X < 1.$$

4° x fiind dat, să se demonstreze că se pot alege n și n' astfel ca $|X| < \epsilon$, $\epsilon > 0$, este oricît de mic vrem.

(Această problemă nu poate fi tratată decît de elevii din clasa terminală C.)

1.52. x_1 fiind un real pozitiv, notăm cu a_1 partea sa întregă ($a_1 \geq 0$) și punem:

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \text{ deci: } x_2 > 1.$$

Apoi notăm cu a_2 partea întregă a lui x_2 ($a_2 \geq 1$) și punem:

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \text{ deci: } x_3 > 1,$$

și așa mai departe.

Se scrie:

$$r_1 = a_1, \quad r_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}, \quad r_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} \text{ etc.}$$

Se mai scrie:

$$r_1 = \frac{p_1}{q_1}, \quad r_2 = \frac{p_2}{q_2}, \quad r_3 = \frac{p_3}{q_3}, \dots,$$

cu:

$$p_1 = a_1; p_2 = a_1 a_2 + 1; p_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3;$$

$$q_1 = 1; q_2 = a_2; q_3 = a_2 a_3 + 1; \text{ etc.}$$

Numărul r_n este numit *redusa de rangul n a numărului x_1* .

1° Să se stabilească relațiile:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2};$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2};$$

(Să se raționeze prin recurență.)

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n;$$

$$a_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \cdot \frac{x_1 - r_{n-1}}{r_n - x_1};$$

$$r_n - r_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}};$$

$$r_n = r_1 + \frac{1}{q_1 q_2} - \frac{1}{q_2 q_3} + \dots + \frac{(-1)^n}{q_{n-1} q_n}.$$

2° Să se demonstreze că:

a) r_n este ireductibilă;

b) $p_{n+1} > p_n$ și $q_{n+1} > q_n$;

c) $r_2 > r_4 > r_6 > r_8 \dots$,

$$r_1 < r_3 < r_5 < r_7 \dots;$$

d) x_1 este cuprins între r_n și r_{n+1} și este mai aproape de r_n care are rangul cel mai mare.

3° Să se formeze redusele numerelor:

$$\frac{22}{15}, \frac{256}{117}, \frac{117}{256}.$$

Să se deducă soluțiile în numere întregi ale ecuației $256x - 117y = 1$.

4° Să se formeze redusele numărului:

$$x_1 = \pi \simeq 3,141\ 592\ 653$$

pînă la r_4 .

1.53. Această problemă are ca obiect studiul subgrupurilor aditive și a anumitor subgrupuri multiplicative ale corpului $\mathbb{R}$ al numerelor reale.

Diversele chestiuni sînt independente.

Prima parte: Studiul subgrupurilor aditive ale mulțimii $\mathbb{R}$.

În cele ce urmează ne va interesa cazul în care subgrupul aditiv A nu este subgrupul trivial $\{0\}$.

1° Să presupunem mai întîi că mulțimea elementelor strict pozitive ale lui A are un cel mai mic element, notat a_0 . Să se demonstreze atunci că A este mulțimea $Za_0 = \{ka_0; k \in \mathbb{Z}\}$. (Se va putea face împărțirea euclidiană a unui element oarecare a al lui A prin a_0 .)

2° Să presupunem acum că mulțimea elementelor strict pozitive ale lui A nu mai are un cel mai mic element.

a) Fie un interval $I =]0, \alpha]$ astfel că $I \cap A \neq \emptyset$. Fie n un întreg natural oarecare. Să se demonstreze atunci că se realizează o partiție a lui I punindu-se:

$$I = \bigcup_{p=0}^{p=m-\alpha} I_p \text{ cu } I_p = \left] \frac{p\alpha}{m}, \frac{(p+1)\alpha}{m} \right].$$

Să se demonstreze că există un interval I_p care conține cel puțin două elemente ale lui A . Să se deducă că, oricare ar fi realul ε strict pozitiv $A \cap]0, \varepsilon] \neq \emptyset$.

b) Fie J un interval oarecare nevid $[\beta, \gamma]$ al lui $\mathbb{R}$. Să se demonstreze că $J \cap A \neq \emptyset$.

Pentru a intuit această situație se spune că A este dens în $\mathbb{R}$.

3° *Aplicație.* Pentru ce condiție necesară și suficientă subgrupul aditiv generat de două numere reale a și b , nenule, este de primul tip?

Exemplu. Luindu-se $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, să se demonstreze că:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p, \exists q, \left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{q}.$$

Partea a doua: Studiul subgrupurilor multiplicative ale mulțimii $\mathbb{R}^{**}$.

1° Folosindu-se un izomorfism crescător, notat e , al grupului aditiv $\mathbb{R}$ pe grupul multiplicativ $\mathbb{R}^{**}$ al realilor strict pozitivi, să se arate că dacă subgrupul multiplicativ M al lui $\mathbb{R}^{**}$ nu este subgrupul trivial $\{1\}$ el este atunci unul din următoarele două tipuri:

— mulțimea elementelor lui M mai mari strict ca 1 are un cel mai mic element, notat b_0 , care determinat obținem $M = b_0^{\mathbb{Z}} = \{b_0^k; k \in \mathbb{Z}\}$.

— M este dens în $\mathbb{R}^{**}$.

2° *Aplicație.* Se consideră ecuația lui Fermat $x^2 - 2y^2 = 1$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

a) Să se demonstreze că $M = \{x + y\sqrt{2}; x \text{ și } y \text{ în } \mathbb{Z}, x + y\sqrt{2} > 0, x^2 - 2y^2 = 1\}$ este un subgrup multiplicativ al lui $\mathbb{R}^{**}$.

b) Să se demonstreze că $]1, 2] \cap M = \emptyset$ și să se deducă că M nu este de tipul al doilea.

c) Să se deducă forma generală a tuturor soluțiilor ecuației lui Fermat.

2. CORPUL NUMERELOR COMPLEXE

2.1. Corpul $\mathbb{C}$ al matricelor $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

2.2. Spațiul vectorial de la $\mathbb{C}$ pe $\mathbb{R}$.

2.3. Numere complexe.

2.4. Modulul unui număr complex.

2.5. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe.

2.1. CORPUL $\mathbb{C}$ AL MATRICELOR $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

2.1.1. Definiție

Se notează cu $\mathcal{M}$ mulțimea matricelor pătrate de ordinul 2 cu termeni reali. Pe corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale, se notează cu $\mathbb{C}$ submulțimea matricelor $M(a, b)$ de forma:

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

pentru orice a și pentru orice b .

Cînd nu există nici un echivoc, se scrie:

$$M(a, b) = M; \quad M(a', b') = M'.$$

Observație. — Mulțimea $\mathbb{C}$ conține mulțimea $\mathcal{U}$ a matricelor rotațiilor vectoriale într-o bază ortonormată fixă. Să notăm în afară de aceasta că:

$$M(0, 0) = 0_{\mathcal{M}} \text{ și } M(1, 0) = I_{\mathcal{M}},$$

$0_{\mathcal{M}}$ și $I_{\mathcal{M}}$ fiind respectiv matricea nulă și matricea unitate a inelului $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ al matricelor pătrate de ordinul 2.

2.1.2. Grupul $(\mathbb{C}, +)$

Pentru orice matrice $M(a, b)$ și pentru orice matrice $M(a', b')$, restricția la $\mathbb{C}$ a legii de adunare definită pe $\mathcal{M}$ dă:

$$M(a, b) + M(a', b') = \begin{pmatrix} a + a' & -(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix};$$

fie:

$$M(a, b) + M(a', b') = M(a + a', b + b').$$

Mulțimea $\mathbb{C}$ este închisă pentru legea $+$.

Pe de altă parte:

$$-M(a, b) = M(-a, -b),$$

deci:

$$(-M) \in \mathbb{C};$$

cum:

$$I_{\mathcal{M}} \in \mathbb{C},$$

rezultă că $(\mathbb{C}, +)$ este un grup comutativ, subgrup al lui $(\mathcal{M}, +)$.

Legea $+$ pe $\mathbb{C}$ se numește *lege indusă* pe $\mathbb{C}$ de legea $+$ a lui $\mathcal{M}$.

Observație. — S-a demonstrat (Algebră, Terminal C) că o parte nevidă H a unui grup $(E, \perp)$ este un subgrup, dacă și numai dacă, pentru orice x și pentru orice y :

$$(x \in H \text{ și } y \in H) \implies [(x \perp y^{-1}) \in H];$$

elementul y^{-1} este *simetricul lui y* pentru legea $\perp$ a grupului E .

EXERCIȚIU

■ Exercițiu de aplicație imediată.

Folosind observația precedentă, să se demonstreze că $(\mathbb{C}, +)$ este un subgrup al lui $(\mathcal{M}, +)$.

2.1.3. Corpul comutativ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

■ Restricția la $\mathbb{C}$ a legii multiplicative a inelului $\mathcal{M}$ al matricelor pătrate de ordinul 2 antrenează succesiv, pentru orice pereche (M, M') de matrice ale lui $\mathbb{C}$:

$$M(a, b) \times M(a', b') = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix};$$

$$M(a, b) \times M(a', b') = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + a'b) \\ ab' + a'b & aa' - bb' \end{pmatrix};$$

adică:

$$M(a, b) \times M(a', b') = M(aa' - bb', ab' + a'b).$$

Rezultă că produsul $M \times M'$ este o matrice a lui $\mathbb{C}$.

Legea $\times$ pe $\mathbb{C}$, definită peste tot, este indusă pe $\mathbb{C}$ de legea $\times$ a mulțimii $\mathcal{M}$. Această lege de compoziție internă este vizibil comutativă.

Pe de altă parte această lege este în mod necesar distributivă în raport cu legea aditivă a grupului $\mathbb{C}$ și matricea $M(1, 0)$ este matricea unitate a lui $\mathbb{C}$.

PROPRIETATEA 1 / Mulțimea $\mathbb{C}$ are, pentru legile $+$ și $\times$ ale matricelor-pătrate de ordinul 2, o structură de inel comutativ unitar, structură indusă de aceea a lui $\mathcal{M}$.

Observații. — 1) Fie $J = M(0, 1)$. Să calculăm J^2 .

Se obține:

$$J^2 = M(-1, 0),$$

adică:

$$J^2 = -I.$$

2) Se poate stabili mai întâi, dacă dorim, că $\mathbb{C}$ are o structură de spațiu vectorial de dimensiune 2 pe $\mathbb{R}$, cu o bază $\{I, J\}$ și folosi descompunerea:

$$M(a, b) = aI + bJ \text{ (nr. 2.2.2).}$$

EXERCIȚII

■ Exercițiu rezolvat

Fie o rotație vectorială φ de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, fie o omotetie vectorială h_λ și aplicația $\mathbf{l} = \varphi \circ h_\lambda$.

Să se demonstreze că matricea lui $\mathbf{l}$ este o matrice a lui $\mathbb{C}$.

Avem:

$$M\mathbf{l} = M\varphi \times Mh,$$

adică:

$$M\mathbf{l} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ și } a^2 + b^2 = 1,$$

de unde:

$$M\mathbf{l} = M(a\lambda, b\lambda) = M(a', b') \text{ cu } a'^2 + b'^2 = \lambda^2.$$

■ Exercițiu de aplicație imediată.

Fie $J = M(0, 1)$.

1° Să se demonstreze că $G = \{J, J^2, J^3, J^4\}$ este un grup multiplicativ.

2° Să se calculeze J^n , pentru n întreg natural, folosind numerele congruente cu n , modulo 4.

3° Să se calculeze direct matricea unitate. (Sintem conduși să studiem un sistem de două ecuații pe $\mathbb{R}$.)

4° Să se calculeze produsul:

$$M(a, b) \times M(a, -b).$$

■ Mulțimea $\mathbb{C}$ este un corp dacă și numai dacă orice matrice $M(a, b)$ nenulă este inversabilă, adică dacă și numai dacă determinantul matricei $M(a, b)$ este nenul (Aleph_0 , Geometrie anul I CDE, nr. 4.3.5).

Se notează M^{-1} matricea inversă.

Pentru orice pereche (a, b) fixă și diferită de perechea $(0, 0)$, avem:

$$\text{Det } M(a, b) = a^2 + b^2,$$

de unde:

$$\text{Det } M(a, b) \neq 0.$$

PROPRIETATEA / Orice matrice din $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ este inversabilă.

2

■ Calculul lui $M^{-1}(a, b)$.

O matrice M din $\mathbb{C}^*$ fiind fixă, să determinăm matricea ei inversă M^{-1} .

Fie:

$$M(x, y) = M^{-1}(a, b).$$

Avem succesiv:

$$M(a, b) \times M(x, y) = M(1, 0),$$

$$M(ax - by, ay + bx) = M(1, 0).$$

Rezultă pe $\mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \\ a^2 + b^2 \neq 0. \end{cases}$$

Se obține:

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Pentru orice pereche (a, b) din $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$, se poate scrie:

$$M^{-1}(a, b) = \frac{1}{a^2 + b^2} \times M(a, -b)$$

Observație. Matricea $M(a, -b)$ este numită *matricea transpusă* a matricei $M(a, b)$; dacă $a^2 + b^2 = 1$, se regăsește matricea asociată rotației vectoriale φ^{-1} .

EXEMPLE. $M^{-1}(3, 4) = M\left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right)$; $M^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Proprietățile 1 și 2 permit să se enunțe:

TEOREMĂ / Restricțiile adunării și înmulțirii matricelor pătrate de ordinul 2 înzestrează mulțimea $\mathbb{C}$ a matricelor pătrate $M(a, b)$ cu o structură de corp comutativ.

EXERCIȚIU

■ Exercițiu de aplicație imediată.

Mulțimea $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, înzestrată cu legile $+$, $\times$ ale legilor de congruențe, este un corp comutativ. Avem $K = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. Câte matrice de tipul $M(\overline{a}, \overline{b})$ se pot construi? Fie $\mathbb{C}_K$ mulțimea matricelor obținute. Să se demonstreze că $\mathbb{C}_K$ este un corp comutativ. Să se calculeze $M^{-1}(\overline{2}, \overline{1})$.

2.2. SPAȚIUL VECTORIAL DE LA $\mathbb{C}$ PE $\mathbb{R}$

2.2.1. Subspațiul vectorial $\mathbb{C}$ pe $\mathbb{R}$

Să reamintim că mulțimea $\mathcal{M}$ a matricelor pătrate de ordinul 2 are o structură de spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$ (Alef₀, Geometrie 1° CDE, nr. 4.1.5).

Submulțimea $\mathbb{C}$ este *nevidă*; restricția la $\mathbb{C}$ a legii de compoziție externă notată, definită pe $\mathcal{M}$ cu operatori în $\mathbb{R}$, permite să se scrie:

$$(\forall_{\mathbb{R}} \lambda), (\forall_{\mathbb{C}} M) \quad \lambda \cdot M(a, b) = \begin{pmatrix} a\lambda & -b\lambda \\ b\lambda & a\lambda \end{pmatrix};$$

adică, pentru orice element M al lui $\mathbb{C}$:

$$\lambda M(a, b) = M(a\lambda, b\lambda). \quad (1)$$

Matricea $\lambda M(a, b)$ este element al lui $\mathbb{C}$.

Pe de altă parte $\mathbb{C}$ are o structură de grup aditiv.

$\mathbb{C}$, *nevidă*, este *stabilă* la adunarea matricială și la înmulțirea printr-un scalar. Se enunță:

PROPRIETATEA / $\mathbb{C}$ este un subspațiu vectorial pe $\mathbb{R}$ al spațiului vectorial $\mathcal{M}$ al matricelor pătrate de ordinul 2.

EXERCIȚII

■ *Exercițiu de aplicație imediată.*

I. Fie corpul $K = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. Se ia drept corp comutativ al scalarilor corpul K însuși. Câți vectori are spațiul vectorial al matricelor $M(\overline{a}, \overline{b})$ pe K ?

Să se găsească subspațiile vectoriale ale lui K .

II. Se consideră mulțimea M a matricelor pătrate de ordinul 2 de forma:

$$U = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & 3b + a \end{pmatrix},$$

unde a și b sînt reali fiși.

1° Matricea este inversabilă? Să se demonstreze că M este un subcorp comutativ al corpului matricelor pătrate de ordinul 2.

2° Să se demonstreze că M este un subspațiu vectorial pe $\mathbb{R}$ al spațiului vectorial $\mathcal{M}$ al matricelor pătrate de ordinul 2. Să se indice o bază $\{I, V\}$ a acestui subspațiu vectorial.

3° Se consideră matricele U al căror determinant este egal cu 1. Să se demonstreze că ele formează un grup multiplicativ comutativ. Formează ele un subspațiu vectorial al lui M ?

2.2.2. Baza și dimensiunea spațiului vectorial $\mathbb{C}$

1. Să punem $M(1, 0) = I_{\mathbb{C}} = I$ și $M(0, 1) = J$. Pentru orice pereche de reali (a, b) , adică pentru orice matrice $M(a, b)$, avem:

$$M(a, b) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sau:

$$\boxed{\forall \mathbb{C} \quad M(a, b) = aI + bJ}$$

Această relație arată că sistemul $\{I, J\}$ este un sistem generator al lui $\mathbb{C}$.

2. Să arătăm că $\{I, J\}$ este o parte liberă. Fie α și β două numere reale astfel ca, 0 fiind matricea nulă a lui $\mathbb{C}$:

$$\alpha I + \beta J = 0 \text{ și } M(0, 0) = 0.$$

Cum:

$$\alpha I + \beta J = M(\alpha, \beta), \text{ rezultă că:}$$

$$M(\alpha, \beta) = M(0, 0) \iff (\alpha, \beta) = (0, 0).$$

Orice element $M(a, b)$ al lui $\mathbb{C}$ se scrie în mod unic:

$$M(a, b) = aI + bJ; \quad I = M(1, 0), \quad J = M(0, 1)$$

Se enunță:

TEOREMĂ / Matricele I și J formează o bază a lui $\mathbb{C}$ și $\mathbb{C}$ este un spațiu vectorial de dimensiune 2 pe $\mathbb{R}$.

Observație. — Matricele I și J aparțin submulțimii U a matricelor rotațiilor vectoriale.

EXERCIȚIU

■ *Exercițiu rezolvat*

În folosind baza $\{I, J\}$, să se calculeze: $M(a, b) \times M(a', b')$.

Pentru orice pereche (a, b) și pentru orice pereche (a', b') avem:

$$M = aI + bJ, \quad M' = a'I + b'J,$$

fie:

$$M \cdot M' = (aI + bJ)(a'I + b'J),$$

$$MM' = aa'I^2 + (ab' + a'b)IJ + bb'J^2.$$

Or:

$$I^2 = I, \quad IJ = JI = J, \quad J^2 = -I,$$

de unde:

$$MM' = (aa' - bb')I + (ab' + a'b)J.$$

2.2.3. Izomorfism între $\mathbb{R}$ și un subcorp al lui $\mathbb{C}$

1. Fie f aplicația de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{C}$ definită prin:

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Fie $\mathbb{C}_1$ submulțimea lui $\mathbb{C}$ ale cărei elemente sînt matricele $M(a, 0)$; f este o bijecție a lui $\mathbb{R}$ pe $\mathbb{C}_1$.

2. Mulțimea $\mathbb{C}_1$ conține, în particular:

$$M(1, 0) = I, \quad M(0, 0) = 0;$$

este *nevidă*; pe de altă parte $\mathbb{C}_1$ este *stabilă* la legile induse pe ea însăși de cele două legi de compoziție interne definite pe $\mathbb{C}$:

$$M(a, 0) + M(a', 0) = M(a + a', 0),$$

$$M(a, 0) \times M(a', 0) = M(aa', 0);$$

rezultă că $(C_1, +, \cdot)$ este un subcorp comutativ al lui $(C, +, \cdot)$.

Avem:

$$\forall c_1 M - M(a, 0) = M(-a, 0),$$

$$\forall c_1 M^{-1} M^{-1}(a, 0) = M\left(\frac{1}{a}, 0\right), C_1^* = C_1 - \{0\}.$$

Observație. — Se va putea stabili, cu caracter de exercițiu, următoarea proprietate.

O parte H , nevidă, a unui corp K este un subcorp al lui K , dacă și numai dacă:

$$(x \in H \text{ și } y \in H) \implies [(x - y) \in H \text{ și } xy \in H],$$

și:

$$x \in H^* \implies x^{-1} \in H^*, H^* = H - \{0\}.$$

3. Să studiem comportarea bijecției f față de structurile corpurilor R și C_1 . Pentru orice a și pentru orice a' , reali:

$$f(a) + f(a') = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix},$$

$$f(a) + f(a') = \begin{pmatrix} a + a' & 0 \\ 0 & a + a' \end{pmatrix},$$

adică:

$$f(a) + f(a') = f(a + a'). \quad (1)$$

Pe de altă parte, pentru orice λ real, nenul, pentru orice a și pentru orice a' , nenuli, se obține:

$$f(\lambda a) = \lambda f(a); \quad (2)$$

$$f(a) \cdot f(a') = f(aa'). \quad (3)$$

Concluzii. 1) Relațiile (1) și (2) arată că bijecția f este o aplicație liniară și, prin urmare, un izomorfism de spații vectoriale.

2. Relațiile (1) și (3) arată că f este un izomorfism la corpului realilor R pe subcorpul C_1 al matricelor de tipul:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Consecințe

1) Corpul R este izomorf cu un subcorp al lui C

2) Este atunci legitim să identificăm orice real a cu matricea

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ adică de a identifica pe } R \text{ și } C_1.$$

Corpul $\mathbf{C}$ este un „supracorp“ al lui $\mathbf{R}$.
În particular, rezultă că:

$$1 \text{ este identificat cu } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$-1 \text{ este identificat cu } -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, dacă se notează cu J matricea $M(0, 1)$, avem:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de unde:

$$J^2 = -I;$$

și prin urmare, -1 este identificat cu matricea J^2 .

PROBLEME

2.1. Studiul unei submulțimi a matricelor pătrate de ordinul 2

I. Oricărui element (x, y) al lui $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, i se asociază matricea $M(x, y)$ astfel încît:

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ 2y & x - 2y \end{pmatrix}.$$

1° Să se demonstreze că mulțimea $\mathcal{M}(2, -2)$ a acestor matrici este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial pe $\mathbf{R}$, a matricelor pătrate de ordinul 2. Să se dea o bază simplă și să se precizeze dimensiunea ei. Să se demonstreze că acest spațiu vectorial este izomorf cu $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

2° Să se demonstreze că $\mathcal{M}(2, -2)$ are o structură de corp comutativ K față de adunarea și înmulțirea matricelor. Să se găsească un element A al lui $\mathcal{M}(2, -2)$ astfel încît

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

II. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}(p, q)$ a matricelor cu termeni reali a și b astfel încît:

$$M(p, q) = \begin{pmatrix} a & -b \\ qb & a + pb \end{pmatrix},$$

realii p și q fiind fixați.

1° Să se reia chestiunea (I, 1°).

2° Să se demonstreze că $\mathcal{M}(p, q)$ este un inel comutativ unitar pentru legile obișnuite.

3° Să se demonstreze că, dacă avem: $p^2 - 4q < 0$, mulțimea $\mathcal{M}(p, q)$ are o structură de corp.

III. Se consideră din nou corpul K de la problema I. Să se găsească un izomorfism de corp între K și $\mathbf{C}$.

2.3. Numere complexe

2.3.1. Notăția $z = a + ib$.

1. Mulțimea $\mathbb{C}$ are o structură de spațiu vectorial de dimensiune 2 pe $\mathbb{R}$. De aceea pentru orice matrice $M(a, b)$ în baza $\{I, J\}$, avem:

$$M(a, b) = a \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

și aceasta în *mod unic*.

Izomorfismul f a permis să identificăm:

$$a \text{ cu } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad b \text{ cu } \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Să punem $J = i$. Avem, pe $\mathbb{C}$:

$$i^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_i$$

rezultă că se poate nota în $\mathbb{C}$:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

2. Identificarea precedentă permite ca orice matrice $M(a, b)$ să se scrie sub forma:

$$M(a, b) = a + ib \quad \text{și} \quad i^2 = -1.$$

De aci înainte se va scrie:

$$\boxed{z = a + ib \quad \text{și} \quad i^2 = -1, \quad a \text{ și } b \text{ reali}}$$

Mulțimea $\mathbb{C}$ este atunci numită *mulțimea numerelor complexe*; fiecare număr complex este notat $z = a + ib$ și aceasta într-un *mod unic*. O bază a spațiului vectorial $\mathbb{C}$ este atunci: $\{1, i\}$.

3. Componenta a se numește *partea reală* a lui z , notată $\mathcal{R}(z) = a$ și componenta b se numește *partea imaginară* a lui z , notată $J(z) = b$.

Dacă $b = 0 : z = a$ este un număr real, z aparține subcorpului $\mathbb{R}$ al corpului $\mathbb{C}$.

Dacă $a = 0 : z = ib$ se numește *pur imagină*.

EXEMPLU

$i = 0 + i$: i este pur imagină.

$i^2 = -1$: i^2 este un real.

EXERCIȚIU

■ *Exercițiu de aplicație imediată.*

I. Să se demonstreze că $\{i\}$ generează grupul multiplicativ:

$$G = \{+1, i, -1, -i\},$$

și că $\{i\}$ generează un grup finit multiplicativ.

II. Să se demonstreze că G este izomorf cu un grup de rotații vectoriale, care se va preciza.

2.3.2. Operații cu numere complexe

Rezultă din identificarea precedentă că toate proprietățile și rezultatele obținute în cursul studiului mulțimii $\mathbb{C}$ a matricelor $M(a, b)$ permit să se obțină proprietăți pentru numerele complexe scrise sub forma:

$$z = a + ib \text{ și } i^2 = -1,$$

această formă fiind numită *normală* sau *carteziană*.

Se obțin cu ușurință implicațiile:

$$(z = z') \iff (a, b) = (a', b'),$$

$$(z = 0) \iff (a, b) = (0, 0).$$

Operațiile:

$$M + M' = (a + a')I + (b + b')J$$

$$M \cdot M' = (aa' - bb')I + (ab' + a'b)J$$

$$M^{-1}(a, b) = \frac{a}{a^2 + b^2}I - \frac{b}{a^2 + b^2}J$$

și:

$$M \neq 0 \iff (a^2 + b^2 \neq 0)$$

$$\lambda M(a, b) = M(\lambda a, \lambda b)$$

se pot scrie respectiv pentru orice z și z' prin:

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

$$z \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{1}{z}$$

$$\iff z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$\lambda z = a\lambda + ib\lambda, \text{ pentru orice } \lambda \text{ real}$$

Este suficient, pentru a se obține aceste rezultate, să se aplice regulile de calcul dintr-un corp și să se țină seama de faptul că $i^2 = -1$. De exemplu:

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + i^2bb' + i(ab' + a'b),$$

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

EXAMPLE

Iată câteva exemple de calcul numeric.

I. Se dă:

$$z = 3 + 4i, z' = 2 - 3i.$$

Să se calculeze:

$$z + z', zz', \frac{1}{z}, z^2, \frac{z'}{z}.$$

Se obține:

$$z + z' = 5 + i; zz' = 18 - i;$$

$$\frac{1}{z} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i; \frac{z'}{z} = -\frac{6}{25} - \frac{17}{25}i.$$

Calculul citului $\frac{z'}{z}$ va fi reluat la nr. 2.3.5.

II. Să se calculeze:

$$(1 + i)^2, (1 - i)^2, (1 + i)^3, \frac{1 + i}{1 - i}.$$

Se obține succesiv:

$$(1 + i)^2 = 2i; (1 - i)^2 = -2i;$$

$$(1 + i)^3 = (1 + i)^2(1 + i) = 2i(1 + i) = -2 + 2i;$$

$$\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

III. Să se descompună în factori, pe $\mathbb{C}$, expresiile:

$$z^2 + 4; z^3 - 1.$$

Avem:

$$z^2 + 4 = (z + 2i)(z - 2i);$$

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1).$$

Mai general, $(z + 1)^n$ se dezvoltă folosindu-se formula binomului lui Newton care este valabilă în orice inel comutativ.

EXERCIȚII

23. Exerciții rezolvate

I. Să se calculeze în două feluri $(1+i)^7$ și să se deducă valoarea lui:

$$S_1 = 1 - C_7^2 + C_7^4 - C_7^6,$$

și a lui:

$$S_2 = C_7^1 - C_7^3 + C_7^5 - C_7^7.$$

Avem:

$$(1+i)^7 = (1+i)^6 (1+i) = [(1+i)^2]^3 (1+i),$$

de unde:

$$(1+i)^7 = 8i^3 (1+i) = -8i (1+i),$$

$$(1+i)^7 = 8 - 8i.$$

Să dezvoltăm $(1+i)^7$.

Se obține:

$$(1+i)^7 = 1 + C_7^1 i + C_7^2 i^2 + C_7^3 i^3 + C_7^4 i^4 + C_7^5 i^5 + C_7^6 i^6 + C_7^7 i^7.$$

Ținând seama că:

$$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i,$$

se obține:

$$(1+i)^7 = (1 - C_7^2 + C_7^4 - C_7^6) + i (C_7^1 - C_7^3 + C_7^5 - C_7^7),$$

adică, datorită lui $(1+i)^7 = 8 - 8i$:

$$1 - C_7^2 + C_7^4 - C_7^6 = 8 \quad \text{și} \quad C_7^1 - C_7^3 + C_7^5 - C_7^7 = -8.$$

II. Să se demonstreze că $\mathcal{B} = \{1-i, 1+i\}$ este o bază a lui $\mathbb{C}$ și să se exprime în această bază:

$$z = 3 + i.$$

Fie α și β două numere reale astfel încît, pe $\mathbb{C}$:

$$\alpha(1-i) + \beta(1+i) = 0.$$

Avem:

$$(\alpha + \beta) + i(\beta - \alpha) = 0 \iff (\alpha + \beta = 0 \text{ și } \beta - \alpha = 0)$$

de unde:

$$(\alpha, \beta) = (0, 0).$$

$\mathcal{B}$ este o parte liberă; cum $\mathbb{C}$ este de dimensiune 2, $\mathcal{B}$ este o bază (Aleph₀, Geometrie 1° CDE, nr. 2.3.4).

Se poate scrie:

$$3 - i = a(1-i) + b(1+i),$$

$$3 - i = (a+b) + i(b-a) \iff (a+b=3 \text{ și } b-a=-1),$$

de unde:

$$(a, b) = (2, 1),$$

și:

$$3 - i = 2(1 - i) + 1(1 + i).$$

Să se opereze la fel cu $z' = 2 + 3i$.

2.3.3. Ecuația $z^2 = a, a$ real

Mulțimea $\mathbb{C}$ este un subcorp al lui $\mathbb{R}$ în care avem:

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i);$$

numerele i și $-i$ sînt deci soluțiile ecuației definite prin:

$$z^2 + 1 = 0.$$

Într-un mod general, ecuația definită prin $z^2 = a$, unde a este un real nenul, are cel puțin o soluție în $\mathbb{C}$?

1. Fie $z_1 = x_1 + iy_1$ o soluție; avem:

$$(x_1 + iy_1)^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - y_1^2 = a \\ 2x_1y_1 = 0. \end{cases}$$

(Acest sistem este de rezolvat pe $\mathbb{R}$.)

Prin urmare, se obține:

a) $x_1 = 0 \Rightarrow y_1^2 = -a$, ceea ce implică a mai mic ca zero; se obține:

$$z_1 = i \sqrt{-a} \quad \text{și} \quad z_1^* = -i \sqrt{-a};$$

b) $y_1 = 0 \Rightarrow x_1^2 = a$; atunci, $z^2 = a$ nu are soluții decît pentru a strict pozitiv sau nul; se obține:

$$z_1 = \sqrt{a} \quad \text{și} \quad z_1^* = -\sqrt{a}.$$

Reuniunea acestor două cazuri spune că, pentru orice real a , ecuația în z are ca soluții:

$$\text{dacă } a > 0: \quad \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\};$$

$$\text{dacă } a < 0: \quad \{-i\sqrt{-a}, i\sqrt{-a}\}.$$

2. Nu există altă soluție căci, dacă z_1 este o soluție a lui $z^2 = a$, $-z_1$ este o altă soluție a acestei ecuații; de unde:

$$z^2 - a = 0 \Rightarrow z^2 - z_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - z_1)(z + z_1) = 0$$

$$\Rightarrow z = z_1 \text{ și } z = -z_1,$$

căci $\mathbb{C}$ fiind corp, nu există divizori ai lui zero.

Este important să se reamintească bine că z este un *număr, element al unui corp comutativ* și că multe din calcule se fac fără a explicita pe z sub forma $a + ib$, a și b reali.

2.3.4. Numere complexe conjugate

DEFINIȚIE / Conjugatul unui număr complex $z = a + ib$, unde a și b sînt reali, este prin definiție numărul complex notat:

$$\bar{z} = a - ib.$$

Astfel:

$$z = 3 + 4i \implies \bar{z} = 3 - 4i;$$

$$z = i \implies \bar{z} = -i.$$

Proprietăți

Fie ϕ aplicația de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$ care face, ca oricărui număr complex z , să-i corespundă conjugatul său $\bar{z}$.

Aplicația ϕ este o bijecție a lui $\mathbb{C}$ pe $\mathbb{C}$ care lasă invariant orice număr real a , căci:

$$\bar{a} = a.$$

Prima proprietate. — Avem:

$$\overline{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib;$$

rezultă:

$$\boxed{\overline{\bar{z}} = z} \quad (P_1)$$

Aplicația ϕ este o *involuție* a lui $\mathbb{C}$.

A doua proprietate. — Avem:

$$\overline{z + z'} = \overline{(a + ib) + (a' + ib')} = \overline{(a + a') + i(b + b')},$$

adică:

$$\overline{z + z'} = (a + a') - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib');$$

deci rezultă pentru orice z și orice z' :

$$\boxed{\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}} \quad (P_2)$$

A treia proprietate. — Avem:

$$\begin{aligned} \overline{zz'} &= \overline{(aa' - bb') + i(ab' + a'b)} = \\ &= (aa' - bb') - i(ab' + a'b), \end{aligned}$$

adică:

$$\overline{zz'} = (a - ib)(a' - ib');$$

deci rezultă pentru orice z și orice z' :

$$\boxed{\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}} \quad (P_3)$$

În concluzie, se obțin pe $\mathbb{C}$ următoarele trei relații:

$$\begin{cases} \varphi(z + z') = \varphi(z) + \varphi(z'), \\ \varphi(zz') = \varphi(z) \cdot \varphi(z'), \\ \varphi(z) = \varphi^{-1}(z). \end{cases}$$

Bijecția $z \mapsto \bar{z}$ este deci un *automorfism involutiv* al corpului $\mathbb{C}$ al numerelor complexe.

A patra proprietate. — Pentru orice element z al lui $\mathbb{C}^*$, avem:

$$z \times \frac{1}{z} = 1;$$

din studiul precedent rezultă că avem:

$$\overline{z \times \frac{1}{z}} = 1$$

și, după proprietatea P_3 :

$$\bar{z} \left(\overline{\frac{1}{z}} \right) = 1 \implies \left(\overline{\frac{1}{z}} \right) = \frac{1}{\bar{z}},$$

adică:

$$\boxed{(\overline{z^{-1}}) = \bar{z}^{-1}} \quad (P_4)$$

Această relație duce la:

$$\left(\overline{\frac{z}{z'}} \right) = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}, \quad \varphi\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\varphi(z)}{\varphi(z')}.$$

Observație. — Proprietățile P_2 și P_3 se generalizează cu ușurință prin recurență în raport cu n . Avem:

$$\overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k; \quad \overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k$$

și, în particular, pentru orice întreg n relativ:

$$\boxed{\overline{z^n} = (\bar{z})^n}$$

2.3.5. Aplicații

■ Calculul unui cît.

Avem, dacă $z = a + ib$:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib),$$

$$\boxed{z\bar{z} = a^2 + b^2}$$

Produsul $z\bar{z}$ este un număr real, strict pozitiv, dacă z este diferit de zero. Prin urmare:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{a^2 + b^2} \bar{z}.$$

Se regăsește astfel inversul lui z :

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

EXEMPLU. Să se calculeze cîtul:

$$\frac{3 + i}{2 + 3i}.$$

Avem:

$$\frac{(3 + i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{(3 + i)(2 - 3i)}{13},$$

adică:

$$\frac{3 + i}{2 + 3i} = \frac{9}{13} - \frac{7i}{13}.$$

■ Polinoame cu coeficienți reali

Fie P o funcție polinomială, definită pe $\mathbb{C}$, cu coeficienți reali și fie $P(z)$ polinomul asociat:

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_kz^k + \dots + a_nz^n,$$

unde n este un întreg natural.

Aplicînd proprietățile aplicației $z \mapsto \bar{z}$ și scriînd:

$$P(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k,$$

se obține, datorită faptului că pentru orice k , a_k aparține lui $\mathbb{R}$:

$$\overline{P(z)} = \sum_1^n \overline{a_k z^k} = \sum_1^n a_k \bar{z}^k,$$

adică:

$$\overline{P(z)} = P(\bar{z}).$$

Consecință. — Dacă există un număr complex z_0 astfel încît $P(z_0) = 0$, atunci:

$$\overline{P(z_0)} = P(\bar{z}_0) = 0.$$

Dacă z_0 este real:

$$z_0 = \bar{z}_0;$$

dar, dacă z_0 este un număr complex astfel încît: $z_0 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$, atunci:

$$\bar{z}_0 \neq z_0.$$

Se obține deci un alt număr complex astfel încît $P(z) = 0$.
Numerele complexe z_0 și $\bar{z}_0$ sînt zerouri ale polinomului $P(z)$.

EXEMPLE. I. Fie:

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Avem:

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 0,$$

adică:

$$j^3 + j + 1 = 0;$$

j este un zero al lui $P(z) = z^3 + z + 1$; prin urmare, $\bar{j}$ este de asemenea un zero al lui

$$z^3 + z + 1, \text{ cu } \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Se va verifica calculîndu-se $\bar{j}^3 + \bar{j} + 1$.)

II. Fie, pe $\mathbb{C}$, polinomul definit prin:

$$Q(z) = z^4 + z^2 + 1.$$

Se observă:

$$Q(-z) = Q(z).$$

Să calculăm:

$$Q(j) = j^4 + j^2 + 1.$$

Se obține cu ușurință:

$$j^3 = 1, \text{ de unde:}$$

$$Q(j) = j^2 + j + 1,$$

adică:

$$Q(j) = 0.$$

În consecință, j fiind un zero al polinomului $Q(z)$, cu coeficienți reali, $-j$, $\bar{j}$, $-\bar{j}$ sînt de asemenea zerouri ale polinomului $Q(z)$.

Fie $E = \{j, -j, \bar{j}, -\bar{j}\}$ mulțimea zerourilor; avem:

$$(x - j)(x + j)(x - \bar{j})(x + \bar{j}) = [(x - \bar{j})(x - j)][(x + j)(x + \bar{j})]$$

și, folosindu-se faptul că numerele $\bar{j}j$ și $j + \bar{j}$ sînt reale, se obține:

$$[x^2 - x(j + \bar{j}) + \bar{j}j][x^2 + x(j + \bar{j}) + j\bar{j}] = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1);$$

or:

$$(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + 1.$$

S-a obținut astfel descompunerea polinomului într-un produs de două polinoame cu coeficienți reali.

Observații. — 1. Fie $z = x + iy$ un număr complex sub formă carteziană; avem:

$$\bar{z} = x - iy,$$

$$z + \bar{z} = 2x \iff \mathcal{R}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),$$

și:

$$z - \bar{z} = 2iy \iff \mathcal{I}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

2. Rezultă:

a) Un număr complex este *real*, dacă și numai dacă:

$$\mathcal{I}(z) = 0 \iff z = \bar{z}.$$

b) Un număr complex este *pur imaginar*, dacă și numai dacă:

$$\mathcal{R}(z) = 0 \iff z + \bar{z} = 0.$$

EXERCIȚII

■ Exercițiu rezolvat

Să se determine numerele complexe z astfel ca numărul $z' = (z - 2)(\bar{z} + i)$ să fie un număr real.

Avem:

$$z' = (\bar{z} - 2)(z - i).$$

Prin urmare, z' este real, dacă și numai dacă:

$$(z - 2)(\bar{z} + i) = (\bar{z} - 2)(z - i);$$

de unde:

$$z\bar{z} + iz - 2\bar{z} - 2i = \bar{z}z - i\bar{z} - 2z + 2i,$$

sau:

$$2(z - \bar{z}) + i(z + \bar{z}) - 4i = 0,$$

și, scriind $z = x + iy$:

$$4iy + 2ix - 4i = 0,$$

$$2i(2y + x - 2) = 0 \iff 2y + x - 2 = 0.$$

Pentru orice y real, numerele z sînt de forma:

$$z = (2 - 2y) + iy.$$

Observații. 1. Punind $z = x + iy$, se poate de asemenea calcula z sub forma $z' = x' + iy'$ și scrie:

$$\mathcal{I}(z') = 0.$$

Avem:

$$z' = [(x - 2) + iy][x - i(y + 1)].$$

Se termină calculul și se verifică rezultatul precedent.

2. Se poate determina de asemenea z pentru ca z' să fie pur imaginar.

■ **Exercițiu de aplicație imediată**

Inspirîndu-vă din exemplele precedente I și II, studiați descompunerea polinomului definit prin:

$$x \mapsto x^8 + x^4 + 1.$$

EXERCIȚII

2.2. Să se demonstreze prin recurență în raport cu numărul n , întreg natural, că:

$$(1 + i)^{4n} = (-4)^n.$$

Să se calculeze:

$$(1 - i)^{42}.$$

Să se calculeze:

$S = \sum_{k=0}^n ik$, pentru orice întreg natural n . Să se separe valorile după numerele congruente cu n , modulo 4.

2.3. Se dă:

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Să se calculeze:

a) $j^2, j^3, j^2 + j + 1, j^n$, n fiind un întreg natural;

b) $(a + b + c)(aj^2 + bj + c)(aj + bj^2 + c)$, a, b, c fiind reali.

2.4. Să se demonstreze că $\{i, j\}$, pentru $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, este o bază a lui $\mathbb{C}$. Să

se exprime orice număr complex $z = x + iy$ (x și y reale) sub forma $z = u + jv$, unde u și v sînt reale.

Să se exprime u și v în funcție de x și y și reciproc. Să se calculeze în funcție de u și de v pătratul modulusului lui $z = u + jv$. Să se exprime, sub forma $p + jq$, următoarele numere complexe:

$$\bar{z}, \text{ conjugatul lui } z = u + jv; \frac{1}{z}.$$

2.5. Se consideră, în $\mathbb{C}$, submulțimea A a numerelor complexe $\alpha = a + ib$, a și b fiind întregi relativi. Să se demonstreze că A are o structură de inel comutativ unitar. Care sînt elementele inversabile?

2.6. Să se efectueze următoarele calcule:

$$a) (3 + i)^2; (3 - i)^2; (3 - i)^3; (3 - 2i)^3;$$

$$b) (4 - 5i)(6 + 3i); (2 + 3i)^2(2 - 3i)^2; (-4 + i\sqrt{5})^2.$$

2.7. 1° Să se demonstreze că, dacă $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci $j^2 + j + 1 = 0$. Să se calculeze j^3 .

2° a) Să se determine coeficienții reali λ și μ , astfel ca polinomul definit prin:

$A(x) = \lambda(x^6 + 5x^4 + 4x^2 + 3)^2 - (x^4 + 3x^2 + 2)^3 + \mu(x^2 + 1)^4$ să fie divizibil prin polinomul definit prin $B(x) = x^2 + x + 1$.

b) Să se determine valorile întregului natural m pentru ca polinomul definit prin:

$$C(x) = x^{6m+2} + x^{3m+1} + 1$$

să fie divizibil prin polinomul definit prin $B(x) = x^2 + x + 1$.

2.8. Să se determine două numere reale a și b astfel ca, pentru $z = 1 + i$, funcția polinomială definită prin:

$$z \mapsto z^7 + az^5 + b,$$

să ia valoarea zero.

2.9. Numărului complex $z = a + ib$, i se asociază matricea $M(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Produsul $M(z) \cdot M(z')$ este asociat unui număr complex u notat $z * z'$. Se definește astfel pe mulțimea $\mathbb{C}$ o lege care asociază un număr u lui z, z' .

1° Să se demonstreze că operația notată $*$ este comutativă, asociativă și distributivă în raport cu adunarea obișnuită a numerelor complexe.

2° Fie $u = c + id$ și $v = c' + id'$ două numere complexe fixe. Să se rezolve și să se discute pe $\mathbb{C}$ ecuația definită prin:

$$u * z = v.$$

3° Să se determine eventualele soluții ale ecuației definite prin $z * z = v$, unde v este un număr complex fix.

2.10. Se consideră aplicațiile $f(a, b)$ de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$, astfel încît:

$$f(a, b)(z) = az + b = z',$$

unde a este astfel încît: $a \in \{1, i, -1, -i\}$ și $b = p + iq$ cu: $p \in \mathbb{Z}$ și $q \in \mathbb{Z}$.

Să se demonstreze că mulțimea G a aplicațiilor $f(a, b)$ este un grup pentru legea de compoziție a aplicațiilor.

2.11. Fie $\vec{E}_2$ un spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$ și fie $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe. Pe $\vec{E}_2 \times \vec{E}_2$ se definesc două legi notate $+$ și $\cdot$, și exprimate prin:

$$\forall(x_1, y_1), \forall(x_2, y_2) \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (1)$$

$$\forall(x, y), \forall(a + ib) \quad (a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx). \quad (2)$$

1° Să se demonstreze că $\vec{E}_2 \times \vec{E}_2$ are, pentru legile astfel definite, o structură de spațiu vectorial pe $\mathbb{C}$. Se notează $\hat{E}$ acest spațiu vectorial.

2° Să se demonstreze că aplicația φ de la $\vec{E}_2$ la $\hat{E}$:

$$\forall_{\vec{E}_2} x, x \mapsto (x, 0)$$

este o bijecție de la $\vec{E}_2$ la subspațiul $\varphi < \vec{E}_2 >$ și că φ este compatibilă cu adunarea vectorilor și cu înmulțirea vectorilor printr-un real.

2.12. Să se calculeze următoarele numere complexe, adică să se exprime sub forma $a + ib$, unde a și b sînt numere reale.

1°

a) $\frac{i-7}{3+7i}; \frac{2+i}{3-i} + \frac{3-i}{2+i};$

b) $\frac{i-7}{3+7i} + \frac{1-i}{1+i}; \frac{1+18i}{3+4i} + \frac{7-26i}{3-4i}.$

2°

a) $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + i - 1 = z.$ Să se calculeze: $\bar{z} + \frac{1}{z}.$

b) $\frac{(1+i)^3}{1-i} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}; \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{38}.$

2.13. Știind că $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, să se calculeze:

$$\frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2}; \frac{1-i}{1-j^2}.$$

2.14. Fie numerele complexe:

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \text{ și } z_2 = \frac{i}{2i\sqrt{3}-2}.$$

Să se calculeze:

a) $z_1 + z_2; z_1 z_2; \frac{z_1}{z_2};$

b) $z_1^2, z_2^3; z_1 + z_1^2 + z_2^3;$

c) $(z_1)^6 (z_2)^{12}; \frac{(z_1)^8}{(z_2)^3}.$

Să se explicitizeze z_1, z_2 și toate celelalte rezultate sub forma cea mai simplă.

2.15. Să se calculeze $Z = \frac{z^2 + z + 1}{z^4 - 1}$ cu $z = 3 - 2i$.

2.16. 1° Să se demonstreze, a priori, că expresia:

$$(1+i)^n - (1-i)^n, n \text{ întreg natural,}$$

este un număr real.

2° Să se dezvolte: $(1 + i)^n$. Să se demonstreze că partea reală este suma termenilor de forma:

$$(-1)^p C_n^{2p},$$

partea imaginară fiind suma termenilor de forma:

$$(-1)^p C_n^{2p+1}.$$

3° Se consideră:

$$f(x) = 1 - C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 - \dots + (-1)^p C_n^{2p} x^{2p} + \dots;$$

$$g(x) = C_n^1 x - C_n^3 x^3 + \dots + (-1)^p C_n^{2p+1} x^{2p+1} + \dots.$$

Fiecare sumă este finită, dar ultimul termen depinde de paritatea lui n . Să se calculeze:

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2.$$

2.17. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, sistemele definite prin:

$$a) \begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (1+i)z + iz' = 2-i \\ (2-i)z + (3-i)z' = 5+3i. \end{cases}$$

2.18. Să se discute și să se rezolve pe $\mathbb{C}$ sistemul definit prin:

$$\begin{cases} z\alpha + \bar{z}_1\bar{\beta} = 1 \\ \bar{z}_1\alpha + z\beta = 0, \end{cases}$$

α și β fiind numere complexe, nereale.

2.19. Să se rezolve pe $\mathbb{C}$ sistemul definit prin:

$$\begin{cases} 3iz + z' = 8 + i \\ 2\bar{z} + i\bar{z}' = 1 + i. \end{cases}$$

(Să nu se folosească forma $z = x + iy$.)

2.20. Să se verifice că $(z + 2i)$ este un factor al lui:

$$P(z) = z^2 + (5 + 6i)z + 10i - 8.$$

Să se ducă apoi descompunerea în factori pînă la capăt.

2.21. 1° Să se rezolve pe $\mathbb{C}$ ecuația definită prin:

$$z = (1+i)\bar{z} + 3 - 2i.$$

(1)

Să se generalizeze cu:

$$z = p\bar{z} + q,$$

p și q fiind numere complexe.

(Să se ia ecuația (1') obținută, folosindu-se aplicația $z \mapsto \bar{z}$.)

2° Să se reia exercițiul folosindu-se formulele:

$$z = x + iy \quad \text{și} \quad \bar{z} = x - iy.$$

2.22. 1° Ce relație există între numerele reale x și y pentru ca numărul $Z = \frac{z-2}{z-1}$,

cu $\begin{cases} z = x + iy \\ z \neq 1 \end{cases}$ să fie:

a) pur imaginar? b) real?

(Să se facă calculul în două feluri diferite.)

2° Aceeași chestiune cu:

$$Z = \frac{z-2}{z-4i}, \quad z \neq 4i.$$

2.28. Care este condiția pentru ca $(a + ib^2)^3$ să fie:

a) real?

b) pur imaginar?

2.24. 1° Care este condiția pentru ca $(x + iy)^3$ să fie real și mai mare ca 8?

2° Aceeași chestiune pentru $(\sqrt{x} + i\sqrt{y})^6$.

2.4. MODULUL UNUI NUMĂR COMPLEX

2.4.1. Normă și modul

Pentru orice număr complex $z = a + ib$, unde a și b sînt numere reale, produsul $z\bar{z}$ este un număr real pozitiv sau nul căci:

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Numărul $z\bar{z}$ se numește *norma* lui z .

Cînd z este un număr real avem:

$$z\bar{z} = a^2,$$

și valoarea absolută a realului z este:

$$|z| = |a|.$$

DEFINIȚIE / Sub o formă generală, pe $\mathbb{C}$, se numește **modul** sau **valoare absolută** a lui z numărul real pozitiv sau nul notat $|z|$, astfel încît:

$$(|z|^2 = z\bar{z}) \iff |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

EXEMPLE

$$z = 3 - 4i \implies |z| = 5;$$

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \implies |j| = 1 \quad |i| = 1.$$

■ Rezultă următoarele proprietăți imediate:

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|;$$

$$(|z| = 0) \iff (z = 0).$$

■ Inegalitățile pe $\mathbb{R}$:

$$a \leq |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \text{ și } b \leq |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

duc la relațiile:

$$\boxed{\mathcal{R}(z) \leq |z|} \quad \text{și} \quad \boxed{\mathcal{I}(z) \leq |z|}$$

■ Prin definiție, avem:

$$|zz'|^2 = (zz') \times (\overline{zz'}).$$

Pe de altă parte:

$$\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'},$$

de unde:

$$|zz'|^2 = (zz') \times (\bar{z} \cdot \bar{z'}).$$

Folosind proprietățile grupului multiplicativ $\mathbb{C}^*$, se obține:

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= (z\bar{z})(z'\bar{z'}), \\ |zz'|^2 &= |z|^2 \times |z'|^2, \end{aligned}$$

adică pe $\mathbb{C}^*$:

$$\boxed{|zz'| = |z| \times |z'|}$$

Aplicația $z \mapsto |z|$ este un homomorfism de la grupul multiplicativ $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ la grupul multiplicativ $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$, al cărui nucleu este grupul multiplicativ $(U, \cdot)$ al numerelor complexe de modul 1.

■ Avem, pe de altă parte:

$$1 = \left| z \cdot \frac{1}{z} \right| = |z| \left| \frac{1}{z} \right|,$$

de unde:

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|},$$

și, prin urmare:

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = |z| \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Se va nota că:

$$|z| = \frac{1}{|z|} \implies |z| = 1.$$

Se obțin, prin recurență în raport cu n , relațiile:

$$|z^n| = |z|^n, \quad |z^{-n}| = |z|^{-n}.$$

EXERCIȚII

■ Exercițiu rezolvat

Să se determine z astfel ca numerele complexe $z, \frac{1}{z}, z-1$ să aibă același modul.

Avem:

$$|z| = \frac{1}{|z|},$$

de unde:

$$|z| = 1.$$

Rezultă că:

$$|z-1| = 1,$$

fie:

$$(z-1)(\overline{z-1}) = 1,$$

sau:

$$(z-1)(\bar{z}-1) = 1 \iff z\bar{z} = \bar{z} + z.$$

Or:

$$|z| = 1 \iff z\bar{z} = 1,$$

de unde:

$$\bar{z} + z = 1.$$

Punind $z = x + iy$, avem: $x = \frac{1}{2}$,

or:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Rezultă cele două soluții:

$$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

■ Exercițiu de aplicație imediată

Să se demonstreze că, dacă λ este real, numărul complex $z = \frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i}$ are ca modul pe 1. (Să se calculeze $z\bar{z}$.)

2.4.2. Inegalitatea lui Minkowski

Această inegalitate definită pe $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, se traduce prin:

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Pentru orice z și orice z' , avem:

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}'),$$

fie, folosindu-se regulile de calcul din corpul $\mathbb{C}$:

$$|z + z'|^2 = z\bar{z} + z'\bar{z}' + (z\bar{z}' + \bar{z}z'), \quad (1)$$

se observă:

$$\overline{z\bar{z}'} = \bar{z}z',$$

de unde:

$$z\bar{z}' + \bar{z}z' = 2\mathcal{R}(z\bar{z}');$$

or:

$$2\mathcal{R}(z\bar{z}') \leq 2|z\bar{z}'|,$$

sau:

$$2\mathcal{R}(z\bar{z}') \leq 2|z||z'|,$$

de unde, majorându-se al doilea membru al egalității (1):

$$|z + z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|,$$

adică:

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Generalizarea este imediată; se obține:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

EXERCITIU

■ *Exercițiu de aplicație imediată*

Să se aplice inegalitatea precedentă lui z și $(z' - z)$, apoi lui z' și $(z - z')$ pentru a stabili că:

$$||z| - |z'||| \leq |z - z'|.$$

2.4.3. Grupul multiplicativ U al numerelor complexe de modul egal cu unu

1. Fie U , submulțime a lui $\mathbb{C}$, mulțimea numerelor complexe de modul egal cu unu:

$$U = \{u \mid u \in \mathbb{C} \text{ și } |u| = 1\}.$$

De exemplu:

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Orice număr u corespunde la o matrice $M(a, b)$ astfel încît $a^2 + b^2 = 1$.
Deci U este un grup multiplicativ izomorf cu grupul rotațiilor vectoriale ale
spațiului vectorial euclidian $\vec{E}_2$.

Să arătăm, direct, că $\mathcal{U}$ este un subgrup al lui C . Avem, pentru orice u
și pentru orice u' ale lui $\mathcal{U}$:

$$|u \cdot u'| = |u| \times |u'| = 1.$$

Mulțimea U este stabilă la restricția legii multiplicative a lui C . Această mul-
țime nevidă este, dealtfel, astfel încît, pentru orice u și pentru orice u' :

$$|u \cdot u'^{-1}| = |u| |u'^{-1}| = |u| \times \frac{1}{|u'|} = 1,$$

ceea ce stabilește că U este un subgrup multiplicativ al lui C .
Să observăm că avem echivalența:

$$\bar{z} = \frac{1}{z} \iff |z| = 1.$$

2. Orice număr complex $z = a + ib$, nenul, este astfel încît:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Să punem: $|z| = r$; r fiind un real strict pozitiv, care aparține de asemenea
lui C . Pentru r fixat, pe corpul C , oricare ar fi z nenul, există un număr u și
numai unul, astfel încît:

$$z = ru;$$

de unde:

$$|z| = |ru| = |r| |u|,$$

$$|z| = r |u|;$$

or, avem:

$$|z| = r;$$

pentru orice z care aparține lui C^* , rezultă:

$$|u| = 1.$$

Reciproc, dacă avem:

$$z = ru, \quad r \in \mathbb{R}^{**} \quad \text{și} \quad u \in \mathcal{U},$$

atunci:

$$|z| = |r| |u| = r \implies r = |z|.$$

EXEMPLU. $(z = 3 + 4i) \Rightarrow (|z| = 5) \quad \text{și} \quad z = 5 \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} i \right),$

cu:

$$\left| \frac{3}{5} + \frac{4}{5} i \right| = 1$$

EXERCIȚIU

Exercițiu rezolvat

Să se demonstreze că $Z = \frac{z + u\bar{z}}{1 - u}$ este un număr real dacă $|u| = 1$ și $u \neq 1$, z fiind un număr complex.

Numărul Z este real dacă și numai dacă: $Z = \bar{Z}$;

de unde:

$$\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} = \frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}},$$

sau, succesiv:

$$(z - u\bar{z})(1 - \bar{u}) = (1 - u)(\bar{z} - \bar{u}z),$$

$$z + u\bar{u}\bar{z} = \bar{z} + u\bar{u}z,$$

$$(z - \bar{z})(1 - u\bar{u}) = 0.$$

Prin urmare, dacă z este diferit de $\bar{z}$, adică dacă z nu este real, atunci trebuie să avem:

$$u\bar{u} = 1 \Leftrightarrow |u| = 1.$$

Dacă z este real, egalitatea este totdeauna realizată pentru orice număr complex u .

EXERCIȚII

2.25. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, ecuația definită prin:

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0.$$

2.26. Se consideră, pe $\mathbb{C}$, ecuația definită prin:

$$az^2 + b|z|^2 + ic = 0,$$

unde a, b, c sînt numere reale.

Ce condiții verifică numerele a, b, c dacă $z = 3 + 2i$ este o soluție a ecuației?

Să se determine (a, b, c) atunci cînd:

$$(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \quad \text{și} \quad 0 < a < 15.$$

2.27. Fie a și b două numere complexe astfel încît:

$$|a| < 1 \quad \text{și} \quad |b| = 1.$$

Fie u numărul complex astfel încît:

$$u = b \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Să se demonstreze că:

$$|u| \leq 1 \iff |z| \leq 1,$$

cu corespondența egalităților.
(Se va putea calcula $1 - |u|^2$.)

2.28. Să se demonstreze că egalitatea:

$$|z + z'| = |z| + |z'|$$

echivalează cu existența unui număr pozitiv sau nul λ , astfel încît

$$z' = \lambda z.$$

Să se studieze de asemenea egalitatea:

$$|z + z'| = |z| - |z'|.$$

2.29. Să se demonstreze că aplicația $\mathcal{U}$ de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{R}^+$, definită prin $z \mapsto z\bar{z}$, este un homomorfism de la $(\mathbb{C}, \cdot)$ la $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ și că z este inversabil în $\mathbb{C}^+$, dacă și numai dacă $\mathcal{U}(z) = z\bar{z}$ este inversabil în $\mathbb{R}^{*+}$. Să se deducă calculul lui z' , inversul lui z .

2.30. 1° Să se calculeze modulul lui $z = (\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}})^8$.

2° Să se calculeze numărul complex z astfel încît:

$$\left| \frac{z - 12}{z - 8i} \right| = \frac{5}{3} \quad \text{și} \quad \left| \frac{z - 4}{z - 8} \right| = 1.$$

2.31. Să se determine numărul complex z pentru ca:

$$|z^2| = |1 - z| = |\bar{z}|,$$

sau ca:

$$|z - i| = |iz - i| = |z - iz|.$$

2.32. Fie: $u^2 = zz'$, unde z și z' sînt două numere complexe. Să se demonstreze că:

$$|z| + |z'| = \left| \frac{z + z'}{2} - u \right| + \left| \frac{z + z'}{2} + u \right|.$$

2.33. Fie numărul complex $z = u + iv$, unde u și v sînt elemente ale lui $\mathbb{C}$. Să se demonstreze că avem $|z|^2 = |u|^2 + |v|^2$ dacă și numai dacă:
sau că:

$$z = 0,$$

sau că:

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

2.34. Să se rezolve pe $\mathbb{C}$ ecuațiile definite prin:

a) $|z| + z = 3 + 4i;$

b) $|z| - z = 4 - 3i.$

2.35. Să se demonstreze că aplicația $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ este un homomorfism al grupului $\mathbb{C}^*$ pe grupul multiplicativ $\mathbb{U}$.

2.36. Fie $U_1 = U - \{-1\}$ mulțimea numerelor complexe u de modul egal cu 1; u este diferit de -1 . Să se demonstreze că aplicația f de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{C}$, definită prin:

$$x \mapsto \frac{1+ix}{1-ix}, \text{ este o bijecție a lui } \mathbf{R} \text{ pe } U_1.$$

2.37. Să se demonstreze că $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ este real dacă $|z_1| = |z_2|$, unde z_1 și z_2 sînt numere complexe.

2.38. Să se rezolve, pe U , mulțimea numerelor complexe de modul egal cu 1, sistemul definit prin:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1. \end{cases}$$

$$\left(\text{Să se folosească: } (z \in U) \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}. \right)$$

2.5. REPREZENTAREA GEOMETRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

2.5.1. Planul vectorial și planul afin identificate cu $\mathbf{C}$

Fie P un plan afin asociat unui plan vectorial euclidian $\vec{P}$, înzestrat cu un reper ortonormat $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

■ Aplicația f de la P la $\vec{P}$, definită prin:

$$M \mapsto f(M) = \vec{v} = \vec{OM},$$

este o bijecție între P și $\vec{P}$. Rezultă că planul P poate fi înzestrat cu o structură de spațiu vectorial prin alegerea punctului O .

Vom nota acest plan vectorial: (P, O) .

Dacă O' este un punct al lui P , translația $t_{\vec{OO'}}$, este un izomorfism între planurile vectoriale (P, O) și (P, O') .

Bijecția g între $\vec{P}$ și $\mathbf{C}$ definită prin:

$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \mapsto z = x + iy$$

este un izomorfism al planului vectorial $\vec{P}$ pe spațiul vectorial real $\mathbf{C}$ care asociază bazele $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ și $(1, i)$ ale acestor spații vectoriale.

Se poate deci *identifica*, cu ajutorul bazei ortonormate $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\vec{P}$ și $\mathbf{C}$.

Se spune:

z este *afixul* lui $\vec{v}$,

$\vec{v}$ este *vectorul-imagin*e al lui z ,

ceea ce se mai notează:

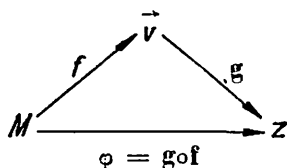
$$[\vec{v}] = z,$$

această notație citindu-se: „măsura complexă a vectorului $\vec{v}$ egal cu z ”.

Observație. Norma vectorului $\vec{v}$ este egală cu modulul numărului complex $z = g(\vec{v})$:

$$|z| = \|\vec{v}\|.$$

■ Aplicația $\varphi = g \circ f$ astfel încît:



compusă din două izomorfisme este un izomorfism între P și $\mathbb{C}$.

Se poate deci identifica, cu ajutorul reperului ortonormat $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, P și $\mathbb{C}$.

Se spune atunci că P este *planul complex*.

M fiind un punct și z un număr complex astfel încît:

$$(g \circ f)(M) = z,$$

se spune că: M este imaginea lui z ,

și că: z este afixul lui M .

Avem:

$$|z| = \|\vec{OM}\|.$$

Să notăm că:

$$\varphi(O) = 0, \quad \varphi(E) = 1, \quad \varphi(F) = i,$$

cu:

$$\vec{OE} = \vec{e}_1 \quad \text{și} \quad \vec{OF} = \vec{e}_2 \quad (\text{fig. 1}).$$

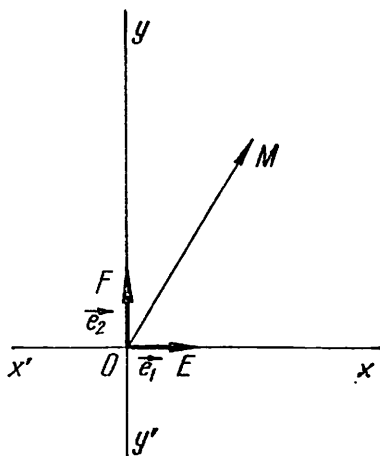


FIG. 1

Axa $x'Ox$, definită prin reperul $(O, \vec{e}_1)$ este identificată cu subcorpul $\mathbb{R}$ al lui $\mathbb{C}$: o numim *axa realilor*.

Axa $y'Oy$, definită prin reperul $(O, \vec{e}_2)$ este identificată cu mulțimea J a numerelor complexe de forma $z = i\lambda$, λ real: o numim *axa numerelor imaginare* sau *axa numerelor complexe*.

2.5.2. Interpretări geometrice

■ Izomorfismul g între planul vectorial $\vec{P}$ și spațiul vectorial real $\mathbb{C}$ (sau izomorfismul φ între P și $\mathbb{C}$) permite să se transfere pe $\mathbb{C}$ proprietățile geometrice definite pe $\vec{P}$ (sau pe P).

Reciproc, orice relație stabilită între numere complexe poate fi interpretată în $\vec{P}$ sau în P .

EXERCIȚIU

■ *Exercițiu rezolvat*

Fiind date două numere complexe distincte z_1 și z_2 , respectiv de imagini M_1 și M_2 , să se determine mulțimea punctelor M al căror afix z satisface relația:

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k \quad (k \text{ real pozitiv fixat}).$$

Avem:

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k \Leftrightarrow \frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = k \Leftrightarrow \frac{\|\vec{MM}_1\|}{\|\vec{MM}_2\|} = k.$$

Mulțimea punctelor M este un cerc, mulțime a punctelor al căror raport al distanțelor la M_1 și la M_2 este egal cu k .

Dacă $k = 1$, mulțimea este mediatoarea segmentului $[M_1, M_2]$ (fig. 2).

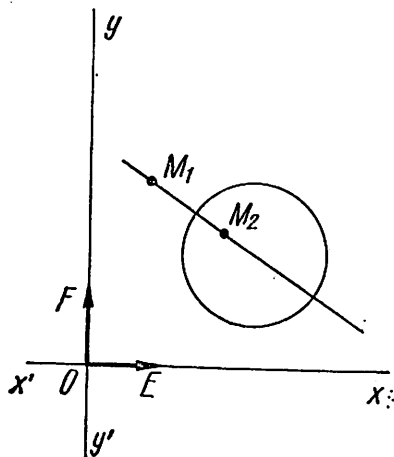
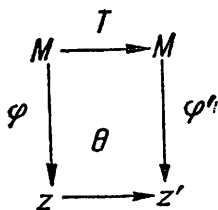


FIG. 2

■ Fie T o aplicație de la un plan afin euclidian P la el însuși; φ fiind bijecția care identifică planul cu $\mathbb{C}$, schema următoare:



definește o aplicație θ , numită *transformata* lui T prin φ , astfel încît:

$$\theta = \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$$

$$T = \varphi^{-1} \circ \theta \circ \varphi.$$

■ Fie două aplicații T , notate T_1 și T_2 și fie θ_1 și θ_2 transformatele corespunzătoare:

$$\theta_1 = \varphi \circ T_1 \circ \varphi^{-1},$$

$$\theta_2 = \varphi \circ T_2 \circ \varphi^{-1},$$

Să notăm θ transformata lui $T_2 \circ T_1$ prin φ :

$$\theta = \varphi \circ (T_2 \circ T_1) \circ \varphi^{-1},$$

sau $\varphi^{-1} \circ \varphi = e_P$ (e_P este identitatea pe P):

$$\theta = \varphi \circ (T_2 \circ e_P \circ T_1) \circ \varphi^{-1},$$

$$\theta = \varphi \circ (T_2 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ T_1) \circ \varphi^{-1},$$

$$\theta = (\varphi \circ T_2 \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ T_1 \circ \varphi^{-1}),$$

obținem:

$$\theta = \theta_2 \circ \theta_1.$$

Se pot deci compune transformatele prin φ ale lui T_1 și T_2 pentru a obține transformata lui $T_2 \circ T_1$.

Să observăm, în particular, că la orice bijecție f între $\mathbb{C}$ și $\mathbb{C}$ corespunde o bijecție T a planului complex, adică o transformare punctuală și reciproc.

EXEMPLE. I. Fie un număr complex fixat $z_1 = 2 - 3i$ și fie θ aplicația de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$ definită prin:

$$z \mapsto z' = z + z_1.$$

Aceasta este o bijecție între $\mathbb{C}$ și el însuși.

După studiul precedent, bijecției θ între $\mathbb{C}$ și $\mathbb{C}$ îi corespunde o bijecție T între planul complex P și P .

Fie M și M' punctele respectiv de afixe z și z' și fie A punctul de afix z_1 .

Să punem:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i}.$$

Avem:

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{i} \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{i},$$

pentru orice punct M .

Bijecția T între P și P este translația definită prin vectorul $\vec{t}$ de afix z_1 . Adunarea pe $\mathbb{C}$ permite să se exprime orice *translație* în planul afin euclidian înzestrat cu un reper ortonormat și reciproc.

II. *Omotetia vectorială* pe $\vec{P}$, definită prin: $\vec{V}' = \lambda \vec{V}$, λ real, se exprimă pe $\mathbb{C}$ prin:

$$z' = \lambda z.$$

Colinearitatea punctelor A, B, M ale planului P , respectiv de afixe a, b, z , dă echivalența:

$$(\vec{AM} = \lambda \vec{AB}) \Leftrightarrow [z - a = \lambda(b - a), \quad \lambda \text{ real}].$$

III. *Isomorfismul* între planul euclidian P și $\mathbb{C}$ ne conduce să exprimăm pe $\mathbb{C}$ *produsul scalar*.

Fie, în (P, O) înzestrat cu un reper ortonormat, produsul scalar

$$\vec{OM} \cdot \vec{OM}' = xx' + yy'.$$

Avem, în $\mathbb{C}$:

$$z = x + iy, \text{ afixul lui } \vec{OM},$$

$$z' = x' + iy', \text{ afixul lui } \vec{OM}'$$

$$z\bar{z}' + \bar{z}z' = (x + iy)(x' - iy') + (x - iy)(x' + iy'),$$

$$z\bar{z}' + \bar{z}z' = 2(xx' + yy'),$$

sau:

$$\frac{1}{2}(z\bar{z}' + \bar{z}z') = \vec{OM} \cdot \vec{OM}';$$

or:

$$z\bar{z}' = xx' + yy' + i(yx' - xy').$$

Avem deci:

$$\Re(z\bar{z}') = \vec{OM} \cdot \vec{OM}' \quad \text{și} \quad \vec{OM}^2 = z\bar{z}.$$

Aplicație. — Fie, pe $\mathbb{C}$, aplicația definită prin:

$$z' = iz.$$

Avem:

$$z\bar{z}' = z(i\bar{z}) = -iz\bar{z};$$

or, $z\bar{z}$ este real; de unde:

$$\Re(z\bar{z}') = 0;$$

rezultă că, pe (P, O) , vectorii-imagini, respectiv de afixe z și iz , sînt ortogonali. Dealtfel, se poate observa că:

dacă $z = x + iy$, atunci $z' = -y + ix$ și vectorii $\vec{V} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{V}' \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ sînt ortogonali.

Avem într-adevăr:

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = x(-y) + yx = 0.$$

IV. Pe de altă parte, *normei euclidiene* $\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ i s-a asociat *modulul* lui z , afix al lui $\vec{V}$.
Avem egalitatea:

$$\|MM'\| = |z' - z|,$$

și echivalența:

$$\frac{\|\vec{AM}_1\|}{\|\vec{AM}_2\|} = \frac{MM_1}{MM_2} = k \iff \frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = k$$

2.5.3. Simetria plană axială

Fie un plan afin euclidian P înzestrat cu un reper ortonormat $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ și identificat cu $\mathbb{C}$ (fig. 3).

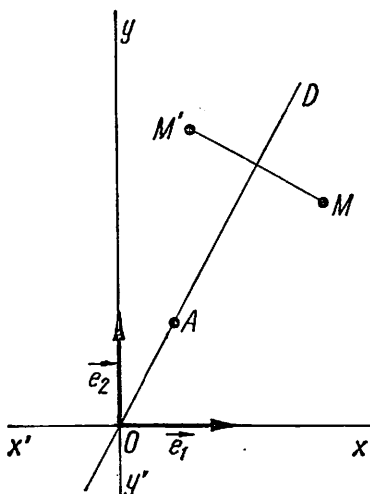


FIG. 3

Fie M un punct de afix z , D o dreaptă a lui P care conține pe O și al cărei vector director unitar este $\vec{OA}$, vector de afix a . Fie M' simetricul lui M în raport cu D , z' fiind afixul său. Punctul M' este definit în întregime de relațiile:

$$\begin{cases} \|\vec{OM}\| = \|\vec{OM'}\| \\ \vec{OM} + \vec{OM'} = \lambda \vec{OA}, \lambda \in \mathbb{R}^*. \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

În $\mathbb{C}$, avem deci:

$$\begin{cases} |z| = |z'| \\ z + z' = \lambda a, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1')$$

$$(2')$$

În grupul multiplicativ $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, pentru orice z și pentru orice z' , există o pereche unică (w, w') astfel încît:

$$z = aw \text{ și } z' = aw';$$

relația (2') dă:

$$a(w + w') = \lambda a \implies w + w' = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*;$$

cum $(w + w')$ este un real, avem:

$$w + w' = \bar{w} + \bar{w}';$$

pe de altă parte:

$$|z| = |z'| \text{ duce la } |w| = |w'|,$$

sau, pe $\mathbb{C}^*$:

$$w' \bar{w}' = w \bar{w},$$

adică:

$$\frac{w'}{\bar{w}} = \frac{w'}{\bar{w}'} = \frac{w + w'}{\bar{w}' + \bar{w}} = 1,$$

de unde:

$$w' = \bar{w}.$$

Din relația $z = aw$, se obține:

$$\bar{w} = \frac{\bar{z}}{\bar{a}},$$

și relația $z' = a\bar{w}$ dă:

$$z' = \frac{a}{\bar{a}} \bar{z} = \frac{a^2}{a\bar{a}} \bar{z};$$

or:

$$a\bar{a} = 1,$$

fie:

$$\boxed{z' = a^2 \bar{z}}$$

Să notăm că:

$$\bar{z}' = (\bar{a}^2)z;$$

de unde:

$$z = \frac{1}{(\bar{a})^2} \bar{z}';$$

or, $|a| = 1$ duce la:

$$\frac{1}{\bar{a}^2} = a^2 \quad \text{și} \quad z = a^2 z';$$

rezultă că transformarea este involutivă.

Observație. — Observînd că:

$$\vec{OM} \cdot \vec{OA} = \vec{OM'} \cdot \vec{OA},$$

și folosind expresia pe $\mathbb{C}$ a produsului scalar, este posibil să se regăsească relația $z' = a^2 \bar{z}$.

EXERCIȚII

■ Exerciții rezolvate

I. Care este, în planul afin euclidian, identificat cu $\mathbb{C}$, mulțimea E a punctelor M astfel încît punctele A, M, M' respectiv de afixe $1, z, 1 + z^2$, sînt coliniare?

Prima metodă. — Ipoteza $\vec{AM'} = \lambda \vec{AM}$, pentru λ real, se traduce în $\mathbb{C}$ prin:

$$(1 + z^2) - 1 = \lambda(z - 1),$$

$$z^2 = \lambda(z - 1),$$

fie, punînd $z = x + iy$,

$$x^2 - y^2 + 2ixy = \lambda(x - 1) + \lambda iy; \quad (1)$$

folosind egalitatea a două numere complexe, din relația (1) se obține sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \lambda(x - 1) \\ 2xy = \lambda y. \end{cases} \quad (2)$$

Se obține:

$$a) \ y = 0 \implies z \in \mathbb{R};$$

soluție evidentă:

$$M \in x'Ox.$$

$$b) \ y \neq 0 \implies \lambda = 2x \implies x^2 - y^2 = 2x(x - 1);$$

se obține ecuația cercului Γ de centru $\omega(1, 0)$ și de rază $r = 1$:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

și:

$$E = \Gamma \cup (x'Ox).$$

A doua metodă. — Avem:

$$z^2 = \lambda(z - 1), \quad \lambda \text{ real},$$

de unde:

$$\lambda(\bar{z} - 1) = \bar{z}^2.$$

și, pentru λ real nenul:

$$\lambda z^2(\bar{z} - 1) = \lambda \bar{z}^2(z - 1);$$

rezultă:

$$z^2(\bar{z} - 1) = \bar{z}^2(z - 1),$$

fie:

$$(z - \bar{z})(z\bar{z} - (z + \bar{z})) = 0,$$

$$z = \bar{z} \iff z \text{ real},$$

și:

$$z\bar{z} - (z + \bar{z}) = 0 \iff x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

În același spirit se poate scrie:

$$\frac{z^2}{z-1} = \lambda \quad \text{și} \quad z \neq 1;$$

λ fiind real, datorită observației 2 a), de la nr. 1.3.5, avem:

$$\frac{z^2}{z-1} = \frac{\bar{z}^2}{z-1} \implies z^2(\bar{z} - 1) = \bar{z}^2(z - 1).$$

Se obține astfel ecuația cercului Γ .

La fel, se poate spune că, dacă $\frac{z^2}{z-1}$ este real, atunci $Z = z^2(\bar{z} - 1)$ este real; se

înlocuiește z cu $x + iy$ și se scrie că partea imaginară a lui Z este nulă.

Observație. — Se poate, de asemenea, exprima z sub forma $z = x + iy$ și traduce în $(P, 0)$ că $\overrightarrow{AM'}$ și $\overrightarrow{AM}$ sînt liniar independenți.

Or:

$$z' = 1 + z^2 = x^2 - y^2 + 1 + 2ixy;$$

prin urmare $\overrightarrow{AM'}$ are drept componente:

$$x^2 - y^2 \quad \text{și} \quad 2xy$$

și $\overrightarrow{AM}$ are drept componente:

$$x - 1 \quad \text{și} \quad y;$$

de unde:

$$D = \begin{vmatrix} x^2 - y^2 & x - 1 \\ 2xy & y \end{vmatrix} = y(x^2 - y^2) - 2(x - 1)xy = 0,$$

$$D = y(x^2 - y^2 - 2x^2 + 2x) = -y(x^2 + y^2 - 2x),$$

și se trage concluzia în același fel.

II. Folosind rezultatele cunoscute despre rotațiile vectoriale ale planului vectorial euclidian, să se stabilească legea multiplicativă a numerelor complexe de modul egal cu unu.

Fie $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ o bază ortonormată directă a lui $\vec{P}$ și fie $\vec{V} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ un vector unitar al lui $\vec{P}$. Există o rotație vectorială φ și numai una astfel încît:

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{V};$$

de asemenea, există o rotație vectorială unică φ' astfel încît:

$$\varphi'(\vec{e}_1) = \vec{V}', \quad \vec{V}' = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 \quad \text{și} \quad \|\vec{V}'\| = 1.$$

Avem:

$$a) \varphi(\vec{e}_1) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad \text{și} \quad z = x + iy \text{ este afixul lui } \vec{V};$$

$$b) \varphi'(\vec{e}_1) = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 \quad \text{și} \quad z' = x' + iy' \text{ este afixul lui } \vec{V}'.$$

Să compunem $\varphi' \circ \varphi$:

$$(\varphi' \circ \varphi)(\vec{e}_1) = \varphi'(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = x\varphi'(\vec{e}_1) + y\varphi'(\vec{e}_2);$$

or:

$$\varphi'(\vec{e}_2) = -y'\vec{e}_1 + x'\vec{e}_2,$$

de unde:

$$(\varphi' \circ \varphi)\vec{e}_1 = x(x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) + y(-y'\vec{e}_1 + x'\vec{e}_2),$$

$$(\varphi' \circ \varphi)\vec{e}_1 = (xx' - yy')\vec{e}_1 + (xy' + yx')\vec{e}_2.$$

Fie:

$$\vec{V}_1 = (\varphi' \circ \varphi)\vec{e}_1;$$

lui $\vec{V}_1$ i s-a asociat numărul complex z_1 ; legii de compoziție $\varphi' \circ \varphi = \varphi' \circ \varphi$ i s-a asociat produsul comutativ:

$$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx').$$

EXERCITII

În toate exercițiile se consideră planul afin euclidian identificat cu $\mathbb{C}$, înzestrat cu un reper ortonormat.

În acest plan se consideră punctele M de afix z .

2.39. Să se compare în planul P identificat cu $\mathbb{C}$ imaginile respective ale numerelor complexe: z , $-z$, $\bar{z}$, $-\bar{z}$.

2.40. Să se demonstreze că punctele A , B , C , ale căror afixe sînt respectiv 1 , j , j^2 , sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

Cum se interpretează suma: $1 + j + j^2$?

2.41. Care este mulțimea punctelor M , de afix z , astfel încît punctele de afixe i , iz să fie coliniare cu M ? Numărul complex a fiind fixat, cum trebuie să alegem pe M pentru ca punctele de afixe a , az să fie coliniare cu M ?

2.42. Să se construiască în planul complex imaginile lui z în următoarele cazuri:

$$a) z = (3 + 4i)(5 - 2i);$$

$$b) z = \frac{4 + i}{1 - 5i}.$$

2.43. Să se determine în fiecare caz mulțimea punctelor M de afix z astfel încît:

a) $|z - 3i| = 5$;

b) $\frac{|z - i|}{|z + 2i|} = 2$;

c) $\frac{z-2}{z-6}$ să aibă componente egale;

d) $\frac{1+z}{\bar{z}}$ să fie real sau pur imaginar;

e) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$;

f) $\frac{z-2}{z-6}$ să fie pur imaginar (se va demonstra în plus că există un număr complex β independent de z , astfel încît $\left| 1 - \frac{\beta}{z} \right|$ este independent de z și se va calcula β și $\left| 1 - \frac{\beta}{z} \right|$).

2.44. Se consideră, pe $\mathbb{C}$, aplicația f definită prin $z \mapsto 2z - \bar{z}$. Care este transformarea punctuală F asociată lui f ?

Care este mulțimea punctelor M de afix z astfel ca $Z = 2iz^2 + (3 + 4i)z + 1 - i$ să fie un număr real?

2.45. Care este mulțimea punctelor M de afix z astfel încît $Z = z^3 + 3z^2 + 3z + 9$ să fie un număr real?

2.46. Fie t un număr complex, de imagine P în planul identificat cu $\mathbb{C}$. Se pune $t = x + iy$ și se consideră, pe $\mathbb{C}$, următoarele funcții:

$$t \mapsto Z_1 = \frac{t^2}{t-1};$$

$$t \mapsto Z_2 = \frac{1}{t(t-1)}.$$

Care sînt mulțimile respective de puncte P : dacă Z_1 este real?, dacă Z_2 este real?, dacă Z_2 este pur imaginar?

2.47. Să se determine ecuația carteziană a mulțimii de puncte M de afix z , astfel încît $z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$, unde a este un număr complex astfel încît $a = \alpha + i\beta$.

2.48. Se consideră numărul complex z astfel încît: $z = \frac{a+i}{a-1+2i}$. Care sînt, în planul complex, mulțimile de puncte A , de afix a , pentru care avem: fie z real pozitiv, fie $|z| = 1$?

2.49. Fie, pe $\mathbb{C}$, funcția h definită prin $z \mapsto \frac{z^2 - z - 2}{z-1}$. Care este mulțimea Γ a imaginilor m ale lui z în planul complex cînd $h(z) = Z$ este real? Punînd $Z = X + iY$,

$z = x + iy$, X, Y, y, x fiind reali, să se determine mulțimea Δ a imaginilor m ale lui z cînd $Y = 2y$.

2.50. Fie C_1 mulțimea numerelor complexe din care s-a exclus $z = 1$ și fie f aplicația de la C_1 la $\mathbb{C}$ definită prin:

$$f(Z) = \frac{Z+1}{\bar{Z}-1}.$$

Să se determine în planul complex:

1° mulțimea $\mathfrak{M}_1$ a punctelor M de afix Z pentru $f(Z)$ real,

2° mulțimea $\mathfrak{M}_2$ a punctelor M de afix z pentru $f(Z)$ pur imaginar.

2.51. Să se stabilească, pe $\mathbb{C}$, identitatea:

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Să se deducă în planul complex o proprietate a paralelogramului.

2.52. Se dau doi vectori $\vec{V} = x\vec{u} + y\vec{v}$, $\vec{V}' = x'\vec{u} + y'\vec{v}$ ai planului vectorial euclidian.

Să se exprime, în $\mathbb{C}$, produsul scalar $\vec{V} \cdot \vec{V}'$ în funcție de afixe $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ și de cele două conjugate $\bar{z}$ și $\bar{z}'$.

Aplicații. — 1° Să se demonstreze că $\vec{V} \cdot \vec{V}' = 0$ dacă și numai dacă $\frac{Z}{Z'}$ este pur imagin-

nar ($\vec{V} \neq \vec{0}$ și $\vec{V}' \neq \vec{0}$).

2° Să se determine mulțimea punctelor M de afix z astfel încât imaginile a trei numere z , z^2 , z^3 să fie virfurile unui triunghi dreptunghic.

2.53. Fie un plan afin euclidian P_2 raportat la un reper ortonormat $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, fie D o dreaptă a planului, care trece prin O și de vector director $\vec{u}$ normat și fie $(\vec{u}, \vec{v})$ o bază ortonormată a lui P_2 . Oricărui punct M al lui P_2 i se asociază simetricul lui în raport cu D .

1° Să se demonstreze că:

$$\vec{OM}' = 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{OM}}{\vec{u}^2} \cdot \vec{u} - \vec{OM}.$$

2° Folosindu-se produsul scalar definit pe $\mathbb{C}$ (exercițiul precedent) să se demonstreze că, notind z , z' , a afixe respective ale vectorilor $\vec{OM}$, $\vec{OM}'$, $\vec{u}$, avem:

$$z' = a^2 \bar{z}.$$

PROBLEME

2.54. Fie E mulțimea matricelor pătrate de ordinul 2 pe corpul numerelor complexe. Se consideră submulțimea E_1 a lui E formată din matricele de forma:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix},$$

α și β fiind două numere complexe oarecare, $\bar{\alpha}$ și $\bar{\beta}$ conjugatele lor.

1° Să se demonstreze că restricția legilor de adunare și de înmulțire a matricelor conferă lui E_1 o structură de inel. Este acest inel unitar comutativ, de integritate?

Să se demonstreze că E_1 are o structură de spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$. Să se exprime dimensiunea acestui spațiu și să i se determine o bază simplă.

3° Să se demonstreze că aplicația φ de la E_1 la E_1 , astfel încit:

$$\text{dacă } M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \text{ avem } \varphi(M) = \begin{bmatrix} \alpha + \bar{\beta} & \bar{\alpha} + \beta \\ \alpha + \bar{\beta} & \bar{\alpha} + \beta \end{bmatrix}$$

este o aplicație liniară.

2.55. Se consideră matrice pătrate de ordinul doi de tipul:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

ale căror elemente, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sînt numere complexe.

Se notează prin $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matricea unitate.

Se numește matrice scalară orice matrice care este produsul dintre un scalar și matricea unitate. Pe de altă parte, se notează:

$$M^* = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix}$$

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$ fiind respectiv conjugatele lui $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

1° Să se determine matricele M astfel ca $M + M^*$ și $M \cdot M^*$ să fie scalare și ca determinantul lui M să fie real pozitiv sau nul. Mulțimea acestor matrice va fi notată prin $(\mathcal{M})$.

2° Fie M o matrice a lui $(\mathcal{M})$. Să se definească mulțimea matricelor M' astfel ca $M + M'$ și $M \cdot M'$ să fie matrice scalare.

3° Să se demonstreze că orice matrice M a lui $(\mathcal{M})$ se poate scrie, dacă se pune $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ (a, b, c, d , reali):

$$M = aE + bI + cJ + dK,$$

I, J, K fiind trei matrice convenabile.

Să se demonstreze că matricele E, I, J, K sînt independente pe corpul realilor.

Să li se calculeze pătratele și produsele două cîte două.

Să se demonstreze că suma și produsul a două matrice ale lui $(\mathcal{M})$ sînt elemente ale lui $(\mathcal{M})$.

Să se demonstreze că orice matrice nenulă a lui $(\mathcal{M})$ are o matrice inversă care este element al lui $(\mathcal{M})$.

2.56. Fie $\mathbb{C}$ corpul numerelor complexe; $\mathbb{C}$ are, pe $\mathbb{R}$, o structură de spațiu vectorial în care $\mathcal{B} = \{1, i\}$ este o bază.

I. Oricărei perechi de numere complexe (u, v) i se asociază transformarea $T_{(u,v)}$ care, oricărui z al lui $\mathbb{C}$, face să-i corespundă $Z = T_{(u,v)}(z)$ astfel încît:

$$Z = uz + v\bar{z},$$

unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z .

1° Să se demonstreze că, oricare ar fi perechea (u, v) , $T_{(u,v)}$ este o transformare liniară a lui $\mathbb{C}$ în $\mathbb{C}$.

2° Se pune:

$$u = a + ib \quad \text{și} \quad v = c + id,$$

unde a, b, c, d sînt reali.

$\mathbb{C}$ fiind raportat la baza $\mathcal{B}$, să se scrie matricea transformării $T_{(u,v)}$.

3° Să se demonstreze că orice transformare liniară a lui $\mathbb{C}$ în $\mathbb{C}$ este o transformare $T_{(u,v)}$ și să se determine perechea (u, v) în funcție de elementele matricei de transformare:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} \text{ fiind raportat la baza } \mathcal{B}.$$

II. Să se demonstreze că mulțimea formată din transformările $T_{(u,v)}$, unde u este real și v pur imaginar, are o structură de inel comutativ, relativ la suma și la produsul transformărilor.

2.57. Fie un întreg k mai mare sau egal cu 2 astfel încît $D = 1 + k^2$ este un număr prim.

Fie u, v doi întregi relativi care verifică relația:

$$(E_n) = u^2 + v^2 = D^n \quad (n \text{ întreg } \geq 1).$$

Să se demonstreze că:

- a) $v^2 - k^2v^2$ și $v^2 - k^2u^2$ sînt multipli ai lui D (dintre care unul poate fi nul);
 b) dacă D nu divide în același timp pe u și v , D divide unul și numai unul din numerele $u + kv$, $u - kv$; dacă D divide pe $u + kv$, D divide de asemenea pe $v - ku$;
 c) pentru orice soluție a lui (E_n) , citul lui $u + iv$ printr-unul din numerele $1 + ik$, $1 - ik$ ia forma $u' + iv'$, cu u', v' întregi relativi; să se calculeze $u^2 + v^2$.
 Să se deducă că, pentru orice întreg n , D^n se descompune într-un singur fel în suma pătratelor a doi întregi pozitivi care nu sînt multipli ai lui D . Să se dea legea de formare a acestor descompuneri.

2.58. În planul euclidian, înzestrat cu un reper ortonormat $(O, \vec{u}, \vec{v})$, se consideră elipsa E de focare $F(C, O)$, $F'(C', O)$, de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{cu:} \quad a > b > 0.$$

1° Oricărui punct M al lui E , de afix z , i se asociază punctul M' , imagine a lui z' , astfel încît:

$$z^2 + z'^2 = c^2.$$

Să se demonstreze că:

$$\vec{OM'}^2 = \|\vec{MF}\| \cdot \|\vec{MF'}\|.$$

2° Să se stabilească relațiile:

$$\begin{aligned} |z - c|^2 + |z + c|^2 &= 2(|z|^2 + c^2), \\ (|z - c| + |z + c|)^2 &= 2(|z|^2 + |z'|^2 + c^2), \end{aligned}$$

apoi relațiile:

$$\|\vec{MF}\| + \|\vec{MF'}\| = \|\vec{M'F}\| + \|\vec{M'F'}\|,$$

$$\vec{OM}^2 + \vec{OM'}^2 = a^2 + b^2.$$

3° Fie I și I' imaginile numerelor complexe:

$$u = z + iz',$$

$$u' = z - iz'.$$

Să se demonstreze că:

$$uu' = c^2; \quad |Z - c| + |Z + c| = |u| + |u'|;$$

$$\|\vec{MF}\| + \|\vec{MF'}\| = \|\vec{OI}\| + \|\vec{OI'}\|.$$

2.59. I. Se convine să se noteze cu G submulțimea lui $\mathbb{C}$ formată din numerele complexe $x + iy$, $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$.

Se va desemna prin O elementul nul al lui G , adică elementul al cărui modul este nul și se va nota:

$$G^* = G - \{0\}.$$

Oricărui element α al lui G , i se asociază întregul natural $n(\alpha)$ egal cu pătratul modului lui α , adică $n(\alpha) = |\alpha|^2$.

1° Să se demonstreze că adunarea și înmulțirea în $\mathbb{C}$ conferă lui G o structură de inel comutativ.

2° Fiind date două elemente α și β ale lui G ($\beta \neq 0$), se spune că „ β divide pe α în G ” (sau că β este un divizor al lui α în G sau că α este un multiplu al lui β în G) pentru a arăta că există un element δ al lui G astfel încît avem:

$$\alpha = \beta \times \delta.$$

- a) Să se demonstreze că, oricare ar fi γ element al lui G , γ divide pe $n(\gamma)$ în G .
 b) Să se demonstreze că dacă β divide pe α în G , $n(\beta)$ divide pe $n(\alpha)$ în N .
Reciproc, dacă $n(\beta)$ este un divisor al lui $n(\alpha)$ în N , se poate afirma că β divide pe α în G ?
 c) Să se determine elementele lui G care sînt divizori în G ai numărului complex $\alpha = 1$. Asemenea elemente vor fi numite, prin urmare, elemente *unitare* ale lui G .
 d) Să se demonstreze că în G^* relația binară definită prin:

$$„\alpha \text{ divide pe } \beta \text{ și } \beta \text{ divide pe } \alpha”$$

este o relație de echivalență; se va nota:

$$\alpha \parallel \beta$$

și se va enunța simplu:

$$„\alpha \text{ și } \beta \text{ sînt echivalente}”.$$

Să se determine toate elementele lui G echivalente cu un element dat α .

Să se demonstreze că, dacă $\alpha \parallel \beta$, atunci $n(\alpha) = n(\beta)$.

Se poate enunța o reciprocă presupunînd β divisor al lui α și $n(\alpha) = n(\beta)$?

Aplicație numerică. — Să se determine toți divizorii în G ai fiecăruia din elementele:

$$1 + i, \quad -4 + 7i.$$

3° a) Să se demonstreze că fiind dat un element z al lui C , există cel puțin un element α al lui G astfel încît:

$$|z - \alpha| < 1.$$

Este unic acest element α ?

Aplicație numerică. — Să se calculeze α pentru fiecare din valorile lui z :

$$2 + 3i, \quad \frac{5}{2}(1 + i).$$

b) Să se deducă că, oricare ar fi elementele α și β ale lui G^* , există elemente δ și ρ ale lui G astfel încît avem:

$$\alpha = \beta\delta + \rho \quad \text{și} \quad |\rho| < |\beta|.$$

Aplicație numerică. — Să se calculeze δ și ρ pentru $\alpha = -2 + 5i$, $\beta = 3 + i$.

4° Se numește „divizor propriu” al lui α , în G^* , orice divisor al lui α care nu este nici element unitar, nici echivalent cu α . Un element al lui G^* este numit *prim* în G , dacă nu este element unitar și nu are divizori proprii; în caz contrar, se numește *compus* în G .

Să se demonstreze că dacă un element α al lui G este astfel încît $n(\alpha)$, $[n(\alpha) \neq 1]$ este un număr prim în N , atunci α este prim în G .

Reciproca este falsă: se va arăta, de exemplu, că 3 este prim în G .

Aplicație numerică. — Să se cerceteze dacă următoarele elemente sînt prime sau compuse în G :

$$2, \quad 5, \quad 1 + i, \quad 3 - i, \quad 3 + 4i.$$

II. Se convine să se spună că mulțimea $\mathcal{T}$, nevidă și neredusă la $\{0\}$ este *ideal* dacă are următoarele trei proprietăți:

1 $\mathcal{T}$ este o submulțime a lui G .

2 $\forall u \in \mathcal{T}, \forall v \in \mathcal{T}$, atunci $u - v$ aparține lui $\mathcal{T}$.

3 $\forall u \in \mathcal{T}, \forall \alpha \in G$, atunci $\alpha u \in \mathcal{T}$.

1° a) Să se demonstreze că, ϵ fiind un element dat al lui G^* , mulțimea E formată din elemente e de forma $e = \alpha\epsilon$, unde α parcurge pe G este ideal.

b) *Reciproc*, să se demonstreze că, în orice ideal, există un element r nenul, definit făcând abstracție de factori unitari multiplicativi, care are un modul minim și că orice element din această mulțime este un multiplu al lui r în G .

2° a) Fiind date n elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, nu toate nule, ale lui G , să se demonstreze că mulțimea F formată din elemente f de forma $f = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$, unde $a_1, a_2, \dots, a_n$ parcurg pe G , este ideal.

b) Să se deducă că, printre divizorii în G comuni lui $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, există unul definit făcând abstracție de factori unitari, de modul maxim și că toți ceilalți divizori comuni sînt divizori în G ai acestuia.

3° Se spune că două elemente α și β ale lui G sînt *prime între ele* (sau că α este prim cu β) dacă singurii lor divizori comuni sînt elemente unitare.

a) Să se demonstreze că α și β satisfac o relație de forma:

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 1,$$

unde λ și μ sînt elemente ale lui G .

Să se deducă că, dacă un element α al lui G^* divide produsul $\beta\gamma$ a două elemente ale lui G^* și că dacă α este prim cu β , atunci α divide pe γ în G .

În particular, dacă elementul α , prim în G , divide în G produsul $\beta\gamma$, atunci α divide pe β sau α divide pe γ . Dacă, în plus, β și γ sînt de asemenea prime în G , atunci $\alpha \parallel \beta$ sau $\alpha \parallel \gamma$.

b) Să se deducă că orice element compus al lui G se poate descompune într-un produs de factori primi în G , fiecare fiind definit făcând abstracție de factori unitari și aceasta în mod unic.

Aplicație numerică. — Să se descompună fiecare din numerele:

$$3 - i, \quad 9 + 7i.$$

III. 1° a) Să se demonstreze că nici un element prim în G nu poate divide în G două numere prime în N .

b) Să se demonstreze că orice element λ , prim în G , divide în G un număr l și numai unul, prim în N .

c) Să se deducă din b) că:

— sau că $l \parallel \lambda$;

— sau că $l = n(\lambda)$ și atunci l , care nu este prim în G , este o sumă de două pătrate de elemente din $\mathbb{Z}$.

2° Fînd dat un număr l prim, în N și diferit de 2, el este fie de forma $4k + 3$, fie de forma $4k + 1$, unde k aparține lui N .

a) Dacă $l = 4k + 3$, să se demonstreze că l este prim în G .

b) Dacă $l = 4k + 1$, se va admite că l se pune într-un singur mod sub formă de sumă a două pătrate de întregi naturali.

3° Ce se poate spune atunci despre căutarea elementelor prime în G ?

(CAPES, 1967)

2.60. *Recapitulări.* Se numește automorfism al unui corp K orice aplicație bijectivă u a lui K pe K astfel încît:

$$u(x + y) = u(x) + u(y) \quad \text{și} \quad u(xy) = u(x)u(y).$$

Se notează cu j numărul complex $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. 1° Să se arate că mulțimea numerelor $a + b\sqrt[3]{2}$, unde a și b aparțin corpului $\mathbb{Q}$ al raționalilor, este corp pentru adunarea și înmulțirea numerelor reale.

2° Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți raționali, K un corp oarecare care conține pe $\mathbb{Q}$, u un automorfism al lui K care lasă invariante elementele lui $\mathbb{Q}$.

Să se arate că, dacă α este rădăcina lui P în K , $u(\alpha)$ este de asemenea rădăcină a lui P .

Ce se poate deduce pentru $\bar{\alpha}$, conjugatul imaginar al lui α dacă α este rădăcină a lui P ? Să se studieze de asemenea $a - b\sqrt[3]{2}$ (a și b în $\mathbb{Q}$) dacă $a + b\sqrt[3]{2}$ este rădăcină a lui P .

B. 1° Să se arate că polinomul:

$$P(X) = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$$

are exact două rădăcini reale studiindu-se variațiile lui $P(X)$ cu ajutorul lui $P'(X)$ și $P''(X)$.

2° Să se calculeze $P(j)$. Să se deducă rădăcinile lui $P(X)$ și să se descompună $P(X)$ în produs de factori de gradul I și de gradul II, cu coeficienți în $\mathbb{Q}$.

C. 1° Să se arate că $a + b\sqrt{2} + cj + dj\sqrt{2} = 0$, a, b, c, d aparținând lui $\mathbb{Q}$, duce la $a = b = c = d = 0$.

Să se arate că mulțimea:

$$K = \{a + b\sqrt{2} + cj + dj\sqrt{2}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}_1$$

este un corp care conține pe $\mathbb{Q}$.

Să se găsească inversul lui $1 + \sqrt{2} + j + j\sqrt{2}$.

2° Să se rezolve în K ecuația:

$$X^2 - (1 + \sqrt{2} + 2j)X + 1 = 0.$$

3° Fie G mulțimea automorfismelor lui K care lasă invariante elementele lui $\mathbb{Q}$. Să se arate că G este grup pentru compunerea aplicațiilor.

4° Să se arate că un element u al lui G este determinat prin darea lui $u(\sqrt{2})$ și a lui $u(j)$.

Să se arate că $u(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ sau $u(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ și că $u(j) = j$ sau $u(j) = j^2$.

5° Să se găsească numărul n de elemente ale lui G și să se întocmească tabelul lor. Să se indice proprietățile lui G .

Care este mulțimea elementelor lui K lăsate invariante de toate elementele lui G , printr-un element al lui G diferit de automorfismul identic?

D. Fie $u_1, u_2, \dots, u_n$ elementele lui G (u_1 este elementul neutru) și fie α un element al lui K .

Să se arate că:

$$R(X) = [X - u_1(\alpha)][X - u_2(\alpha)] \dots [X - u_n(\alpha)]$$

este cu coeficienți raționali.

Fie $S(X)$ un polinom cu coeficienți raționali care admite pe α ca rădăcină. Să se compare R cu S . (Se va discuta dacă elementele $u_i(\alpha)$ sînt sau nu distincte.)

(HEC, 1971)

3. FORMA TRIGONOMETRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

-
- 3.1. *Recapitulări și complemente.*
 - 3.2. *Forma trigonometrică a unui număr complex.*
 - 3.3. *Argumentul unui număr complex nenul.*
 - 3.4. *Aplicații trigonometrice.*
-

Notă. — În tot acest capitol, planul vectorial euclidian $\vec{P}$ este raportat la o bază ortonormată directă $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, ceea ce înseamnă că unghiul $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}$ este egal cu unghiul drept pozitiv δ .

3.1. RECAPITULĂRI ȘI COMPLEMENTE

3.1.1. Grupul matricelor $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$,

$a^2 + b^2 = 1$ și grupul $\mathcal{A}$ al unghiurilor

1. Fie $(\mathcal{A}, +)$ grupul aditiv al unghiurilor și $(U, \times)$ grupul multiplicativ al matricelor reale de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Aceste două grupuri sînt grupuri comutative.

Să reamintim că grupul $(\mathcal{A}, +)$ al unghiurilor este un grup izomorf cu grupul $(\mathcal{R}, \circ)$ al rotațiilor vectoriale ale lui $\vec{P}$.

2. Pentru orice matrice A fixată, în orice bază ortonormată *directă* a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, există o rotație φ și numai una și, prin urmare, un singur unghi $\hat{\varphi}$.

3. Fie g aplicația de la U la $\mathcal{A}$ astfel încît:

$$g(A) = \hat{\varphi};$$

după 2, această aplicație este o *bijecție*.

Produsul matricelor A și A' ale rotațiilor vectoriale φ' , φ este matricea de rotație vectorială $\varphi' \circ \varphi$ de unde:

$$g(A \times A') = \hat{\varphi}' + \hat{\varphi},$$

și, prin urmare, pentru orice pereche (A, A') de matrice din U :

$$g(A \times A') = g(A') + g(A).$$

Rezultă că aplicația g este un *izomorfism* între grupul multiplicativ U și grupul aditiv $\mathcal{A}$ al unghiurilor:

$$(U, \times) \approx (\mathcal{A}, +);$$

$$U \xrightarrow{g} \mathcal{A}.$$

3.1.2. Grupul activ $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ și grupul aditiv $\mathcal{A}$ al unghiurilor

1. Am admis (Aleph, Algebră anul I CDE, nr. 9.1.2) existența unui homomorfism surjectiv, zis canonic, de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(\mathcal{A}, +)$. Îl vom nota, aici, cu f .

Acest homomorfism f este astfel încît, pentru orice pereche (x, y) a lui $\mathbb{R}^2$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Avem, în particular:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \hat{\delta};$$

se spune că $\frac{\pi}{2}$ este o măsură a unghiului drept pozitiv.

Mai general, orice x real astfel încît $f(x) = \hat{\varphi}$ este o măsură a unghiului $\hat{\varphi}$.

2. Ecuația definită prin:

$$f(x) = \hat{\varphi},$$

unde $\hat{\varphi}$ este un unghi fixat, are o infinitate de soluții; dacă x_0 este una din ele, mulțimea μ a soluțiilor este:

$$\mu = \{x; x \in \mathbb{R}, \exists k x = x_0 + k \cdot 2\pi\}.$$

Aplicația f nu este injectivă. Nucleul $\mathcal{N}$ al homomorfismului f , adică mulțimea realilor x astfel încît:

$$f(x) = \hat{0} \text{ } (\hat{0} \text{ fiind unghiul nul),}$$

este egală cu $2\pi\mathbf{Z}$.

Mulțimea μ nu este alta decît *clasa $\hat{x}$ a lui x_0 modulo $2\pi\mathbf{Z}$* , element al grupului aditiv cît $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$:

$$\mu \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}.$$

3. Definim astfel o aplicație, notată aici cu $\bar{f}$, de la $\mathcal{A}$ la $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ astfel încît:

$$\bar{f}(\hat{\varphi}) = \hat{x},$$

sau:

$$\bar{f}(\hat{\varphi}) = \mu.$$

Aplicația $\bar{f}$ este *surjectivă*:

fiecărui număr real x_0 fixat care aparține clasei $\hat{x}$, homomorfismul canonic f asociază un unghi $\hat{\varphi}$:

$$f(x_0) = \hat{\varphi} \text{ și } \hat{x} = \bar{f}[f(x_0)].$$

Aplicația f este *injectivă*:
dacă avem:

$$\bar{f}(\hat{\varphi}) = \bar{f}(\hat{\varphi}'),$$

atunci:

$$\bar{f}[f(x)] = \bar{f}[f(x')],$$

sau:

$$f(x) = f(x'),$$

adică:

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}'.$$

Aplicația $\bar{f}$ este o *bijecție* între grupul aditiv $\mathcal{A}$ al unghiurilor și grupul aditiv $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Această aplicație $\bar{f}$ este un izomorfism de grup. Pentru a demonstra aceasta, este suficient să se verifice egalitatea:

$$\bar{f}(\hat{\varphi} + \hat{\psi}) = \bar{f}(\hat{\varphi}) + \bar{f}(\hat{\psi}).$$

Fie două elemente x și y astfel încît:

$$x \in \bar{f}(\hat{\varphi}) = \mu_1, \quad y \in \bar{f}(\hat{\psi}) = \mu_2$$

Definiția sumei a două clase de congruență duce la:

$$\mu_1 + \mu_2 = \overbrace{x + y}.$$

(Semnul $+$ arată că este vorba de o adunare în clasele modulo $2\pi\mathbb{Z}$.)
Deci, mulțimea numerelor reale t , soluții ale ecuației definite prin:

$$f(t) = f(x + y), \text{ nu este alta decît suma } \mu_1 + \mu_2.$$

Or, f este un homomorfism, adică:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = \hat{\varphi} + \hat{\psi},$$

$\mu_1 + \mu_2$ este deci mulțimea numerelor t astfel încît:

$$f(t) = \hat{\varphi} + \hat{\psi}$$

adică mulțimea:

$$\bar{f}(\hat{\varphi} + \hat{\psi}),$$

și:

$$\bar{f}(\hat{\varphi} + \hat{\psi}) = \bar{f}(\hat{\varphi}) + \bar{f}(\hat{\psi}).$$

3.1.3. Concluzie

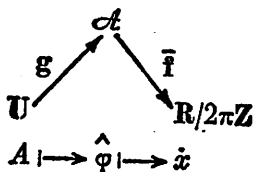
Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ fiind raportat la o bază ortonormată directă, următoarele grupuri comutative sînt izomorfe:

a) $(U, \times)$: grupul multiplicativ al matricelor reale:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1;$$

b) $(\mathcal{A}, +)$: grupul aditiv al unghiurilor notate cu $\hat{\varphi}$;

c) $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$: grupul aditiv al numerelor reale modulo 2π , notate cu $\dot{x}$.
Izomorfismele sînt realizate prin următoarele aplicații:



EXERCIȚIU

 **Exercițiu de aplicație imediată.**

Se consideră produsul cartezian $\mathbb{R}^{**} \times U$ al grupurilor multiplicative $\mathbb{R}^{**}$ și U . (U este grupul multiplicativ al numerelor complexe γ de modul 1.)

1° Să se demonstreze că $\mathbb{R}^{**} \times U$ poate fi înzestrat cu o structură de grup comutativ, numit „grup produs cartezian”.

2° Să se demonstreze că aplicația f definită prin $z \mapsto \left(|z|, \frac{z}{|z|} \right)$ este un izomorfism între grupul multiplicativ $\mathbb{C}^*$ al numerelor complexe z și grupul produs cartezian $\mathbb{R}^{**} \times U$.

3.2. FORMA TRIGONOMETRICĂ A UNUI NUMĂR COMPLEX

3.2.1. Homomorfismul θ al grupului aditiv $\mathbb{R}$ pe grupul multiplicativ U

1. Orice matrice A a mulțimii U , în orice bază ortonormată directă, se exprimă sub forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

unde a și b sînt numere reale.

Se știe că orice matrice A , scrisă sub forma precedentă, se notează de asemenea și în mod unic prin:

$$u = a + ib, \quad i^2 = -1,$$

u fiind un număr complex de modul egal cu 1.

Mulțimea U este *submulțimea numerelor complexe de modul 1*.

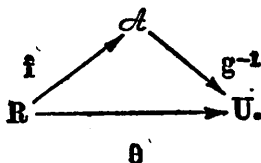
2. Grupul multiplicativ U al matricelor A și grupul aditiv $\mathcal{A}$ al unghiurilor sînt izomorfe prin bijecția g (nr. 3.1.1). Rezultă că grupul multiplicativ U al numerelor complexe u de modul 1 și grupul aditiv $\mathcal{A}$ al unghiurilor sînt *izomorfe* pentru că nu este vorba decît de o *schimbare de notație*, pentru orice matrice A :

$$g(u) = \hat{\varphi} \quad (u \in U \text{ și } \hat{\varphi} \in \mathcal{A}).$$

3. Există un homomorfism surjectiv f de la $\mathbb{R}$ la grupul aditiv $\mathcal{A}$ al unghiurilor și un izomorfism g între grupul multiplicativ U și $\mathcal{A}$. Prin compunerea aplicațiilor f și g^{-1} , se deduce un *homomorfism surjectiv* θ de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(U, \cdot)$, definit prin:

$$\theta = g^{-1} \circ f,$$

după schema:



4. Pentru orice pereche (x, y) a lui $\mathbb{R}^2$, avem:

$$\theta(x + y) = \theta(x) \times \theta(y), \quad \theta(x) = u, \quad \theta(y) = u'.$$

De unde:

$$\theta(x + y) = u \cdot u'.$$

EXEMPLE. I. $\theta(0) = (g^{-1} \circ f)(0) = g^{-1}(\hat{0}) = 1$, căci unghiului nul $\hat{0}$ îi corespunde matricea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

adică numărul complex $u = 1$.

II. Se obține de asemenea:

$$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = i; \quad \theta(\pi) = -1; \quad \theta\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

5. Nucleul $\mathcal{N}$ al homomorfismului θ este egal cu subgrupul aditiv $2\pi\mathbb{Z}$. Avem, într-adevăr:

$$\theta^{-1} = (g^{-1} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g;$$

cum:

$$g\{1\} = \hat{0} \text{ și } f^{-1}\{\hat{0}\} = 2\pi\mathbb{Z},$$

rezultă:

$$\mathcal{N} = 2\pi\mathbb{Z}.$$

EXERCIȚII

Exercițiu rezolvat

Se numește *amplitudine* a numărului complex u ($|u| = 1$), unghiul $\hat{\varphi}$ astfel încît:

$$g(u) = \hat{\varphi} \quad (\text{să se vadă exercițiul 3.2.1}).$$

Pe de altă parte, numărul real x astfel că $\theta(x) = u$ este o soluție a ecuației definite prin $f(x) = \hat{\varphi}$: acesta este o măsură a amplitudinii $\hat{\varphi}$. Se notează: $\hat{\varphi} = Am\ u$. (Se va regăsi această notație în paragraful nr. 3.3.1.)

Să se determine mulțimea măsurilor amplitudinii numerelor complexe j și ij .

1° Avem:

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

de unde:

$$|j| = 1;$$

dacă x este o măsură a lui $Am\ j$, atunci:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ și } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mulțimea E a măsurilor $Am\ j$ este deci:

$$E = \left\{ x; x \in \mathbb{R}, \exists k \ x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \right\}.$$

2° Fie θ homomorfismul canonic de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{U}$.

Dacă:

$$\theta(x_1) = i \quad \text{și} \quad \theta(x_2) = j,$$

avem:

$$\theta(x_1 + x_2) = i \cdot j.$$

Cum:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \text{și} \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + h \cdot 2\pi \quad (k, h) \in \mathbb{Z},$$

rezultă:

$$x_1 + x_2 = \frac{7\pi}{6} + p \cdot 2\pi \quad (p = k + h).$$

Mulțimea F a măsurilor lui $Am(ij)$ este astfel încît:

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}; \quad x = \frac{7\pi}{6} + p \cdot 2\pi, \quad p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3° Să calculăm pe ij :

$$ij = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(-\frac{1}{2} \right).$$

Avem:

$$\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

și

$$\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

■ *Exercițiu de aplicație imediată*

Să se studieze mulțimea măsurilor amplitudinilor respective ale numerelor complexe:

$$j^2, \quad -j, \quad -j, \quad ij^2, \quad \bar{ij}.$$

3.2.2. Forma trigonometrică a unui număr complex de modul 1

1. Surjecția canonică f de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(\mathcal{A}, +)$ și definiția funcțiilor circulare implică că orice matrice A relativă la un unghi $\hat{\varphi}$, în orice bază ortonormată directă, se exprimă sub forma:

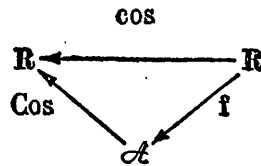
$$A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix},$$

unde:

$$\cos x = \text{Cos } \hat{\varphi} = \text{Cos } f(x),$$

$$\sin x = \text{Sin } \hat{\varphi} = \text{Sin } f(x).$$

Numărul x este un real, soluție a ecuației definite prin $f(x) = \hat{\varphi}$.
 Avem schema:



și:

$$\cos = \text{Cos} \circ f;$$

de asemenea:

$$\sin = \text{Sin} \circ f.$$

2. Orice matrice A , scrisă sub forma precedentă, se notează de asemenea cu:

$$u = \cos x + i \sin x, \quad i^2 = -1$$

Se spune că numărul complex u ($|u| = 1$) este scris sub *formă trigonometrică*.

3. *Observație importantă*

Numărul x este o soluție a ecuației definite prin:

$$f(x) = \hat{\varphi};$$

rezultă conform cu nr. 3.1.2, μ fiind mulțimea soluțiilor acestei ecuații:

$$x \in \mu \text{ sau } x \in \hat{x},$$

$\hat{x}$ fiind un element al grupului aditiv $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ astfel încât:

$$\hat{f}(\hat{\varphi}) = \hat{x},$$

cu:

$$\hat{f}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

3.2.3. Forma trigonometrică a unui număr complex nenul

1. Să considerăm aplicația h , care face ca oricărui număr complex z nenul, să-i corespundă numărul complex $h(z) = \frac{z}{|z|}$.

Pentru orice z , element al lui $\mathbb{C}^*$, avem:

$$|h(z)| = \frac{|z|}{|z|} = 1;$$

numărul complex $h(z)$ este un număr complex de modul 1.

S-a stabilit (nr. 2.4.3) că orice număr complex z se scrie într-un mod unic sub forma:

$$z = |z| u \quad (u \in U).$$

Pe de altă parte, pentru orice pereche (z_1, z_2) a lui $C^* \times C^*$:

$$h(z_1) \cdot h(z_2) = \frac{z_1}{|z_1|} \times \frac{z_2}{|z_2|} = \frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|},$$

de unde:

$$h(z_1 z_2) = h(z_1) h(z_2).$$

Aplicația h este un homomorfism de la grupul multiplicativ C^* la grupul multiplicativ U .

2. Se știe că orice număr complex, element al lui U , se scrie:

$$u = \cos x + i \sin x,$$

x fiind un număr real astfel încît:

$$f(x) = \hat{\varphi},$$

unde f este homomorfismul canonic de la $\mathbb{R}$ la grupul unghiurilor.
Rezultă că orice număr complex z , nenul, se poate scrie:

$$z = r(\cos x + i \sin x) \quad r = |z| \quad x \in \mathbb{R}$$

Această egalitate se numește *forma trigonometrică* a unui număr complex z , nenul.

3. Orice număr complex, nenul, se scrie de asemenea în mod unic:

$$z = a + ib,$$

unde a și b sînt numere reale.

Avem:

$$r(\cos x + i \sin x) = a + ib,$$

de unde:

$$a = r \cos x,$$

$$b = r \sin x,$$

adică:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\cos x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

ceea ce determină perfect mulțimea numerelor reale x .

EXERCIȚII

■ Exercițiu rezolvat

Să se pună sub formă trigonometrică numerele complexe:

$$z = 1 + i, \quad z' = 1 - i.$$

În ambele cazuri:

$$|z| = |z'| = \sqrt{2}.$$

De unde:

$$z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right), \quad z' = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right),$$

și:

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad z' = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right].$$

■ Exerciții de aplicație imediată

I. Să se pună sub formă trigonometrică următoarele numere complexe:

a) $z = i$; $z = 9i$; $z = -6$; $z = +8$.

b) $z = 1 + i\sqrt{3}$; $z = 1 - i\sqrt{3}$; $z = j$.

II. Să se pună sub formă trigonometrică următoarele numere complexe:

a) $z = \sin \theta - i \cos \theta$; $z = 1 + i \operatorname{tg} \theta$; $z = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$.

(θ este un număr real fixat.)

b) $z = \frac{-1}{1+i}$; $z = \frac{5}{1-i}$.

III. Să se pună sub formă trigonometrică următorul număr complex:

$$t = \frac{21(5i - \sqrt{3})}{2 - i\sqrt{3}}.$$

3.3. ARGUMENTUL UNUI NUMĂR COMPLEX NENUL

3.3.1. Izomorfismul între grupul $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ și grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

1. Am stabilit că homomorfismul canonic f de la grupul aditiv al numerelor reale la grupul aditiv $\mathcal{A}$ al unghiurilor implica existența unui homomorfism surjectiv canonic θ de la grupul aditiv $\mathbb{R}$ la grupul multiplicativ U al numerelor complexe de modul 1.

Pe de altă parte, aplicația $\bar{f}$ a grupului $\mathcal{A}$ al unghiurilor pe subgrupul aditiv $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ este un izomorfism de grupuri; de asemenea, grupurile U și $\mathcal{A}$ sînt izomorfe prin bijecția g .

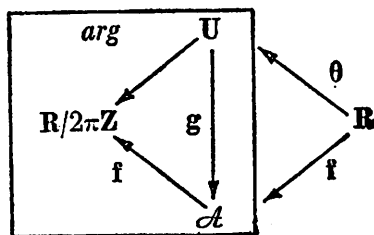
Rezultă că aplicația compusă $\bar{f} \circ g$ este un izomorfism între grupul U și grupul $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Se numește funcție argument bijecția $\bar{f} \circ g$ între U și $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

Se notează:

$$\arg = \bar{f} \circ g.$$

Avem următoarea schemă:



Cele trei grupuri încadrate sînt izomorfe.

2. Avem, pentru orice număr u , element al lui U :

$$\arg u = (\bar{f} \circ g)u,$$

apoi, cum $g(u) = \hat{\varphi}$:

$$\arg u = \bar{f}(\hat{\varphi}),$$

deci, cum $\bar{f}(\hat{\varphi}) = \hat{x}$:

$$\arg u = \hat{x}.$$

3.3.2. Argumentul unui număr complex u și forma trigonometrică a lui u

1. *Aplicația argument* asociază oricărui număr complex u clasa $\hat{x}$ a numerelor reale modulo 2π , adică mulțimea μ a soluțiilor ecuației definite prin:

$$\bar{f}(x) = \hat{\varphi},$$

$\bar{f}$ fiind homomorfismul canonic de la $\mathbf{R}$ la $\mathcal{A}$.

Rezultă, după observația de la nr. 3.2.2, că $\hat{x}$ nu este altul decît clasa numerelor x definite prin forma trigonometrică a numărului u :

$$u = \cos x + i \sin x,$$

adică:

$$[x \in \hat{x} \iff x \in (\bar{f} \circ g)u \iff x \in \arg u].$$

EXEMPLU

Fie numărul complex:

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Avem:

$$j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Un element x al argumentului lui u este $\frac{2\pi}{3}$.

De unde:

$$\arg u = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

DEFINIȚIE / Un număr complex u de modul 1 fiind scris sub formă trigonometrică: $\cos x + i \sin x$, numim *argument al numărului u* , notat $\arg u$, clasa $\hat{x}$ a numerelor reale x ; $\arg u$ este un element al subgrupului aditiv $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Observație. — Dacă se folosește un real x astfel încît:

$$x \in \arg u,$$

se spune curent că x este un argument al numărului complex z ; x este un număr reprezentant *fixat* al clasei $\arg u$.

Oricare ar fi un asemenea număr x , există un număr complex u , unic, astfel încît:

$$u = \cos x + i \sin x.$$

2. În submulțimea $I = [0, 2\pi[$ a lui $\mathbb{R}$, pentru orice clasă $\hat{x}$ a lui $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, există un reprezentant x , unic, al lui $\hat{x}$, care aparține lui I .

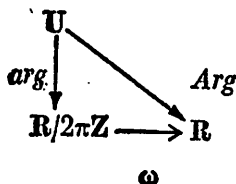
Fie ω injecția canonică definită prin:

$$\omega(\hat{x}) = x.$$

Se observă:

$$\omega(\hat{x}) \in \hat{x}.$$

Această aplicație ω de la $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la $\mathbb{R}$ permite să se definească prin compunerea cu aplicația $\arg$ o nouă aplicație notată Arg , citită argument mare, de la grupul multiplicativ U la grupul aditiv $\mathbb{R}$. Se obține următoarea diagramă:



și

$$\text{Arg} = \omega \circ \arg.$$

Numărul real $\text{Arg } u$ se numește *determinare principală* a lui $\arg u$ și avem:

$$\text{Arg } u \in \arg u.$$

Orice număr complex u se poate deci scrie:

$$u = \cos(\text{Arg } u) + i \sin(\text{Arg } u)$$

EXEMPLU. Fie numărul complex u astfel încît:

$$u = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2}.$$

Pentru că, $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ și $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, avem:

$$\text{Arg } u = \frac{3\pi}{4}.$$

Să notăm că:

$$\arg u = \frac{\widehat{3\pi}}{4},$$

și că un argument al lui u este, de exemplu: $\frac{11\pi}{4}$.

3.3.3. Formula lui Moivre

1. Pentru orice real x fixat astfel încît $x \in \arg u$, există un număr complex u unic definit prin:

$$u = \cos x + i \sin x \quad (x \in \arg u),$$

adică:

$$x \in \dot{x}, \quad \dot{x} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Fie:

$$u_1 = \cos x_1 + i \sin x_1,$$

$$u_2 = \cos x_2 + i \sin x_2,$$

$$u = \cos (x_1 + x_2) + i \sin (x_1 + x_2),$$

numerele complexe de modul 1 definite respectiv cu:

$$x_1, x_2, \quad x = x_1 + x_2.$$

În mulțimea claselor modulo 2π , avem:

$$\dot{x} = \overbrace{x_1 + x_2}^{\cdot} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2,$$

sau:

$$\arg u = \arg u_1 + \arg u_2,$$

realul x aparținînd lui $\arg u$.

Cum:

$$\arg(u_1 u_2) = \arg u_1 + \arg u_2,$$

rezultă:

$$\arg u = \arg(u_1 u_2),$$

și prin urmare:

$$\begin{aligned} \cos(x_1 + x_2) + i \sin(x_1 + x_2) &= \\ &= (\cos x_1 + i \sin x_1)(\cos x_2 + i \sin x_2) \end{aligned}$$

Această egalitate poartă numele de **formula lui Moivre**.
Se deduc egalitățile cunoscute:

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2,$$

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1,$$

care permit să se găsească suma a două argumente.

2. Formula lui Moivre se extinde la un produs de n numere complexe de modul 1 : $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_n$.

Se scrie:

$$\prod_{k=1}^n u_k = \cos \sum_{k=1}^n x_k + i \sin \sum_{k=1}^n x_k.$$

EXEMPLU. Din relația:

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)(\cos c + i \sin c) = \cos(a + b + c) + i \sin(a + b + c),$$

se deduce:

$$\cos(a + b + c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c - \cos b \sin c \sin a - \cos c \sin a \sin b;$$

$$\sin(a + b + c) = \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos c \cos a + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c.$$

3. În cazul în care:

$$u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_k = \dots = u_n,$$

avem:

$$u^n = \cos nx + i \sin nx,$$

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

4. Pe de altă parte, relația:

$$\arg(z^{-n}) = -n \arg z$$

implică:

$$(\cos x + i \sin x)^{-n} = \cos(-nx) + i \sin(-nx).$$

Relația:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

se extinde la exponenți întregi relativi.

Ea poartă de asemenea numele de **formula lui Moivre**.

3.3.4. Argumentul unui număr complex z nenul

1. Aplicațiile arg și Arg au fost unic definite pe subgrupul multiplicativ U al grupului multiplicativ $\mathbb{C}^*$. Pe de altă parte, am studiat homomorfismul h de la grupul $\mathbb{C}^*$ la subgrupul U , definit prin:

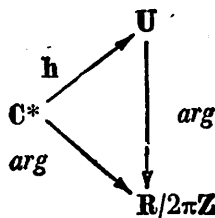
$$z \mapsto h(z) = \frac{z}{|z|}.$$

Aplicația de la $\mathbb{C}^*$ la $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, astfel încât:

$$z \mapsto arg[h(z)],$$

are pentru restricția la mulțimea U aplicația arg .

O vom nota prin același simbol arg , ceea ce dă următoarea diagramă:



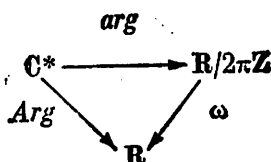
Avem:

$$arg\ z = arg\ \frac{z}{|z|} \quad (z \in \mathbb{C}^*)$$

De asemenea:

$$Arg\ z = Arg\ \frac{z}{|z|} \quad (z \in \mathbb{C}^*);$$

de unde schema:



DEFINIȚIE / Argumentul unui număr complex z nenul este argumentul numărului complex $\frac{z}{|z|}$.

2. Orice număr complex z nenul se poate scrie sub forma:

$$z = r(\cos x + i \sin x), \quad r = |z| \quad (x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^{++}),$$

cu:

$$x \in arg\ z.$$

Se reprezintă adesea numărul z prin perechea (r, x) , x fiind unul oarecare din reprezentanții clasei $\arg u$. Se alege de preferință *determinarea principală* $\text{Arg } u$.

3. Se numește argument al lui z unul oarecare din reprezentanții clasei $\arg u$.

EXERCIȚII

 *Exercițiu rezolvat*

Să se determine modulul și argumentul numărului complex $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$, α fiind un număr real.

Avem:

$$|z|^2 = (1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 2(1 + \cos \alpha) = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

de unde:

$$|z| = 2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|.$$

$$1^\circ \cos \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Se poate scrie:

$$z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right), \quad |z| = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \text{ și } \frac{\alpha}{2} \in \arg u.$$

Se spune că $\frac{\alpha}{2}$ este un argument al lui z .

$$2^\circ \cos \frac{\alpha}{2} < 0.$$

Prin urmare:

$$|z| = -2 \cos \frac{\alpha}{2} \text{ și } z = \left(-2 \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left[\cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right],$$

de unde:

$$z = \left(-2 \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left[\cos \left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right) \right],$$

și:

$$\left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right) \in \arg z.$$

Se spune că $\pi + \frac{\alpha}{2}$ este un argument al lui z .

 *Exercițiu de aplicație imediată*

Să se determine modulul și argumentul numărului complex $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$, α fiind un număr real.

3.3.5. Proprietățile funcției argument al lui z

 *Relație fundamentală*

Aplicația argument este un izomorfism între grupul multiplicativ U al numerelor complexe de modul 1 și grupul aditiv al realilor modulo 2π ; această aplicație a fost *prelungită* prin homomorfismul h de la C^* la U într-o aplicație de la C^* la $R/2\pi Z$.

Fie z și z' două numere complexe nenule; avem, după paragraful precedent:

$$\arg (zz') = \arg \frac{zz'}{|zz'|},$$

or:

$$\arg \frac{zz'}{|zz'|} = \arg \left(\frac{z}{|z|} + \frac{z'}{|z'|} \right),$$

și din izomorfismul între grupul multiplicativ U și grupul aditiv $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\arg \left(\frac{z}{|z|} \times \frac{z'}{|z'|} \right) = \arg \frac{z}{|z|} + \arg \frac{z'}{|z'|}.$$

Prin urmare, pentru orice pereche (z, z') a lui $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, se obține relația:

$$\boxed{\arg (zz') = \arg z + \arg z'} \quad (1)$$

Se poate enunța:

TEOREMA 1 / Argumentul produsului a două numere complexe nenule este egal cu suma argumentelor acestor două numere.

■ *Consecințe*

Relația fundamentală:

$$\arg (zz') = \arg z + \arg z'$$

se generalizează prin recurență în raport cu întregul natural n . Se obține:

$$\arg \prod_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n \arg z_i \quad (2)$$

și în particular:

$$\boxed{\arg z^n = n \arg z} \quad (3)$$

Să punem:

$$z' = \frac{1}{z}, \text{ fie: } zz^{-1} = 1.$$

Avem:

$$\arg (zz^{-1}) = \arg z + \arg z^{-1},$$

cum:

$$\arg (1) = \bar{0},$$

rezultă:

$$\arg (z^{-1}) = - \arg z.$$

Se poate enunța:

TEOREMA 2 / Inversul unui număr complex nenul, de argument x , are ca argument opusul $(-x)$ al lui x .

Rezultă:

$$\arg \frac{z}{z'} = \arg \left(z \times \frac{1}{z'} \right) = \arg z - \arg z',$$

și:

$$\arg \frac{1}{z^n} = - \arg (z^n) = - n \arg z,$$

sau:

$$\arg (z^{-n}) = - n \arg z,$$

ceea ce generalizează, pe $\mathbb{Z}$, relația (3) din acest paragraf.

3.3.6. Cazul numerelor reale și al numerelor pur imaginare

1. Să considerăm aplicația care asociază oricărui număr complex $z (z \neq 0)$ argumentul lui $\arg z$. Această aplicație este un homomorfism surjectiv de la grupul multiplicativ $\mathbb{C}^*$ pe grupul aditiv $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Nucleul acestui homomorfism, adică submulțimea lui $\mathbb{C}^*$ care are ca argument pe $\hat{0}$, element neutru al grupului $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, este subgrupul $\mathbb{R}^{**}$ al grupului multiplicativ $\mathbb{C}^*$. Într-adevăr, orice număr real strict pozitiv a are ca argument pe $\hat{0}$:

$$\arg a = \arg \frac{a}{|a|} = \arg 1 = \hat{0} \text{ sau } \text{Arg } a = 0 \text{ și reciproc;}$$

de unde:

$$(\text{Arg } z = 0) \iff (z \in \mathbb{R}^{**}).$$

2. Orice real a , strict negativ, are ca argument pe $\hat{\pi}$:

$$\arg a = \arg \frac{a}{|a|} = \arg (-1) = \hat{\pi} \text{ sau } \text{Arg } a = \pi, \text{ și reciproc;}$$

de unde:

$$(\text{Arg } z = \pi) \iff (z \in \mathbb{R}^{*-}).$$

Submulțimea lui $\mathbb{C}^*$, care prin homomorfismul precedent are ca imagine elementul $\hat{\pi}$ al lui $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, este mulțimea $\mathbb{R}^{*-}$.

3. Dacă se notează $\hat{f}$ inversa funcției $\arg z$, avem:

$$\hat{f}^{-1} \{ \hat{0}, \hat{\pi} \} = \mathbb{R}^*.$$

Numărul $z = 0$ nu are argument definit.

4. Dacă z este un număr pur imaginari, avem:

$$z = i\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^*;$$

de unde:

$$\text{Arg } (i\lambda) = \text{Arg } i + \text{Arg } \lambda;$$

cum:

$$\text{Arg } i = \frac{\pi}{2}.$$

rezultă că:

a) dacă: $\lambda > 0$:

$$\text{Arg } i\lambda = \frac{\pi}{2} \text{ și reciproc;}$$

b) dacă: $\lambda < 0$:

$$\text{Arg } i\lambda = \frac{3\pi}{2} \text{ și reciproc.}$$

$$\text{EXEMPLU: } \text{Arg } 2i = \frac{\pi}{2}; \text{Arg } (-3i) = \frac{3\pi}{2}.$$

3.3.7. Rezumatul proprietăților modulului și argumentului unui număr complex nenul

$$\boxed{\blacksquare} \quad |zz'| = |z| |z'| \quad \text{și} \quad \arg (zz') = \arg z + \arg z'; \quad (1)$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{și} \quad \arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'; \quad (2)$$

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{și} \quad \arg z^n = n \arg z \quad (n \in \mathbb{Z}); \quad (3)$$

$$\left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k| \quad \text{și} \quad \arg \prod_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n \arg z_k. \quad (4)$$

$$\boxed{\blacksquare} \quad z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z = 0 \Leftrightarrow \text{Arg } z = 0;$$

$$z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z = \pi \Leftrightarrow \text{Arg } z = \pi;$$

$$(z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0): \text{ nu există argument definit;}$$

$$z \text{ pur imaginar este echivalent cu: } \text{Arg } z \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

$\boxed{\blacksquare}$ Dacă se folosește notația $z = (r, x)$ a numărului complex nenul $z = r(\cos x + i \sin x)$, unde r este element al lui $\mathbb{R}^{*+}$, relațiile precedente (1), (2), (3) se scriu:

$$(r, x) \times (r', x') = [rr', x + x'];$$

$$\frac{(r, x)}{(r', x')} = \left(\frac{r}{r'}, x - x' \right);$$

$$(r, x)^n = (r^n, nx) \text{ pentru orice întreg } n.$$

În particular, pentru $n = -1$:

$$(r, x)^{-1} = \frac{1}{(r, x)} = \left(\frac{1}{r}, -x \right).$$

■ Folosind forma trigonometrică $z = r(\cos x + i \sin x)$, avem:

$$\begin{aligned} & r(\cos x + i \sin x) \cdot r'(\cos x' + i \sin x') = \\ & = rr' \cos(x + x') + i \sin(x + x'), \\ & \frac{r(\cos x + i \sin x)}{r'(\cos x' + i \sin x')} = \frac{r}{r'} [\cos(x - x') + i \sin(x - x')], \\ & [r(\cos x + i \sin x)]^n = r^n (\cos nx + i \sin nx). \end{aligned}$$

3.3.8. Exemple de calcul

1. Se ştie: $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Să determinăm $\text{Arg } j^2$, $\text{Arg } j^3$.

Avem:

$$j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3},$$

de unde:

$$j^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}, \text{ şi } \text{Arg } j^2 = \frac{4\pi}{3},$$

sau:

$$j^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Se observă: $j^2 = \bar{j}$;

avem în afară de aceasta:

$$j^3 = \cos 3 \cdot \frac{2\pi}{3} + i \sin 3 \cdot \frac{2\pi}{3},$$

rezultă:

$$j^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi,$$

sau:

$$j^3 = 1 \text{ şi } \text{Arg } j^3 = 0.$$

2. Să determinăm numerele $|z|$ şi $\text{Arg } z$ ale lui $z = (1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$.

Avem:

$$(1 + i\sqrt{3}) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right],$$

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right];$$

de unde:

$$|z| = 4 \text{ şi } \text{Arg } z = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă:

$$z = 4i.$$

Calculând direct produsul indicat, se găsește de asemenea $z = 4i$.

3. Să determinăm numerele $|z|$ și $\text{Arg } z$ ale lui $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$.

După calculele precedente, avem:

$$|z| = \frac{2}{2} = 1 \text{ și } \text{Arg } z = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

rezultă:

$$z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \text{ sau } z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Calculând direct cîțul indicat, se găsește desigur acest rezultat.

4. Să determinăm modulul și argumentul lui $z = (1 + i\sqrt{3})^{122}$.

Se știe că: $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$;

de unde:

$$|z| = 2^{122},$$

și:

$$\arg z = \frac{122\pi}{3}.$$

Să stabilim determinarea principală a lui $\arg z$:

$$\frac{122\pi}{3} = 40\pi + \frac{2\pi}{3},$$

de unde:

$$\text{Arg } z = \frac{2\pi}{3},$$

rezultă:

$$z = 2^{122} \left[\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right],$$

$$z = 2^{122} \cdot j.$$

EXERCIȚII

~~Ex~~ Exercițiu rezolvat

Să se determine modulul și argumentul următoarelor numere complexe:

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}; \quad z_2 = 1 - i; \quad z = \frac{z_1}{z_2}.$$

Să se deducă $\cos \frac{\pi}{12}$ și $\sin \frac{\pi}{12}$.

1° Avem:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right), \quad z_2 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right);$$

de unde:

$$|z_1| = \sqrt{2} \quad \text{și} \quad \text{Arg } z_1 = \frac{11\pi}{6},$$

$$|z_2| = \sqrt{2} \quad \text{și} \quad \text{Arg } z_2 = \frac{7\pi}{4},$$

sau

$$|z| = 1 \quad \text{și} \quad \text{Arg } z = \frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Numărul z se scrie deci sub formă trigonometrică:

$$z = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}.$$

2° Să calculăm $z = \frac{z_1}{z_2}$ folosind regulile de calcul definite pe corpul $\mathbb{C}$:

$$z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1+i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1-i)}{2(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

3° Compararea celor două rezultate obținute, implică:

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Exercițiu de aplicație imediată

Să se determine modulul și argumentul următoarelor numere complexe:

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 - i, \quad z = \frac{z_1}{z_2}.$$

Să se deducă $\cos \frac{7\pi}{12}$ și $\sin \frac{7\pi}{12}$.

EXERCIȚII

3.1. Să se pună sub formă normală și sub formă trigonometrică:

a) $\frac{1+i}{1-j^2}; \frac{(1+i)^3}{(1-i)} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}; \frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2}.$

b) $\frac{[\cos a + i(1 + \sin a)]^3}{1 - \sin 3a + i \cos 3a}. \quad \left(\text{Se va putea pune } \varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$

3.2. Să se pună sub formă trigonometrică numărul complex:

$$z = \frac{(1 + i\sqrt{3})(\sin x + i \cos x)}{2(1-i)(\cos x - i \sin x)}, \quad x \text{ număr real.}$$

3.3. Să se calculeze:

a) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right)^3; \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{32}; (\sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2})^8;$

b) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}; \left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2} \right)^{31}; \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i} \right)^{1972},$

c) $(1+i)^{20}; (1-i)^{20}; \frac{(-1+i\sqrt{3})^{12}}{(1+i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{12}}{(1-i)^{20}}.$

3.4. Să se calculeze modulul și argumentul lui:

$$a) z = \frac{1}{1 + i \operatorname{tg} \alpha}; \quad z_0 = \frac{1}{1 + i \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}; \quad z_1 = \frac{1}{1 + i \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}}.$$

$$b) Z = \frac{z - z_p}{z - z_1}, \quad \text{cu } z = \frac{1 + ix}{1 + i \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + ix \left(1 + i \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \right)}, \quad x \text{ real.}$$

3.5. Să se calculeze modulul și argumentul lui:

$$a \frac{1 + ib}{1 - ib}, \quad a \text{ și } b \text{ fiind numere reale.}$$

3.6. Să se calculeze modulul și argumentul lui:

$$\alpha = i + \sqrt[3]{3}; \quad \beta = 2i - \alpha; \quad \gamma = 2i + \alpha; \quad \delta = \frac{\gamma}{\beta}.$$

3.7. Să se calculeze modulul și argumentul lui:

$$z = \frac{i - \sqrt[3]{3}}{(i + \sqrt[3]{3})^3}.$$

3.8. Să se pună sub formă trigonometrică următoarele produse:

$$(1 + i\sqrt[3]{3})(1 + i)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$(1 - i\sqrt[3]{3})(1 - i)(\cos \varphi - i \sin \varphi),$$

φ fiind un număr real fixat.

3.9. Să se pună sub formă trigonometrică:

$$\frac{(1 + i\sqrt[3]{3})(\sin x + i \sin x)}{2(1 - i)(\cos x - i \sin x)},$$

x fiind un număr real fixat.

3.10. Să se demonstreze că orice număr complex de modul 1 se poate pune sub forma:

$$\frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i} \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

3.11. Să se pună sub formă normală numărul complex z :

$$z = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{4\pi}{9} + i \sin \frac{4\pi}{9}}.$$

Să se calculeze z^3 .

3.12. Să se calculeze:

$$\frac{\cos x - i \sin x}{\sin y - i \cos y}; \quad \frac{\cos x - i \sin x}{\sin x - i \cos x},$$

x și y fiind numere reale fixate.

8.13. Știind că $|z_1| = |z_2|$ și că $z_1 z_2$ este diferit de -1 , să se exprime în funcție de argumentele θ_1 și θ_2 ale lui z_1 și z_2 :

$$Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}.$$

8.14. Fie z un număr complex de modul 1 a cărui determinare principală a argumentului este α . Să se calculeze modulul și argumentul numărului:

$$Z = 1 + z + z^2.$$

8.15. Considerind produsul $(\sin 3x + i \sin x)(\cos 3x + i \cos x)$, să se stabilească identitatea:

$$(\sin^2 3x + \cos^2 x)(\cos^2 3x + \cos^2 x) = \sin^2 2x \cdot (4 \cos^2 2x + \cos^2 4x).$$

8.16. Se dă:

$$A = (1 + i)^n, \quad B = (1 + i)^n.$$

Folosind forma trigonometrică, să se dea diferitele valori ale lui A și B după valorile întregului natural n .

8.17. Fie numărul complex u ($|u| = 1$) și fie $A = (1 + u)^n$ și $B = (1 + \bar{u})^n$. Să se calculeze în două feluri diferite A și B și să se deducă sumele:

$$\mathcal{O}_1 = C_n^0 + C_n^1 \cos \alpha + C_n^2 \cos 2\alpha + \dots$$

$$\mathcal{O}_2 = C_n^1 \sin \alpha + C_n^2 \sin 2\alpha + \dots$$

8.18. Pentru ce valori ale întregului natural n expresia $(i + \sqrt{3})^n$ este: un număr real pozitiv? un număr real negativ? un număr pur imaginar?

8.19. Se dă expresia:

$$A = (1 + i)^n - (1 - i/\sqrt{3})^n.$$

Să se demonstreze că A permite să se calculeze suma:

$$S = C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - 27C_n^7 + \dots$$

Pentru ce valori ale întregului natural n avem $S = 0$?

8.20. Folosind expresia $B = (1 + i/\sqrt{3})^n + (1 - i/\sqrt{3})^n$, să se calculeze:

$$1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - 27C_n^6 + \dots$$

8.21. Să se calculeze sumele:

$$\mathcal{O}_1 = \sum_{k=1}^n \sin kx; \quad \mathcal{O}_2 = \sum_{k=1}^n \cos kx.$$

8.22. Să se calculeze sumele:

$$\mathcal{O}_1 = \sum_{k=1}^n a^{k-1} \cos kx; \quad \mathcal{O}_2 = \sum_{k=1}^n a^{k-1} \sin kx.$$

8.23. Să se calculeze, pentru $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{O}_n = 1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \dots + \frac{\cos 2nx}{\cos^{2n} x},$$

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{\cos kx}.$$

(Ar trebui format: $-1 + \mathcal{O}_n + i \Sigma_n$)

3.24. Fie expresia definită prin:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cos(a_k + x),$$

unde a_k sînt numere reale.

Să se demonstreze că:

$$[f(x) = 0 \quad \text{și} \quad f(x') = 0] \implies x \equiv x' \pmod{\pi}$$

(Se poate demonstra că dezvoltînd pe $f(x)$ se poate scrie:

$$f(x) = A \cos x - B \sin x,$$

și se va forma $A + iB$.)

3.25. Se notează cu $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$ următoarele sume:

$$\mathcal{O}_1 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots;$$

$$\mathcal{O}_2 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots;$$

$$\mathcal{O}_3 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots$$

1° Să se demonstreze că:

$$\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 + \mathcal{O}_3 = 2^n,$$

$$\mathcal{O}_1 + j\mathcal{O}_2 + j^2\mathcal{O}_3 = (1+j)^n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}.$$

2° Să se deducă în funcție de n , valorile lui: $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$.

$$\left(\text{Se reamintește că } j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și că } 1 + j + j^2 = 0. \right)$$

3.4. APLICAȚII TRIGONOMETRICE

3.4.1. Calcularea lui $\cos nx$ și al lui $\sin nx$, x fiind real

$$(n = 2, n = 3, n = 4)$$

Folosirea combinată a formulei lui Moivre și a formulei binomului permite să se exprime, pentru orice întreg natural, $\cos nx$ și $\sin nx$ în funcție de numerele $\cos x$ și $\sin x$.

■ $n = 2$.

Avem:

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x,$$

sau:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2i \cos x \sin x = \cos 2x + i \sin 2x,$$

de unde:

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \\ &= 2\cos^2 x - 1 = \\ &= 1 - 2\sin^2 x, \\ \sin 2x &= 2\sin x \cos x.\end{aligned}$$

Observație. $\cos 2x$ se exprimă rațional în funcție de $\cos x$, dar $\sin 2x$ nu se exprimă rațional în funcție de $\sin x$.

■ $n = 3$.

Avem:

$$\cos 3x + i\sin 3x = (\cos x + i\sin x)^3.$$

Cum:

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^3 &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x - \\ &- 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x\end{aligned}$$

rezultă:

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x, \\ \sin 3x &= 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x\end{aligned}$$

și după transformare:

$$\begin{aligned}\cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x, \\ \sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

Observație. $\cos 3x$ se exprimă rațional în funcție de $\cos x$ și $\sin 3x$ se exprimă rațional în funcție de $\sin x$.

Calcularea $\operatorname{tg} 3x$.

Avem:

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x} = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Se constată că $\operatorname{tg} 3x$ se exprimă ca o funcție rațională în $\operatorname{tg} x$.

■ $n = 4$.

Coeficienții dezvoltării binomului pentru $n = 4$ sînt:

$$C_4^0 = 1; C_4^1 = 4; C_4^2 = 6; C_4^3 = 4; C_4^4 = 1;$$

puterile lui i sînt:

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$$

După formula lui Moivre, avem:

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x.$$

Se obține, în dezvoltarea lui $z = (\cos x + i\sin x)^4$, partea reală și partea imaginară a numărului complex z :

$$\mathcal{R}(z) = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x = \cos 4x,$$

$$\mathcal{I}(z) = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x = \sin 4x;$$

de unde:

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2,$$

și:

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.$$

Formula:

$$\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$$

se poate scrie:

$$\sin 4x = 4\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x),$$

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x,$$

care nu se exprimă rațional în funcție de $\sin x$.

Calcularea $\operatorname{tg} 4x$.

Se obține:

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{4\operatorname{tg} x - 4\operatorname{tg}^3 x}{1 - 6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}.$$

3.4.2. Complement: studiul cazului general

În cazul general, pentru n întreg natural, se pot calcula numerele $\cos nx$ și $\sin nx$ în funcție de numerele $\cos x$ și $\sin x$ pentru orice real x fixat.

Formula binomului se poate scrie pentru orice pereche (a, b) de elemente ale unui inel comutativ:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

cu:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Avem:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^n i^k C_n^k \cos^{n-k} x \sin^k x,$$

cu:

$$i^{2p} = (-1)^p \quad \text{și} \quad i^{2p+1} = (-1)^p i.$$

Formula lui Moivre:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

permite să se obțină prin egalarea respectiv a părților reale și a părților imaginare:

$$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - C_n^6 \cos^{n-6} x \sin^6 x + \dots,$$

$$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - C_n^7 \cos^{n-7} x \sin^7 x + \dots$$

Ultimul termen al fiecărei expresii depinde de paritatea întregului natural n .

EXERCITII

■ **Exercițiu rezolvat**

Să se demonstreze că:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5}.$$

1° Avem:

$$z = (\cos x + i \sin x)^5 = \cos 5x + i \sin 5x.$$

Dezvoltând binomul $(\cos x + i \sin x)^5$. Se obține:

$$\Re(z) = \cos^5 x - C_5^2 \cos^3 x \sin^2 x + C_5^4 \cos x \sin^4 x,$$

$$\Re(z) = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x,$$

$$\Im(z) = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$

Rezultă, în particular: $\sin 5x = \sin^5 x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos^4 x \sin x$, și, dacă $\sin x$ este diferit de zero:

$$\sin 5x = \sin^5 x [5 \operatorname{ctg}^4 x - 10 \operatorname{ctg}^2 x + 1].$$

2° Să determinăm numerele reale x , din intervalul $[0, \pi]$, astfel încît:

$$\sin 5x = 0 \quad \text{și} \quad \sin x \neq 0.$$

Se obține mulțimea $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = \left\{ \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5} \right\}.$$

Pentru fiecare din numerele reale $\frac{\pi}{5}$ și $\frac{2\pi}{5}$, rezultă că:

$$5 \operatorname{ctg}^4 x - 10 \operatorname{ctg}^2 x + 1 = 0,$$

de unde, folosind produsul rădăcinilor acestei ecuații:

$$\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5} \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{5},$$

sau:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{5} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{5} = 5$$

și, în final:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5},$$

căci:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} > 0 \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} > 0.$$

Exercițiu de aplicație imediată. Folosind $\sin 5x$ să se stabilească că:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3.4.3. Liniarizarea polinoamelor trigonometrice

Fie x un real fixat și fie numerele complexe conjugate:

$$z = \cos x + i \sin x, \quad \bar{z} = \cos x - i \sin x = \frac{1}{z}.$$

Avem:

$$\left. \begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (1) \\ \sin x &= \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad (2) \end{aligned} \right\} \text{ I}$$

Să considerăm funcția f , definită pe U^* , astfel încît:

$$f(z) = \left(z + \frac{1}{z} \right)^p \left(z - \frac{1}{z} \right)^q.$$

Avem:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \left(\frac{1}{z} + z\right)^p \left(\frac{1}{z} - z\right)^q, \\ f\left(\frac{1}{z}\right) &= (-1)^q \left(\frac{1}{z} + z\right)^p \left(z - \frac{1}{z}\right)^q, \end{aligned}$$

de unde:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^q f(z).$$

Folosind formula binomului este posibil să se dezvolte $f(z)$.

Dezvoltarea obținută conține termeni în z^λ și în $\frac{1}{z^\mu}$ cu:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \leq p + q, \\ 0 &\leq \mu \leq p + q. \end{aligned}$$

1° Dacă q este par, avem:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z).$$

Oricărui termen în z^λ îi corespunde un termen cu același coeficient real a_λ în $\frac{1}{z^\lambda}$ și se obține:

$$a_\lambda \left(z^\lambda + \frac{1}{z^\lambda} \right) = 2a_\lambda \cos \lambda x.$$

Expresia $y = \cos^p x \sin^q x$ se exprimă printr-o sumă de termeni de tipul $a_\lambda \cos \lambda x$.

2° Dacă q este impar, avem:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = -f(z).$$

Oricărui termen z^λ îi corespunde un termen cu același coeficient real a_λ în $\frac{1}{z^\lambda}$ și se obține:

$$a_\lambda \left(z^\lambda - \frac{1}{z^\lambda} \right) = 2a_\lambda i \sin \lambda x.$$

Expresia $y = \cos^p x \sin^q x$ se exprimă printr-o sumă de termeni de tipul $a_\lambda \sin \lambda x$ (exemplul precedent).

EXEMPLU. Să se liniarizeze monomul $y = \cos x \sin^4 x$. Se obține succesiv:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \cdot \frac{1}{2^4 i^4} \left(z - \frac{1}{z} \right)^4, \\ y &= \frac{1}{2^5} \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(z^4 - 4z^2 + 6 - \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right), \\ z &= \frac{1}{2^5} \left[\left(z^5 + \frac{1}{z^5} \right) - 3 \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) + 2 \left(z + \frac{1}{z} \right) \right], \\ y &= \frac{1}{2^4} (\cos 5x - 3 \cos 3x + 2 \cos x). \end{aligned}$$

Exponentul lui $\sin x$ în expresia dată fiind par, s-a obținut o sumă algebrică de termeni de tipul $\cos \lambda x$.

3.4.4. Notăția e^{xi}

1. La numărul 3.2.1, am stabilit existența homomorfismului surjectiv θ de la grupul aditiv $\mathbb{R}$ la grupul multiplicativ U al numerelor complexe de modul 1, homomorfism al cărui nucleu este $2\pi\mathbb{Z}$.

Avem:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\theta} U$$

$$x \mapsto \theta(x) = u,$$

sau:

$$\theta(x) = \cos x + i \sin x,$$

și pentru orice pereche (x, x') din $\mathbb{R}^2$:

$$\theta(x + x') = u u',$$

cu:

$$\theta(x') = u'.$$

2. Să punem:

$$\theta(x) = e^{ix},$$

sau:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

e fiind baza funcției exponențiale, izomorfism între grupul aditiv $\mathbb{R}$ și grupul multiplicativ $\mathbb{R}^{+*}$ (Analiză, Terminală CDE, nr. 8.2.1). Această notație dă în particular:

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1 \Leftrightarrow e^0 = 1,$$

$$\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \Leftrightarrow e^{i \frac{\pi}{2}} = i,$$

$$\cos \pi + i \sin \pi = -1 \Leftrightarrow e^{i\pi} = -1.$$

Relațiile următoare:

$$(\cos x + i \sin x) (\cos x' + i \sin x') = \cos (x + x') + i \sin (x + x')$$

$$\cos x - i \sin x = \bar{u} = \frac{1}{u}$$

sînt traduse respectiv prin:

$$e^{ix} \cdot e^{ix'} = e^{i(x+x')},$$

$$e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}}.$$

3. Din relațiile:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

rezultă:

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}),$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}).$$

Aceste formule, numite formulele lui Euler, sînt adesea folosite în calcule trigonometrice. (Să se reia exercițiile de la numerele 3. 21 la 3. 24)

EXEMPLU. Să se liniarizeze:

$$y = \cos x \sin^4 x.$$

Se obține:

$$y = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \frac{1}{(2i)^4} (e^{ix} - e^{-ix})^4$$

$$y = \frac{1}{2^5} (e^{2ix} - e^{-2ix}) (e^{ix} - e^{-ix})^3$$

$$y = \frac{1}{2^5} (e^{2ix} - e^{-2ix}) (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})$$

$$y = \frac{1}{2^5} [(e^{5ix} + e^{-5ix}) - 3(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 2(e^{ix} + e^{-ix})]$$

$$y = \frac{1}{2^4} (\cos 5x - 3 \cos 3x + 2 \cos x).$$

4. Să punem prin definiție:

$$\exp(a + ib) = e^a (\cos b + i \sin b),$$

pe care o notăm:

$$e^{a+ib}.$$

Numărului complex $z = a + ib$, facem să-i corespundă numărul complex $e^a (\cos b + i \sin b)$: acest homomorfism de la $\mathbb{C}$ în $\mathbb{C}^*$ prelungește homomorfismul „exp” al lui $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}^{+*}$. Se va nota că:

$$|z| = e^a \text{ și } a = \operatorname{Log}|z|.$$

Notă. — În Analiză, Terminala CDE (nr. 9.3.3) se va găsi o altă introducere a noțiunii e^{ix} .

EXERCIȚII

Să se aducă la forma liniară monoamele sau polinoamele următoare:

3.26. $\cos^3 x$; $\sin^3 x$; $\cos^4 x$; $\sin^4 x$.

3.27. $\cos^4 x \sin x$; $\cos^4 x \sin^3 x$; $\sin^2 x \cos^3 x$.

3.28. $3 \cos^3 x \sin^3 x - 2 \cos^4 x \sin^2 x$.

3.29. Să se exprime liniar:

$$2^{2m} \cos^{2m} x; (-1)^m 2^{2m} \sin^{2m} x, m \text{ întreg natural.}$$

3.30. Să se exprime liniar:

$$2^{2m+1} \cos^{2m+1} x; (-1)^{m+1} 2^{2m+1} \sin^{2m+1} x, m \text{ întreg natural.}$$

PROBLEME

3.31. 1° Se consideră expresia:

$$\cos 2x = 2X^2 - 1 \quad (\cos x = X).$$

Să se rezolve în două feluri ecuația definită prin $\cos 2x = 0$ și să se demonstreze că dând pe $\cos x$ se poate determina $\cos 2x$ fără echivoc. Se întâmplă același lucru pentru $\sin 2x$ când se dă $\sin x$?

2° Se consideră expresia:

$$\cos 3x = 4X^3 - 3X \quad (\cos x = X).$$

Să se demonstreze că darea lui $\cos x$ determină pe $\cos 3x$ fără echivoc și că același lucru se întâmplă cu $\sin 3x$ când se dă $\sin x$.

3° Să se demonstreze că dându-se $\cos x$ se determină $\cos nx$ fără echivoc pentru orice întreg natural n și dându-se $\sin x$ se determină $\sin nx$, dacă și numai dacă n este impar. Ce concluzie se poate trage cu privire la expresia lui $\cos nx$ și, respectiv, a lui $\sin nx$, în funcție de $\cos x$ și $\sin x$?

3.32. 1° Să se exprime $\sin 9x$ în funcție de $\sin x$ și de $\cos x$.

2° Să se stabilească că $\sin 9x = 0$ și $\cos x \neq 0$ este echivalent cu:

$$C_9^1 \operatorname{ctg}^8 x - C_9^3 \operatorname{ctg}^6 x + C_9^5 \operatorname{ctg}^4 x - C_9^7 \operatorname{ctg}^2 x + C_9^9 = 0.$$

3° Să se demonstreze că:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9} = 3.$$

4° Să se demonstreze, folosind aceeași metodă, că:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{13} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{13} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{13} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{13} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{13} \operatorname{tg} \frac{6\pi}{13} = \sqrt{13}.$$

3.33. Să se dezvolte $x(x+1)^n$, n întreg natural. Să se deducă următoarele sume:

$$S_1 = \cos x + C_n^1 \cos 2x + \dots + C_n^{n-1} \cos nx + \cos (n+1)x,$$

$$S_2 = \sin x + C_n^1 \sin 2x + \dots + C_n^{n-1} \sin nx + \sin (n+1)x.$$

3.34. 1° Să se exprime $\sin 3a$ și $\sin 5a$ în funcție de $\sin a$. Să se scrie relația (E) care leagă $x = \sin \frac{a}{5}$ și $\alpha = \sin a$.

2° Transformând produsul p într-o sumă, să se calculeze:

$$p = \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{7\pi}{30} \sin \frac{13\pi}{30} \sin \frac{19\pi}{30} \sin \frac{25\pi}{30}.$$

3° Să se regăsească valoarea lui p cu ajutorul ecuației definite de (E) punind $\alpha = \frac{1}{2}$.

4° Fie m un întreg natural impar. Să se demonstreze că $\sin mx$ se exprimă printr-un polinom P_m în $X = \sin x$ care conține numai puteri impare (recurență). Să se exprime P_7 în funcție de X .

5° Se pune:

$$u_1 = 1, u_2 = \frac{\sin 2a}{\sin a}, \dots, u_n = \frac{\sin na}{\sin a} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Să se demonstreze că:

$$(u_n)^2 - u_{n-1}u_{n+1} = 1.$$

6° Se consideră polinoamele:

$$Q_1 = 1, Q_2 = x, Q_3 = xQ_2 - Q_1, \dots, Q_{n+1} = xQ_n - Q_{n-1},$$

cu: $-\pi \leq a \leq \pi$. Se pune $x = 2 \cos a$.

Să se exprime $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ cu ajutorul lui $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$.

4. APLICAȚIILE NUMERELOR COMPLEXE

4.1. *Aplicațiile geometrice ale numerelor complexe.*

4.2. *Rădăcinile de gradul n ale unui număr complex.*

4.3. *Rezolvarea ecuațiilor în corpul $\mathbb{C}$.*

4.1. Aplicațiile geometrice ale numerelor complexe

4.1.1. Planul vectorial euclidian și argumentul unui număr complex

Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian orientat, identificat cu corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe cu ajutorul unei baze $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ortonormate directe.

■ Fie z un număr complex nenul al cărui vector imagine este $\vec{v}$ și fie φ o măsură a unghiului $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})}$:

$$\varphi \in \mu(\widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})});$$

(se citește: φ element al măsurii unghiului $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})}$).

Vectorului $\vec{v}$ îi corespunde o pereche unică (a, b) de numere reale astfel încât:

$$\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2.$$

Avem:

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = a \text{ și } \vec{v} \cdot \vec{e}_2 = b,$$

de unde:

$$a = \|\vec{v}\| \cos \widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})},$$

$$b = \|\vec{v}\| \sin \widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})},$$

fie încă:

$$a = \|\vec{v}\| \cos \varphi,$$

$$b = \|\vec{v}\| \sin \varphi.$$

■ Numărul complex z , afix al vectorului $\vec{v}$, este astfel încît

$$z = a + ib$$

sau:

$$z = \|\vec{v}\| (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad |z| = \|\vec{v}\|. \quad (1)$$

Numărul complex $\cos \varphi + i \sin \varphi$ are modulul 1.

Or, orice număr complex nenul z se poate scrie:

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad \alpha \in \arg z. \quad (2)$$

Comparînd egalitățile (1) și (2) și ținînd seama de faptul că:

$$|z| = \|\vec{v}\|,$$

rezultă următoarele egalități:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \cos \alpha \\ \sin \varphi = \sin \alpha. \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Relațiile (3) și (4) arată că:

a) numărul real α este o măsură a unghiului $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})}$;

b) numărul real φ este un argument al numărului z .

Se poate trage concluzia:

Într-un plan vectorial euclidian $\vec{P}$, înzestrat cu o bază ortonormată directă $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, fie $\vec{v}$ vectorul imagine al numărului complex z , nenul.

Avem, între $\vec{v}$ și z , următoarele relații:

$$|z| = \|\vec{v}\|;$$

$$\arg z = \mu \widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})}.$$

■ În cazul în care numărul z este un element al grupului multiplicativ U , al numerelor complexe de modul 1, mulțimea vectorilor imagini ai numerelor z este cercul trigonometric vectorial notat $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$, $\mathcal{U}$ fiind mulțimea vectorilor unitari ai lui $\vec{P}$ și $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ fiind o bază ortonormată directă.

Aplicația f , care face ca oricărui element u din U de vector imagine $\vec{v}$, să-i corespundă unghiul $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{v})}$, este un izomorfism între grupul multiplicativ U și grupul aditiv $\mathcal{A}$ al unghiurilor.

4.1.2. Planul afin euclidian și argumentul unui număr complex

■ Într-un plan afin euclidian orientat P , identificat cu $\mathbb{C}$ cu ajutorul reperului ortonormat direct $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$, dacă M este punctul imagine al numărului complex z , rezultă, printr-un raționament identic cu precedentul, că:

$$\begin{cases} |z| = \|\vec{OM}\| = d(O, M) \\ \arg z = \mu(\vec{OA}, \vec{OM}). \end{cases}$$

Se poate trage concluzia:

1° Când se exprimă z sub forma carteziană:

$$z = x + iy,$$

x și y sint coordonatele punctului M și:

$$\|\vec{OM}\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\overline{OP} = x,$$

$$\overline{OQ} = y \quad (\text{fig. 1})$$

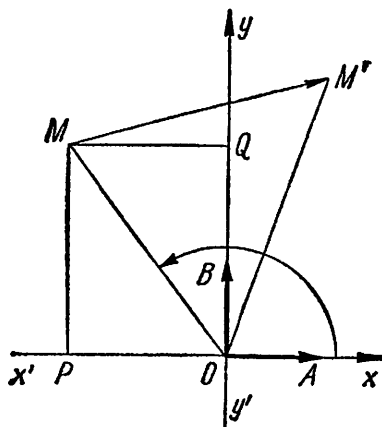


FIG. 1

2° Cînd se exprimă z sub forma trigonometrică:

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad \alpha \in \arg z,$$

α este o măsură a unghiului $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ și avem:

$$\arg z = \mu(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}).$$

■ În planul afin euclidian orientat P , identificat cu $\mathbb{C}$, subgrupul multiplicativ U al lui $\mathbb{C}^*$ are ca imagine cercul trigonometric al planului afin.

■ Fie două puncte distincte M și M' , respectiv de afixe z și z' ; vectorul imagine $\overrightarrow{MM'}$ are ca afix $Z = z' - z$; de unde:

$$\arg Z = \arg(z' - z),$$

$$\arg Z = \mu(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}).$$

4.1.3. Reprezentări de numere complexe

EXERCIIU

■ Imagini de numere complexe

1. În planul afin identificat cu $\mathbb{C}$, cu ajutorul reperului ortonormat direct

$\mathcal{Q} = (O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, să reprezentăm imaginile respective ale elementelor mulțimii $E = \{1, j, j^2\}$.

Avem:

$$|j| = |j^2| = 1.$$

Punctele imagini A, M, N , respectiv de afixe $1, j, j^2$, sînt deci elemente ale figurii cercului trigonometric din planul afin (fig. 2)

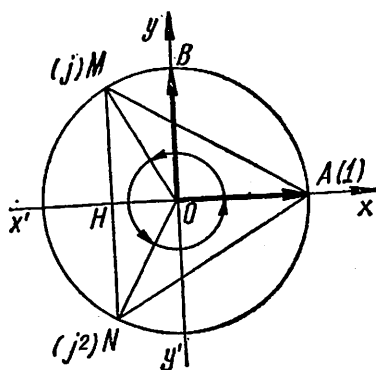


FIG. 2

Avem:

$$a) \operatorname{Arg} j = \frac{2\pi}{3};$$

o măsură a unghiului $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ este $\frac{2\pi}{3}$,

$$b) \operatorname{Arg} j^2 = \frac{4\pi}{3};$$

o măsură a unghiului $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON})$ este $\frac{4\pi}{3}$.

Să observăm că:

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM});$$

deci, o măsură a unghiului $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ este $\frac{2\pi}{3}$ și:

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OA}),$$

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{ON}\|.$$

Triunghiul definit de $\{A, M, N\}$ este un triunghi echilateral; tripletul (A, M, N) este un triunghi echilateral în sens direct (fig.2). Se stabilește de asemenea că mulțimea imaginilor elementelor lui $F = \{1, i, -1, -i\}$ definește un pătrat.

■ De la planul afin P la corpul $\mathbb{C}$.

Planul afin euclidian P este înzestrat cu un reper ortonormat direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Se spune:

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{e}_2 = \overrightarrow{OB} \quad \text{și} \quad P^* = P - \{0\}.$$

EXERCIȚIU

Exercițiu rezolvat. (Se vor folosi notațiile de mai sus.)

Fie k un număr real strict pozitiv. Se consideră transformarea punctuală T_k care, punctului m al lui P^* , îi asociază punctul M al lui P^* , definit de:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Om}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) \\ \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \|\overrightarrow{Om}\| = k. \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Să se exprime numărul Z , afix al punctului M , în funcție de numărul complex z , afix al punctului m .

Avem:

$$\arg z = \mu(\vec{OA}, \vec{Om}),$$

$$\arg Z = \mu(\vec{OA}, \vec{OM}).$$

Relațiile (1) și (2) implică respectiv relațiile:

$$\begin{cases} \arg z = -\arg Z & (1') \\ |Z| \cdot |z| = k, & (2') \end{cases}$$

care sint echivalente cu:

$$Z = \frac{k}{z}. \quad (3)$$

Această relație definește pe $\mathbb{C}^*$ o aplicație:

$$f_k : z \longmapsto \frac{k}{z},$$

care este o involuție a lui $\mathbb{C}^*$.

Să observăm că relația (3) permite să se exprime perechea (X, Y) a coordonatelor lui M în funcție de coordonatele x și y ale lui m :

$$Z = \frac{k}{z} = \frac{k}{x+iy} \bar{z} = \frac{k\bar{z}}{|z|^2},$$

sau:

$$(X, Y) = \left(\frac{kx}{x^2 + y^2}, \frac{-ky}{x^2 + y^2} \right).$$

■ De la corpul $\mathbb{C}$ la planul afin P identificat cu $\mathbb{C}$.

Planul afin euclidian P este înzestrat cu un reper ortonormat direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Se spune:

$$\vec{e}_1 = \vec{OA}, \quad \vec{e}_2 = \vec{OB} \quad P^* = P - \{0\}.$$

EXERCİȚIU

■ *Exercițiu rezolvat*

Cu notațiile de mai sus, să se determine mulțimea punctelor M de afix z astfel ca punctele B, M, M' , de afixe i, z , iz să fie coliniare. (Punctele B, M, M' sint distincte.)

Vectorii $\vec{BM}'$, $\vec{BM}$, de afixe respective $iz - i$, $z - i$, sint liniar dependenți; de unde:

$$\vec{BM}' = \lambda \vec{BM}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

sau:

$$iz - i = \lambda (z - i). \quad (1)$$

Relația (1) implică în particular:

$$\begin{aligned} \arg (iz - i) &= \arg \lambda + \arg (z - i), \\ \arg i + \arg (z - 1) &= \arg \lambda + \arg (z - i), \\ \arg (z - 1) - \arg (z - i) &= \arg \lambda - \arg (i). \end{aligned}$$

Două cazuri sînt de cercetat:

a) $\lambda > 0$.

De unde:

$$\arg \lambda = \overset{\circ}{0}, \quad \overset{\circ}{0} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};$$

or:

$$\arg i = \frac{\overset{\circ}{\pi}}{2};$$

de unde:

$$\arg \lambda - \arg i = \frac{\overset{\circ}{3\pi}}{2},$$

și:

$$\arg (z - 1) - \arg (z - i) = \frac{\overset{\circ}{3\pi}}{2};$$

sau, în măsură de unghi:

$$\mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) - \mu(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BM}}) = \frac{\overset{\circ}{3\pi}}{2}, \quad \mu(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}) = \frac{\overset{\circ}{3\pi}}{2}.$$

O măsură a unghiului $(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MA}})$ este $\frac{3\pi}{2}$. (2)

b) $\lambda < 0$.

De aici:

$$\arg \lambda = \overset{\circ}{\pi}, \quad \overset{\circ}{\pi} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Se obține atunci:

$$\mu(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}) = \frac{\overset{\circ}{\pi}}{2}.$$

O măsură a unghiului $(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}})$ este $\frac{\pi}{2}$. (3)

Rezultă că reuniunea cazurilor a) și b) implică pentru orice punct M :

$$\mu(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}) = \frac{\pi}{2}, \text{ și reciproc.}$$

Mulțimea punctelor M , astfel încât punctele distincte B, M, M' sînt coliniare este cercul Γ de diametru $[A, B]$ fără elementele A și B (fig. 3).

■ Interpretarea în P a produsului mn a două numere complexe nenule.
Fie M și N punctele respectiv de afixe m și n . Numărul complex $q = mn$ are ca punct imagine pe Q (fig. 4).

Avem:

$$q = mn,$$

$$\text{de unde: } \begin{cases} |q| = |m| \cdot |n| \\ \arg q = \arg m + \arg n, \end{cases}$$

$$\text{sau: } \begin{cases} \|\vec{OQ}\| = \|\vec{OM}\| \cdot \|\vec{ON}\| \\ \text{sau } OQ = OM \cdot ON \\ \mu(\vec{OA}, \vec{OQ}) = \mu(\vec{OA}, \vec{OM}) + \mu(\vec{OA}, \vec{ON}). \end{cases}$$

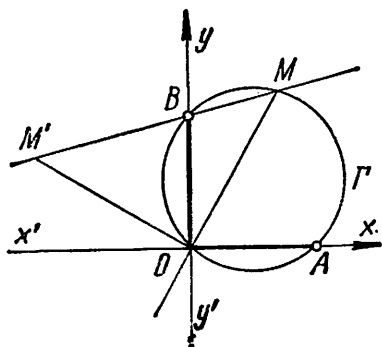


FIG. 3

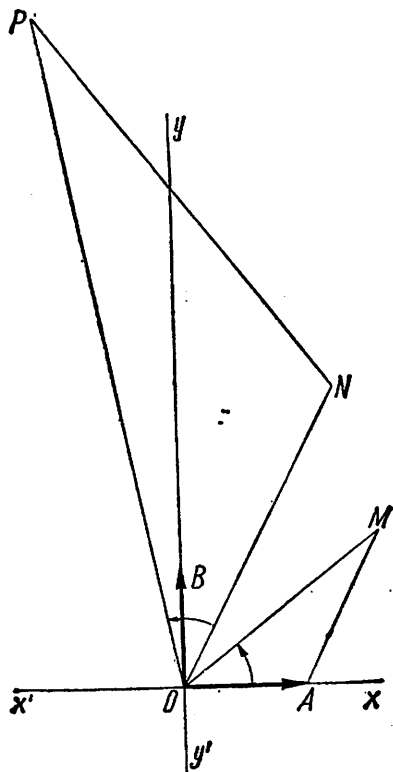


FIG. 4

Se deduce:

$$\frac{OQ}{OM} = \frac{ON}{OA} \quad (OA = 1), \quad (1)$$

și:

$$\widehat{(\vec{OA}, \vec{OQ})} = \widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})} + \widehat{(\vec{OA}, \vec{ON})},$$

sau:

$$\widehat{(\vec{ON}, \vec{OQ})} = \widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})}. \quad (2)$$

Vectorul $\overrightarrow{NQ}$ are ca afix pe $q - n$; or:

$$q - n = n(m - 1);$$

$m - 1$ are ca vector-imagines pe $\overrightarrow{AM}$; de unde:

$$NQ = ON : AM \Leftrightarrow \frac{NQ}{AM} = \frac{ON}{OA},$$

sau, ținând seama de relația (1):

$$\frac{OQ}{OM} = \frac{NQ}{AM} = \frac{ON}{OA}. \quad (3)$$

Pe de altă parte, relația:

$$\arg (q - n) = \arg n + \arg (m - 1)$$

implică succesiv:

$$\begin{aligned} \mu(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{NQ}) &= \mu(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) + \mu(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}), \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{NQ}) &= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}), \\ (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{NQ}) &= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}), \end{aligned} \quad (4)$$

sau:

$$(\overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{NO}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}). \quad (5)$$

Cu ajutorul relațiilor (2) și (4), se deduce:

$$(\overrightarrow{QN}, \overrightarrow{QO}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}).$$

Observații. — 1. Se poate, folosind comutativitatea produsului mn , să se stabilească alte relații de același tip.

2. Produsul mn va fi de asemenea interpretat în cursul studiului asemănărilor plane directe.

EXERCIȚII

În toate exercițiile sau problemele, se numește plan complex P planul afin euclidian înzestrat cu un reper ortonormat direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, identificat cu $\mathbb{C}$.

4.1. Să se studieze în planul complex P , aplicațiile de la $\mathbb{C}^*$ la $\mathbb{C}^*$ definite respectiv prin :

a) $z \longrightarrow \bar{z}$;

b) $z \longrightarrow \frac{1}{z}$;

c) $z \longrightarrow \frac{k}{z}$, k fiind un real nenul.

4.2. Se notează prin M, A, B respectiv imaginile în planul complex a trei numere z, a, b . Să se dea o interpretare geometrică modulului și argumentului numărului complex Z astfel încît:

$$Z = \frac{z - a}{z - b}.$$

Aplicație. Să se construiască punctul m de afix z astfel ca numărul $Z = \frac{z + 2i}{z - i}$ să fie astfel încît:

$$|Z| = 2 \text{ și } \operatorname{Arg} Z = \frac{\pi}{2}.$$

4.3. În planul complex P , punctul A are ca afix a , punctul M are ca afix pe z . Care este mulțimea punctelor M pentru care punctul M' de afix Z astfel încît $Z = \left(\frac{z}{z - a}\right)^3$ este:

a) un punct de pe axa numerelor reale?

b) un punct de pe axa numerelor pur imaginare?

4.4. Care este mulțimea punctelor M de afix z pentru care numărul $Z = \left(\frac{z}{z - 1}\right)^3$ este real?

4.5. Să se determine mulțimea punctelor M de afix z , astfel încît numărul complex $Z = \left(\frac{z + 1 + i}{2z + 1 - i}\right)^2$ să fie real. (Soluție analitică și soluție geometrică.)

4.6. Folosind faptul că o măsură a unghiului (AB, AC) este nulă dacă și numai dacă A, B, C sînt coliniare, să se demonstreze că a, b, c fiind respectiv afixe punctelor A, B, C , numărul complex $Z = \frac{b - a}{c - a}$ este real.

4.7. Punctele distincte A, B, C, D sînt cociclice dacă și numai dacă o măsură nenulă a unghiului (AB, AC) este egală cu o măsură a unghiului (DB, DC) . Să se demonstreze că a, b, c, d fiind respectiv afixe punctelor A, B, C, D , numărul complex $Z = \frac{b - a}{c - a} : \frac{b - d}{c - d}$ este real, fiecare din numerele $\frac{b - a}{c - a}, \frac{b - d}{c - d}$ nefiind reale.

4.8. Fie numărul complex $z = 1 + i\sqrt{3}$. Să se demonstreze că imaginile în planul complex ale lui $z, -z, z^3, \frac{2}{z}$ sînt situate pe un același cerc.

4.9. Fie $Z = \frac{1 - iz}{1 + iz}$. Care este mulțimea punctelor m de afix z dacă Z este real?

• Care este mulțimea punctelor m de afix z dacă Z este pur imaginar? (Soluție analitică și soluție geometrică.)

4.10. Fie $Z = \frac{z-4}{z+1}$. Să se determine, în planul complex, mulțimea imaginilor m ale numerelor complexe z astfel încît:

a) $|Z| = \sqrt{2}$;

b) $\text{Arg } Z = \frac{3\pi}{4}$.

4.11. Se consideră aplicația f definită prin:

$$z \mapsto z_1 = \frac{z+1}{z-1}, \quad z \in \mathbb{C} - \{1\}.$$

În planul complex, m este imaginea lui z , M este imaginea lui z_1 și punctele A și B au ca afixe respectiv pe -1 și 1 . Se notează T aplicația de la P la P , asociată aplicației f .

1° Să se stabilească că T este, pe o mulțime E , o involuție. Care este mulțimea punctelor m pentru ca $|z_1| = \sqrt{2}$?

2° Care este mulțimea punctelor m pentru ca realul $-\frac{\pi}{4}$ să fie un argument al lui z_1 ?

4.12. Să se determine modulul și argumentul numărului complex $z = \frac{1}{i + \lg \alpha}$, unde

α este un număr real diferit de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Care este în planul complex mulțimea punctelor M de afix z atunci cînd α variază?

Să se deducă o construcție simplă a punctului imagine A al lui $z_0 = \frac{1}{i + \lg \frac{7\pi}{8}}$.

4.13. Se dă relația $Z = z \frac{5z-4}{5-4z}$ și punctele următoare ale căror afixe sînt indicate în paranteze:

$$m(z), \quad M(Z), \quad A(1), \quad m_1(5z-4), \quad m_2(5-4z).$$

1° Să se demonstreze că punctele A, m, m_1, m_2 sînt coliniare.

2° Punctul μ are ca afix $\frac{1}{z}$ și punctul $B, \frac{4}{5}$. Care este mulțimea punctelor m pentru ca Z să fie real? (se va demonstra că B, μ, m sînt coliniare).

3° Care este mulțimea punctelor m pentru ca $|z| = |Z|$?

4.14. Planul P este planul complex. Fie T aplicația de la P la P care, oricărui punct M , de afix $z = x + iy$ ($z \neq 0$), îi asociază punctul M' de afix z' astfel încît:

$$zz' = ia^2,$$

unde a este un număr real strict pozitiv.

1° Să se demonstreze că:

$$\|\vec{OM}\| \cdot \|\vec{OM'}\| = a^2;$$

$$\mu(\widehat{Ox, OM}) + \mu(\widehat{Ox, OM'}) = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Aplicația T este o involuție pe $P^* = P - \{0\}$?

2° Să se demonstreze că T admite două puncte duble A și A' , care vor fi precizate.

3° Să se demonstreze că coordonatele (x, y) ale lui M și (x', y') , cele ale transformării $M' = T(M)$, sint legate prin relațiile:

$$xx' - yy' = 0 \text{ și } xy' + x'y = a^2.$$

Să se regăsească punctele duble ale lui T , obținându-le ca intersecție a două curbe. Să se calculeze x și y în funcție de a , x' și y' .

4.2. RĂDĂCINILE DE GRADUL n ALE UNUI NUMĂR COMPLEX

4.2.1. Rădăcinile de gradul n ale unui număr complex

■ Fie un număr complex fixat z nenul și fie n un întreg natural strict mai mare ca 1.

Se numește rădăcină de gradul n a numărului complex z orice număr complex Z a cărui putere a n -a este egală cu z :

$$Z^n = z, z \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}. \quad (1)$$

Ecuția astfel definită pe $\mathbb{C}^*$ este o *ecuație binomă*; soluțiile acestei ecuații sint rădăcinile de gradul n ale lui z .

■ Să exprimăm numărul fixat z sub formă trigonometrică:
a) r este modulul lui z :

$$r = |z|, r \in \mathbb{R}^{*+};$$

b) θ este un argument al lui z :

$$\theta \in \arg z$$

rezultă:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

De asemenea, orice număr Z , soluție eventuală a ecuației (1) se poate scrie:

$$Z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \rho = |Z| \text{ și } \varphi \in \arg Z.$$

■ Orice număr Z este o rădăcină de gradul n a lui z dacă și numai dacă:

$$\rho^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

adică dacă și numai dacă:

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\varphi = \theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2)$$

$$\quad \quad \quad (3)$$

Se știe că, fiind dat un număr real r strict pozitiv, există un număr real pozitiv ρ și numai unul astfel încit:

$$\rho^n = r, \text{ fie: } \rho = \sqrt[n]{r}$$

Pe de altă parte, egalitatea (3) este echivalentă cu:

$$\varphi = \frac{0}{n} + k \frac{2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Pentru o valoare fixată k_1 a întregului k , numărul complex Z_{k_1} , astfel încît:

$$Z_{k_1} = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \left(\frac{0}{n} + k_1 \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{0}{n} + k_1 \frac{2\pi}{n} \right) \right],$$

este o rădăcină de gradul n a lui $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$.

■ Atunci cînd k parcurge mulțimea $\mathbb{Z}$, pentru două valori fixate ale lui k , distincte, k_1 și k_2 , se obțin numerele Z_{k_1} , Z_{k_2} de *aceiași* modul; realele:

$$\varphi_1 = \frac{0}{n} + k_1 \frac{2\pi}{n},$$

$$\varphi_2 = \frac{0}{n} + k_2 \frac{2\pi}{n}$$

sînt respectiv argumentele lui Z_{k_1} și Z_{k_2} .

Dacă avem:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \lambda \cdot 2\pi, \lambda \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

φ_1 și φ_2 sînt reprezentanți ai aceleiași clase de numere reale modulo 2π .
Rezultă:

$$\arg Z_{k_1} = \arg Z_{k_2},$$

ceea ce implică $Z_{k_1} = Z_{k_2}$ căci:

$$|Z_{k_1}| = |Z_{k_2}|.$$

Relația (4) este echivalentă cu:

$$\left(\frac{0}{n} + k_1 \frac{2\pi}{n} \right) - \left(\frac{0}{n} + k_2 \frac{2\pi}{n} \right) = \lambda \cdot 2\pi,$$

$$k_1 - k_2 = \lambda n,$$

sau:

$$k_1 \equiv k_2 \pmod{n}.$$

Întregii k_1 și k_2 , astfel încît $k_1 - k_2 = \lambda n$, definesc *aceeași rădăcină* de gradul n a lui z .

Este suficient să atribuim, de exemplu, numărului întreg k , n valori consecutive din intervalul $[0, n-1]$ al mulțimii $\mathbb{N}$, pentru a obține, începînd de la un argument fixat al lui z , toate rădăcinile de gradul n ale lui z .
Se poate trage concluzia:

■ Orice număr complex nenul:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

admite n rădăcini de gradul n care se exprimă sub forma trigonometrică generală:

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{0}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{0}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right],$$

cu, de exemplu:

$$k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Această concluzie arată de asemenea că, în mulțimea $\mathbb{C}^*$, ecuația definită prin:

$$Z^n - a = 0, \quad a \in \mathbb{C}^*$$

are n rădăcini distincte.

4.2.2. Reprezentarea rădăcinilor de gradul n

Fie P un plan afin euclidian orientat identificat cu $\mathbb{C}$ cu ajutorul reperului ortonormat direct $\mathcal{R} = (O, \vec{OA}, \vec{OB})$ (fig. 5).

Fie M_k imaginea rădăcinii Z_k de gradul n a lui $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

■ Oricare ar fi k , element al intervalului $[0, n-1]$ al lui N :

$$|z_k| = \sqrt[n]{r}$$

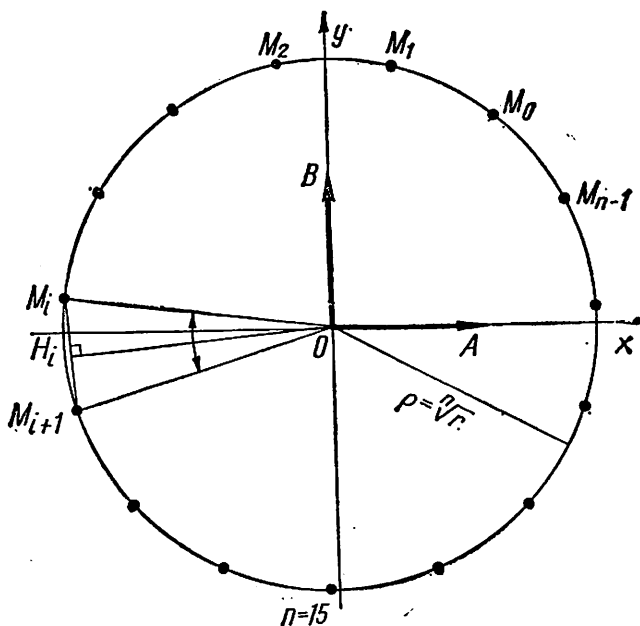


FIG. 5

rezultă că toate punctele imagini $M_0, M_1, \dots, M_k, \dots, M_{n-1}$, sînt situate pe cercul de centru O și de rază $\rho = \sqrt[n]{r}$.

■ Fie i și $i+1$ două valori consecutive ale lui k , i fiind un număr din intervalul $I = [0, n-1[$ al mulțimii N .

Fie Z_i, Z_{i+1} rădăcinile de gradul n ale lui z corespunzătoare și fie φ_i și φ_{i+1} respectiv argumente ale lui Z_i și Z_{i+1} astfel încît:

$$\varphi_i = \frac{0}{n} + i \frac{2\pi}{n},$$

$$\varphi_{i+1} = \frac{0}{n} + i + 1 \frac{2\pi}{n}.$$

Se notează M_i, M_{i+1} punctele imagini ale lui Z_i și Z_{i+1} .

Avem:

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = (i + 1 - i) \frac{2\pi}{n},$$

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = \frac{2\pi}{n}.$$

Această relație implică că $\frac{2\pi}{n}$ este un reprezentant al măsurii $(\widehat{OM_{i+1}, OM_i})$,

a unghiului $(\widehat{OM_{i+1}, OM_i})$:

$$\frac{2\pi}{n} \in \mu(\widehat{OM_{i+1}, OM_i}), \text{ pentru orice } i \text{ din } I.$$

■ Imaginile $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ ale celor n rădăcini de gradul n ale lui z sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul de centru O și de rază $\sqrt[n]{|z|}$.

Orice segment $[M_{i+1}, M_i]$ este o latură a acestui poligon și realul $\frac{2\pi}{n}$ este o măsură a „unghiului de centru”. Înălțimea $[0, H_i]$ a triunghiului isoscel (M_i, O, M_{i+1}) se numește apotema poligonului regulat.

Punctul O este centrul acestui poligon regulat.

EXEMPLU. Să se determine rădăcinile cubice ale numărului complex $z = 1 + i$. Să se reprezinte geometric rădăcinile obținute.

Avem:

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right);$$

de unde:

$$|z| = \sqrt{2} \text{ și } \frac{\pi}{4} \in \arg z.$$

Rădăcinile cubice ale numărului $1 + i$ se scriu sub formă generală:

$$Z_k = \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3} \right) \right], 0 \leq k \leq 2.$$

de unde:

$$Z_0 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right),$$

$$Z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

$$Z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$

Punctele imagini fiind respectiv M_0, M_1, M_2 , se obține în planul complex triunghiul echilateral $\{M_0, M_1, M_2\}$ astfel încât un reprezentant al măsurii $\mu(\widehat{O\vec{A}, O\vec{M}_0})$ este realul $\frac{\pi}{12}$, A fiind punctul de afix 1 (fig. 6).

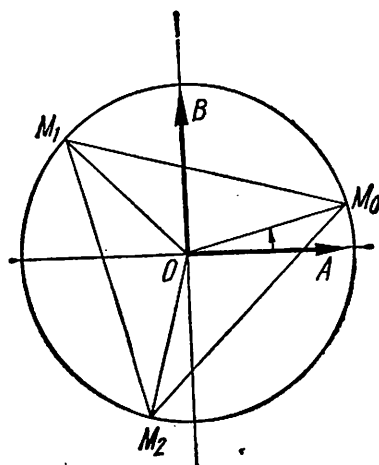


FIG. 6

4.2.3. Rădăcinile cubice ale unității

■ Determinare

Să studiem cele trei rădăcini cubice ale numărului complex 1, notate $\omega_0, \omega_1, \omega_2$. Numărul complex 1 are ca modul 1 și un argument al lui 1 este realul 0. Rezultă că, ω_k fiind o rădăcină cubică a lui 1, avem:

$$\omega_k = 1 \left[\cos k \frac{2\pi}{3} + i \sin k \frac{2\pi}{3} \right], 0 \leq k \leq 2.$$

Se obține:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1, \\ \omega_1 &= 1\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \omega_2 &= 1\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i\sin \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Se observă că:

$$\omega_1^2 = \omega_2 = \overline{\omega_1}$$

și că:

$$\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0.$$

Se notează:

$$\omega_1 = j,$$

de unde:

$$\omega_2 = j^2 = \overline{j} = \frac{1}{j},$$

prin urmare: $1 + j + j^2 = 0$.

Mulțimea $\mathcal{U}_3$ a rădăcinilor cubice ale unității este:

$$\mathcal{U}_3 = \{1, j, j^2\}.$$

■ Proprietăți

1. Ecuația în $\mathbb{C}$, definită prin $z^3 - 1 = 0$, admite deci ca rădăcini numerele $1, j, j^2$.

Avem:

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1).$$

Rădăcina 1 anulează factorul $z - 1$. Egalitatea $1 + j + j^2 = 0$ arată că j anulează pe al doilea factor. Pe de altă parte:

$$j^4 = j^3 : j = 1 : j = j;$$

de unde:

$$j^4 + j^2 + 1 = j + j^2 + 1 = 0;$$

j^2 anulează pe cel de-al doilea factor.

2. Mulțimea $\mathcal{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ ale rădăcinilor cubice ale lui 1 are o structură de grup multiplicativ așa cum o arată tabela următoare:

$\cdot$	1	j	j^2
1	1	j	j^2
j	j	j^2	1
j^2	j^2	1	j

Grupul $(\mathcal{U}_3, \cdot)$ este un subgrup al grupului multiplicativ $(U, \cdot)$.

3. Să considerăm grupul aditiv $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ale cărui elemente sînt clasele $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}$. Fie φ aplicația de la $\mathcal{U}_3$ la $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ astfel încît:

$$\varphi(1) = \dot{0}, \varphi(j) = \dot{1}, \varphi(j^2) = \dot{2}.$$

Avem:

$$\varphi(j \times j^2) = \varphi(1) = \dot{0};$$

or:

$$\varphi(j) + \varphi(j^2) = \dot{1} + \dot{2} = \dot{0}$$

Studiind celelalte cazuri, rezultă că φ este un izomorfism între grupul multiplicativ $\mathcal{U}_3$ și grupul aditiv $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

■ *Reprezentare* (fig. 7).

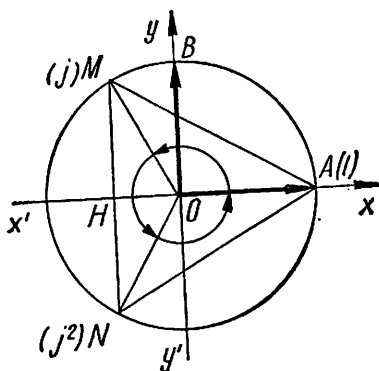


FIG. 7

1. Punctele imaginii A, M, N ale numerelor $1, j, j^2$ sînt virfurile unui triunghi echilateral în care O este echibaricentru; de unde:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 0;$$

această relație implică în $\mathbb{C}$:

$$1 + j + j^2 = 0 \text{ (relație deja stabilită).}$$

2. Faptul că:

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și } j^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

implică:

$$\|\overrightarrow{OH}\| = \frac{1}{2} \text{ și } \|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{3},$$

$[O, H]$ fiind apotema triunghiului echilateral $\{A, M, N\}$ și segmentul $[M, N]$ fiind o latură a acestui triunghi.

4.2.4. Rădăcinile bipătrate ale unității

■ Determinare

Să studiem cele patru rădăcini ale unității, de gradul patru, notate $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$. Orice rădăcină de gradul patru ω_k a lui 1 se scrie:

$$\omega_k = \cos k \frac{2\pi}{4} + i \sin k \frac{2\pi}{4}, \quad 0 \leq k \leq 3.$$

Avem:

$$\omega_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\omega_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$\omega_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$\omega_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

Se observă:

$$\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Mulțimea $\mathcal{U}_4$ a celor patru rădăcini de gradul patru ale unității este:

$$\mathcal{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}.$$

Imaginile A, B, A', B' ale elementelor lui $\mathcal{U}_4$ sînt virfurile unui pătrat în care O este echibaricentru.

■ Proprietăți

Mulțimea $\mathcal{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$ a rădăcinilor de gradul patru ale lui 1 are o structură de grup multiplicativ așa cum o arată următorul tabel:

	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

Grupul $(\mathcal{U}_4, \cdot)$ este un subgrup al grupului multiplicativ $(\mathbb{C}, \cdot)$.

EXERCIȚII

■ Exercițiu rezolvat

Să se determine, în $\mathbb{C}$, soluțiile ecuației definite prin:

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

(1)

Avem, pentru orice număr complex z , în corpul $\mathbb{C}$:

$$(z^3 + z^2 + z + 1)(z - 1) = z^4 - 1.$$

Soluțiile ecuației (1) sînt cele ale ecuației binome (2): $z^4 - 1 = 0$, private de rădăcina $\omega_0 = 1$. Rădăcinile de gradul patru ale unității fiind: $1, i, -1, -i$, rezultă că mulțimea $\mathcal{O}$ a soluțiilor ecuației (1) este:

$$\mathcal{O} = \{i, -1, -i\}.$$

 **Exercițiu de aplicație imediată**

Să se demonstreze că grupul multiplicativ $\mathcal{U}_4$ este izomorf cu grupul aditiv $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

4.2.5. Rădăcinile de gradul n ale unității

Să studiem, în cazul general, rădăcinile de gradul n ale unității. Le vom nota:

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots, \omega_{n-1};$$

vom nota cu U_n mulțimea acestor rădăcini, unde pentru orice întreg k din intervalul $[0, n-1]$ al lui $\mathbb{N}$:

$$\omega_k = 1 \left(\cos k \frac{2\pi}{n} + i \sin k \frac{2\pi}{n} \right).$$

 Orice rădăcină ω_k se poate scrie, după formula lui Moivre:

$$\omega_k = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k, \quad k \in [0, n-1].$$

Or:

$$\omega_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

de unde:

$$\omega_k = \omega_1^k, \quad k \in [0, n-1].$$

Astfel, mulțimea $\mathcal{U}_n = \{\omega_0 = 1, \omega_1, \dots, \omega_k, \dots, \omega_{n-1}\}$ poate fi generată de $\{\omega_1\}$.

EXEMPLE

I. $n = 3$. Atunci $\omega_1 = j$.

Avem:

$$\omega_0 = j^0 = 1, \quad \omega_1 = j, \quad \omega^2 = \omega_1^2 = j^2,$$

și:

$$\mathcal{U}_3 = \{1, j, j^2\}.$$

Se observă, aci, că $\{j^2\}$ generează de asemenea pe $\mathcal{U}_3$.

II. $n = 4$. Atunci: $\omega_1 = i$.

Avem:

$$\omega_0 = i^0 = 1, \quad \omega_1 = i, \quad \omega_2 = i^2 = -1, \quad \omega_3 = i^3 = -i,$$

și:

$$\mathcal{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}.$$

Se observă că $\{-1\}$ nu generează pe $\mathcal{U}_4$.

EXERCITIU

■ *Exercițiu de aplicație imediată*

Să se determine mulțimea $\mathcal{U}_6$ a rădăcinilor de gradul șase ale unității. Se poate alege arbitrar o rădăcină pentru a genera pe $\mathcal{U}_6$?

■ Avem, în corpul comutativ $\mathbb{C}$, pentru orice număr z diferit de 1:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}. \quad (1)$$

Să considerăm mulțimea $\mathcal{U}_n$ a rădăcinilor de gradul n ale unității:

$$\mathcal{U}_n = \{1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots, \omega_{n-1}\}$$

Avem:

$$S = \sum_0^{n-1} \omega_k = \sum_0^{n-1} \omega_1^k;$$

S fiind suma rădăcinilor de gradul n ale unității.

Fie:

$$1 + \omega_0 + \dots + \omega_k + \dots + \omega_{n-1} = 1 + \omega_1^2 + \dots + \omega_1^k + \dots + \omega_1^{n-1}.$$

Avem, conform lui (1):

$$S = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1} \quad \omega_1 \neq 1$$

or:

$$\omega_1^n = 1, \text{ de unde: } S = 0.$$

Suma rădăcinilor de gradul n ale unității este nulă.

EXERCITIU

■ *Exercițiu de aplicație imediată.*

Fie numărul $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$. Se pune:

$$S = z + z^2 + z^4, \quad T = z^3 + z^5 + z^6.$$

Să se calculeze $S + T$ și ST .

Să se calculeze S (un desen poate ajuta la distingerea lui S de T).

Observație. — Rezultă, în planul euclidian identificat cu $\mathbb{C}$, că suma vectorilor imagini ale rădăcinilor de gradul n ale unității este nulă:

$$\vec{OA} + \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2 + \dots + \vec{OM}_k + \dots + \vec{OM}_{n-1} = \vec{0}.$$

Această proprietate este o proprietate a oricărui poligon regulat înscris în cercul trigonometric și ale cărui vîrfuri sînt:

$$A, M_1, \dots, M_k, \dots, M_{n-1}.$$

Punctul O este *echibaricentrul* celor n vîrfuri (fig. 8).

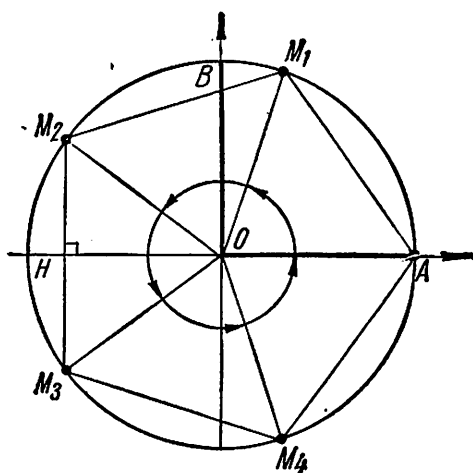


FIG. 8

Puncte imagini ale rădăcinilor de gradul cinci ale lui 1.
Poligonul $AM_1M_2M_3M_4$ este un pentagon de apotemă $[O, H]$.

4.2.6. Rădăcinile de gradul n ale numărului complex z și rădăcinile de gradul n ale lui 1

■ Fie un număr z nenul. El admite n rădăcini de gradul n . Fie Z_{k_1} o rădăcină fixată și Z_k o rădăcină de gradul n oarecare. Avem

$$(Z_{k_1})^n = z \text{ și } (Z_k)^n = z,$$

cu k aparținînd intervalului $[0, n-1]$.

Rezultă:

$$(Z_k)^n = (Z_{k_1})^n, \quad Z_{k_1} \neq 0;$$

de unde:

$$\left(\frac{Z_k}{Z_{k_1}}\right)^n = 1.$$

Numărul complex $\frac{Z_k}{Z_{k_1}}$ este deci o rădăcină de gradul n a unității pe care o notăm cu ω_k .

Se obține:

$$Z_k = Z_{k_1} \times \omega_k, k_1 \text{ fixat și } k \in [0, n-1].$$

Se poate trage concluzia:

Se pot obține rădăcinile de gradul n ale unui număr complex nenul, înmulțind una dintre ele cu rădăcinile de gradul n ale unității.

EXERCIȚII

 *Exercițiu rezolvat.*

Să se determine rădăcinile cubice ale numărului -8 .

O rădăcină cubică a lui -8 este numărul real -2 . Rădăcinile cubice ale lui 1 sînt $1, j, j^2$. Mulțimea $\mathcal{S}$ a rădăcinilor cubice ale lui -8 este:

$$\mathcal{S} = \{-2, -2j, -2j^2\}.$$

 *Exercițiu de aplicație imediată*

Să se determine rădăcinile de gradul patru ale lui 16 .

 Să calculăm suma S a rădăcinilor de gradul n ale lui z .

Avem:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k = \sum_{k=0}^{n-1} Z_{k_1} \cdot \omega_k = Z_{k_1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k;$$

or:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0;$$

de unde:

$$S = 0.$$

Suma rădăcinilor de gradul n ale unui număr complex z este nulă. În planul euclidian P identificat cu $\mathbb{C}$, dacă M_k este imaginea unei rădăcini oarecare Z_k , proprietatea precedentă se traduce prin:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{OM_k} = \vec{0}.$$

În consecință, pentru orice poligon regulat înscris într-un cerc de centru O , punctul O este echibaricentrul punctelor imaginii.

■ Fiecare dintre cele n rădăcini de gradul n ale unui număr complex z , scris sub forma trigonometrică $|z| (\cos \theta + i \sin \theta)$, se exprimă prin forma generală:

$$Z_k = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

$$Z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right) \left(\cos k \frac{2\pi}{n} + i \sin k \frac{2\pi}{n} \right).$$

Avem:

$$Z_0 = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right),$$

și:

$$\omega_1^k = \cos k \frac{2\pi}{n} + i \sin k \frac{2\pi}{n}, \text{ de unde: } Z_k = Z_0 \omega_1^k.$$

Se regăsește rezultatul stabilit mai înainte căci θ fiind un argument oarecare al lui z , Z_0 este una oarecare din rădăcinile de gradul n ale lui z .

4.2.7. Rădăcinile pătrate ale unui număr complex z nenul

■ Numărul z este dat sub formă trigonometrică.

1. Fie:

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta), \quad r = |z| \text{ și } \theta \in \arg z.$$

Problema pusă revine la a rezolva pe $\mathbb{C}$ ecuația definită prin:

$$Z^2 - z = 0, \quad z \text{ fixat.} \quad (1)$$

Vom face în acest caz un studiu direct. Numărul Z fiind exprimat sub forma trigonometrică $|Z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ecuația (1) este satisfăcută dacă și numai dacă:

$$\begin{cases} |Z|^2 = |z| \\ 2\varphi = \theta + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2)$$

(3)

Egalitatea (2) dă un număr real pozitiv unic:

$$|Z| = \sqrt{|z|},$$

și relația (3) implică existența a două argumente distincte.

Realii φ_1 și φ_2 , astfel încit:

$$\varphi_1 = \frac{\theta}{2} \text{ și } \varphi_2 = \frac{\theta}{2} + \pi$$

sînt reprezentanții respectivi.

2. Există deci două numere complexe Z_0 și Z_1 , soluții ale ecuației $Z^2 - z = 0$ astfel încît:

$$Z_0 = \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

$$Z_1 = \sqrt{|z|} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \right],$$

sau:

$$Z_1 = -\sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

de unde:

$$Z_1 = -Z_0.$$

Se trage concluzia: *numerele Z_1 și Z_0 sînt opuse.*

3. Punctele imagini M_0 și M_1 sînt simetrice în raport cu O , origine a reperului ortonormat $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$; în afară de aceasta:

$$\varphi_1 \in \mu(\vec{OA}, \vec{OM}_0) \text{ și } \varphi_2 \in \mu(\vec{OA}, \vec{OM}_1);$$

cum $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$, rezultă că dreapta definită de punctele imagini M_1 și

M_2 este dreapta bisectoare a unghiului $(\vec{OA}, \vec{OM})$, M fiind punctul imagine a numărului complex z (fig. 9).

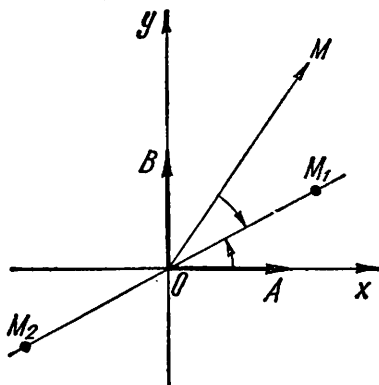


FIG. 9

EXEMPLE. I. Să se determine rădăcinile pătrate ale numărului $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$.

Avem $|z| = 1$ și $\frac{\pi}{4}$ este un argument al lui z . De unde:

$$\{Z_1\} = \{Z_2\} = 1, \varphi_1 = \frac{\pi}{8} \text{ și } \varphi_2 = \frac{9\pi}{8}.$$

Rădăcinile pătrate ale lui $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ sînt:

$$Z_1 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8},$$

$$Z_2 = \cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} = -Z_1.$$

II. Să se determine rădăcinile pătrate ale lui i .

Avem:

$$|z| = 1 \implies |Z_1| = |Z_2| = 1;$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \text{ și } \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

De unde:

$$Z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i),$$

$$Z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i).$$

■ Numărul z este exprimat sub forma $a + ib$.

Să punem $Z = x + iy$, x și y fiind reale. Avem:

$$Z^2 = (a + ib) \tag{1}$$

dacă și numai dacă:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Să notăm că în plus:

$$|Z|^2 = |z| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{4}$$

a) Dacă $b = 0$ și $a < 0$, cele două rădăcini pătrate sînt realele $\sqrt{a}$ și $-\sqrt{a}$.

b) Dacă $b = 0$ și $a < 0$, cele două rădăcini pătrate sînt pur imaginarele $i\sqrt{-a}$ și $-i\sqrt{-a}$ (caz deja studiat la nr. 2.3.3).

c) Dacă $b \neq 0$, rezultă:

$$x \neq 0 \text{ și } y \neq 0.$$

Prima metodă

Sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} y = \frac{b}{2x} \\ x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0. \end{cases} \quad (3')$$

Ecuția bipătrată (5) admite, oricare ar fi numerele reale a și b ($b \neq 0$), două rădăcini reale, dintre care una și numai una este *strict* pozitivă. Acestei rădăcini îi corespund două valori x_1 și $-x_1$ ale lui x și prin urmare două perechi:

$$(x_1, y_1) \text{ și } (-x_1, -y_1).$$

În concluzie, *pentru orice număr complex nenul se obțin două rădăcini pătrate opuse și numai două.*

EXEMPLU. Să se determine rădăcinile pătrate ale lui $z = 5 + 12i$.

Avem:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \quad (1)$$

de unde:

$$\begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \end{cases} \quad (2')$$

Se obține $x^2 = 9$ și, prin urmare, perechile:

$$(3, 2), \quad (-3, -2)$$

Rădăcinile pătrate ale numărului $5 + 12i$ sînt:

$$3 + 2i \quad \text{și} \quad -3 - 2i.$$

A doua metodă

Să considerăm sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b, \end{cases} \quad (2)$$

la care adăugăm relația:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4)$$

Relațiile (2) și (4) dau:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2}), \\ y^2 &= \frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2}). \end{aligned}$$

Aceste valori nu sînt negative căci:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq |a|,$$

inegalitatea strictă fiind realizată dacă: $b \neq 0$.

Trebuie să se asocieze x cu y astfel ca produsul xy să aibă semnul lui b .

EXEMPLU. Să se determine rădăcinile pătrate ale numărului complex $z = -7 - 24i$.
Fie $Z = x + iy$ o rădăcină pătrată a lui z .

Avem:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ xy = -12 \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$$

de unde:

$$x^2 = \frac{1}{2}(-7 + 25) = 9.$$

Se obțin perechile:

$$(3, -4) \quad \text{și} \quad (-3, 4);$$

de unde rădăcinile pătrate ale lui $z = -7 - 24i$:

$$Z_1 = 3 - 4i \quad \text{și} \quad Z_2 = -3 + 4i.$$

EXERCİIU

Exercițiu rezolvat. Fie numărul complex $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$. Exprimînd în două moduri diferite rădăcinile pătrate ale lui z , să se calculeze:

$$\cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}.$$

1° Folosind forma trigonometrică $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ a lui z , am calculat mai înainte rădăcinile pătrate Z_1 și Z_2 ale lui $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$:

$$Z_1 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8};$$

$$Z_2 = -Z_1.$$

2° Să folosim forma carteziană $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$. Să punem $Z = x + iy$, una din rădăcinile lui z .

Avem:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

de unde:

$$x^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right] \text{ și } y^2 = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right],$$

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \text{ și } y^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4};$$

x și y trebuie să fie alese de același semn. Or, realele $\cos \frac{\pi}{8}$ și $\sin \frac{\pi}{8}$ sunt pozitive, căci:

$$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}; \text{ de unde: } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Se obține:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

Observație. — Acest calcul nu diferă de acela folosit în clasa anului I pentru rezolvarea următoarei probleme.

Fie φ rotația vectorială a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, definită prin:

$$\operatorname{Cos} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ și } \operatorname{Sin} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Să se determine mulțimea rotațiilor vectoriale ψ astfel ca $\psi_0 \psi = \varphi$ (Aleph₀, Geometrie anul I CDE, nr. 10.2.4).

EXERCIȚIU

■ *Exercițiu de aplicație imediată.*
Să se justifice observația precedentă.

EXERCIȚII

Să se calculeze rădăcinile pătrate ale următoarelor numere complexe:

4.15. i ; $1 + i$; $9 + 40i$; $7 - 24i$; $40 - 42i$.

4.16. $\frac{1+i}{1-i}$; $\frac{1+j}{1-j}$; $-2(1+i\sqrt{3})$.

4.17. $-\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Să se calculeze rădăcinile cubice ale următoarelor numere complexe:

4.18. $-i$; $1 + i$; $2 + 11i$; -27 .

4.19. $2(1 + i)$; $1 + j$; $\frac{i + \sqrt{3}}{i - \sqrt{3}}$.

4.20. $18 + 26i$; $11 + 2i$; $-2 + 2i$.

4.21. $4\sqrt{2}(-1 + i)$. Să se determine modulul și argumentul fiecărei rădăcini. Să se calculeze rădăcinile de gradul patru ale următoarelor numere complexe:

4.22. $28 - 96i$; $2 - i\sqrt{12}$; $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.23. $i + \sqrt{3}$; $3 + 4i$; $24i - 7$;

$$8\sqrt{2}(1 - i); 28 - 96i; 1 + 4i\sqrt{5}.$$

4.24. Să se studieze rădăcinile cubice ale lui $z = a + ib$. Să se deducă rezolvarea sistemului definit pe $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3x^2y - y^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

4.25. Fie numărul complex:

$$Z = 8a^2 - (1 + a^2)^2 + 4a(1 - a^2)i, a \in \mathbb{R}.$$

1° Să se calculeze modulul numărului Z ; dacă α este un argument al lui Z , să se calculeze:

$$\cos \alpha, \sin \alpha, \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \cos \alpha \sin \alpha,$$

în funcție de realul a și să se demonstreze că:

$$\cos \frac{\alpha}{4} = \frac{a + 1}{\sqrt{2}(1 + a^2)}, \sin \frac{\alpha}{4} = \frac{1 - a}{\sqrt{2}(1 + a^2)}.$$

2° Să se deducă rădăcinile de gradul patru ale numărului Z .

4.26. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, ecuația definită prin: $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

4.27. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, ecuația definită prin: $x^8 + x^4 + 1 = 0$. Să se deducă că $x^8 + x^4 + 1$ se poate descompune într-un produs de patru factori de gradul doi cu coeficienți reali.

4.28. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, următoarele ecuații:

a) $x^5 + 1 = 0$; b) $z^6 = \sqrt{3} + i$; c) $x^7 + \sqrt{3} - i = 0$; d) $z^8 = \frac{1 + i}{\sqrt{3} - i}$;

e) $z^5 = \frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$.

4.29. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, ecuația definită prin:

$$z^7 = \bar{z}.$$

(Să se determine mai întâi $|z|$.)

4.30. Numărul z este un număr complex. Să se dezvolte $(z + 1)^3$ și să se deducă rezolvarea, pe $\mathbb{C}$, a ecuației definite prin:

$$z^3 + 3z^2 + 3z - 7 = 0$$

Să se construiască imaginea rădăcinilor.

4.31. 1° Fie $\mathcal{U}_n$ mulțimea rădăcinilor complexe de gradul n ale unității. Să se demonstreze că restricția legii multiplicative a corpului $\mathbb{C}$ conferă lui $\mathcal{U}_n$ o structură de grup. Să se

demonstreze că acest grup este *ciclic*, adică admite o parte generatoare redusă la un singur element.

2° Să se demonstreze că o condiție necesară și suficientă ca $\{\omega_p\}$ să genereze grupul $\mathcal{U}_n$ este ca p și n să fie prime între ele (ω_p fiind una din rădăcinile de gradul n ale unității). Să se demonstreze că dacă n este un număr prim, atunci grupul $\mathcal{U}_n$ este generat de orice rădăcină diferită de 1.

4.32. Se pune $u = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17}$. Fiecare din sumele care urmează este un real

din care se va forma o expresie care nu conține decît rădăcini pătrate ca iraționale.

1° Să se calculeze:

$$S = \sum_{k=1}^{k=16} u^k.$$

2° Să se calculeze:

$$T = u^2 + u^4 + u^8 + u^{16} + \dots + u^{2^k} + \dots + u^{2^{26}};$$

$$T' = u^6 + u^{12} + u^{24} + \dots + u^{6k} + \dots + u^{768}.$$

(Se va calcula $T + T'$ și $T \cdot T'$.)

4.33. a) Să se calculeze suma:

$$\mathcal{O}(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

b) Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, ecuația definită prin:

$$x^{2n} - 1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Să se demonstreze că: } \mathcal{O}(x) = \prod_{k=1}^{n-1} (x^2 - 2x \cos k \frac{\pi}{n} + 1).$$

c) Considerînd $\mathcal{O}(1)$, să se demonstreze că:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin k \frac{\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

d) Considerînd $\mathcal{O}(i)$, să se calculeze produsul:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos k \frac{\pi}{n}.$$

4.3. REZOLVAREA ECUAȚIILOR ÎN CORPUL $\mathbb{C}$

4.3.1. Rezolvarea ecuației definite pe $\mathbb{C}$ prin

$$az + b = 0$$

Fie ecuația definită pe $\mathbb{C}$ prin:

$$az + b = 0, \tag{1}$$

a și b fiind numere complexe fixate.

Mulțimea $\mathbb{C}$ fiind un corp comutativ, discuția și rezolvarea acestei ecuații sint identice cu acelea ale ecuației definite pe corpul comutativ $\mathbb{R}$ al realelor prin:

$$ax + b = 0.$$

Rezultă:

Dacă:

$(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, mulțimea $\mathcal{S}$ a soluțiilor este:

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

Dacă:

$(a, b) \in \{0\} \times \mathbb{C}^*$, avem:

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Dacă: $(a, b) = (0, 0)$, atunci $\mathcal{S} = \mathbb{C}$ dacă nici o restricție nu intervine pentru alegerea numărului z .

EXEMPLU. Să se rezolve ecuația definită pe $\mathbb{C}$ prin:

$$\frac{z}{3 + 4i} + \frac{z - 1}{5i} = \frac{5}{3 - 4i}.$$

Avem, succesiv:

$$\frac{z(3 - 4i)}{25} - \frac{(z - 1)5i}{25} = \frac{5(3 + 4i)}{25},$$

$$z(3 - 4i) - 5i(z - 1) = 5(3 + 4i),$$

$$z(3 - 4i - 5i) = 15 + 20i - 5i,$$

$$3z(1 - 3i) = 15(1 + i),$$

$$z(1 - 3i)(1 + 3i) = 5(1 + i)(1 + 3i),$$

$$10z = 10(-1 + 2i) \Leftrightarrow z = -1 + 2i.$$

4.3.2. Rezolvarea ecuației de gradul doi, pe $\mathbb{C}$, cu coeficienți complecși

1° Fie aplicația f de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$ astfel încît:

$$z \mapsto az^2 + bz + c,$$

a, b, c fiind numere complexe fixate și a fiind nenul.

Se caută să se determine în $\mathbb{C}$ submulțimea $\mathcal{S}$ astfel încît:

$$\overset{-1}{f}\{(0)\} = \mathcal{S}.$$

Folosind regulile de calcul într-un corp, să căutăm să obținem, pentru polinomul $f(z) = az^2 + bz + c$, o expresie de forma:

$$Z^2 - d^2 = (Z + d)(Z - d),$$

în care d este un număr complex determinat în funcție de tripletul (a, b, c) .

2° Avem, pentru orice număr z , a fiind nenul:

$$4af(z) = 4a^2z^2 + 4abz + 4ac,$$

$$4af(z) = (2az + b)^2 + 4ac - b^2,$$

$$4af(z) = (2az + b)^2 - (b^2 - 4ac).$$

Numărul complex $b^2 - 4ac$ are totdeauna două rădăcini pătrate opuse, cu excepția cazului $b^2 - 4ac = 0$ (nr. 4. 2. 7).

Fie d una din rădăcinile pătrate ale lui $b^2 - 4ac$:

$$d^2 = b^2 - 4ac.$$

Avem:

$$4af(z) = (2az + b)^2 - d^2,$$

sau, pentru orice număr z :

$$4af(z) = (2az + b + d)(2az + b - d).$$

○ Avem $f(z) = 0$ dacă și numai dacă:

$$4af(z) = 0,$$

sau:

$$(2az + b + d)(2az + b - d) = 0.$$

Orice corp fiind un inel de integritate, această ecuație admite în $\mathbb{C}$ două și numai două soluții z_1 și z_2 :

$$z_1 = \frac{-b-d}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b+d}{2a}.$$

Dacă $b^2 - 4ac = 0$, atunci $d = 0$ și ecuația admite o rădăcină de gradul doi: numărul $-\frac{b}{2a}$.

Se poate enunța:

TEOREMĂ / Pentru a nenul, ecuația de gradul doi cu coeficienți complecși, definită prin: $az^2 + bz + c = 0$, admite două rădăcini z_1 și z_2 exprimate prin:

$$z_1 = \frac{-b-d}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b+d}{2a},$$

unde d și $-d$ reprezintă rădăcinile pătrate ale numărului $b^2 - 4ac$.

Dacă: $b^2 - 4ac \neq 0$, atunci: $z_1 \neq z_2$.

Dacă: $b^2 - 4ac = 0$, atunci: $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.

Observații. — 1) Se obține cu ușurință:

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ și } z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Reciproc, dacă se fixează trei numere complexe a, b, c ($a \neq 0$), numerele complexe u_1, u_2 , astfel încît:

$$u_1 + u_2 = -\frac{b}{a} \text{ și } u_1 u_2 = \frac{c}{a},$$

sînt rădăcinile ecuației:

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Într-adevăr, ecuația definită prin:

$$(z - u_1)(z - u_2) = 0,$$

admite pe u_1 și u_2 ca rădăcini. Or:

$$(z - u_1)(z - u_2) = z^2 - (u_1 + u_2)z + u_1 u_2;$$

de unde:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$$

și:

$$az^2 + bz + c = 0.$$

2) Rezultă că, a rezolva pe $\mathbb{C}$ sistemul (I) definit prin:

$$(I) \begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p, \end{cases}$$

unde s și p sînt numere complexe fixate, revine la a rezolva ecuația definită prin:

$$u^2 - su + p = 0. \quad (2)$$

Sistemul (I) are totdeauna două perechi de soluții:

$$(u', u'') \text{ și } (u'', u'),$$

u' și u'' fiind rădăcinile ecuației (2).

3) Dacă $b = 2b'$, atunci:

$$d^2 = 4(b'^2 - ac) = 4d'^2,$$

de unde:

$$d'^2 = b'^2 - ac,$$

d' fiind o rădăcină pătrată a lui $b'^2 - ac$.
 Avem:

$$z_1 = \frac{-b' - d'}{a},$$

$$z_2 = \frac{-b' + d'}{a}.$$

4.3.3. Ecuația de gradul doi cu coeficienți reali pe $\mathbb{C}$

1. Să reamintim că acel caz în care ecuația se exprimă sub forma:

$$z^2 = a, \quad a \text{ real}$$

a fost studiat la nr. 3.3.3.

a) Dacă: $a > 0$, există două rădăcini reale opuse:

$$z_1 = -\sqrt{a},$$

$$z_2 = \sqrt{a}.$$

b) Dacă: $a < 0$, există două rădăcini pur imaginare conjugate:

$$z_1 = -i\sqrt{-a},$$

$$z_2 = i\sqrt{-a}.$$

2. În cazul general, dacă:

$f(z) = az^2 + bz + c$, (a, b, c numere reale și $a \neq 0$), se obține ca la paragraful precedent:

$$4af(z) = (2az + b)^2 - (b^2 - 4ac).$$

Numărul $\Delta = b^2 - 4ac$ este real.

a) Dacă: $\Delta > 0$, ecuația definită prin $az^2 + bz + c = 0$ admite două rădăcini reale, care sînt admise pentru că $\mathbb{R}$ este un subcorp al lui $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

b) Dacă: $\Delta = 0$, ecuația admite o rădăcină reală de gradul doi exprimată prin:

$$-\frac{b}{2a}.$$

c) Dacă: $\Delta < 0$, ecuația nu are rădăcini reale, dar:

$$b^2 - 4ac = (-1)(-\Delta) = i^2(-\Delta)$$

admite două rădăcini pătrate opuse:

$$i\sqrt{-\Delta} \text{ și } -i\sqrt{-\Delta}.$$

Ecuatia definită prin $az^2 + bz + c = 0$ admite două rădăcini complexe conjugate:

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Observație. — Acest rezultat este un caz particular al studiului zerourilor unui polinom $P(z)$ cu coeficienți reali (nr. 3.3.5(2)).

4.3.4. Exemple de rezolvări de ecuații de gradul doi

■ Fie ecuația definită pe $\mathbb{C}$ prin:

$$(1 - i)z^2 - (6 - 4i)z + 9 - 7i = 0.$$

α) Să calculăm numărul $b'^2 - ac$.

Avem:

$$b'^2 - ac = (3 - 2i)^2 - (1 - i)(9 - 7i),$$

sau:

$$b'^2 - ac = 3 + 4i.$$

β) Să determinăm rădăcinile pătrate ale numărului $3 + 4i$.

Să punem:

$$d^2 = (x + iy)^2 = 3 + 4i,$$

de unde:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \text{și} \quad x^2 + y^2 = 5.$$

Numărul $d = 2 + i$ este o rădăcină pătrată a lui $3 + 4i$.

γ) Rădăcinile ecuației sint:

$$z' = \frac{(3 - 2i) - (2 + i)}{1 - i} = 2 - i,$$

$$z'' = \frac{(3 - 2i) + (2 + i)}{1 - i} = 3 + 2i.$$

■ Atunci cînd ecuația o permite, este bine să se facă un studiu direct, fără a se face apel la formule.

[Se va utiliza adesea identitatea:

$$a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib).]$$

1° Fie să se rezolve ecuația definită pe $\mathbb{C}$ prin:

$$z^2 - 2z \cos \varphi + 1 = 0, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Se obține succesiv:

$$(z - \cos \varphi)^2 + 1 - \cos^2 \varphi = 0,$$

$$(z - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = (z - \cos \varphi + i \sin \varphi)(z - \cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Rădăcinile ecuației considerate sînt numerele conjugate:

$$z_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad z_2 = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

2° Să se rezolve ecuația definită pe $\mathbb{C}$ prin:

$$3x^2 + 2x + 2 = 0.$$

Această ecuație se poate scrie:

$$3 \left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \right) = 3 \left[\left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{5}{9} \right] = 0,$$

sau:

$$\left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{5}{9} = \left(x + \frac{1}{3} + i \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \left(x + \frac{1}{3} - i \frac{\sqrt{5}}{3} \right) = 0;$$

de unde cele două rădăcini conjugate următoare:

$$x_1 = -\frac{1}{3} - i \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{3} + i \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

4.3.5. Aplicații

Exercițiu rezolvat

Se consideră mulțimea $\mathcal{S}$ a rădăcinilor de gradul cinci ale unității:

$$\mathcal{S} = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$$

Să se determine ecuația de gradul doi care admite $\alpha = \omega + \omega^4$ și $\beta = \omega^2 + \omega^3$ ca rădăcini. Să se deducă valoarea lui $\cos \frac{2\pi}{5}$ și aceea a lui $\cos \frac{4\pi}{5}$.

Să calculăm

$$(\omega + \omega^4) + (\omega^2 + \omega^3) = s,$$

și:

$$(\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) = p.$$

Avem:

$$\omega + \omega^3 + \omega^3 + \omega^4 = s;$$

or:

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0;$$

de unde:

$$s = -1,$$

și:

$$(\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) = \omega^3 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^7 = \omega^3 + \omega + \omega^4 + \omega^2 = -1.$$

După observația 2 de la nr. 4.3.2, ecuația căutată este definită prin:

$$z^2 + z - 1 = 0,$$

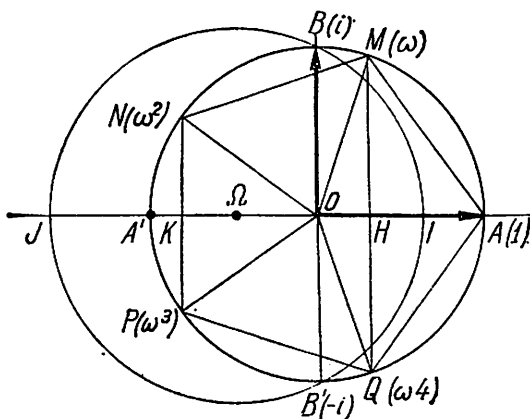


FIG. 10

și admite următoarele rădăcini reale:

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Să considerăm pentagonul regulat asociat mulțimii $\mathcal{S}$ (fig. 10).
Avem, din rațiuni de simetrie:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OH}.$$

Or, vectorul $\overrightarrow{OH}$ are ca afix pe $(\omega + \omega^4)$ și H aparține axei definite de bipunctul (O, A) .

Avem:

$$2\overline{OH} = \omega + \omega^4,$$

și:

$$\omega + \omega^4 > 0 \Rightarrow \omega + \omega^4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Pe de altă parte: $\overline{OH} = \cos \frac{2\pi}{5}$, de unde: $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

La fel:

$$\overline{OK} = \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Observație. — Rezultatele precedente permit să se construiască cu rigla și cu compasul pentagonul regulat $AMNPQ$. Este suficient de a construi rădăcinile ecuației $z^2 + z - 1 = 0$.

Cercul de centru Ω , punct de afix $-\frac{1}{2}$, care conține punctele B și B' ale cercului trigonometric, taie axa definită de bipunctul (O, A) în I și J .

Avem:

$$\begin{aligned}\overline{OI} \cdot \overline{OJ} &= -1, \\ \overline{OI} + \overline{OJ} &= 2\overline{O\Omega} = 1.\end{aligned}$$

Numerele $\overline{OI}$ și $\overline{OJ}$ sînt deci rădăcinile ecuației $z^2 + z - 1 = 0$ și mediatoarea lui $[O, I]$ taie cercul trigonometric în M și Q ; de asemenea, mediatoarea lui $[O, J]$ determină punctele N și P .

■ *Exercițiu de aplicație imediată.*

Numărul ω avînd aceeași semnificație ca în exercițiul rezolvat mai înainte, să se formeze ecuația de gradul patru care admite ca rădăcini elementele mulțimii $\mathcal{S}$ astfel încît:

$$\mathcal{S} = \{(1 + \omega)^2, (1 + \omega^2)^2, (1 + \omega^3)^2, (1 + \omega^4)^2\}.$$

4.3.6. Rezolvarea, pe $\mathbf{R}$, a ecuației

$$a \cos x + b \sin x + c = 0$$

Vom studia doar un caz numeric.

Să se rezolve ecuația definită pe $\mathbf{R}$ prin:

$$\cos x + 3 \sin x - 1,8 = 0 \quad x \in \mathbf{R}.$$

a) Fie z un număr complex de modul 1 și al cărui argument este x .
Avem:

$$z = \cos x + i \sin x; \quad (1)$$

$$\frac{1}{z} = \cos x - i \sin x. \quad (2)$$

De unde:

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin x = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad (3)$$

aceste relații implicînd relațiile (1) și (2).

b) Rezolvarea ecuației:

$$\cos x + 3 \sin x - 1,8 = 0$$

revine deci la rezolvarea sistemului (I) definit prin:

$$(I) \begin{cases} |z| = 1 \\ \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{2} i \left(z - \frac{1}{z} \right) - 1,8 = 0, \quad z \in \mathbf{C}. \end{cases}$$

Avem succesiv:

$$z^2 + 1 - 3i(z^2 - 1) - 3,6z = 0,$$

$$z^2(1 - 3i) - 3,6z + 1 + 3i = 0.$$

Expresia relativă la această ecuație:

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

este egală cu:

$$(1,8)^2 - (1 - 3i)(1 + 3i) = (1,8)^2 - 10,$$

sau:

$$\Delta' = -6,76 = (2,6i)^2.$$

De unde, notînd cu z_1 și z_2 rădăcinile :

$$z_1 = \frac{1,8 + 2,6i}{1 - 3i} = \frac{(1,8 + 2,6i)(1 + 3i)}{10} = -\frac{3}{5} + \frac{4i}{5} \Rightarrow |z_1| = 1;$$

$$z_2 = \frac{1,8 - 2,6i}{1 - 3i} = \frac{(1,8 - 2,6i)(1 + 3i)}{10} = \frac{4,8}{5} + \frac{1,4i}{5} \Rightarrow |z_2| = 1.$$

Aceste două numere dau:

$$\cos x_1 = -0,6 \text{ și } \sin x_1 = 0,8;$$

$$\cos x_2 = 0,96 \text{ și } \sin x_2 = 0,28.$$

Numerele reale x_1 și x_2 se obțin cu ajutorul tabelelor și definesc mulțimea $\mathcal{S}$ a soluțiilor ecuației propuse:

$$\mathcal{S} = \{x_1 + k_1 2\pi\} \cup \{x_2 + k_2 2\pi\}, \quad k_1 \in \mathbb{Z} \text{ și } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

EXERCITIU

Exercițiu de aplicație imediată.

Folosind metoda precedentă, să se rezolve ecuația definită pe $\mathbb{R}$ prin:

$$\sqrt{2} \cos x + \sqrt{3} \sin x - 1 = 0.$$

EXERCITII

4.84. Să se rezolve pe corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe, următoarele ecuații de gradul I, definite respectiv prin:

$$1^\circ \quad 2z + 3i = \frac{1}{2i}z + 3i - 5;$$

$$2^\circ \quad (2 + 3i)z + \frac{1-i}{1+i} = (5 - 2i)z + 10;$$

$$3^\circ \quad (i + \sqrt{3})^2 z + \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{21i}{2 - i} - 15;$$

$$4^\circ \quad (5 + 3i)\bar{z} + \frac{2-i}{1+i} = (j + j^2)^2.$$

4.35. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, următoarele ecuații definite respectiv prin:

$$1^\circ \quad z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0;$$

$$z^2 - 2iz - i\sqrt{3} = 0.$$

$$2^\circ \quad z^2 - 2(1 + i)z + i - 1 = 0;$$

$$z^2 - (3 + i)z + 14 - 2i = 0.$$

$$3^\circ \quad z^2 + 2i\sqrt{2}z - 2(1 + i) = 0;$$

$$2z^2 - (20 + 9i)z + 50 = 0.$$

$$4^\circ \quad z^2 - (5 - i)z + 8 - i = 0;$$

$$z^2 - (5 + 4i\sqrt{3})z + 9 = 0.$$

$$5^\circ \quad z^2 - 4(1 - i)z + 2(4 - i) = 0;$$

$$z^2 - 4(6 + i)z + 3(63 + 16i) = 0.$$

$$6^\circ \quad z^2 - (1 + 2i)z + 3(1 + i) = 0;$$

$$z^2 - (10i - 7)z - (11 + 4i) = 0.$$

4.36. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, următoarele ecuații definite respectiv prin:

$$1^\circ \quad iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0.$$

$$2^\circ \quad iz^2 + 2iz + 2 + i = 0.$$

$$3^\circ \quad (1 + i)z^2 - (5 + i)z + 6 + 4i = 0.$$

$$4^\circ \quad (1 - i)z^2 - 2z - 11 + 3i = 0.$$

$$5^\circ \quad (4 + 3i)z^2 - (2i - 4)z + 2 - i = 0.$$

$$6^\circ \quad (2 - i)z^2 - (3 + i)z - 2 + 6i = 0.$$

$$7^\circ \quad iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0.$$

4.37. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, ecuația definită prin:

$$z^2 - 2(1 + ia^2)z + 1 - a^4 = 0.$$

4.38. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, următoarele ecuații definite prin:

$$1^\circ \quad z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$2^\circ \quad 16z^2 - 40z + 69 = 0.$$

Să se exprime pentru fiecare rădăcină modulul și argumentul. Să se construiască imaginile rădăcinilor.

4.39. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, ecuația definită prin: $4z^2 + 8|z^2| - 3 = 0$. Să se pună sub formă trigonometrică toate sumele a două rădăcini oarecare.

4.40. Se consideră, pe $\mathbb{C}$, ecuația definită prin:

$$z^2 + 4z \cos u + 2 + 4 \cos 2u = 0, \text{ unde } u \text{ este un real cuprins între } -\pi \text{ și } +\pi.$$

1° Pentru ce valori ale lui u cele două rădăcini sînt reale?

2° Să se determine argumentul și modulul fiecărei rădăcini în cazul $u = \frac{\pi}{6}$.

4.41. Să se rezolve ecuația definită prin:

$$z^2 - 2z + 4 = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Fie z' și z'' rădăcinile obținute (z' are un argument cuprins între 0 și $\frac{\pi}{2}$). Să se calculeze:

$$u = \frac{z'}{z''}, \quad u^n, \quad |u^n|, \quad \text{Arg } u^n.$$

Să se rezolve ecuația definită prin:

$$Z^3 = u.$$

4.42. 1° Numărul t este un real fixat. Să se exprime, în funcție de $\frac{t}{2}$, numărul δ :

$$\delta = \sin^2 t - 2(1 - \cos t).$$

Care sînt numerele care aparțin fie lui $\mathbf{R}$, fie lui $\mathbf{C}$, al căror pătrat este δ ?

2° Să se discute și să se rezolve, pe $\mathbf{C}$, ecuația definită prin:

$$2z^2(1 - \cos t) - 2z \sin t + 1 = 0.$$

Să se precizeze, după valorile lui $\frac{t}{2}$, modulul și argumentul fiecărei soluții.

4.43. Să se rezolve, pe $\mathbf{C}$, ecuația definită prin:

$$z^2(5 - \cos t)^2 - 32z \cos t(5 - 3 \cos t) + 256 = 0, \quad t \in \mathbf{R}.$$

4.44. Să se rezolve și să se discute, dacă este locul, următoarele ecuații definite pe $\mathbf{C}$:

$$1^\circ \quad z^4 + 10z^2 + 169 = 0; \quad z^4 + 18z^2 + 1681 = 0.$$

$$2^\circ \quad 3z^4 + 2z^2 + 1 = 0; \quad z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0.$$

$$3^\circ \quad z^4 - 2az^2 + 1 = 0; \quad a \in \mathbf{R}; \quad z^4 - 2z^2 \cos 2\alpha + 1 = 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

4.45. Se consideră, pe $\mathbf{C}$, polinomul $f(z)$ astfel încît:

$$f(z) = z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1 + i)z - 5.$$

Să se calculeze: $f(1)$, $f(i)$. Să se determine zerourile polinomului $f(z)$.

4.46. Să se rezolve următoarea ecuație definită pe $\mathbf{C}$, știind că admite o rădăcină reală:

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 - 4(1 - 3i)z + 12 = 0$$

4.47. 1° Ce condiții necesare și suficiente trebuie să existe între modulele și argumentele numerelor complexe A și B , pentru ca cele două rădăcini ale ecuației definite prin:

$$z^2 + Az + B = 0, \quad (1)$$

să aibă același argument? Ce devin aceste relații pentru A real?

2° Să se demonstreze că, pentru ca imaginile respective M_1 și M_2 ale rădăcinilor z_1 și z_2 ale ecuației (1) să fie:

a) coliniare cu O ,

b) astfel încît $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = 1$,

este necesar și suficient să existe un real θ ($\theta \in [0, \pi]$) și un real t care satisfac o anumită inegalitate astfel încît se poate scrie:

$$A = te^{i\theta}, \quad B = e^{i\theta}, \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

4.48. Să se rezolve, pe $\mathbf{C}$, următoarele ecuații, definite prin:

$$8z^4 - 8z^3 + 27z - 27 = 0 \quad (\text{să se indice modulul și argumentul});$$

$$z^6 - (1 - i)z^3 - i = 0;$$

$$z^6 + z^3 - 2 = 0.$$

4.49. Să se rezolve următoarele ecuații definite pe $\mathbf{C}$ prin:

$$z^8 + z^4 + 1 = 0;$$

$$z^{10} + z^5 + 1 = 0.$$

În fiecare caz se va studia o descompunere a polinoamelor:

$$f(z) = z^8 + z^4 + 1, \quad g(z) = z^{10} + z^5 + 1,$$

în produse de factori de gradul doi cu coeficienți reali.

4.50. a) Să se rezolve, pe $\mathbf{C}$, următoarea ecuație definită prin:

$$z^4 + 2\lambda^2 z^2(1 + \cos \theta) \cos \theta + \lambda^4(1 + \cos \theta)^2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

În cazul în care $\lambda = 1$, să se determine modulul și argumentul fiecăreia din cele patru rădăcini z_1, z_2, z_3, z_4 ale ecuației.

b) Să se calculeze:

$$\Sigma_m = (z_1)^m + (z_2)^m + (z_3)^m + (z_4)^m,$$

m fiind un întreg natural, în cazul în care λ este un număr complex fixat.
 4.51. Să se determine coeficienții reali λ și μ astfel încît polinomul $f(x)$, definit pe $\mathbb{C}$ prin:

$$f(x) = \lambda(x^6 + 5x^4 + 4x^2 + 3)^2 - (x^4 + 3x^2 + 2)^3 + \mu(x^2 + 1)^4,$$

să admită ca zerouri zerourile polinomului $g(x) = x^2 + x + 1$.

4.52. Știind că $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$, să se calculeze:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(x^k + \frac{1}{x^k} \right).$$

4.53. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, următoarea ecuație definită prin:

$$x^4 - 2x^3(\cos \alpha + \sin \alpha) + 2x^2(1 + \sin 2\alpha) - 2x(\cos \alpha + \sin \alpha) + 1 = 0$$

(Se va pune $x + \frac{1}{x} = X$; α este un real.)

4.54. Știind că au o rădăcină comună, să se rezolve următoarele ecuații, definite pe $\mathbb{C}$ prin:

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \text{ și } z^3 - (1 + 2i)z^2 - 3z + (2i - 1) = 0.$$

4.55. Să se rezolve următoarele ecuații, definite pe $\mathbb{C}$ prin:

$$(z + 1)^3 + i(z - 1)^3 = 0;$$

$$(z + 1)^n + (z - 1)^n = 0; \quad (z + i)^n - (z - i)^n = 0;$$

$$(1 - iz)^n + i(1 + iz)^n = 0, \quad n = 2, n = 3, n = 4;$$

$$\left(1 + \frac{iz}{n} \right)^n + \left(1 - \frac{i\bar{z}}{n} \right)^n = 0.$$

4.56. Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, ecuațiile definite prin:

$$a) \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^2 + \frac{z-i}{z+i} + 1 = 0.$$

$$b) \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^4 = \frac{1+ia}{1-ia}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

4.57. Fie A un număr complex, m un întreg natural nenul. Să se demonstreze că condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația, definită prin:

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix} \right)^m = A, \quad x \in \mathbb{R},$$

să aibă m rădăcini reale este ca $|A| = 1$.

Această condiție fiind realizată, să se calculeze rădăcinile. Să se facă o figură.

PROBLEME

4.58. Să se calculeze rădăcinile ecuației definite prin:

$$x \in \mathbb{C}, \quad x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{4} + 1 = 0$$

a) Fie α una din rădăcini. Să se calculeze, pentru orice întreg m , valoarea expresiei:

$$\alpha^m + \alpha^{-m}.$$

b) Fie $a = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ (se va putea folosi $a = e^{i \frac{\pi}{4}}$). Pentru orice pereche (p, q) de întregi cuprinși între 1 și 8, se consideră numărul complex:

$$A_{(p,q)} = a^{(p-1)} (q-1).$$

Fie r și s doi întregi cuprinși între 1 și 8. Să se calculeze expresia $B_{(r,s)}$ astfel încît:

$$B_{(r,s)} = A_{(r,1)} A_{(s,1)} + A_{(r,2)} A_{(s,2)} + \dots + A_{(r,8)} A_{(s,8)}.$$

4.59. Se definește un șir ale cărui elemente sînt:

$$u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, \dots$$

fixîndu-se u_1 și u_2 și relația de recurență:

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*. \quad (1)$$

Se presupune că: $a^2 + 4b < 0$. Să se demonstreze că există un real r strict pozitiv și un real θ ($0 < \theta < \pi$) astfel încît relația (1) se scrie:

$$u_{n+1} = 2r \cos \theta \times u_n - r^2 u_{n-1}. \quad (2)$$

Se alege:

$$u_1 = x_1 \quad \text{și} \quad u_2 = r(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta).$$

Folosindu-se relația (2), să se demonstreze că:

$$u_3 = r^2(x_1 \cos 2\theta - y_1 \sin 2\theta),$$

și că:

$$u_{n+1} = r^n(x_1 \cos n\theta - y_1 \sin n\theta).$$

4.60. 1° Se dă un real θ . Să se demonstreze că ecuația, definită prin:

$$z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0,$$

admite în general două rădăcini complexe conjugate care se notează cu z_1 și $\bar{z}_1$. Să se dea expresiile lor în funcție de θ . Care este modulul lui z_1 ? Să se examineze cazul în care θ este un multiplu de π .

2° Se notează de asemenea cu z_2 și $\bar{z}_2$ rădăcinile ecuației definite prin:

$$z^2 - 2z \cos \theta' + 1 = 0,$$

unde θ' reprezintă un real dat.

Să se calculeze în funcție de $\cos \theta$ și $\cos \theta'$, coeficienții a, b, c și d , pentru ca polinomul:

$$P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$$

să fie identic cu polinomul:

$$Q(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2).$$

Să se demonstreze că avem, în aceste condiții, relațiile:

$$\begin{cases} a = c, \\ d = 1. \end{cases} \quad (C)$$

3° Invers se dau în prealabil coeficienții a, b, c și d , care satisfac condițiile (C) și se caută să se determine realii θ și θ' , astfel ca $Q(z)$ să fie identic cu $P(z)$.

Să se demonstreze că $\cos \theta$ și $\cos \theta'$ sint rădăcini ale ecuației:

$$X^2 + \frac{a}{2}X + \frac{b-2}{4} = 0.$$

Să se scrie inegalitățile (C') pe care trebuie să le verifice a și b pentru ca să existe reali θ și θ' care să răspundă la problemă.

4° Ne propunem să interpretăm geometric inegalitățile (C'). Pentru aceasta, se consideră, în planul raportat la un reper ortonormat, punctul M de coordonate a și b .

În ce regiune a planului trebuie să se aleagă M pentru ca relațiile (C') să fie satisfăcute? Se vor trasa cu grijă curbele care delimitează această regiune.

5° Să se aplice rezultatele precedente la căutarea rădăcinilor ecuației definite prin:

$$z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0.$$

(Se va determina, în prealabil, θ și θ' .)

4.61. 1° Să se rezolve, pe $\mathbb{C}$, ecuația definită prin:

$$z^5 - 1 = 0 \quad (1)$$

2° Să se verifice identitatea:

$$\forall z \quad z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$

3° Să se descompună în factori polinomul $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ scriindu-l:

$$z^2 \left[\left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1 \right],$$

și introducînd numărul complex $u = z + \frac{1}{z}$.

4° Să se rezolve algebric ecuația (1).

5° Să se interpreteze geometric numărul complex u . Să se deducă valorile lui $\cos \frac{2\pi}{5}$

și $\cos \frac{4\pi}{5}$, apoi acelea ale lui $\sin \frac{2\pi}{5}$ și $\sin \frac{4\pi}{5}$.

4.62. Într-un plan π , identificat cu $\mathbb{C}$ și raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$, M_1 și M_2 sint imaginile rădăcinilor complexe z_1 și z_2 ale ecuației de gradul doi (E) definită prin:

$$z^2 - 2(a + ib)z + a + b + \frac{1}{8} = 0,$$

unde a și b sint parametri reali și unde i este numărul complex a cărui imagine are drept coordonate $(0, +1)$.

A) 1° Care este suma argumentelor lui z_1 și z_2 ?

2° Care sint bisectoarele unghiului de drepte $(\widehat{OM_1, OM_2})$?

B) 1° Care este afixul mijlocului lui $[M_1M_2]$? Cum trebuie alese numerele a și b pentru ca ecuația (E) să aibă cele două rădăcini ale ei egale și reale? Se va verifica că există două perechi (a, b) care răspund la această chestiune și se vor nota cu P și Q imaginile rădăcinilor duble corespunzătoare.

2° Cum trebuie să fie alese a și b pentru ca ecuația (E) să aibă cele două rădăcini ale ei egale și pur imaginare? Se va verifica că există de asemenea două perechi (a, b) care răspund la problemă și se vor nota cu R și S imaginile rădăcinilor duble corespunzătoare.

3° Să se verifice că unul oarecare din punctele P, Q, R și S este ortocentrul triunghiului care are ca vîrfuri celelalte trei puncte.

4° Să se formeze ecuațiile a două cercuri care admit ca diametri $[P, Q]$ și $[R, S]$. Să se verifice că aceste două cercuri sint ortogonale.

C) Fiind date două numere reale x și y , se notează cu T punctul de afix $t = x + iy$.
 1° Să se calculeze, în funcție de a , b , x și y , partea reală u și partea imaginară v a numărului complex:

$$\omega = (t - z_1)(t - z_2),$$

unde z_1 și z_2 sînt totdeauna rădăcinile ecuației (E). Să se verifice că u și v pot fi puse sub forma:

$$u = Aa + Bb + C \text{ și } v = A'a + B'b + C',$$

unde A, B, C, A', B', C' sînt funcții de variabile x și y .

2° Fiecarui număr complex $t = x + iy$, i se asociază mulțimea E_t constituită în plan de punctele de afix ω obținute atunci cînd a și b parcurg mulțimea numerelor reale. Să se precizeze, după valorile lui t , natura lui E_t distingînd cazurile în care vectorii $\vec{\alpha}$ [de componente scalare (A, A')] și $\vec{\beta}$ [de componente scalare (B, B')] sînt liniar independenți sau nu. În cazul dependenței, să se demonstreze că E_t conține pe O dacă și numai dacă T este unul din punctele O, T_1 și T_2 , unde T_1 și T_2 reprezintă punctele comune cercurilor de diametre $[P, Q]$ și $[R, S]$.

3° Să se deducă din rezultatele precedente că bisectoarele unghiurilor de drepte (T_1M_1, T_1M_2)

și (T_2M_1, T_2M_2) sînt independente de a și b . Care sînt aceste bisectoare?

(Bacalaureat C, Strasburg, 1970)

4.63. Se consideră relația:

$$6z^2 - 3z \sin \theta + \cos \theta = 0, \quad (1)$$

care leagă cele două dumere θ și z .

1° z fiind un număr real dat, relația (1) este atunci o ecuație în θ . Se caută valorile reale ale lui θ , soluții ale acestei ecuații în funcție de z .

a) Să se calculeze efectiv aceste valori atunci cînd:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ și } z = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) Să se discute, după valorile lui z , existența soluțiilor ecuației și numărul extremităților arcelor cercului trigonometric care au ca măsuri aceste soluții.

2° θ fiind un număr real dat, relația (1) este atunci o ecuație în z ; se caută valorile reale ale numărului complex z , soluții ale acestei ecuații. Să se determine valorile lui θ pentru care ecuația (1) are:

a) o rădăcină dublă;

b) două rădăcini reale și distincte;

c) două rădăcini complexe.

În acest ultim caz, să se calculeze modulul rădăcinilor în funcție de θ și să se demonstreze că este cuprins între două numere independente de θ .

3° Într-un plan se dă un sistem de axe orthonormate $x'Ox, y'Oy$.

a) Să se determine transformatul E al cercului C de centru O și de rază 1 în afinitatea

ortogonală de axă $x'x$ și de raport $\frac{1}{2}$. Punctul M aparținînd lui C , se pune $\mu(\vec{Ox}, \vec{OM}) =$

$= 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Să se calculeze, în funcție de θ , coordonatele punctului M' transformatul lui M în această afinitate.

b) Se dă parabola P care are ca tangentă la vîrf pe $y'y$ și ca focar punctul F al lui Ox astfel că $\overline{OF} = \frac{1}{6}$; H fiind un punct al lui $y'y$, se pune $\overline{OH} = z$.

Să se determine, în funcție de z , ecuația tangentei T la P , alta decât $y'y$ dacă z este diferit de zero și care trece prin H .

c) Să se demonstreze că ecuația (1) este o condiție necesară și suficientă pe care trebuie s-o verifice θ și z pentru ca punctul M' să aparțină lui T .

Să se interpreteze geometric rezultatele de la punctele 1° și 2° (z real).

Să se deducă punctele comune și tangentele comune la F și P .

4.64. 1° Să se demonstreze că polinomul:

$$Z^2 + 2(2 + i)Z + 3 + 4i,$$

unde Z este un număr complex și este pătratul unui polinom de gradul întâi.

2° Se consideră, pe corpul numerelor complexe, ecuația (E) în U :

$$U^2 - 2(Z + 4)U + 2Z^2 + 2(6 + i)Z + 19 + 4i = 0,$$

unde Z este un parametru care aparține el însuși mulțimii numerelor complexe.

a) Să se determine Z pentru ca această ecuație să aibă o rădăcină dublă.

b) Să se determine cele două soluții ale lui (E) în cazul general (aceste două soluții se pot nota cu U' și U'').

c) Să se determine mulțimea numerelor Z astfel ca Z să fie el însuși una din soluțiile ecuației (E).

3° Într-un reper ortonormat $(O, \vec{u}, \vec{v})$, oricărui punct de coordonate (x, y) care aparține lui $\mathbb{R}^2$, i se asociază numărul complex $x + iy$ pentru care acesta este imagine.

Fie Z și U două numere complexe, M imaginea lui Z și P imaginea lui U . Se spune că M și P verifică relația $\mathcal{R}$ și se scrie $M \mathcal{R} P$ dacă și numai dacă U este o rădăcină a ecuației (E) corespunzătoare valorii Z a parametrului.

Să se demonstreze că:

$$M \mathcal{R} P \iff \begin{cases} P = \mathcal{O}'(M) \\ \text{sau} \\ P = \mathcal{O}''(M), \end{cases}$$

$\mathcal{O}'$ și $\mathcal{O}''$ fiind transformările punctuale plane, respectiv definite prin:

$$U' = Z(1 + i) + 3 + 2i \quad \text{și} \quad U'' = Z(1 - i) + 5 - 2i,$$

care se caracterizează cu ajutorul lui 2°.

4° a) Pentru un punct M dat, se pune:

$$P' = \mathcal{O}'(M) \quad \text{și} \quad P'' = \mathcal{O}''(M).$$

Care este transformarea punctuală fixă $\mathcal{O}$ care permite să se asocieze P' cu P'' ?

Să se caracterizeze $\mathcal{O}$ geometric.

b) Fie I mijlocul lui $[P', P'']$. Se pune $I = \mathfrak{T}(M)$. Să se demonstreze că $\mathfrak{T}$ este o translație. Să se deducă o construcție simplă a mulțimii:

$$\{P/M\mathcal{R}P\}, \text{ punctul } M \text{ fiind dat,}$$

apoi a mulțimii:

$$\{M/M\mathcal{R}P\}, \text{ punctul } P \text{ fiind dat.}$$

c) Să se determine mulțimea punctelor M astfel ca M , P' și P'' să fie coliniare. Ce este atunci mulțimea punctelor P' și mulțimea punctelor P'' ?

(Bacalaureat C, Orléans, 1970)

4.65. Fie ecuația definită prin $z - 2pz + 1 = 0$, ale cărei rădăcini z' și z'' aparțin corpului $\mathbb{C}$ al numerelor complexe. Se notează prin A, B, P, M' și M'' punctele planului complex $x'Ox$, $y'Oy$, respectiv de afixe $+1, -1, p, z'$ și z'' .

1° Se presupune p real.

- a) Să se determine mulțimea punctelor P pentru care z' și z'' sînt două rădăcini reale distincte sau confundate.
 b) Aceeași chestiune cînd z' și z'' sînt două rădăcini complexe.
 2° Se presupune, în continuarea problemei, că p este un număr complex nereal.
 a) Să se demonstreze, fără a calcula z' și z'' , că P este mijlocul lui $[M', M'']$, că

$\|\vec{OM'}\| \cdot \|\vec{OM''}\| = \|\vec{OA}\|^2 = \|\vec{OB}\|^2$ și că Ox este bisectoarea unghiului $(\vec{OM'}, \vec{OM''})$.
 b) Să se calculeze $(z' - p)^2$ și $(z'' - p)^2$ în funcție de p . Să se deducă:

$$\|\vec{PA}\| \cdot \|\vec{PB}\| = \|\vec{PM'}\|^2 = \|\vec{PM''}\|^2$$

și că dreapta $M'M''$ este bisectoarea unghiului $(\vec{PA}, \vec{PB})$.

3° Numărul complex p este astfel încît:

$$p = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

- a) Să se compare modulele și argumentele rădăcinilor z' și z'' . Să se calculeze φ pentru ca z' și z'' să fie: reale; pur imaginare.
 b) Să se calculeze modulul și argumentul numerelor:

$$z' - p \text{ și } z'' - p.$$

c) Presupunînd: $\cos \varphi < 0$, să se demonstreze că $z' + i$ și $z'' + i$ iau același modul, care se va determina.
 Să se demonstreze apoi că $z' - i$ și $z'' - i$ au același argument, care se va determina.
 4.66. Se consideră mulțimea E a ecuațiilor de gradul patru, definită pe $\mathbb{C}$, cu coeficienți reali, de forma:

$$f(x) = x^4 - 2ax^2 + b = 0. \quad (1)$$

- 1° a) Să se demonstreze că ecuația (1) are totdeauna patru rădăcini, reale sau nu, distincte sau nu.
 b) Să se demonstreze că, dacă ecuația (1) are o rădăcină complexă x_0 , nereală și care nu este pur imaginară, atunci ea admite ca rădăcină pe $\bar{x}_0$ și pe $-x_0$. Se spune că ecuația este de tipul I. Care este în acest caz, în planul complex, așezarea imaginilor celor patru rădăcini?
 c) Să se rezolve ecuația (1) dacă:

$$a = \rho^2 \cos 2\theta \text{ și } b = \rho^4,$$

ρ și θ fiind două numere reale astfel încît:

$$\rho > 0, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Să se pună $f(x)$ sub forma a două polinoame de variabilă x cu coeficienți reali.

2° Fiecărui element e al lui E facem să-i corespundă punctul M de coordonate (a, b) al unui plan raportat la un reper ortonormat. Punctul M este imaginea lui e . Să se discute, după poziția punctului M , dacă ecuația (1) este de tipul I precedent sau are patru rădăcini pur imaginare (tipul II), sau dacă două din rădăcinile ei și numai două sînt pur imaginare (tipul III), sau dacă are patru rădăcini reale (tipul IV). Să se dea distribuția în planul complex a imaginilor celor patru rădăcini ale ecuației (1) pentru fiecare din tipurile II, III, IV.

3° Ecuația (1) fiind de tipul I, să se găsească mulțimea punctelor M :

- a) astfel ca modulul unei rădăcini a ecuației (1) să fie un număr fixat ρ ;
 b) astfel ca un argument al unei rădăcini a lui (1) să fie un real fixat θ .

4° Ecuația (1) fiind de tipul III, să se găsească mulțimea punctelor M :

- a) astfel ca laturile poligonului convex care are ca vîrfuri imaginile rădăcinilor ecuației (1) să aibă o lungime fixată l ;
 b) astfel ca raza cercului înscris să fie un număr fixat r .

(Bacalaureat, grupa I, 1968)

4.67. 1° a) Să se demonstreze că orice ecuație de gradul patru în X , cu coeficienți reali, căreia i s-a făcut coeficientul lui X^4 egal cu 1:

$$X^4 + AX^3 + BX^2 + CX + D = 0 \quad (1)$$

poate fi adusă, printr-o schimbare de necunoscută de forma $X = \alpha + x$, la o ecuație de forma:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (2)$$

b) Să se demonstreze că ecuația (2) se poate pune, într-o infinitate de feluri sub forma:

$$T^2 + T' = 0, \quad (3)$$

T și T' fiind două polinoame de gradul al doilea în x , T fiind în mod necesar de forma:

$$T = x^2 + \beta.$$

(Se va pune $T' = ux^2 + vx + w$ și se va calcula u, v și w în funcție de a, b, c și β .)

c) Să se demonstreze că polinomul T' poate fi pus sub forma:

$$T' = u(x + \gamma)^2,$$

cu condiția ca β să fie rădăcina unei ecuații de gradul trei definite prin $\varphi(\beta) = 0$ care se va forma.

Să se deducă de aici că, dacă se poate găsi o rădăcină a ecuației $\varphi(\beta) = 0$, se poate rezolva ecuația (1). [Se reamintește că expresia $M^2 + N^2$ se poate descompune într-un produs de factori, scriindu-se:

$$(M + iN)(M - iN).]$$

Această metodă a fost inventată de matematicianul bolonez *Ferrari* (1522 — 1565) și aduce astfel rezolvarea unei ecuații de gradul patru la aceea a unei ecuații de gradul trei.

2° Să se aplice cele ce preced la ecuația definită prin:

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + 6x + 10 = 0. \quad (4)$$

Să se calculeze, în acest caz particular, rădăcinile ecuației definite prin $\varphi(\beta) = 0$ (una din rădăcini este 1).

Să se deducă trei descompuneri ale polinomului $f(x)$ într-un produs de două trinoame cu coeficienți reali sau complecși și rezolvarea ecuației (4).

Să se reprezinte imaginile rădăcinilor într-un plan complex. Care este suma și care este produsul lor?

3° Să se rezolve ecuația definită prin:

$$F(X) = X^4 - 4X^3 + 9X^2 - 4X + 8 = 0 \quad (5)$$

Care sînt modulele și argumentele rădăcinilor? Care este suma și care este produsul lor? Să se descompună $F(X)$ în factori pe corpul numerelor reale.

(Bacalaureat C, Paris, 1970)

4.68. Se consideră mulțimea E de ecuații de gradul patru, cu coeficienți reali, de forma:

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1 = 0. \quad (1)$$

Se notează prin i numărul complex de modul 1 și de argument $\frac{\pi}{2}$.

1° După ce s-a făcut împărțirea lui $f(x)$ prin x^2 , să se pună $x + \frac{1}{x} = u$, și să se demonstreze că noua necunoscută u este rădăcina ecuației definite prin:

$$u^2 + 2au + b - 2 = 0. \quad (2)$$

Să se deducă că ecuația (1) are totdeauna patru rădăcini, reale sau nu, distincte sau nu.
2° a) Revenind la forma inițială: $x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1 = 0$ să se demonstreze că dacă ecuația (1) are o rădăcină complexă, nereală, x_0 , are de asemenea ca rădăcină numărul conjugat al lui x_0 și numărul invers al lui x_0 .

b) Să se deducă atunci că, dacă modulul lui x_0 este diferit de 1, ecuația (1) are patru rădăcini complexe, cărora li se vor preciza distribuirea imaginilor în planul complex. O asemenea ecuație (1) este numită de tipul I.

c) Să se determine a și b știind că ecuația (1) admite ca rădăcină numărul $2 + i$. Să se rezolve în acest caz ecuația (1) și să se pună $f(x)$ sub forma unui produs de două polinoame de variabilă x , cu coeficienți reali.

d) Aceeași chestiune ca la șc), presupunând acum că ecuația (1) admite ca rădăcină numărul $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, ρ și θ fiind două numere reale astfel încît:

$$0 < \rho < 1, \quad 0 < \theta < \pi.$$

3° a) Să se demonstreze că, dacă ecuația (1) are o rădăcină complexă, nereală, de modul 1, ea are sau încă alte trei rădăcini de modul 1 (tipul II) sau încă alte două rădăcini reale și inverse (tipul III).

b) Să se demonstreze că ecuația (1) poate avea patru rădăcini reale (tipul IV).

c) Să se reprezinte, în planul complex, imaginile celor patru rădăcini ale ecuației (1) pentru fiecare din tipurile II, III, IV.

4° a) Fiecărui element e al lui E i se asociază punctul M de coordonate (a, b) într-un plan raportat la un reper ortonormat. M este numit imagine a lui e . Să se discute, după poziția lui M , tipul ecuației e .

b) Ecuația (1) fiind de tipul I, să se găsească mulțimea punctelor M astfel încît o rădăcină a ecuației asociate e are un modul dat $\rho(\rho < 1)$.

c) Ecuația (1) fiind de tipul III, imaginile în planul complex ale celor patru rădăcini pot fi conciclice?

4.69. A) 1° Să se determine rădăcinile cubice ale lui i și imaginile lor în planul complex.

2° Fie u un număr complex; u_1 fiind una din rădăcinile cubice ale lui u , cum se pot obține celelalte două rădăcini u_2 și u_3 ?

3° Fie două numere complexe u și v și rădăcinile lor cubice respective. Cum le asociem pentru ca produsul uv a două dintre ele să fie același?

B) Se consideră, pe $\mathbb{C}$, ecuația definită prin:

$$u^3 + 2u - 4i = 0 \quad (1)$$

Se pune $z = u + v$. Să se demonstreze că ecuația (1) este satisfăcută, luîndu-se u și v astfel încît u^3 și v^3 să fie rădăcinile ecuației pe $\mathbb{C}$, definite prin:

$$v^2 - 4iv - \frac{8}{27} = 0. \quad (2)$$

Să se rezolve ecuația (2) și să se deducă rădăcinile ecuației (1).

Notă. Se va calcula mai întîi:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3 \text{ și } \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3$$

4.70. Se consideră expresia (E): $(x + jy + j^2z)^3$, în care x, y, z sînt numere complexe și j și j^2 rădăcinile cubice ale unității.

1° Numerele x, y, z fiind date, să se demonstreze că atunci când x, y, z se permută în toate felurile posibile expresia (E) nu ia decît două valori distincte A și B . Ce condiție trebuie să satisfacă x, y, z ca să avem $A = B$?

2° Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației (1):

$$x^3 + px + q = 0,$$

unde p și q sînt numere reale.

a) Să se dea în funcție de p și q expresiile lui:

$$s_1 = \sum_{i=1}^3 x_i, \quad s_2 = \sum x_i x_j, \quad s_3 = x_1 x_2 x_3,$$

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2, \quad \sigma_3 = \sum_{i=1}^3 x_i^3, \quad \sigma_{2,1} = \sum x_i^2 x_j.$$

(i și j aparțin lui $C = \{1, 2, 3\}$.)

b) Presupunind că x, y, z sînt rădăcinile ecuației (1), să se formeze ecuația care admite pe A și B ca rădăcini. Să se deducă formulele care permit să se calculeze rădăcinile ecuației (1).

3° Să se rezolve, pe C , ecuația definită prin:

$$x^3 + 3x + 2 = 0.$$

4.71. Fie, pe C , ecuația definită prin:

$$z^4 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) - 4z^2 \cos \theta + 4iz \sin 2\theta + 8 \sin^3 \theta = 0,$$

unde θ este un real fixat.

1° Să se demonstreze că această ecuație are o rădăcină de forma $\lambda(1+i)$ și o rădăcină de forma $\lambda(-1+i)$, λ fiind un număr real care se va determina. Să se deducă rădăcinile ecuației.

2° Care sînt, în planul complex, atunci când θ variază, mulțimile respective ale imaginilor celor patru rădăcini?

4.72. Planul afin euclidian înzestrat cu un reper ortonormat este identificat cu mulțimea C .

1° Să se demonstreze că, dacă $|z| = 1$, numărul $Z = \frac{1+z}{1-z}$ este pur imaginat.

2° Să se rezolve, pe C , ecuația definită prin:

$$\left(\frac{x-1}{x+1} \right)^m + \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^m = 2 \cos \alpha, \quad m \in N^* \text{ și } 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (1)$$

3° Fie A, P, Q punctele respectiv de afixe:

$$z = 1, \quad p = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad q = \cos \alpha - i \sin \alpha.$$

Care sînt punctele M , imagini ale rădăcinilor de gradul n ale numerelor complexe p și q ? Să se demonstreze că rădăcinile ecuației (1) sînt reprezentate prin punctele de întîlnire ale dreptelor AM cu axa Oy a reperului. Să se discute numărul rădăcinilor ecuației (1).

(Arte și Meserii, 1962)

4.73. A) 1° Să se reprezinte, în planul complex, imaginile rădăcinilor ecuației definită prin:

$$z^5 - 1 = 0, \quad z \in C.$$

2° Să se demonstreze că rădăcinile polinomului $z^5 - 1$ în corpul C al numerelor complexe sînt puterile aceluiași număr ϵ .

Să se deducă că aceste rădăcini formează un subgrup al grupului multiplicativ al lui $\mathbb{C}^*$ izomorf cu grupul aditiv al întregilor modulo 5, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

3° Să se descompună polinomul $z^5 - 1$ în factori ireductibili pe $\mathbb{C}$, apoi pe corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale.

B) Fie E spațiul vectorial al lui $\mathbb{C}$ pe $\mathbb{Q}$ generat de rădăcinile ecuației definite prin $z^5 - 1 = 0$.

1° Să se demonstreze că, pentru orice întreg natural n , ϵ^n este element al lui E .

2° Să se demonstreze că $\{1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3\}$ este o bază a lui E .

3° Să se demonstreze că E este un subinel al lui $\mathbb{C}$.

*C) Fie $P(z)$ un polinom nenul cu o nedeterminare pe $\mathbb{Q}$ de grad cel mult egal cu trei.

1° Să se demonstreze că polinoamele cu coeficienți în $\mathbb{Q}$, $P(z)$ și $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ nu au nici un factor comun.

2° Să se demonstreze că $P(\epsilon)$ este inversabil în E .

3° Să se demonstreze că E este un subcorp al lui $\mathbb{C}$.

4.74 Se notează prin $\mathbb{C}$ corpul numerelor complexe.

Pentru λ real, se definește aplicația f_λ , de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$, definită prin:

$$z \mapsto Z = f_\lambda(z) = (1 + \lambda i)z - \lambda i.$$

1° Funcția f_λ este bijectivă?

2° Fie M imaginea lui Z și m aceea a lui z în planul complex. Fiecare aplicație f_λ definește o transformare punctuală plană T_λ și se notează $\vec{M} = T_\lambda(m)$.

a) Să se demonstreze că există un element unic al lui $\mathbb{C}$, z_0 , astfel încît, pentru orice λ real, $f_\lambda(z_0) = z_0$. Fie m_0 imaginea acestui element.

b) Să se calculeze $\frac{Z - z}{z - z_0}$ și să se deducă produsul scalar $\vec{m_0 m} \cdot \vec{m M}$.

3° a) Pentru m fixat și λ variabil, să se determine mulțimea punctelor M astfel încît $\vec{M} = T_\lambda(m)$.

b) Pentru M fixat și λ variabil, să se determine mulțimea punctelor m astfel încît:

$$M = T_\lambda(m).$$

c) Fie O, F, F', A și A' punctele axei reale respectiv de abscise $0, +1, -1, a, -a$, unde a este strict pozitiv și diferit de 1.

Pentru λ variabil, să se determine:

mulțimea punctelor Ω , astfel încît $\Omega = T_\lambda(0)$;

mulțimea punctelor K , astfel încît $K = T_\lambda(A)$;

mulțimea punctelor K' , astfel încît $K' = T_\lambda(A')$.

4.75. Fie, în planul complex, două puncte M_1 și M_2 respectiv de afixe

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{și} \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

unde x_1, y_1, x_2 și y_2 sînt numere reale.

1° Se presupun afixele z_1 și z_2 legate prin relația:

$$z_1 z_2 = i.$$

a) Ce relație leagă modulele ρ_1 și ρ_2 ale lui z_1 și z_2 ?
Ce relație leagă argumentele θ_1 și θ_2 astfel încît:

$$0_1 \in \arg z_1 \quad \text{și} \quad 0_2 \in \arg z_2?$$

b) Să se demonstreze relațiile:

$$x_2 = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{și} \quad y_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

c) Să se determine z_1 și z_2 cînd $z_1 = z_2$.

2° Numerele complexe z_1 și z_2 fiind legate prin relația $z_1 z_2 = i$, se notează prin T transformarea care asociază punctului M_1 punctul $M_2 = T(M_1)$.

a) Transformarea T este definită pentru toate punctele planului? Este involutivă? Care sînt punctele ei duble?

b) Folosind rezultatele de la chestiunea 1° b), să se determine curba transformată prin T a dreptei D de ecuație $x = \frac{1}{4}$. Să se precizeze natura și poziția acestei curbe.

c) Folosind rezultatele de la chestiunea 1° a), să se indice o construcție a punctului M_2 , punctul M_1 fiind fixat.

3° Se consideră mulțimea Γ a punctelor M , din care nu face parte punctul O , ale căror coordonate x și y verifică relația:

$$(\mathcal{R}) = x^4 - x^2 y^2 - y^2 = 0.$$

a) Se pune:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \quad (\rho > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi).$$

Să se demonstreze că pentru orice M element al lui Γ , distinct de O , avem:

$$\rho^2 = \operatorname{tg}^2 \theta.$$

Să se deducă că Γ este global invariantă la T .

b) Să se scrie relația $\mathcal{R}$ sub forma $y^2 = f(x)$ și să se studieze funcția g definită prin $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Să se reprezinte grafic mulțimea Γ .

(Bacalaureat C, Poitiers, 1970)

4.76. Planul afin euclidian π este raportat la un reper ortonormat direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ și identificat cu corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe.

Se notează prin A, B, P, Q respectiv imaginile numerelor complexe $-1, +1, +\frac{1}{2}, +2$

și prin m punctul de afix z . Fie C cercul de diametru $[A, B]$.

Oricărui punct m al lui $\pi - \{O\}$, i se asociază punctul M de afix Z ; Z este definit prin:

$$Z = \frac{z(2z - 1)}{z - 2}.$$

Se pune:

$$z = x + iy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Fie T aplicația care lui m îi asociază pe M .

1° Punctul m este element al segmentului $[A, B]$. Studiindu-se pe intervalul $[-1, +1]$ funcția f de variabilă reală x , definită prin:

$$f(x) = \frac{(2x - 1)x}{2 - x},$$

să se determine mulțimea transformată a segmentului $[A, B]$ prin T .

2° Să se demonstreze că Z se poate scrie sub forma:

$$Z = az + b + \frac{c}{z - 2},$$

a, b, c fiind numere reale.

Se pune:

$$Z = X + iY, \quad X \text{ și } Y \text{ fiind numere reale.}$$

Să se calculeze X și Y în funcție de x și y și să se deducă mulțimea punctelor m astfel ca M să fie element al axei $x'x$ a numerelor reale.

3° Se pune:

$$Z_1 = \frac{2z - 1}{2 - z}.$$

Să se demonstreze că:

$$|Z_1| = 2 \frac{\|\vec{mP}\|}{\|\vec{mQ}\|} \text{ și } \arg Z_1 = \mu(\widehat{mQ, Pm}).$$

[Un argument al lui Z_1 este o măsură a unghiului $(\widehat{mQ, Pm})$.]

4° Să se demonstreze că, dacă m este interior lui C , adică dacă $|z| < 1$, atunci $|Z_1| < 1$, pentru că, dacă m este exterior lui C , atunci M este exterior lui C .

5° Se presupune că m aparține semicercului C' de diametru $[A, B]$, care conține imaginea lui i . Se notează prin θ argumentul lui z astfel încît $0 \leq \theta \leq \pi$ și prin φ un argument al lui Z_1 .

Să se demonstreze că:

$$\sin \varphi \geq 0.$$

Se presupune: $0 \leq \varphi \leq \pi$. Să se calculeze $\cos \varphi$ în funcție de $\cos \theta$ și să se deducă că φ este o funcție crescătoare de θ .

(Bacalaureat C, Besançon, 1969)

4.77. Fie $z = x + iy$ și $Z = X + iY$ două numere complexe legate prin relația:

$$Z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1)$$

unde a, b, c și d sînt numere reale astfel încît:

$$ad - bc \neq 0.$$

Relația (1) definește o aplicație de la P la P raportată la un reper ortonormat $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ($\vec{i}$ de suport Ox , $\vec{j}$ de suport Oy), care face să corespundă punctului m de afix z (adică ale cărui coordonate carteziene în planul P sînt numerele reale x și y) punctul M de afix Z .

1° Această aplicație conservă dreapta $x'x$ (adică transformă orice punct al lui $x'x$ într-un punct al lui $x'x$). Să se spună pentru ce. Se consideră pe dreapta $y'y$ un punct oarecare m de afix $z = iy$. Să se calculeze afixul lui $Z = X + iY$ al punctului M corespunzător. Cum trebuie alese numerele reale a, b, c și d pentru ca relația (1) să păstreze nu numai dreapta $x'x$ ci de asemenea dreapta $y'y$? Se va găsi că există două aplicații răspunzînd la chestiunea:

$$\left(Z = kz \quad \text{și} \quad Z = \frac{k}{z}, \quad k \text{ real} \right).$$

2° Se consideră T acea dintre cele două aplicații precedente (altă decît identitatea) care admite punctul $A(+1, 0)$ ca punct dublu. Să se demonstreze că este involutivă și că admite al doilea punct dublu $B(-1, 0)$. Să se demonstreze că două puncte corespunzătoare oarecare m și M și punctele A și B sînt situate pe un același cerc, C , că dreapta

$x'x$ împarte în două părți egale unghiul $(\widehat{Om, OM})$ și că punctul în care dreapta mM taie dreapta $y'y$ este polul lui $x'x$ în raport cu C .

3° Oricărui punct m al planului P , altul decît A sau B , aplicația T îi atașează dreapta D care unește pe m cu transformatul său M . Reciproc, orice dreaptă D a planului P ,

trece prin punctul m ? Să se determine mulțimea dreptelor D care trec prin punctul m . Să se indice o construcție geometrică a perechii de puncte transformate (m, M) situate pe o dreaptă D dată.

Să se precizeze mulțimea punctelor M când m descrie o dreaptă Δ care trece prin O și mulțimea mijloacelor segmentului $[m, M]$, în aceeași ipoteză.

4° Se presupune că m descrie un cerc C , de centru O și de rază dată r și se pune:

$$\mu(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \varphi.$$

Să se formeze, relativ la semidreptele Ox, Oy , ecuația dreptei D atașată lui m și aceea a mulțimii punctelor N care se proiectează ortogonal pe Ox și Oy în punctele în care sînt tăiate de D .

4.78. În planul complex, se consideră aplicația T care face ca oricărui punct M de afix z nenul să-i corespundă punctul M' de afix z' definit prin:

$$z' = \frac{h^2 - z^2}{2z},$$

unde h este un număr complex fixat nenul. Se notează $M' = T(M)$.

1° Să se studieze mulțimea punctelor invariante la aplicația T și să se construiască aceste puncte.

2° M' fiind un punct dat al planului, să se demonstreze că mulțimea punctelor M astfel încît $T(M) = M'$ conține în general două puncte M_1 și M_2 respectiv de afixe z_1 și z_2 . Să se calculeze:

$$z_1 \times z_2.$$

Să se demonstreze că mulțimea punctelor M' astfel încît M_1 și M_2 sînt confundate conține două puncte A'_1 și A'_2 . Care sînt punctele A_1 și A_2 respectiv de afixe a_1 și a_2 , astfel încît:

$$A'_1 = T(A_1) \quad \text{și} \quad A'_2 = T(A_2)?$$

3° Se pune:

$$u = \frac{z - a_1}{z - a_2} \quad \text{și} \quad u' = \frac{z' - a'_1}{z' - a'_2},$$

unde a'_1 și a'_2 sînt afixe respective ale lui A'_1 și A'_2 .

Să se calculeze u' în funcție de u .

4° Să se studieze mulțimea punctelor M' în fiecare din cazurile următoare:

a) M descrie mediatoarea segmentului $[A_1, A_2]$;

b) M descrie dreapta A_1A_2 ;

c) M descrie un cerc care conține pe A_1 și A_2 .

4.79. Fie C mulțimea numerelor complexe și i numărul complex de modul 1 și de argument $\frac{\pi}{2}$.

Se consideră aplicația de la $C - \{i\}$ la C , definită prin:

$$f(z) = \frac{iz + 2}{z - i}.$$

În planul P care reprezintă pe C , punctul M are ca afix pe z ; fie M' punctul de afix $f(z)$. Se asociază astfel lui f o aplicație de la P la P , notată F , astfel încît:

$$M' = F(M).$$

Aceasta este definită numai cînd M este punctul I de afix i .

Vom repera un punct, fie prin afixul său, fie prin coordonatele sale în reperul ortonormat al planului.

1° a) Să se determine punctele invariante, A și B , ale transformării F .

b) Să se demonstreze că f este involutivă, adică că:

$$M = F(M').$$

c) Să se demonstreze că, dacă $z = iy$, cu y aparținând lui $\mathbb{R} - \{1\}$, $f(z)$ se exprimă prin $f(z) = iY$, unde Y este real.

Să se demonstreze că, dacă $z = x + i$, cu x aparținând lui $\mathbb{R} - \{0\}$, $f(z)$ se exprimă prin $f(z) = X + i$, unde X este real.

Să se deducă că există două drepte fiecare din ele fiind global invariantă la aplicația F (se exceptează totdeauna punctul I).

2° a) Să se demonstreze că, pentru orice z diferit de i :

$$|f(z) - i| \cdot |z - i| = 1.$$

(Notația $|z|$ înseamnă „modul de z “.)

Care este transformata prin F a cercului de centru I și de rază R ?

b) Să se demonstreze că transformata prin F a unui punct al cărui afix este real aparține cercului având ca centru punctul de afix $\frac{3i}{2}$ și ca rază $\frac{1}{2}$.

3° Se consideră aplicația g de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$, definită prin:

$$g(z) = z - i.$$

Fie G transformarea punctuală asociată. Să se demonstreze că g este bijectivă. Se notează prin g^{-1} aplicația inversă a lui g . Să se determine g^{-1} .

Să se determine aplicația h astfel că aplicația f definită la începutul problemei să se scrie:

$$f = g^{-1} \circ h \circ g.$$

(Bacalaureat, parțial).

4.80. O aplicație notată F face să corespundă, la orice punct m de afix z din plan, punctul M de afix Z , astfel încît:

$$\frac{Z - 1}{Z + 1} = \frac{z - 1}{z + 1} (\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

α fiind un real fixat.

1° Să se precizeze aplicația T pentru $\alpha = 0$ și $\alpha = \pi$.

2° Se consideră aplicația obținută compunînd două aplicații T , corespunzînd la două valori α' și α'' ale lui α . Să se demonstreze că avem:

$$T_{\alpha'} \circ T_{\alpha''} = T_{\alpha''} \circ T_{\alpha'} = T_{\alpha' + \alpha''}.$$

3° Se presupune $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Să se calculeze coordonatele (X, Y) ale lui M , în funcție de

coordonatele (x, y) ale lui m , și invers. Să se determine mulțimea punctelor M cînd:

a) m descrie cercul de centru O și de rază 1;

b) m descrie un cerc fix care conține punctele de pe $x'Ox$ de abscise -1 și $+1$;

c) m descrie un cerc fix care conține punctele de pe $y'Oy$ de abscise -1 și $+1$.

4.81. Se notează prin A și B punctele de pe axa $x'Ox$ de abscise respective $+1$ și -1 , prin M imaginea numărului complex Z , prin m imaginea numărului complex z , și se presupune că:

$$Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

1° Să se demonstreze că dreapta Mm este o bisectoare a unghiului $(\widehat{MA}, \widehat{MB})$, și că avem:

$$Mm^2 = MA \cdot MB.$$

2° Fie $Z = X + iY$ și $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0$). Să se calculeze X și Y , în funcție de r și θ . Să se deducă mulțimea punctelor M când m descrie un cerc de centru O , și când m descrie o dreaptă care conține pe O .

3° Să se demonstreze că avem:

$$\frac{Z-1}{Z+1} = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2,$$

și să se deducă relațiile:

$$\begin{aligned} (\widehat{MA}, \widehat{MB}) &= 2 (\widehat{mA}, \widehat{mB}), \\ \frac{MA}{MB} &= \left(\frac{mA}{mB} \right)^2 \end{aligned}$$

și mulțimea punctelor M când m descrie un cerc care conține pe A și B .

4.82. Fie A și B două puncte de abscise $+1$ și -1 pe Ox . Fie $m(z)$ și $M(Z)$ astfel încît:

$$z^2 + Z^2 = 1.$$

1° Să se demonstreze că Om este, în direcție, bisectoarea unghiului $(\widehat{MA}, \widehat{MB})$ și că:

$$Om^2 = MA \cdot MB.$$

(Să se scrie:

$$z^2 = (1-Z)(1+Z).)$$

OM joacă același rol pentru triunghiul $\{A, m, B\}$.

2° Se dă:

$$\begin{aligned} z' &= iz & \text{și} & & Z' &= iZ, & u &= z + iZ, \\ v &= z - iZ, & & & u' &= Z + iz, & v' &= Z - iz. \end{aligned}$$

Să se calculeze:

$$-\frac{u}{v'} \quad \text{și} \quad \frac{v}{u'}.$$

Fie m', M', C, D, C', D' respectiv imaginile lui z', Z', u, v, u', v' . Să se demonstreze că OC și OD' sînt perpendiculare ca și OD și OC' .

3° Să se demonstreze că:

$$MA + MB = mA + mB = OC + OD.$$

4.83. În mulțimea $\mathbb{C}$, se consideră funcția f care asociază numărului z numărul Z astfel încît:

$$f(z) = Z = \frac{z^2}{2z-1}.$$

1° Care este domeniul de definiție al lui f ? Pe acest domeniu funcția f este o bijecție?

2° Fie φ funcția care, numărului complex z , face să-i corespundă numărul $Z' = \frac{Z}{z-1}$ și

fie φ_1 funcția definită prin:

$$z' \mapsto Z' = z'^2.$$

Să se demonstreze că φ este o involuție și că f este transmutata prin φ a lui φ_1 :

$$f = \varphi \circ \varphi_1 \circ \varphi.$$

(Să se calculeze $\varphi_1 \circ \varphi$.)

4.84. În planul raportat la un reper ortonormat $(0, \vec{i}, \vec{j})$, se consideră punctul M de coordonate (x, y) , imaginea a numărului complex $z = x + iy$. Se spune de asemenea că z este afixul lui M .

α fiind un număr real dat, fie produsul: $z' = (z + 1 + i)(\alpha z - i)$. Se notează prin M' imaginea lui z' .

1° Se dă $\alpha = 0$. Să se demonstreze că M' este transformatul lui M printr-o aplicație care se va preciza.

2° Se dă acum α diferit de 0.

a) Să se determine punctele M astfel încât $z' = 0$.

b) Să se pună z' , în cazul general, sub forma $A + iB$, A și B fiind numere reale.

3° Ne mărginim de acum înainte la cazul $\alpha = 1$; M' este transformatul lui M printr-o aplicație T .

a) Care este ecuația mulțimii H_1 a punctelor M astfel încât z' să fie pur imaginar? Să se demonstreze că H_1 este o hiperbolă căreia i se vor determina centrul de simetrie și asimptotele și care se va construi.

b) Care este ecuația mulțimii H_2 a punctelor M astfel că z' să fie real?

Să se pună ecuația găsită sub forma $y = f(x)$ și să se construiască H_2 .

Să se demonstreze că punctele de intersecție ale lui H_1 și H_2 sînt cunoscute a priori.

c) Ce ecuație verifică afixele punctelor invariante la T ? Să se determine aceste afixe sub formă trigonometrică.

(Bacalaureat D, Paris, 1969)

4.85. Fie z un număr complex de imagine m în planul complex. Lui z , relația:

$$Z^2 - 2zZ + 2z^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

face să-i corespundă două numere complexe Z_1 și Z_2 , rădăcini ale acestei ecuații în Z . Se notează cu M_1 și M_2 imaginile respective ale lui Z_1 și Z_2 și prin A și A' punctele de afixe 1 și -1 .

1° Să se demonstreze că:

a) m este mijlocul segmentului $[M_1, M_2]$;

b) $\|\vec{mM}_1\|^2 = \|\vec{mM}_2\|^2 = \|\vec{mA}\| \cdot \|\vec{mA'}\|$;

c) dreapta definită prin M_1 și M_2 este perpendiculară pe bisectoarea unghiului $(\vec{mA}, \vec{mA'})$ ($Z_1 \neq Z_2$ și $z \neq 1$ și $z \neq -1$).

2° Să se stabilească relațiile:

$$\|\vec{M_1A}\| \cdot \|\vec{M_1A'}\| = \|\vec{M_2A}\| \cdot \|\vec{M_2A'}\| = \|\vec{Om}\| \cdot \|\vec{M_1M_2}\|.$$

3° Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor $(\vec{M_1A}, \vec{M_1A'})$ și $(\vec{M_2A}, \vec{M_2A'})$ sînt perpendiculare și să se compare aceste bisectoare cu acelea ale unghiului $(\vec{M_1M_2}, \vec{Om})$.

4° Ecuația (1) face de asemenea să-i corespundă oricărui număr complex Z , de imagine M , două numere complexe Z_1 și Z_2 respectiv de imagini m_1 și m_2 , rădăcini ale ecuației (1) în z .

a) Cum sînt dispuse punctele O, M, m_1 și m_2 ?

b) Să se compare bisectoarele unghiurilor $(\vec{Mm_1}, \vec{Mm_2})$ și $(\vec{MA}, \vec{MA'})$.

5° Să se determine mulțimea punctelor M_1 și M_2 atunci cînd:

- a) m aparține axei realilor (z este un real).
 b) m aparține imaginariilor puri (z este un imaginar pur).
 c) m descrie o elipsă E de focare A și A' .

4.86. În raport cu un reper ortonormat $\mathcal{R} = (0, \vec{u}, \vec{v})$, o conică E are ecuația:

$$12x^2 + 16y^2 + 12ax - 9a^2 = 0,$$

unde a este un număr real fixat, strict pozitiv.

1° Să se calculeze coordonatele centrului, ale focarelor și ale vîrfurilor sale. Să se scrie ecuațiile directoarelor sale D și D' (D fiind acela care întâlnește axa focală într-un punct de abscisă pozitivă). Să se calculeze excentricitatea e .

Fie M un punct oarecare al lui E . Să se calculeze, în funcție de a și de abscisa x a lui M expresia rațională a lui $\|\vec{OM}\|$. Se pune $\|\vec{OM}\| = \rho$ și fie θ o măsură a unghiului

lui $(\vec{u}, \vec{OM})$. Să se calculeze ρ în funcție de a și de θ .

2° La fiecare punct M al lui E , de coordonate (x, y) , se asociază numărul complex $z = x + iy$, afix al lui M .

Să se scrie expresia trigonometrică a lui z în funcție de a și de θ (θ fiind un argument). Fie z' și z'' afixe ale două puncte M' și M'' ale lui E , respectiv de argumente α și $\alpha + \pi$.

a) Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $z' - z''$ și să se deducă lungimea segmentului $[M', M'']$.

b) Se consideră, în plan, punctul P al cărui afix Z este definit prin relația:

$$\frac{2}{Z} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}.$$

Să se scrie expresia trigonometrică a lui Z . Să se deducă mulțimea punctelor P când α variază. Ce se poate spune de figura formată prin punctele O, P, M', M'' ?

4.87. În raport cu un reper ortonormat $\mathcal{R} = (0, \vec{u}, \vec{v})$ o conică γ are ecuația:

$$15x^2 - 10y^2 - 30ax + 9a^2 = 0,$$

unde a indică un număr real fixat strict pozitiv.

1° Care este natura conicii γ ? Să se calculeze coordonatele centrului, ale vîrfurilor. Să se determine, dacă este cazul, ecuațiile asimptotelor. Să se calculeze excentricitatea e . Fie M un punct oarecare al lui γ , de coordonate (x, y) . Să se calculeze, în funcție de

a și de x , expresia rațională a lui $\|\vec{OM}\|$ (se vor distinge două cazuri).

Se pune $\|\vec{OM}\| = \rho$ și fie θ o măsură a unghiului $(\vec{Ox}, \vec{OM})$. Să se calculeze ρ în funcție de a și de θ .

2° Fie α un număr real și D_α dreapta care conține O și punctul de afix $u_\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Cînd D_α nu este paralelă cu o asimptotă a lui γ , se notează M' și M'' punctele de intersecție ale lui D_α cu γ și z' și z'' afixe ale acestor puncte.

a) Să se calculeze z' și z'' în funcție de α .

b) Se consideră punctul P , de afix Z definit prin:

$$\frac{2}{Z} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}.$$

Să se dea expresia trigonometrică a lui Z . Care este mulțimea punctelor P cînd α variază? Ce se poate spune de figura formată prin punctele O, P, M', M'' ?

4.88. Se dau două numere complexe nenule a și s și se consideră șirul Σ al numerelor complexe $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, definit prin $z_0 = 0$ și prin relația de recurență:

$$z_{n+1} = sz_n + a, \quad \text{pentru orice } n \text{ întreg natural.} \quad (1)$$

a) Să se calculeze z_1, z_2, z_3, z_4 în funcție de a și de s . Să se exprime simplu z_n în funcție de a, s și n când: $s \neq 1$. Ce se poate spune de Σ când $s = -1$? Să se dea valoarea lui z_n când $s = 1$.

b) Două elemente distincte din Σ pot fi egale? Să se demonstreze atunci că Σ este periodic.

c) Să se verifice că doi termeni consecutivi din Σ nu sînt niciodată egali și să se demonstreze că:

$$\frac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n} = s + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

d) Invers, fie un șir dat care să verifice următoarele trei condiții:

doi termeni consecutivi nu sînt niciodată egali;

relația (2) este satisfăcută;

primii doi termeni sînt 0 și a .

Să se demonstreze că un astfel de șir se confundă cu Σ .

(Bacalaureat C, Paris, 1971. Parțial)

4.89. Se notează:

a) prin $\mathbb{Z}$ mulțimea întregilor relativi și prin $\mathbb{C}$ aceea a numerelor complexe;

b) prin ρ și ρ^* rădăcinile în $\mathbb{C}$, presupuse neraționale ($\rho \notin \mathbb{Q}$), ale ecuației:

$$x^2 - px + q = 0, \quad (1)$$

unde p și q sînt două elemente date ale lui $\mathbb{Z}$;

c) prin Ω submulțimea lui $\mathbb{C}$ formată din numerele $\omega = x + \rho y$ obținute când x și y sînt întregi relativi $[(x, y) \in \mathbb{Z}^2]$.

A) 1° a) Să se demonstreze echivalența:

$$x \in \mathbb{Z}, \quad y \in \mathbb{Z} \quad x + \rho y = 0 \iff x = y = 0.$$

b) Să se demonstreze că suma și produsul pe $\mathbb{C}$ a două elemente din Ω sînt elemente din Ω și că operațiile interne astfel definite dau lui Ω o structură de inel comutativ. (Demonstrațiile să fie cît mai succinte posibil.)

2° Pentru orice element $\omega = x + \rho y$, se pune:

$$\omega^* = x + \rho^* y.$$

Să se demonstreze că ω^* este element din Ω .

3° Pentru orice element ω din Ω , se definește:

$$N(\omega) = \omega \omega^* = f(x, y).$$

a) Să se demonstreze că $f(x, y) = x^2 + pxy + qy^2$.

Să se constate că $N(\omega)$ este un întreg relativ.

b) Să se demonstreze că, pentru orice pereche (ω_1, ω_2) de elemente din Ω , avem:

$$(\omega_1 \omega_2)^* = \omega_1^* \omega_2^*$$

Să se deducă că:

$$N(\omega_1 \omega_2) = N(\omega_1) N(\omega_2).$$

c) Să se demonstreze că:

$$N(\omega) = 0 \iff \omega = 0.$$

4° Fie ω un element din Ω . Să se demonstreze că numărul complex ω^{-1} este un element din Ω dacă și numai dacă $N(\omega)$ este egal cu 1 sau cu -1 .

Să se demonstreze că, înzestrată cu legea înmulțirii din $\mathbb{C}$, submulțimea Ω' a elementelor ω din Ω astfel încît $N(\omega) = 1$ este un grup comutativ.

B) Fie a, b, c și d întregi relativi. Fie aplicația T de la $\mathbb{Z}^2$ la $\mathbb{Z}^2$ definită prin $T(x, y) = (X, Y)$, cu $X = ax + by$ și $Y = cx + dy$.

Se propune de a determina a, b, c și d astfel ca aplicația T corespunzătoare să verifice condiția:

$$\forall(x, y) \text{ avem } N(X + \rho Y) = N(x + \rho y). \quad (2)$$

a) Să se calculeze $N(X + \rho Y)$ în funcție de x, y, a, b, c, d, p, q .

Se consideră numerele α, α^*, β și β^* definite prin:

$$\begin{aligned} \alpha &= a + \rho c, & \beta &= b + \rho d, \\ \alpha^* &= a + \rho^* c & \text{și} & \beta^* = b + \rho^* d. \end{aligned}$$

Să se demonstreze că:

$$N(X + \rho Y) = \alpha\alpha^*x^2 + (\alpha^*\beta + \alpha\beta^*)xy + \beta\beta^*y^2.$$

b) Să se găsească între $\alpha, \beta, \alpha^*, \beta^*, p$ și q o mulțime de relații necesare și suficiente pentru ca condiția (2) să fie realizată.

Să se verifice că atunci $\alpha^*\beta$ și $\alpha\beta^*$ sînt soluțiile ecuației (1).

c) În cazul cînd condiția (2) este verificată și cînd $\alpha\beta^* = \rho$, să se calculeze b și d în funcție de a, c, p și q sub formă de polinoame de gradul întâi în raport cu fiecare din variabilele care le conțin.

Care este valoarea lui $f(b, d)$?

4.90. S-a definit, pe corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe, o lege de compoziție internă notată „ $*$ ” punînd:

$$z * z' = z \cdot \bar{z'}.$$

1° Să se demonstreze că:

$$|z * z'| = |z \cdot \bar{z'}|.$$

2° Legea $*$ este comutativă? Este asociativă? Admite un element neutru? Este distributivă în raport cu adunarea a două numere complexe?

3° Numărul $z = a + ib$ fiind fixat, să se determine $z' = x + iy$ (x și y reali) astfel încît:

$$z * z' = 1.$$

Să se demonstreze că z' se poate exprima în funcție de z și $|z|$.

Avem atunci $z' * z = 1$?

4° Să se determine numărul complex $z = x + iy$ astfel încît:

$$(z * z) * z = i.$$

4.91. Fie două numere complexe:

$$z_1 = x_1 + iy_1 \text{ și } z_2 = x_2 + iy_2.$$

Se convine să se spună că z_1 precede pe z_2 , și se notează $z_1 > z_2$ dacă:

$$x_1 < x_2 \text{ sau dacă } x_1 = x_2 \text{ și } y_1 < y_2.$$

1° Să se demonstreze că:

$$(z_1 > z_2 \text{ și } z_2 > z_3) \implies (z_1 > z_3).$$

2° Relația $z_1 > z_2$ antrenează:

a) pentru orice număr complex u :

$$z_1 + u > z_2 + u?$$

b) pentru orice real a :

$$z_1 a > z_2 a?$$

3° Dacă: $z_1 > z_2$ și $0 > k$ ($k \in \mathbb{C}$), avem: $kz_1 > kz_2$?

4.92. Se notează prin $\mathbb{C}$ corpul numerelor complexe. Se consideră funcția h de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$ definită prin:

$$z \mapsto h(z) = Z, \quad Z = \frac{(1 - i\sqrt{2})z + 1}{z - (1 + i\sqrt{2})}.$$

1° Să se precizeze pe ce mulțime funcția h este o bijecție.

2° Se înzestrează h cu legea de compoziție a aplicațiilor, notată „o”. Să se calculeze $h^2 = h \circ h$, apoi $h^2 \circ h^2 = h^4$. Să se demonstreze că mulțimea $\mathcal{H} = \{h, h^2, h^3, h^4\}$ înzestrată cu legea precedentă este un grup.

3° Să se demonstreze că există două elemente a și b din $\mathbb{C}$, pe care le vom determina, astfel încît:

$$h(a) = a \text{ și } h(b) = b.$$

4° Să se demonstreze că h^2 poate să se definească foarte simplu folosind fracția rațională $\frac{z+1}{z-1}$. Să se formeze $\frac{Z-a}{Z-b}$ și să se demonstreze că se regăsește rezultatul de la chestiunea a doua.

3° Se consideră, în planul complex, un cerc Γ care conține punctele de afixe a și b și nu conține punctul de afix $1 + i\sqrt{2}$. Care este imaginea lui Γ prin aplicația definită prin h ?

4.93. În planul complex, se notează prin m, M, M_1 , respectiv punctele de afixe z, Z, Z_1 și prin A și A' punctele de afixe 1 și -1 .

1° Relația $Z\bar{Z}_1 = 1$ definește o aplicație care, la punctul M de afix Z , asociază punctul M_1 de afix Z_1 . Relația $(z-1)(\bar{Z}_1-1)$ definește o aplicație care, la punctul m de afix z , asociază punctul M_1 de afix Z_1 .

Să se studieze aceste două aplicații.

Eliminarea lui $\bar{Z}_1$ între cele două relații precedente conduce la exprimarea lui Z în funcție de z :

$$Z = f(z).$$

2° Se numește π semiplanul definit prin punctele de coordonate x și y , astfel încît:

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Transformarea definită prin $Z = f(z)$ are două puncte invariante respectiv de afixe α și β , punctul de afix α fiind un element al lui π .

Să se demonstreze relația:

$$\frac{Z - \beta}{Z - \alpha} = i \frac{z - \beta}{z - \alpha}.$$

Să se deducă că, dacă m este un punct al lui π , transformatul său M este de asemenea un punct al lui π .

3° La orice număr real k strict pozitiv, se asociază C_k , mulțimea punctelor M al căror afix verifică $|f(z)| = k$.

Să se determine o ecuație carteziană a lui C_k .

4.94. Se notează prin T_α aplicația care, la orice punct m de afix z , corespunde punctul M de afix Z astfel încît:

$$Z = \frac{z(\cos \alpha + \sin \alpha) - 2 \sin \alpha}{z \sin \alpha + (\cos \alpha - \sin \alpha)}, \quad \alpha \text{ real}$$

1° Să se demonstreze că aplicația T_α admite o aplicație inversă, care se va caracteriza printr-o relație analogă celeia care caracterizează pe T_α .

- 2° Să se demonstreze că aplicația T_α admite în general două puncte duble P și Q , cărora le vom calcula afixe p și q (se va nota prin P punctul a cărui ordonată este pozitivă).
 3° Să se demonstreze relația care caracterizează pe T_α poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{Z - p}{Z - q} = \lambda \frac{z - p}{z - q},$$

în care λ este un număr complex independent de z . Să se calculeze λ în funcție de α . Să se deducă:

a) o relație între rapoartele de lungimi $\frac{MP}{MQ}$ și $\frac{mP}{mQ}$;

b) o relație între unghiurile $(\widehat{MP}, \widehat{MQ})$ și $(\widehat{mP}, \widehat{mQ})$.

4° Să se determine curba transformată prin T_α a drepte PQ . Să se precizeze cazurile particulare. Să se deducă din acest studiu o construcție geometrică simplă a lui M pornind de la m .

5° În general, se consideră două puncte oarecare m_1 și m_2 , respectiv de afixe z_1 și z_2 ; se notează prin M_1 și M_2 , respectiv de afixe Z_1 și Z_2 , transformatele lor respective prin T_α . Să se calculeze complexul μ astfel încît:

$$\frac{Z - Z_1}{Z - Z_2} = \mu \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Să se deducă curba transformată prin T a unei drepte sau a unui cerc oarecare.

6° La fiecare valoare a parametrului α este asociată o aplicație T_α . Să se studieze structura conferită mulțimii tuturor acestor aplicații T_α prin compunerea aplicațiilor.

4.95. Se notează prin T_α aplicația care, la orice punct m de afix z , face să corespundă punctul M de afix Z astfel încît:

$$Z = \frac{(1 - \alpha)z + 2(1 - i)}{z - \alpha - 3i}. \quad (1)$$

(Parametrul α este un complex, căruia îi vom nota imaginea prin A .)

1° Să se demonstreze că aplicația T_α admite o transformare inversă T_α^{-1} , care se va caracteriza printr-o relație analoagă cu (1); Să se determine valoarea α_0 pe care convenim

s-o atribuim lui α pentru ca $T_\alpha^{-1} = T_\alpha$.

2° Să se demonstreze că aplicația T_α admite două puncte duble P și Q , cărora li se vor calcula afixe respective p și q (astfel ca $|p| > |q|$). Să se demonstreze că relația (1) este echivalentă cu relația:

$$\frac{Z - p}{Z - q} = \lambda \frac{z - p}{z - q}, \quad (2)$$

în care λ este un complex independent de z . Să se calculeze λ în funcție de α .

3° Să se determine mulțimea L a punctelor A , așa fel încît λ să fie real; să se distingă pe această mulțime regiunile care corespund lui λ pozitiv și lui λ negativ. Să se determine la fel mulțimea L' a punctelor A , astfel ca modulul lui λ să fie egal cu 1; să se indice cum variază argumentul lui λ cînd A descrie L' . (Se va nota prin P' și Q' punctele respectiv de afixe $p' = p - 3i$ și $q' = q - 3i$.)

4° În această parte, se presupune λ real. Să se interpreteze geometric relația (2) și să se deducă o construcție geometrică simplă a lui M plecînd de la m . Să se determine mulțimea punctelor M cînd m rămînînd fix, punctul A descrie pe L . Să se efectueze construcția lui M plecînd de la m , cînd α are valoarea α_0 .

5° În această parte, se presupune că modulul lui λ este egal cu 1. Să se interpreteze geometric relația (2) și să se deducă o construcție geometrică simplă a lui M plecînd

de la m . Să se determine mulțimea punctelor M când, m rămânând fix, punctul A descrie L' . Să se efectueze construcția lui M plecând de la m , când $\alpha = -2i$.

6° În cazul general unde α , deci și λ , este oarecare, să se indice o construcție geometrică a lui M plecând de la m . Să se efectueze această construcție când $\alpha = 2 - i$.

4.96. Fie un inel comutativ unitar $(A, +, \cdot)$, unde elementul neutru al adunării este notat cu 0 , unde elementul neutru al înmulțirii este notat e . Fie α un element al lui A .

A. 1° Fie $\mathcal{A}$ produsul cartezian $A \times A$. Se înzestrează această mulțime cu o adunare și o înmulțire definite prin:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) (c, d) = (ac + \alpha bd, ad + bc).$$

Să se demonstreze că $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ este un inel comutativ unitar.

2° Fie $\mathcal{A}_*$ produsul $A \setminus \{0\}$. Să se demonstreze că în el putem defini, prin restricția legilor lui $\mathcal{A}$, o structură de inel.

Dacă se notează:

$$f = [a \mapsto (a, 0)]$$

f este un izomorfism între A și $\mathcal{A}_*$. Se va identifica pe viitor A și $\mathcal{A}_*$.

3° Fie $\omega = (0, e)$.

Să se demonstreze egalitatea:

$$\omega^2 = (\alpha, 0).$$

4° Se presupune de acum înainte că A este un inel integru și că egalitatea $(2x = 0)$, implică faptul că x este zero.

Să se rezolve ecuația definită prin:

$$(x, y) (x, y) = (\alpha, 0).$$

Să se deducă că orice element z al lui $\mathcal{A}$ se poate scrie sub forma:

$$z = a + \omega b \quad (a \in A, \quad b \in A, \quad \omega^2 = \alpha).$$

B. Se presupune, în această problemă, că α este nul și că A este corpul numerelor reale; $\mathcal{A}$ este atunci mulțimea numerelor duale.

1° Să se demonstreze că $\mathcal{A}$ nu este integru.

2° Să se determine elementele lui $\mathcal{A}$ care admit un invers pentru înmulțire.

3° Să se studieze unicitatea descompunerii:

$$z = a + \varepsilon b, \quad \varepsilon = (0, 1).$$

4° Să se studieze existența rădăcinilor pătrate ale numărului dual:

$$z = a + \varepsilon b.$$

5° Să se rezolve ecuația de gradul doi definită pe $\mathcal{A}$ prin:

$$z^2 + pz + q = 0 \quad (p \in \mathcal{A}, \quad q \in \mathcal{A}).$$

C. Se presupune că A este integru, că nu există nici un element în A astfel încît $\alpha = \beta^2$, și că egalitatea $(2x = 0)$ implică faptul că x este zero.

1° Să se studieze unicitatea descompunerii:

$$z = a + \omega b \quad (a \in A, \quad b \in A, \quad \omega^2 = \alpha).$$

2° Se va nota de acum înainte:

$$\bar{z} = a - \omega b.$$

Să se demonstreze că aplicația:

$$f[z \mapsto \bar{z}]$$

satisface la egalitățile:

$$f(z + z') = f(z) + f(z'), \quad f(zz') = f(z)f(z').$$

Care este natura lui f ?

3° Se pune $\varphi(z) = z\bar{z}$.

Să se demonstreze egalitățile:

$$\varphi(z) = a^2 - ab^2;$$

$$\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z').$$

4° Să se demonstreze că elementul z admite un invers în $\mathcal{A}$ dacă și numai dacă $\varphi(z)$ admite un invers în A . Să se deducă că $\mathcal{A}$ este un corp dacă A este un corp.

D. Se presupune că A este un corp, că nu există nici un element β în A astfel încît $\alpha = \beta^2$ și că egalitatea ($2x = 0$) implică faptul că x este zero.

Se consideră mulțimea $\mathcal{M}(\alpha)$ a matricelor pătrate de ordinul doi cu elemente în A de forma:

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & ab \\ b & a \end{pmatrix}.$$

1° Să se definească pe $\mathcal{M}(\alpha)$ o adunare și o înmulțire, inspirată din acelea ale matricelor reale, care-i dă o structură de inel comutativ.

2° Să se demonstreze că $\mathcal{M}(\alpha)$ este un corp.

3° Să se regăsească acest rezultat considerându-se aplicația:

$$a = [a + \omega b] \longmapsto M(a, b).$$

4° Să se rezolve ecuația definită pe $\mathcal{A}$ prin:

$$z^2 - \alpha = 0.$$

5° *Aplicație.* Se ia $A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Să se demonstreze că se poate lua $\alpha = \bar{2}$.

Câte elemente are $\mathcal{A}$? Să se construiască tabelele acestor corpuri.

6° Să se examineze cazul în care A este unul din corpurile $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$ (al numerelor raționale sau reale) și unde $\alpha = -1$.

INDEX

A

A 107
absolută (eroare) 44
—— (aproximare) 44
—— (valoare) 33
adaos (valoare aproximativă prin) 30
adiacente (șiruri) 28
afix 90
 $Am\ z$ 113
amplitudinea unui număr complex 113
aplicația transformată 93
apotemă 154
aproximare absolută 44
—— relativă 44
aproximativă (valoare) 30, 44
 $Arg\ z$, $arg\ z$ 117
Arhimede (teorema lui) 29
arhimedian (corp) 29
automorfism 39
axele numerelor reale 92
—— numerelor imaginare 92
—— numerelor complexe 92
axială (simetrie plană) 95

B

binomă (ecuație) 151
bulă deschisă 36
—— închisă 36

C

C 60
 C^* 63
compatibilitate 20
complex (număr) 69
—— (plan) 92
comutativ (corp) 19
complexe (axa numerelor) 91
congruent 36
congruențe 36
conjugate (numere) 74
corp (arhimedian 29
—— comutativ 19
—— comutativ total ordonat 19
—— valuat 35
 $\cos \varphi$, $\cos x$ 113

D

densă 33
deschis (interval) 28

deschisă (bulă) 36
determinare principală 118
distanță 36
dreaptă încheiată 29

E

e^{ix} 136
echibaricentru 161
ecuație binomă 151
eroare absolută 44
—— relativă 44
Euler (formulele lui) 137

F

forma trigonometrică 113
formula lui Moivre 119
formulele lui Euler 137

I

i 69
 $\Im(z)$ 69
imaginar (pur) 69
imaginară (parte) 69
imaginare (axa numerelor) 92
image (vector) 90
inegalitățile triunghiulare ale lui Minkowski 35, 85
 $\inf A$ 24
inferioară (margine) 24
interioare unul altuia (intervale) 27
interval 27
—— închis 27
—— deschis 28
intervale interioare unul altuia 27
încadrare 45
încheiată (dreaptă) 29
întreagă (parte) 54
întregi relativi 22
irațional (număr) 32

J

J 62
 j 77

L

lipsă (valoare aproximativă prin) 30

M

$\mathcal{M}$ 60
 $M(a, b)$ 60
majorant 24
majorată (mulțime) 24
margine superioară 25
—— inferioară 25
matrice scalară 102
—— transpusă 64
 $\max A$ 24
maximal 24
măsura unui unghi 140
metric (spațiu) 36
 $\min A$ 24
minimal 24
Minkowski (inegalitățile triunghiulare ale lui) 35, 85
minorant 24
minorată (mulțime) 24
modul 33, 83
modulo 36
Moiere (formula lui) 119
mulțime majorată 24
—— minorată 24

N

normă 83
număr complex 69
—— irațional 33
—— rațional 32
—— real 23
numere conjugate 74

O

ordonat (corp comutativ total) 19

P

parte întreagă 55
—— imaginară 69
—— reală 69
plan complex 91
principală (determinare) 118
pur (imaginar) 69

Q

Q 32

R

R 23
 $\bar{R}$ 29
 R^+R^{++} 34
 $R/\omega Z$ 38
 $\mathcal{R}(z)$ 69
rațional (număr) 32
rădăcină de gradul n 151

real (număr) 23
reală (parte) 69
reale (axa numerelor) 91
redușă 58
regulile semnelor 22
relativă (eroare, aproximare) 44
relativi (întregi) 23
reprezentare zecimală 46

S

scalară (matrice) 102
segment 27
semnelor (regulile) 22
simetrică 61
simetrie plană axială 95
șiruri adiacente 28
spațiu metric 36
 $\sup A$ 24
superioară (margine) 24

T

tăietură 23
teorema lui Arhimede 29
transformata (aplicația) 93
transpusă (matrice) 64
trigonometrică (formă) 113
triunghiulare (inegalități) 35, 85

U

U 60
unghi (măsura unui) 140
unghiurilor (grup al) 107

V

$\vec{v}$ 90
valoare absolută 33
—— aproximativă 30, 44
valuat (corp) 35
vector imagine 90

X

$|x|$ 33
 $\dot{x}$ 38
 $x \equiv y [\omega]$ 37

Z

Z 23
 $\bar{z}$ 74
 $|z|$ 83
zecimală (reprezentare) 14
+ ∞ , - ∞ 29
 $[a, b]$ 27
 $[a, b[, \text{etc...}$ 29

Tabla de materie

Prefață

1 **Numere reale**

- 1 Proprietăți ale mulțimii $\mathbb{R}$ 19
 - 2 Calcule de aproximări 44
-

2 **Corpul numerelor complexe**

- 1 Corpul $\mathbb{C}$ al matricelor $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 60
 - 2 Spațiul vectorial de la $\mathbb{C}$ pe $\mathbb{R}$ 64
 - 3 Numere complexe 69
 - 4 Modulul unui număr complex 83
 - 5 Reprezentarea geometrică a numerelor complexe 90
-

3 **Forma trigonometrică a numerelor complexe**

- 1 Recapitulări și complemente 107
 - 2 Forma trigonometrică a unui număr complex 111
 - 3 Argumentul unui număr complex nenul 116
 - 4 Aplicații trigonometrice 131
-

4 **Aplicațiile numerelor complexe**

- 1 Aplicațiile geometrice ale numerelor complexe 140
 - 2 Rădăcinile de gradul n ale unui număr complex 151
 - 3 Rezolvarea ecuațiilor în corpul $\mathbb{C}$ 170
 - Index 205
-

Nr. colilor de tipar : 13
Tiraj : 24 080 ex.
Bun de tipar : 24.09.1974



Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII“
București — R.S.R.
Com. nr. 40 286/6 952