Cătălin-Petru Nicolescu

100 LECȚII DE MATEMATICĂ fără meditator

pentru pregătirea individuală
a elevilor din clasele IX—XII,
în vederea susținerii examenelor de admitere
în institutele de învățămînt superior.

Lecția 10

CĂTĂLIN PETRU-NICOLESCU

100 LECȚII DE MATEMATICĂ

• LECȚIA 10 •

EDITURA ICAR • BUCUREȘTI — 1991

Referenţi acad. CONSTANTIN DRÂMBĂ
prof. univ. dr. CONSTANTIN POPOVICI
prof. ARMAND MARTINOV
prof. ANDREI VERNESCU
prof. PETRE LĂZĂRESCU

ISBN 973-606-000-4
ISBN 973-606-010-1

Redactor : prof. Cătălin-Petru Nicolescu
Tehnoredactor : Elena Oprişeanu
Grafica : pictor Nadejda Luminiţa Nicolescu

Lecția 10

INELE DE POLINOAME

partea a II-a

Exemple — continuare. 22°. Utilizînd schema lui Horner, să se dezvolte polinomul f după puterile lui $x - x_0$, unde:

i) $f = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 1,\ X_0 = -1;$

ii) $f = X^5,\ X_0 = 1;$

iii) $f = X^4 - 8X^3 + 24X^2 - 50X + 90,\ X_0 = 2;$

iv) $f = X^4 + (3 - 8i)X^3 - (21 + 18i)X^2 - (33 - 20i)X + 7 + 18i,$

$$x_0 = -1 + 2i$$

Rezolvare. Aplicăm schema lui Horner. Alegem ultimele resturi $r_0, r_1, \ldots, \ldots, r_n$ și apoi formăm polinomul $f = r_n(X - x_0)^n + r_{n-1}(X - x_0)^{n-1} + \ldots + r_0$.

i)

	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
	1	2	-3	-4	1
-1	1	1	-4	0	$r_0 = 1$
-1	1	0	-4	$r_1 = 4$	
-1	1	-1	$r_2 = -3$		
-1	1	$r_3 = -2$			
	$r_4 = 1$				

deci $f = (X + 1)^4 - 2(X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 4(X + 1) + 1;$

ii) $f = (X - 1)^5 + 5(X - 1)^4 + 10(X - 1)^3 + 10(X - 1)^2 + 5(X - 1) + 1;$

iii) $f = (X - 2)^4 - 18(X - 2) + 38;$

iv) $f = (X - x_0)^4 - (X - x_0)^3 + 2(X - x_0) + 1.$

23°. Să se determine c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c., rădăcinile comune și descompunerea în factori ireductibili pentru următoarele polinoame:

i) $f = X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$

$g = X^5 - 3X^4 + X^3 - X^2 + 3X - 1;$

ii) $f = X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 6X^3 - 5X^2 + X - 6,$

$\quad g = X^4 + 2X^3 + 3X^2 - 6X - 8;$

iii) $f = 3X^6 - X^5 - 9X^4 - 14X^3 - 11X^2 - 3X - 1,$

$\quad g = 3X^5 + 8X^4 + 9X^3 + 15X^2 + 10X + 9;$

iv) $f = X^4 + 7X^3 + 19X^2 + 23X + 10,$

$\quad g = X^4 + 7X^3 + 18X^2 + 22X + 12;$

v) $f = X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1,\ g = X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X + 1.$

Rezolvare. Pentru a determina c.m.m.d.c. (f, g) aplicăm algoritmul lui Euclid. Dacă c.m.m.d.c. este o constantă, atunci polinoamele f şi g sînt prime între ele; dacă c.m.m.d.c. este un polinom, atunci rădăcinile lui sînt rădăcinile comune polinoamelor f şi g. Celelalte rădăcini se determină împărţind pe rînd polinoamele f şi g la c.m.m.d.c.

i)
$$\begin{array}{l|l} X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1 & X^5 - 3X^4 + X^3 - X^2 + 3X - 1 \\ \hline \underbrace{4X^4 - 2X^3 - 2X^2 - 6X} & \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} X^5 - 3X^4 + X^3 - X^2 + 3X - 1 & 4X^4 - 2X^3 - 2X^2 - 6X \\ \hline & \end{array}$$

sau pentru a simplifica calculele putem amplifica deîmpărţitul cu 2 şi simplifica împărţitorul prin 2:

$$\begin{array}{l|l} 2X^5 - 6X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 6X - 2 & 2X^4 - X^3 - X^2 - 3X \\ \hline \underbrace{\frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{2}X - 2} & X - \frac{5}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2X^4 - X^3 - X^2 - 3X & \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{2}X - 2 \\ \hline & \end{array}$$

sau pentru a simplifica calculele putem amplifica împărţitorul cu 4:

$$\begin{array}{l|l} 2X^4 - X^3 - X^2 - 3X & 2X^3 - 6X^2 - 6X - 8 \\ \hline \underbrace{20X^2 + 20X + 20} & X + \frac{5}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2X^3 - 6X^2 - 6X - 8 & 20X^2 + 20X + 20 \\ \hline & \end{array}$$

sau pentru a simplifica calculele putem împărţi deîmpărţitul prin 2 şi împărţitorul prin 20:

$$\begin{array}{l|l} X^3 - 3X^2 - 3X - 4 & X^2 + X + 1 \\ \hline / \quad / \quad / \quad / & X - 4 \end{array}$$

Cum ultimul rest este zero, atunci algoritmul s-a oprit şi vom analiza penultimul rest şi anume $X^2 + X + 1$, care reprezintă c.m.m.d.c. (f, g). Rădăcinile polinomului $X^2 + X + 1$ sînt rădăcinile comune ale polinoamelor f şi g. Celelalte rădăcini le determinăm prin împărţirea polinoamelor f şi respectiv g prin $X^2 + X + 1$.

$$\begin{array}{cccccc|l} X^5 & +X^4 & -X^3 & -3X^2 & -3X & -1 & X^2+X+1 \\ \hline / & / & / & / & / & / & X^3-2X-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|l} X^5 & -3X^4 & +X^3 & -X^2 & +3X & -1 & X^2+X+1 \\ \hline / & / & / & / & / & / & X^3-4X^2+4X-1 \end{array}$$

Deci $\begin{cases} f = (X^2 + X + 1)(X^3 - 2X - 1) \\ g = (X^2 + X + 1)(X^3 - 4X^2 + 4X - 1) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f = (X^2 + X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1) \\ g = (X^2 + X + 1)(X - 1)(X^2 - 3X + 1). \end{cases}$$

$$\text{c.m.m.m.c. } [f, g] = \frac{f \cdot g}{\text{c.m.m.d.c. } (f, g)} =$$

$$= (X^2 + X + 1)(X - 1)(X + 1)(X^2 - X - 1)(X^2 - 3X + 1).$$

ii) c.m.m.d.c. $(f, g) = 1$, adică polinoamele sînt prime între ele.

iii) c.m.m.d.c. $(f, g) = (X^2 + X + 1)$

$$\begin{cases} f = (X^2 + X + 1)(3X^4 - 4X^3 - 8X^2 - 2X - 1) \\ g = (X^2 + X + 1)(3X^3 + 5X^2 + X + 9). \end{cases}$$

iv) c.m.m.d.c. $(f, g) = X + 2$.

$$\begin{cases} f = (X + 2)(X^3 + 5X^2 + 9X + 5) \\ g = (X + 2)(X^3 + 5X^2 + 8X + 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = (X + 2)(X + 1)(X^2 + 4X + 5) \\ g = (X + 2)(X + 3)(X^2 + 2X + 2). \end{cases}$$

v) c.m.m.d.c. $(f, g) = X^2 + X + 1$

$$\begin{cases} f = (X^2 + X + 1)(X^3 - 2X + 1) = (X^2 + X + 1)(X - 1)(X^2 + X - 1). \\ g = (X^2 + X + 1)(X^2 - 3X + 1). \end{cases}$$

24°. Utilizînd algoritmul lui Euclid, să se determine polinoamele $g_1, g_2 \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît $f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2 = d$ unde $f_1, f_2 \in \mathbf{R}[X]$ şi $d =$ c.m.m.d.c. (f_1, f_2).

i) $f_1 = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$,

$f_2 = X^4 + 2X^3 + X + 2$;

ii) $f_1 = 3X^7 + 6X^6 - 3X^5 + 4X^4 + 14X^3 - 6X^2 - 4X + 4$,

$f_2 = 3X^6 - 3X^4 + 7X^3 - 6X + 2$;

iii) $f_1 = 3X^5 + 5X^4 - 16X^3 - 6X^2 - 5X - 6$,

$f_2 = 3X^4 - 4X^3 - X^2 - X - 2$.

Rezolvare: i) $d = X^3 + 1$ şi $g_1 = k$, $g_2 = aX + b$. Aplicînd metoda coeficienţilor nedeterminaţi, obţinem $k = -1$, $a = 1$, $b = 1$, deci $-f_1(x) + (x + 1) f_2(x) = X^2 + 1$. Putem determina şi alte polinoame: $g_1 = 2X + 8$ şi $g_2 = -2X^2 - 5X - 1$; $g_1 = -X - 3$ şi $g_2 = x^2 + 4X + 2$. În general s-ar putea scrie: $g_1 = (1 - k)X + 1 - 2k$ şi $g_2 = (k - 1)X^2 + (3k - 2)X + k$ sau $g_1 = (1 - k)X^2 + (3 - 2k - l)X + 1 - 2l$ şi $g_2 = (k - 1)X^3 + (3k + l - 4)X + (k + 3l - 3)X + l$; $l, k \in \mathbf{Z}$. Pentru grad $g_1 = n$ şi grad $g_2 = n + 1$ se obţin expresii folosind n parametri $k_1, k_2, \ldots, k_n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

ii) $(1 - X^2) f_1 + (X^3 + 2X^2 - X - 1) f_2 = X^3 + 2$;

iii) $(-X^2 + X + 1) f_1 + (X^3 + 2X^2 - 5X - 4) f_2 = 3X + 2$.

25°. Să se determine coeficienţii $a, b \in \mathbf{R}$, ştiind că polinomul $f = X^4 - 5X^3 + 8X^2 + aX + b$ admite pe $x_0 = 1$ ca rădăcină dublă.

Rezolvare. Metoda 1 — se aplică schema lui Horner:

	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
	1	-5	8	a	b
1	1	-4	4	$4 + a$	$4 + a + b$
1	1	-3	1	$5 + a$	

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 + a + b = 0 \\ 5 + a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow f = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 5X + 1.$$

Metoda 2 — metoda identificării polinoamelor:

$f = (X - 1)^2 (X^2 + mX + n) \Rightarrow f = X^4 + (m - 2) X^3 + (n - 2m + 1) X^2 + (m - 2n) X + n$. Aplicînd metoda coeficienţilor nedeterminaţi, obţinem:

$$\begin{cases} m - 2 = -5 \\ n - 2m + 1 = 8 \\ m - 2n = a \\ n = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = 1 \\ a = -5 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow f = (X - 1)^2 (X^2 - 3X + 1).$$

Metoda 3 — aplicăm teorema împărţirii cu rest, apoi identificăm restul cu zero:

$$\begin{array}{c|l} X^4 - 5X^3 + 8X^2 + aX + b & X^2 - 2X + 1 \\ \hline r = (a + 5) X + b - 1 & X^2 - 3X + 1 \end{array}$$

Deci $r \equiv 0 \Leftrightarrow a = -5$ şi $b = 1$.

Metoda 4 — aplicăm metoda derivatelor:

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(1)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-5+8+a+b=0 \\ 4-15+16+a=0 \\ 12-30+16\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-4 \\ a+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=1. \end{cases}$$

26°. Aplicînd teorema lui Bèzout, să se arate că:

i) $X^2+X+1 \mid f=(X+1)^{12n+1}+X^{3n+2},\ n\in \mathbb{N}$;

ii) $X^2+3X+3 \mid f=(X+1)^{3n+2}+X+2$;

iii) $X^2-X+1 \mid f=(X-1)^{n+2}-X^{2n-2}$.

Rezolvare: i) $x^2+x+1=0 \Rightarrow \varepsilon_1=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon_2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, unde $\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ sînt *rădăcinile cubice ale unității.*

Reamintesc cîteva proprietăți ale rădăcinilor cubice ale unității, rădăcinii care provin din ecuația $X^3-1=0$:

$$\varepsilon_1^2=\varepsilon_2,\ \varepsilon_2^2=\varepsilon_1,\ \varepsilon_1=\bar{\varepsilon}_2,\ \varepsilon_2=\bar{\varepsilon}_1,\ \varepsilon_1^3=\varepsilon_2^3=1,$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2=1,\ \varepsilon_1+\varepsilon_2=-1,\ \varepsilon_1^2+\varepsilon_1+1=0,\ \varepsilon_2^2+\varepsilon_2+1=0.$$

Calculăm $f(\varepsilon_1)=(\varepsilon_1+1)^{12n+1}+\varepsilon_1^{3n+2}=(-\varepsilon_2)^{12n+1}+\varepsilon_1^{3n+2}=-(\varepsilon_2^3)^{4n}\cdot\varepsilon_2+(\varepsilon_1^3)^n\cdot\varepsilon_1^2=-\varepsilon_2+\varepsilon_1^2=-\varepsilon_2+\varepsilon_2=0$. Analog, se arată că $f(\varepsilon_2)=0$.

Cum $f(\varepsilon_1)=0$ și $f(\varepsilon_2)=0$, atunci $(X^2+X+1)\mid f$.

ii) $x^2+3x+3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-3\pm i\sqrt{3}}{2}=-1+\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1=-1+\varepsilon_1,\ x_2=-1+\varepsilon_2$. Calculăm $f(x_1)=(x_1+1)^{3n+2}+x_1+2=\varepsilon_1^{3n+2}-1+\varepsilon_1+2=(\varepsilon_1^3)^n\varepsilon_1^2+\varepsilon_1+1=\varepsilon_1^2+\varepsilon_1+1=0$. Analog se arată că $f(x_2)=0$.

Cum $f(x_1)=0$ și $f(x_2)=0$, atunci $(X^2+3X+3)\mid f$.

iii) $x^2-x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=1+\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1=1+\varepsilon_1$, $x_2=1+\varepsilon_2$. Calculăm $f(x_1)=(x_1-1)^{n+2}-x_1^{2n-2}=\varepsilon_1^{n+2}-(1+\varepsilon_1)^{2n-2}=\varepsilon_1^n\cdot\varepsilon_1^2-(-\varepsilon_2)^{2n-2}=\varepsilon_2\cdot\varepsilon_1^n-\varepsilon_2^{2n}\cdot\varepsilon_2^{-2}=\varepsilon_2\cdot\varepsilon_1^n-(\varepsilon_2^2)^n\cdot\varepsilon_1^{-1}=\varepsilon_2\cdot\varepsilon_1^n-\varepsilon_1^n\cdot\varepsilon_1^{-1}=\varepsilon_1^n\left(\varepsilon_2-\dfrac{1}{\varepsilon_1}\right)=\varepsilon_1^n(\varepsilon_2-\varepsilon_2)=0$. Analog se arată că $f(x_2)=0$.

Cum $f(x_1)=0$ și $f(x_2)=0$, atunci $(X^2-X+1)\mid f$.

27°. Să se demonstreze că pentru orice numere a, b, c, d naturale avem:

$$(X^3+X^2+X+1)\mid f=X^{4a}+X^{4b+1}+X^{4c+2}+X^{4d+3}$$

Rezolvare. Aplicăm teorema lui Bèzout:

$x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = i,\ x_3 = -i$. Cum

$$\begin{cases} f(-1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \text{ şi} \\ f(i) = (i^4)^a + (i^4)^b \cdot i + (i^4)^c \cdot i^2 + (i^4)^d \cdot i^3 = 1 + i + i^2 + i^3 = 0 \text{ şi} \\ f(-i) = ((-i)^4)^a + ((-i)^4)^b \cdot (-i) + ((-i)^4)^c \cdot (-i)^2 + ((-i)^4)^d \cdot (-i)^3 = \end{cases}$$

$= 1 - i + i^2 - i^3 = 0$, atunci se realizează divizibilitatea.

28°. Să se determine $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încît:

i) $(X^2 + X + 1) \mid f = (X + 1)^n - X^n - 1$;

ii) $(X^2 + X + 1) \mid f = (X + 1)^n + X^n + 1$;

iii) $(X^2 + X + 1)^2 \mid f = (X + 1)^n - X^n - 1$;

iv) $(X^2 + X + 1)^2 \mid f = (X + 1)^n + X^n + 1$.

Rezolvare: i) Fie ε o rădăcină a ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$, atunci $f(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)^n - \varepsilon^n - 1 = (-\varepsilon^2)^n - \varepsilon^n - 1$. Fie $\varepsilon^2 = -a$, atunci $\varepsilon = a^2$ şi $f(\varepsilon) = a^n - a^{2n} - 1 = -(a^{2n} - a^n + 1)$, unde a se observă că este o rădăcină de ordinul 6 a unităţii: (provenind din ecuaţia $x^6 - 1 = (x-1)(x+1) \cdot (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = 0$). Deci

$$\begin{aligned} n &= 6k & &\Rightarrow f(\varepsilon) = -1 \neq 0 \qquad k \in \mathbf{Z} \\ n &= 6k + 1 & &\Rightarrow f(\varepsilon) = a - a^2 - 1 = 0 \\ n &= 6k + 2 & &\Rightarrow f(\varepsilon) = a^2 + a - 1 = 0 \\ n &= 6k + 3 & &\Rightarrow f(\varepsilon) = -3 \neq 0 \\ n &= 6k + 4 & &\Rightarrow f(\varepsilon) = -a + a^2 - 1 \neq 0 \\ n &= 6k + 5 & &\Rightarrow f(\varepsilon) = -a^2 + a - 1 = 0. \end{aligned}$$

În concluzie, dacă $n = 6k + 1$ sau $n = 6k + 5$, atunci $X^2 + X + 1 \mid f$.

ii) Analog determinăm $n = 6k + 2$ sau $n = 6k + 4$ pentru ca $X^2 + X + 1 \mid f$.

iii) Calculăm derivata funcţiei şi obţinem $f' = n(X + 1)^{n-1} - nX^{n-1}$ şi $f'(\varepsilon) = n(1 + \varepsilon)^{n-1} - n\varepsilon^{n-1} = n[a^{n-1} - a^{2(n-1)}]$, iar $f'(\varepsilon) = 0$ dacă $n = 6k + 1$. Deci cum $f(\varepsilon) = 0$ şi $f'(\varepsilon) = 0$ pentru $n = 6k + 1$, atunci $(X^2 + X + 1)^2 \mid f$.

iv) Calculăm $f(\varepsilon)$ şi $f'(\varepsilon)$. Cum $f(\varepsilon) = 0$ şi $f'(\varepsilon) = 0$ pentru $n = 6k + 4$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci $(X^2 + X + 1)^2 \mid f$.

II. Relații între rădăcini și coeficienți — formulele lui F. Viète

1°. Definirea relațiilor pentru ecuațiile de gradul 4 și 5

i) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$

ii) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

Pentru simplificarea calculelor vom folosi notațiile $x_1 + x_2 = S$, $x_1x_2 = P$, $x_3 + x_4 = S_1$, $x_3x_4 = P_1$, astfel că formulele vor deveni:

$$\begin{cases} S + S_1 = -\dfrac{b}{a} \\ P + SS_1 + P_1 = \dfrac{c}{a} \\ SP_1 + S_1P = -\dfrac{d}{a} \\ PP_1 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

Observație. Pentru rezolvarea unei ecuații, în afară de formulele lui F. Viète, mai este necesară încă o relație suplimentară, în caz contrar vom obține ecuația inițială verificată de una dintre rădăcinile x_k.

2°. Cîteva cazuri particulare ale relațiilor suplimentare

i) $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2};$$

ii) $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 -$

$$- 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots) = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

iii) $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $k \in \mathrm{N}$ şi $k \geqslant 3$.

Cum x_1, x_2, x_3 sînt rădăcini ale ecuaţiei de gradul trei, ele vor verifica ecuaţia, deci:

$$\text{A.}\quad \left\{\begin{array}{l} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0 \\ ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = 0 \\ ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d = 0 \end{array}\right| +$$

$$\Rightarrow a\cdot S_3 + b\; S_2 + c\; S_1 + dS_0 = 0 \Rightarrow S_3 = -\frac{bS_2 + cS_1 + dS_0}{a}.$$

Amplificînd în A. prima relaţie cu x_1, pe a doua cu x_2 şi pe a treia cu x_3, **obţinem:**

$$\text{B.}\quad \left\{\begin{array}{l} ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 = 0 \\ ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 = 0 \\ ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 = 0 \end{array}\right| +$$

$$\Rightarrow a\cdot S_4 + b\cdot S_3 + c\cdot S_2 + d\cdot S_1 = 0 \Rightarrow S_4 = -\frac{bS_3 + cS_2 + dS_1}{a}.$$

Amplificînd în B. prima relaţie cu x_1, pe a doua cu x_2 şi pe a treia cu x_3, **obţinem:**

$$\text{C.}\quad \left\{\begin{array}{l} ax_1^5 + bx_1^4 + cx_1^3 + dx_1^2 = 0 \\ ax_2^5 + bx_2^4 + cx_2^3 + dx_2^2 = 0 \\ ax_3^5 + bx_3^4 + cx_3^3 + dx_3^2 = 0 \end{array}\right| +$$

$$\Rightarrow a\cdot S_5 + b\cdot S_4 + c\cdot S_3 + d\cdot S_2 = 0 \Rightarrow S_5 = -\frac{bS_4 + cS_3 + dS_2}{a}.$$

Continuînd raţionamentul obţinem *formulele lui Newton:*

$S_k = -\dfrac{b\cdot S_{k-1} + c\cdot S_{k-2} + d\cdot S_{k-3}}{a}$, vom determina astfel orice sumă în **funcţie** de toate sumele precedente.

Observaţie. Pentru calculul sumei S_3, mai putem proceda şi astfel:

$$\left\{\begin{array}{l} (x_1 + x_2 + x_3)^3 = (x_1 + x_2)^3 + 3(x_1 + x_2)^2 x_3 + 3(x_1 + x_2)x_3^2 + \\ + x_3^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_3 + 3x_2^2x_3 + 6x_1x_2x_3 + \\ + 3x_1x_3^2 + 3x_2x_3^2 + x_3^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2 + x_3) + \\ + 3x_1x_3(x_1 + x_2 + x_3) + 3x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) - 9x_1x_2x_3 + \\ + 6x_1x_2x_3 \Rightarrow S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + \\ + x_2 + x_3)\cdot(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 3x_1x_2x_3; \end{array}\right.$$

iv) $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k$, $k \in \mathbf{N}$ şi $k \geqslant 3$.

Se va efectua un calcul analog celui de la punctul iii)

v) Condiţia ca rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 să fie proporţională cu numerele $m, n, p, q \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ este ca $\frac{x_1}{m} = \frac{x_2}{n} = \frac{x_3}{p} = \frac{x_4}{q} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{m + n + p + q} =$

$= -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{m + n + p + q} \Rightarrow x_1 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{m}{m + n + p + q}$, $x_2 = -\frac{b}{a} \cdot$

$\cdot \frac{n}{m + n + p + q}$, $x_3 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{p}{m + n + p + q}$, $x_4 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{q}{m + n + p + q}$.

vi) Condiţia ca rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 să fie invers proporţionale cu numerele $m, n, p, q \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ este ca $\frac{x_1}{\frac{1}{m}} = \frac{x_2}{\frac{1}{n}} = \frac{x_3}{\frac{1}{p}} = \frac{x_4}{\frac{1}{q}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} =$

$= -\frac{b}{a} \cdot \frac{mnpq}{mnp + mpq + mnq + npq}$, de unde determinăm rădăcinile x_k.

vii) Condiţia ca rădăcinile x_1, x_2, x_3 să fie în progresie aritmetică este ca: $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ sau mai putem scrie,

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - r \\ x_2 \\ x_3 = x_2 + r \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b}{3a},$$

iar $r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ este raţia progresiei.

viii) Condiţiile ca rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 să fie în progresie aritmetică sînt: $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ şi $x_3 = \frac{x_2 + x_4}{2}$ sau $x_1 = \alpha - 3r$, $x_2 = \alpha - r$, $x_3 =$ $= \alpha + r$, $x_4 = \alpha + 3r \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{4a}$, iar $2r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, este raţia progresiei.

ix) Condiţia ca rădăcinile x_1, x_2, x_3 să fie în progresie geometrică este ca $x_2^2 = x_1 x_3$ sau

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \frac{1}{r} \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \cdot r \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 x_3 = \alpha^3 = -\frac{d}{a} \Rightarrow \alpha_1 = -\sqrt[3]{\frac{d}{a}},$$

$x_{2,3}$ — complexe conjugate, iar $r \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ este raţia progresiei.

x) Condițiile ca rădăcinile $x_1; x_2, x_3, x_4$ să fie în progresie geometrică sînt: $x_2^2 = x_1x_3$, $x_3^2 = x_2x_4$ sau $x_1 = \alpha \cdot \frac{1}{r^3}$, $x_2 = \alpha\frac{1}{r}$, $x_3 = \alpha \cdot r$, $x_4 = \alpha r^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1x_2x_3x_4 = \alpha^4 = \frac{e}{a} \Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\frac{e}{a}}$, $\alpha_{3,4}$ complexe conjugate, iar $r^2 \in \mathbf{R}\setminus\{-1, 0, 1\}$ este rația progresiei.

xi) *Inegalitatea mediilor*. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive, atunci definim:

$$\text{media armonică: } M_{\text{arm.}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}},$$

$$\text{media geometrică: } M_{\text{geom.}} = \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}$$

$$\text{media aritmetică: } M_{\text{aritm.}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Între aceste medii există inegalitatea: $M_{\text{arm}} \leqslant M_{\text{geom}} \leqslant M_{\text{aritm}}$.

III. Formarea unor ecuații de gradul III sau IV în y ale căror rădăcini y_k verifică relații date cu rădăcinile x_k ale unor ecuații de gradul III sau IV în x, date

Fiind date: ecuația $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 și relațiile $y_k = R_k(x_1, x_2, x_3)$, $k \in \{1, 2, 3\}$ se cere să se formeze ecuația de gradul trei în y, $y^3 - Ay^2 + By - C = 0$.

Modul de lucru. Se aplică formulele lui F. Viète

$$\begin{cases} A = y_1 + y_2 + y_3 = R_1 + R_2 + R_3 = R_4\left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{d}, -\frac{d}{a}\right) \\ B = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = R_5\left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, -\frac{d}{a}\right) \\ C = y_1y_2y_3 = R_6\left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, -\frac{d}{a}\right) \end{cases}$$

apoi scriem ecuația de gradul trei în y. Analog se procedează și pentru ecuațiile de gradul IV.

Exemple. 1°. Să se rezolve ecuațiile algebrice:

i) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$,

ii) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$,

știind că suma a două rădăcini este egală cu suma celorlalte două rădăcini.

Rezolvare. i) Aplicînd formulele lui F. Viète, cît și substituțiile $x_1 + x_2 = S$, $x_3 + x_4 = S_1$, $x_1x_2 = P$, $x_3x_4 = P_1$, obținem:

$$\begin{cases} S + S_1 = 4 \\ P + SS_1 + P_1 = 5 \\ PS_1 + P_1S = 2 \\ PP_1 = -6 \\ S = S_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = S_1 = 2 \\ P + P_1 = 1 \\ PP_1 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = S_1 = 2 \\ P = 3 \\ P_1 = -2 \end{cases} \text{ sau}$$

$$\begin{cases} S = S_1 = 2 \\ P = -2 \\ P_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow 1. \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \\ S_1 = 2 \\ P_1 = -2 \end{cases} \text{ sau } \quad 2. \begin{cases} S = 2 \\ P = -2 \\ S_1 = 2 \\ P_1 = 3. \end{cases}$$

Rezolvînd fiecare sistem în parte și apoi permutînd soluțiile, obținem:

1.1. $\begin{cases} x_1 = 1 + i\sqrt{2} \\ x_2 = 1 - i\sqrt{2} \\ x_3 = 1 + \sqrt{3} \\ x_4 = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} x_1 = 1 - i\sqrt{2} \\ x_2 = 1 + i\sqrt{2} \\ x_3 = 1 + \sqrt{3} \\ x_4 = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x_1 = 1 + i\sqrt{2} \\ x_2 = 1 - i\sqrt{2} \\ x_3 = 1 - \sqrt{3} \\ x_4 = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$ 1.4. $\begin{cases} x_1 = 1 - i\sqrt{2} \\ x_2 = 1 + i\sqrt{2} \\ x_3 = 1 - \sqrt{3} \\ x_4 = 1 + \sqrt{3}. \end{cases}$

Pentru sistemul 2. vom obține tot patru sisteme de soluții, care în acest caz, coincid cu primele patru sisteme de soluții. Reunind sistemele de soluții putem spune că mulțimea soluțiilor sistemului este $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{(1 + i\sqrt{2},\ 1 - i\sqrt{2},\ 1 + \sqrt{3},\ 1 - \sqrt{3}), \ldots\}$.

2°. Să se rezolve următoarele ecuații și să se determine parametrul a, știind că între rădăcinile lor există relația: $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$:

i) $x^4 + ax^3 + 8x + 3 = 0$;

ii) $x^4 - 2(3 + i)\,x^3 + ax^2 - 2(1 + 7i)\,x - 3(1 - 2i) = 0$.

Rezolvare. Aplicînd formulele lui F. Viète, obținem:

i) $a = -4$ și rădăcinile $1 \pm \sqrt{2}$, 3, -1;

ii) $a = 10(1 + i)$ și rădăcinile 1, $2 \pm i$, 3, i.

Observație: Pentru polinomul de la i) se putea efectua identificarea cu $(x^2 + px + q)\,(x^2 + px + m)$ obținînd $p^2 + q + m = 0$, $p(q + m) = 8 \Rightarrow p = -2$, $q + m = -4$, $q = -1$, $m = -3$. Pentru $p = -4$, $q + m = -2$ iar ecuația $p^2 + q + m = 0$ nu este verificată.

3°. Fie $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 + aX + b$. Să se determine a și b știind că x_1, x_2, x_3 sînt în progresie aritmetică și că $x_4 = x_1 + x_2 + x_3$.

Rezolvare. Aplicăm formulele lui F. Viète la care adăugăm relațiile $x_1 = \alpha - r$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \alpha + r$, $r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; cum $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -6 \Rightarrow 2x_4 = -6 \Rightarrow x_4 = -3$ și cum $x_4 = 3\alpha \Rightarrow \alpha = x_2 = -1$. Deci $x_1 + x_3 = -2$ și din a doua relație a lui Viète obținem $x_1x_3 = -3$, adică rădăcinile -3, 1. Substituind în relațiile a treia și a patra determinăm $a = -6$ și $b = -9$. Deci putem scrie:

$$\begin{cases} x_1 = -3, & x_4 = -3, \\ x_2 = -1, & a = -6, \\ x_3 = 1 & b = -9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 & x_4 = -3, \\ x_2 = -1, & a = -6, \\ x_3 = -3, & b = -9. \end{cases}$$

4°. Să se rezolve ecuația $x^6 + 3x^5 - 12x^4 - 30x^3 + 21x^2 + 3x - 2 = 0$, știind că admite ca rădăcină pe $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Rezolvare. Cum ecuația are coeficienți întregi, ea va admite ca rădăcini și conjugatele rădăcinii x_1, adică pe: $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

Fie $g = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4) = X^4 - 10X^2 + 1$.

Efectuînd împărțirea polinomului inițial prin polinomul g, obținem cîtul $X^2 + 3X - 2$ și evident restul zero. Deci rădăcinile $x_{5,6} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

5°. Să se determine coeficienții întregi m, n, astfel încît ecuația $x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 4x^3 + mx^2 - 18x + n = 0$ să admită ca rădăcină pe $x_1 = \sqrt{2} + i$ și apoi să se rezolve ecuația.

Rezolvare. Cum ecuația are coeficienți întregi, atunci va admite ca rădăcini și conjugatele rădăcinii x_1: $x_2 = \sqrt{2} - i$, $x_3 = -\sqrt{2} + i$, $x_4 = -\sqrt{2} - i$.

Pentru a determina coeficienții m și n vom verifica rădăcina $\sqrt{2} + i$, și vom obține $m = 15$ și $n = -27$.

Fie $g = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4) = X^4 - 2X^2 + 9$. Efectuînd împărțirea polinomului inițial prin g, obținem $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_5 = -1$, $x_6 = 3$.

6°. Se consideră f, $g \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ și $g = X^3 + (b + c)X^2 + (c + a)X + a + b$.

i) Să se determine coeficienții a, b, c, astfel încît rădăcinile x_k ale ecuației $f(x) = 0$ și rădăcinile y_k ale ecuației $g(y) = 0$, să verifice relațiile $y_k = x_k + 1$, $k \in \{1, 2, 3\}$.

ii) Pentru $b = 3$ și $c = -1$, să se afle a și să se rezolve ecuația $f(x) = 0$, știind că admite o rădăcină triplă.

Rezolvare i) Aplicăm formulele lui F. Viète:

$$y_1 + y_2 + y_3 = -(b + c) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + 3 = -(b + c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a + 3 = -(b + c) \Rightarrow a - b - c = 3 \qquad (1);$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = c + a \Rightarrow (1 + x_1)(1 + x_2) + \ldots = c + a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 + x_1x_3 + x_1 + x_3 + 1 + x_2x_3 + x_2 + x_3 + 1 =$$
$$= c + a \Rightarrow 2(-a) + b + 3 = c + a \Rightarrow 3a - b + c = 3 \qquad (2);$$
$$y_1y_2y_3 = -(a + b) \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) = x_1x_2x_3 +$$
$$+ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 1 = -(a + b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -c + b - a + 1 = -a - b \Rightarrow 2b - c = -1 \qquad (3).$$

Deci am obținut sistemul:

$$\begin{cases} a - b - c = 3 \\ 3a - b + c = 3 \\ 2b - c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1. \end{cases}$$

ii) $f = X^3 + aX^2 + 3X - 1$. Pentru ca $f(x) = 0$ să admită rădăcină triplă pe x_0, trebuie ca:

$$\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^3 + ax_0^2 + 3x_0 - 1 = 0 \\ 3x_0^2 + 2ax_0 + 3 = 0 \qquad \Rightarrow a = -3 \\ 6x_0 + 2a = 0 \Rightarrow x_0 = -\dfrac{1}{3}a. \\ 6 \neq 0 \end{cases}$$

Mai putem scrie $f = (X - x_0)^3$. Din dezvoltarea sinomului și identificarea polinoamelor obținem $a = -3$ și $x = 1$.

Mai putem aplica formulele lui F. Viète: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3 \\ x_1x_2x_3 = 1 \\ x_1 = x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow a = -3.$

7°. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 7X^2 + 36$, $g = X^3 - 32X^2 - 19X + 42$. Să se determine rădăcinile acestor polinoame, știind că:

i) o rădăcină a primului este opusul unei rădăcini a celui de al doilea;

ii) o rădăcină a primului este triplul unei rădăcini a celui de al doilea.

Rezolvare. i) Fie $h = (-X)^3 - 32(-X)^2 - 19(-X) + 42$, iar polinoamele f și g au cel puțin o rădăcină comună. Aplicînd algoritmul lui Euclid determinăm c.m.m.d.c. $(f, h) = x + 2$, deci f are rădăcina -2 și g are rădăcina $+2$.

ii) Fie $h = f(3x) = (3x)^3 - 7(3x)^2 + 36 = 27x^3 - 63x^2 + 36$, iar polinoamele g și h au cel puțin o rădăcină comună, deci c.m.m.d.c. $(h, g) = x - 2$, deci g are rădăcina 2, iar f are rădăcina 6.

8°. Să se determine ecuaţia de gradul trei în y, care are rădăcinile y_1, y_2, y_3 în relaţia:

i) $y_1 = 3x_1 + x_2 + x_3,\ y_2 = x_1 + 3x_2 + x_3,\ y_3 = x_1 + x_2 + 3x_3$;

ii) $y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2^2,\ y_3 = x_3^2$;

iii) $y_1 = x_1 + x_2x_3,\ y_2 = x_2 + x_1x_3,\ y_3 = x_3 + x_1x_2$;

iv) $y_1 = \dfrac{x_2x_3}{x_1} + 1,\ y_2 = \dfrac{x_3x_1}{x_2} + 1,\ y_3 = \dfrac{x_1x_2}{x_3} + 1$;

unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, ecuaţie dată.

Rezolvare. Aplicăm formulele lui F. Viète.

i) Metoda 1. Cum $y_k = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_k = 2x_k - a \Rightarrow x_k = \dfrac{y_k + a}{2}$

$k \in \{1, 2, 3\}$. Deci, în ecuaţia iniţială putem efectua schimbarea de variabilă $x = \dfrac{y + a}{2}$, apoi se obţine $\left(\dfrac{y + a}{2}\right)^3 + a\left(\dfrac{y + a}{2}\right)^2 + b\dfrac{y + a}{2} + c = 0$.

Metoda 2. Aplicăm formulele lui F. Viète:

$$\begin{cases} A = y_1 + y_2 + y_3 = 5(x_1 + x_2 + x_3) = -5a \\ B = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 7(x_1 + x_2 + x_3)^2 + 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \\ \quad = 7a^2 + 4b \\ C = y_1y_2y_3 = \ldots \end{cases}$$

apoi formăm ecuaţia de gradul trei în y şi anume $y^3 - Ay^2 + By - C = 0$.

ii) $A = y_1 + y_2 + y_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a^2 - 2b$; $B = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = (x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_2x_3)^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = b^2 - 2ac$; $C = y_1y_2y_3 = (x_1x_2x_3)^2 = c^2$.

Ecuaţia în y este: $y^3 - Ay^2 + By - C = 0$, adică $y^3 - (a^2 - 2b)y^2 + (b^2 - 2ac)y - c^2 = 0$.

9°. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii x_0 pentru polinomul:

i) $f = X^5 + X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X + 1,\ x_0 = 1,\ x_0' = -1$;

ii) $f = X^6 - 6X^5 + 12X^4 - 9X^3 + 6X^2 - 12X + 8,\ x_0 = 2$.

Rezolvare. i) Metoda 1 — aplicăm schema lui Horner.:

	X^5	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
	1	1	-2	-2	1	1
1	1	2	0	-2	-1	0
1	1	3	3	1	0	
-1	1	2	1	0		
-1	1	1	0			
-1	1	0				

Deci $x_0 = 1$ este rădăcină dublă, iar $x'_0 = -1$ este rădăcină triplă.

Metoda 2 — aplicăm metoda derivatelor:

$f(1) = 0, f'(1) = 0, f''(1) = 16 \neq 0$, deci $x_0 = 1$ este rădăcină dublă; $f(-1) = 0$, $f'(-1) = 0$, $f''(-1) = 0$, $f'''(-1) = 72 \neq 0$, deci $x_0' = -1$ este rădăcină triplă. În concluzie, putem scrie $f = (X-1)^2 (X+1)^3$.

ii) $x_0 = 2$ este rădăcină triplă, iar $f = (X-2)^3 (X^4 - 1)$.

10°. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ fracția $\dfrac{n^7 + n^2 + 1}{n^8 + n + 1}$ este reductibilă.

Rezolvare. Se aplică algoritmul lui Euclid:

$$\begin{array}{c|c} n^8 + n + 1 & n^7 + n^2 + 1 \\ \hline -n^3 + 1 & n \end{array}; \quad \begin{array}{c|c} n^7 + n^2 + 1 & -n^3 + 1 \\ \hline & \end{array}$$

sau amplificînd împărțitorul cu -1 mai putem scrie:

$$\begin{array}{c|c} n^7 + n^2 + 1 & n^3 - 1 \\ \hline n^3 + n + 1 & n^4 + n \end{array}; \quad \begin{array}{c|c} n^3 - 1 & n^2 + n + 1 \\ \hline // & n - 1 \end{array}.$$

Deci $n^2 + n + 1$ este c.m.m.d.c. al numărătorului și numitorului, iar fracția se poate scrie:

$$\frac{n^7 + n^2 + 1}{n^8 + n + 1} = \frac{(n^2 + n + 1)(n^5 - n^4 + n^2 - n + 1)}{(n^2 + n + 1)(n^6 - n^5 + n^3 - n^2 + 1)} =$$

$$= \frac{n^5 - n^4 + n^2 - n + 1}{n^6 - n^5 + n^3 - n^2 + 1}.$$

Tema 10

1°. Să se determine coeficienţii m şi n reali, astfel ca ecuaţia $f = X^4 - 11X^3 + 42X^2 + mX + n = 0$ să admită o rădăcină triplă, şi apoi să se rezolve ecuaţia.

2°. Să se determine condiţia necesară şi suficientă pentru ca ecuaţia $f = X^3 + pX + q = 0$, $f \in \mathbf{C}[X]$ să admită o rădăcină dublă.

3°. Fie ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, avînd rădăcinile $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{tg} \gamma$. Să se calculeze $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma)$.

4°. Să se rezolve ecuaţiile de mai jos, ştiind că au două rădăcini duble şi apoi să se determine parametrii m şi n:

i) $4z^4 - 8z^3 + mz^2 + 4z + n = 0$;

ii) $z^4 - 2(1 + i)z^3 + 4iz^2 + mz + n = 0$.

5°. Să se rezolve ecuaţia $z^4 - 7z^3 + mz^2 + 7z + n = 0$ şi să se determine parametrii m şi n, ştiind că $z_1 = 2$ şi $z_2 + z_3 = 0$.

6°. Să se verifice dacă următoarele ecuaţii au o rădăcină triplă, apoi să se rezolve:

i) $z^4 - 2iz^3 - 2iz - 1 = 0$;

ii) $z^4 - (7 + 3\sqrt{5})z^3 + 3(11 + 5\sqrt{5})z^2 - (65 + 29\sqrt{5})z + 38 + 17\sqrt{5} = 0$.

7°. Fie ecuaţia $z^3 + mz^2 + nz + p = 0$.

Să se determine condiţia necesară şi suficientă pe care trebuie să o îndeplinească coeficienţii $m, n, p \in \mathbf{C}$ pentru ca între rădăcinile ei să existe una dintre relaţiile de mai jos.

În fiecare caz se va da un exemplu numeric, iar ecuaţia astfel scrisă se va rezolva şi apoi se vor verifica condiţiile cerute între rădăcini:

i) $z_1 + z_2 = 0$; ii) $z_1 z_2 = 1$; iii) $z_1 = z_2 + z_3$; iv) $z_1 + z_3 = 2z_2$; v) $z_2 = 2z_1$, $z_3 = 3z_1$.

8°. Să se determine coeficienţii reali m, n, astfel încît următoarele polinoame să admită o rădăcină triplă, apoi să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

i) $f = X^4 - 6X^3 + 12X^2 + mX + n$;

ii) $f = X^4 + X^3 + mX + n$;

iii) $f = X^4 - 6X^2 + mX + n$.

9°. Să se determine coeficienţii reali m, n, astfel încît polinomul $f = X^3 + mX + n$ să admită rădăcina dublă $x_0 = m$.

10°. i) Să se determine numărul rațional m astfel încît ecuația $2x^3 - x^2 + mx + 1 = 0$ să aibă o rădăcină fracționară.

ii) Aceeași problemă pentru $m \in \mathbf{R}$.

11°. Să se simplifice următoarele fracții

i) $F_1(x) = \dfrac{x^{11} + x^7 + 1}{x^{14} + x^{10} + 1}$; ii) $F_2(x) = \dfrac{x^{17} + x^4 + 1}{x^8 + x + 1}$.

12°. Să se determine polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, de gradul 3, știind că $f(a) - f(b) - f(c) = 2a$; $f(a) + f(b) - f(c) = 2b$, $-f(a) - f(b) + f(c) = 2c$, iar $a + b + c = 0$. *Generalizare.*

13°. Să se determine parametrii reali a și b, astfel încît $(X^2 + 1) \mid f$, unde $f = (X + 1)^n + aX + b$.

14°. Fie polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f_{2n+1} = (X + a + b)^{2n+1} - (X^{2n+1} + a^{2n+1} + b^{2n+1})$.

i) Să se arate că $f_3 \mid f_5$ și să se determine cîtul împărțirii.

ii) Să se arate că $f_3 \mid f_{2n+1}$.

iii) Să se rezolve ecuația $f_5 = 0$.

15°. Fie $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = 2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i$.

Să se descompună polinomul f în factori știind că ecuația $f(x) = 0$ admite o rădăcină reală.

16°. Fie ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, avînd coeficienți reali. Să se demonstreze că dacă $x_1 = m + ni$ și $|x_1| = 1$, atunci $x_0 = 2(m + 1)$ este o rădăcină a ecuației $x^3 + (a - 5)x^2 + (b - 3a + 6)x + a - b + c - 1 = 0$.

17°. Se consideră ecuația $x^3 + mx^2 + nx + q = 0$ ale cărei rădăcini sînt razele cercurilor exînscrise unui triunghi ABC. Să se formeze ecuația de gradul trei în y ale cărei rădăcini sînt înălțimile aceluiași triunghi ABC.

Rezolvări. 1°. Fie x_0 rădăcina triplă, atunci $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 4x_0^3 - 33x_0^2 + 84x_0 + m = 0$; $f''(x_0) = 12x_0^2 - 66x_0 + 84 = 0$, $f'''(x_0) = 24x_0 - 66 \neq 0$.

Din $f''(x_0) = 0$ obținem $x_0' = 2$ și $x_0'' = \dfrac{7}{2}$, valori pentru care $f'''(x_0) \neq 0$. Cum ecuația este de gradul patru, atunci numai una dintre valorile x_0', x_0'' poate fi rădăcină triplă. Aplicînd schema lui Horner pentru $x_0' = 2$, obținem $f = (X - 2)^3 \cdot (X - 5)$, iar cum

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 96 + 2m + n = 0 \\ 68 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -68 \\ n = 40. \end{cases}$$

Dacă $x_0'' = \frac{7}{2}$ este rădăcină triplă, atunci

$$\begin{cases} f\left(\frac{7}{2}\right) = 0 \\ f'\left(\frac{7}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{245}{4} \\ n = \frac{343}{16}. \end{cases}$$

Aplicînd schema lui Horner, obținem $f = \left(X - \frac{7}{2}\right)^3 \cdot \left(X - \frac{1}{2}\right)$.

2°. Fie z_0 rădăcina dublă, atunci

$$\begin{cases} f(z_0) = 0 \\ f'(z_0) = 0 \\ f''(z_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_0^3 + pz_0 + q = 0 \\ 3z_0^2 + p = 0 \\ 6z_0 \neq 0 \end{cases}$$

a) Dacă $p \neq 0$, atunci din $f'(z_0) = 0$ deducem că $z_0 \neq 0$, ceea ce confirmă și $f''(z_0) = 0$. Deci, trebuie să determinăm condiția ca relațiile $f(z_0) = 0$ și $f'(z_0) = 0$ (1) să fie simultan verificate. Formăm polinomul $g(z_0) = 3f(z_0) - z f'(z_0) = 2pz_0 + 3q = 0$ (2), iar condiția (1) revine la a determina o rădăcină comună între $f'(z_0) = 0$ și $2pz_0 + 3q = 0$.

Fie α o rădăcină comună a ecuațiilor $f(z_0) = 0$ și $f'(z_0) = 0$. Substituind în (2) pe z_0 cu α obținem $g(\alpha) = 3f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$. Cum ambii termeni $3f(\alpha) = 0$ și $\alpha f'(\alpha) = 0$, atunci și $g(\alpha) = 0$, adică α verifică și relația (2). Reciproc: presupunem că α este o rădăcină comună a ecuațiilor $f'(z_0) = 0$ și $g(z_0) = 0$, adică și $f(z_0) = 0$. Condiția ca ecuațiile $f'(z_0) = 0$ și $g(z_0) = 0$ să admită o soluție comună este: $g(z_0) = 0 \Rightarrow z_0 = -\frac{3}{2}\frac{q}{p}$, $p \neq 0$ și $f(z_0) = f\left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{q}{p}\right) = 0 \Rightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0$.

b) Dacă $p = 0$, atunci $f(z_0) = z_0^3 + p = 0$, $f'(z_0) = 3z_0^2 = 0$, $f''(z_0) = 6z_0 = 0$, $f'''(z_0) = 6 \neq 0$.

Ecuațiile $f'(z_0) = 0$ și $f''(z_0) = 0$ au rădăcina $z_0 = 0$ și $f(0) = q$. Dacă $q = 0$, atunci ecuația admite rădăcina $z_0 = 0$ triplă, iar dacă $q \neq 0$, atunci ecuația are numai rădăcini simple și nu duble.

3°. Dezvoltăm $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg}\gamma} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}{1 - (\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma)} = \frac{-a + c}{1 - b}.$$

4°. i) Metoda 1. Fie $z_1 = z_2$ și $z_3 = z_4$, atunci din relațiile lui F. Viète avem: din prima și a treia determinăm $z_1, z_3 = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, iar din a doua și a patra relație obținem $m = 0$ și $n = 1$.

Metoda 2. Identificăm polinomul cu $(z^2 + pz + q)^2$ și apoi aplicăm metoda coeficienților nedeterminați.

ii) În mod analog, determinăm $z_1 = z_2 = 1$, $z_3 = z_4 = i$, $m = 2(1 - i)$, $n = -1$.

5°. Din $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 7 \Rightarrow z_4 = 5$. Din relația a treia determinăm $z_2 z_3 = -1$ și cum $z_2 + z_3 = 0$, obținem $z_2 = 1, z_3 = -1$ sau $z_2 = -1, z_3 = 1$, deci $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \{(2, -1, 1, 5), (2, 1, -1, 5)\}$. Substituind aceste rădăcini în relațiile a doua și a patra determinăm $m = 9$ și $n = -10$.

6°. Aplicăm metoda derivatelor:

i) Dacă z_0 este rădăcină triplă, atunci

$$\begin{cases} f(z_0) = 0 \\ f'(z_0) = 0 \\ f''(z_0) = 0 \\ f'''(z_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_0^4 - 2iz_0^3 - 2iz_0 - 1 = 0 \\ 4z_0^3 - 6iz_0^2 - 2i = 0 \\ 12z_0^2 - 12iz_0 = 0 \Rightarrow z_0 \in \{0, i\} \\ 24z_0 - 12i \neq 0 \Rightarrow z_0 \neq \dfrac{1}{2}i. \end{cases}$$

iar $z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = i$, $z_4 = -i$;

ii) $z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = 2 + \sqrt{5}$, $z_4 = 1$.

7°. Metoda 1. Aplicăm relațiile lui F. Viète.

i) Cum $z_1 + z_2 + z_3 = -m$ și $z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow z_3 = -m$; $z_1 z_2 = n$, $z_1 z_2 z_3 = -p \Rightarrow (-m)n = -p \Rightarrow m \cdot n = p$.

Rădăcinile sînt $\pm\sqrt{-n}$, $-m$. Pentru exemplul numeric, se pot da parametrilor m, n, p orice valori reale, dar cu condiția $p = mn$, ca de exemplu $m = 5$, $n = -9 \Rightarrow p = -45$ sau $m = 1$, $n = 4 \Rightarrow p = 4$, iar rădăcinile în acest caz sînt complexe conjugate.

Metoda 2. Cum suma a două rădăcini este zero, polinomul inițial îl putem identifica cu $(z^2 + \alpha)(z + \beta) = z^3 + \beta z^2 + \alpha z + \alpha\beta$, deci $\beta = m$ și $\alpha = n$, iar $\alpha\beta = mn = p$.

ii) Metoda 1. $z_1 + z_2 + z_3 = m$, $z_3(z_1 + z_2) + 1 = n$, $1 \cdot z_3 = -p \rightarrow z_1 + z_2 = -m + p$ și $-p(-m + p) + 1 = n \rightarrow p^2 - mp + n - 1 = 0$.

Rădăcinile z_1 și z_2 sînt date de ecuația $z^2 - (p - m)z + 1 = 0$. Pentru exemplul numeric m, p sînt aleși arbitrar, iar $n = 1 + mp - p^2$.

Metoda 2. Cum produsul a două rădăcini este 1, atunci polinomul inițial se identifică cu $(z^2 + \alpha z + 1)(z + p)$.

iii) Din primele două relații ale lui F. Viète și relația $z_1 = z_2 + z_3$ obținem $z_1 = -\dfrac{m}{2}$ și $z_2 z_3 = \dfrac{4n - m^2}{4}$, care substituite în $z_1 z_2 z_3 = -p$ ne dau condiția necesară și suficientă: $m^3 - 4mn + 8p = 0$. Rădăcinile z_2 și z_3 se determină cunoscînd suma lor $-\dfrac{m}{2}$ și $z_2 z_3 = \dfrac{4n - m^2}{4}$. Pentru exemplul numeric, m și n sînt aleși arbitrari, iar $p = \dfrac{4mn - m^3}{8}$.

iv) Din primele două relații ale lui F. Viète și relația $2z_2 = z_1 + z_3$, obținem $z_2 = -\frac{m}{3}$ și $z_1 z_3 + z_2(z_1 + z_3) = n \Rightarrow z_1 z_3 = n - \frac{2m^2}{9}$. Substituind în relația a treia, obținem $-\frac{m}{3}\left(n - \frac{2m^2}{9}\right) = -p \Rightarrow m(2m^2 - 9n) = -27p$. Pentru exemplul numeric, m și n sînt aleși arbitrar, iar $p = -\frac{m(2m^2 - 9n)}{27}$.

v) Din $z_1 + z_2 + z_3 = -m$, obținem $z_1 = -\frac{m}{6}$, $z_2 = -\frac{m}{3}$, $z_3 = -\frac{m}{2}$, valori care substituite în celelalte două relații ale lui F. Viète vor da $11m^2 = 36n$, $m^3 = 36p$. Pentru exemplul numeric se alege m arbitrar obținînd astfel pe n și p. Se preferă ca m să fie multiplu de 6.

8°. i) Fie x_0 rădăcina triplă, atunci

$$\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^4 - 6x_0^3 + 12x_0^2 + mx_0 + n = 0 \\ 4x_0^3 - 18x_0^2 + 24x_0 + m = 0 \\ 12x_0^2 - 36x_0 + 24 = 0 \\ 24x_0 - 36 \neq 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_0 = 1$ sau $x_0 = 2$. Pentru $x_0 = 1$ obținem $m = -10$, $n = 3$ și $x_4 = 3$, iar polinomul se descompune în $f = (X-1)^3(X-3)$. Pentru $x_0 = 2$ obținem $m = -8$, $n = 0$ și $x_4 = 0$, iar polinomul se descompune în $f = X(X-2)^3$.

ii) Procedînd analog ca la i), obținem $x_0 = 0$, $x_4 = -1$, $m = n = 0$ și $f = X^3(X+1)$ sau $x_0 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{4}$, $n = -\frac{1}{16}$ și $f = \left(X + \frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(X - \frac{1}{2}\right)$.

iii) $x_0 = 1$, $x_4 = -3$, $m = 8$, $n = -3$ și $f = (X-1)^3(X+3)$ sau $x_0 = -1$, $x_4 = 3$, $m = -8$, $n = -3$ și $f = (X+1)^3(X-3)$.

9°. Cum x_0 este rădăcină dublă, atunci:

$$\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^3 + mx_0 + n = 0 \\ 3x_0^2 + m = 0 \\ 6x_0 \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^3 + m^2 + n = 0 \\ 3m^2 + m = 0. \end{cases}$$

Pentru $m = 0$ obținem $n = 0$, iar polinomul devine $f = X^3$. Pentru $m = -\frac{1}{3}$, $n = -\frac{2}{27}$, iar rădăcinile sînt $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$.

10°. i) Cum divizorii termenului $\frac{a_0}{a_n} = \frac{1}{2}$ sînt $\pm\frac{1}{2}$, rădăcina fracționară este sau $x_1 = \frac{1}{2}$ și $m = -2$, sau $x_1 = -\frac{1}{2}$ și $m = 1$.

11°. Se știe că o fracție devine ireductibilă dacă este simplificată prin c.m.m.d.c. al numărătorului și numitorului. Vom determina cu ajutorul algoritmului lui Euclid c.m.m.d.c. dintre numărătorul și numitorul fracției:

i) $F_1(x) = \dfrac{(x^2+x+1)(x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)}{(x^2+x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^7+x^6-x^4+x^3-x+1)}$;

ii) c.m.m.d.c. este x^2+x+1.

12°. Rezolvînd sistemul dat în ipoteză, obținem $f(a)=a, f(b)=b, f(c)=$ $=c$, adică a, b, c sînt rădăcini ale ecuației $f(x)-x=0$, iar $f(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)$, $k\in\mathbf{R}$.

Generalizare. Dacă grad $f=n$, atunci $f=k\prod\limits_{i=1}^{n}(X-a_i)+X$.

13°. Aplicăm teorema lui Bézout: $x^2+1=0 \Rightarrow x=\pm i$ și calculăm $f(\pm i)$. Deci $f(i)=(1+i)^n+ia+b=b+2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}x+i\left(a+2^{\frac{n}{2}}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)=$ $=0 \Rightarrow a=-2^{\frac{n}{2}}\sin\dfrac{n\pi}{4}$ și $b=-2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}$. Aceleași valori le obținem și pentru $f(-i)=0$. Pentru calcularea expresiei $(1+i)^n$ am aplicat transformarea în număr trigonometric complex și apoi am aplicat formula lui Moivre: $(1+i)^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^n=2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\,2^{\frac{n}{2}}\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

14°. $f_3=(X+a+b)^3-(X^3+a^3+b^3)=3(X+a)(X+b)(a+b)$

$$f_5=(X+a+b)^5-(X^5+a^5+b^5).$$

Ambele polinoame se anulează pentru $a=-b$, $b=-x$, $x=-a$, deci se divid cu $(a+b)(b+X)(X+a)$ și atunci $f_5=[\alpha(a^2+b^2+X^2)+$ $+\beta(ab+bX+aX)]f_3$. Efectuînd calculul algebric și aplicînd metoda coeficienților nedeterminați, obținem $\alpha=\beta=\dfrac{5}{3}$. Cîtul împărțirii este $C(a, b,$ $X)=\dfrac{5}{3}(a^2+b^2+X^2+ab+bX+aX)=\dfrac{5}{6}[(a+b)^2+(b+X)^2+(a+$ $+X)^2]$.

ii) Polinomul f_{2n+1} se anulează pentru $a=-b$, $b=-x$ și $x=-a$, deci se divide prin $(a+b)(b+X)(a+X)$.

iii) $f_5=0 \Rightarrow f_3=0$ și $C(a, b, x)=0$, deci $x_1=-a$, $x_2=-b$ și x^2+ $+(a+b)x+a^2+b^2+ab=0$, ecuație care va da rădăcinile x_3 și x_4.

15°. Fie $x=a$ rădăcina ecuației $f(x)=0$, deci $f(a)=0 \Rightarrow 2a^3-5a^2+$ $+1+i(-6a^2+9a-3)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^3-5a^2+1=0 \\ -6a^2+9a-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2a-1)(a^2-2a-1)=0 \\ (2a-1)(a+1)=0. \end{cases}$$

Rădăcina comună celor două ecuații este $a = \frac{1}{2}$. Polinomul f se descompune în $f = (2X - 1)(X - 1 - i)(X - 1 - 2i)$.

16°. Cum ecuația are coeficienți reali, atunci va admite rădăcinile x_1 și $\bar{x}_1$. Aplicînd relațiile lui F. Viète și ținînd seama că $|x_1| = |x_2| = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow m^2 + n^2 = 1$, obținem: $x_1 + x_2 + x_3 = -a \Rightarrow 2m + x_3 = -a \Rightarrow x_3 =$ $= -2m - a$, și $x_1x_2x_3 = (m^2 + n^2)\, x_3 = -c \Rightarrow (m^2 + n^2) \cdot (-2m - a) =$ $= -c \Rightarrow 2m + a = c \Rightarrow 2m = c - a$.

Cum $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_3 = m^2 + n^2 + 2mx_3 = b \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 + 2m(-2m - a) = b \Rightarrow 2m(2m + a) = 1 - b \Rightarrow (c - a) \cdot c = 1 - b$.

Expresia $x_0 = 2(m + 1) = 2m + 2 = c - a + 2$, substituită în ecuația a doua, o va verifica, deci este o rădăcină a ei.

17°. Reamintesc formulele razelor cercurilor exînscrise unui triunghi: $r_a = \frac{S}{p - a}$, $r_b = \frac{S}{p - b}$, $r_c = \frac{S}{p - c}$. Dar $\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2p - (b + c)}{S} = \frac{a}{S} =$ $= \frac{2}{h_a}$, unde a, b, c sînt laturile triunghiului, S aria sa și h_a înălțimea corespunzătoare laturii a. Deci rădăcinile ecuației a doua sînt $y_1 = h_a =$ $= \frac{2r_b \cdot r_c}{r_b + r_c}$; $y_2 = h_b$; $y_3 = h_c \Rightarrow y_1 = \frac{2x_2x_3}{x_2 + x_3}$, $y_2 = \frac{2x_1x_3}{x_1 + x_3}$, $y_3 = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$. Ecuația în y este $(q - mn)\, y^3 - 2(n^2 + mq)\, y^2 - 8nqy - 8q^2 = 0$.

Tiparul executat la I. P. „13 Decembrie 1918" c.—2/63

Scopul prezentului ciclu alcătuit din 100 lecții de matematică, (80 de lecții aferente capitolelor materiei claselor IX—XII din care 16 lecții conțin în partea finală și un test recapitulativ, inserat în scopul de a verifica aprofundarea materiei studiate pînă în acel moment, iar ultimele 20 de lecții conținînd cîte un test final) este de a ajuta elevul claselor liceale să înțeleagă cît mai bine fenomenele matematice prezentate în manualele școlare, astfel încît, după parcurgerea acestui ciclu de lecții, viitorul candidat la examenele de admitere în învățămîntul superior să aibă dezvoltată atît gîndirea abstractă cît și perspicacitatea, putînd face față în condiții optime, exigențelor tot mai mari, proporționale cu nivelele de dezvoltare a societății.

Prin marea varietate de tipuri de probleme, prin numărul lor (aproximativ 5 000), cît și prin rezolvarea lor completă, elevul studios și disciplinat matematic va putea acoperi întreaga materie necesară examenelor, eliminînd astfel eventualele lacune acumulate în anii anteriori școlari.

Este de remarcat că cele 20 de teste finale, considerate în parte ca un pseudoexamen, vor putea fi lucrate, fiecare, în aproximativ 3 ore (astfel că elevul își va putea verifica resursele interne ale cunoașterii matematice), adică timpul afectat candidaților la concursurile de admitere.

Ca un model de studiu, recomand viitorului candidat, să lucreze săptămînal cîte două lecții în perioada cuprinsă între 15.IX și 15.VI a anului următor, iar în ultima lună cîte un test final, zilnic.

Succesul la examene poate fi garantat numai printr-o muncă susținută de cel puțin 3 ore zilnic, timp de 10 luni.

Comparat cu marea satisfacție a reușitei, sacrificiul nu mi se pare prea mare.

Nu uitați că o gîndire matematică înseamnă dezvoltarea inteligenței, a perspicacității, a percepерii abstracte, a atenției distributive.

Nu toți elevii claselor liceale pot beneficia de ajutor suplimentar din partea părinților sau a meditatorilor, de aceea, lucrarea de față își propune să înlocuiască această lipsă de ajutor și să contribuie la autopregătirea elevului ce parcurge sistematic și cu răbdare cele 100 de lecții care vor deschide „apetitul matematic“, determinînd pe rezolvitor să gîndească cît mai profund și poate, de ce nu, să creeze și el noi probleme de matematică.

De reținut că cele „100 DE LECȚII DE MATEMATICĂ“ urmăresc un singur lucru: **să asigure succesul candidaților la susținerea examenelor de admitere într-un institut de învățămînt superior.**

Academician
Constantin Drâmbă

EDITURA ICAR-BUCUREȘTI

B-dul Bucureștii Noi nr. 68, sc. F, et. 3,
ap. 10, sector 1, cod 78494
Telefon: 67.12.88, 60.15.75
ISBN 973-606-000-4
ISBN 973-606-010-1

Lei 23