Примеры учат лучше, чем теория.
Исаак Ньютон

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике и механике УМО классических университетов РФ в качестве учебного пособия для математических направлений и специальностей

Москва
«Вузовская книга»
2005

УДК 519.21
ББК 22.171я73
Т 34

Авторы:
Г.У. Мынбаева, И.Г. Дмитриев, В.З. Борисов, А.С. Саввин

Теория вероятностей в примерах и задачах / Г.У. Мынбаева,
Т 34 И.Г. Дмитриев, В.З. Борисов, А.С. Саввин. — М.: Вузовская книга, 2005. — 436 с.

ISBN 5-9502-0122-1

Сборник содержит краткий теоретический материал по курсу «Теория вероятностей», подробные решения типовых задач, 24 варианта индивидуальных заданий по основным темам указанного курса.

Сборник удобен при рейтинговом контроле уровня знаний студентов, а также при дистанционном обучении.

Для студентов и преподавателей математических специальностей вузов. Может быть использован для других специальностей с необходимым сокращением материала.

УДК 519.21
ББК 22.171я73

ISBN 5-9502-0122-1

ГЛАВА 1
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

§ 1.1. Пространство элементарных событий

Исходными понятиями теории вероятностей являются понятие элементарного события и понятие пространства элементарных событий.

Стохастическим называют эксперимент, который можно повторить сколь угодно раз в одних и тех же условиях и результат которого нельзя заранее предугадать. Неразложимые, исключающие друг друга исходы ω стохастического эксперимента называют *элементарными событиями*. Совокупность всех элементарных событий образует *пространство* Ω *элементарных событий*. Подмножества пространства элементарных событий называют *случайными событиями* и обозначают: A, B, C ... . Если $\omega_1 \in A$ и $\omega_2 \in A$, то говорят, что элементарные события ω_1, ω_2 благоприятствуют событию A. Если исход эксперимента описывается элементарным событием, благоприятствующим событию A, то говорят, что в данном эксперименте событие A произошло. В противном случае говорят, что событие A не произошло.

Пример. Бросают игральную кость и наблюдают число очков, выпавших на верхней грани, тогда $\Omega = \{\omega_1 = 1,\ \omega_2 = 2,\ \omega_3 = 3,\ \omega_4 = 4,\ \omega_5 = 5,\ \omega_6 = 6\}$. Пусть событие A означает, что в результате эксперимента выпало четное число очков, т. е. $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$. Далее, пусть в результате проведенного эксперимента выпало 2 очка. Так как $\omega_2 \in A$, то событие A произошло.

Объединение двух подмножеств A и B пространства Ω называется *суммой* соответствующих событий и обозначается $A + B$. Событие $A + B$ происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A или событие B.

Пересечение двух подмножеств A и B пространства Ω называется *произведением* соответствующих событий и обозначается AB. Событие AB происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A и событие B.

Разность двух подмножеств A и B пространства Ω называется *разностью* соответствующих событий и обозначается $A - B$. Событие $A - B$ происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит B.

Дополнение подмножества A пространства Ω называется событием, *противоположным к событию* A, и обозначается $\overline{A}$. Событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

Симметрической разностью двух событий A и B называется событие $A\Delta B = \overline{A}B + A\overline{B}$.

Если $A \subset B$, и A, $B \subseteq \Omega$, то говорят, что A влечет событие B. В этом случае если происходит событие A, то происходит B.

Событие, которое в результате эксперимента заведомо произойдет, называют *достоверным событием* и обозначают Ω. Событие, которое в результате эксперимента заведомо не произойдет, называют *невозможным событием* и обозначают $\varnothing$.

Если $AB = \varnothing$, то события A и B называются несовместными, в противном случае — совместными.

Операции над событиями удобно иллюстрировать диаграммами Эйлера—Венна (задача 7).

Пусть $I = \{\alpha\}$ — некоторое множество индексов. Имеют место формулы двойственности:

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A}_\alpha, \qquad \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A}_\alpha.$$

Если рассматриваемое событие произошло, поставим ему в соответствие цифру 1, а если не произошло — цифру 0. Используя данные выше определения, получим следующие таблицы операций над событиями:

$A + B$

A \ B	0	1
0	0	1
1	1	1

AB

A \ B	0	1
0	0	0
1	0	1

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Задача 1. Игральная кость подбрасывается два раза. Описать пространство элементарных событий, если наблюдается произведение выпавших на верхних гранях очков.

Решение. При подбрасывании два раза шестигранного кубика возможны следующие произведения:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Пространство элементарных событий в данном эксперименте будет состоять из 18 элементов:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$.

Задача 2. Монета подбрасывается до появления набора (решка, орел). Описать пространство элементарных событий, если разрешается делать не более семи подбрасываний.

Решение. Пространство элементарных событий будет состоять из 29 элементов (Р означает появление решки, О — появление орла):

РО	ОРО	ООРО	ОООРО	ООООРО	ОООООРО	ООООООО
РРО	ОРРО	ООРРО	ОООРРО	ООООРРО	ОООООРР	ООООООР
РРРО	ОРРРО	ООРРРО	ОООРРРО	ООООРРР		
РРРРО	ОРРРРО	ООРРРРО	ОООРРРР			
РРРРРО	ОРРРРРО	ООРРРРР				
РРРРРРО	ОРРРРРР					
РРРРРРР						

Заметим, что результат седьмого подбрасывания монеты не существен.

Задача 3. Записать словесно противоположное и несовместное события для $A = \{$Не более трех учеников данной школы участвовали в конкурсе$\}$.

Решение. $\overline{A}$ = {Более трех учеников данной школы участвовали в конкурсе}, B = {Пятеро учеников данной школы участвовали в конкурсе} и $AB = \varnothing$.

Задача 4. Судно имеет две турбины. Событие A = {Первая турбина судна имеет неисправность}, а событие B = {Вторая турбина судна неисправна}. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

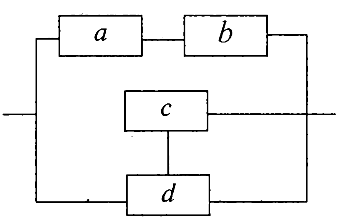
Решение: В данном эксперименте возможны четыре элементарных исхода E_1 = {Обе турбины исправны}, E_2 = {Первая турбина исправна, а вторая — неисправна}, E_3 = {Первая турбина неисправна, а вторая — исправна}, E_4 = {Обе турбины неисправны}. Событие $A = E_3 + E_4$, а событие $B = E_2 + E_4$. Событие $A \cdot B = E_4$, тогда $\overline{A \cdot B} = E_1 + E_2 + E_3$ = {Хотя бы одна турбина судна исправна}. Событие $\overline{A} = E_1 + E_2$, событие $\overline{B} = E_1 + E_3$, тогда $\overline{A} + \overline{B} = E_1 + E_2 + E_3 = \overline{A \cdot B}$. Аналогично, событие $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} = E_1$ = {Обе турбины исправны}.

Задача 5. Из урны, содержащей белые и черные шары, наудачу извлекаются одновременно два шара. Событие A = {Хотя бы один извлеченный шар белый}, а событие B = {Извлечены черные шары}. Что означают события $A + B$, $A \cdot B$, $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

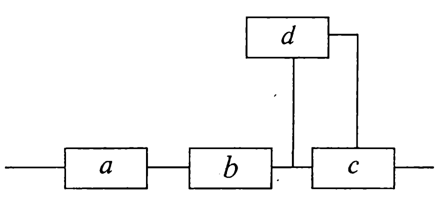
Решение. В данном эксперименте возможны три элементарных исхода E_1 = {Оба извлеченных шара черные}, E_2 = {Извлеченные шары разных цветов}, E_3 = {Оба извлеченных шара белые}. Событие $A = E_2 + E_3$, а $B = E_1$, тогда $A + B = E_1 + E_2 + E_3 = \Omega$ — достоверное событие, $AB = \varnothing$ — невозможное событие, $A - B = A$, $B - A = B$, $AB\Delta B = E_1 + E_2 + E_3 = \Omega$, $\overline{A} = E_1 = B$, $\overline{B} = E_2 + E_3 = A$.

Задача 6. Дана электрическая цепь с элементами a, b, c, d. Даны события A = {Вышел из строя элемент a}, B = {Вышел из строя элемент b}, C = {Вышел из строя элемент c}, D = {Вышел из строя элемент d}. Записать алгебраически событие E = {Разрыв цепи}:

A)



B)



Решение. A) Выход из строя элемента «c» не влияет на работу цепи в целом. Следовательно, цепь будет иметь разрыв в случаях одновременного выхода из строя либо элементов «a» и «d», либо элементов «b» и «d», т. е. $E = AD + BD$.

Более детально алгебраическую запись события E можно получить так. Пространство элементарных событий будет состоять из $2^4 = 16$ элементов:

		ABC	$ABCD$	Разрыв цепи
	AB		$ABC\overline{D}$	
		$AB\overline{C}$	$AB\overline{C}D$	Разрыв цепи
A			$AB\overline{C}\,\overline{D}$	
		$A\overline{B}C$	$A\overline{B}CD$	Разрыв цепи
	$A\overline{B}$		$A\overline{B}C\overline{D}$	
		$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$	Разрыв цепи
			$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	
		$\overline{A}BC$	$\overline{A}BCD$	Разрыв цепи
	$\overline{A}B$		$\overline{A}BC\overline{D}$	
		$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	Разрыв цепи
$\overline{A}$			$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$	
		$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	
	$\overline{A}\,\overline{B}$		$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$	
		$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$	
			$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	

Тогда

$$E = ABCD + AB\overline{C}D + A\overline{B}CD + A\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} =$$

$$= (ABCD + AB\overline{C}D) + (A\overline{B}CD + A\overline{B}\,\overline{C}D) + (\overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D}) =$$

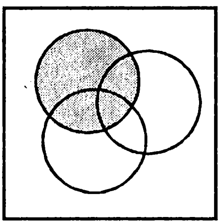
$$= ABD + A\overline{B}D + \overline{A}BD = (ABD + A\overline{B}D) + (ABD + \overline{A}BD) = AD + BD.$$

B) Выход из строя элемента «d» не влияет на работу цепи в целом. Следовательно, в силу последовательности соединения элементов цепь будет иметь разрыв в случае выхода из строя хотя бы одного из элементов «a», «b» и «c», т. е. $E = A + B + C$.

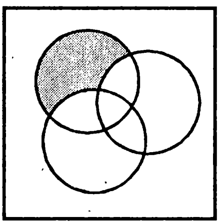
Задача 7. Некто взял три книги в библиотеке. Пусть $A=$ {Первая книга о А. С. Пушкине}, $B=${Вторая книга о А. С. Пушкине}, $C=${Третья книга о А. С. Пушкине}. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события: {Только первая книга о А. С. Пушкине}, {Только одна книга о А. С. Пушкине}, {Первая и вторая книги о А. С. Пушкине}.

Решение. Покажем диаграммы Эйлера—Венна наиболее распространенных в теории вероятностей случайных событий.

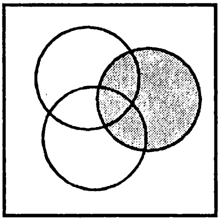
$A=${Первая книга о А. С. Пушкине}



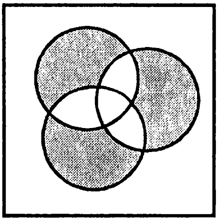
$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}=${Только первая книга о А. С. Пушкине}



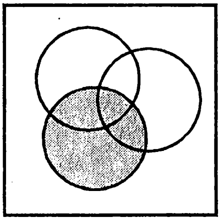
$B=${Вторая книга о А. С. Пушкине}



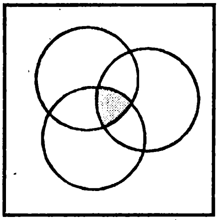
$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C=$
$=${Только одна книга о А. С. Пушкине}



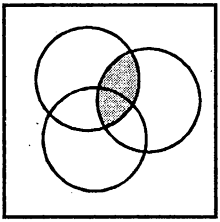
$C=${Третья книга о А. С. Пушкине}



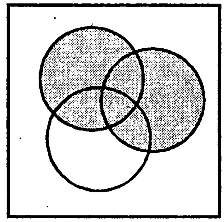
$A\cdot B\cdot C=${Все три книги о А. С. Пушкине}



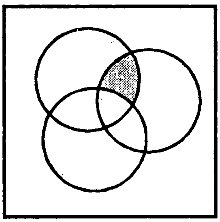
$A \cdot B =$ {Первая и вторая книги о А. С. Пушкине}



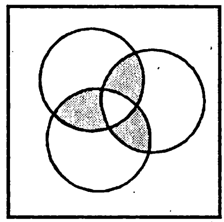
$A + B =$ {Первая или вторая книга о А. С. Пушкине}



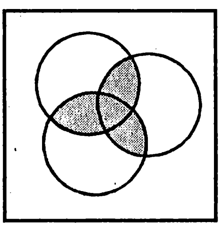
$A \cdot B \cdot \overline{C} =$ {Только первая и вторая книги о А. С. Пушкине}



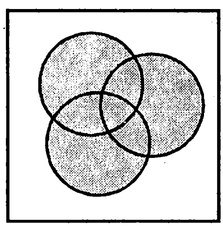
$A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C =$
$=$ {Только две книги о А. С. Пушкине}



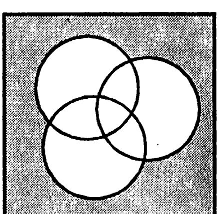
$A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C =$ {Хотя бы две книги о А. С. Пушкине}



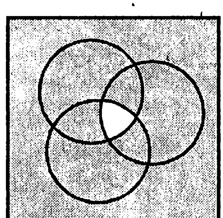
$A + B + C =$ {Хотя бы одна книга о А. С. Пушкине}



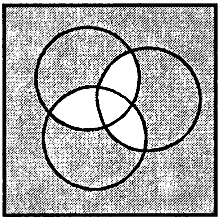
$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} =$ {Ни одной книги о А. С. Пушкине}



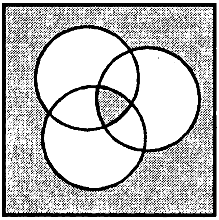
$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} =$ {Хотя бы одна книга не о А. С. Пушкине}



$\overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C} =$
$=$ {Не более одной книги о А. С. Пушкине}



$ABC + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} =$ {Все три книги о А. С. Пушкине, или все три книги не о А. С. Пушкине}



Задача 8. Доказать тождество $A \Delta B + A \cdot B = A + B$, пользуясь таблицей операций над событиями.

Решение. Если событие произошло, то поставим ему в соответствие цифру 1, а если не произошло — поставим 0. Получим следующую таблицу операций:

A	B	$A\Delta B$	$A \cdot B$	$A\Delta B + A \cdot B$	$A + B$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

Так как события $A\Delta B + A \cdot B$ и $A + B$ происходят и не происходят одновременно, они совпадают.

Индивидуальные задания

Вариант 1

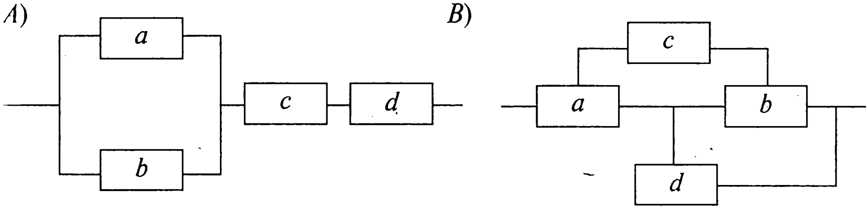
1. Шестигранная игральная кость подбрасывается два раза. Описать пространство элементарных событий, если наблюдается выпавшее на верхней грани число очков.

2. Монета подбрасывается до появления два раза подряд решки. Описать пространство элементарных событий, если разрешается делать не более пяти подбрасываний.

3. Из урны, содержащей шары белого, черного и синего цветов, наудачу извлекается один шар. Событие $A = \{$Извлечен белый шар$\}$, а событие $B = \{$Извлечен черный шар$\}$. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

4. Среди студентов, сдавших экзамен по теории вероятностей, выбирают наудачу одного. Событие $A = \{$Выбран юноша$\}$, $B = \{$Выбран студент, сдавший экзамен на «отлично»$\}$. Что означают события $A + B$, $A \cdot B$, $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Дана электрическая цепь с элементами a, b, c, d. Даны события $A = \{$Вышел из строя элемент $a\}$, $B = \{$Вышел из строя элемент $b\}$, $C = \{$Вышел из строя элемент $c\}$, $D = \{$Вышел из строя элемент $d\}$. Записать алгебраически событие $E = \{$Разрыв цепи$\}$:



6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$Из трех дней два дня шел дождь$\}$ и $B = \{$Хотя бы одна из четырех деталей бракованная$\}$.

7. Три стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Событие $A_i = \{$Попадание в мишень i-ым стрелком$\}$, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A = \{$В мишень попали только два стрелка$\}$, $B = \{$В мишень попал хотя бы один стрелок$\}$, $C = \{$В мишень попало не более одного стрелка$\}$, $D = \{$В мишень попали все$\}$.

8. Доказать тождество $A \Delta B = \overline{A} \cdot B + \overline{B} \cdot A$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 2

1. Подбрасываются две шестигранные игральные кости. Описать пространство элементарных событий, если наблюдается сумма выпавших на верхних гранях очков.

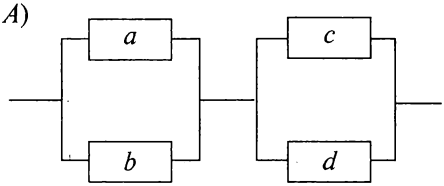
2. Из урны, содержащей 4 красных и 2 белых шара, наудачу и одновременно извлекают два шара до появления шаров одного цвета. Описать пространство элементарных событий.

3. Имеется 100 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 100. Событие $A = \{$Извлечение жетона, номер которого кратен 3$\}$, а событие $B = \{$Извлечение жетона, номер которого кратен 8$\}$. Что означают события $A + B$, $A \cdot B$, $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

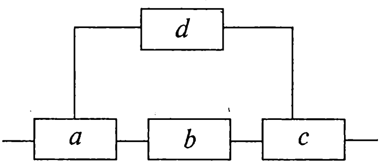
4. Из колоды карт наудачу извлекается одна карта. Событие $A = \{$Извлечен король$\}$, $B = \{$Извлечена карта бубновой масти$\}$. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$При трех подбрасываниях игральной кости хотя бы один раз выпала шестерка$\}$ и $B = \{$Среди четырех деталей не менее трех бракованных$\}$.

7. Из полного набора шахмат вынули наугад последовательно две фигуры или пешки. Событие $A_1 = \{$Первым вынули пешку$\}$, а событие $A_2 = \{$Вторым вынули пешку$\}$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A = \{$Вынули хотя бы одну фигуру$\}$, $B = \{$Вынули две фигуры$\}$, $C = \{$Вынули только одну фигуру$\}$, $D = \{$Вынули не менее одной пешки$\}$.

8. Доказать тождество $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 3

1. Шестигранная игральная кость подбрасывается до первого появления пятерки на верхней грани. Описать пространство элементарных событий.

2. Из урны, содержащей шесть различных по размеру красных шаров и один синий шар, наудачу и одновременно извлекают два шара. Описать пространство элементарных событий.

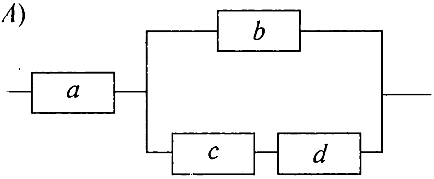
3. Шестигранная игральная кость подбрасывается один раз. Событие $A = \{$На верхней грани выпала шестерка$\}$, а событие $B = \{$На верхней грани выпало число, кратное 2$\}$. Что означают события $A + B$, $A \cdot B$, $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

4. Имеется 100 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 100. Событие $A=$ {Извлечение жетона, номер которого кратен 7}, а событие $B=$ {Извлечение жетона, номер которого кратен 11}.

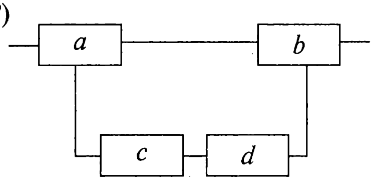
Что означают события $\overline{A\bullet B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A}\bullet\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A=$ {При трех подбрасываниях игральной кости ни разу не выпала шестерка} и $B=$ {Среди пяти деталей не более трех бракованных}.

7. Из студенческой группы выбирают наугад одного человека. Событие $A_1=$ {Выбран юноша}, а событие $A_2=$ {Выбранному 17 лет}. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A=$ {Выбрали девушку семнадцати лет}, $B=$ {Выбрали девушку}, $C=$ {Выбран юноша двадцати лет}, $D=$ {Выбрали либо девушку, либо юношу семнадцати лет}.

8. Доказать тождество $A\bullet\overline{B}+B=A+B$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 4

1. Шестигранная игральная кость подбрасывается три раза. Описать пространство элементарных событий, если наблюдаются выпавшие на верхних гранях числа очков.

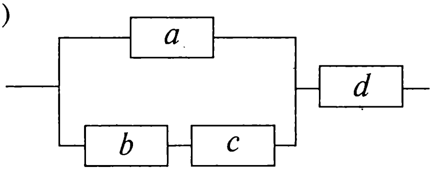
2. Производятся независимые выстрелы до первого попадания в цель. Описать пространство элементарных событий.

3. Событие $A=$ {Выигрыш по билету одной лотереи}, а событие $B=$ {Выигрыш по билету другой лотереи}. Что означают события $A+B$, $A\bullet B$, $A\Delta B$, $A-B$, $B-A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

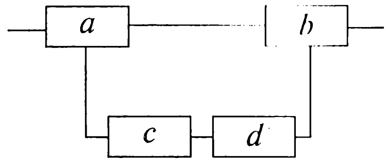
4. Имеется 100 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 100. Событие $A=$ {Извлечение жетона, номер которого кратен 5}, а событие $B=$ {Извлечение жетона, номер которого кратен 13}. Что означают события $\overline{A\bullet B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A}\bullet\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A=$ {Среди трех билетов лотереи по крайней мере два выигрышных} и $B=$ {Среди четырех юношей два семнадцатилетних}.

7. Судно имеет три котла. Событие $A_i=$ {Неисправность i-го котла}, $i=1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A=$ {Неисправен один котел}, $B=$ {Неисправен хотя бы один котел}, $C=$ {Неисправен первый котел}, $D=$ {Исправны по крайней мере два котла}.

8. Доказать тождество $\overline{A+B} = \overline{A}\bullet\overline{B}$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 5

1. Производятся три независимых выстрела по мишени. Описать пространство элементарных событий, если наблюдается попадание в цель.

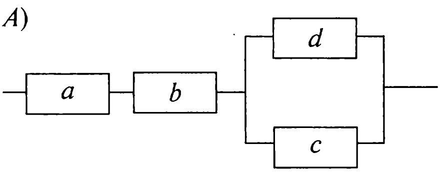
2. Монета подбрасывается до выпадения пары (решка, орел) или пары (орел, решка). Описать пространство элементарных событий.

3. Событие $A=$ {Выигрыш по билету одной лотереи}, а событие $B=$ {Выигрыш по билету другой лотереи}. Что означают события $\overline{A\bullet B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A}\bullet\overline{B}$?

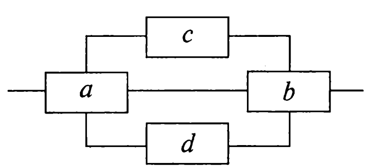
4. Из урны, содержащей шары белого, черного и синего цветов, наудачу извлекается один шар. Событие $A=$ {Извлечен белый шар}, а событие $B=$ {Извлечен черный шар}. Что означают события $A+B$, $A\bullet B$, $A\Delta B$, $A-B$, $B-A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A=$ {Среди трех юношей один отличник} и $B=$ {Хотя бы один из четырех стрелков попал в цель}.

7. Наудачу взяты три числа. Событие $A_i=$ {i-ое число четное}, $i=1,\ 2,\ 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A=$ {Все числа нечетные}, $B=$ {Хотя бы одно число четное}, $C=$ {Первое число нечетное}, $D=$ {Одно число четное}.

8. Доказать тождество $\overline{A}\bullet B+A\bullet\overline{B}+A\bullet B=A+B$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 6

1. Производятся три независимых выстрела по мишени. Описать пространство элементарных событий, если наблюдается количество попаданий в цель.

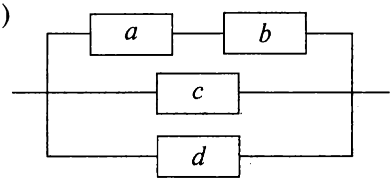
2. Из урны, содержащей 6 красных и 3 белых шара, наудачу последовательно извлекаются шары до появления двух шаров красного цвета друг за другом. Описать пространство элементарных событий.

3. Событие A означает выигрыш по билету лотереи, событие B — выигрыш телевизора по билету той же лотереи. Что означают события $A+B$, $A\bullet B$, $A\Delta B$, $A-B$, $B-A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

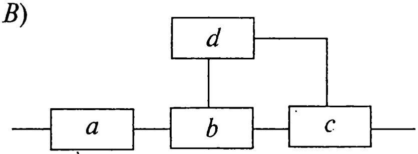
4. Среди студентов, сдавших экзамен по теории вероятностей, выбирают наудачу одного. Событие $A=$ {Выбран юноша}, $B=$ {Выбран студент, сдавший экзамен на «отлично»}. Что означают события $\overline{A\bullet B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A}\bullet\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A=$ {Из трех студентов только один встает рано} и $B=$ {Среди четырех карт хотя бы одна бубновая}.

7. В очереди три человека. Событие $A_i=$ {i-ым в очереди стоит мужчина}, $i=1,\ 2,\ 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A=$ {В очереди все не мужчины},

$B=\{$В очереди более одного мужчины$\}$, $C=\{$В очереди хотя бы один не мужчина$\}$, $D=\{$В очереди только один мужчина$\}$.

8. Доказать тождество $(A+B)-AB=A\Delta B$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 7

1. Ученик отвечает на три вопроса словами «Да» или «Нет». Описать пространство элементарных событий.

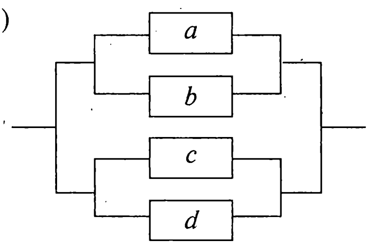
2. Ребенок из пяти карточек различных цветов выбирает две. Описать пространство элементарных событий.

3. Из урны, содержащей белые и черные шары, наудачу и одновременно извлекают два шара. Событие $A=\{$Извлечены белые шары$\}$, а событие $B=\{$Извлечены черные шары$\}$. Что означают события $A+B$, $A\bullet B$, $A\Delta B$, $A-B$, $B-A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

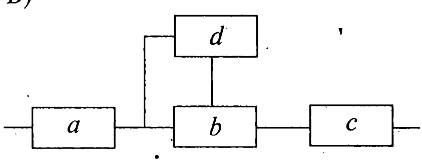
4. Из колоды карт наудачу извлекается одна карта. Событие $A=\{$Извлечен король пиковой масти$\}$, $B=\{$Извлечена карта бубновой масти$\}$. Что означают события $\overline{A\bullet B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A}\bullet\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A=\{$Среди трех карт хотя бы две бубновые$\}$ и $B=\{$В очереди из четырех человек двое мужчин$\}$.

7. Студент сдал три экзамена. Событие $A_i=\{$Студент сдал i-ый экзамен на отлично$\}$, $i=1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A=\{$Один экзамен сдан на отлично$\}$, $B=\{$Не менее одного экзамена студент сдал на отлично$\}$, $C=\{$По крайней мере два экзамена студент сдал не на отлично$\}$, $D=\{$Первый экзамен сдан на отлично$\}$.

8. Доказать тождество $B+A+AB=A+B$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 8

1. Туристическая группа наудачу выбирает маршрут к вершине горы и обратно. На гору ведут пять дорог. Описать пространство элементарных событий.

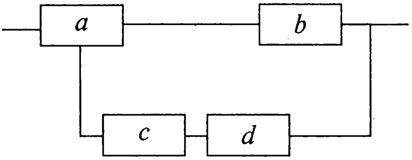
2. На колышек набрасываются кольца до первого попадания. Описать пространство элементарных событий, если всего десять колец.

3. Из урны, содержащей белые и черные шары, наудачу и одновременно извлекают два шара. Событие $A = \{$Извлечены белые шары$\}$, а событие $B = \{$Извлечены черные шары$\}$. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

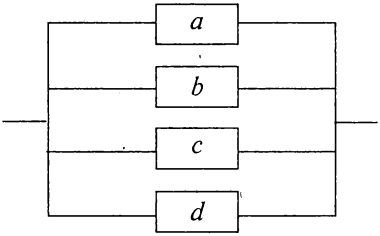
4. Из колоды карт наудачу извлекается одна карта. Событие $A = \{$Извлечен король пиковой масти$\}$, $B = \{$Извлечена карта бубновой масти$\}$. Что означают события $A + B$, AB, $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$В очереди из трех человек одна женщина$\}$ и $B = \{$Из четырех стрелков только двое попали в мишень$\}$.

7. Наудачу взяты три числа. Событие $A_i = \{i$-ое число кратно $5\}$, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A = \{$Все числа кратны $5\}$, $B = \{$Хотя бы одно число кратно $5\}$, $C = \{$Только одно число не кратно $5\}$, $D = \{$Второе число кратно пяти$\}$.

8. Доказать тождество $\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B = \overline{A \Delta B}$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 9

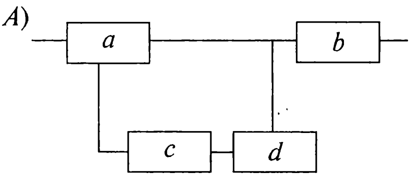
1. Из урны, содержащей 5 красных и 4 белых шара, наудачу последовательно извлекаются шары до появления двух шаров разного цвета друг за другом. Описать пространство элементарных событий.

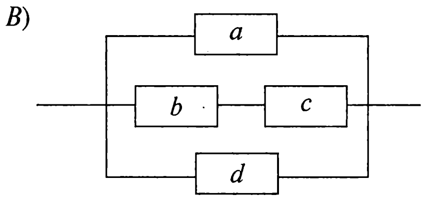
2. Ребенок из пяти карточек различных цветов выбирает два и раскладывает в ряд. Описать пространство элементарных событий.

3. Шестигранная игральная кость подбрасывается один раз. Событие $A = \{$На верхней грани выпало шесть очков$\}$, а событие $B = \{$На верхней грани выпало число очков, кратное 2$\}$. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

4. Из колоды карт наудачу извлекаются две карты. Событие $A = \{$Извлечены два туза красной масти$\}$, $B = \{$Извлечены карты бубновой масти$\}$. Что означают события $A + B$, AB, $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.





6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$Из трех дней ровно один день шел дождь$\}$ и $B = \{$Среди четырех книг по крайней мере две фантастики$\}$.

7. Стрелок сделал три выстрела в мишень. Событие $A_i = \{$Попадание в мишень при i-ом выстреле$\}$, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A = \{$Одно попадание$\}$, $B = \{$По крайней мере одно непопадание$\}$, $C = \{$Попадание при первом выстреле$\}$, $D = \{$Не менее двух попаданий$\}$.

8. Доказать тождество $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = \overline{A + B + C}$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 10

1. Из урны, содержащей 5 красных и 4 белых шара, наудачу последовательно извлекаются шары до появления белого, а затем красного шаров. Описать пространство элементарных событий.

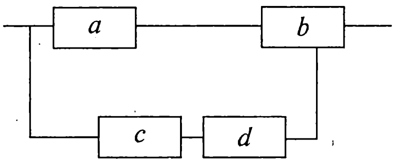
2. Читатель из четырех различных книг выбирает три. Описать пространство элементарных событий.

3. Шестигранная игральная кость подбрасывается два раза. Событие $A = \{$На верхней грани оба раза выпало шесть очков$\}$, а событие $B = \{$Сумма выпавших на верхних гранях очков равна 5$\}$. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

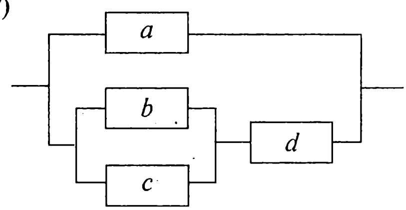
4. Производятся два выстрела в цель. Событие A означает попадание в цель при первом выстреле, событие B — попадание в цель при втором выстреле. Что означают события $A+B$, $A \cdot B$, $A \Delta B$, $A-B$, $B-A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A=$ {Среди трех книг не менее двух книг о животных} и $B=$ {Среди четырех облигаций ровно одна выигрышная}.

7. Наудачу последовательно взяты три кости домино. Событие $A_i=$ {i-ая кость оказалась дублем}, $i=1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A=$ {Все кости оказались дублями}, $B=$ {Одна кость оказалась не дублем}, $C=$ {Третья кость оказалась дублем}, $D=$ {Не менее одного дубля}.

8. Доказать тождество $A+B=(A \cdot B)\,\Delta\,(A \Delta B)$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 11

1. Производятся четыре независимых выстрела. Описать пространство элементарных событий, если наблюдается поражение цели.

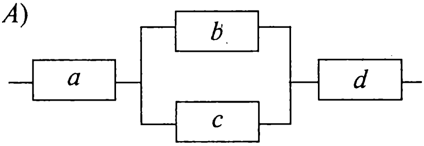
2. Монета подбрасывается до первого появления герба. Описать пространство элементарных событий.

3. Имеется 100 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 100. Событие $A=$ {Извлечение жетона, номер которого кратен 2}, а событие $B=$ {Извлечение жетона, номер которого кратен 7}. Что означают события $A+B$, AB, $A \Delta B$, $A-B$, $B-A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

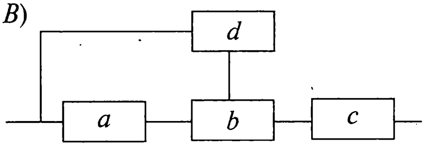
4. Событие A означает выигрыш по билету лотереи, событие B — выигрыш телевизора по билету той же лотереи. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A=$ {Все три дня студент вставал рано} и $B=$ {Хотя бы одна деталь из четырех бракованная}.

7. Три стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Событие $A_i=$ {Попадание в мишень i-ым стрелком}, $i=1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A=$ {В мишень попал только один стрелок}, $B=$ {В мишень не попали хотя бы два стрелка}, $C=$ {В мишень попали не менее одного стрелка}, $D=$ {В мишень никто не попал}.

8. Доказать тождество $A\Delta B=(\overline{A}+\overline{B})(A+B)$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 12

1. Выполненная контрольная работа состоит из двух задач и одного примера. Описать пространство элементарных событий, если наблюдается выполнение задач и примера.

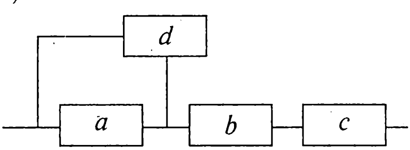
2. Студент отвечает на вопросы преподавателя до первого неверного ответа. Описать пространство элементарных событий, если преподаватель заготовил десять вопросов.

3. Производятся два выстрела в цель. Событие A означает попадание в цель при первом выстреле, событие B — попадание в цель при втором выстреле. Что означают события $\overline{A\cdot B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A}\cdot\overline{B}$?

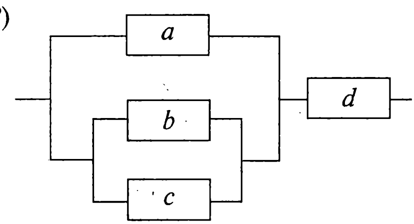
4. Монета подбрасывается два раза подряд. Событие $A=$ {Ровно один раз выпал герб}, а событие $B=$ {Оба раза выпал герб}. Что означают события $A+B$, AB, $A\Delta B$, $A-B$, $B-A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$Среди трех облигаций хотя бы одна выигрышная$\}$ и $B = \{$Из четырех яблок не более одного червивого$\}$.

7. Наудачу последовательно выбраны три карты. Событие $A_i = \{i$-ая карта бубновой масти$\}$, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A = \{$Все карты бубновой масти$\}$, $B = \{$Одна карта не бубновой масти$\}$, $C = \{$Более одной карты бубновой масти$\}$, $D = \{$Хотя бы одна карта бубновой масти$\}$.

8. Доказать тождество $A - B = (AB)\,\Delta A$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 13

1. Студент сдает экзамены по двум предметам, на которых он может получить оценки «2», «3», «4» и «5». Описать пространство элементарных событий.

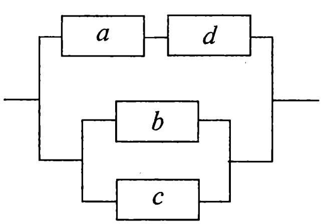
2. В урне четыре различных шара. Вынимаются последовательно без возвращения два шара. Описать пространство элементарных событий.

3. Производятся два выстрела в цель. Событие $A = \{$Попадание в цель оба раза$\}$, а событие $B = \{$Попадание в цель в первый раз$\}$. Что означают события $A + B$, AB, $A\Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

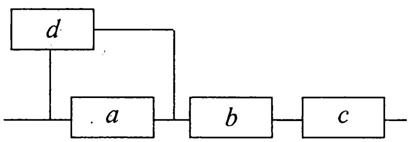
4. Бросаются две игральные кости. Событие $A = \{$Сумма выпавших на верхних гранях очков нечетная$\}$, а событие $B = \{$Хотя бы на одной из костей выпала единица$\}$. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$Из трех фирм ни одной частной$\}$ и $B = \{$Из четырех домов только один пятиэтажный$\}$.

7. Ученик выбирает три книги в библиотеке. Событие $A_i =$ $= \{i$-ая выбранная книга о животных$\}$, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A = \{$Две книги о животных$\}$, $B = \{$Вторая книга о животных$\}$, $C = \{$Ни одной книги о животных$\}$, $D = \{$Все книги не о животных$\}$.

8. Доказать тождество $\overline{A} - \overline{B} = B - A$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 14

1. Наблюдается бесперебойная работа станка в течение часа. Описать пространство элементарных событий, если станок включен на три часа.

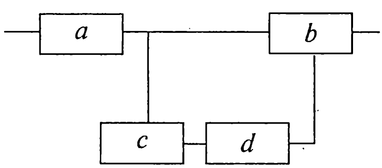
2. Из четырех юношей и двух девушек наудачу выбираются двое для дежурства. Описать пространство элементарных событий.

3. Производятся два выстрела в цель. Событие $A = \{$Попадание в цель оба раза$\}$, а событие $B = \{$Попадание в цель в первый раз$\}$. Что означают события $\overline{A \bullet B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \bullet \overline{B}$?

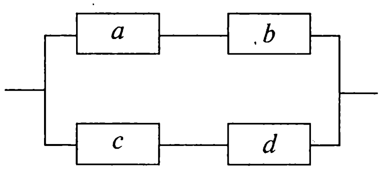
4. Бросаются две шестигранные игральные кости. Событие $A = \{$Сумма выпавших на верхних гранях очков нечетная$\}$, а событие $B = \{$Хотя бы на одной из костей выпала единица$\}$. Что означают события $A + B$, AB, $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$Из трех домов не менее двух пятиэтажных$\}$ и $B = \{$Из четырех чисел хотя бы три делятся на 5$\}$.

7. Из урны последовательно вынимают три шара. Событие $A_i = \{i$-ый шар оказался белым$\}$, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A = \{$Все шары белые$\}$, $B = \{$Ни одного белого шара$\}$, $C = \{$Два не белых шара$\}$, $D = \{$Хотя бы один белый шар$\}$.

8. Доказать тождество $A \Delta B = (A + \overline{B})\ \Delta\ (\overline{A} + B)$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 15

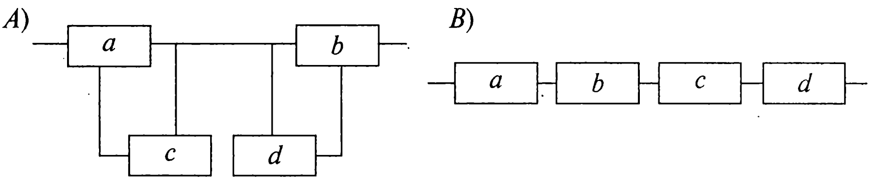
1. Буквы слова ДАЧА записаны на карточках. Из них наудачу извлекаются три карточки. Описать пространство элементарных событий.

2. Ученик наудачу называет две последние цифры даты рождения А. С. Пушкина. Описать пространство элементарных событий.

3. Производятся два выстрела в цель. Событие $A = \{$Попадание в цель оба раза$\}$, а событие $B = \{$Попадание в цель только один раз$\}$. Что означают события $A + B$, AB, $A\Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

4. Бросаются две игральные кости. Событие $A = \{$На верхней грани одной из костей выпала единица$\}$, а событие $B = \{$На верхних гранях выпала ровно одна единица$\}$. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.



6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$Среди трех шаров только один красный$\}$ и $B = \{$Из четырех стрелков в цель попали хотя бы три$\}$.

7. Из колоды наудачу последовательно вынимают три карты. Событие $A_i = \{i$-ая карта оказалась тузом$\}$, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A = \{$Вторая карта — туз$\}$, $B = \{$Два туза$\}$, $C = \{$Хотя бы одна карта не туз$\}$, $D = \{$Ни одного туза$\}$.

8. Доказать тождество $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + A \cdot \overline{B}$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 16

1. В кармане лежат три монеты разных достоинств. Сначала наудачу вынимается одна монета, фиксируется и возвращается в карман, а затем наудачу вынимается вторая монета. Описать пространство элементарных событий.

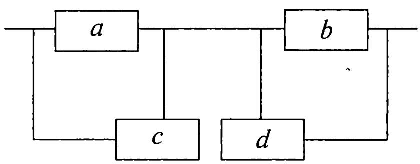
2. На колышек набрасываются кольца до двух попаданий подряд. Описать пространство элементарных событий, если всего пять колец.

3. Производятся два выстрела в цель. Событие $A=${Попадание в цель оба раза}, а событие $B=${Попадание в цель только один раз}. Что означают события $\overline{A\cdot B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A}\cdot\overline{B}$?

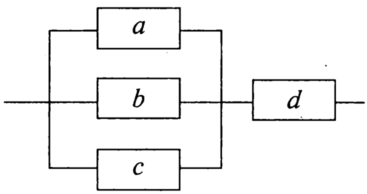
4. Бросаются две игральные кости. Событие $A=${На верхней грани одной из костей выпала единица}, а событие $B=${На верхних гранях выпала ровно одна единица}. Что означают события $A+B$, AB, $A\Delta B$, $A-B$, $B-A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A=${Из трех игрушек только две куклы} и $B=${Среди четырех шаров не менее одного красного}.

7. Наудачу последовательно выбраны три числа. Событие $A_i=${i-ое число оканчивается нулем}, $i=1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A=${Одно число оканчивается нулем}, $B=${Хотя бы два числа оканчиваются нулем}, $C=${Второе число не оканчивается нулем}, $D=${Два числа оканчиваются нулем}.

8. Доказать тождество $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+(A-B)$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 17

1. Ученик отвечает на два вопроса словами «Да», «Нет» или «Не знаю». Описать пространство элементарных событий.

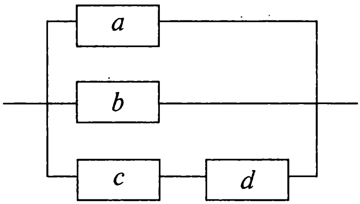
2. Студент сдает экзамены по двум предметам, на которых он может получить оценки «3», «4» и «5». Описать пространство элементарных событий.

3. Монета подбрасывается два раза подряд. Событие $A=${Ровно один раз выпал герб}, а событие $B=${Оба раза выпал герб}. Что означают события $\overline{A\cdot B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A}\cdot\overline{B}$?

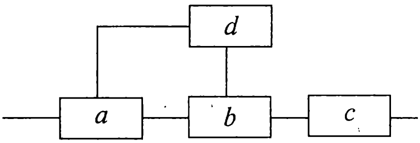
4. Из множества супружеских пар наугад выбирается одна пара. Событие $A = \{$Мужу больше 30 лет$\}$, а событие $B = \{$Супругам больше 30 лет$\}$. Что означают события $A + B$, AB, $A\Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$Среди трех костей домино ровно один дубль$\}$ и $B = \{$В очереди из четырех человек хотя бы две мужчины$\}$.

7. Мишень состоит из трех кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_i, $i = 1, 2, 3$. Событие $A_i = \{$Попадание в круг радиуса $r_i\}$, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A = \{$Попадание только в один круг$\}$, $B = \{$Попадание хотя бы в один круг$\}$, $C = \{$Попадание в малый круг$\}$, $D = \{$Ни одного попадания$\}$.

8. Доказать тождество $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 18

1. Имеется две урны. В первой урне находятся шары с номерами «1» и «2». Во второй урне — шары с номерами «3» и «4». Сначала наугад выбирается урна, а затем из нее — шар. Описать пространство элементарных событий.

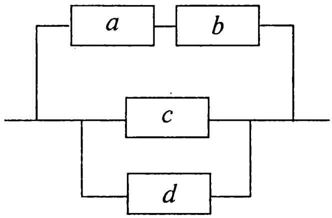
2. Двое поочередно стреляют в мишень до первого попадания второго стрелка. Описать пространство элементарных событий.

3. Из множества супружеских пар наугад выбирается одна пара. Событие $A = \{$Мужу больше 30 лет$\}$, а событие $B = \{$Супругам больше 30 лет$\}$. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

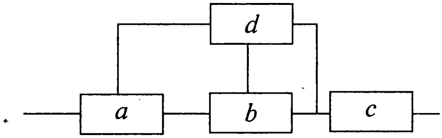
4. Событие $A = \{$Хотя бы один из трех проверяемых приборов доброкачественный$\}$, а событие $B = \{$Все из трех проверяемых приборов доброкачественные$\}$. Что означают события $A + B$, AB, $A\Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A=\{$Из трех компьютеров один бракованный$\}$ и $B=\{$Среди четырех друзей один отличник$\}$.

7. В очереди три человека. Событие $A_i=\{$В очереди i-ым стоит мужчина$\}$, $i=1,\ 2,\ 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A=\{$В очереди только один мужчина$\}$, $B=\{$В очереди по крайней мере один мужчина$\}$, $C=\{$В очереди нет ни одного мужчины$\}$, $D=\{$В очереди только мужчины$\}$.

8. Доказать тождество $\overline{\overline{A}\bullet\overline{B}}=A+B$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 19

1. Дети изучают четыре предмета. Учительница наудачу выбирает два предмета на понедельник. Описать пространство элементарных событий.

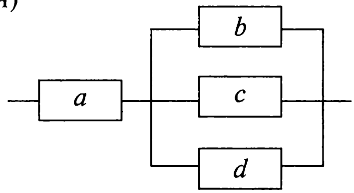
2. На колышек набрасывается кольцо до попадания два раза подряд. Описать пространство элементарных событий.

3. Событие $A=\{$Хотя бы один из трех проверяемых приборов доброкачественный$\}$, а событие $B=\{$Все из трех проверяемых приборов доброкачественные$\}$. Что означают события $\overline{A\bullet B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A}\bullet\overline{B}$?

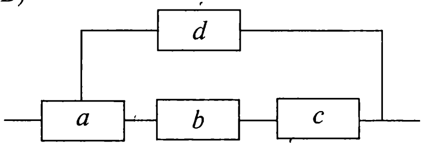
4. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие $A=\{$Выбранное число делится на 5$\}$, а событие $B=\{$Выбранное число оканчивается нулем$\}$. Что означают события $A+B$, AB, $A\Delta B$, $A-B$, $B-A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для A = {Среди трех шахматистов два мастера спорта} и B = {Из четырех студентов хотя бы двое встают рано}.

7. Из урны наудачу последовательно вынимаются три шара. Событие A_i = {i-ый шар оказался черным}, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события A = {Все шары черные}, B = {Только один шар не черный}, C = {Хотя бы один шар черный}, D = {Ни одного черного шара}.

8. Доказать тождество $\overline{\overline{A}+\overline{B}} = A \cdot B$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 20

1. Из урны, содержащей 3 красных и 3 белых шара, наудачу последовательно извлекаются шары до появления красного, а затем белого шара. Описать пространство элементарных событий.

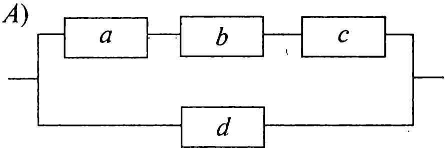
2. Выполненная контрольная работа состоит из пяти задач и двух примеров. Описать пространство элементарных событий, если наблюдается количество выполненных задач и количество выполненных примеров.

3. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A = {Выбранное число делится на 5}, а событие B = {Выбранное число оканчивается нулем}. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A}\cdot\overline{B}$?

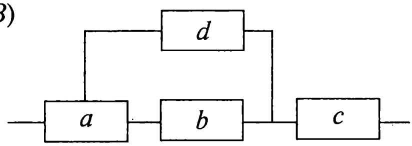
4. Событие A = {Ровно один из трех проверяемых приборов доброкачественный}, а событие B = {Первый из трех проверяемых приборов доброкачественный}. Что означают события $A+B$, AB, $A \Delta B$, $A-B$, $B-A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$Из трех книг только одна интересная$\}$ и $B = \{$Из четырех учеников не менее двух отличников$\}$.

7. Три стрелка сделали по одному выстрелу в цель. Событие $A_i = \{$Попадание в цель i-ым стрелком$\}$, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A =$ $= \{$В цель попали два стрелка$\}$, $B = \{$В цель не попал только один стрелок$\}$, $C = \{$В цель никто не попал$\}$, $D = \{$В цель попали все$\}$.

8. Доказать тождество $\Omega = \overline{A} \cdot \overline{B} + A + B$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 21

1. Четыре тома сочинений А. С. Пушкина раскладываются на полке. Описать пространство элементарных событий.

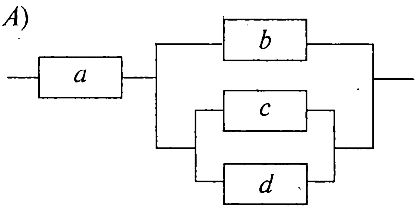
2. Выполненная контрольная работа состоит из трех задач и одного примера. Описать пространство элементарных событий, если наблюдается количество решенных задач и выполнение примера.

3. Событие $A = \{$Ровно один из трех проверяемых приборов доброкачественный$\}$, а событие $B = \{$Первый из трех проверяемых приборов доброкачественный$\}$. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

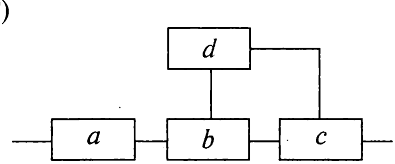
4. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие $A = \{$Выбранное число делится на 9$\}$, а событие $B = \{$Сумма цифр выбранного числа делится на 3$\}$. Что означают события $A + B$, AB, $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$Из трех картин хотя бы один натюрморт$\}$ и $B = \{$В очереди только дети$\}$.

7. В доме три окна. Событие $A_i = \{$В i-ом окне горит свет$\}$, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A = \{$Во всех окнах горит свет$\}$, $B = \{$В одном окне не горит свет$\}$, $C = \{$Хотя бы в одном окне горит свет$\}$, $D = \{$Ни в одном окне свет не горит$\}$.

8. Доказать тождество $A - B = A \cdot \overline{B}$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 22

1. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие $A = \{$Выбранное число делится на 9$\}$, а событие $B = \{$Сумма цифр выбранного числа делится на 3$\}$. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

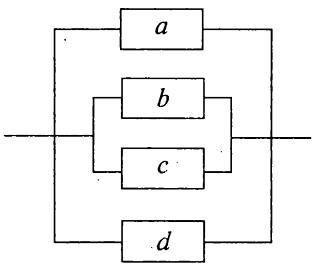
2. Судно имеет две турбины. Событие $A = \{$Только одна турбина судна имеет неисправность$\}$, а событие $B = \{$Обе турбины судна неисправные$\}$. Что означают события $A + B$, AB, $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

3. Шестигранная игральная кость подбрасывается три раза. Описать пространство элементарных событий, если наблюдается четность или нечетность выпавшего на верхней грани числа очков.

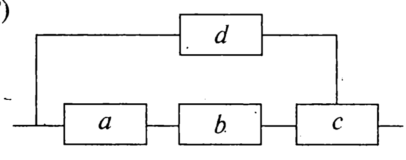
4. Производятся независимые выстрелы до попадания в цель два раза подряд. Описать пространство элементарных событий.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$На скамейке три бабушки$\}$ и $B = \{$Из четырех чисел хотя бы одна оканчивается нулем$\}$.

7. Учитель проверил три контрольные работы. Событие $A_i = \{i$-ая проверенная контрольная работа оценена на отлично$\}$, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A = \{$Все работы оценены на отлично$\}$, $B = \{$Первая работа оценена на отлично$\}$, $C = \{$Одна работа не оценена на отлично$\}$, $D = \{$Хотя бы одна работа оценена на отлично$\}$.

8. Доказать тождество $\Omega = \overline{A} \bullet \overline{B} + A \bullet B + A \Delta B$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 23

1. Шестигранная игральная кость подбрасывается до первого появления тройки на верхней грани. Описать пространство элементарных событий.

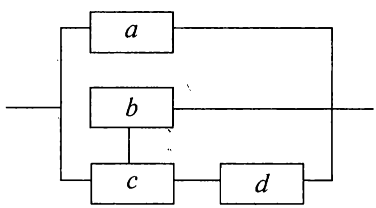
2. Из урны, содержащей шесть пронумерованных красных шаров и один синий шар, наудачу одновременно извлекают два шара. Описать пространство элементарных событий.

3. Судно имеет две турбины. Событие $A = \{$Только одна турбина судна имеет неисправность$\}$, а событие $B = \{$Обе турбины судна неисправные$\}$. Что означают события $\overline{A \bullet B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \bullet \overline{B}$?

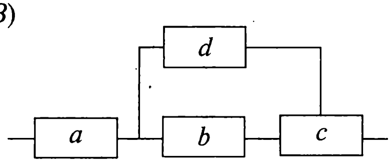
4. Прибор состоит из двух блоков. Событие $A = \{$Хотя бы один из блоков прибора работает$\}$, а событие $B = \{$В приборе работает второй блок$\}$. Что означают события $A + B$, AB, $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для $A = \{$Из трех дней только один солнечный$\}$ и $B = \{$Среди четырех билетов лотереи не менее одной выигрышной$\}$.

7. Наудачу выбраны три числа. Событие $A_i = \{i$-ое число нечетное$\}$, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события $A = \{$Первое число четное$\}$, $B = \{$Одно число четное$\}$, $C = \{$Хотя бы одно число четное$\}$, $D = \{$Не менее одного четного числа$\}$.

8. Доказать тождество $\Omega = \overline{A} + \overline{B} + A \cdot B$, пользуясь таблицей операций.

Вариант 24

1. Подбрасываются три игральные кости. Описать пространство элементарных событий, если наблюдается сумма выпавших на верхних гранях числа очков.

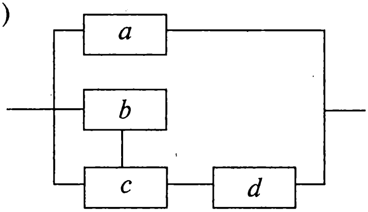
2. Из урны, содержащей 3 красных и 3 белых шара, наудачу и одновременно извлекают два шара до появления шаров разного цвета. Описать пространство элементарных событий.

3. Прибор состоит из двух блоков. Событие A = {Хотя бы один из блоков прибора работает}, а событие B = {В приборе работает второй блок}. Что означают события $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

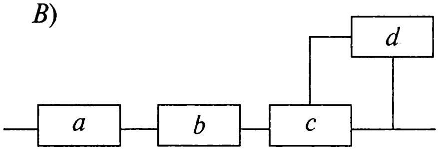
4. Судно имеет две турбины. Событие A = {Первая турбина судна имеет неисправность}, а событие B = {Вторая турбина судна исправна}. Что означают события $A + B$, AB, $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Записать словесно противоположные события для A = {Из трех студентов по крайней мере два отличника} и B = {Из четырех фильмов не менее трех детских}.

7. Три студента сдали экзамен по теории вероятностей. Событие A_i = {i-ый студент не сдал экзамен}, $i = 1, 2, 3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера—Венна события A = {Все студенты сдали экзамен}, B = {Один студент сдал экзамен}, C = {Хотя бы один студент сдал экзамен}, D = {Ни один студент не сдал экзамен}.

8. Доказать тождество $A = A \cdot \overline{B} + A \cdot B$, пользуясь таблицей операций.

§ 1.2. Основные понятия комбинаторики

Методы комбинаторики играют важную роль при вычислении вероятностей различных событий, связанных со стохастическими экспериментами, имеющими конечное число исходов.

Правило суммы. Если выбор A может быть осуществлен n способами, а выбор B осуществлен m способами, причем выборы A и B несовместны, то выбор «либо A, либо B» может быть осуществлен $n+m$ способами.

Правило умножения. Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе — n_2 способами, третье — n_3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Произвольное k-элементное подмножество множества из n элементов называется *сочетанием* из n элементов по k. Порядок элементов в подмножестве не существен. Число сочетаний из n по k равно

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Произвольные упорядоченные k-элементные подмножества множества из n элементов называются *размещениями* из n элементов по k. Различные размещения из n по k отличаются либо самими элементами, либо их порядком. Число размещений из n по k равно

$$A_n^k = k!C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Если $n=k$, то размещения называются *перестановками* множества из n элементов и их число равно $P_n = n!$

Пример. Пусть задано множество $\Omega = \{4,\ 5,\ 6\}$. Рассмотрим составленные из элементов Ω числа.

Количество двузначных чисел, цифры которых не повторяются, равно числу размещений из 3 по 2: 45, 54, 46, 64, 56, 65.

Количество двузначных чисел, цифры которых не повторяются и находятся в возрастающем порядке, равно числу сочетаний из 3 по 2: 45, 46, 56.

Количество трехзначных чисел, составленных из элементов Ω и цифры которых не повторяются, равно числу перестановок данного множества: 456, 465, 546, 564, 645, 654.

Размещениями с повторениями из n элементов по k называют кортежи длины k, составленные из элементов множества X, содержащего n различных элементов. Такие размещения называют также упорядоченными выборками k элементов из данных n с возвращением. Число размещений с повторениями из n элементов по k равно $\widetilde{A}_n^k = n^k$.

Пусть дан кортеж длины n, составленный из элементов множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Назовем составом этого кортежа новый кортеж $(n_1, n_2, ..., n_k)$, образованный из неотрицательных целых чисел, где x_1 входит в этот кортеж n_1 раз, ..., x_k – n_k раз.

Кортежи заданного состава $(n_1, n_2, ..., n_k)$ называют *перестановками с повторениями* из n_1 элементов x_1, n_2 элементов x_2, ..., n_k элементов x_k. Их число выражается формулой

$$P_k\ (n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!},$$

где $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Разобьем множество всех кортежей длины n, составленных из элементов множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ на классы эквивалентности, отнеся к одному классу кортежи одинакового состава. Эти классы эквивалентности называют *сочетаниями с повторениями* из n элементов по k. Их число выражается формулой $\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$.

Пример. Пусть задано множество $\Omega = \{4, 5, 6\}$. Рассмотрим составленные из элементов Ω числа.

Количество двузначных чисел равно числу размещений с повторениями из 3 по 2: 44, 45, 46, 54, 55, 56, 64, 65, 66.

Количество четырехзначных чисел равно числу размещений с повторениями из 3 по 4, т. е. равно $3^4 = 81$.

Количество двузначных чисел, цифры которых находятся в неубывающем порядке, равно числу сочетаний с повторениями из 3 по 2: 44, 45, 46, 55, 56, 66. Количество четырехзначных чисел, цифры которых находятся в неубывающем порядке, равно числу сочетаний с повторениями из 3 по 4: 4444, 4445, 4446, 4455, 4456, 4466, 4555, 4556, 4566, 4666, 5555, 5556, 5566, 5666, 6666. Количество четырехзначных чисел, составленных из элементов Ω, где цифра 4 встречается 1 раз, цифра 5 — 1 раз, цифра 6 — 2 раза, равно числу перестановок с повторениями из одной цифры 4, из одной цифры 5 и двух цифр 6: 4566, 4656, 4665, 5466, 5646, 5664, 6456, 6465, 6546, 6564, 6645, 6654.

Задача 1. Сколькими способами можно рассадить четырех учащихся на 25 местах, если известно, что один определенный учащийся должен сидеть на 10-ом месте?

Решение. Обозначим четырех учащихся буквами A, B, C, $Д$. Пусть определенный учащийся A сядет на 10-ое место, тогда для оставшихся троих учащихся можно выбрать три места из 24 оставшихся мест $C_{24}^3 = \dfrac{24!}{3!(24-3)!} = \dfrac{24!}{3! \cdot 21!} = \dfrac{22 \cdot 23 \cdot 24}{6} = 2024$ способами. Учитывая, что трое учащихся на трех местах могут разместиться 3! различными способами, получим, что троих учащихся на 24 местах можно рассадить $A_{24}^3 = C_{24}^3 \cdot 3! = 12\,144$ различными способами.

Задача 2. Сколькими способами можно рассадить четырех учащихся на 25 местах, если известно, что один учащийся должен сидеть на 10-ом месте?

Решение. Используем решение предыдущей задачи. Так как в данной задаче на 10-ое место может сесть любой их четырех учащихся, то по правилу произведения получим ответ $4 \cdot A_{24}^3 = 48\,576$.

Задача 3. На собрании должны выступить 8 человек. Сколькими способами их можно разместить в списке ораторов так, чтобы между лицами A и B выступило не менее одного оратора?

Решение. Найдем сначала число способов размещения ораторов в списке так, чтобы сразу после оратора A выступал B. Считая ораторов A и B за одно лицо, получим 7! различных способов выступлений (число перестановок из 7 элементов). Тогда число всех возможных размещений ораторов в списке так, чтобы лица A и B выступали рядом, будет равно $2 \cdot 7!$ способам (возможны два варианта выступлений: AB и BA). На собрании 8 ораторов могут выступить 8! различными способами. Тогда разместить ораторов так, чтобы между лицами A и B выступило не менее одного оратора, можно $8! - 2 \cdot 7! = (8 - 2) \cdot 7! = 6 \cdot 7! = 30\,240$ различными способами.

Задача 4. У одного человека восемь книг, а у другого — девять (все книги различны). Сколькими способами они могут обменять друг у друга четыре книги на три книги?

Решение. Пусть у лица A имеется восемь книг, а у лица B — девять книг. Лицо A для обмена может выбрать четыре книги из имеющихся восьми книг C_8^4 различными способами (порядок не существен), а лицо B — C_9^3 способами. Тогда по правилу произведения обмен книгами может состояться $C_8^4 \cdot C_9^3$ различными способами. Но по условию задачи лицо A для обмена может выбрать три книги, а лицо B — четыре книги. Варианты обмена лицом A четырех книг на три книги и трех книг на четыре не совместны. Поэтому по правилу суммы лица A и B могут обменять друг у друга четыре книги на три книги $C_8^4 \cdot C_9^3 + C_8^3 \cdot C_9^4$ различными способами.

Задача 5. Автомобильные номера состоят из двух или трех букв и трех цифр. Найдите число таких номеров, если используется двадцать четыре буквы латинского алфавита и десять цифр.

Решение. По условию задачи автомобильные номера могут быть типа AB123 (пятиразрядные) или AAB122(шестиразрядные), буквы и цифры могут повторяться.

Пятиразрядные номера можно составить $24 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 24^2 \cdot 10^3$ способами, шестиразрядные — $24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 24^3 \cdot 10^3$ способами. Так как пятиразрядные и шестиразрядные номера не совместны, то по правилу суммы всего автомобильных номеров будет $24^2 \cdot 10^3 + 24^3 \cdot 10^3 = 25 \cdot 24^2 \cdot 10^3$.

Задача 6. Сколькими способами можно разделить колоду в 36 карт на шесть равных частей так, чтобы число красных и черных карт во всех пачках было одинаковым?

Решение: В колоде 18 красных и 18 черных карт. Необходимо их разложить на 6 пачек по три красных и три черных карт. Число способов разложения 18 красных карт на шесть пачек по три карты (набор карт существен, порядок карт в наборе не существен), равно $C_{18}^3 \cdot C_{15}^3 \cdot C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \dfrac{18!}{(3!)^6}$. Аналогично можно получить число способов разложения 18 черных карт. Каждому разложению красных карт соответствует $C_{18}^3 \cdot C_{15}^3 \cdot C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \dfrac{18!}{(3!)^6}$ разложений черных карт, поэтому по правилу произведения общее число разложений 36 карт на шесть пачек по три красных и три черных карт равно $\dfrac{18!}{(3!)^6} \cdot \dfrac{18!}{(3!)^6} = \dfrac{(18!)^2}{(3!)^{12}}$.

Задача 7. В партии сорок пронумерованных деталей, из которых двенадцать бракованных. Сколькими способами из них можно выбрать восемь деталей так, чтобы бракованных и стандартных деталей было поровну?

Решение. В партии 12 бракованных и 28 стандартных деталей, из них необходимо выбрать 4 бракованных и 4 стандартных деталей. Четыре бракованные детали из имеющихся двенадцати (порядок не существен) можно выбрать C_{12}^4 различными способами, четыре стандартных деталей — C_{28}^4 способами. Всего различных способов выбора 8 деталей будет равно $C_{12}^4 \cdot C_{28}^4$.

Задача 8. В цветочном магазине продаются цветы четырех сортов. Сколько можно составить различных букетов из трех цветов в каждом, из пяти цветов в каждом? (Букеты, отличающиеся лишь расположением цветов, считаются одинаковыми.)

Решение. Рассматриваемое множество состоит из четырех различных элементов, а составляемые кортежи имеют длину 3. Поскольку порядок расположения цветов в букете не играет роли, то число букетов равно числу сочетаний с повторениями из четырех элементов по три в каждом. Следовательно, можно составить $\widetilde{C}_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = 20$ различных букетов. Аналогично, букеты из пяти цветов можно составить $\widetilde{C}_4^5 = C_{4+5-1}^5 = C_8^5 = 56$ различными способами.

Задача 9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются семь карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий? Сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A = \{$Среди извлеченных карт хотя бы один туз$\}$, $B = \{$Среди извлеченных карт по одной тройке, семерке и тузу$\}$?

Решение. Поскольку порядок извлечения карт не существен, то пространство элементарных событий будет состоять из C_{52}^7 элементов, т. е. $|\Omega| = C_{52}^7$. Найдем количество элементарных событий, содержащихся в событии $\overline{A} = \{$Среди извлеченных карт ни одного туза$\}$. В колоде 4 туза и 48 других карт. Для того, чтобы среди извлеченных карт не было ни одного туза, надо выбрать семь карт из 48 карт и ни одной карты из четырех тузов. Это можно сделать $C_{48}^7 \cdot C_4^0 = C_{48}^7$ различными способами. Следовательно, $|A| = C_{52}^7 - C_{48}^7$. Рассмотрим событие B. Для его осуществления достаточно, чтобы три карты были тройкой, семеркой и тузом (порядок не существен), а остальные четыре карты могут быть любыми, кроме перечисленных. Тройку, семерку и туза можно извлечь $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 4^3 = 64$ различными способами. К каждой выбранной тройке карт можно добавить четыре из 40 оставшихся карт C_{40}^4 различными способами. Тогда извлечение семи карт, среди которых будет по одной тройке, семерке и тузу, можно осуществить $64 \cdot C_{40}^4$ различными способами, т. е. $|B| = 64 \cdot C_{40}^4$.

Задача 10. Стрелок произвел пять выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий? Сколько элементарных событий в $A=${Попаданий больше, чем непопаданий}, $B=${По крайней мере два попадания}?

Решение. Каждый выстрел может завершиться двумя исходами: П — попадание в цель и Н — непопадание. Было произведено пять выстрелов. Исходами эксперимента будут кортежи длины 5 с буквами либо П, либо Н. Например, ППППП, ПНППП и др. Поскольку порядок расположения букв существен, то число элементарных событий будет равно числу размещений с повторениями из двух элементов по пять $|\Omega| = \widetilde{A}_2^5 = 2^5 = 32$.

Перечислим элементарные события, благоприятствующие событию $A=${ППППП, НПППП, ПНППП, ППНПП, ПППНП, ППППН, ПППНН, ППНПН, ПНППН, НПППН, ППННП, ПНПНП, НППНП, ПННПП, НПНПП, ННППП} или $|A| = C_5^5 + C_5^4 + C_5^3 = 1 + 5 + 10 = 16$. Найдем число элементарных событий, благоприятствующих событию $\overline{B}=${Либо ни одного попадания в цель, либо только одно попадание}. $|\overline{B}| = C_5^0 + C_5^1 = 6$, тогда $|B| = 32 - 6 = 26$. Заметим, что событие A влечет событие B, т. е. $A \subset B$.

Задача 11. Игральная кость подбрасывается пять раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий? Сколько элементарных событий в $C=${Двойка выпала ровно три раза}, $B=${Во второй, в третий и в четвертый раз выпала двойка}?

Решение. Каждое подбрасывание кости завершается шестью исходами: 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Было произведено пять подбрасываний. Исходами эксперимента будут кортежи длины 5 с цифрами от 1 до 6, которые могут повторяться. Порядок расположения цифр существен, поэтому $|\Omega| = \widetilde{A}_6^5 = 6^5 = 7776$. Событие C означает, что двойка выпала ровно три раза, остальные два раза двойка не выпадала. При пяти подбрасываниях три двойки могут выпасть $C_5^3 = 10$ способами. Остальные два раза могут выпасть любое из пяти (кроме двойки) очков 25 способами. Таким образом, $|C| = 10 \cdot 25 = 250$. Событие B означает, что во второй, третий и четвертый раз выпала двойка. Это может выпасть единственным способом. А в первый и в пятый раз могло выпасть любое из шести очков (включая и двойку). Это может выпасть 36 способами. Итак, $|B| = 1 \cdot 36 = 36$. Заметим, что событие B влечет событие C, т. е. $B \subset C$.

Задача 12. Из урны, содержащей пять белых и девять черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают девять шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий? Сколько элементарных событий благоприятствуют событию $A=${Извлечен хотя бы один белый шар}, $B=${Извлечен только один белый шар}?

Решение. Эксперимент состоит в извлечении из 14 шаров девяти шаров. Порядок извлечения шаров не существен, поэтому $|\Omega|=C_{14}^9$. Найдем количество элементарных событий, содержащихся в событии $\overline{A}=${Среди извлеченных шаров ни одного белого шара}. Девять черных шаров можно извлечь единственным способом: $|\overline{A}|=C_9^9=1$. Тогда $|A|=C_{14}^9-1$. Событие B означает, что извлечен один белый шар и восемь черных шаров. Порядок извлечения шаров не важен. Следовательно, $|B|=C_5^1\cdot C_9^8=5\cdot 9=45$.

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Восемь студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что они могут получить 2, 3, 4 и 5?

2. Сколько существует различных перестановок букв слова ДИФФЕРЕНЦИАЛ?

3. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов из четырех предметов в 12 дней для одной группы студентов?

4. Сколькими способами можно рассадить четырех учащихся на 25 местах?

5. Имеется шесть белых и два черных пронумерованных шара. Сколькими способами можно выложить в ряд все шары так, чтобы два черных шара не лежали рядом?

6. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором числа зубов. Какая может быть наибольшая численность населения государства, если полное число зубов равно 32?

7. В почтовом отделении продаются открытки пяти видов. Сколькими способами можно купить набор из трех открыток, если открыток каждого вида имеется не менее трех штук?

8. Сколько букв алфавита можно составить из пяти сигналов в каждой букве, если три сигнала — импульсы тока, а два — паузы?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются три карты. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A=${Извле-

чены тройка, семерка, туз}, $B=${Извлечены либо тройки, либо семерки, либо тузы}?

10. Стрелок произвел пять выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=${Первый выстрел попал в цель}, $B=${Только три выстрела попали в цель}?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается четыре раза. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=${Хотя бы один раз выпала шестерка}, $D=${Ровно один раз выпала шестерка}?

12. Из урны, содержащей пять белых и три черных пронумерованных шара, наудачу извлекают шесть шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=${Среди извлеченных только два черных шара}, $D=${Извлечены два черных и четыре белых шара}?

Вариант 2

1. Четыре спортсмена участвуют в соревновании. По условиям игры каждый из них может набрать от 0 до 5 баллов. Сколькими способами могут быть набраны баллы?

2. Сколько семизначных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждая цифра может повторяться?

3. Сколькими способами можно расставить на полке три книги из семи?

4. Студенту необходимо сдать четыре экзамена на протяжении восьми дней. Сколькими способами это можно сделать?

5. Имеется шесть белых и два черных пронумерованных шаров. Сколькими способами можно выложить их в ряд так, чтобы два черных шара не лежали рядом?

6. У мамы три яблока, три груши и три банана. Каждый день в течение девяти дней она выдает сыну по одному плоду. Сколькими способами это может быть сделано?

7. У мамы три яблока, три груши и три банана. Каждый день в течение шести дней она выдает сыну по одному плоду. Сколькими способами это может быть сделано?

8. В цветочном магазине продаются цветы семи сортов. Сколько можно составить различных букетов из девяти цветов в каждом? (Букеты, отличающиеся лишь расположением цветов, считаются одинаковыми.)

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются четыре карты. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколь-

ко элементарных событий в $A=\{$Извлечены только две карты бубновой масти$\}$, $B=\{$Извлечены две карты бубновой масти, а две другие пиковой либо трефовой масти$\}$?

10. Стрелок произвел шесть выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=\{$Попадание в цель при втором выстреле$\}$, $B=\{$Только одно попадание в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается три раза. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Выпала хотя бы одна пятерка$\}$, $D=\{$Выпало ровно две пятерки$\}$?

12. Из урны, содержащей три белых и четыре черных пронумерованных шара, наудачу извлекают пять шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Среди извлеченных два белых шара$\}$, $D=\{$Извлечены два белых шара и три черных шара$\}$?

Вариант 3

1. Три читателя выбирают по одной книге в библиотеке. Сколькими способами это можно сделать из четырех видов книг?

2. Сколько существует способов освещения шести окон?

3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если цифры не должны повторяться?

4. Студенту необходимо сдать четыре экзамена на протяжении восьми дней. Сколькими способами это можно сделать, если известно, что последний экзамен будет на восьмой день?

5. Имеется пять белых и два черных шара. Сколькими способами можно выложить в ряд все шары так, чтобы два черных шара не лежали рядом?

6. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих пяти языков?

7. Для премий на математической олимпиаде выделено три экземпляра одной книги, два экземпляра другой книги и один экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек и каждому из шести призеров вручается только одна книга?

8. Сколько чисел, меньших чем миллион, можно написать с помощью цифр 2, 3, 4?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются шесть карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A = \{$Все извлеченные карты бубновой масти$\}$, $B = \{$Извлечены карты одной масти$\}$?

10. Стрелок произвел пять выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A = \{$Первый выстрел попал в цель$\}$, $B = \{$Только один выстрел попал в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается четыре раза. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Три очка выпало ровно три раза$\}$, $D = \{$Три очка выпало в третий раз$\}$?

12. Из урны, содержащей семь белых и три черных пронумерованных шара, наудачу извлекают три шара. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Извлечен хотя бы один шар белый$\}$, $D = \{$Извлечен только один шар белый$\}$?

Вариант 4

1. Сколько четырехзначных чисел, оканчивающихся числом 34, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая из этих цифр может повторяться?

2. Сколькими способами можно распределить семь различных книг между четырьмя лицами?

3. Сколько различных «слов», каждое из которых состоит из пяти различных букв, можно составить из букв слова ВЫБОРКА?

4. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом и в порядке возрастания?

5. Сколько имеется пятизначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей цифры?

6. Для премий на математической олимпиаде выделено три экземпляра одной книги, два экземпляра другой книги и один экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек и каждому из трех призеров вручается только одна книга?

7. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть три завода, где требуются рабочие-мужчины, две фабрики, где требуются работницы-женщины и две фабрики, где требуются и мужчины и женщины?

8. Сколькими способами можно переставить буквы слова МАТЕМАТИКА так, чтобы три буквы «А» не стояли рядом?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются пять карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A = \{$Среди них только одна карта бубновой масти$\}$, $B = \{$Две карты бубновой масти, а три другие различных мастей$\}$?

10. Стрелок произвел четыре выстрела в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A = \{$Последний выстрел попал в цель$\}$, $B = \{$Только один выстрел попал в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается три раза. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Три раза выпало одинаковое число очков$\}$, $D = \{$Три раза выпала пятерка$\}$?

12. Из урны, содержащей шесть белых и три черных пронумерованных шара, наудачу извлекают шесть шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Извлечен хотя бы один шар белый$\}$, $D = \{$Извлечен только один шар черный$\}$?

Вариант 5

1. Сколько четырехзначных чисел можно образовать из нечетных цифр, если цифры в числе могут повторяться?

2. Сколькими способами можно разложить в два кармана девять монет разного достоинства?

3. На вершину горы ведут семь дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с нее, если нельзя по одной дороге проходить дважды?

4. Сколькими способами могут разместиться пять покупателей в очереди в кассу?

5. Сколько имеется трехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра не меньше предыдущей цифры?

6. В классе 30 учеников. Ежедневно для дежурства выделяются два ученика. Можно ли составить расписание дежурств так, чтобы никакие два ученика не дежурили вместе в течение 200 дней учебного года?

7. Сколько пятибуквенных «слов» можно составить из букв A, B, C, если известно, что буква «A» встречается в слове не более двух раз, буква «B» — не более одного раза, буква «C» — не более трех раз?

8. Найти число наборов из восьми открыток, если в продаже имеются открытки десяти видов.

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются четыре карты. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=${Среди извлеченных только одна карта бубновой масти}, $B=${Среди извлеченных одна карта бубновой масти, а три пиковой масти}?

10. Стрелок произвел три выстрела в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=${Первый выстрел попал в цель}, $B=${Только один выстрел попал в цель}?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается шесть раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=${Шестерка выпала первые два раза}, $D=${Два раза выпала шестерка, четыре раза выпала пятерка}?

12. Из урны, содержащей три белых и семь черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают пять шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=${Среди извлеченных шаров только один белый}, $D=${Среди извлеченных хотя бы один белый шар}?

Вариант 6

1. Сколько четных трехзначных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждая из этих цифр может повторяться?

2. Сколькими способами можно отправить поздравительные открытки пятерым друзьям, если на почте имеются открытки трех видов?

3. Сколько четных трехзначных чисел можно образовать из карточек, на которых написаны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

4. Сколько можно составить номеров автомашин, состоящих из четырехзначных чисел, начиная с 0001, и двух букв из алфавита в 32 буквы?

5. Сколькими способами можно разделить 30 различных предметов на три группы так, чтобы в одной группе было 15 предметов, в другой — 10 предметов, в третьей — 5 предметов?

6. Сколько существует перестановок между десятью лицами, в которых между двумя лицами A и B стоит три человека?

7. У мамы три яблока, три груши и три банана. Каждый день в течение трех дней она выдает сыну по три плода. Сколькими способами это может быть сделано?

8. Сколькими способами можно рассадить 20 учащихся за 12-ю двухместными партами?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются три карты. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A = \{$Извлечены три семерки$\}$, $B = \{$Извлечена хотя бы одна семерка$\}$?

10. Стрелок произвел четыре выстрела в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A = \{$Третий выстрел попал в цель$\}$, $B = \{$Первые три выстрела попали в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается пять раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Последние два раза выпала шестерка$\}$, $D = \{$Два раза выпала шестерка$\}$?

12. Из урны, содержащей семь белых и четыре черных пронумерованных шара, наудачу извлекают шесть шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Среди извлеченных только два черных шара$\}$, $D = \{$Извлечено не менее трех белых шаров$\}$?

Вариант 7

1. Сколькими способами можно разложить в четыре кармана пять монет разного достоинства?

2. Восемь студентов сдают экзамен по теории вероятностей. Сколькими способами им могут быть поставлены оценки, если известно, что они могут получить только «хорошо» или «отлично»?

3. Сколькими способами можно выбрать старосту и профорга в группе из 20 студентов?

4. Сколько существует перестановок между девятью лицами, в которых между двумя лицами A и B стоит определенных три человека?

5. На плоскости проведено n прямых так, никакие два из них не параллельны и никакие три из них не пересекаются в одной точке. На сколько частей делят плоскость эти прямые?

6. Сколько различных «слов» можно получить при перестановке букв слова ЛОГАРИФМ так, чтобы вторая, четвертая и шестая буквы были согласными?

7. Сколькими способами можно распределить 18 различных предметов между тремя лицами так, чтобы каждый получил шесть предметов?

8. Сколько всего сочетаний с повторениями из элементов A, B, C по два элемента?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются шесть карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A=\{$Извлечены два туза, две дамы, два короля$\}$, $B=\{$Извлечены тузы, дамы или короли$\}$?

10. Стрелок произвел три выстрела в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=\{$Не менее двух попаданий$\}$, $B=\{$Стрелок попал в цель только два раза$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается четыре раза. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Шестерка выпала ровно один раз$\}$, $D=\{$Шестерка выпала хотя бы один раз$\}$?

12. Из урны, содержащей семь белых и пять черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают пять шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Все извлеченные шары белого цвета$\}$, $D=\{$Все извлеченные шары одного цвета$\}$?

Вариант 8

1. Сколькими способами можно разложить в шесть карманов четыре монеты разного достоинства?

2. Пятёро малышей выбирают сладости. Сколькими способами можно выбрать сладости, если каждый малыш может выбрать один из шести видов?

3. Сколькими способами можно прочесть три книги из пяти различных книг?

4. Сколькими способами можно рассадить двенадцать человек в ряд так, чтобы между двумя определенными лицами сидел ровно один человек?

5. На плоскости проведено n прямых так, никакие два из них не параллельны и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько треугольников образуют эти прямые?

6. Сколькими способами можно переставлять буквы слова ПЕРПЕНДИКУЛЯР так, чтобы вторая, четвертая и шестая буквы были согласными?

7. В почтовом отделении продаются открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить набор из шести открыток, если в продаже открыток каждого вида имеется не менее шести?

8. Сколькими способами можно выбрать шесть одинаковых или разных пирожных в кондитерской, где имеется одиннадцать различных видов пирожных?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются пять карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A=\{$Извлечены две карты одной масти, а три карты другой масти$\}$, $B=\{$Извлечены две карты бубновой масти, а три трефовой масти$\}$?

10. Стрелок произвел четыре выстрела в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=\{$Первый выстрел попал в цель$\}$, $B=\{$Только один выстрел попал в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается три раза. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Хотя бы один раз выпала тройка$\}$, $D=\{$Выпало разное число очков$\}$?

12. Из урны, содержащей шесть белых и шесть черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают шесть шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Извлечен хотя бы один шар белого цвета$\}$, $D=\{$Извлечено не менее двух белых шаров$\}$?

Вариант 9

1. На железнодорожной станции имеются пять светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, зеленый и желтый?

2. Сколькими способами можно отправить поздравительные открытки пяти друзьям, если на почте продаются открытки четырех видов?

3. Сколькими способами можно прочесть четыре книги из шести различных книг?

4. Сколькими способами можно рассадить 10 человек на скамейке так, чтобы два определенных лица не сидели рядом?

5. На плоскости проведено n прямых так, никакие два из них не параллельны и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения этих прямых?

6. Имеется 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце и одну ложку?

7. Сколькими способами можно переставить буквы слова ПЕРЕШЕЕК так, чтобы четыре буквы «Е» не стояли рядом?

8. Сколько можно сделать костей домино, используя числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются четыре карты. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A = \{$Извлечены две бубновые карты, а остальные различной масти$\}$, $B = \{$Среди извлеченных карт только две бубновые$\}$?

10. Стрелок произвел три выстрела в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A = \{$Только одно попадание в цель$\}$, $B = \{$Хотя бы одно попадание в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается шесть раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Первые три раза выпала шестерка$\}$, $D = \{$Ровно три раза выпала шестерка$\}$?

12. Из урны, содержащей пять белых и шесть черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают пять шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Все извлеченные шары одного цвета$\}$, $D = \{$Все извлеченные шары белые$\}$?

Вариант 10

1. По автомобильной трассе имеются шесть светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет два состояния: красный и зеленый?

2. Сколько шестизначных чисел, заканчивающихся числом 54, можно образовать из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждая цифра может повторяться?

3. Сколькими способами можно просмотреть четыре видеофильма из семи различных видеофильмов?

4. Даны n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

5. На десяти карточках написаны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Сколько двузначных чисел из них можно образовать?

6. Сколько существует различных перестановок слова КОСМОС?

7. Сколько можно сделать костей домино, используя цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

8. Имеется 5 чашек, 6 блюдец и 7 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол на четырех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце и одну ложку?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются семь карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A=\{$Только три извлеченные карты бубновые$\}$, $B=\{$Извлечены три бубновые карты, а остальные пиковые$\}$?

10. Стрелок произвел восемь выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=\{$Четыре попадания в цель$\}$, $B=\{$Последние четыре раза стрелок попал в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается девять раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Не менее трех раз выпала двойка$\}$, $D=\{$Ровно один раз выпала двойка$\}$?

12. Из урны, содержащей пять белых и три черных пронумерованных шара, наудачу извлекают два шара. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Извлечен только один белый шар$\}$, $D=\{$Извлечены шары одного цвета$\}$?

Вариант 11

1. Сколько существует способов освещения трех окон?

2. Сколько «слов» из трех букв можно составить из карточек с буквами А, В, С, Е, И, О?

3. Сколько «слов» из трех букв можно составить из карточек с буквами А, А, А, В, В, С, С, Е, И, О?

4. На собрании должны выступить четыре человека A, B, C, D. Сколькими способами их можно разместить в списке ораторов, если B не может выступать до того момента, пока не выступит A?

5. Сколько диагоналей у выпуклого n-угольника?

6. У одного человека 7 книг, а у другого — 9. Сколькими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги?

7. Сколько чисел, меньших чем миллион, можно составить с помощью цифр 7, 8 и 9?

8. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи разных цветов, чтобы они не били друг друга?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются восемь карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколь-

ко элементарных событий благоприятствуют событиям $A = \{$Извлечено по две карты всех мастей$\}$, $B = \{$Среди извлеченных только две карты бубновой масти или только две карты пиковой масти$\}$?

10. Стрелок произвел семь выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A = \{$Третий выстрел попал в цель$\}$, $B = \{$Третий и четвертый выстрелы попали в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается семь раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Первые два раза выпала шестерка$\}$, $D = \{$Шестерка выпала только два раза$\}$?

12. Из урны, содержащей пять белых и пять черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают семь шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Извлечены два белых шара$\}$, $D = \{$Извлечено только два белых шара или только два черных шара$\}$?

Вариант 12

1. Сколькими способами можно покрасить четыре комнаты, если имеется пять цветов краски и одну комнату красят в один цвет?

2. Сколькими способами можно распределить первый, второй и третий места между 12 командами?

3. На собрании должны выступить 6 человек. Сколькими способами их можно разместить в списке ораторов, лица A и B должны выступить друг за другом?

4. У одного человека восемь книг, а у другого — одиннадцать. Сколькими способами они могут обменять друг у друга три книги на три книги?

5. Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найдите число таких номеров, если используется двадцать четыре буквы латинского алфавита и десять цифр.

6. Сколько существует шестизначных чисел, цифры которых могут повторяться, а последние две цифры 5, 4 или 3?

7. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого восьмиугольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

8. Из полного набора шахмат вынули четыре фигуры или пешки. В скольких случаях среди них окажется два коня?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются девять карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколь-

ко элементарных событий благоприятствуют событиям $A = \{$Извлечены карты одной масти$\}$, $B = \{$Извлечены три дамы, три туза и три короля$\}$?

10. Стрелок произвел девять выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A = \{$Стрелок попал в цель только три раза$\}$, $B = \{$Первые три раза стрелок попал в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается девять раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Хотя бы три раза выпала шестерка$\}$, $D = \{$Шестерка выпала ровно три раза$\}$?

12. Из урны, содержащей семь белых и семь черных пронумерованных шара, наудачу извлекают девять шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Извлечено не менее трех белых шаров$\}$, $D = \{$Извлечено только три белых шара$\}$?

Вариант 13

1. Сколько существует способов вручения золотой и серебряной медали пяти командам?

2. Четверо малышей выбирают сладости. Сколькими способами можно выбрать сладости, если каждый малыш может выбрать один из шести предложенных видов сладости?

3. Сколько существует способов сдачи четырех экзаменов, если преподаватель использует пятибалльную систему оценок знаний?

4. На собрании должны выступить шесть человек. Сколькими способами их можно разместить в списке ораторов так, чтобы лица A и B не выступали друг за другом?

5. Из полного набора шахмат вынули пять фигур или пешек. В скольких случаях среди них окажется два коня или две пешки?

6. Из полного набора шахмат вынули шесть фигур или пешек. В скольких случаях среди них окажется два коня, две пешки и два слона?

7. Сколько чисел, меньших чем миллион, можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5?

8. Среди восьмидесяти учащихся десять отличников. Сколькими способами можно разбить учащихся на два класса по сорок человек, чтобы отличников в каждом классе было поровну?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются двенадцать карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколь-

ко элементарных событий благоприятствуют событиям $A=\{$Извлечены три туза$\}$, $B=\{$Извлечены три туза, три короля, три дамы и три семерки$\}$?

10. Стрелок произвел двенадцать выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=\{$Пять раз попал в цель$\}$, $B=\{$Первые пять раз попал в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается двенадцать раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Шестерка выпала не менее пяти раз$\}$, $D=\{$Шестерка выпала хотя бы один раз$\}$?

12. Из урны, содержащей десять белых и десять черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают двенадцать шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Среди вынутых пять белых шаров или пять черных шаров$\}$, $D=\{$Среди вынутых два белых шара$\}$?

Вариант 14

1. Сколькими способами можно разложить в три кармана шесть монет разного достоинства?

2. Сколькими способами можно рассадить десять гостей за круглым столом?

3. Сколькими способами можно посадить четыре человека из десяти человек на четырех стульях?

4. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

5. Сколькими способами можно выбрать из слова ЛОГАРИФМ две согласные и одну гласную буквы?

6. В турнире принимали участие шесть шахматистов и каждые два шахматиста встретились три раза. Сколько партий было сыграно в турнире?

7. В лотерее сто билетов и из них сорок выигрышных. Сколькими способами можно выбрать три билета, среди которых только один выигрышный билет?

8. Сколькими способами можно расставить на черных полях шахматной доски восемь белых и восемь черных шашек?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются десять карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A=\{$Среди извлеченных только три карты бубновой масти$\}$, $B=\{$Среди извлеченных хотя бы три карты бубновой масти$\}$?

10. Стрелок произвел десять выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=${По крайней мере два выстрела попали в цель}, $B=${Только два выстрела попали в цель}?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается десять раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=${Шестерка выпала нечетное число раз}, $D=${Первые два раза выпала шестерка, в третий раз выпала пятерка}?

12. Из урны, содержащей десять белых и десять черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают десять шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=${Среди извлеченных только два белых шара}, $D=${Среди извлеченных белых шаров меньше, чем черных}?

Вариант 15

1. Сколькими способами можно расставить на книжной полке пять книг по теории вероятностей, три книги по теории игр и две книги по математической логике, если книги по каждому предмету одинаковые?

2. Сколькими способами можно вытащить три карты одну за другой из колоды в 36 карт?

3. Если повернуть лист белой бумаги на 180°, то цифры 0, 1, 8 не изменятся, цифры 6 и 9 переходят друг в друга, а остальные — теряют смысл. Сколько существует различных семизначных чисел, величина которых не изменится при повороте листа бумаги на 180°?

4. В турнире принимали участие шесть шахматистов и каждые два шахматиста встретились два раза. Сколько партий было сыграно в турнире?

5. Сколькими способами можно разделить поровну двенадцать различных предметов между четырьмя студентами?

6. Сколько различных перестановок в слове ПАРАБОЛА?

7. Сколько существует пятизначных чисел, в которых ровно две цифры «5»?

8. Сколькими способами можно разложить письма трем адресатам, если имеется пять различных конвертов?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются одиннадцать карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A=${Среди извлеченных карт четыре семерки}, $B=${Среди извлеченных карт не менее трех семерок}?

10. Стрелок произвел одиннадцать выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=\{$Ровно семь попаданий в цель$\}$, $B=\{$Не менее четырех попаданий в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается одиннадцать раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Всякий раз выпала шестерка$\}$, $D=\{$Шестерка выпала первые четыре раза$\}$?

12. Из урны, содержащей одиннадцать белых и одиннадцать черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают одиннадцать шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Все извлеченные шары одного цвета$\}$, $D=\{$Извлечено белых шаров больше черных более, чем на два шара$\}$?

Вариант 16

1. Сколько существует способов покупки по одной рубашке троим друзьям, если в ассортименте магазина рубашки четырех видов?

2. Сколько шестизначных телефонных номеров можно составить, если все цифры в них разные?

3. Сколько различных перестановок в слове СТАТИСТИКА?

4. Сколько различных «слов» из четырех букв можно составить из букв слова СТАТИСТИКА?

5. Сколько различных наборов из пяти марок можно составить, используя марки семи видов (марок каждого вида не менее пяти штук)?

6. Сколько существует способов выпадения в сумме нечетного числа очков при двух подбрасываниях игральной кости?

7. Сколько существует способов выпадения в сумме нечетного числа очков при подбрасывании двух игральных костей?

8. Сколько различных наборов из семи конфет можно составить, используя конфеты восьми видов?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются девять карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A=\{$Среди извлеченных карт хотя бы один туз$\}$, $B=\{$Среди извлеченных карт хотя бы два туза$\}$?

10. Стрелок произвел девять выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элемен-

тарных событий в $A=$ {Не менее трех попаданий в цель}, $B=$ {Только три попадания в цель}?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается девять раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=$ {Во второй и в третий раз выпала шестерка}, $D=$ {Шестерка выпала ровно два раза}?

12. Из урны, содержащей девять белых и девять черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают девять шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=$ {Извлечены только четыре белых шара}, $D=$ {Извлечены четыре белых шара и пять черных шаров, или четыре черных шара и пять белых шаров}?

Вариант 17

1. Сколько счастливых билетов можно составить, если номер счастливого билета состоит из шести различных цифр?

2. В розыгрыше первенства страны по футболу участвует двенадцать команд. Команды, которые займут первое, второе и третье места, награждаются соответственно золотой, серебряной и бронзовой медалями, а команды, которые займут последние четыре места, покинут высшую лигу. Сколько различных результатов первенства может быть?

3. Сколько существует различных перестановок в слове КОМБИНАТОРИКА?

4. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по четыре человека, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

5. Сколько ожерелий из семи бусинок каждое можно составить из семи бусинок разных размеров?

6. Сколько ожерелий из не менее трех бусинок можно составить из семи бусинок разных размеров?

7. Сколькими способами можно распределить двенадцать различных книг между тремя студентами так, чтобы первый студент получил пять книг, второй — четыре книги, а третий — три книги?

8. Сколько различных подарков можно оформить, если в магазине парфюмерия семи различных видов?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются три карты. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A=$ {Извлечены туз, дама и король}, $B=$ {Извлечены только тузы, только дамы или только короли}?

10. Стрелок произвел три выстрела в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A =$ {Последний выстрел попал в цель}, $B =$ {Стрелок попал в цель хотя бы один раз}?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается три раза. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C =$ {Выпало разное число очков}, $D =$ {Тройка выпала ровно один раз}?

12. Из урны, содержащей три белых и три черных пронумерованных шара, наудачу извлекают четыре шара. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C =$ {Среди извлеченных шаров разных цветов поровну}, $D =$ {Извлечено хотя бы два белых шара}?

Вариант 18

1. Сколькими способами покупатель может выбрать телевизор, холодильник и стиральную машину, если в магазине семь видов телевизоров и по шесть видов холодильников и стиральных машин?

2. Сколькими способами можно развесить картины на четырех гвоздях, выбирая из десяти картин?

3. Сколькими способами можно развесить четыре картины на десяти гвоздях?

4. Сколькими способами ребенок может раскрасить круг, квадрат и треугольник, используя девять карандашей различных цветов, если каждую фигуру он раскрашивает в один цвет?

5. Сколькими способами ребенок может раскрасить круг, квадрат и треугольник, используя девять карандашей различных цветов, если каждую фигуру он раскрашивает в один цвет и цвета фигур не повторяются?

6. Сколько существует шестизначных чисел, в которых две шестерки не стоят рядом?

7. Сколько существует шестизначных чисел, цифры которых не повторяются?

8. Сколько существует шестизначных чисел, каждая цифра которых не меньше предыдущей?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются четыре карты. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A =$ {Извлечены четыре туза или карты одной масти}, $B =$ {Извлечены карты разных мастей}?

10. Стрелок произвел четыре выстрела в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=\{$Стрелок либо ровно один раз попал в цель, либо ровно один раз не попал в цель$\}$, $B=\{$Стрелок попал в цель хотя бы два раза$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается четыре раза. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$В третий раз выпала пятерка$\}$, $D=\{$Только в третий раз выпала пятерка$\}$?

12. Из урны, содержащей четыре белых и четыре черных пронумерованных шара, наудачу извлекают четыре шара. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Извлечен только один белый шар$\}$, $D=\{$Белых шаров извлечено больше, чем черных$\}$?

Вариант 19

1. Из шестидесяти вопросов студент подготовил пятьдесят. Сколько существует способов составления четырех задач, три из которых студент знает?

2. Сколько существует дней в одном столетии, чтобы число, номер месяца и две последние цифры года были записаны одним числом?

3. В шкафу десять пар ботинок разного вида. Сколькими способами можно выбрать четыре ботинка так, чтобы среди них отсутствовали парные?

4. Сколькими способами можно разделить колоду в 36 карт на четыре равные части так, чтобы в каждой пачке было по тузу?

5. Сколько «слов» из трех букв можно получить из букв слова СТУДЕНТ?

6. Сколько сократимых дробей можно составить с помощью чисел 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13?

7. Сколько сократимых дробей можно составить с помощью чисел 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15?

8. Сколькими способами из букв А, А, А, Е, И, М, М, Т, Т, К можно сложить слово МАТЕМАТИКА?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются пять карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A=\{$Среди извлеченных карт ровно два короля или все карты бубновой масти$\}$, $B=\{$Извлечены два короля и три туза$\}$?

10. Стрелок произвел пять выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=$ {Стрелок только два раза попал в цель}, $B=$ {Стрелок ни разу в цель не попал}?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается пять раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=$ {Все пять раз выпало разное число очков}, $D=$ {Первые три раза выпадали либо тройки, либо четверки}?

12. Из урны, содержащей пять белых и пять черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают пять шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=$ {Белых шаров извлечено больше, чем черных}, $D=$ {Извлечен хотя бы один белый шар}?

Вариант 20

1. Сколькими способами можно разделить колоду в 36 карт на две равные части так, чтобы число красных и черных карт в обеих пачках было одинаковым?

2. В партии пятьдесят деталей, из которых десять бракованных. Сколькими способами из них можно выбрать пять деталей так, чтобы две детали были бракованными?

3. Сколькими способами из семи видов открыток, имеющихся в автомате, можно составить набор из четырех различных открыток?

4. Сколькими способами из семи видов открыток, имеющихся в автомате, можно составить набор из четырех открыток?

5. Сколькими способами десять учеников могут выстроиться в одну шеренгу; в две шеренги?

6. Сколькими способами десять учеников могут разбиться по два; на две команды?

7. Сколько различных «слов» из четырех букв можно получить из букв слова ПРОГРАММИСТ?

8. Сколькими способами двое юношей и трое девушек могут выбрать работу на бирже труда, если им предложены пять фирм и каждой фирме требуется не менее пяти работников?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются шесть карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A=$ {Извлечены две карты бубновой масти и четыре карты пиковой масти}, $B=$ {Извлечены три карты бубновой масти и три карты пиковой масти, либо все карты одной масти}?

10. Стрелок произвел шесть выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=${Три первых выстрела попали в цель}, $B=${Только три выстрела попали в цель}?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается шесть раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=${Первые три раза выпали тройки или первые три раза выпали четверки}, $D=${Каждый раз выпадали либо тройки, либо четверки}?

12. Из урны, содержащей шесть белых и шесть черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают шесть шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=${Черных шаров извлечено не больше, чем белых}, $D=${Черных шаров извлечено в два раза больше, чем белых}?

Вариант 21

1. Общество состоит из семи мужчин и тридцати пяти женщин. Сколькими способами их можно сгруппировать в семь групп по шесть человек так, чтобы в каждой группе был мужчина?

2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 равных кубика. Сколько кубиков будут иметь две окрашенные грани?

3. Сколько четырехзначных чисел можно составить так, чтобы они не содержали ни одной двойки?

4. Сколькими способами двенадцать человек могут выстроиться в ряд так, чтобы между двумя определенными лицами A и B были три определенных лица C, D и E?

5. Сколько различных «слов» из трех букв можно получить из букв слова АНАНАС?

6. Сколькими способами на конечную остановку прибудут семь автобусов, если контролер отмечает соответствие или несоответствие прибытия автобуса с графиком движения?

7. Сколькими способами для уменьшения общего количества игр десять команд спортсменов могут разбиться на две равные подгруппы так, чтобы две наиболее сильные команды были в разных подгруппах?

8. Гриша пошел в тир. Уговор был такой: Гриша делает пять выстрелов и за каждое попадание в цель он получает право сделать еще два выстрела. Гриша сделал семнадцать выстрелов. Сколько раз он попал в цель?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются семь карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколь-

ко элементарных событий благоприятствуют событиям $A=${Извлечены четыре карты бубновой масти, а остальные разных мастей}, $B=${Среди извлеченных карт только четыре карты бубновой масти}?

10. Стрелок произвел семь выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=${В первый и последний раз стрелок попал в цель}, $B=${Четное число попаданий}?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается семь раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=${Более трех раз выпала тройка}, $D=${Выпала неубывающая последовательность чисел}?

12. Из урны, содержащей семь белых и семь черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают семь шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=${Среди извлеченных шаров только четыре белых}, $D=${Извлечены шары одного цвета}?

Вариант 22

1. Сколькими способами сорок участников турнира разобьются на четыре равные группы так, чтобы четыре сильнейших участника оказались в разных группах?

2. Сколькими способами можно покрасить шесть комнат, если имеется три цвета краски, и одну комнату красят только в один цвет?

3. Сколькими способами можно надеть три кольца на пять пальцев правой руки?

4. Три подруги пошли в кино. Сколькими способами они могут приобрести билеты на оставшиеся семь мест?

5. Сколькими способами можно рассадить троих из восьми учеников на трех стульях?

6. Сколькими способами можно рассадить трех учеников на восьми стульях?

7. Сколько существует шестизначных чисел, у которых вторая, четвертая и шестая цифры нечетные?

8. Сколько существует шестизначных чисел, цифры которых повторяются; повторяются и находятся в неубывающем порядке; не повторяются; не повторяются и находятся в возрастающем порядке?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются восемь карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколь-

ко элементарных событий благоприятствуют событиям $A = \{$Извлечены четыре карты бубновой масти, а остальные четыре — пиковой$\}$, $B = \{$Среди извлеченных карт только четыре карты бубновой масти$\}$?

10. Стрелок произвел восемь выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A = \{$Только три попадания в цель$\}$, $B = \{$Стрелок попал в цель только в первый раз$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается восемь раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Ровно один раз выпала тройка$\}$, $D = \{$Последние три раза выпала тройка$\}$?

12. Из урны, содержащей восемь белых и восемь черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают восемь шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Извлечен хотя бы один белый шар$\}$, $D = \{$Извлечен только один белый шар$\}$?

Вариант 23

1. Восемь студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что они могут получить 3, 4 и 5?

2. Имеется два белых, два черных и три красных шара. Сколькими способами можно выложить их в ряд так, чтобы между двумя черными шарами лежал один красный шар?

3. Сколько чисел, меньших чем миллион, можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5?

4. Для премий на математической олимпиаде выделено три экземпляра одной книги, три экземпляра другой книги и три экземпляра третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек и каждому из трех призеров вручают по две различные книги?

5. Сколько шестибуквенных «слов» можно составить, используя буквы А, В, С, Д, если известно, что буква «А» встречается в слове не более двух раз, буква «В» — не более одного раза, буква «С» — не более трех раз, буква Д — не более одного раза?

6. Сколькими способами можно разделить 9 различных предметов на три группы так, чтобы в одной группе было три предмета?

7. Сколько существует перестановок между десятью лицами, в которых между двумя лицами A и B стоит три человека?

8. Сколькими способами можно переставлять буквы слова ВЕКТОР так, чтобы вторая, четвертая и шестая буквы были согласными?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются двенадцать карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A = \{$Извлечены карты одной масти$\}$, $B = \{$Извлечены только фигуры$\}$?

10. Стрелок произвел десять выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A = \{$Ни одного попадания в цель$\}$, $B = \{$Только пять попаданий в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается восемь раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Ни разу не выпала тройка$\}$, $D = \{$Тройка выпала ровно три раза$\}$?

12. Из урны, содержащей пять белых и пять черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают шесть шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C = \{$Извлечено шаров разных цветов поровну$\}$, $D = \{$Извлечено белых шаров больше, чем черных$\}$?

Вариант 24

1. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов из четырех предметов в 12 дней для одной группы студентов, если известно, один экзамен должен быть на пятый день?

2. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов из четырех предметов в 12 дней для одной группы студентов, если известно, один определенный экзамен должен быть на пятый день?

3. Найти число наборов из двенадцати открыток, если в продаже имеются открытки семи видов.

4. Найти число наборов из семи открыток, если в продаже имеются открытки двенадцати видов.

5. Четверо юношей и три девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть четыре завода, где требуются рабочие-мужчины, три фабрики, где требуются работницы-женщины и две фабрики, где требуются и мужчины и женщины?

6. Сколькими способами можно переставить буквы слова ПАРАБОЛА так, чтобы три буквы «А» не стояли рядом?

7. Сколько чисел, меньших чем миллион, можно составить с помощью цифр 6, 7, 8 и 9?

8. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи разных цветов так, чтобы ладьи не били друг друга?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются одиннадцать карт. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий благоприятствуют событиям $A=\{$Среди извлеченных карт нет ни одной фигуры$\}$, $B=\{$Среди извлеченных карт четыре туза$\}$?

10. Стрелок произвел девять выстрелов в цель. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $A=\{$Стрелок попал в цель только два раза$\}$, $B=\{$Два последних выстрела попали в цель$\}$?

11. Шестигранная игральная кость подбрасывается семь раз. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Ни разу не выпала пятерка и тройка$\}$, $D=\{$Ровно один раз выпала тройка и ровно один раз выпала пятерка$\}$?

12. Из урны, содержащей пять белых и семь черных пронумерованных шаров, наудачу извлекают пять шаров. Сколько элементов в пространстве элементарных событий и сколько элементарных событий в $C=\{$Извлечены шары одного цвета$\}$, $D=\{$Извлечено только три белых шара$\}$?

§ 1.3. Классическое определение вероятности

Рассмотрим стохастический эксперимент, имеющий n одинаково возможных исходов, т. е. $\Omega=\{\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n\}$ или $|\Omega|=n$. Пусть событию A благоприятствует m из этих исходов, $|A|=m$.

Отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к общему числу элементарных событий, называют *классическим определением вероятности*:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Заметим, что одинаковая возможность исходов эксперимента предполагает, $P(\varpi_i)=\dfrac{1}{n}$, $i=1, \ldots, n$. Тогда классическое определение вероятности события A можно записать в виде $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{n}$.

В большинстве задач одинаковую возможность исходов эксперимента подразумевают словами «наудачу», «правильная», «симметричная», «по жребию» и т. д.

Задача 1. В группе шесть юношей и четырнадцать девушек. По жребию разыгрывается один билет в театр. Какова вероятность события $A = \{\text{Билет получит девушка}\}$?

Решение. В эксперименте двадцать равновероятных исходов. Событие A произойдет, если билет получит любая из четырнадцати девушек. Следовательно, по формуле классической вероятности $P(A) = \dfrac{14}{20} = 0{,}7$.

Задача 2. Правильная игральная кость бросается дважды. Какова вероятность того, что сумма очков равна трем?

Решение. Эксперимент состоит в том, что два раза подбрасывается шестигранная кость. Так как игральная кость правильная, то все исходы эксперимента равновероятны и, кроме того, они несовместны. Число всех возможных исходов эксперимента равно числу размещений с повторениями из шести элементов по два, т. е. $|\Omega| = 6^2 = 36$. Событие A означает, что при этом сумма выпавших очков будет равна трем. Этому событию благоприятствуют два исхода (1; 2) и (2; 1). Следовательно, $P(A) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.

Задача 3. На одинаковых карточках написаны буквы В, Е, К, О, Р, Т. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ВЕКТОР?

Решение. Эксперимент состоит в том, что шесть карточек раскладываются в ряд. Так как карточки одинаковы и тщательно перемешиваются, то все исходы эксперимента равновероятны и, кроме того, они несовместны. Число всех возможных исходов эксперимента равно числу перестановок длины шесть, т. е. $|\Omega| = 6! = 720$. Событие A означает, что при этом получится слово ВЕКТОР. Этому событию благоприятствует лишь один исход, так как буквы в слове не повторяются. Следовательно, по формуле классической вероятности $P(A) = \dfrac{1}{720}$.

Задача 4. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова РАДУГА. Он берет четыре карточки и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово ГРАД?

Решение. Эксперимент состоит в том, что из шести карточек наудачу берутся четыре и раскладываются в ряд. Так как с карточками играет ребенок, то все исходы эксперимента равновероятны и, кроме того, они несовместны. Число всех возможных исходов эксперимента равно числу размещений из шести элементов по четыре (две буквы A будем считать различными), т. е. $|\Omega| = A_6^4 = 360$. Событие A означает, что при этом получится слово ГРАД. Этому событию благоприятствуют 2 исхода, так как буквы в слове не повторяются и имеются две буквы A. Следовательно, по формуле классической вероятности $P(A) = \dfrac{2}{360} = \dfrac{1}{180}$. Заметим, что считая две буквы А не различимыми, мы будем иметь тот же ответ: $|\Omega| = \dfrac{A_6^4}{2} = 180$, $P(A) = \dfrac{1}{180}$.

Задача 5. Какова вероятность того, что при перестановке букв слова ЛОГАРИФМ вторая, четвертая и шестая буквы будут гласными?

Решение. Эксперимент состоит в перестановке восьми различных букв. Число всех возможных исходов эксперимента равно числу перестановок длины восемь, т. е. $|\Omega| = 8! = 40\,320$. Событие A означает, что при этом вторая, четвертая и шестая буквы будут гласными, т. е. $|A| = (3!) \bullet (5!) = 720$. Следовательно, по формуле классической вероятности $P(A) = \dfrac{720}{40\,320} = \dfrac{5}{280}$.

Задача 6. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 наудачу составляется четырехзначное число так, что каждая из этих цифр не может повторяться. Какова вероятность того, что полученное число оканчивается цифрой 5?

Решение. Так как $|\Omega| = 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4 = 840$, $|A| = 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 1 = 120$, то $P(A) = \dfrac{1}{7}$.

Задача 7. На выставке картин представлены 20 работ, из которых 8 портретов, 5 натюрмортов и 7 с лесным пейзажем. Некий покупатель приобрел две картины. Найти вероятность того, что он приобрел два натюрморта.

Решение. Так как $|\Omega| = C_{20}^2 = 190$, $|A| = C_5^2 \bullet C_8^0 \bullet C_7^0 = 10$, то $P(A) = \dfrac{10}{190} = \dfrac{1}{19}$.

Задача 8. Девять книг распределяются между тремя лицами. Какова вероятность того, что каждый получит по три книги?

Решение. В данном эксперименте Ω определено так: $\Omega = \{\omega : \omega = (j_1, \ldots, j_9), j_k = 1, 2, 3;$ j_k — номер лица, к которому попала k-ая книга$\}$. Тогда число элементарных событий будет равно числу кортежей длины девять, составленных из трех различных элементов, т. е. $|\Omega| = 3^9 = 19\,683$. Событие A означает, что каждое лицо получит по три книги. Этому событию благоприятствуют $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{9!}{(3!)^3} = 1680$ элементарных исходов. Тогда $P(A) = \frac{1680}{19\,683} = \frac{560}{6561}$.

Задача 9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются семь карт. Какова вероятность событий $A = \{$Среди извлеченных карт хотя бы один туз$\}$, $B = \{$Среди извлеченных карт по одной тройке, семерке и тузу$\}$?

Решение (См. решение задачи 9 § 1.2). Так как $|\Omega| = C_{52}^7$, $|A| = C_{52}^7 - C_{48}^7$, $|B| = 64 \cdot C_{40}^4$ и все исходы эксперимента равновероятны, то вероятности событий равны

$$P(A) = \frac{C_{52}^7 - C_{48}^7}{C_{52}^7}, \quad P(B) = \frac{64 \cdot C_{40}^4}{C_{52}^7}.$$

Задача 10. Стрелок произвел пять выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Попаданий больше, чем непопаданий$\}$, $B = \{$По крайней мере два попадания$\}$?

Решение (См. решение задачи 10 § 1.2). Так как $|\Omega| = 2^5 = 32$, $|A| = C_5^5 + C_5^4 + C_5^3 = 16$, $|B| = 32 - (C_5^0 + C_5^1) = 26$ и все исходы эксперимента равновероятны, то $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{13}{16}$.

Задача 11. Правильная игральная кость подбрасывается пять раз. Какова вероятность событий $C = \{$Двойка выпала три раза$\}$, $B = \{$Во второй, в третий и в четвертый раз выпала двойка$\}$?

Решение (См. решение задачи 11 § 1.2). Так как $|\Omega| = 6^5 = 7776$, $|C| = 250$, $|B| = 36$ и все исходы эксперимента равновероятны, то $P(C) = \frac{250}{7776}$, $P(B) = \frac{36}{7776} = \frac{1}{216}$.

Задача 12. Из урны, содержащей пять белых и девять черных шаров, наудачу извлекают девять шаров. Какова вероятность событий $A=${Извлечен хотя бы один белый шар}, $B=${Извлечен один белый шар}?

Решение (См. решение задачи 12 § 1.2). Так как $|\Omega|=C_{14}^{9}$, $|A|=C_{14}^{9}-1$, $|B|=C_{5}^{1}\cdot C_{9}^{8}=45$ и все исходы эксперимента равновероятны, то $P(A)=\dfrac{2001}{2002}$, $P(B)=\dfrac{45}{2002}$.

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. На одинаковых карточках написаны буквы Б, Б, Е, Н, У. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово БУБЕН?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова БАБУШКА. Он берет четыре карточки и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово КАША?

3. Какова вероятность того, что наудачу выбранный день из числа дней одного столетия обладает следующим свойством: число, номер месяца и последние две цифры года записаны с помощью одной из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

4. Для уменьшения общего количества игр десять команд спортсменов по жребию разбиваются на две подгруппы. Какова вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в одной подгруппе?

5. На один ряд из восьми мест случайным образом рассаживаются восемь студентов. Какова вероятность того, что два определенных студента окажутся рядом?

6. Имеются двенадцать билетов, из которых четыре выигрышных. Одновременно приобретаются три билета. Какова вероятность того, что приобретены два выигрышных билета?

7. На пяти карточках по одному написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. Наугад последовательно выбираются три карточки и в порядке извлечения раскладываются в ряд слева направо. Какова вероятность того, что полученное число будет четным?

8. Из пяти видов открыток, имеющихся в автомате, наудачу выбираются три открытки. Какова вероятность того, что все отобранные открытки будут разные?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются четыре карты. Какова вероятность событий $A=${Среди извлеченных карт только

две карты бубновой масти}, $B=${Извлечены две карты бубновой масти, а две другие пиковой либо трефовой масти}?

10. Стрелок произвел шесть выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A=${Попадание в цель при втором выстреле}, $B=${Только одно попадание в цель}?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается три раза. Какова вероятность событий $C=${Пятерка выпала хотя бы один раз}, $D=${Пятерка выпала ровно два раза}?

12. Из урны, содержащей три белых и четыре черных шара, наудачу извлекают пять шаров. Какова вероятность событий $C=${Среди извлеченных только два белых шара}, $D=${Извлечены два белых и три черных шара}?

Вариант 2

1. На одинаковых карточках написаны буквы В, Е, Е, Р, Т. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ВЕТЕР?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова ТЕЛЕВИЗОР. Он берет пять карточек и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово ВЕТЕР?

3. Даны числа от 1 до 30 включительно. Какова вероятность того, что наудачу выбранное число является делителем числа 30?

4. Колода в 36 карт произвольным образом делится на четыре равные части. Какова вероятность того, что все четыре туза будут в одной группе?

5. На один ряд из семи мест случайным образом рассаживаются семь студентов. Какова вероятность того, что три определенных студента окажутся рядом?

6. Из 60 вопросов, включенных в экзамен, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что из предложенных ему четырех вопросов он знает три?

7. В зале, насчитывающем двенадцать мест, случайным образом занимают места восемь человек. Какова вероятность того, что будут заняты определенные пять мест?

8. В кондитерской из шести видов пирожных трое малышей выбирают по одному. Какова вероятность того, что малыши выберут одинаковые пирожные?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются три карты. Какова вероятность событий $A=$ {Извлечены тройка, семерка, туз} и $B=$ {Извлечены либо тройки, либо семерки, либо тузы}?

10. Стрелок произвел пять выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A=$ {Первый выстрел попал в цель} и $B=$ {Только три выстрела попали в цель}?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается четыре раза. Какова вероятность событий $C=$ {Хотя бы один раз выпала шестерка}, $D=$ {Ровно один раз выпала шестерка}?

12. Из урны, содержащей пять белых и три черных шара, наудачу извлекают шесть шаров. Какова вероятность событий $C=$ {Среди извлеченных только два черных шара}, $D=$ {Извлечены два черных и четыре белых шара}?

Вариант 3

1. На одинаковых карточках написаны буквы А, Б, В, К, О, Р, Ы. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ВЫБОРКА?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова ТЕЛЕФОН. Он берет три карточки и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово ТОН?

3. На одинаковых карточках в троичной системе счисления записаны целые числа от 1 до 15. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что записанное на ней число содержит не менее двух единиц?

4. Монеты достоинством в 1, 3, 5, 10, 20, 50 копеек раскладываются поровну в два кармана. Найти вероятность того, что монеты в 20 и 50 копеек окажутся в одном кармане.

5. Какова вероятность того, что при перестановке множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ числа 1, 2, 3 будут стоять рядом и в порядке возрастания?

6. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляется четырехзначное число так, что каждая из этих цифр может повторяться. Какова вероятность того, что полученное число оканчивается числом 34?

7. Билет в партер стоит 50 руб., на бельэтаж — 40 руб., на ярус — 30 руб. Какова вероятность того, что взятые наудачу два билета стоят дороже 70 руб.?

8. В цветочном магазине продаются цветы семи сортов. Какова вероятность того, что букет из пяти цветов будет составлен из различных сортов цветов?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются пять карт. Какова вероятность событий $A = \{$Среди извлеченных карт только одна карта бубновой масти$\}$, $B = \{$Извлечены две карты бубновой масти, а три другие различных мастей$\}$?

10. Стрелок произвел четыре выстрела в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Последний выстрел попал в цель$\}$, $B = \{$Первый выстрел попал в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается три раза. Какова вероятность событий $C = \{$Три раза выпало одинаковое число очков$\}$, $D = \{$Пятерка выпала три раза$\}$?

12. Из урны, содержащей шесть белых и три черных шара, наудачу извлекают шесть шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечен хотя бы один белый шар$\}$, $D = \{$Извлечен только один шар черный$\}$?

Вариант 4

1. На одинаковых карточках написаны буквы К, Л, М, О, О, О. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МОЛОКО?

2. Из букв слова СОБЫТИЕ, составленного с помощью разрезной азбуки, извлекаются наудачу и складываются друг за другом в порядке их извлечения три карточки. Какова вероятность того, что получится слово БЫТ?

3. Какова вероятность того, что число на вырванном наудачу листке нового календаря равно 29, если в году 365 дней?

4. Для уменьшения общего количества игр двенадцать команд спортсменов по жребию разбиваются на три подгруппы. Какова вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в одной подгруппе?

5. Пять белых и два черных шара наудачу выложены в ряд. Какова вероятность того, что два черных шара лежат рядом?

6. Из десяти билетов выигрышными являются два. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов два выигрышных?

7. В шкафу находятся десять пар ботинок различных фасонов. Из них случайно выбираются четыре ботинка. Какова вероятность того, что среди выбранных ботинок отсутствуют парные?

8. В библиотеке из шести видов книг по астрономии четверо учеников выбирают по книге. Какова вероятность того, что все ученики выберут один вид книги?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются шесть карт. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены карты бубновой масти$\}$, $B = \{$Извлечены карты одной масти$\}$?

10. Стрелок произвел пять выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Первый выстрел попал в цель$\}$, $B = \{$Только один выстрел попал в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается четыре раза. Какова вероятность событий $C = \{$Три очка выпало только три раза$\}$, $D = \{$В третий раз выпало три очка$\}$?

12. Из урны, содержащей семь белых и три черных шара, наудачу извлекают три шара. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечен хотя бы один белый шар$\}$, $D = \{$Извлечен только один белый шар$\}$?

Вариант 5

1. На пяти одинаковых карточках написаны буквы А, К, З, С, У. Карточки раскладываются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что образуется слово КАЗУС?

2. Из букв слова СТУДЕНТ, составленного с помощью разрезной азбуки, извлекаются наудачу и раскладываются в ряд три карточки. Какова вероятность того, что получится слово СУД?

3. Имеется пять отрезков, длины которых равны соответственно 1, 3, 5, 7 и 9 единицам. Какова вероятность того, что с помощью взятых наудачу трех отрезков из данных пяти можно построить треугольник?

4. Тридцать различных предметов разложены в три ящика. Какова вероятность того, что в одном ящике будет 15 предметов, в другом — 10 предметов, в третьем — 5 предметов?

5. На один ряд из девяти мест случайным образом рассаживаются девять студентов. Какова вероятность того, что два определенных студента не будут сидеть рядом?

6. При записи фамилий членов некоторого собрания, общее число которых равно 360, оказалось, что начальной буквой у семерых была А, у пятерых — Е, у восьми — И, у четырех — У, у двух — Ю, у всех остальных фамилия начиналась с согласной буквы. Какова вероятность того, что фамилии у случайно выбранных двух членов собрания начинаются с согласной буквы?

7. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека, каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на

любом из этажей, начиная со второго. Какова вероятность того, что пассажиры выйдут на разных этажах?

8. Из пяти видов открыток, имеющихся в автомате, наудачу выбираются шесть открыток. Какова вероятность того, что все отобранные открытки будут одинаковыми?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются три карты. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены три семерки$\}$, $B = \{$Извлечена хотя бы одна семерка$\}$?

10. Стрелок произвел четыре выстрела в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Третий выстрел попал в цель$\}$, $B = \{$Первые три выстрела попали в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается пять раз. Какова вероятность событий $C = \{$Последние два раза выпала шестерка$\}$, $D = \{$Шестерка выпала ровно два раза$\}$?

12. Из урны, содержащей семь белых и четыре черных шара, наудачу извлекают шесть шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечено только два черных шара$\}$, $D = \{$Извлечено не менее трех белых шаров$\}$?

Вариант 6

1. Каждая из букв М, О, Р, У, Ф написана на одной из пяти одинаковых карточек. Карточки раскладываются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что образуется слово ФОРУМ?

2. Из шести карточек с буквами Е, Е, И, Р, Т, Т выбираются наугад четыре карточки и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ТИРЕ?

3. Какова вероятность того, что число на вырванном наудачу листке нового календаря високосного года кратно пяти?

4. Девять пассажиров рассаживаются в трех вагонах. Какова вероятность того, что в один вагон сядут пять пассажиров, в другой вагон — три, а в третий вагон — один пассажир?

5. Десять человек случайным образом садятся за круглый стол. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

6. Имеется шесть билетов в театр, из которых четыре билета на места первого ряда. Какова вероятность того, что из четырех наудачу выбранных билетов два билета окажутся на места первого ряда?

7. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека, каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на

любом из этажей, начиная со второго. Какова вероятность того, что пассажиры выйдут одновременно?

8. В кондитерской из шести видов пирожных десять малышей выбирают по одному пирожному. Какова вероятность того, что будут выбраны пять видов пирожных по два каждого вида?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются четыре карты. Какова вероятность событий $A = \{$Среди извлеченных только одна карта бубновой масти$\}$, $B = \{$Среди извлеченных одна карта бубновой масти, а три пиковой масти$\}$?

10. Стрелок произвел три выстрела в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Первый выстрел попал в цель$\}$, $B = \{$Только один выстрел попал в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается шесть раз. Какова вероятность событий $C = \{$Первые два раза выпала шестерка$\}$, $D = \{$Два раза выпала шестерка, четыре раза выпала пятерка$\}$?

12. Из урны, содержащей три белых и семь черных шара, наудачу извлекают пять шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Среди извлеченных только один белый шар$\}$, $D = \{$Среди извлеченных хотя бы один белый шар$\}$?

Вариант 7

1. Каждая из букв А, А, К, Н, С, Т написана на одной из шести одинаковых карточек. Карточки раскладываются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что образуется слово СТАКАН?

2. Из букв слова АЛГОРИТМ, составленного с помощью разрезной азбуки, извлекаются наудачу и складываются в ряд четыре карточки. Какова вероятность того, что получится слово ГОРА?

3. Из 35 экзаменационных билетов, занумерованных с помощью целых чисел от 1 до 35, наудачу извлекается один. Какова вероятность того, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем?

4. В четыре кармана разложили пять монет разного достоинства. Какова вероятность того, что в каждом кармане есть хотя бы одна монета?

5. Десять книг случайно расставляются на полке. Какова вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленными рядом?

6. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлено четырехзначное число так, что каждая из этих цифр может повторяться. Какова вероятность того, что полученное число оканчивается числом 35?

7. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Из них наугад берутся две карточки. Какова вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима?

8. В цветочном магазине продаются цветы семи сортов. Какова вероятность того, что букет из девяти цветов будет составлен из одного сорта цветов?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются пять карт. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены две карты одной масти, а три карты другой масти$\}$, $B = \{$Извлечены две карты бубновой масти, а три трефовой масти$\}$?

10. Стрелок произвел четыре выстрела в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Первый выстрел попал в цель$\}$, $B = \{$Только одно попадание в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается три раза. Какова вероятность событий $C = \{$Хотя бы один раз выпала тройка$\}$, $D = \{$Выпало разное число очков$\}$?

12. Из урны, содержащей шесть белых и шесть черных шара, наудачу извлекают шесть шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечены шары одного цвета$\}$, $D = \{$Извлечено не менее двух белых шаров$\}$?

Вариант 8

1. Каждая из букв Б, О, О, Р, Т написана на одной из пяти одинаковых карточек. Карточки раскладываются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что образуется слово РОБОТ?

2. Из букв слова ФОРМУЛА, составленного с помощью разрезной азбуки, извлекаются наудачу и складываются в ряд пять карточек. Какова вероятность того, что получится слово ФОРУМ?

3. Из полной игры лото наудачу извлекается один бочонок. На бочонках написаны числа от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что на извлеченном бочонке написано простое число?

4. В три кармана разложили шесть монет разного достоинства. Какова вероятность того, что в одном кармане есть ровно две монеты?

5. Какова вероятность того, что при случайной перестановке букв слова ПЕРЕЕЗД три буквы «Е» не будут стоять рядом?

6. На десяти одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15. Из них наугад берутся две карточки. Какова вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима?

7. В классе 30 учеников. Для дежурства выделяются два ученика. Какова вероятность того, что два определенных ученика не дежурят вместе?

8. В библиотеке из шести видов книг по астрономии восемь учеников выбирают по книге. Какова вероятность того, что по два ученика выберут один вид книги?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются шесть карт. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены два туза, две дамы, два короля$\}$, $B = \{$Извлечены тузы, дамы или короли$\}$?

10. Стрелок произвел три выстрела в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Не менее двух попаданий в цель$\}$, $B = \{$Стрелок попал только два раза$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается четыре раза. Какова вероятность событий $C = \{$Шестерка выпала ровно один раз$\}$, $D = \{$Шестерка выпала хотя бы один раз$\}$?

12. Из урны, содержащей семь белых и пять черных шаров, наудачу извлекают пять шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечены шары белого цвета$\}$, $D = \{$Извлечены шары одного цвета$\}$?

Вариант 9

1. Каждая из букв Б, Г, Л, О, С, У написана на одной из шести одинаковых карточек. Карточки раскладываются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что образуется слово ГЛОБУС?

2. Из шести карточек с буквами А, А, А, В, В, Д наудачу выбираются три и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ДВА?

3. В коллекции двести монет, из которых двадцать пять монет XVIII века. Какова вероятность того, что наудачу выбранная монета датирована XVIII веком?

4. Для уменьшения общего количества игр десять команд спортсменов по жребию разбиваются на две подгруппы. Какова вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в разных подгруппах?

5. Какова вероятность того, что при случайной перестановке букв слова ПЕРЕЕЗД три буквы «Е» будут стоять рядом?

6. Восемь студентов сдают экзамен по теории вероятностей. Известно, что они могут получить только «хорошо» или «отлично». Какова вероятность того, что четыре студента получили оценку «хорошо»?

7. В коробке находятся четыре красных и шесть зеленых карандашей. Из нее случайно выпали четыре карандаша. Какова вероятность того, что два из них были красными?

8. Из урны, содержащей девять белых, девять черных, девять синих и девять красных шаров, наудачу извлекаются три шара. Какова вероятность того, что извлеченными окажутся белые или черные шары?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются семь карт. Какова вероятность событий $A=${Среди извлеченных только три карты бубновой масти}, $B=${Извлечены три бубновые карты, а остальные пиковые}?

10. Стрелок произвел восемь выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A=${Четыре попадания в цель}, $B=${Последние четыре выстрела попали в цель}?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается девять раз. Какова вероятность событий $C=${Не менее трех раз выпала двойка}, $D=${Только один раз выпала двойка}?

12. Из урны, содержащей пять белых и три черных шара, наудачу извлекают два шара. Какова вероятность событий $C=${Извлечен только один белый шар}, $D=${Извлечены шары одного цвета}?

Вариант 10

1. Каждая из букв А, А, Б, К, Н написана на одной из пяти одинаковых карточек. Карточки раскладываются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что образуется слово КАБАН?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова БАБОЧКА. Он берет пять карточек и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово БОЧКА?

3. При наборе телефонного номера абонент забыл последнюю цифру и набрал ее наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

4. Для уменьшения общего количества игр двенадцать команд спортсменов по жребию разбиваются на три подгруппы. Какова вероятность того, что три наиболее сильные команды окажутся в разных подгруппах?

5. Какова вероятность того, что при перестановке букв слова ПЕРЕШЕЕК четыре буквы «Е» не будут стоять рядом?

6. Телефонный номер состоит из семи цифр. Какова вероятность того, что все цифры в номере разные?

7. В коробке находятся четыре красных и шесть зеленых карандашей. Из нее случайно выпали три карандаша. Какова вероятность того, что два из них окажутся красными?

8. Из пяти видов открыток, имеющихся в автомате, наудачу выбираются десять открыток. Какова вероятность того, что все отобранные открытки будут одинаковые?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются четыре карты. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены две бубновые карты, а остальные различной масти$\}$, $B = \{$Извлечено только две карты бубновой масти$\}$?

10. Стрелок произвел три выстрела в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Только одно попадание в цель$\}$, $B = \{$Хотя бы одно попадание в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается шесть раз. Какова вероятность событий $C = \{$Первые три раза выпала шестерка$\}$, $D = \{$Шестерка выпала ровно три раза$\}$?

12. Из урны, содержащей пять белых и шесть черных шаров, наудачу извлекают пять шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечено только два белых шара$\}$, $D = \{$Все извлеченные шары белые$\}$?

Вариант 11

1. На одинаковых карточках написаны буквы А, Е, К, Р. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово РЕКА?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова СОЛОМА. Он берет три карточки и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово ЛОМ?

3. На одинаковых карточках в троичной системе счисления записаны целые числа от 1 до 15. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что записанное на ней число содержит хотя бы одну двойку?

4. Колода в 52 карты произвольным образом делится на четыре равные части. Какова вероятность того, что четыре туза будут в разных группах?

5. Какова вероятность того, что при перестановке букв слова ПЕРЕШЕЕК четыре буквы «Е» будут стоять рядом?

6. Какова вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины содержит две пары одинаковых цифр, если номера автомашин четырехзначные, начиная с 0001, неповторяющиеся и равновозможные?

7. Какова вероятность того, что при подбрасывании трех правильных монет хотя бы на одной монете выпадет герб?

8. Из урны, содержащей девять белых, девять черных, девять синих и девять красных шаров, наудачу извлекаются три шара. Какова вероятность того, что извлеченными окажутся только белые или только черные шары?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются девять карт. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены карты одной масти$\}$, $B = \{$Извлечены три дамы, три туза и три короля$\}$?

10. Стрелок произвел девять выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Только три раза стрелок попал в цель$\}$, $B = \{$Первые три раза стрелок попал в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается девять раз. Какова вероятность событий $C = \{$Хотя бы три раза выпала шестерка$\}$, $D = \{$Шестерка выпала ровно три раза$\}$?

12. Из урны, содержащей семь белых и семь черных шаров, наудачу извлекают девять шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечено не менее трех белых шаров$\}$, $D = \{$Среди извлеченных только три белых шара$\}$?

Вариант 12

1. На одинаковых карточках написаны буквы А, Е, П, Р, С, С. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ПРЕССА?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова ДЕДУШКА. Он берет четыре карточки и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово ДУША?

3. На одинаковых карточках в троичной системе счисления записаны целые числа от 1 до 15. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что записанное на ней число содержит один нуль?

4. Для уменьшения общего количества игр двенадцать команд спортсменов по жребию разбиваются на три подгруппы. Какова

вероятность того, что три наиболее сильные команды окажутся в одной подгруппе?

5. На собрании должны выступить четыре человека A, B, C, D. Какова вероятность того, что список ораторов составлен так, что B не может выступить до того момента, пока не выступит A?

6. Найти вероятность того, что дни рождения двенадцати человек придутся на разные месяцы года.

7. Пятеро малышей выбирают по одному пирожному из предложенных шести видов. Какова вероятность того, что все малыши выберут одинаковые пирожные?

8. Для дежурства на вечер путем жеребьевки выделяются пять человек. Вечер проводит комиссия, в составе которой десять юношей и три девушки. Найти вероятность того, что в число дежурных войдут две девушки.

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются восемь карт. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечено по две карты всех мастей$\}$, $B = \{$Среди извлеченных только две карты пиковой масти$\}$?

10. Стрелок произвел семь выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Третий выстрел попал в цель$\}$, $B = \{$Третий и четвертый выстрелы попали в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается семь раз. Какова вероятность событий $C = \{$Первые два раза выпала шестерка$\}$, $D = \{$Шестерка выпала только два раза$\}$?

12. Из урны, содержащей пять белых и пять черных шаров, наудачу извлекают семь шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечено только два белых шара$\}$, $D = \{$Извлечено только два белых шара или только два черных шара$\}$?

Вариант 13

1. На одинаковых карточках написаны буквы А, Г, И, К, Н. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово КНИГА?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова КОМБИНАТОРИКА. Он берет пять карточек и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово БИНОМ?

3. На четырех карточках написаны числа 1, 2, 3, 4. Какова вероятность того, что сумма чисел на трех произвольно выбранных карточках делится на три?

4. Восемь книг распределяются между четырьмя лицами. Какова вероятность того, что каждый получит по две книги?

5. На собрании должны выступить 6 человек. Какова вероятность того, что список ораторов составлен так, что лица A и B должны выступить друг за другом?

6. Найти вероятность того, что при бросании двух правильных игральных костей сумма выпавших очков не превзойдет пяти.

7. В партии из пятидесяти изделий пять бракованных. Из партии наугад выбираются шесть изделий. Какова вероятность того, что два из выбранных изделий окажутся бракованными?

8. Имеется 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Из них наудачу выбирают три предмета. Какова вероятность того, что будет полный выбран набор для чая?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются десять карт. Какова вероятность событий $A = \{$Среди извлеченных только три карты бубновой масти$\}$, $B = \{$Извлечено не менее семи карт бубновой масти$\}$?

10. Стрелок произвел десять выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$По крайней мере два выстрела попали в цель$\}$, $B = \{$Ровно два выстрела попали в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается десять раз. Какова вероятность событий $C = \{$Шестерка выпала нечетное число раз$\}$, $D = \{$Первые два раза выпала шестерка, в третий раз выпала пятерка$\}$?

12. Из урны, содержащей десять белых и десять черных шаров, наудачу извлекают десять шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Среди извлеченных только два белых шара$\}$, $D = \{$Среди извлеченных белых шаров меньше, чем черных$\}$?

Вариант 14

1. На одинаковых карточках написаны буквы И, Л, О, С, Ч. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ЧИСЛО?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова КОМБИНАТОРИКА. Он берет восемь карточек и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово КОМБИНАТ?

3. Какова вероятность того, что кость, наудачу извлеченная из полного набора домино, имеет сумму очков, равную пяти?

4. Общество состоит из семи мужчин и тридцати пяти женщин. Какова вероятность того, что при случайной группировке их на семь групп по шесть человек в каждой группе будет мужчина?

5. На собрании должны выступить шесть человек. Какова вероятность того, что список ораторов составлен так, что лица A и B не должны выступать друг за другом?

6. Используя числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составлены кости домино. Какова вероятность того, что случайно выбранная кость из данного набора окажется дублем?

7. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 наудачу образовано шестизначное число так, что каждая цифра может повторяться. Какова вероятность того, что образованное число оканчивается числом 54?

8. Из урны, содержащей девять белых, девять черных, девять синих и девять красных шаров, наудачу извлекаются три шара. Какова вероятность того, что извлеченными окажутся шары одного цвета?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются двенадцать карт. Какова вероятность событий $A=\{$Извлечено только три туза$\}$, $B=\{$Извлечены три туза, три короля, три дамы и три семерки$\}$?

10. Стрелок произвел двенадцать выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A=\{$Ровно пять попаданий в цель$\}$, $B=\{$Первые пять выстрелов попали в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается двенадцать раз. Какова вероятность событий $C=\{$Шестерка выпала не менее пяти раз$\}$, $D=\{$Шестерка выпала хотя бы один раз$\}$?

12. Из урны, содержащей десять белых и десять черных шаров, наудачу извлекают двенадцать шаров. Какова вероятность событий $C=\{$Среди извлеченных только пять белых шаров или только пять черных шаров$\}$, $D=\{$Среди извлеченных хотя бы два белых шара$\}$?

Вариант 15

1. На одинаковых карточках написаны буквы В, Л, О, О, С. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово СЛОВО?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова КОМБИНАТОРИКА. Он берет пять карточек и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово БИНОМ?

3. В группе шесть юношей и восемнадцать девушек. По жребию разыгрывается один билет в театр. Какова вероятность того, что билет получит девушка?

4. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

5. Какова вероятность того, что при случайной перестановке букв в слове ПАРАБОЛА три буквы «А» окажутся рядом?

6. На десяти карточках написаны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Из них образовано двузначное число. Какова вероятность того, что образованное число делится на три?

7. Используя цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 сделан полный набор костей домино. Какова вероятность того, что сумма очков случайно выбранной из такого набора кости домино равна шести?

8. Найти вероятность того, что запись наудачу составленного шестизначного числа содержит две тройки, две пятерки и две семерки.

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются девять карт. Какова вероятность событий $A = \{$Среди извлеченных карт хотя бы один туз$\}$, $B = \{$Среди извлеченных карт хотя бы два туза$\}$?

10. Стрелок произвел девять выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Не менее трех попаданий в цель$\}$, $B = \{$Три попадания в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается девять раз. Какова вероятность событий $C = \{$Во второй и в третий раз выпала шестерка$\}$, $D = \{$Шестерка выпала только два раза$\}$?

12. Из урны, содержащей девять белых и девять черных шаров, наудачу извлекают девять шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечено только четыре белых шара$\}$, $D = \{$Извлечены четыре белых и пять черных шаров, или четыре черных и пять белых шаров$\}$?

Вариант 16

1. На одинаковых карточках написаны буквы В, Л, О, О, С. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ВОЛОС?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова СТЕНА. Он берет три карточки и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово САН?

3. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера. Какова вероятность того, что извлеченный наудачу кубик будет иметь ровно две окрашенные грани?

4. Колода в 36 карт произвольным образом делится пополам. Какова вероятность того, что все красные карты будут в одной группе?

5. Какова вероятность того, что при случайной перестановке букв слова ЛОГАРИФМ три гласные буквы окажутся рядом?

6. В старинной игре в кости необходимо было для выигрыша получить при бросании трех правильных игральных костей сумму очков, превосходящую десяти. Найти вероятность выигрыша.

7. Отряд учащихся участвует в игре. В отряде пять следопытов и четыре связиста. В разведку надо направить четырех человек. Какова вероятность того, что в разведку будут включены два связиста и два следопыта?

8. Из 36 карт колоды наудачу извлекаются четыре карты. Какова вероятность того, что две карты одной масти, а остальные две различной?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются одиннадцать карт. Какова вероятность событий $A = \{$Среди извлеченных карт только четыре семерки$\}$, $B = \{$Среди извлеченных карт не менее четырех семерок$\}$?

10. Стрелок произвел одиннадцать выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Ровно семь попаданий в цель$\}$, $B = \{$Попадание в цель не менее четырех раз$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается одиннадцать раз. Какова вероятность событий $C = \{$Всякий раз выпала шестерка$\}$, $D = \{$Шестерка выпала первые четыре раза$\}$?

12. Из урны, содержащей одиннадцать белых и одиннадцать черных шаров, наудачу извлекают одиннадцать шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Все извлеченные шары одного цвета$\}$, $D = \{$Среди извлеченных белых шаров больше черных более, чем на два шара$\}$?

Вариант 17

1. На одинаковых карточках написаны буквы К, Л, О, О, С. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово СОКОЛ?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова ЖУРНАЛ. Он берет три карточки и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово УРА?

3. Правильная игральная кость бросается дважды. Какова вероятность того, что сумма очков равна двум?

4. Колода в 36 карт произвольным образом делится пополам. Какова вероятность того, что красных и черных карт в каждой подгруппе будет поровну?

5. Какова вероятность того, что при случайной перестановке букв слова ПАРАБОЛА три буквы «А» не будут рядом?

6. Определить вероятность того, что выбранное наудачу целое число при возведении в куб даст число, оканчивающееся единицей.

7. В одном ящике имеется двенадцать однотипных деталей, среди которых пять нестандартных, в другом ящике пятнадцать деталей, среди которых четыре нестандартных. Найти вероятность того, что из первого ящика извлечены две нестандартные детали, а из второго ящика — две стандартные детали.

8. Из 36 карт колоды наудачу извлекаются четыре карты. Какова вероятность того, что две карты одной масти, а остальные две различной?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются четыре карты. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены четыре туза или карты одной масти$\}$, $B = \{$Все излеченные карты разных мастей$\}$?

10. Стрелок произвел четыре выстрела в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Либо ровно одно попадание в цель, либо только один промах$\}$, $B = \{$Хотя бы два попадания в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается четыре раза. Какова вероятность событий $C = \{$В третий раз выпала пятерка$\}$, $D = \{$Только в третий раз выпала пятерка$\}$?

12. Из урны, содержащей четыре белых и четыре черных шара, наудачу извлекают четыре шара. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечен только один белый шар$\}$, $D = \{$Белых шаров извлечено больше, чем черных$\}$?

Вариант 18

1. На одинаковых карточках написаны буквы К, Л, О, О, С. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово КОЛОС?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова МЕЛЬНИЦА. Он берет четыре карточки и раскладывает

их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово ЛЕНА?

3. Бросаются три правильные игральные кости. Какова вероятность того, что на всех костях выпадет одна и та же цифра?

4. Монеты достоинством в 1, 3, 5, 10, 20, 50 копеек раскладываются поровну в два кармана. Найти вероятность того, что монеты в 20 и 50 копеек окажутся в разных карманах.

5. Какова вероятность того, что при случайной перестановке букв слова ЛОГАРИФМ три гласные буквы не будут рядом?

6. Брошены две правильные игральные кости. Найти вероятность того, что выпадет сумма очков, кратная трем.

7. Студент знает 35 из 50 вопросов программы. Найти вероятность того, что он знает два вопроса из трех предложенных вопросов.

8. Какова вероятность того, что у задуманного наудачу шестизначного числа все цифры разные?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются три карты. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены туз, дама и король$\}$, $B = \{$Извлечены только тузы, либо только дамы, либо только короли$\}$?

10. Стрелок произвел три выстрела в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Последний выстрел попал в цель$\}$, $B = \{$Попадание хотя бы один раз$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается три раза. Какова вероятность событий $C = \{$Выпало разное число очков$\}$, $D = \{$Только один раз выпала тройка$\}$?

12. Из урны, содержащей три белых и три черных шара, наудачу извлекают четыре шара. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечено шаров разных цветов поровну$\}$, $D = \{$Извлечены хотя бы два белых шара$\}$?

Вариант 19

1. На одинаковых карточках написаны буквы А, А, А, Н, Н, С. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово АНАНАС?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова ИГРУШКА. Он берет четыре карточки и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово ШУРА?

3. Найти вероятность того, что при бросании двух правильных игральных костей сумма выпавших очко не превзойдет пяти.

4. Тридцать различных предметов разложены в пять ящиков. Какова вероятность того, что в каждом ящике будет хотя бы один предмет?

5. Какова вероятность того, что при случайной перестановке букв слова ПРОГРАММИСТ три гласные буквы окажутся рядом?

6. Брошены две правильные игральные кости. Найти вероятность того, что выпадет сумма очков, не большая семи.

7. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Экзаменационный билет содержит три вопроса из программы. Найти вероятность того, что все три вопроса наудачу выбранного билета студент знает.

8. Семеро малышей выбирают по одному пирожному из предложенных шести видов. Какова вероятность того, что все малыши выберут один вид пирожного?

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются шесть карт. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены только две карты бубновой масти и только две карты пиковой масти$\}$, $B = \{$Извлечены три карты бубновой масти и три карты пиковой масти, либо все карты одной масти$\}$?

10. Стрелок произвел шесть выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Три первых выстрела попали в цель$\}$, $B = \{$Только три выстрела попали в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается шесть раз. Какова вероятность событий $C = \{$Первые три раза выпали тройки или первые три раза выпали четверки$\}$, $D = \{$Каждый раз выпадали либо тройки, либо четверки$\}$?

12. Из урны, содержащей шесть белых и шесть черных шаров, наудачу извлекают шесть шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Черных шаров извлечено не больше, чем белых$\}$, $D = \{$Черных шаров извлечено в два раза больше, чем белых$\}$?

Вариант 20

1. На одинаковых карточках написаны буквы И, И, Р, С. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ИРИС?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова ПОКРЫШКА. Он берет пять карточек и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово КРЫША?

3. Найти вероятность того, что при двух подбрасываниях правильной игральной кости сумма выпавших очков превзойдет трех.

4. Тридцать различных предметов разложены в пять ящиков. Какова вероятность того, что в одном ящике будет ровно пять предметов?

5. Какова вероятность того, что при случайной перестановке букв слова ПРОГРАММИСТ три гласные буквы не будут рядом?

6. Из последовательности чисел 1, 2, ..., n наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше k, а другое больше k, где $1 < k < n$ — произвольное целое число?

7. Найдите вероятность того, что наудачу составленное трехзначное число состоит только из нечетных цифр.

8. У одного из преподавателей в некоторый день недели два урока в одном классе, у второго — три урока в другом классе. Считая, что в этот день во всех классах по шесть уроков, найти вероятность того, что в случае болезни одного из преподавателей другой сможет провести за него уроки.

9. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются пять карт. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены карты только бубновой масти$\}$, $B = \{$Извлечены два короля и три туза$\}$?

10. Стрелок произвел пять выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Ровно два раза стрелок попал в цель$\}$, $B = \{$Стрелок ни разу в цель не попал$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается пять раз. Какова вероятность событий $C = \{$Все пять раз выпало разное число очков$\}$, $D = \{$Первые три раза выпадали либо тройки, либо четверки$\}$?

12. Из урны, содержащей пять белых и пять черных шаров, наудачу извлекают пять шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Белых шаров извлечено больше, чем черных$\}$, $D = \{$Извлечен хотя бы один белый шар$\}$?

Вариант 21

1. На одинаковых карточках написаны буквы К, С, С, У, У. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово УКСУС?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова БИБЛИОТЕКА. Он берет три карточки и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово ТОК?

3. Брошена правильная игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

4. Девять пассажиров рассаживаются в трех вагонах. Какова вероятность того, что в каждый вагон сел хотя бы один пассажир?

5. Четырехтомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят в должном порядке справа налево или слева направо?

6. Буквенный замок содержит на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на шесть секторов с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открытия замка, если установлена произвольная комбинация букв.

7. В колоде 36 карт. После извлечения и возвращения одной карты колода тщательно перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

8. Какова вероятность того, что запись наудачу составленного семизначного числа содержит только одну тройку?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются восемь карт. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены четыре карты бубновой масти, а остальные четыре — пиковой$\}$, $B = \{$Извлечено только четыре карты бубновой масти$\}$?

10. Стрелок произвел восемь выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Только три попадания в цель$\}$, $B = \{$Стрелок попал только в первый раз$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается восемь раз. Какова вероятность событий $C = \{$Только один раз выпала тройка$\}$, $D = \{$Последние три раза выпала тройка$\}$?

12. Из урны, содержащей восемь белых и восемь черных шаров, наудачу извлекают восемь шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечен хотя бы один белый шар$\}$, $D = \{$Извлечен только один белый шар$\}$?

Вариант 22

1. На одинаковых карточках написаны буквы А, А, В, З. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ВАЗА?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова ВЕРОЯТНОСТЬ. Он берет три карточки и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово РОВ?

3. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная карта из колоды в 36 карт будет тузом.

4. Девять пассажиров рассаживаются в трех вагонах. Какова вероятность того, что в первый вагон сядут четыре пассажира?

5. Какова вероятность того, что при перестановке букв слова ПЕРПЕНДИКУЛЯР вторая, четвертая и шестая буквы будут согласными?

6. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую также взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.

7. В партии из десяти деталей семь окрашенных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей четыре окрашенных.

8. Наудачу составляется семизначное число. Найти вероятность того, что запись числа содержит четыре двойки, две тройки и одну пятерку.

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются семь карт. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены четыре карты бубновой масти, а остальные разных мастей$\}$, $B = \{$Извлечено только четыре карты пиковой масти$\}$?

10. Стрелок произвел семь выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$В первый и в последний раз стрелок попал в цель$\}$, $B = \{$Четное число попаданий$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается семь раз. Какова вероятность событий $C = \{$Более трех раз выпала тройка$\}$, $D = \{$Выпала неубывающая последовательность чисел$\}$?

12. Из урны, содержащей семь белых и семь черных шаров, наудачу извлекают семь шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечено только четыре белых шара$\}$, $D = \{$Извлечены шары одного цвета$\}$?

Вариант 23

1. На одинаковых карточках написаны буквы А, А, Б, Ж, Р, У. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово АБАЖУР?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова НЕБОСКЛОН. Он берет четыре карточки и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово СЛОН?

3. Найти вероятность того, что номер наудачу раскрытой страницы книги в 60 страниц делится на три.

4. Общество состоит из восьми мужчин и двадцати женщин. Какова вероятность того, что при случайной группировке их на четыре группы по семь человек в каждой группе будет по двое мужчин?

5. Какова вероятность того, что при случайной перестановке множества $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ нечетные числа будут стоять на нечетных местах?

6. Случайно выбранная кость из полного набора домино оказалась дублем. Найти вероятность того, что взятая наудачу кость из другого полного набора домино окажется не дублем.

7. На выставке картин представлены 25 работ, из которых 8 портретов, 10 натюрмортов и 7 с лесным пейзажем. Некий покупатель приобрел четыре картины. Найти вероятность того, что он приобрел два портрета и два натюрморта.

8. На три полки наудачу расставляются двенадцать различных сувениров. Какова вероятность того, что на каждой полке будет стоять по четыре сувенира?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются одиннадцать карт. Какова вероятность событий $A = \{$Среди извлеченных нет ни одной фигуры$\}$, $B = \{$Среди извлеченных карт четыре туза$\}$?

10. Стрелок произвел девять выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Ровно два раза стрелок попал в цель$\}$, $B = \{$Два последних раза стрелок попал в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается семь раз. Какова вероятность событий $C = \{$Ни разу не выпала пятерка и тройка$\}$, $D = \{$Только один раз выпала тройка и только один раз выпала пятерка$\}$?

12. Из урны, содержащей пять белых и семь черных шаров, наудачу извлекают пять шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Извлечены шары одного цвета$\}$, $D = \{$Извлечено только три белых шара$\}$?

Вариант 24

1. На одинаковых карточках написаны буквы А, А, А, Н, С, Т. Карточки тщательно перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово АСТАНА?

2. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы слова НЕБОСКЛОН. Он берет четыре карточки и раскладывает их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что получится слово НЕБО?

3. В урне пять красных и два черных шара. Какова вероятность того, что наудачу вынутый из урны шар окажется красным.

4. Общество состоит из шести мужчин и тридцати женщин. Какова вероятность того, что при случайной группировке их на шесть групп по шесть человек все мужчины будут в одной группе?

5. Какова вероятность того, что при перестановке букв слова МАТЕМАТИКА три буквы «А» не будут стоять рядом?

6. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 наудачу составляется пятизначное число так, что каждая из этих цифр может повторяться. Какова вероятность того, что полученное число оканчивается числом 555?

7. На выставке картин представлены 20 работ, из которых 8 портретов, 5 натюрмортов и 7 с лесным пейзажем. Некий покупатель приобрел три картины. Найти вероятность того, что он приобрел два портрета и один натюрморт.

8. На три полки наудачу расставляются двенадцать различных сувениров. Какова вероятность того, что одна полка останется свободной?

9. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются двенадцать карт. Какова вероятность событий $A = \{$Извлечены карты одной масти$\}$, $B = \{$Извлечены только фигуры$\}$?

10. Стрелок произвел десять выстрелов в цель. Все элементарные исходы считать одинаково возможными. Какова вероятность событий $A = \{$Ни одного попадания в цель$\}$, $B = \{$Ровно пять попаданий в цель$\}$?

11. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается восемь раз. Какова вероятность событий $C = \{$Ни разу не выпала тройка$\}$, $D = \{$Тройка выпала ровно три раза$\}$?

12. Из урны, содержащей пять белых и пять черных шаров, наудачу извлекают шесть шаров. Какова вероятность событий $C = \{$Шаров разных цветов извлечено поровну$\}$, $D = \{$Белых шаров извлечено больше, чем черных$\}$?

§ 1.4. Геометрическое определение вероятности

Пусть Ω — ограниченное множество n-мерного евклидова пространства R^n, имеющее n-мерный объем (лебегову меру) $\operatorname{mes}\Omega$; $\mathfrak{I}$ — класс подмножеств $A \subseteq \Omega$, имеющих n-мерный объем (лебегову меру) $\operatorname{mes} A$, $A \in \mathfrak{I}$; тогда для каждого множества из $\mathfrak{I}$ поставим в соответствие число

$$P(A) = \frac{\operatorname{mes} A}{\operatorname{mes}\Omega}.$$

Это определение называют *геометрическим определением вероятности*. В большинстве задач вероятность определяется как отношение обычных длин, площадей и объемов некоторых геометрических фигур. В таком случае говорят, что «точка наудачу выбрана в некотором множестве» или «брошена в некоторое множество» и подразумевают, что вероятность выбора точки из множества пропорциональна его длине, площади или объему.

Задача о встрече. Два лица A и B условились встретиться в определенном месте в интервале времени $[0, T]$. Пришедший первым ждет другого в течение τ единиц времени, после чего уходит. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного времени, найти вероятность того, что встреча состоится.

Решение. Пусть x — время прихода A, y — время прихода B. Тогда пространством элементарных исходов эксперимента является множество

$$\Omega = \{(x;\ y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant T\} = [0;\ T] \times [0;\ T],$$

представляющее собой квадрат со стороной T. Будем считать, что каждая точка $(x;\ y) \in \Omega$ одинаково возможна. Именно такой смысл вкладывается в содержание фразы «момент прихода на встречу выбирается каждым наудачу в пределах указанного времени». Встреча лиц A и B состоится, если $|x - y| \leqslant \tau$. Интересующее нас событие $C = \{(x;\ y)\colon\ |x - y| \leqslant \tau\}$ заштриховано на рисунке 1. Его вероятность в силу сделанных предположений равна отношению площади заштрихованной области к площади квадрата

$$P(C) = \frac{T^2 - (T-\tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2.$$

В частности, если $T = 1$ ч., $\tau = 20$ мин., то $P(C) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$.

Задача Бюффона. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$, наудачу бросается игла длины $2l$ ($l < a$). Какова вероятность того, что игла пересечет одну из проведенных прямых?

Решение. Пусть x — расстояние от центра иглы до ближайшей прямой, а φ — угол, составленный иглой с этой прямой (рис. 2). Величины x и φ полностью определяют положение иглы. Следовательно, пространство элементарных событий — это прямоугольник $\Omega = \{(x;\ \varphi)\colon 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$. Будем считать, что каждая точка $(x;\ \varphi) \in \Omega$ одинаково возможна. Именно такой смысл вкладывается в содержание фразы «наудачу бросается игла». Игла пересекает прямую тогда и только тогда, когда выполнено условие $x \leqslant l \sin \varphi$. Пусть $C = \{(x;\ \varphi)\colon x \leqslant l \sin \varphi,\ (x;\ \varphi) \in \Omega\}$ (на рисунке 3 множество C заштриховано). Искомая вероятность в силу сделанных предположений равна отношению площади заштрихованной области к площади прямоугольника, т. е. $P(C) = \dfrac{1}{a\pi} \int\limits_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = \dfrac{2l}{a\pi}$.

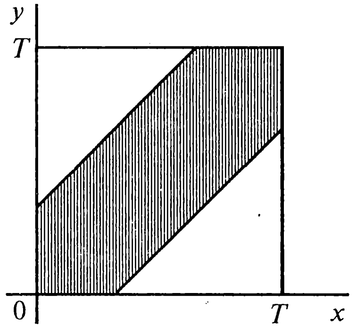


Рис. 1

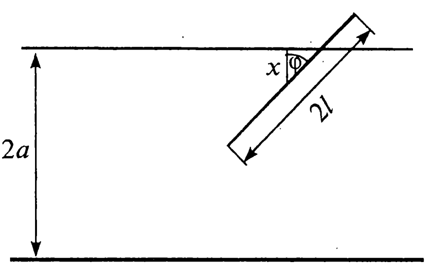


Рис. 2

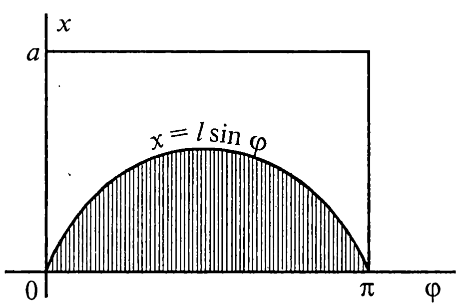


Рис. 3

Парадокс Бертрана. Наудачу берется хорда в круге радиуса R. Чему равна вероятность того, что ее длина превосходит длину стороны вписанного равностороннего треугольника.

В условии задачи не определено понятие проведения хорды наудачу. В зависимости от смысла, вкладываемого в предположение о случайности проведения хорды в круге, задача имеет различные решения. Рассмотрим ее как три самостоятельные задачи.

Первая задача. На окружности радиуса R выбирается наудачу точка, и через нее проводится диаметр. На диаметре наудачу выбирается точка — середина хорды, перпендикулярной диаметру. Найти вероятность того, что длина полученной хорды превзойдет длину стороны вписанного равностороннего треугольника.

Решение. По соображениям симметрии можно заранее задать направление хорды. Проведем диаметр, перпендикулярный к этому направлению. Хорды, пересекающие диаметр в промежутке от четверти до трех четвертей его длины, будут превосходить стороны вписанного правильного треугольника. Таким образом, искомая вероятность равна

$$P = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}.$$

Вторая задача. На окружности радиуса R наудачу выбираются две точки и соединяются хордой. Найти вероятность того, что длина полученной хорды превысит длину стороны вписанного равностороннего треугольника.

Решение. По соображениям симметрии можно заранее закрепить один из концов хорды на окружности. Касательная к окружности в этой точке и две стороны правильного треугольника с вершиной в этой точке образуют три угла по 60°. Условию задачи благоприятствуют только хорды, попадающие в средний угол. Таким образом, искомая вероятность равна

$$P = \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{3}.$$

Третья задача. Внутри круга радиуса R наудачу выбирается точка. Эта точка служит серединой хорды, перпендикулярной проведенному через нее диаметру. Найти вероятность того, что полученная хорда превзойдет по длине сторону вписанного равностороннего треугольника.

Решение. Чтобы определить положение хорды, достаточно задать ее середину. Чтобы хорда удовлетворяла условию задачи, необходимо, чтобы ее середина находилась внутри круга, концентрического данному, но половинного радиуса. Таким образом, искомая вероятность равна

$$P = \frac{\pi(R/2)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}.$$

Задача. Коэффициенты p и q квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ выбираются наудачу в промежутке (0; 1). Найти вероятность того, что корни будут действительными числами.

Решение. Множество всех возможных пар чисел (p; q) задается точками квадрата с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1). Чтобы корни квадратного уравнения были действительными числами, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $p^2 \geqslant 4q$. Точки, благоприятствующие искомому событию, лежат под параболой $q = \dfrac{p^2}{4}$. Таким образом, искомая вероятность равна

$$P = \frac{\int\limits_0^1 \frac{p^2}{4}dp}{1} = \frac{1}{12}.$$

Индивидуальные задания

Вариант *n*

$$\alpha = 10 + \left[\frac{n}{5}\right],\ \beta = 11 + \left[\frac{n}{2}\right],\ \gamma = 4 + n,\ \delta = n,\ r = \frac{3 + \left[\frac{n}{5}\right]}{2},\ R = n.$$

1. Двое условились встретиться между α и β часами, причем договорились ждать друг друга не более γ минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного времени, найти вероятность того, что встреча состоится.

2. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 2α, наудачу бросается игла длиною $2r$ ($2r < 2\alpha$). Какова вероятность того, что игла пересечет одну из проведенных прямых?

3. На окружности радиуса R наудачу выбираются две точки и соединяются хордой. Найти вероятность того, что длина хорды превысит сторону вписанного квадрата.

4. На окружности радиуса R выбирается наудачу точка, и через нее проводится диаметр. На диаметре наудачу выбирается

точка — середина хорды, перпендикулярной диаметру. Найти вероятность того, что полученная хорда превзойдет сторону вписанного квадрата.

5. Внутри круга радиуса R наудачу выбирается точка. Эта точка служит серединой хорды, перпендикулярной проведенному через нее диаметру. Найти вероятность того, что полученная хорда превзойдет по длине сторону вписанного квадрата.

6. На плоскость нанесены параллельные прямые на одинаковом расстоянии α друг от друга. На плоскость наудачу бросается монета радиуса r ($r < \frac{\alpha}{2}$). Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одну из прямых.

7. Две точки выбираются наудачу из отрезка $[-\delta;\ \delta]$. Пусть p и q — координаты этих точек. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ будет иметь вещественные корни.

8. Две точки выбираются наудачу из отрезка $[-\delta;\ \delta]$. Пусть p и q — координаты этих точек. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ будет иметь вещественные положительные корни.

9. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых меньше β и $x < y$. Найти вероятность того, что разность этих чисел больше 5 и меньше 8.

10. Наудачу взяты два числа x и y из отрезка $[-\delta;\ \delta]$. Найти вероятность того, что они удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < r^2$.

§ 1.5. Аксиомы теории вероятностей. Свойства вероятности. Условные вероятности. Независимость событий

Пусть Ω — пространство элементарных событий.

Класс $\mathfrak{I}$ подмножеств Ω называется *σ-алгеброй*, если удовлетворяет следующим аксиомам:

a_1) $\Omega \in \mathfrak{I}$;

a_2) если $A \in \mathfrak{I}$, то $\overline{A} \in \mathfrak{I}$;

a_3) если $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{I}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$.

Множества из $\mathfrak{I}$ называются случайными событиями.

Вещественная функция P, определенная на $\mathfrak{I}$, называется *вероятностной*, если удовлетворяет следующим аксиомам:

b_1) $P(A) \geqslant 0$ для любого $A \in \mathfrak{S}$;

b_2) $P(\Omega) = 1$;

b_3) если $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{S}$ и $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Число $P(A)$, поставленное в соответствие вероятностной функцией множеству A из $\mathfrak{S}$, называется *вероятностью случайного события A*.

Утверждения a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 составляют систему аксиом теории вероятностей, сформулированную А. Н. Колмогоровым.

Из системы аксиом теории вероятностей вытекают следующие свойства вероятности:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. Если $A \subset B$, то $P(B - A) = P(B) - P(A)$;
4. Если $A \subset B$, то $P(A) \leqslant P(B)$.

Теорема сложения. Пусть A и B — случайные события. Тогда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема сложения для трех событий. Пусть A, B и C — случайные события. Тогда

$$P(A + B + C) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Свойство непрерывности вероятности. Если $\{A_n\}$ — монотонно неубывающая последовательность случайных событий, т. е. $A_1 \subset A_2 \subset \ldots. \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots.$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Если $\{A_n\}$ — монотонно невозрастающая последовательность случайных событий, т. е. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots. \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots.$, то

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Пусть A и B — случайные события и $P(B) > 0$. Условной вероятностью события A при условии, что событие B произошло, называют

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Теорема умножения. Если $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, то имеют место равенства

$$P(AB) = P(B)\,P(A|B) = P(A)\,P(B|A).$$

События A и B называются независимыми, если

$$P(AB) = P(A)\,P(B);$$

в этом случае

$$P(A|B) = P(A) \text{ и } P(B|A) = P(B).$$

События $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого $k \leqslant n$ и для любых $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Если события $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ независимы в совокупности, то любые два события A_i и A_j $(i \neq j)$ независимы. Из попарной независимости независимость в совокупности не следует.

Пример С. Н. Бернштейна. На плоскость бросают тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, зеленый, голубой цвета, а на четвертую грань нанесены все три цвета. Пусть событие К состоит в том, что при бросании тетраэдра на плоскость выпала грань красного цвета, и пусть аналогично определены события З и Г. Поскольку каждый из этих трех цветов нанесен на две грани, то

$$P(\text{К}) = P(\text{З}) = P(\text{Г}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Далее,

$$P(\text{КЗ}) = P(\text{ЗГ}) = P(\text{ГК}) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, события К, З и Г независимы попарно. Но эти события не являются независимыми в совокупности, так как

$$P(\text{КЗГ}) = \frac{1}{4} \neq P(\text{К})\,P(\text{З})\,P(\text{Г}) = \frac{1}{8}.$$

Задача 1. Завод выпускает доброкачественные приборы с вероятностью 0,95. Найти вероятности событий $A = \{$Хотя бы один из трех наудачу выбранных приборов доброкачественный$\}$, $B = \{$Все из трех наудачу выбранных приборов доброкачественные$\}$.

Решение. Пусть событие D_i означает, что выбранный наудачу i-ый прибор доброкачественный. По условию задачи $P(D_i) = 0{,}95$, тогда по свойству вероятности $P(\overline{D_i}) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. Найдем вероятность события $\overline{A} = \overline{D_1}\,\overline{D_2}\,\overline{D_3} =$ {Все из трех наудачу выбранных приборов недоброкачественные}. Поскольку события D_i, $i = 1, 2, 3$, независимы, то

$$P(\overline{A}) = P(\overline{D_1}\,\overline{D_2}\,\overline{D_3}) = P(\overline{D_1})\,P(\overline{D_2})\,P(\overline{D_3}) = (0{,}05)^3.$$

Тогда

$$P(A) = 1 - (0{,}05)^3 = 0{,}999875.$$

Далее,

$$P(B) = P(D_1 D_2 D_3) = (0{,}95)^3 = 0{,}857375.$$

Задача 2. Из таблицы случайных чисел наудачу взяты пять чисел. Найти вероятности событий $A =$ {Хотя бы одно из выбранных чисел делится на 5}, $B =$ {Второе и третье выбранные числа оканчиваются нулем}.

Решение. Пусть событие D_i означает, что выбранное наудачу i-ое число делится на 5. Все числа оканчиваются одним из десяти цифр. Тогда $P(D_i) = 0{,}2$. По свойству вероятности $P(\overline{D_i}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Найдем вероятность события $\overline{A} = \overline{D_1}\,\overline{D_2}\,\overline{D_3}\,\overline{D_4}\,\overline{D_5} =$ {Все из пяти наудачу взятых чисел не делятся на 5}. Поскольку события D_i, $i = 1, 2, 3$, независимы, то $P(\overline{A}) = (0{,}8)^5 = 0{,}33$. Тогда $P(A) = 1 - 0{,}33 = 0{,}67$. Далее, пусть событие C_i означает, что выбранное наудачу i-ое число оканчивается нулем, тогда $P(C_i) = 0{,}1$. Поскольку в событии B первое, четвертое и пятое числа могут быть любыми, то $P(B) = P(C_2 C_3) = (0{,}1)^2 = 0{,}01$.

Задача 3. Стрелок ведет огонь по цели, движущейся на него. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,4 и увеличивается на 0,1 при каждом последующем выстреле. Какова вероятность получить два попадания при трех независимых выстрелах?

Решение. Пусть событие П_i означает, что стрелок попал в цель при i-ом выстреле, соответственно Н_i — непопадание. По условию задачи $P(\text{П}_i) = 0{,}4 + (i - 1)\cdot 0{,}1 = 0{,}3 + 0{,}1i$, тогда вероятность непопадания в цель при i-ом выстреле равна $P(\text{Н}_i) = 0{,}7 - 0{,}1i$. Пусть событие $A =$ {Два попадания в цель при трех независимых выстрелах}, тогда

$$P(A) = P(\text{Н}_1\text{П}_2\text{П}_3 + \text{П}_1\text{Н}_2\text{П}_3 + \text{П}_1\text{П}_2\text{Н}_3).$$

Поскольку суммируемые события несовместны, то

$$P(A) = P(\text{Н}_1\text{П}_2\text{П}_3) + P(\text{П}_1\text{Н}_2\text{П}_3) + P(\text{П}_1\text{П}_2\text{Н}_3).$$

В силу независимости выстрелов

$$P(A) = P(\text{Н}_1)\,P(\text{П}_2)\,P(\text{П}_3) + P(\text{П}_1)\,P(\text{Н}_2)\,P(\text{П}_3) + P(\text{П}_1)\,P(\text{П}_2)\,P(\text{Н}_3) =$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}38.$$

Задача 4. На колышек набрасывается кольцо до первого попадания. Вероятность попадания кольца на колышек при одном броске равна 0,56. Найти вероятность того, что придется сделать от пяти до семи бросков.

Решение. В качестве пространства элементарных событий в данном эксперименте можно рассматривать множество

$$\Omega = \{\text{П, НП, ННП, НННП}, \ldots, \underbrace{\text{НН}\ldots\text{Н}}_{n-1}\text{П}, \ldots\},$$

где П означает попадание кольца на колышек, а Н — непопадание. Согласно предположению независимости испытаний

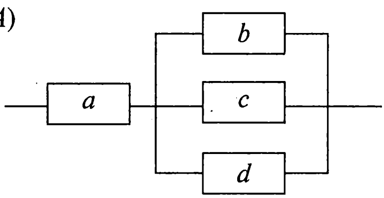
$$P(\underbrace{\text{НН}\ldots\text{Н}}_{n-1}\text{П}) = (P(\text{Н}))^{n-1}P(\text{П}).$$

Пусть событие A означает, что сделано от пяти до семи бросков, т. е. кольцо попало на колышек либо при пятом броске, либо при шестом, либо при седьмом. Тогда

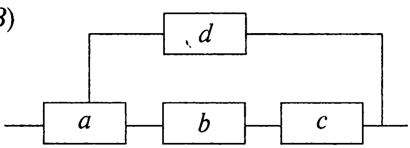
$$P(A) = P(\text{ННННП} + \text{НННННП} + \text{ННННННП}) =$$
$$= (0{,}44)^4 \cdot 0{,}56 + (0{,}44)^5 \cdot 0{,}56 + (0{,}44)^6 \cdot 0{,}56 \approx 0{,}0343.$$

Задача 5. Дана электрическая цепь с элементами a, b, c, d. Элементы цепи работают независимо друг от друга. Вероятности событий $A = \{$Вышел из строя элемент $a\}$, $B = \{$Вышел из строя элемент $b\}$, $C = \{$Вышел из строя элемент $c\}$, $D = \{$Вышел из строя элемент $d\}$ соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7; 0,6. Найти вероятность события $E = \{$Разрыв цепи$\}$:

A)



B)



Решение. *A*) $E = A + BCD$. Поскольку события A и BCD совместны, то по теореме сложения

$$P(E) = P(A + BCD) = P(A) + P(BCD) - P(ABCD).$$

Учитывая, что элементы цепи работают независимо

$$P(E) = P(A) + P(B)P(C)P(D) - P(A)\ P(B)\ P(C)\ P(D) =$$
$$= P(A) + P(\overline{A})P(B)P(C)P(D) = 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}9336.$$

в) $E = A + \overline{A}D(B + C)$. По теореме сложения

$$P(B + C) = P(B) + P(C) - P(BC) =$$
$$= P(B) + P(C) - P(B)P(C) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}94.$$

Поскольку события A и $\overline{A}D(B + C)$ несовместны, то

$$P(E) = P(A) + P(\overline{A}D(B + C)) = P(A) + P(\overline{A})P(D)P(B + C) =$$
$$= 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}94 = 0{,}9564.$$

Задача 6. Из группы, состоящей из четырех юношей возраста 17, 18, 19 и 20 лет и четырех девушек тех же лет, наудачу выбирают двух человек. Какова вероятность того, что оба окажутся юношами, если известно, что один из них юноша 17 лет?

Решение. Пусть событие A_i означает, что i-ым выбран юноша, а событие B — из двух выбранных один юноша семнадцати лет. По условию задачи необходимо найти вероятность $P(A_1A_2|B)$. По определению

$$P(A_1A_2|B) = \frac{P(A_1A_2B)}{P(B)}.$$

Поскольку событие A_1A_2B означает, что выбраны двое юношей, причем один из них юноша семнадцати лет. Данному событию благоприятствует $C_1^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^0 = 3$ элементарных события. В данном эксперименте всего $|\Omega| = C_8^2 = 28$ исходов, поэтому $P(A_1A_2B) = \dfrac{3}{28}$.

Далее, $P(B) = \dfrac{C_1^1 \cdot C_7^1}{C_8^2} = \dfrac{1}{4}$. Тогда $P(A_1A_2|B) = \dfrac{3}{7}$.

Искомые вероятности $P(A_1A_2B)$ и $P(B)$ можно найти иным способом. Пусть событие A_i означает, что i-ым выбран юноша не семнадцати лет, а событие B_i — i-ым выбран юноша семнадцати лет. Тогда $A_1A_2B = A_1B_2 + B_1A_2$. События A_1B_2 и B_1A_2 несовместны, потому

$$P(A_1B_2 + B_1A_2) = P(A_1B_2) + P(B_1A_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) + P(B_1)P(A_2|B_1).$$

По условию задачи $P(A_1) = \frac{3}{8}$. Если событие A_1 произошло, то из оставшихся семи человек юношу семнадцати лет можно выбрать с вероятностью $P(B_2|A_1) = \frac{1}{7}$. Аналогично,

$$P(B_1) = \frac{1}{8}, \ P(A_2|B_1) = \frac{3}{7}.$$

Тогда

$$P(A_1B_2 + B_1A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{28}.$$

Далее, так как $B = B_1 + B_2$ и события B_1 и B_2 несовместны, то

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Задача 7. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знает английский язык, 40 — французский и 35 — немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий — 8, французский и немецкий — 10. Все три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. Найти вероятность события $F = \{$Вышедший знает ровно два иностранных языка$\}$, $G = \{$Вышедший знает хотя бы один иностранных язык$\}$.

Решение. Пусть событие A означает, что вышедший знает английский язык, B — французский язык, C — немецкий язык, тогда $A \cdot B$ означает, что вышедший знает английский и французский языки, $A \cdot C$ — английский и немецкий языки, $B \cdot C$ — французский и немецкий языки, а $A \cdot B \cdot C$ — вышедший знает все три языка По условию задачи $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}4$; $P(C) = 0{,}35$; $P(AB) = 0{,}2$; $P(AC) = 0{,}08$; $P(BC) = 0{,}1$; $P(ABC) = 0{,}05$. Необходимо найти

$$P(F) = P(A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C) \text{ и } P(G) = P(A + B + C).$$

Исходя из известных вероятностей, имеем

$$P(F) = P(A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C) =$$
$$= P(AB) + P(AC) + P(BC) - 3 \cdot P(ABC) = 0{,}23;$$
$$P(G) = P(A + B + C) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 0{,}92.$$

Задача 8. Из урны, содержащей четыре белых и пять черных шаров, наудачу последовательно извлекаются три шара. Найти вероятности событий $A = \{$Все шары черные$\}$, $B = \{$Хотя бы один шар черный$\}$.

Решение. Пусть событие $A_i = \{i$-ый шар оказался черным$\}$, $i = 1, 2, 3$. Вероятность события A_1 найдем из условия задачи: $P(A_1) = \dfrac{5}{9}$. Если событие A_1 произошло, то в урне осталось восемь шаров, из них четыре белых и четыре черных шара, поэтому $P(A_2|A_1) = \dfrac{4}{8}$. Далее, если произошло событие A_1A_2, т. е. из урны уже извлечены два черных шара, то вероятность извлечь третьим также черный шар равна $P(A_3|A_1A_2) = \dfrac{3}{7}$.

Итак,

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1A_2) = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{5}{42}.$$

Аналогично найдем вероятность события, означающего, что все извлеченные шары белые, $P(\overline{B}) = (\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$. Тогда

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{20}{21}.$$

Задача 9. Вероятность события A равна 0,9, вероятность совместного наступления событий A и B равна 0,5. Найти вероятности событий $\overline{\overline{A}+\overline{B}}$, $A - B$.

Решение. По условию задачи $P(AB) = 0,5$. В силу формулы двойственности

$$\Omega\setminus\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha}(\Omega\setminus A_\alpha)$$

имеем

$$P(\overline{\overline{A}+\overline{B}}) = P(\overline{\overline{A}}\cdot\overline{\overline{B}}) = P(AB) = 0,5.$$

Далее, так как $AB \subset A$, имеем

$P(A - B) = P(A - (AB)) = P(A) - P(AB) = 0,9 - 0,5 = 0,4.$

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Экзаменационные работы по математике, которые писали абитуриенты при поступлении в университет, зашифрованы целыми числами от 1 до 990 включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу взятой работы кратен 10 или 11?

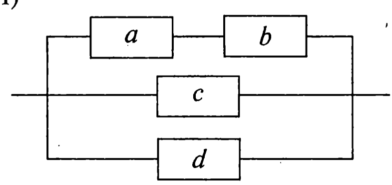
2. Из двух полных наборов шахмат наудачу извлекают по одной фигуре или пешке. Какова вероятность того, что обе фигуры окажутся слонами?

3. Производится три независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность двух попаданий в мишень.

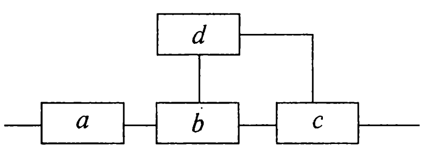
4. Из урны, содержащей 6 красных и 3 белых шара, наудачу извлекаются последовательно три шара. Найти вероятность появления первыми двух белых шаров.

5. Дана электрическая цепь с элементами a, b, c, d. Элементы цепи работают независимо друг от друга. Вероятности событий $A=\{$Вышел из строя элемент $a\}$, $B=\{$Вышел из строя элемент $b\}$, $C=\{$Вышел из строя элемент $c\}$, $D=\{$Вышел из строя элемент $d\}$ соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3; 0,4. Найти вероятность события $E=\{$Разрыв цепи$\}$:

A)



B)



6. Один раз подбрасывается правильная игральная кость. Даны события $A=\{$Выпало простое число$\}$ и $B=\{$Выпало четное число очков$\}$. Вычислить $P(A|B)$.

7. Жюри состоит из трех судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью 0,75, а третий судья для принятия решения бросает правильную монету. Окончательное решение жюри принимает по большинству голосов. Какова вероятность того, что жюри примет правильное решение?

8. В очереди три человека. Вероятности событий $A_i = \{i$-ым в очереди стоит мужчина$\}$, $i = 1, 2, 3$, равны 0,6. Найти вероятности событий $A = \{$В очереди все женщины$\}$, $B = \{$В очереди более одного мужчины$\}$, $C = \{$В очереди хотя бы один мужчина$\}$, $D = \{$В очереди только один мужчина$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,4. Чему равны вероятности событий $A + B$, $A \cdot B$, $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

Вариант 2

1. Производится три независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность хотя бы двух попаданий в мишень.

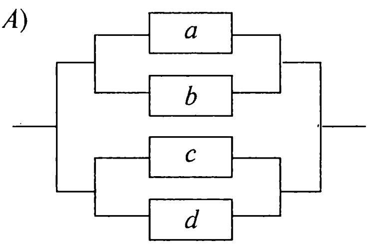
2. Из урны, содержащей 6 красных и 3 белых шара, наудачу извлекаются последовательно три шара. Найти вероятность появления первым белого, а вторым красного шара.

3. Ученик отвечает на пять вопросов словами «Да» или «Нет». Вероятность верного ответа на любой из вопросов равна 0,4. Найти вероятность трех верных ответов.

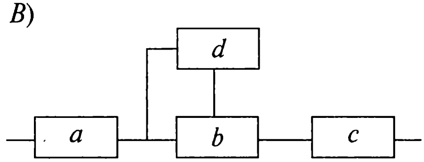
4. Вероятность того, что початки кукурузы имеют 12 рядов, равна 0,49, 14 рядов — 0,37, и 16–18 рядов — 0,14. Какова вероятность того, что наудачу выбранный початок будет иметь 12 или 14 рядов?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

$A)$



$B)$



6. Вероятность попасть в самолет равна 0,4, а вероятность его сбить равна 0,1. Найти вероятность того, что при попадании в самолет он будет сбит.

7. Жюри состоит из трех судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью 0,75, а третий судья для принятия решения поступает следующим образом: если двое первых судей принимают одинаковые

решения, то он к ним присоединяется, если же решения двух первых судей разные, то третий судья бросает правильную монету. Окончательное решение жюри принимает по большинству голосов. Какова вероятность того, что жюри примет правильное решение?

8. Студент сдал три экзамена. Вероятности событий $A_i = \{$Студент сдал i-ый экзамен на отлично$\}$, $i = 1, 2, 3$, равны 0,6. Найти вероятности событий $A = \{$Один экзамен сдан на отлично$\}$, $B = \{$Не менее одного экзамена студент сдал на отлично$\}$, $C = \{$По крайней мере два экзамена студент сдал на отлично$\}$, $D = \{$Первый экзамен сдан на отлично$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,4. Чему равны вероятности событий $\overline{A \bullet B}$, $\overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B}$, $\overline{A} \bullet \overline{B}$?

Вариант 3

1. Из 30 учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15 — волейболом, 5 — волейболом и баскетболом, а остальные — другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом или только баскетболом?

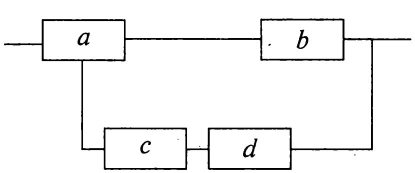
2. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем 5 книг стоят по 400 рублей каждая, 3 книги — по 200 рублей и 2 книги — по 100 рублей. Найти вероятность того, что взятая наудачу книга стоит не дороже 200 рублей.

3. Буквы слова ЗАДАЧА записаны на одинаковых карточках. Из них наудачу последовательно извлекаются две карточки. Найти вероятность того, что извлечены гласные буквы.

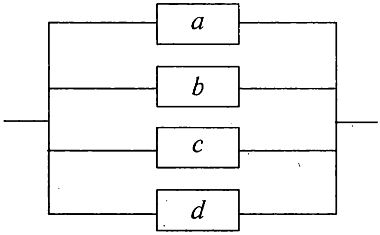
4. Производятся независимые выстрелы до попадания в цель. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что произведено три выстрела.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Вероятность того, что прибор не откажет к моменту времени t_1, равна 0,8, а вероятность того, что он не откажет к моменту времени t_2 ($t_1 < t_2$), равна 0,6. Найти вероятность того, что прибор не отказавший к моменту времени t_1, не откажет к моменту времени t_2.

7. Некая секретарша написала 5 деловых писем, вложила их в конверты и по рассеянности написала адреса случайным образом. Какова вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет по назначению?

8. Наудачу взяты три числа. Событие $A_i = \{i$-ое число кратно 5$\}$, $i = 1, 2, 3$. Найти вероятности событий $A = \{$Все числа кратны 5$\}$, $B = \{$Хотя бы одно число кратно 5$\}$, $C = \{$Только одно число кратно 5$\}$, $D = \{$Второе число кратно пяти$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,4. Найти вероятности событий $\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A \Delta B}$.

Вариант 4

1. Бросается пять раз правильная игральная кость. Найти вероятности событий $A = \{$Все пять раз на верхней грани выпало шесть очков$\}$, $B = \{$Первые два раза на верхней грани выпало число очков, кратное 2$\}$.

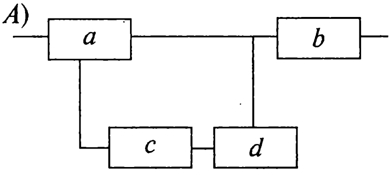
2. Из колоды в 36 карт наудачу последовательно извлекаются две карты. Найти вероятности событий $A = \{$Извлечены два туза красной масти$\}$, $B = \{$Извлечены карты бубновой масти$\}$.

3. Из урны, содержащей 5 красных и 4 белых шара, наудачу извлекаются последовательно четыре шара. Найти вероятность того, что будет извлечен хотя бы один белый шар.

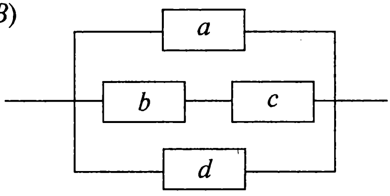
4. Контрольная работа состоит из трех задач по алгебре и трех по геометрии. Вероятность правильно решить задачу по алгебре равна 0,8, а по геометрии — 0,6. Какова вероятность правильно решить все три задачи хотя бы по одному из предметов?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. В семье двое детей. Считая, что рождение мальчика и девочки — независимые и равновероятные события, вычислить вероятность того, что оба ребенка мальчики, если известно, что в семье есть мальчик.

7. Иван и Петр поочередно бросают правильную монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Иван бросает первым. Найти вероятности выигрыша для каждого из игроков, если бросание монеты может продолжаться бесконечно долго.

8. Стрелок сделал три выстрела в мишень. Вероятности событий $A_i =$ {Попадание в мишень при i-ом выстреле}, $i = 1, 2, 3$, равны 0,6. Найти вероятности событий $A =$ {Только одно попадание}, $B =$ {По крайней мере одно попадание}, $C =$ {Попадание при первом выстреле}, $D =$ {Не менее двух попаданий}.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,4. Найти вероятности событий $\overline{A} \cdot B$, $\overline{A+B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$.

Вариант 5

1. Из трех урн, содержащих по два шара белого, черного и синего цветов, наудачу извлекается по одному шару. Найти вероятности событий $A =$ {Извлечен хотя бы один белый шар}, $B =$ {Извлечен ровно один черный шар}.

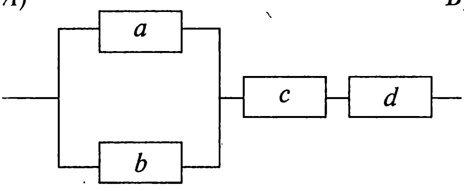
2. Среди пяти студентов, сдавших экзамен по теории вероятностей на оценки 5, 5, 4, 3, 3, выбирают наудачу двух. Найти вероятности событий $A =$ {Выбраны студенты, сдавшие экзамен на «отлично»}, $B =$ {Один из выбранных студентов сдал экзамен на «отлично»}.

3. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается четыре раза. Найти вероятность того, что первые три раза на верхней грани выпала шестерка.

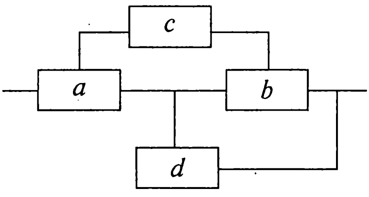
4. Правильная монета подбрасывается до появления два раза подряд решки. Найти вероятность того, что будет сделано не более пяти подбрасываний.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Из множества чисел $\{1, 2, ..., N\}$ по схеме случайного выбора без возвращения выбирают три числа. Найти условную вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

7. За некоторый промежуток времени амеба может погибнуть с вероятностью 0,25, выжить с вероятностью 0,25 и разделиться на две с вероятностью 0,5. В следующий такой же промежуток времени с каждой амебой независимо от «происхождения» происходит то же самое. Сколько амеб и с какими вероятностями может существовать к концу второго промежутка времени?

8. Три стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятности событий A_i = {Попадание в мишень i-ым стрелком}, $i = 1, 2, 3$, равны 0,6. Найти вероятности событий A = {В мишень попали только два стрелка}, B = {В мишень попал хотя бы один стрелок}, C = {В мишень попало не более одного стрелка}, D = {В мишень попали все}.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,5. Найти вероятности событий $A \Delta B$, $\overline{A} \cdot B + \overline{B} \cdot A$, $\overline{B} \cdot A$, $A + B$.

Вариант 6

1. Имеется 100 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 100. Из них последовательно и наудачу извлекается пять жетонов. Найти вероятности событий A = {Извлечены хотя бы два жетона, номера которых кратны 3}, B = {Извлечено три жетона, номера которых кратны 8}.

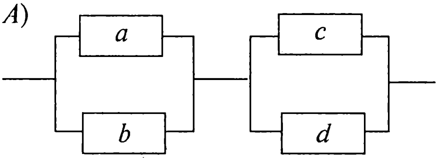
2. Из колоды в 36 карт последовательно и наудачу извлекается три карты. Найти вероятности событий A = {Вторым извлечен король}, B = {Извлечены карты бубновой масти}.

3. Подбрасываются две правильные шестигранные игральные кости. Найти вероятность того, что на верхней грани выпадет ровно одна пятерка.

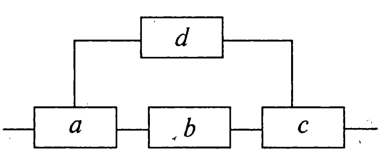
4. Из урны, содержащей 4 красных и 2 белых шара, наудачу извлекаются последовательно два шара. Найти вероятность того, что будет извлечен хотя бы один белый шар.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

$A)$



$B)$



6. Побрасывают наудачу три правильные игральные кости. Наблюдаемые события: $A=\{$На трех костях выпадут разные грани$\}$, $B=\{$Хотя бы на одной из костей выпадет шестерка$\}$. Вычислить $P(B|A)$ и $P(A|B)$.

7. Иван и Петр поочередно бросают правильную монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Иван бросает первым. Найти вероятности выигрыша для каждого из игроков, если игра ограничена 10 бросками для каждого из игроков, причем, если герб не появится у Ивана вплоть до его десятого броска, выигравшим считается Петр.

8. Из двух полных наборов шахмат вынули наугад фигуру или пешку. Событие $A_1=\{$Первым вынули пешку$\}$, $A_2=\{$Вторым вынули пешку$\}$. Найти вероятности событий $A=\{$Вынули хотя бы одну фигуру$\}$, $B=\{$Вынули две фигуры$\}$, $C=\{$Вынули только одну фигуру$\}$, $D=\{$Вынули не менее одной пешки$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,5. Найти вероятности событий $\overline{A\cdot B}$, $\overline{A}+\overline{B}$, $A\cdot B$, $A+B$.

Вариант 7

1. Бросается пять раз правильная игральная кость. Найти вероятности событий $A=\{$Первые два раза на верхней грани выпало шесть очков$\}$, $B=\{$Хотя бы два раза на верхней грани выпало шесть очков$\}$.

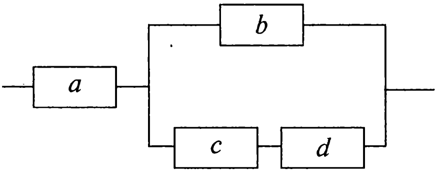
2. Имеется 100 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 100. Последовательно и наудачу извлекается три жетона. Найти вероятности событий $A=\{$Извлечен ровно один жетон, номер которого кратен 7$\}$, $B=\{$Извлечено хотя бы два жетона, номера которых кратны 11$\}$.

3. Подбрасывается правильная шестигранная игральная кость до первого появления пятерки на верхней грани. Найти вероятность того, что придется сделать не менее трех подбрасываний.

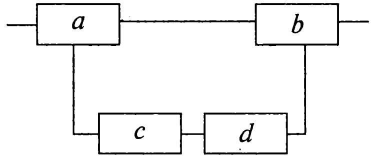
4. Из урны, содержащей шесть красных шаров и один синий шар, наудачу последовательно извлекаются два шара. Найти вероятность того, что будет извлечен ровно один красный шар.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Пусть события A и B несовместны, причем $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$. Доказать, что они зависимы.

7. Вероятность отказа прибора после того, как он применялся k раз, равна $p(k)$. Известно, что в первых m применениях прибор не отказал. Какова вероятность того, что при следующих n применениях прибор не откажет?

8. Из студенческой группы, состоящей из четырех юношей возраста 17, 18, 19 и 20 лет и четырех девушек тех же лет, выбирают наугад двух человек. Найти вероятности событий $A = \{$Среди выбранных девушка семнадцати лет$\}$, $B = \{$Среди выбранных есть девушка$\}$, $C = \{$Среди выбранных юноша двадцати лет$\}$, $D = \{$Среди выбранных либо девушка, либо юноша семнадцати лет$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,5, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,2. Найти вероятности событий $A \cdot \overline{B} + B$, $A + B$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$.

Вариант 8

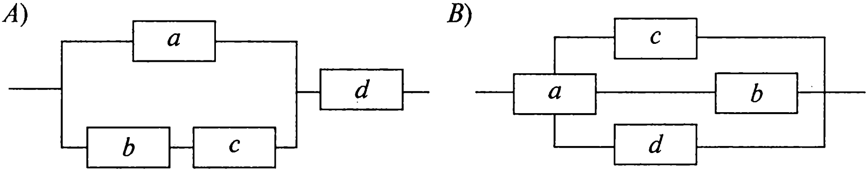
1. Вероятность выигрыша в одной лотерее равна 0,7, а в другой — 0,4. Некий покупатель приобрел по одному билету каждого вида лотереи. Найти вероятности событий $A = \{$Покупатель приобрел только один выигрышный билет$\}$, $B = \{$Оба билета оказались невыигрышными$\}$.

2. Имеется 100 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 100. Наудачу последовательно выбираются три жетона. Найти вероятности событий $A = \{$Извлечен хотя бы один жетон, номер которого кратен 5$\}$, $B = \{$Вторым извлечен жетон, номер которого кратен 13$\}$.

3. Подбрасывается три раза правильная шестигранная игральная кость. Найти вероятность того, что пятерка выпала на верхней грани только один раз.

4. Производятся независимые выстрелы до первого попадания в цель. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Найти вероятность того, что придется произвести более трех выстрелов.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.



6. Пусть события A и B независимы, причем $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$. Доказать, что они обязательно совместны.

7. Производится стрельба из зенитного орудия по воздушной цели. Попадания при отдельных выстрелах независимы и имеют вероятность 0,45. Если снаряд попал в цель, то она поражается с вероятностью 0,55. Боевой запас орудия 10 снарядов. Стрельба ведется до поражения цели или до израсходования всего боезапаса. Найти вероятность того, что будет израсходован не весь запас.

8. Судно имеет три котла. Вероятности событий $A_i = \{$Неисправность i-ого котла$\}$, $i = 1, 2, 3$, равны 0,6. Найти вероятности событий $A = \{$Неисправен только один котел$\}$, $B = \{$Неисправен хотя бы один котел$\}$, $C = \{$Неисправен первый котел$\}$, $D = \{$Неисправны по крайней мере два котла$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,5, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,2. Найти вероятности событий $\overline{A+B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A \cdot B}$.

Вариант 9

1. Вероятность выигрыша в одной лотерее равна 0,7, а в другой — 0,4. Некий покупатель приобрел по два билета каждого вида лотереи. Найти вероятности событий $A = \{$Покупатель приобрел только один выигрышный билет$\}$, $B = \{$Покупатель приобрел по одному выигрышному билету каждой лотереи$\}$.

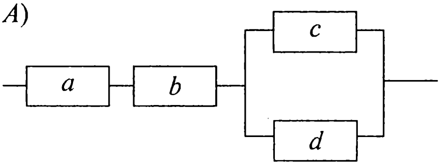
2. Из урны, содержащей шары по два шара белого, черного и синего цветов, наудачу последовательно извлекается три шара. Найти вероятности событий $A = \{$Извлечен хотя бы один белый шар$\}$, $B = \{$Извлечены один черный шар и два синих шара$\}$.

3. Производится три независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что было два попадания.

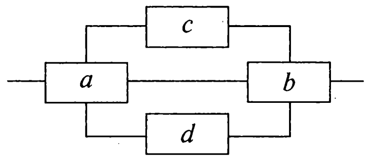
4. Правильная монета подбрасывается до первого выпадения решки. Найти вероятность того, что будет произведено три подбрасывания.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Доказать, что элементарные исходы любого стохастического эксперимента зависимы.

7. Производится стрельба из зенитного орудия по воздушной цели. Попадания при отдельных выстрелах независимы и имеют вероятность 0,45. Если снаряд попал в цель, то она поражается с вероятностью 0,55. Боевой запас орудия 10 снарядов. Стрельба ведется до поражения цели или до израсходования всего боезапаса. Найти вероятность того, что останутся неизрасходованными не менее 5 снарядов.

8. Наудачу взяты три числа. Событие $A_i = \{i\text{-ое число четное}\}$, $i = 1, 2, 3$. Найти вероятности событий $A = \{\text{Все числа нечетные}\}$, $B = \{\text{Хотя бы одно число четное}\}$, $C = \{\text{Первое число четное}\}$, $D = \{\text{Только одно число четное}\}$.

9. Вероятность события A равна 0,5, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,2. Найти вероятности событий $\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B$, $A + B$.

Вариант 10

1. Производится последовательно два независимых выстрела в цель. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность событий $A = \{\text{Попадание в цель оба раза}\}$, $B = \{\text{Попадание в цель в первый раз}\}$.

2. Бросаются три правильные шестигранные игральные кости. Найти вероятности событий $A = \{\text{Сумма выпавших на верхних гранях очков нечетная}\}$, $B = \{\text{Хотя бы на одной из костей выпала единица}\}$.

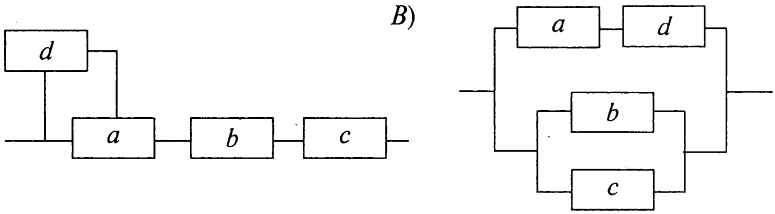
3. Студент сдает экзамены по двум предметам, на которых он с равной вероятностью может получить оценки «2», «3», «4» и «5».

Найти вероятность того, что студент получит пятерки по обоим предметам.

4. В урне пять белых и три черных шара. Вынимается наудачу последовательно без возвращения три шара. Найти вероятность того, что шары одного цвета.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A) *B*)



6. Пусть события A и B независимы. Показать, что тогда независимы и события $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

7. В тире имеются мишени двух типов: мелкие (диаметра d) и крупные (диаметра $2d$). Стреляющему обещан приз, если он из трех выстрелов по крайней мере дважды поразит цель, выбирая ее каждый раз по своему усмотрению, но с обязательным условием: не стрелять дважды подряд в мишень одного и того же диаметра. С какой мишени — мелкой или крупной — следует начать состязание стреляющему, если вероятность попадания в мишень пропорциональна ее площади?

8. Ученик выбирает три книги в библиотеке. Вероятности событий $A_i = \{i$-ая выбранная книга о животных$\}$, $i = 1, 2, 3$ равны 0,6. Найти вероятности событий $A = \{$Две книги о животных$\}$, $B = \{$Вторая книга о животных$\}$, $C = \{$Ни одной книги о животных$\}$, $D = \{$Все книги о животных$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,5, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,2. Найти вероятности событий $\overline{A} - \overline{B}$, $B - A$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$.

Вариант 11

1. Производится последовательно два независимых выстрела в цель. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,45. Найти вероятности событий $A = \{$Попадание в цель оба раза$\}$, $B = \{$Попадание в цель в первый раз$\}$.

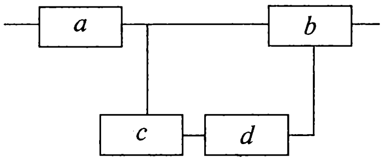
2. Бросаются две правильные шестигранные игральные кости. Найти вероятности событий $A = \{$Сумма выпавших на верхних гранях очков нечетная$\}$, $B = \{$Хотя бы на одной из костей выпала единица$\}$.

3. Вероятность бесперебойной работы станка в течение часа равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение наблюдаемых трех часов станок не выйдет из строя.

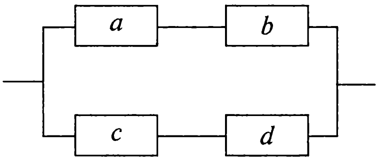
4. Из четырех юношей и двух девушек выбираются наудачу и последовательно двое для дежурства. Найти вероятность того, что будут отобраны юноша и девушка.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Пусть события A и B независимы. Показать, что тогда независимы и события A и $\overline{B}$.

7. Самолет состоит из трех различных по уязвимости частей: 1) кабины летчика и двигателей, 2) топливных баков и 3) планера. Для поражения самолета достаточно одного попадания в первую часть, двух попаданий во вторую часть и трех попаданий в третью часть. При попадании в самолет одного снаряда он с вероятностью p_k и независимо от других попадает в k-ую часть ($k = 1, 2, 3$). Самолет был обстрелян. События: $A = \{$В самолет попало 3 снаряда$\}$, $B = \{$Самолет поражен$\}$. Найти условную вероятность $P(B|A)$.

8. Из урны вынимаются последовательно три шара. Вероятности событий $A_i = \{i$-ый шар оказался белым$\}$, $i = 1, 2, 3$ равны 0,6. Найти вероятности событий $A = \{$Все шары белые$\}$, $B = \{$Ни одного белого шара$\}$, $C = \{$Ровно два белых шара$\}$, $D = \{$Хотя бы один белый шар$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,5. Найти вероятности событий $A \Delta B$, $(A + \overline{B}) \Delta (\overline{A} + B)$.

Вариант 12

1. Производится последовательно два независимых выстрела в цель. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,25. Найти вероятности событий $A = \{$Попадание в цель оба раза$\}$, $B = \{$Попадание в цель только один раз$\}$.

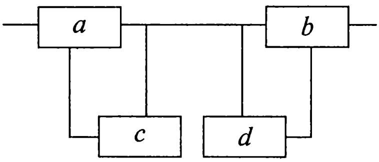
2. Бросаются три правильные шестигранные игральные кости. Найти вероятности событий $A=\{$На верхней грани только одной кости выпала единица$\}$, $B=\{$На верхних гранях выпала хотя бы одна единица$\}$.

3. Буквы слова ДАЧА записаны на одинаковых карточках. Из них наудачу последовательно извлекаются две карточки. Найти вероятность того, что извлечены гласные буквы.

4. Известно, что при каждом измерении равновероятны как положительная, так и отрицательная ошибка. Какова вероятность того, что при трех независимых измерениях все ошибки будут положительными?

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)

6. Пусть события A и B независимы. Показать, что тогда независимы и события $\overline{A}$ и B.

7. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,65. Сколько надо произвести независимых выстрелов в неизменных условиях, чтобы с вероятностью не меньшей 0,95, поразить цель хотя бы один раз?

8. Из трех колод в 36 карт наудачу вынимается по одной карте. Событие $A_i=\{i$-ая карта оказалась тузом$\}$, $i=1,\ 2,\ 3$. Найти вероятности событий $A=\{$Вторая карта — туз$\}$, $B=\{$Ровно два туза$\}$, $C=\{$Хотя бы один туз$\}$, $D=\{$Ни одного туза$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,5. Найти вероятности событий $\overline{A\cdot B}$, $\overline{A}+A\cdot\overline{B}$.

Вариант 13

1. Бросается два раза правильная шестигранная игральная кость. Найти вероятности событий $A=\{$На верхней грани оба раза выпало шесть очков$\}$, $B=\{$Сумма выпавших на верхних гранях очков равна 5$\}$.

2. Производится два независимых выстрела в цель. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,75. Найти

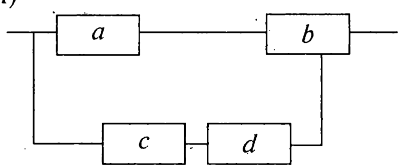
вероятности событий A — попадание в цель при первом выстреле, B — попадание в цель при втором выстреле.

3. Из урны, содержащей 5 красных и 4 белых шара, наудачу извлекаются последовательно два шара. Найти вероятность того, что извлеченные шары одного цвета.

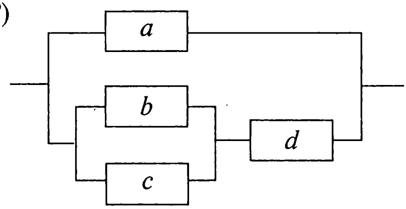
4. Выполненная контрольная работа состоит из задачи и примера. Вероятность того, что в наудачу выбранной работе правильно решена только задача, равна 0,8, а того, что получен хотя бы один правильный ответ, — 0,9. Найдите вероятность того, что правильно решен пример.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Из колоды в 36 карт наудачу извлекается одна карта. События: $A = \{$Вынут туз$\}$, $B = \{$Вынута карта черной масти$\}$, $C = \{$Вынута фигура: валет, дама, король или туз$\}$. Установить зависимы или независимы следующие пары событий A и B, A и C?

7. Сколько раз нужно бросить пару правильных шестигранных игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12?

8. Из трех полных наборов домино наудачу взяли по одной кости. Найти вероятности событий $A = \{$Все кости оказались дублями$\}$, $B = \{$Одна кость оказалась дублем$\}$, $C = \{$Третья кость оказалась дублем$\}$, $D = \{$Не менее одного дубля$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,3, вероятность их совместного наступления равна 0,2. Найти вероятности событий $A + B$, $(A \cdot B) \Delta (A \Delta B)$.

Вариант 14

1. Имеется 100 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 100. Наудачу извлекается два жетона. Найти вероятности событий $A = \{$Извлечение жетонов, номера которых кратны 2$\}$, $B = \{$Номер одного извлеченного жетона кратно 2$\}$.

2. Из двух видов лотереи наудачу вынимается по одному билету. Найти вероятности событий A — выигрыш по билету только

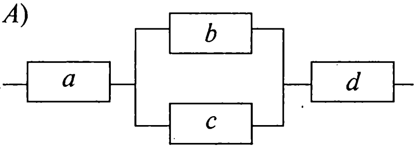
одной лотереи, B — выигрыш по билету хотя бы одной лотереи, если вероятность выигрыша по первому виду лотереи равна 0,01, а по второму — 0,02.

3. Производится четыре независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,82. Найти вероятность того, что было два попадания.

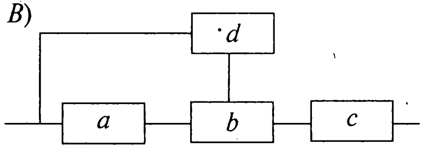
4. Правильная монета подбрасывается до первого появления герба. Найти вероятность того, что будет сделано не менее трех подбрасываний.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

А)



В)



6. Из колоды в 36 карт наудачу извлекается одна карта. События: $A = \{$Вынут туз$\}$, $B = \{$Вынута карта черной масти$\}$, $C = \{$Вынута фигура: валет, дама, король или туз$\}$. Установить, зависимы или независимы следующие пары событий A и B, B и C?

7. Цех изготовляет кинескопы для телевизоров, причем 70% всех кинескопов предназначены для цветных телевизоров и 30% — для черно-белых. Известно, что 50% всей продукции отправляется на экспорт, причем из общего числа кинескопов, предназначенных для цветных телевизоров, 40% отправляются на экспорт. Найти вероятность того, что наудачу взятый для контроля кинескоп предназначен для черно-белого телевизора и будет отправлен на экспорт.

8. Три стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятности событий $A_i = \{$Попадание в мишень i-ым стрелком$\}$, $i = 1, 2, 3$ равны 0,6. Найти вероятности событий $A = \{$В мишень попал только один стрелок$\}$, $B = \{$В мишень попали хотя бы два стрелка$\}$, $C = \{$В мишень попали не менее одного стрелка$\}$, $D = \{$В мишень никто не попал$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,3, вероятность их совместного наступления равна 0,2. Найти вероятности событий $A \Delta B$, $(\overline{A} + \overline{B})(A + B)$.

Вариант 15

1. Производится два независимых выстрела в цель. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,45. Найти

вероятности событий A — попадание в цель оба раза, B — попадание в цель только один раз.

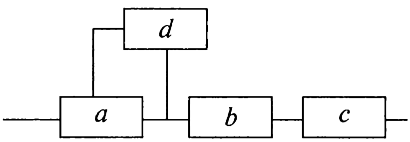
2. Правильная монета подбрасывается два раза. Найти вероятности событий $A=${В первый раз выпал герб}, $B=${Во второй раз выпал герб}.

3. Выполненная контрольная работа состоит из трех задач и одного примера. Вероятность правильно решить задачу равна 0,54, а вероятность правильно вычислить пример — 0,64. Найти вероятность того, что решены хотя бы две задачи.

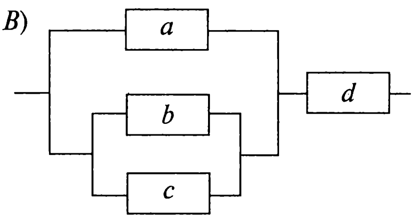
4. Студент отвечает на вопросы преподавателя до первого неверного ответа. Вероятность неверного ответа на любой вопрос равна 0,53. Найти вероятность того, что преподаватель задаст только три вопроса.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знает английский язык, 40 — французский и 35 — немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий — 8, французский и немецкий — 10. Все три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. События: $A=${Вышедший знает английский язык}, $B=${Вышедший знает французский язык}, $C=${Вышедший знает немецкий язык}. Указать все пары независимых событий.

7. Студент может уехать в институт или автобусом, который ходит через каждые 20 минут, или троллейбусом, который ходит через каждые 10 минут. Какова вероятность того, что студент, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших пяти минут?

8. Из трех колод в 36 карт наудачу выбрано по одной карте. Найти вероятности событий $A=${Все карты бубновой масти}, $B=${Только одна карта бубновой масти}, $C=${Более одной карты бубновой масти}, $D=${Хотя бы одна карта бубновой масти}.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,3, вероятность их совместного наступления равна 0,2. Найти вероятность события $A-B$, $(A\cdot B)\,\Delta A$.

Вариант 16

1. Из таблицы случайных чисел наудачу взято два числа. Найти вероятность событий $A=\{$Оба выбранных числа делятся на 5$\}$, $B=\{$Одно из выбранных чисел оканчивается нулем$\}$.

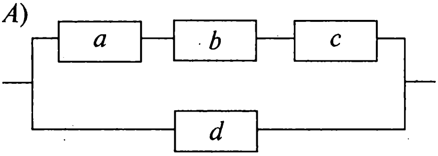
2. Вероятность оказаться доброкачественным для приборов некоторого завода равна 0,89. Найти вероятности событий $A=\{$Ровно один из трех проверяемых приборов доброкачественный$\}$, $B=\{$Первый из трех проверяемых приборов доброкачественный$\}$.

3. Из урны, содержащей 3 красных и 3 белых шара, наудачу извлекаются последовательно три шара. Найти вероятность того, что шары одного цвета.

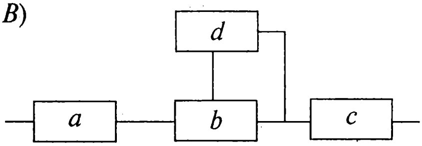
4. Выполненная контрольная работа состоит из пяти задач и двух примеров. Вероятность правильно решить задачу равна 0,54, а вероятность правильно вычислить пример — 0,64. Найти вероятность того, что решены две задачи и хотя бы один пример.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знает английский язык, 40 — французский и 35 — немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий — 8, французский и немецкий — 10. Все три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. События: $A=\{$Вышедший знает английский язык$\}$, $B=\{$Вышедший знает французский язык$\}$, $C=\{$Вышедший знает немецкий язык$\}$. Установить, являются указанные события независимыми в совокупности.

7. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что корреспондент примет первый вызов, равна 0,2, второй — 0,3 и третий — 0,4. По условиям приема события, состоящие в том, что i-ый по счету вызов ($i=1, 2, 3$) услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит радиста.

8. Три стрелка сделали по одному выстрелу в цель. Вероятности событий $A_i=\{$Попадание в цель i-ым стрелком$\}$, $i=1, 2, 3$, равны 0,6. Найти вероятности событий $A=\{$В цель попало только два стрелка$\}$, $B=\{$В цель попал хотя бы один стрелок$\}$, $C=\{$В цель никто не попал$\}$, $D=\{$В цель попали все$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,3, вероятность их совместного наступления равна 0,2. Найти вероятность события $\overline{A}\cdot\overline{B}+A+B$.

Вариант 17

1. Вероятность оказаться доброкачественным для приборов некоторого завода равна 0,89. Найти вероятности событий $A=$ {Два из трех проверяемых приборов доброкачественные}, $B=$ {Второй из трех проверяемых приборов доброкачественный}.

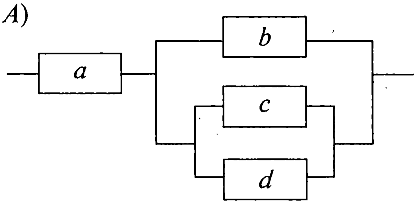
2. Из таблицы случайных чисел наудачу взяты три числа. Найти вероятности событий $A=$ {Выбранные числа делятся на 9}, $B=$ {Сумма цифр одного из выбранных чисел делится на 3}.

3. Производятся 4 независимых выстрела. Вероятность поражения стрелком цели при каждом выстреле равна 0,65. Какова вероятность того, что первые два выстрела будут попаданиями, а последующие два — промахами?

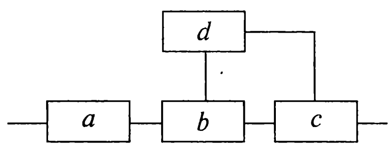
4. Выполненная контрольная работа состоит из трех задач и одного примера. Вероятность правильно решить задачу равна 0,54, а вероятность правильно вычислить пример — 0,64. Найти вероятность того, что решены одна задача и один пример.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимается два шара. Найти вероятность того, что будут вынуты шары разного цвета, при условии, что не вынут синий шар.

7. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знает английский язык, 40 — французский и 35 — немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий — 8, французский и немецкий — 10. Все три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. Найти вероятность события $A=$ {Вышедший знает хотя бы два иностранных языка}.

8. В доме три окна. Вероятности событий $A_i=$ {В i-ом окне горит свет}, $i=1$, 2, 3, равны 0,6. Найти вероятности событий $A=$ {Во всех окнах горит свет}, $B=$ {Только в одном окне горит

свет}, $C = \{$Хотя бы в одном окне горит свет$\}$, $D = \{$Ни в одном окне свет не горит$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,4. Найти вероятности событий $A - B$, $A \cdot \overline{B}$.

Вариант 18

1. Из таблицы случайных чисел наудачу взяты два числа. Найти вероятности событий $A = \{$Одно из выбранных чисел делится на 9$\}$, $B = \{$Сумма цифр первого выбранного числа делится на 3$\}$.

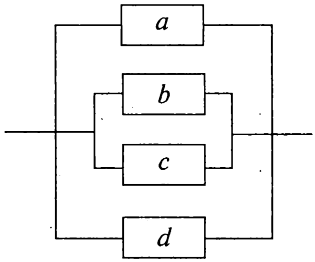
2. Судно имеет две турбины. Вероятность выхода из строя каждой из турбин равна 0,25. Найти вероятности событий $A = \{$Только одна турбина судна имеет неисправность$\}$, $B = \{$Обе турбины судна неисправные$\}$.

3. Подбрасывается три раза правильная шестигранная игральная кость. Найти вероятность того, что пятерка выпадет на верхней грани ровно два раза.

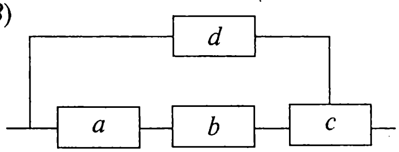
4. Производятся независимые выстрелы до попадания в цель. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,88. Найти вероятность того, что произведено пять выстрелов.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. На шахматную доску наудачу ставятся два слона — белый и черный. Какова вероятность того, что слоны не побьют друг друга, при условии, что белый слон попадет на один из крайних полей доски?

7. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знает английский язык, 40 — французский и 35 — немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий — 8, французский и немецкий — 10. Все три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. Найти вероятность события $A = \{$Вышедший знает только один иностранный язык$\}$.

8. Учитель проверил три контрольные работы. Вероятности событий $A_i = \{i$-ая проверенная контрольная работа оценена на отлично$\}$, $i = 1, 2, 3$ равны 0,6. Найти вероятности событий $A = \{$Все работы оценены на отлично$\}$, $B = \{$Первая работа оценена на отлично$\}$, $C = \{$Только одна работа оценена на отлично$\}$, $D = \{$Хотя бы одна работа оценена на отлично$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,5. Найти вероятность события $\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B + A \Delta B$.

Вариант 19

1. Судно имеет две турбины. Вероятность выхода из строя каждой из турбин равна 0,25. Найти вероятности событий $A = \{$Первая турбина судна имеет неисправность$\}$, $B = \{$Хотя бы одна турбина судна неисправная$\}$.

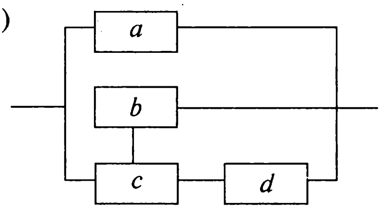
2. Прибор состоит из двух блоков. Вероятность бесперебойной работы каждого из блоков прибора равна 0,65. Найти вероятности событий $A = \{$Хотя бы один из блоков прибора работает$\}$, $B = \{$В приборе работает второй блок$\}$.

3. Подбрасывается правильная шестигранная игральная кость до первого появления тройки на верхней грани. Найти вероятность того, что придется сделать от трех до пяти подбрасываний.

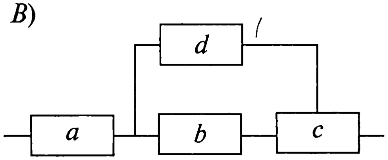
4. Из урны, содержащей шесть красных шаров и три синих шара, наудачу извлекаются последовательно два шара. Найти вероятность того, что извлечены шары разных цветов.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин — дальтоники. На обследование прибыло одинаковое число мужчин и женщин. Наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

7. Статистика, собранная среди студентов одного из вузов, обнаружила следующие факты: 60% всех студентов занимаются спортом, 40% участвуют в научной работе на кафедрах и 20% занимаются

спортом и участвуют в научной работе на кафедрах. Корреспондент местной газеты подошел к наудачу выбранному студенту. Найти вероятность события $A=${Студент занимается по крайней мере одним из двух указанных видов деятельности}.

8. Наудачу выбраны три числа. Событие $A_i=${i-ое число четное}, $i=1, 2, 3$. Найти вероятности событий $A=${Первое число четное}, $B=${Только одно число четное}, $C=${Хотя бы одно число четное}, $D=${Не менее одного четного числа}.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,5. Найти вероятность события $\overline{A}+\overline{B}+A\cdot B$.

Вариант 20

1. Прибор состоит из двух блоков. Вероятность отказа каждого из блоков равна 0,75. Найти вероятности событий $A=${Хотя бы один из блоков прибора работает}, $B=${В приборе работает только второй блок}.

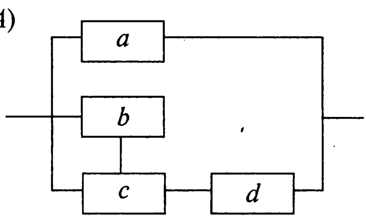
2. Судно имеет две турбины. Вероятность отказа каждой из турбин равна 0,85. Найти вероятности событий $A=${Только первая турбина судна имеет неисправность}, $B=${Хотя бы одна турбина судна имеет неисправность}.

3. Подбрасываются три правильные шестигранные игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших на верхней грани очков не превзойдет пяти.

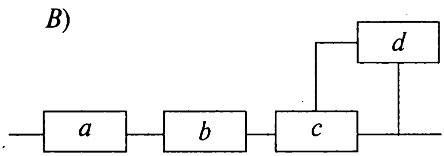
4. Из урны, содержащей 3 красных и 3 белых шара, наудачу и последовательно извлекаются два шара. Найти вероятность того, что шары разного цвета.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. На шахматную доску наудачу ставятся две ладьи. Вычислить $P(B|A)$, если $A=${Ладьи попали на клетки разного цвета}, $B=${Ладьи побьют друг друга}.

7. Статистика, собранная среди студентов одного из ВУЗов, обнаружила следующие факты: 60% всех студентов занимаются спортом, 40% участвуют в научной работе на кафедрах и 20% занимаются спортом и участвуют в научной работе на кафедрах. Корреспондент местной газеты подошел к наудачу выбранному студенту. Найти вероятность события $A = \{$Студент занимается одним только спортом$\}$.

8. Три студента сдали экзамен по теории вероятностей. Вероятности событий $A_i = \{i$-ый студент сдал экзамен$\}$, $i = 1, 2, 3$, равны 0,6. Найти вероятности событий $A = \{$Все студенты сдали экзамен$\}$, $B = \{$Только один студент сдал экзамен$\}$, $C = \{$Хотя бы один студент сдал экзамен$\}$, $D = \{$Ни один студент не сдал экзамен$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,5. Найти вероятности событий $A + B$, $A \cdot \overline{B} + A \cdot B$.

Вариант 21

1. Судно имеет две турбины. Вероятность отказа каждой из турбин равна 0,85. Найти вероятности событий $A = \{$Первая турбина судна имеет неисправность$\}$, $B = \{$Только одна турбина судна имеет неисправность$\}$.

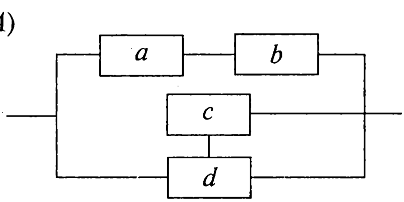
2. Из урны, содержащей по три белых и черных шара, наудачу и последовательно извлекаются два шара. Найти вероятности событий $A = \{$Хотя бы один извлеченный шар белый$\}$, $B = \{$Извлечены черные шары$\}$.

3. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается три раза. Найти вероятность того, что все три раза появятся разные грани.

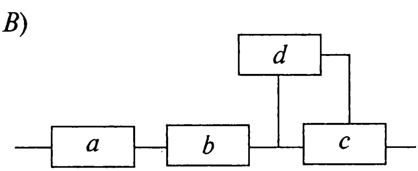
4. Правильная монета подбрасывается до появления набора (Решка, Орел). Найти вероятность того, что сделано пять подбрасываний.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Из группы, состоящей из четырех юношей возраста 17, 18, 19 и 20 лет и четырех девушек тех же лет, наудачу выбирают двух человек. Какова вероятность того, что оба окажутся юношами, если известно, что один из выбранных юноша?

7. Статистика, собранная среди студентов одного из вузов, обнаружила следующие факты: 60% всех студентов занимаются спортом, 40% участвуют в научной работе на кафедрах и 20% занимаются спортом и участвуют в научной работе на кафедрах. Корреспондент местной газеты подошел к наудачу выбранному студенту. Найти вероятность события $A = \{$Студент занимается только одним видом деятельности$\}$.

8. Мишень состоит из трех кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_i, $i = 1, 2, 3$. Вероятности событий $A_i = \{$Попадание в круг радиуса $r_i\}$, $i = 1, 2, 3$ соответственно равны 0,3; 0,6; 0,9. Найти вероятности событий $A = \{$Попадание в малый круг$\}$, $B = \{$Попадание хотя бы в один круг$\}$, $C = \{$Попадание в больший круг$\}$, $D = \{$Ни одного попадания$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,5. Найти вероятности событий $A \Delta B + A \cdot B$, $A + B$.

Вариант 22

1. Производится последовательно два независимых выстрела в цель. Найти вероятности событий $A = \{$Попадание в цель оба раза$\}$, $B = \{$Попадание в цель только один раз$\}$, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8.

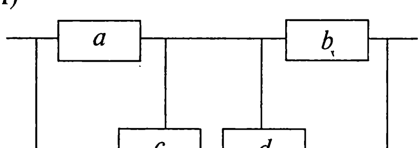
2. Бросаются три правильные шестигранные игральные кости. Найти вероятности событий $A = \{$На верхней грани ровно двух костей выпала единица$\}$, $B = \{$На верхних гранях выпала не менее одной единицы$\}$.

3. В кармане лежат три монеты разных достоинств. Сначала наудачу вынимается одна монета, фиксируется и возвращается в карман. А затем наудачу вынимается вторая монета. Найти вероятность того, что вынуты монеты разных достоинств.

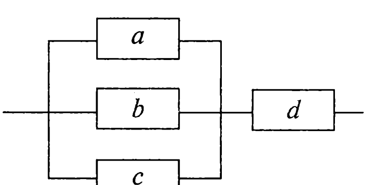
4. На колышек набрасываются кольца до двух попаданий подряд. Вероятность попадания на колышек при одном броске равна 0,45. Найти вероятность того, что сделано шесть бросков.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

$A)$



$B)$



6. Из группы, состоящей из четырех юношей возраста 17, 18, 19 и 20 лет и четырех девушек тех же лет, наудачу выбирают двух человек. Какова вероятность того, что оба окажутся юношами, если известно, что один из них юноша, которому не более 18 лет?

7. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на три из четырех поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет?

8. Наудачу последовательно выбраны три числа. Событие $A_i = \{i$-ое число оканчивается нулем$\}$, $i = 1, 2, 3$. Найти вероятности событий $A = \{$Одно число оканчивается нулем$\}$, $B = \{$Хотя бы два числа оканчиваются нулем$\}$, $C = \{$Второе число оканчивается нулем$\}$, $D = \{$Только два числа оканчиваются нулем$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,4. Найти вероятности событий $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A} + (A - B)$.

Вариант 23

1. Правильная монета подбрасывается шесть раз. Найти вероятности событий $A = \{$Ровно один раз выпал герб$\}$, $B = \{$Хотя бы один раз выпал герб$\}$.

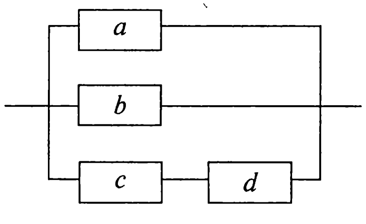
2. Из 10 супружеских пар наугад и последовательно выбирается пять человек. Найти вероятности событий $A = \{$Выбраны только мужчины$\}$, $B = \{$Первые двое выбранных мужчины$\}$.

3. Ученик отвечает на четыре вопроса словами «Да», «Нет» или «Не знаю», причем ответы равновероятны. Найти вероятность того, что ученик на два вопроса даст положительный ответ.

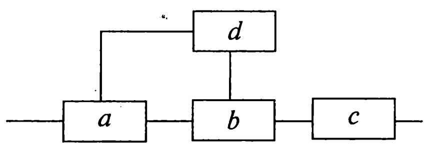
4. Студент сдает экзамены по трем предметам, на которых он может получить с равной вероятностью оценки «3», «4» и «5». Найти вероятность того, что студент сдаст все экзамены на одну оценку.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

$A)$



$B)$



6. Студент держит экзамен, состоящий в установлении истинности или ложности пяти утверждений. Какова вероятность правильного ответа на все вопросы, если студент знает, что преподаватель никогда не дает подряд трех вопросов, требующих одинакового ответа.

7. Студенты выполняют контрольную работу в классе контролирующих машин. Работа состоит из трех задач. Для получения положительной оценки достаточно решить две. Для каждой задачи зашифровано пять различных ответов, из которых только один правильный. Студент Иванов плохо знает материал и поэтому выбирает ответы для каждой задачи наудачу. Какова вероятность того, что он получит положительную оценку?

8. Мишень состоит из трех кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_i , $i = 1, 2, 3$. Вероятности событий A_i = {Попадание в круг радиуса r_i}, $i = 1, 2, 3$, соответственно равны 0,4; 0,5; 0,6. Найти вероятности событий A = {Непопадание в малый круг}, B = {Попадание хотя бы в один круг}, C = {Попадание в малый круг}, D = {Ни одного попадания}.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,4. Найти вероятности событий $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A} + \overline{B}$.

Вариант 24

1. Из 10 супружеских пар наугад и последовательно выбираются для игры четыре человека. Найти вероятности событий A = {Среди выбранных мужчин и женщин поровну}, B = {Женщин выбрано больше, чем мужчин}.

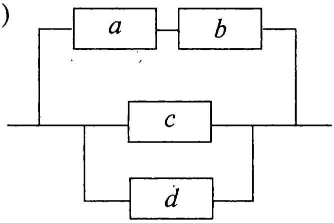
2. Завод выпускает доброкачественные приборы с вероятностью 0,95. Найти вероятности событий A = {Только один из трех проверяемых приборов доброкачественный}, B = {Первый из трех проверяемых приборов доброкачественный}.

3. Имеется две урны. В первой урне находятся шары с номерами «1», «2», «3» и «4». Во второй урне — шары с номерами «3» и «4». Из каждой урны вынимается по одному шару. Найти вероятность того, что сумма выпавших номеров будет нечетной.

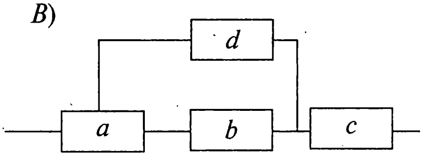
4. Двое поочередно стреляют в мишень до первого попадания. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле первым стрелком равна 0,7, вторым — 0,8. Найти вероятность выигрыша для каждого из стрелков.

5. Условие смотрите в задаче 5 варианта 1.

A)



B)



6. Студент держит экзамен, состоящий в установлении истинности или ложности пяти утверждений. Какова вероятность правильного ответа на все вопросы, если студент знает, что преподаватель всегда дает больше истинных утверждений, чем ложных.

7. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знает английский язык, 40 — французский и 35 — немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий — 8, французский и немецкий — 10. Все три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. Найти вероятность события $A = \{$Вышедший знает английский язык$\}$.

8. В очереди три человека. Вероятности событий $A_i = \{$В очереди i-ым стоит мужчина$\}$, $i = 1, 2, 3$ равны 0,6. Найти вероятности событий $A = \{$В очереди только один мужчина$\}$, $B = \{$В очереди по крайней мере один мужчина$\}$, $C = \{$В очереди нет ни одного мужчины$\}$, $D = \{$В очереди только мужчины$\}$.

9. Вероятность события A равна 0,7, вероятность события B — 0,6, вероятность их совместного наступления равна 0,5. Найти вероятности событий $\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$, $A + B$.

§ 1.6. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Набор случайных событий $H_1, \ldots, H_n$ называют *полной группой событий*, если:

1) $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$;
2) $H_i H_j = \varnothing$ $(i \neq j)$.

Ф о р м у л а п о л н о й в е р о я т н о с т и. Если $H_1, \ldots, H_n$ — полная группа событий и $P(H_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, то для любого случайного события $A \in \mathfrak{F}$ имеет место равенство

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A \mid H_i).$$

Формула полной вероятности справедлива и для счетного набора событий, образующих полную группу.

Ф о р м у л ы Б а й е с а. Если $H_1, \ldots, H_n$ — полная группа событий и $P(H_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, то для любого случайного события $B \in \mathfrak{Z}$ такого, что $P(B) > 0$, выполнены равенства

$$P(H_i \mid B) = \frac{P(H_i)\, P(B \mid H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)\, P(B \mid H_k)}.$$

Общая схема применения формул Байеса при решении практических задач следующая. Пусть событие B может происходить в различных условиях, о характере которых можно сделать n гипотез $H_1, \ldots, H_n$. Пусть известны также вероятности этих гипотез $P(H_1), \ldots, P(H_n)$ (априорные вероятности), и условные вероятности $P(B \mid H_1), \ldots, P(B \mid H_n)$. Предположим, что произведен опыт, в результате которого наступило событие B. Это должно вызвать переоценку вероятностей гипотез $H_1, \ldots, H_n$. Формулы Байеса позволяют вычислить условные вероятности $P(H_1 \mid B), \ldots, P(H_n \mid B)$, называемые апостериорными вероятностями.

Задача 1. Имеется три ящика с деталями, причем отношение числа стандартных деталей к числу нестандартных равно 1, 2, 2 для 1-го, 2-го, 3-го ящиков соответственно. Наудачу выбирается ящик и из него деталь. Найти вероятность того, что а) выбрана стандартная деталь; б) деталь была взята из первого ящика, если выбранная деталь оказалась стандартной.

Решение. а) Требуется вычислить вероятность события A, состоящего в том, что из ящика извлечена стандартная деталь. Но в эксперименте вначале наугад выбирается ящик. Поэтому возможны гипотезы H_1, H_2, H_3, означающие соответственно, что наудачу выбран первый, второй, третий ящик. Данные гипотезы равновероятны, т. е. $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$. Далее, пусть x, y, z — число деталей в первом, во втором и третьем ящиках соответственно. Тогда $\frac{x}{2}$, $\frac{2y}{3}$, $\frac{2z}{3}$ — соответствующие в них числа стандартных деталей. При условии, что будет выбран первый ящик, деталь наудачу будет извлекаться из x деталей, среди которых $\frac{x}{2}$ стандартных. Поэтому

$$P(A|H_1)=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Аналогично найдем

$$P(A|H_2)=\frac{2y}{3y}=\frac{2}{3},\ P(A|H_3)=\frac{2z}{3z}=\frac{2}{3}.$$

По формуле полной вероятности находим вероятность события A, которая равна

$$P(A)=P(H_1)\,P(A|H_1)+P(H_2)\,P(A|H_2)+P(H_3)\,P(A|H_3)=\frac{11}{18}.$$

б) Из условия задачи известно, что выбранная деталь оказалась стандартной, т. е. событие A уже произошло. После получения дополнительной информации нам надо определить, как изменилась вероятность гипотез. Требуется вычислить вероятность гипотезы H_1 при условии, что событие A произошло. По формуле Байеса

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)\,P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{3}{11},$$

т. е. вероятность того, что деталь извлечена из первого ящика, после опыта уменьшилась и стала равна $\frac{3}{11}$.

Задача 2. Студент пришел на экзамен, зная 20 билетов из предложенных 30 билетов. Найти вероятность того, что он знает вынутый наудачу билет, если берет билет третьим.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что студент знает вынутый им билет. Но в эксперименте он вынимает билет третьим, следовательно, возможны гипотезы $H_1=\{$До студента вынуты два изученных им билета$\}$, $H_2=\{$До студента вынуты два не изученных им билета$\}$, $H_3=\{$До студента вынуты один изученный им билет и один не изученный$\}$. Вероятности гипотез равны

$$P(H_1)=\frac{C_{20}^2}{C_{30}^2}=\frac{38}{87},\ P(H_2)=\frac{C_{10}^2}{C_{30}^2}=\frac{9}{87},\ P(H_3)=\frac{C_{20}^1C_{10}^1}{C_{30}^2}=\frac{40}{87}.$$

Контроль: $\frac{38}{87}+\frac{9}{87}+\frac{40}{87}=1$. При условии, что произойдет первая гипотеза, студент будет выбирать билет из оставшихся 28, среди которых 18 им изученных. Поэтому $P(A|H_1)=\frac{18}{28}$. Аналогично найдем

$$P(A|H_2)=\frac{20}{28},\ P(A|H_3)=\frac{19}{28}.$$

По формуле полной вероятности находим вероятность события A, которая равна

$$P(A)=P(H_1)\,P(A|H_1)+P(H_2)\,P(A|H_2)+P(H_3)\,P(A|H_3)\approx 0{,}667.$$

Задача 3. На фабрике машины *а*, *в*, *с* производят соответственно 25, 30, 45 процентов всех изделий. В их продукции брак составляет 1, 2, 3 процента соответственно. Найти вероятность того, что а) случайно выбранное изделие стандартно; б) изделие произведено машиной *b*, если случайно выбранное изделие оказалось стандартным.

Решение. а) Требуется вычислить вероятность события A, состоящего в том, что из изделий, произведенных машинами *a*, *b*, *c*, выбрано стандартное изделие. Но среди всех изделий 25% произведено машиной *a*, 30% — машиной *b*, 45% — машиной *c*. Поэтому возможны гипотезы H_1, H_2, H_3, означающие соответственно, что изделие произведено машиной *a*, *b*, *c*. Вероятности гипотез равны $P(H_1)=0{,}25$, $P(H_2)=0{,}3$ и $P(H_3)=0{,}45$. При условии, что изделие выбирается наудачу из изделий, произведенных машиной *a*, имеем $P(A|H_1)=\frac{99}{100}$, так как брак в продукции данной машины составляет 1%. Аналогично найдем $P(A|H_2)=\frac{98}{100}$, $P(A|H_3)=\frac{97}{100}$. По формуле полной вероятности находим вероятность события A, которая равна $P(A)=0{,}978$.

б) Из условия задачи известно, что выбранное изделие оказалось стандартным, т. е. событие A уже произошло. После получения дополнительной информации нам надо определить, как изменилась вероятность гипотез. Требуется вычислить вероятность гипотезы H_2 при условии, что событие A произошло.

По формуле Байеса

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)\,P(A\,|\,H_2)}{P(A)} \approx 0{,}3006.$$

т. е. вероятность того, что деталь произведена машиной b, после опыта увеличилась. Заметим, что после информации о стандартности извлеченного изделия увеличится также вероятность того, что изделие произведено машиной a, так как в ее продукции меньше брака: 0,253 вместо 0,25. А вероятность того, что изделие произведено машиной c, уменьшится: 0,446 вместо 0,45.

Задача 4. В сосуд, содержащий 4 шара, опущен один белый шар. Все предположения о первоначальном числе белых шаров в сосуде равновозможные. Найти вероятность того, что: а) после перемешивания будет вытащен черный шар; б) в сосуде было 3 белых шара, если был вытащен черный шар.

Решение. а) Пусть событие A, состоит в том, что из сосуда извлечен черный шар. Но в эксперименте неизвестно количество белых шаров в сосуде. Возможны гипотезы H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, означающие соответственно, что первоначально в сосуде было 0, 1, 2, 3, 4 белых шаров. По условию задачи все предположения о первоначальном числе белых шаров в сосуде равновозможные, т. е. $P(H_i) = 0{,}5$, $i = 0, \ldots, 4$. До извлечения наудачу шара в сосуд был опущен один белый шар. При условии, что в сосуде все 4 шара черные и в него опущен один белый шар, имеем $P(A\,|\,H_0) = \dfrac{4}{5}$. Аналогично найдем

$$P(A\,|\,H_1) = \frac{3}{5},\ P(A\,|\,H_2) = \frac{2}{5},\ P(A\,|\,H_3) = \frac{1}{5},\ P(A\,|\,H_4) = 0.$$

Тогда вероятность события A по формуле полной вероятности равна $P(A) = 0{,}4$.

б) Из условия задачи известно, что извлеченный шар оказался черным, т. е. событие A уже произошло. Требуется вычислить вероятность гипотезы H_3 при условии, что событие A произошло. По формуле Байеса

$$P(H_3|A) = \frac{1}{10}.$$

Задача 5. В коробке первоначально находилось 7 цветных и 3 простых карандаша. Два карандаша были потеряны, и цвета их неизвестны. Из коробки наугад извлечены два карандаша. Найти вероятность того, что извлечены два цветных карандаша.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что из коробки извлечены два карандаша. Но до этого два карандаша из коробки были потеряны, следовательно, возможны гипотезы $H_1 = \{$Потеряны два цветных карандаша$\}$, $H_2 = \{$Потеряны два простых карандаша$\}$, $H_3 = \{$Потеряны один простой и один цветной карандаши$\}$. Вероятности гипотез равны

$$P(H_1) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15},$$

$$P(H_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15},$$

$$P(H_3) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{15}.$$

При условии, что произойдет первая гипотеза, наугад будут извлечены 2 карандаша из оставшихся 8, среди которых 5 цветных. Поэтому $P(A|H_1) = \frac{10}{28}$. Аналогично найдем $P(A|H_2) = \frac{21}{28}$, $P(A|H_3) = \frac{15}{28}$. Тогда вероятность события A по формуле полной вероятности равна $P(A) = 0{,}467$.

Задача 6. Слово ДИСКЕТА составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Три карточки слова потеряны. Из оставшихся карточек наугад извлекается одна карточка. Найти вероятность того, что извлечена согласная буква.

Решение. В слове ДИСКЕТА 7 букв: 4 согласных и 3 гласных. Пусть событие A состоит в том, что извлечена согласная буква. Но до этого три карточки слова были потеряны, следовательно, возможны гипотезы $H_1 = \{$Потеряны три согласные буквы$\}$, $H_2 = \{$Потеряны две согласные и одна гласная буквы$\}$, $H_3 = \{$Потеряны одна согласная и две гласные буквы$\}$, $H_4 = \{$Потеряны три гласные буквы$\}$.

Вероятности гипотез равны

$$P(H_1)=\frac{C_4^3C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35},\ P(H_2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35},$$

$$P(H_3)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35},\ P(H_4)=\frac{C_4^0C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}.$$

При условии, что произойдет первая гипотеза, останутся одна согласная и три гласные буквы. Поэтому $P(A|H_1)=\frac{1}{4}$. Аналогично найдем $P(A|H_2)=\frac{2}{4}$, $P(A|H_3)=\frac{3}{4}$ и $P(A|H_4)=1$. Тогда вероятность события A по формуле полной вероятности равна $P(A)=0{,}571$. Заметим, что вероятность того, что в данном эксперименте будет извлечена гласная буква, равна $P(\overline{A})=1-0{,}571=0{,}429$.

Индивидуальные задания

Вариант *n*

$$(p_1;\ p_2;\ p_3)=(n;\ n+1;\ 25-n),\ \alpha=30-n,\ \beta=100,\ \gamma=n,$$

$$k=n+2,\ (q_1;\ q_2;\ q_3)=(30;\ n+5;\ 65-n),\ q=\frac{n+4}{100}.$$

1. Имеется три ящика с деталями, причем отношение числа стандартных деталей к числу нестандартных равно p_1, p_2, p_3 для 1-го, 2-го, 3-го ящиков соответственно. Наудачу выбирается ящик и из него деталь. Найти вероятность того, что: а) выбрана стандартная деталь; б) деталь была взята из третьего ящика, если выбранная деталь оказалась стандартной.

2. В телевизионном ателье имеется α кинескопов. Вероятности того, что кинескоп не выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны $0{,}01\cdot m$, $m=1, ..., \alpha$. Найти вероятность того, что: а) наудачу выбранный кинескоп выдержит гарантийный срок службы; б) был выбран первый кинескоп, если наудачу выбранный кинескоп выдержал гарантийный срок службы.

3. Студент пришел на экзамен, зная α билетов из предложенных β билетов. Найти вероятность того, что он знает вынутый наудачу билет, если берет билет вторым.

4. Студент пришел на экзамен, зная α билетов из предложенных β билетов. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него наименьшей: когда он берет билет k-ым или $(k+1)$-ым?

5. На фабрике машины a, b, c производят соответственно q_1, q_2, q_3 процентов всех изделий. В их продукции брак составляет $0{,}1q_1$, $0{,}2q_2$, $0{,}3q_3$ процента соответственно. Найти вероятность того, что: а) случайно выбранное изделие дефектно; б) изделие произведено машиной c, если случайно выбранное изделие оказалось дефектным.

6. Три автомата изготавливают детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов относятся как $2:3:\gamma$. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом отличного качества, равна 0,9; для второго и третьего автоматов эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,7. Найти вероятности того, что: а) наудачу взятая с конвейера деталь не отличного качества; б) деталь была изготовлена вторым автоматом, если наудачу взятая с конвейера деталь не отличного качества.

7. В каждой из двух урн по α белых и γ черных шаров. Из первой урны во вторую переложили наудачу один шар, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что: а) вынутый из второй урны шар окажется черным; б) переложен белый шар при условии, что из второй урны вынут белый шар.

8. В каждой из двух урн по α белых и γ черных шаров. Из первой урны во вторую переложили наудачу два шара, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что: а) вынутый из второй урны шар окажется белым; б) переложены два белых шара при условии, что из второй урны вынут белый шар.

9. В сосуд, содержащий α шаров, опущен один белый шар. Все предположения о первоначальном числе белых шаров в сосуде равновозможные. Найти вероятность того, что: а) после перемешивания будет вытащен белый шар; б) в сосуде было $(\alpha-2)$ белых шара, если был вытащен белый шар.

10. В коробке первоначально находилось α цветных и γ простых карандашей. Один карандаш был потерян, и цвет его неизвестен. Из коробки без возвращения извлечены два карандаша. Найти вероятность того, что: а) извлечены два цветных карандаша; б) был потерян простой карандаш, если извлечены два простых карандаша.

11. В коробке первоначально находилось α цветных и γ простых карандашей. Два карандаша были потеряны, и цвета их неизвестны. Из коробки наугад извлечены два карандаша. Найти вероятность того, что: а) извлечены два цветных карандаша; б) были потеряны один цветной и один простой карандаши, если извлечены два цветных карандаша.

12. Слово составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Две карточки слова потеряны. Из оставшихся карточек наугад извлекается одна карточка. Найти вероятность того, что: а) извлечена гласная буква; б) были потеряны две согласные буквы, если извлечена гласная буква.

Слова по вариантам:

1) АКСИОМА
2) АКСИОМАТИКА
3) ВАРИАНТ
4) ВЕЛИЧИНА
5) ВОЗВРАЩЕНИЕ
6) ВЫБОРКА
7) ГИПОТЕЗА
8) ДИСПЕРСИЯ
9) ДИФФЕРЕНЦИАЛ
10) ИСТИНА
11) ИНТЕГРАЛ
12) КОМБИНАТОРИКА
13) МАТЕМАТИКА
14) ПЕРЕСТАНОВКА
15) ПОВТОРЕНИЕ
16) ПРОИЗВОДНАЯ
17) СОБЫТИЕ
18) СОЧЕТАНИЕ
19) СТАТИСТИКА
20) РАЗМЕЩЕНИЕ
21) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
22) ТЕОРЕМА
23) УТВЕРЖДЕНИЕ
24) ФОРМУЛА

§ 1.7. Схема Бернулли. Формула Бернулли

Стохастический эксперимент, состоящий из n испытаний, называется *схемой Бернулли*, если удовлетворяет условиям:

1) проводимые испытания независимы; 2) каждое испытание имеет два исхода (событие A произошло, событие A не произошло); 3) вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна p.

Формула Бернулли. Вероятность того, что событие A наступит ровно m раз в n испытаниях, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Вероятность наступления события A хотя бы один раз при проведении n испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна

$$P_n(m \geqslant 1) = 1 - (1-p)^n.$$

Вероятность того, что событие A при проведении n испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$$

Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события A при проведении n испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле

$$(n+1)p - 1 \leqslant m_0 \leqslant (n+1)p.$$

Задача 1. Известно, что 5% радиоламп, изготовляемых заводом, являются нестандартными. Проверено семь радиоламп. Какова вероятность того, что нестандартными окажутся две радиолампы; хотя бы две радиолампы?

Решение. Эксперимент состоит в том, что проверяются 7 радиоламп, т. е. проводится 7 повторных независимых испытаний. Каждое испытание имеет только два исхода: радиолампа стандартная, радиолампа нестандартная. Вероятность оказаться радиолампе нестандартной в каждом испытании постоянна и равна 0,05. Следовательно, эксперимент представляет собой схему Бернулли. Пусть событие $(m = 2)$ состоит в том, что две радиолампы оказались нестандартными. Тогда по формуле Бернулли

$$P_7(m=2) = C_7^2 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^5 \approx 0{,}041.$$

Пусть событие $(m \geqslant 2)$ состоит в том, что хотя бы две радиолампы оказались нестандартными. Вначале вычислим

$$P_7(m < 2) = P_7(m=0) + P_7(m=1) =$$
$$= C_7^0 \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^7 + C_7^1 \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^6 \approx 0{,}956,$$

тогда

$$P_7(m \geqslant 2) = 1 - P_7(m < 2) = 0{,}044.$$

Задача 2. Вероятность поражения движущейся цели при каждом выстреле равна 0,4. Цель может быть уничтожена при попадании в нее не менее двух раз. Найти вероятность того, что цель уничтожена, если произведено пять независимых выстрелов в цель.

Решение. Эксперимент состоит в том, что производится 5 независимых выстрелов, т. е. 5 независимых испытаний. Каждое испытание имеет только два исхода: попадание в цель, промах. Вероятность попадания в цель в каждом испытании постоянна и равна 0,4. Следовательно, эксперимент представляет собой схему Бернулли. Событие $A = \{$Цель уничтожена$\}$ происходит тогда и только тогда, когда произойдет событие $(m \geqslant 2) = \{$попадание в цель не менее двух раз$\}$. По формуле Бернулли найдем

$$P_5(m < 2) = P_5(m = 0) + P_5(m = 1) =$$
$$= C_5^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 + C_5^1 \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 \approx 0{,}337,$$

тогда

$$P(A) = P_5(m \geqslant 2) = 1 - P_5(m < 2) = 0{,}663.$$

Задача 3. Контрольная работа состоит из шести задач. Вероятность выполнения студентом каждой задачи равна 0,7. Найдите наиболее вероятное число решенных студентом задач.

Решение. Проводится 6 повторных независимых испытаний с двумя исходами: задача решена, задача не решена. Вероятность решения задачи в каждом испытании постоянна и равна 0,7. Следовательно, эксперимент представляет собой схему Бернулли. Пусть m_0 наивероятнейшее число решенных студентом задач. По формуле $(n+1)p - 1 \leqslant m_0 \leqslant (n+1)p$ находим, что $3{,}9 \leqslant m_0 \leqslant 4{,}9$. Так как число решенных задач может быть только целым, то наиболее вероятное число решенных студентом задач равно 4.

Задача 4. Проводится 3 независимых испытания, в каждом из которых вероятность наступления события A, равна 0,2. Какова вероятность того, что событие A: ни разу не наступит; не наступит хотя бы один раз.

Решение. Проводится 3 независимых испытания. Каждое испытание имеет только два исхода: событие A либо наступило, либо не наступило. Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна 0,2. Следовательно, эксперимент представляет собой схему Бернулли. Событие $(m = 0)$ состоит в том, что событие A не наступит ни разу. Тогда по формуле Бернулли

$$P_3(m = 0) = C_3^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^3 \approx 0{,}512.$$

Событие $(m < 3)$ состоит в том, что событие A не наступит хотя бы один раз. Найдем по формуле Бернулли

$$P_3(m = 3) = C_3^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^0 \approx 0{,}008,$$

тогда

$$P_3(m < 3) = 1 - P_3(m = 3) = 0{,}992.$$

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Контрольная работа состоит из шести задач. Вероятность выполнения студентом каждой задачи равна 0,4. Какова вероятность того, что студент не выполнил: а) одну задачу? б) хотя бы две задачи? в) одну или шесть задач? г) ни одной задачи?

2. На отрезок AB длины y наудачу брошено пять точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки A на расстоянии, меньшем x, а три — на расстоянии, большем x. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

3. На самолете имеются шесть одинаковых двигателей. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна 0,8. Найдите наиболее вероятное число двигателей, которые не откажут в данном полете.

4. Вероятность того, что любой читатель придет в читальный зал в течение дня, равна 0,03. В библиотеке зарегистрировано 200 читателей. Найдите наиболее вероятное число читателей, пришедших в библиотеку 8 марта.

5. Вероятность появления события A хотя бы один раз в двух независимых испытаниях равна 0,96. Какова постоянная вероятность появления этого события при одном испытании?

6. Испытываются 4 независимо работающих одинаковых компьютера. Вероятность выхода из строя каждого компьютера равна 0,64. Какова вероятность того, что при испытании выйдут из строя: а) 2 компьютера? б) не более чем 2 компьютера?

7. Правильная игральная кость подброшена 5 раз. Найти вероятность того, что в большинстве случаев выпадет очко меньшее 5.

Вариант 2

1. Какова вероятность выпадения двойки при семи подбрасываниях правильной игральной кости: а) два раза? б) от двух до четырех раз? в) хотя бы два раза? г) пять раз?

2. Отрезок разделен на четыре равные части. На отрезок наудачу брошено восемь точек. Определить вероятность того, что ровно три точки попадут на одну определенную часть отрезка. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

3. Проверяемая книга насчитывает 80 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,03.

Найдите наиболее вероятное число страниц без опечаток в данной книге.

4. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,3. Произведено 10 независимых выстрелов. Какова вероятность того, что окажется: а) 5 промахов? б) от 1 до 9 промаха?

5. Из большой партии изделий, содержащей 3% брака, наудачу отбирают 4 изделия. Найдите наиболее вероятное число бракованных изделий и вычислите соответствующую вероятность.

6. Известно, что все номера автомашин трехзначные, неповторяющиеся и равновозможные. Наудачу выбрано 8 номеров. Определить вероятность того, что: а) у двух автомашин номера не делятся на 5; б) более чем у половины автомашин номера делятся на 5.

7. Вероятность появления события A в каждом из 5 независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз.

Вариант 3

1. Какова вероятность появления решки при пяти подбрасываниях правильной монеты: а) один раз? б) хотя бы один раз? в) хотя бы три раза? г) три раза?

2. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит цифры пять. Известно, что все номера четырехзначные, неповторяющиеся и равновозможные.

3. Испытываются семь независимо работающих одинаковых прибора. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Найдите наиболее вероятное число отказавших при испытании приборов.

4. Самолет имеет 4 двигателя. Вероятность безотказной работы каждого двигателя в полете равна 0,8. Найдите наиболее вероятное число отказавших в полете двигателей и вычислите соответствующую вероятность.

5. Вероятность появления события A в одном испытании равна 0,85. Какова вероятность появления этого события при 5 независимых испытаниях: а) 2 раза; б) от 2 до 4 раз включительно?

6. В круг радиуса R вписан квадрат. В круг случайным образом бросается 6 точек. Найти вероятность того, что попало в квадрат: а) 5 точек; б) более половины точек.

7. Вероятность появления события A в каждом из 7 независимых испытаний равна 0,65. Найти вероятность того, что событие A появилось четное число раз.

Вариант 4

1. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Какова вероятность набросить кольцо на колышек: а) один раз при трех бросках? б) хотя один раз при трех бросках? в) пять раз при шести бросках? г) два или три раза при четырех бросках?

2. Событие B наступает в том случае, если событие A появится не менее трех раз. Определить вероятность появления события B, если вероятность появления события A при одном опыте равна 0,3 и произведено пять независимых опытов.

3. Испытываются 40 деталей, а вероятность того, что изделие выдержит испытание, равна 0,9. Найдите наиболее вероятное число изделий, которые не выдержат испытаний.

4. Для данного футболиста вероятность забить гол при каждой попытке равна 0,2. Какова вероятность того, что при 5 попытках он забьет: а) четыре гола; б) не более 2 голов.

5. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,7. Произведено 3 независимых выстрела в цель. Найти вероятность того, что окажется: а) 2 промаха; б) более 1 промаха.

6. На отрезок AB длины a наудачу брошено 10 точек. Найти вероятность того, что: а) 2 точки; б) более 2 точек будут находиться от точки A на расстоянии, меньшем x. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

7. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 6 : 4. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Произведено 7 извлечений. Найдите наиболее вероятное число извлечения из урны белого шара и вычислите соответствующую вероятность.

Вариант 5

1. На самолете имеются шесть одинаковых двигателей. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна 0,8. Какова вероятность того, что в полете возникнут неполадки: а) в одном двигателе? б) хотя бы в одном двигателе? в) хотя бы в двух двигателях? г) в пяти двигателях?

2. Две электрические лампочки включены в цепь последовательно. Определить вероятность того, что при повышении напряжения в сети выше номинального произойдет разрыв цепи, если вероятность того, что лампочка перегорит, для обеих лампочек одинакова и в этих условиях равна 0,4.

3. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Проверено 10 рабочих дней. Найдите наиболее вероятное число рабочих дней, в течение которых не было перерасхода энергии.

4. Проверяемая брошюра насчитывает 5 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,45. Какова вероятность того, что с опечатками окажется: а) хотя бы одна страница? б) 2 страницы?

5. Из ящика, в котором 8 белых и 2 черных шара, 6 раз извлекается по одному шару, причем после каждого извлечения шар возвращается. Определить вероятность извлечь хотя бы один раз черный шар.

6. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,25. Произведено 8 выстрелов. Найти вероятность попадания в десятку: а) 2 раза; б) от 3 до 6 раз включительно.

7. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность перегрузки прибора в серии из 7 независимых опытов: а) 5 раз; б) более 3 раз.

Вариант 6

1. Испытываются семь независимо работающих одинаковых прибора. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Какова вероятность того, что при испытании не откажут: а) два прибора? б) хотя бы два прибора? в) один прибор? г) не более чем один прибор?

2. В библиотеке имеются книги только по технике и математике. Вероятности того, что любой читатель возьмет книгу по технике и по математике, равны соответственно 0,7 и 0,3. Определить вероятность того, что пять читателей подряд возьмут книги или только по технике, или только по математике, если каждый из них берет только одну книгу.

3. Электростанция обслуживает сеть с 70 лампочек, вероятность включения каждой из которых за время t равна 0,1. Найдите наиболее вероятное число лампочек, которые могут включиться за рассматриваемое время t.

4. Испытываются 4 детали, а вероятность того, что деталь выдержит испытание, равна 0,9. Какова вероятность того, что не выдержат испытания: а) 2 детали? б) более 1 детали?

5. За один цикл автомат стерилизует 10 банок. Вероятность для каждой банки оказаться при этом нестерильной равна 0,03. Найди-

те наиболее вероятное число стерильных банок и вычислите соответствующую вероятность.

6. Отрезок разделен на четыре равные части. На отрезок наудачу брошено 2 точки. Определить вероятность того, что обе точки попали на одну из четырех частей отрезка. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

7. Из ящика, в котором 8 белых и 2 черных шара, 8 раз извлекается по одному шару, причем после каждого извлечения шар возвращается. Найти вероятность того, что черный шар при этом извлечен: а) 3 раза; б) 3 или 6 раз.

Вариант 7

1. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какова вероятность того, что расход электроэнергии не превысит суточную норму: а) хотя бы три рабочих дня из проверенных 5? б) три дня из проверенных четырех? в) не менее 2 дней из проверенных трех? г) один или два дня из проверенных шести?

2. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит двух пятерок. Известно, что все номера четырехзначные, неповторяющиеся и равновозможные.

3. Некто приобрел 20 билетов лотереи. Известно, что вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,05. Найдите наиболее вероятное число выигрышных среди приобретенных билетов лотереи.

4. Упаковщик укладывает 9 приборов, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность того, что прибор помечен личным клеймом, равна 0,25. Какова вероятность того, что приборов, проверенных ОТК, окажется: а) хотя бы два? б) 2?

5. Из таблицы случайных чисел наудачу взято 3 числа. Найти вероятность того, что среди них окажется 2 числа, делящихся на 5?

6. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при каждом броске равна 0,8. Найти вероятность попасть в корзину при 6 бросках: а) 2 раза; б) 3 или 5 раз.

7. Событие B наступает в том случае, если событие A появится не менее 3 раз. Определить вероятность появления события B, если вероятность появления события A при одном опыте равна 0,3 и произведено 6 независимых опытов.

Вариант 8

1. Вероятность того, что стрелок попадет в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится шесть независимых выстрелов. Какова вероятность того, что пробоин в мишени окажется: а) шесть? б) хотя бы одна? в) одна? г) более 2?

2. Из таблицы случайных чисел наудачу выписаны 6 двузначных случайных чисел (от 00 до 99). Определить вероятность того, что среди них число 33 встретится три раза.

3. Контрольная работа состоит из пяти вопросов. На каждый вопрос приведено пять ответов, один из которых правильный. Студент отвечает на вопросы наугад. Найдите наиболее вероятное число угаданных правильных ответов.

4. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,4. Сколько нужно произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,8 попасть в десятку хотя бы один раз?

5. Какова вероятность того, что в столбике из 10 наугад отобранных правильных монет число монет, расположенных гербом вверх будет: а) 5; б) от 3 до 5 включительно.

6. Вероятность появления некоторого события в каждом из 6 независимых испытаний равна 0,75. Найдите наиболее вероятное число появления данного события и вычислите соответствующую вероятность.

7. Отдел технического контроля проверяет стандартность 3 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти вероятность того, что либо одна деталь, либо три детали будут нестандартными.

Вариант 9

1. В горном районе создано семь автоматических сейсмических станций. Каждая станция в течение года может выйти из строя с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что в одном рассматриваемом году не выйдут из строя: а) хотя бы одна станция? б) одна или две станции? в) хотя бы две станции? г) две станции?

2. В семье десять детей. Считая вероятности рождения мальчика равным 0,515, определить вероятность того, что в данной семье пять мальчиков.

3. Вероятность того, что стрелок попадет в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится 15 независимых выстрелов. Найдите наиболее вероятное число попаданий в цель.

4. Некто приобрел 7 билетов лотереи. Известно, что вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,25. Какова вероятность того, что среди приобретенных выигрышных билетов окажется: а) хотя бы две? б) три или пять?

5. Вероятность появления положительного результата в каждом из 4 независимых испытаний равна 0,9. Найдите наиболее вероятное число появления положительного результата и вычислите соответствующую вероятность.

6. Вероятность появления успеха в каждом из 6 независимых испытаний равна 0,82. Найти вероятность того, что успех появится а) хотя бы 2 раза; б) более половины раз.

7. В круг радиуса R вписан равносторонний треугольник. В круг случайным образом бросается 5 точек. Найти вероятность того, что в треугольник попало: а) ровно 3 точки; б) от 2 до 4 точек включительно.

Вариант 10

1. Контрольная работа состоит из пяти вопросов. На каждый вопрос приведено пять ответов, один из которых правильный. Студент отвечает на вопросы наугад. Какова вероятность того, что правильных ответов будет: а) три? б) более двух? в) хотя бы один? г) один или три?

2. Отрезок AB разделен точкой C в отношении 2 : 1. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C и две — правее. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

3. При высаживании рассады помидоров только 80% растений приживаются. Посажено 20 кустов помидоров. Найдите наиболее вероятное число прижившихся кустов.

4. Рабочий обслуживает 5 станков. Вероятность остановки станка в течение рабочего дня равна 0,2. Какова вероятность того, что в течение рабочего дня не произойдет остановки: а) хотя бы одного станка? б) 2 или 4 станков?

5. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,35. Некто приобрел 5 билетов данной лотереи. Найдите наиболее вероятное число выигрышных билетов среди приобретенных и вычислите соответствующую вероятность.

6. Из таблицы случайных чисел наудачу выписаны 4 двузначных случайных числа. Определить вероятность того, что среди них число, кратное 5, встретится: а) 2 раза; б) более 1 раза.

7. В новый год в родильном доме 5 детей. Считая вероятности рождения мальчика равным 0,515, определить вероятность того, что в данном родильном доме находится: а) пять мальчиков; б) ни одного мальчика.

Вариант 11

1. Вероятность того, что стрелок попадет в цель при каждом выстреле равна 0,7. Производится два независимых выстрела. Какова вероятность того, что стрелок попадет в цель: а) один раз? б) два раза? в) хотя бы один раз? г) не более, чем один раз?

2. Прибор состоит из шести элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время t равна 0,6. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Найдите число элементов, которые необходимо включить в прибор, чтобы с вероятностью не менее 0,95 прибор работал безотказно.

3. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,03. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Найдите наиболее вероятное число абонентов, позвонивших на коммутатор в течение рассматриваемого часа.

4. Вероятность появления события A в одном опыте равна 0,6. Найдите наиболее вероятное число появления события A в четырех независимых опытах и вычислите соответствующую вероятность.

5. В сейсмоопасной местности создано три автоматических сейсмических станций. Каждая станция в течение года может выйти из строя с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что в одном рассматриваемом году выйдет из строя: а) ровно одна станция? б) все три станции?

6. Аппаратура содержит четыре одинаково надежных независимо работающих элементов, вероятность отказа в течение года для каждого из которых равна 0,5. Найдите вероятность того, что в течение рассматриваемого года выйдет из строя: а) 2 элемента; б) менее 2 элементов.

7. Вероятность появления «успеха» в одном испытаний равна 0,5. Произведено пять независимых испытаний. Найти вероятность того, что «успех» появится в большинстве случаев.

Вариант 12

1. В горном районе создано три автоматических сейсмических станций. Каждая станция в течение года может выйти из строя с

вероятностью 0,2. Какова вероятность того, что в одном рассматриваемом году выйдет из строя: а) хотя бы одна станция? б) одна или две станции? в) хотя бы две станции? г) две станции?

2. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы четыре элемента.

3. Аппаратура содержит 200 одинаково надежных независимо работающих элементов, вероятность отказа в течение года для каждого из которых равна 0,005. Найдите наиболее вероятное число отказавших в течение рассматриваемого года элементов.

4. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,1. Произведено четыре независимых выстрела. Найдите наиболее вероятное число попаданий в цель и вычислите соответствующую вероятность.

5. Вероятность появления события A в каждом из пяти независимых испытаниях равна 0,95. Какова вероятность появления этого события нечетное число раз?

6. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,3. Автономная телефонная станция обслуживает 6 абонентов. Найдите вероятность того, что на коммутатор в течение рассматриваемого часа позвонят: а) более одного абонента; б) более половины абонентов.

7. Тест состоит из 4 вопросов. На каждый вопрос приведено четыре ответа, один из которых правильный. Тестируемый отвечает на вопросы наугад. Какова вероятность того, что правильных ответов будет: а) 2? б) не более 2?

Вариант 13

1. Контрольная работа состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос приведено пять ответов, один из которых правильный. Студент отвечает на вопросы наугад. Какова вероятность того, что правильных ответов будет: а) два? б) менее двух? в) не более двух? г) один или пять?

2. Событие B появится в случае, если событие A наступит не менее четырех раз. Найти вероятность наступления события B, если будет произведено пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,8.

3. Проверяемая книга насчитывает 800 страниц, a вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,0025. Найдите наиболее вероятное число страниц с опечатками в данной книге.

4. Известно, что 2% радиоламп, изготавливаемых заводом, являются нестандартными. Из большой партии (независимо друг от друга) производится случайная выборка 5 радиоламп. Найдите наиболее вероятное число стандартных деталей в выборке и вычислите соответствующую вероятность.

5. Вероятность того, что стрелок попадет в цель при каждом выстреле равна 0,7. Произведено четыре независимых выстрела. Какова вероятность того, что: а) стрелок попадет в цель хотя бы один раз? б) будет равное число попаданий и промахов?

6. При высаживании рассады огурцов только 85% растений приживаются. Посажено 2 куста огурцов. Какова вероятность того, что приживутся: а) оба куста? б) ровно один куст?

7. Правильная монета подброшена 6 раз. Найти вероятность того, что герб появится в большинстве случаев.

Вариант 14

1. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживаются. Посажено два куста помидоров. Какова вероятность того, что приживется а) один куст? б) хотя бы один куст? в) не более одного куста? г) менее одного куста?

2. Контрольная работа состоит из шести задач, причем для успешного выполнения ее необходимо решить любые четыре задачи. Если студент будет решать в течение определенного времени лишь четыре задачи, то вероятность правильного решения любой из них равна 0,8. Если он попробует решить пять задач, то вероятность правильного решения любой из них равна 0,7, а если он возьмется за решение всех шести задач, то эта вероятность снизится до 0,6. Какой тактики должен придерживаться студент, чтобы иметь наибольшие шансы успешно выполнить работу?

3. Испытываются 60 деталей, а вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,05. Найдите наиболее вероятное число деталей, выдержавших испытание.

4. За столом сидят 5 человек. Считая, что вероятность рождения в фиксированный месяц равна $\frac{1}{12}$, найти вероятность того, что из них в январе родились: а) пятеро; б) четное число лиц.

5. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Произведено десять независимых выстрелов. Найдите наиболее вероятное число промахов и вычислите соответствующую вероятность.

6. Проверяемая телеграмма насчитывает 8 слов, а вероятность того, что в слове могут оказаться искажения, равна 0,1. Найдите вероятность того, что число искаженных слов в телеграмме окажется равным: а) 1; б) от 3 до 5 включительно.

7. Событие C в некотором испытании появится, если событие A наступит не менее 3 раз. Вероятность появления события A в каждом из произведенных 7 независимых испытаниях равна 0,5. Найдите вероятность появления события C.

Вариант 15

1. Какова вероятность того, что при трех подбрасываниях правильной монеты герб выпадет: а) хотя бы два раза? б) два раза? в) ни одного раза? г) ни одного раза или все три раза?

2. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение будет принято, если известно, что сообщение содержит 10 знаков и для принятия сообщения в ней не должно быть более двух искаженных знаков.

3. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,1. Произведено 30 независимых выстрелов. Найдите наиболее вероятное число попаданий в цель.

4. Предприятием приобретено 5 одинаково надежных телевизоров, вероятность отказа в течение гарантийного срока для каждого из которых равна 0,02. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока откажут более половины телевизоров?

5. Вероятность прорастания семян данной партии пшеницы 0,8. Для пробы высажено 5 семян. Найдите наиболее вероятное число проросших семян и вычислите соответствующую вероятность.

6. Испытываются 6 автомашин, а вероятность того, что автомашина не выдержит испытание, равна 0,02. Найдите вероятность того, что автомашин, выдержавших испытание, окажется: а) 5; б) не менее 2, но менее 4.

7. 2% утюгов, изготавливаемых заводом, являются бракованными. Из большой партии (независимо друг от друга) производится случайная выборка 4 утюгов. Найдите вероятность того, что в выборке окажется: а) только один неисправный утюг; б) четное число неисправных утюгов.

Вариант 16

1. Какова вероятность выпадения пятерки при четырех подбрасываниях правильной игральной кости: а) два раза? б) хотя два раза? в) ни одного раза? г) четыре раза?

2. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одну партию из двух или две партии из четырех?

3. Упаковщик укладывает 90 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,05. Найдите наиболее вероятное число деталей, помеченных личным клеймом.

4. Для победы в волейбольном состязании команде необходимо выиграть три партии из пяти; команды неравносильны. Определить вероятность выигрыша в каждой партии для первой команды, если для уравнивания шансов она должна дать фору в две партии.

5. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,6. Произведено 4 независимых выстрела. Какова вероятность того, что попаданий в цель будет: а) более 1? б) больше, чем промахов?

6. Некий покупатель приобрел два одинаковых холодильника, вероятность отказа в течение года для каждого из них равна 0,15. Какова вероятность того, что в течение первого года откажет: а) один холодильник? б) хотя бы один холодильник?

7. Вероятность появления некоторого события в каждом из 3 независимых испытаний равна 0,2. Найдите наиболее вероятное число появления этого события и вычислите соответствующую вероятность.

Вариант 17

1. Какова вероятность появления герба: а) хотя бы один раз при двух подбрасываниях правильной монеты? б) два раза при трех подбрасываниях правильной монеты? в) менее двух раз при четырех подбрасываниях правильной монеты? г) не более трех раз при пяти подбрасываниях правильной монеты?

2. Батарея произвела шесть выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,3. Найти вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы двух попаданий.

3. Электростанция обслуживает сеть с 60 лампочек, вероятность включения каждой из которых за время t равна 0,2. Найдите наиболее вероятное число лампочек, которые могут включиться за время t.

4. Партия в 7 изделий содержит один процент брака. Найдите наиболее вероятное число бракованных изделий в партии и вычислите соответствующую вероятность.

5. Известно, что вероятность прорастания семян данной партии тыквы 0,5. Посажено 8 семян. Найдите вероятность того, что прорастет: а) хотя бы одно семя; б) только 2 семени?

6. При передаче сообщения вероятность искажения одного слова равна 0,35. Сообщение содержит 7 слов. Найти вероятность того, что в сообщении искаженных слов окажется: а) больше половины; б) 2.

7. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 3 : 2. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Найдите вероятность того, что белый шар появится во всех шести извлечениях.

Вариант 18

1. Какова вероятность выпадения шестерки: а) хотя бы один раз при двух подбрасываниях правильной игральной кости? б) два раза при трех подбрасываниях? в) менее двух раз при четырех подбрасываниях? г) не более трех раз при пяти подбрасываниях правильной игральной кости?

2. Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает кольца до первого попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется неизрасходованным, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,1.

3. Некто приобрел 10 билетов лотереи. Известно, что вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,1. Найдите наиболее вероятное число выигрышных среди приобретенных билетов лотереи.

4. Испытываются 6 одинаковых термометров. Вероятность того, что показания каждого термометра будут верными, равна 0,95. Какова вероятность того, что испытание выдержат: а) 2 термометра? б) более 2 термометров?

5. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Испытываются 4 прибора. Найдите наиболее вероятное число выдержавших испытание приборов и вычислите соответствующую вероятность.

6. В рюкзаке школьника — 5 книг, причем 2 книги по истории, а 3 по географии. Школьник наугад вынимает одну книгу, фиксирует предмет и возвращает книгу в рюкзак. Какова вероятность того, что при двух попытках: а) оба раза он вытащит книгу по одному предмету? б) вытащит книги по разным предметам?

7. Вероятность появления события A в каждом из 4 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность появления события A хотя бы один раз.

Вариант 19

1. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3 (броски считать независимыми). Какова вероятность попадания: а) хотя бы два раза при трех попытках? б) 2 раза при трех попытках? в) не менее 2 раз при четырех попытках? г) более 2 раз при пяти попытках?

2. Вероятность того, что лампа останется исправной после 1000 часов работы, равна 0,2. Какова вероятность того, что хотя бы одна из трех ламп останется исправной после 1000 часов работы?

3. Прядильщица обслуживает 10 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одного часа равна 0,4. Найдите наиболее вероятное число веретен, на которых произойдет обрыв нити в течение рассматриваемого часа.

4. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при каждом броске равна 0,4. Баскетболист сделал пять бросков. Найдите наиболее вероятное число попаданий в корзину и вычислите соответствующую вероятность.

5. Какова вероятность того, что при 8 подбрасываниях правильной монеты герб выпадет: а) ровно 4 раза? б) от 1 до 7 раз включительно?

6. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,9. Произведено 3 независимых выстрела. Найдите вероятность того, что попаданий в цель окажется: а) только одно; б) не менее одного.

7. Вероятность появления «удачи» в каждом из 6 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что «удача» и «неудача» появятся одинаковое число раз.

Вариант 20

1. На самолете имеются два одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна 0,8. Какова вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки: а) в одном двигателе? б) в двух двигателях? в) хотя бы в одном двигателе? г) не более чем в одном двигателе?

2. Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что у обоих будет равное количество попаданий.

3. Аппаратура содержит 40 одинаково надежных независимо работающих элементов, вероятность отказа в течение года для каждого из которых равна 0,02. Найдите наиболее вероятное число элементов, отказавших в течение рассматриваемого года.

4. Электрогенератор обслуживает сеть с 6 лампочками, вероятность включения каждой из которых за время t равна 0,2. Какова вероятность того, что за рассматриваемое время t включится: а) хотя бы одна лампочка? б) три лампочки?

5. Из ящика, в котором 15 белых и 5 черных шаров, 3 раза извлекается по одному шару, причем после каждого извлечения шар возвращается. Найдите наиболее вероятное число извлечений белого шара и вычислите соответствующую вероятность.

6. Какова вероятность выпадения пятерки при 4 подбрасываниях правильной игральной кости: а) 2 раза? б) менее 3 раз?

7. Вероятность появления некоторого события в каждом из 10 независимых испытаний равна 0,7. Найдите вероятность того, что данное событие появится в большинстве случаев.

Вариант 21

1. В котельной пять одинаковых котлов. Вероятность бесперебойной работы в течение месяца каждого котла равна 0,6. Какова вероятность того, что в течение рассматриваемого месяца откажет: а) два котла? б) хотя бы один котел? в) один или пять котлов? г) не более трех котлов?

2. В круг радиуса R вписан квадрат. В круг случайным образом бросается пять точек. Найти вероятность того, что три точки попали в квадрат.

3. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Произведено 40 бросков. Найдите наиболее вероятное число попаданий кольца на колышек.

4. Комиссия состоит из 6 человек: две женщины и четыре мужчины. Из них 5 дней по жребию выбирается по одному лицу на определенную работу. Найдите вероятность того, что: а) все пять дней будет выбрана женщина; б) хотя бы один день будет выбран мужчина.

5. Вероятность появления события A хотя бы один раз в трех независимых испытаниях равна 0,999. Какова постоянная вероятность появления этого события при одном испытании?

6. Из таблицы случайных чисел наудачу взято 5 чисел. Найти вероятность того, что среди них окажется: а) 2 числа, оканчивающихся цифрой 2; б) больше четных чисел, чем нечетных.

7. Прибор состоит из 7 ламп типа A. Вероятность перегорания лампы типа A при одном испытании равна 0,7. Найдите наиболее вероятное число перегоревших при испытании ламп типа A и вычислите соответствующую вероятность.

Вариант 22

1. Испытываются три независимо работающих одинаковых прибора. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Какова вероятность того, что при испытании откажут: а) два прибора? б) хотя бы два прибора? в) один прибор? г) не более, чем один прибор?

2. Вероятность попадания стрелком в десятку равна 0,7, а в девятку — 0,3. Определить вероятность того, что данный стрелок при трех выстрелах наберет не менее 29 очков.

3. Имеется общество из 730 человек. Считая, что вероятность рождения в фиксированный день равна $\frac{1}{365}$, найдите наиболее вероятное число лиц из данного общества, родившихся 1 января.

4. Некто приобрел 5 билетов лотереи. Известно, что вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,2. Какова вероятность того, что среди приобретенных выигрышных билетов окажется: а) хотя бы три? б) три?

5. За один цикл автомат изготовляет 10 деталей. Какова вероятность изготовления автоматом за один цикл хотя бы одной бракованной детали, если вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,1?

6. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,4 (броски считать независимыми). Что более вероятно: попадание 2 раза при 4 попытках или 4 при 8 попытках?

7. Отдел технического контроля проверяет стандартность 9 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Найдите наиболее вероятное число стандартных деталей и вычислите соответствующую вероятность.

Вариант 23

1. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какова вероятность того, что расход электроэнергии превысит суточную норму: а) хотя бы три рабочих дня из 5 проверенных? б) три дня из четырех проверенных? в) не менее 2 дней из трех проверенных? г) один или два дня из шести проверенных?

2. Прибор выходит из строя, если перегорит не менее пяти ламп типа A или не менее двух ламп типа B. Определить вероятность выхода из строя прибора, если известно, что перегорело пять ламп, а вероятности перегорания ламп типа A и B равны соответственно 0,7 и 0,3.

3. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,3. Произведено 10 независимых выстрелов. Найдите наиболее вероятное число промахов.

4. Прядильщица обслуживает 5 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одного часа равна 0,4. Какова вероятность того, что в течение одного часа произойдет обрыв нити: а) хотя бы на трех веретенах? б) на двух веретенах?

5. Из таблицы случайных чисел наудачу взято 4 двузначных числа. Найдите наиболее вероятное количество чисел, делящихся на 5, и вычислите соответствующую вероятность.

6. Испытываются 6 одинаковых деталей, а вероятность того, что каждое изделие выдержит испытание, равна 0,65. Какова вероятность того, что испытание выдержат: а) хотя бы одна деталь? б) половина деталей?

7. Отдел технического контроля проверяет 5 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,75. Найти вероятность того, что бракованных изделий будет четное число.

Вариант 24

1. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживаются. Посажено шесть кустов помидоров. Какова вероятность того, что приживется: а) один куст? б) два куста? в) хотя бы один куст? г) хотя бы два куста?

2. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность отказа прибора в серии из трех независимых опытов, если вероятности отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках соответственно равны 0,2; 0,5 и 0,8.

3. На самолете имеются пять одинаковых двигателей. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна 0,8. Найдите наиболее вероятное число двигателей, которые могут отказать в полете.

4. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,2. Произведено 5 независимых выстрелов. Найдите наиболее вероятное число промахов и вычислите соответствующую вероятность.

5. Из ящика, в котором 7 белых и 3 черных шара, 2 раза извлекается по одному шару, причем после каждого извлечения шар возвращается. Найдите вероятность того, что черный шар извлечен: а) 1 раз; б) хотя бы один раз.

6. Баскетболист делает 10 бросков мячом в корзину. Вероятность попадания мяча при каждом броске равна 0,7. Найти веро-

ятность того, что: а) будет равное количество попаданий и промахов; б) от 4 до 6 попаданий включительно.

7. Правильную игральную кость подбрасывают 8 раз. Найти вероятность того, что число выпадений шестерки будет заключено между 2 и 7.

§ 1.8. Применения предельных теорем для схемы Бернулли

При больших n подсчет вероятностей

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

в схеме Бернулли может оказаться весьма затруднительным. Теорема Пуассона, предельная теорема Муавра—Лапласа и интегральная теорема Муавра—Лапласа позволяют решить эту задачу.

Из *предельной теоремы Пуассона* следует приближенная формула

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$.

Данное приближение можно использовать, если p имеет одинаковый с $\frac{1}{n}$ порядок при больших n либо $p < 0{,}1$.

Из *локальной предельной теоремы Муавра—Лапласа* следует приближенная формула

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$.

Из *интегральной предельной теоремы Муавра—Лапласа* следует приближенная формула

$$P_n(m_1 < m < m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Приближения в теоремах Муавра—Лапласа можно использовать, если p таково, что

$$np(1-p) > 9 \text{ и } \frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}.$$

Если $np^{\frac{3}{2}} > 1{,}07$, то ошибка при использовании данных приближений не превосходит 0,05 при всех x.

Для вычислений по приведенным формулам пользуются специальными таблицами функций

$$P(\lambda,\ k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \text{ (см. Приложение 1);}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ (см. Приложение 2);}$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \text{ (см. Приложение 3);}$$

Имеют место равенства $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$ и $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.

Задача 1. Прядильщица обслуживает 200 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одного часа равна 0,02. Какова вероятность того, что в течение одного часа произойдет обрыв нити: а) на пяти веретенах? б) более чем на двух веретенах?

Решение. а) Испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. По условию задачи $n = 200$, $m = 5$, $p = 0{,}02$. Так как n достаточно велико, а $p = 0{,}02$ сравнительно мало, то для вычисления $P_{200}(m = 5)$ можно воспользоваться теоремой Пуассона. Сначала вычислим $\lambda = np = 4$. Тогда

$$P_{200}(m = 5) \approx \frac{4^5}{5!}e^{-4} = 0{,}154.$$

б) Сначала вычислим вероятность события ($m \leqslant 2$), означающего обрыв нити не более чем на двух веретенах. По вышеизложенным соображениям имеем

$$P_{200}(m \leqslant 2) \approx e^{-4}\left(\frac{4^0}{0!}+\frac{4^1}{1!}+\frac{4^2}{2!}\right) = 0{,}237.$$

Тогда искомая вероятность равна $P(m > 2) = 1 - P(m \leqslant 2) \approx 0{,}763$.

Задача 2. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,01. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью, не меньшей чем 0,95?

Решение. Испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. В задаче требуется найти такое n, чтобы выполнялось условие $P_n(m \geqslant 1) \geqslant 0{,}95$. Так как $p = 0{,}01$ мало, то полагая, что n велико, воспользуемся теоремой Пуассона. Имеем $1 - e^{-0,01n} \geqslant 0,95$. Отсюда $e^{-0,01n} \leqslant 0,05$. Прологарифмируем это неравенство, тогда $-0,01n \leqslant \ln 0,05$ или $n \geqslant 100 \ln 20$, откуда $n \geqslant 299,6$. Следовательно, нужно купить не менее 300 лотерейных билетов, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,95, выиграть хотя бы по одному из них.

Задача 3. Из таблицы случайных чисел наудачу выписаны 200 двузначных случайных чисел (от 00 до 99). Определить вероятность того, что среди них число, кратное 5, встретится: а) 35 раз; б) от 30 до 50 раз включительно; в) более 39 раз.

Решение. а) Испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. По условию задачи $n = 200$, $m = 35$, $p = 0,2$ (среди ста натуральных чисел от 0 до 99 только двадцать чисел кратны 5). Так как n достаточно велико, а $p = 0,2$ и $1 - p = 0,8$ не малы, то для вычисления $P_{200}(m = 35)$ можно воспользоваться локальной теоремой Муавра—Лапласа. Вычисления осуществим в следующем порядке:

1. Вначале вычислим $\dfrac{1}{\sqrt{npq}} = \dfrac{1}{\sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \approx 0,177.$

2. Затем находим $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = (35 - 40) \cdot 0,177 = -0,885.$

3. В силу четности функции $\varphi(x)$ имеем $\varphi(-0,885) = \varphi(0,885)$.

4. По таблице значений $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ находим

$$\varphi(0,885) \approx 0,27.$$

5. Следовательно, $P_{200}(m = 35) \approx 0,177 \cdot 0,27 \approx 0,048$.

6. Для вычисления $P_{200}(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = P_{200}(30 \leqslant m \leqslant 50)$ воспользуемся интегральной теоремой Муавра—Лапласа. Вычисления осуществим в следующем порядке:

1) Вначале вычислим:

$$t_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 40}{\sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \approx -1,77,$$

$$t_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 40}{\sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \approx -1,77.$$

2) По таблице значений функции Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du,$$

учитывая ее нечетность, находим $\Phi_0(t_1)$ и $\Phi_0(t_2)$:

$$\Phi_0(1{,}77) = 0{,}4616, \ \Phi_0(-1{,}77) = -\Phi_0(1{,}77) = -0{,}4616,$$

3) Следовательно,

$$P_{200}(30 \leqslant m \leqslant 50) = \Phi_0(1{,}77) - \Phi_0(-1{,}77) = \\ = 0{,}4616 + 0{,}4616 = 0{,}9232.$$

б) Для вычисления вероятности $P_{200}(39 < m \leqslant 200)$ воспользуемся интегральной теоремой Муавра—Лапласа. Вычисления осуществим в следующем порядке:

1) Вначале вычислим

$$t_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{39-40}{\sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \approx -0{,}177,$$

$$t_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{200-40}{\sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \approx 28{,}32.$$

2) По таблице значений функции Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du,$$

учитывая ее нечетность, находим

$$\Phi_0(-0{,}177) \approx -0{,}0714, \ \Phi_0(28{,}32) \approx 0{,}5.$$

3) Следовательно,

$$P_{200}(m > 39) = \Phi_0(28{,}32) - \Phi_0(-0{,}177) = 0{,}5714.$$

Задача 4. Отдел технического контроля проверяет 420 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,2. Найти с вероятностью 0,95 симметричные относительно среднего числа бракованных изделий границы, в которых будет заключено число бракованных изделий среди проверенных.

Решение. Испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. В задаче требуется найти такие m_1 и m_2, чтобы выполнялось условие $P(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = 0{,}95$. Так как границы должны быть симметричны относительно np, то достаточно найти такое $\varepsilon > 0$, чтобы $P(np - \varepsilon \leqslant m \leqslant np + \varepsilon) = 0{,}95$. По условию задачи $n = 420$, $p = 0{,}2$. Так как n достаточно велико, а $p = 0{,}2$ и $1 - p = 0{,}8$ не малы, то воспользуемся интегральной теоремой Муавра—Лапласа.

$$\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi_0\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)=0{,}95,$$

в силу нечетности функции $\Phi_0(x)$ имеем $2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)=0{,}95$. По таблице значений функции Лапласа найдем $\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}=1{,}96$, тогда $\varepsilon=1{,}96\cdot\sqrt{420\cdot0{,}2\cdot0{,}8}\approx16$. Так как $np=84$, то число бракованных изделий среди проверенных 420 с вероятностью 0,95 заключено в следующих границах $84-16\leqslant m\leqslant 84+16$, или $68\leqslant m\leqslant 100$.

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 200. На пробу берется 5 дм^3 воздуха. Какова вероятность того, что во взятой пробе будет обнаружено: а) один или три микроба? б) два микроба? в) хотя два микроба? г) 2 или 3 микроба?

2. Вероятность хотя бы одного появления события A при четырех независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность постоянна?

3. В сейсмоопасной местности создано 100 автоматических сейсмических станций. Каждая станция в течение года может выйти из строя с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что в одном рассматриваемом году выйдет из строя: а) 40 станций? б) от 35 до 45 станций?

4. Аппаратура содержит 200 одинаково надежных независимо работающих элементов, вероятность отказа в течение года для каждого из которых равна 0,5. Найдите вероятность того, что в течение рассматриваемого года выйдет из строя: а) 105 элементов; б) более 105 элементов.

5. Вероятность появления события A в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

Вариант 2

1. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,01. Произведено 300 независимых выстрелов. Какова вероятность того, что попаданий в цель будет: а) четыре? б) более двух? в) не менее четырех? г) 2 или 4?

2. Вероятность появления события A хотя бы один раз при пяти независимых испытаниях равна 0,99757. Какова постоянная вероятность появления этого события при одном испытании?

3. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,3. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Найдите вероятность того, что на коммутатор в течение рассматриваемого часа позвонят: а) 95 абонентов; б) от 85 до 95 абонентов.

4. Тест состоит из 120 вопросов. На каждый вопрос приведено пять ответов, один из которых правильный. Тестируемый отвечает на вопросы наугад. Какова вероятность того, что правильных ответов будет: а) 21? б) не более 25?

5. Вероятность появления события A в каждом из 1000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

Вариант 3

1. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,02. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение рассматриваемого часа на коммутатор позвонят: а) три абонента? б) хотя бы три абонента? в) 2 или 4 абонента? г) более одного абонента?

2. Известно, что 5% радиоламп, изготавливаемых заводом, являются нестандартными. Из большой партии (независимо друг от друга) производится случайная выборка радиоламп. Сколько ламп надо взять, чтобы с вероятностью не менее 0,9 была извлечена хотя бы одна нестандартная лампа?

3. Вероятность того, что стрелок попадет в цель при каждом выстреле равна 0,55. Произведено 150 независимых выстрелов. Какова вероятность того, что: а) стрелок попадет в цель 80 раз? б) будет больше попаданий, чем промахов?

4. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживаются. Посажено 200 кустов помидоров. Какова вероятность того, что приживутся: а) 165 кустов? б) не менее 155, но менее 165 кустов?

5. Французский ученый Бюффон (XVIII в.) бросил монету 4040 раз, причем герб появился 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления герба отклонится от вероятности появления герба по абсолютной величине не более чем в опыте Бюффона.

Вариант 4

1. Имеется общество из 500 человек. Считая, что вероятность рождения в фиксированный день равна $\frac{1}{365}$, найти вероятность того, что 1 января родились: а) пять человек; б) более трех человек; в) хотя бы пять человек; г) 1 или 2 человека.

2. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Сколько надо произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью 0,99 в мишени была хотя бы одна пробоина?

3. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,5. Телефонная станция обслуживает 1000 абонентов. Какова вероятность того, что в течение рассматриваемого часа на коммутатор позвонят: а) менее половины абонентов? б) половина абонентов?

4. Проверяемая книга насчитывает 170 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,55. Найдите вероятность того, что число страниц с опечатками в данной книге окажется равным: а) 90; б) от 90 до 100.

5. Вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний равна 0,5. Найти число испытаний, при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,2.

Вариант 5

1. Аппаратура содержит 200 одинаково надежных независимо работающих элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,005. Какова вероятность того, что при испытании аппаратуры откажет: а) пять элементов? б) более трех элементов? в) 1 или 2 элемента? г) хотя бы один элемент?

2. Известно, что вероятность прорастания семян данной партии пшеницы 0,95. Сколько семян следует взять из этой партии, чтобы наивероятнейшее число взошедших семян равнялось 100?

3. Испытываются 600 деталей, а вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,55. Найдите вероятность того, что

деталей, выдержавших испытание, окажется: а) 280; б) не менее 260, но менее 280.

4. Известно, что 5% радиоламп, изготавливаемых заводом, являются нестандартными. Из большой партии (независимо друг от друга) производится случайная выборка 150 радиоламп. Найдите вероятность того, что в выборке окажется: а) 5 нестандартных радиоламп; б) более 5 и менее 10 нестандартных радиоламп.

5. Сколько раз нужно бросить правильную игральную кость, чтобы вероятность неравенства $\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right| \leqslant 0{,}01$ была не меньше чем вероятность противоположного неравенства, где m — число появления определенного очка в n подбрасываниях игральной кости.

Вариант 6

1. В течение часа коммутатор получает в среднем 20 вызовов. Какова вероятность того, что за четверть часа, в течение которых телефонистка отлучалась, на коммутатор поступило: а) хотя бы два вызова? б) два вызова? в) более двух вызовов? г) 2 или 5 вызовов?

2. Для победы в волейбольном состязании команде необходимо выиграть три партии из пяти; команды неравносильны. Определить вероятность выигрыша в каждой партии для первой команды, если для уравнивания шансов она должна дать фору в две партии.

3. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,6. Произведено 400 независимых выстрелов. Какова вероятность того, что попаданий в цель будет: а) 235? б) от 230 до 250?

4. Аппаратура содержит 200 одинаково надежных независимо работающих элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,65. Какова вероятность того, что при испытании аппаратуры откажет: а) 125 элементов? б) более 120 элементов?

5. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти наименьшее число испытаний, при котором с вероятностью 0,99 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

Вариант 7

1. Проверяемая книга насчитывает 800 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,0025. Какова вероятность того, что с опечатками окажется: а) хотя бы одна страница? б) 2 страницы? в) не менее 2 страниц? г) 1 или 3 страницы?

2. Партия изделий содержит один процент брака. Каков должен быть объем выборки, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно бракованное изделие была не меньше 0,95?

3. Известно, что вероятность прорастания семян данной партии пшеницы 0,95. Посажено 1000 семян. Найдите вероятность того, что прорастет: а) хотя бы 950 семян; б) от 940 до 960 семян.

4. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,35. Сообщение содержит 150 знаков. Найти вероятность того, что в сообщении искаженных знаков окажется: а) больше половины; б) 60.

5. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 4 : 1. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений, при котором с вероятность 0,95 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем 0,01.

Вариант 8

1. Испытываются 600 одинаковых деталей, а вероятность того, что каждое изделие выдержит испытание, равна 0,005. Какова вероятность того, что испытание выдержат: а) хотя бы две детали? б) 2 детали? в) не менее 2 деталей? г) 2 или 4 детали?

2. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью не менее 0,9 получить не меньше трех отказов?

3. Проверяемая книга насчитывает 800 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,25. Какова вероятность того, что с опечатками окажется: а) 200 страниц? б) более 210 страниц?

4. Электростанция обслуживает сеть с 500 лампочек, вероятность включения каждой из которых за время t равна 0,25. Найдите вероятность того, что включившихся за время t лампочек оказалось: а) 135; б) от 20% до 30%.

5. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число, чтобы с вероятностью 0,99 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,8 не превысила искомое положительное число.

Вариант 9

1. Упаковщик укладывает 900 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность

того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,005. Какова вероятность того, что среди укладываемых деталей окажется: а) хотя бы две детали, помеченных личным клеймом? б) 2 детали, помеченных личным клеймом? в) 895 деталей, проверенных ОТК? г) 3 или 4 детали, помеченных личным клеймом?

2. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при каждом броске равна 0,4. Сколько необходимо сделать баскетболисту бросков, чтобы с вероятностью не менее 0,95 попасть в корзину хотя бы один раз?

3. Какова вероятность того, что при 1500 подбрасываниях правильной монеты герб выпадет: а) ровно 750 раз? б) от 730 до 770 раз?

4. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,9. Произведено 300 независимых выстрелов. Найдите вероятность того, что попаданий в цель окажется: а) 275; б) не менее 270.

5. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число, чтобы с вероятностью 0,77 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,5 не превысила искомое положительное число.

Вариант 10

1. Электростанция обслуживает сеть с 400 лампочек, вероятность включения каждой из которых за время t равна 0,02. Какова вероятность того, что за рассматриваемое время t включится: а) хотя бы три лампочки? б) три лампочки? в) менее 3 лампочек? г) 2 или 4 лампочки?

2. Из ящика, в котором 20 белых и 2 черных шара, n раз извлекается по одному шару, причем после каждого извлечения шар возвращается. Определить наименьшее число извлечений, при котором вероятность достать хотя бы один раз черный шар будет больше половины.

3. Какова вероятность выпадения пятерки при 250 подбрасываниях правильной игральной кости: а) 50 раз? б) от 45 до 55 раз?

4. Упаковщик укладывает 900 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,45. Найдите вероятность того, что деталей, помеченных личным клеймом, окажется: а) 400 штук; б) более 405 штук.

5. Вероятность появления события A в каждом из 1000 независимых испытаний равна 0,75. Найти такое положительное число,

чтобы с вероятностью 0,98 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события A от его вероятности 0,75 не превысила искомое положительное число.

Вариант 11

1. Некто приобрел 100 билетов лотереи. Известно, что вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,02. Какова вероятность того, что среди приобретенных выигрышных билетов окажется: а) хотя бы три? б) три? в) не менее 5? г) 2 или 3?

2. За один цикл автомат изготовляет 10 деталей. За какое количество циклов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не менее 0,8, если вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,01?

3. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,35 (броски считать независимыми). Какова вероятность попадания: а) 75 раз при 200 попытках? б) более 70 раз при 200 попытках?

4. Упаковщик укладывает 400 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,25. Какова вероятность того, что среди укладываемых деталей окажется: а) 100 деталей, помеченных личным клеймом? б) от 100 до 115 деталей, помеченных личным клеймом?

5. Отдел технического контроля проверяет стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число стандартных деталей среди проверенных.

Вариант 12

1. Прядильщица обслуживает 100 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одного часа равна 0,04. Какова вероятность того, что в течение одного часа произойдет обрыв нити: а) хотя бы на трех веретенах? б) на трех веретенах? в) более чем на 3 веретенах? г) на 2 или 4 веретенах?

2. Сколько чисел необходимо взять из таблицы случайных чисел, чтобы с наибольшей вероятностью обеспечить появление среди них трех чисел, оканчивающихся цифрой 7?

3. Испытываются 600 одинаковых деталей, а вероятность того, что каждое изделие выдержит испытание, равна 0,05. Какова вероятность того, что испытание выдержат: а) хотя бы 35 деталей? б) 33 детали?

4. Некто приобрел 100 билетов лотереи. Известно, что вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,25. Найдите вероятность того, что выигрышных среди приобретенных билетов лотереи окажется: а) 20; б) более 25.

5. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,5. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число бракованных изделий среди проверенных.

Вариант 13

1. В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что за 10 минут, в течение которых телефонистка отлучалась, на коммутатор поступит: а) два вызова? б) более двух вызовов? в) от 2 до 5 вызовов? г) два или пять вызова?

2. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,2. Сколько нужно произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 попасть в десятку хотя бы один раз?

3. Из ящика, в котором 18 белых и 2 черных шара, 200 раз извлекается по одному шару, причем после каждого извлечения шар возвращается. Найдите вероятность того, что черный шар извлечен: а) 12 раз; б) не менее 20 раз.

4. Баскетболист делает 150 броска мячом в корзину. Вероятность попадания мяча при каждом броске равна 0,7. Найти вероятность того, что: а) попаданий будет в 2 раза больше, чем промахов; б) от 100 до 110 попаданий.

5. Правильную игральную кость подбрасывают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число выпадений шестерки.

Вариант 14

1. Аппаратура содержит 400 одинаково надежных независимо работающих элементов, вероятность отказа в течение года для каждого из которых равна 0,002. Какова вероятность того, что в течение рассматриваемого года в аппаратуре откажет: а) хотя бы один элемент? б) 4 элемента? в) 2 или 3 элемента? г) более пяти элементов?

2. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,1. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью не менее 0,95 получить не меньше двух отказов?

3. Прядильщица обслуживает 100 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одного часа равна 0,4. Най-

дите вероятность того, что течение рассматриваемого часа произойдет обрыв нити на: а) 45 веретенах; б) более чем на 50 веретенах.

4. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при каждом броске равна 0,65. Произведено 50 бросков. Найти вероятность того, что попаданий окажется: а) 35; б) не менее 25 и не более 40.

5. Производится 500 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A, равна 0,3. Какова вероятность того, что частота наступления события A отклонится от его вероятности по абсолютной величине меньше чем на 0,05?

Вариант 15

1. Имеется общество из 730 человек. Считая, что вероятность рождения в фиксированный день равна $\frac{1}{365}$, найдите вероятность того, что день рождения на 1 января приходится у: а) 2 человек; б) хотя бы одного человека; в) 1 или 2 человек; г) более чем 2 человек.

2. Вероятность появления события A хотя бы один раз при семи независимых испытаниях равна 0,95. Какова постоянная вероятность появления этого события при одном испытании?

3. Из таблицы случайных чисел наудачу взято 250 чисел. Найти вероятность того, что среди них окажется: а) 20 чисел, оканчивающихся цифрой 2; б) больше четных чисел, чем нечетных.

4. Прибор состоит из 75 ламп типа A. Вероятность перегорания лампы типа A равна 0,7. Определить вероятность того, что перегорело: а) 50 ламп; б) от 45 до 55 ламп.

5. По мишени произведено 800 независимых выстрелов. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,3. Какое максимально возможное отклонение относительной частоты от вероятности попадания в мишень можно ожидать с вероятностью 0,962?

Вариант 16

1. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,02. Телефонная станция обслуживает 200 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа не позвонят на коммутатор: а) 200 абонентов? б) более 195 абонентов? в) 195 или 198 абонентов? г) 196 абонентов?

2. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,7. Сколько надо произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью 0,95 в мишени была хотя бы одна пробоина?

3. Испытываются 450 независимо работающих одинаковых прибора. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,44. Какова вероятность того, что при испытании откажут: а) 200 приборов? б) не более чем 200 приборов?

4. За один цикл автомат изготовляет 100 деталей. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,25? Найти вероятность того, что за цикл автомат изготовит: а) 70 исправных деталей; б) от 20 до 30 бракованных деталей.

5. Правильная игральная кость подброшена 200 раз. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число выпадений тройки.

Вариант 17

1. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,97. Произведено 100 независимых выстрелов. Какова вероятность того, что окажется: а) 2 промаха? б) 2 или 4 промаха? в) более трех промахов? г) не менее одного промаха?

2. Партия изделий содержит 3% брака. Каков должен быть объем выборки, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно бракованное изделие была не меньше 0,99?

3. Испытываются 70 независимо работающих одинаковых прибора. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Найдите вероятность того, что отказавших при испытании приборов окажется: а) 25; б) от 25 до 35.

4. Известно, что все номера автомашин четырехзначные, неповторяющиеся и равновозможные. Наудачу выбрано 100 номеров. Определить вероятность того, что не оканчиваются цифрой 5 номера: а) 10 автомашин; б) менее четверти автомашин.

5. Вероятность появления события A в каждом из 500 независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,05.

Вариант 18

1. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 500. На пробу берется 4 дм^3 воздуха. Какова вероятность того, что болезнетворных микробов, находящихся во взятой пробе, окажется: а) 4? б) от 1 до 5 включительно? в) 2? г) более 2?

2. Вероятность безотказной работы двигателя типа X в полете равна 0,8. Сколькими двигателями необходимо снабдить самолет,

чтобы вероятность его успешного полета была не менее 0,99? Считать, что самолет может осуществлять полет, если работает хотя бы один двигатель.

3. Вероятность появления события A в одном испытании равна 0,85. Какова вероятность появления этого события при 180 независимых испытаниях: а) 150 раз; б) от 145 до 160 раз?

4. В круг радиуса R вписан квадрат. В круг случайным образом бросается 150 точек. Найти вероятность того, что попало в квадрат: а) 90 точек; б) более 95 точек.

5. Вероятность появления события A в каждом из 700 независимых испытаний равна 0,65. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

Вариант 19

1. Среднее число ошибочных соединений, приходящихся на одного телефонного абонента в течение года, равно 10. Какова вероятность того, что ошибочных соединений, приходящихся на одного абонента в течение полугода, окажется: а) три? б) пять? в) более одного? г) хотя бы одно?

2. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при каждом броске равна 0,8. Сколько необходимо сделать баскетболисту бросков, чтобы с вероятностью не менее 0,9 попасть в корзину хотя бы один раз?

3. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,7. Произведено 300 независимых выстрелов в цель. Найти вероятность того, что окажется: а) 90 промахов; б) более 105 промахов.

4. На отрезок AB длины 1 наудачу брошено 100 точек. Найти вероятность того, что: а) 20 точек; б) более 20 точек будут находиться от точки A на расстоянии, меньшем 0,25. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

5. Вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти число испытаний, при котором с вероятностью 0,98 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

Вариант 20

1. Проверяемая книга насчитывает 500 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,006. Како-

ва вероятность того, что с опечатками окажется: а) хотя бы одна страница? б) 2 страницы? в) менее 2 страниц? г) 3 или 5 страниц?

2. Из ящика, в котором 8 белых и 2 черных шара, n раз извлекается по одному шару, причем после каждого извлечения шар возвращается. Определить наименьшее число извлечений, при котором вероятность достать хотя бы один раз черный шар будет больше половины.

3. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,25. Произведено 80 выстрелов. Найти вероятность попадания в десятку: а) 20 раз; б) от 18 до 22 раз.

4. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность перегрузки прибора в серии из 100 независимых опытов: а) 45 раз; б) более 50 раз.

5. Сколько раз нужно бросить правильную игральную кость, чтобы вероятность неравенства $\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right| \leqslant 0{,}2$ была не меньше чем вероятность противоположного неравенства, где m — число появления определенного очка в n подбрасываниях игральной кости?

Вариант 21

1. Испытываются 400 деталей, а вероятность того, что деталь выдержит испытание, равна 0,992. Какова вероятность того, что не выдержат испытания: а) 2 детали? б) более 3 деталей? в) 1 или 3 детали? г) от 2 до 5 деталей включительно?

2. За один цикл автомат изготовляет 20 деталей. За какое количество циклов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не менее 0,97, если вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,02?

3. Отрезок разделен на четыре равные части. На отрезок наудачу брошено 20 точек. Определить вероятность того, что 5 точек попали на одну из четырех частей отрезка. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

4. Из ящика, в котором 8 белых и 2 черных шара, 80 раз извлекается по одному шару, причем после каждого извлечения шар возвращается. Найти вероятность того, что черный шар при этом извлечен: а) 15 раз; б) от 15 до 25 раз.

5. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 7 : 3. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений, при кото-

ром с вероятностью 0,795 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем 0,25.

Вариант 22

1. Упаковщик укладывает 900 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,005. Какова вероятность того, что деталей, помеченных личным клеймом, окажется: а) хотя бы две? б) 2? в) не менее 2? г) 3 или 5?

2. Сколько чисел необходимо взять из таблицы случайных чисел, чтобы с наибольшей вероятностью обеспечить появление среди них двух чисел, делящихся на 5?

3. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при каждом броске равна 0,8. Найти вероятность попадания в корзину при 200 бросках: а) 150 раз; б) от 145 до 155 раз.

4. Событие B наступает в том случае, если событие A появится не менее 10 раз. Определить вероятность появления события B, если вероятность появления события A при одном опыте равна 0,1 и произведено 150 независимых опытов.

5. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,45. Найти такое положительное число, чтобы с вероятностью 0,78 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,45 не превысила искомое положительное число.

Вариант 23

1. Электростанция обслуживает сеть с 700 лампочек, вероятность включения каждой из которых за время t равна 0,01. Какова вероятность того, что за время t включится: а) 3 лампочки? б) не более 2 лампочек? в) хотя бы две лампочки? г) 2 или 3 лампочки?

2. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,02. Сколько нужно произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,8 попасть в десятку хотя бы один раз?

3. За один цикл автомат изготовляет 500 деталей. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,02? Найти вероятность того, что за один цикл автомат изготовит: а) 12 бракованных деталей; б) более 10 бракованных деталей.

4. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных правильных монет число монет, расположенных гербом вверх будет: а) 50; б) от 45 до 55.

5. Вероятность появления события A в каждом из 600 независимых испытаний равна 0,55. Найти такое положительное число, чтобы с вероятностью 0,898 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события A от его вероятности 0,55 не превысила искомое положительное число.

Вариант 24

1. Некто приобрел 200 билетов лотереи. Известно, что вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,002. Какова вероятность того, что среди приобретенных выигрышных билетов окажется: а) хотя бы пять? б) пять? в) не менее 4? г) от 1 до 3 включительно?

2. Вероятность появления положительного результата в каждом из n независимых испытаний равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что хотя бы один опыт даст положительный результат?

3. Вероятность появления успеха в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что успех появится: а) 505 раз; б) не менее 475 раз.

4. В круг радиуса R вписан равносторонний треугольник. В круг случайным образом бросается 50 точек. Найти вероятность того, что попало в треугольник: а) 25 точек; б) от 20 до 30 точек.

5. Отдел технического контроля проверяет стандартность 300 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число стандартных деталей среди проверенных.

ГЛАВА 2

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 2.1. Вероятностное пространство и случайная величина

В основе любой теоретико-вероятностной схемы лежит понятие вероятностного пространства. Для описания вероятностного пространства напомним некоторые понятия и факты теории множеств и теории меры.

Пусть Ω — некоторое непустое множество.

Класс $\mathfrak{I}$ подмножеств Ω называется σ-*алгеброй*, если удовлетворяет следующим аксиомам:

a_1) $\Omega \in \mathfrak{I}$;

a_2) если $A \in \mathfrak{I}$, то $\overline{A} \in \mathfrak{I}$;

a_3) если $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{I}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$.

Пересечение любого числа σ-алгебр является σ-алгеброй.

Пусть K — некоторый класс подмножеств Ω. σ-алгеброй, порожденной классом K, называется минимальная σ-алгебра, содержащая K, которая равна пересечению всех σ-алгебр, содержащих K.

Пространство Ω вместе с σ-алгеброй его подмножеств $\mathfrak{I}$ называется *измеримым пространством* и обозначается $(\Omega; \mathfrak{I})$. Элементы $\mathfrak{I}$ называются измеримыми множествами или $\mathfrak{I}$-измеримыми множествами.

Пусть $\Omega = R$ есть вещественная прямая и пусть К — класс всех непересекающихся интервалов вида $(a; b]$. σ-алгебра, порожденная классом К называется *борелевской σ-алгеброй*, а ее элементы борелевскими множествами. Аналогично определяются борелевская σ-алгебра и борелевские множества в евклидовом пространстве n измерений.

Вещественная функция P, определенная на $\mathfrak{I}$ и удовлетворяющая следующим аксиомам:

b_1) $P(A) \geqslant 0$ для любого $A \in \mathfrak{I}$;

b_2) $P(\Omega) = 1$;

b_3) если $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Im$ и $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n);$$

называется *вероятностной мерой*. Заметим, что аксиомы b_1 и b_3 означают, что функция множества P, определенная на $\Im$, является мерой, удовлетворяющей дополнительному условию нормированности $P(\Omega) = 1$.

Вероятностным пространством называется тройка (Ω; $\Im$; P), где Ω — пространство элементарных событий, $\Im$ — σ-алгебра подмножеств Ω, P — вероятностная мера на $\Im$.

Напомним, что элементы $\Im$ являются случайными событиями, поэтому $\Im$ называют σ-алгеброй случайных событий. Следует различать элементарные события и случайные события: они являются элементами разных множеств. Подчеркнем, что вероятность определена на множестве случайных событий.

Пусть A, $B \in \Im$, тогда

$$\overline{A} = (\omega \in \Omega\colon \omega \notin A\} \in \Im,$$

$$A + B = \{\omega \in \Omega\colon \omega \in A \text{ или } \omega \in B\} \in \Im,$$

$$AB = \{\omega \in \Omega\colon \omega \in A \text{ и } \omega \in B\} = \overline{A + B} \in \Im,$$

$$A \backslash B = A\overline{B} \in \Im,$$

$$A \Delta B = (A \backslash B) = (B \backslash A) \in \Im.$$

Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий из $\Im$. Верхним и нижним пределами этой последовательности называются события

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Событие $\overline{\lim} A_n$ состоит в том, что произойдет бесконечно много событий из числа $A_1, A_2, \ldots$, событие $\lim A_n$ — в том, что произойдут все $A_1, A_2, \ldots$, за исключением, быть может, только конечного числа. Очевидно, что

$$\lim A_n \subset \overline{\lim} A_n.$$

Если $\lim A_n = \overline{\lim} A_n$, то говорят, что последовательность случайных событий $A_1, A_2, \ldots$ имеет предел $\lim A_n = \lim A_n = \overline{\lim} A_n$.

Пусть (Ω; $\Im$) — некоторое измеримое пространство. Вещественная функция $f(\omega)$, определенная на (Ω, $\Im$), называется измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{I}$ или $\mathfrak{I}$-измеримыми, если прообраз любого борелевского множества принадлежит $\mathfrak{I}$:

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega: f(\omega) \in B\} \in \mathfrak{I}$$

для любого борелевского множества B.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega; \mathfrak{I}; P)$.

Случайной величиной, заданной на $(\Omega; \mathfrak{I}; P)$, называется любая вещественная функция $X(\omega)$, измеримая относительно $\mathfrak{I}$.

Вещественная функция $X(\omega)$, заданная на $(\Omega; \mathfrak{I}; P)$, является случайной величиной, если для любого вещественного x

$$\{X(\omega) < x\} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) < x\} \in \mathfrak{I}.$$

σ-алгеброй, порожденной случайной величиной X, называется σ-алгебра, порожденная классом всех событий вида $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\}$, где B пробегает множество всех борелевских множеств прямой. Эта σ-алгебра совпадает с σ-алгеброй, порожденной событиями вида $\{\omega \in \Omega: X(\omega) < x\}$, где x — произвольное вещественное число.

Пусть A — случайное событие, индикатором события A называется случайная величина

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Пусть $(\Omega; \mathfrak{I}; P)$ — вероятностное пространство, $X(\omega)$ — случайная величина на нем. Тогда каждое из подмножеств множества Ω.

$$\{\omega \in \Omega: X(\omega) \geqslant x\},\ \{\omega \in \Omega: X(\omega) \leqslant x\},$$
$$\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\},\ \{\omega \in \Omega: X(\omega) > x\},$$
$$\{\omega \in \Omega: a \leqslant X(\omega) < b\},\ \{\omega \in \Omega: a < X(\omega) < b\},$$
$$\{\omega \in \Omega: a \leqslant X(\omega) \leqslant b\},\ \{\omega \in \Omega: a < X(\omega) \leqslant b\}$$

является случайным событием.

Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, тогда случайной величиной являются функции

$$|X(\omega)|,\ \frac{1}{X(\omega)}\ (X(\omega) \neq 0,\ \omega \in \Omega),\ X^2(\omega),\ aX(\omega) + b\ (a,\ b \in \mathrm{R}).$$

Функция $g(x): R^1 \to R^1$, измеримая относительно σ-алгебры борелевских множеств, называется борелевской функцией.

Пусть $X(\omega)$ — случайная величина на $(\Omega; \mathfrak{I}; P)$, а $g(x)$ — борелевская функция, тогда $Y = g(X)$ также случайная величина на $(\Omega; \mathfrak{I}; P)$.

Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве, тогда случайными величинами являются функции

$$X(\omega)+Y(\omega),\ X(\omega)-Y(\omega),\ X(\omega)\cdot Y(\omega),$$

$$\frac{X(\omega)}{Y(\omega)}\ (Y(\omega)\neq 0,\ \omega\in\Omega).$$

Пусть $\{X_n(\omega)\}$ — последовательность случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \mathfrak{I};\ P)$, и $X(\omega)$ — случайная величина на $(\Omega;\ \mathfrak{I};\ P)$. Тогда

$$\{\omega\in\Omega\text{: } \lim X_n(\omega) \text{ существует}\}\in\mathfrak{I},$$

$$\{\omega\in\Omega\text{: } \lim X_n(\omega)=X(\omega)\}\in\mathfrak{I}.$$

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются независимыми, если каковы бы ни были $x_1, x_2, \ldots, x_n$, случайные события $\{X_1<x_1\}$, $\{X_2<x_2\}, \ldots, \{X_n<x_n\}$ независимы, т. е. для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k<x_k\}\right)=\prod_{k=1}^{n}P\{X_k<x_k\}.$$

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимые случайные величины, $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots, g_n(x)$ — борелевские функции, то и случайные величины $g_1(X_1), g_2(X_2), \ldots, g_n(X_n)$ также независимы.

Задача 1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \mathfrak{I};\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\text{: } x_1\leqslant X(\omega)<x_2\}$ и $\{\omega\text{: } X(\omega)\geqslant x_1\}$, $x_i\in\mathrm{R}$, являются случайными событиями.

Решение. Для рассматриваемых множеств из Ω имеют место равенства:

$$\{\omega\text{: } x_1\leqslant X(\omega)<x_2\}=\{\omega\text{: } X(\omega)<x_2\}\setminus\{\omega\text{: } X(\omega)<x_1\},$$

$$\{\omega\text{: } X(\omega)\geqslant x_1\}=\Omega\setminus\{\omega\text{: } X(\omega)<x_1\}.$$

Согласно аксиомам σ-алгебры если $A, B\in\mathfrak{I}$, то $\overline{A}\in\mathfrak{I}$ и $\overline{A}+B\in\mathfrak{I}$, но $\overline{A}+B=\overline{A\overline{B}}$. Тогда $A\overline{B}\in\mathfrak{I}$, но $A\overline{B}=A\setminus B$. Следовательно, $A\setminus B\in\mathfrak{I}$.

По условию задачи $X(\omega)$ — случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \mathfrak{I};\ P)$. По определению случайной величины множества $\{\omega\text{: } X(\omega)<x\}$, $x\in\mathrm{R}$, являются измеримыми, т. е. $\{\omega\text{: } X(\omega)<x\}\in\mathfrak{I}$ для любого действительного x. Следовательно, множества $\{\omega\text{: } x_1\leqslant X(\omega)<x_2\}$, $\{\omega\text{: } X(\omega)\geqslant x_1\}$ принадлежат $\mathfrak{I}$. Откуда $\{\omega\text{: } x_1\leqslant X(\omega)<x_2\}$ и $\{\omega\text{: } X(\omega)\geqslant x_1\}$, $x_i\in\mathrm{R}$, — случайные события.

Задача 2. Вероятностное пространство $(\Omega;\ \Im;\ P)$ представляет собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной X, если

$$X=\begin{cases}-1, & \omega\in\left[0;\ \frac{1}{4}\right),\\ 0, & \omega\in\left[\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right),\\ 1, & \omega\in\left[\frac{1}{2};\ 1\right].\end{cases}$$

Решение: σ-алгебра, порожденная случайной величиной X, совпадает с σ-алгеброй, порожденной случайными событиями вида $\{\omega\colon X(\omega)<x\}$, $x\in \mathrm{R}$.

Если $x\leqslant -1$, то $\{\omega\colon X(\omega)<x\}=\varnothing$,

Если $-1<x\leqslant 0$, то $\{\omega\colon X(\omega)<x\}=\{\omega\colon X(\omega)=-1\}=\left[0;\ \frac{1}{4}\right)$,

Если $0<x\leqslant 1$, то $\{\omega\colon X(\omega)<x\}=\{\omega\colon X(\omega)=-1\}\cup\{\omega\colon X(\omega)=0\}=$
$=\left[0;\ \frac{1}{2}\right)$,

Если $x>1$, то $\{\omega\colon X(\omega)<x\}=\{\omega\colon X(\omega)=\pm 1\}\cup\{\omega\colon X(\omega)=0\}=$
$=[0;\ 1]=\Omega$.

Следовательно, σ-алгебра, порожденная случайной величиной X, совпадает с σ-алгеброй, порожденной случайными событиями $A=\left[0;\ \frac{1}{4}\right)$ и $B=\left[0;\ \frac{1}{2}\right)$. Тогда

$$\Im=\left\{[0;\ 1],\ \varnothing,\ \left[0;\ \frac{1}{4}\right),\ \left[0;\ \frac{1}{2}\right),\ \left[\frac{1}{4};\ 1\right],\ \left[\frac{1}{2};\ 1\right],\ \left[0;\ \frac{1}{4}\right)\cup\right.$$
$$\left.\cup\left[\frac{1}{2};\ 1\right],\ \left[\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Задача 3. Может ли число элементарных событий быть строго больше, чем число всех событий?

Ответ. Да. Например, $\Omega=[0;\ 1]$ и $\Im=\{\varnothing,\ \Omega\}$.

Задача 4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $X^3(\omega)$ будет случайной величиной.

Решение. По условию задачи $X(\omega)$ — случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$, т. е. $\{\omega\colon X(\omega) < x\} \in \Im$ для любого действительного x. Так как справедливо равенство $\{\omega\colon X^3(\omega) < x\} = \{\omega\colon X(\omega) < \sqrt[3]{x}\}$, имеем $\{\omega\colon X^3(\omega) < x\} \in \Im$ для любого действительного x. Следовательно, $X^3(\omega)$ — случайная величина.

Задача 5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $X(\omega) + Y(\omega)$ является случайной величиной.

Решение. По условию задачи $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$, т. е. $\{\omega\colon X(\omega) < x\} \in \Im$ для любого действительного x и $\{\omega\colon Y(\omega) < y\} \in \Im$ для любого действительного y.

Справедливо равенство

$$\{\omega\colon X(\omega) + Y(\omega) < z\} = \bigcup_{x \in Q} \left(\{\omega\colon X(\omega) < x\} \cap \{\omega\colon Y(\omega) < z - x\}\right),$$

где Q — множество рациональных чисел.

В силу замкнутости σ-алгебры случайных событий $\Im$ относительно операций пересечения и счетного объединения имеем, что $\{\omega\colon X(\omega) + Y(\omega) < z\} \in \Im$ для любого действительного z.

Следовательно, $X(\omega) + Y(\omega)$ — случайная величина.

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 < X(\omega) \leqslant x_2\}$ и $\{\omega\colon x_1 < X(\omega) < x_2\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Вероятностное пространство $(\Omega;\ \Im;\ \mathrm{P})$ представляет собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной X, если $X = \dfrac{\omega}{2}$.

3. Будет ли случайной величиной вещественная функция $X(\omega)$, заданная на $(\Omega;\ \Im;\ P)$, если для любого вещественного x $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) = x\} \in \Im$?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $|X(\omega)|$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $\max\{X(\omega);\ Y(\omega)\}$ является случайной величиной.

Вариант 2

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 < X(\omega) < x_2\}$ и $\{\omega\colon x_1 \leqslant X(\omega) \leqslant x_2\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Вероятностное пространство $(\Omega;\ \Im;\ \mathrm{P})$ представляет собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной X, если $X = \frac{1}{2}$.

3. Всегда ли событие вероятности 0 будет невозможным событием?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $3X(\omega) + 2$ будет случайной величиной.

5. Пусть $\{X_n(\omega)\}$ — последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $\inf\limits_n X_n(\omega)$ будет случайной величиной.

Вариант 3

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 \leqslant X(\omega) \leqslant x_2\}$ и $\{\omega\colon X(\omega) > x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Вероятностное пространство $(\Omega;\ \Im;\ P)$ представляет собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной X, если

$$X(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \omega \in \left[0;\ \frac{1}{4}\right), \\ \frac{1}{2}, & \omega \in \left[\frac{1}{4};\ \frac{3}{4}\right), \\ 1, & \omega \in \left[\frac{3}{4};\ 1\right]. \end{cases}$$

3. Образует ли σ-алгебру множество всех событий, вероятности которых выражаются аликвотными дробями?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $X^2(\omega)$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве, $P(Y(\omega) \neq 0) = 1$. Доказать, что функция $\dfrac{X(\varpi)+a}{Y(\varpi)}$ является случайной величиной.

Вариант 4

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon X(\omega) > x\}$ и $\{\omega\colon X(\omega) = x\}$, $x \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Вероятностное пространство $(\Omega;\ \Im;\ P)$ представляет собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной X, если

$$X(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \omega \in \left[0;\ \dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{1}{2}, & \omega \in \left[\dfrac{1}{2};\ 1\right]. \end{cases}$$

3. Число событий некоторого вероятностного пространства равно 2^n. Указать минимальное возможное значение для числа элементарных событий.

4. Пусть $X(\omega)$ — неотрицательная случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $\sqrt{X(\omega)}$ будет случайной величиной.

5. Пусть $\{X_n(\omega)\}$ — последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $\lim X_n(\omega)$ будет случайной величиной.

Вариант 5

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon X(\omega) = x\}$ и $\{\omega\colon X(\omega) \geqslant x\}$, $x \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0;\ 1]$, порожденную множествами $\left[0;\ \dfrac{2}{3}\right]$, $\left[\dfrac{1}{3};\ 1\right]$.

3. Может ли число всех событий какого-либо вероятностного пространства быть равным 514?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $|X(\omega)-3|$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $aX(\omega)+bY(\omega)+c$ $(a>0,\ b>0)$ является случайной величиной.

Вариант 6

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon X(\omega)\geqslant x\}$ и $\{\omega\colon X(\omega)\leqslant x\}$, $x\in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0;\ 1]$, порожденную множеством $\left[0;\ \frac{2}{3}\right]$.

3. Будет ли случайной величиной вещественная функция $X(\omega)$, заданная на $(\Omega;\ \Im;\ P)$, если для любого вещественного x $\{\omega\in\Omega\colon X(\omega)\geqslant x\}\in\Im$?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $5X(\omega)$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $(X(\omega)+a)-Y(\omega)$ является случайной величиной.

Вариант 7

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon X(\omega)\leqslant x\}$ и $\{\omega\colon X(\omega)>x\}$, $x\in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0;\ 1]$, порожденную множествами $\{0\}$, $\{1\}$.

3. Является ли случайной величиной индикатор случайного события A?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $X^2(\omega)+2$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве, $P(Y(\omega)\neq -a)=1$. Доказать, что функция $\dfrac{X(\varpi)}{Y(\varpi)+a}$ является случайной величиной.

Вариант 8

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$. Доказать, что множества $\{\omega: x_1 \leqslant X(\omega) < x_2\}$ и $\{\omega: X(\omega) = x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0; 1]$, порожденную множеством $\{0\}$.

3. Является ли σ-алгеброй пересечение любого числа σ-алгебр?

4. Пусть $X(\omega)$ — неотрицательная случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$. Доказать, что функция $2\sqrt{X(\omega)}$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $X(\omega) \cdot Y(\omega) + a$ является случайной величиной.

Вариант 9

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$. Доказать, что множества $\{\omega: x_1 < X(\omega) \leqslant x_2\}$ и $\{\omega: x_1 \leqslant X(\omega) \leqslant x_2\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0; 1]$, порожденную множествами $\{0\}$, $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$.

3. Может ли число событий быть меньше числа элементарных событий?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$. Доказать, что функция $4\,|X(\omega)|$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $X(\omega) + Y(\omega) + a$ является случайной величиной.

Вариант 10

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$. Доказать, что множества $\{\omega: x_1 < X(\omega) \leqslant x_2\}$ и $\{\omega: X(\omega) > x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0; 1]$, порожденную множеством $\varnothing$.

3. Число событий некоторого вероятностного пространства равно 2^n. Указать максимальное возможное значение для числа элементарных событий.

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $X(\omega) - 1$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $aX(\omega) - bY(\omega)$ $(a > 0,\ b > 0)$ является случайной величиной.

Вариант 11

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 < X(\omega) \leqslant x_2\}$ и $\{\omega\colon X(\omega) = x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0;\ 1]$, порожденную множеством всех рациональных точек отрезка $[0;\ 1]$.

3. Будет ли случайной величиной вещественная функция $X(\omega)$, заданная на $(\Omega;\ \Im;\ P)$, если для любого вещественного x $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) > x\} \in \Im$?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $7X^2(\omega)$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве, $P(Y(\omega) \neq 0) = 1$. Доказать, что функция $\dfrac{X(\omega)+a}{Y(\omega)}$ является случайной величиной.

Вариант 12

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 < X(\omega) \leqslant x_2\}$ и $\{\omega\colon X(\omega) \geqslant x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Вероятностное пространство $(\Omega;\ \Im;\ P)$ представляет собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной X, если $X = 3\omega$.

3. Может ли число всех событий какого-либо вероятностного пространства быть равным 510?

4. Пусть $X(\omega)$ — неотрицательная случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $\sqrt{X(\omega)} + 2$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $(aX(\omega)) \cdot (bY(\omega))$ $(a > 0,\ b > 0)$ является случайной величиной.

Вариант 13

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 < X(\omega) \leqslant x_2\}$ и $\{\omega\colon X(\omega) \leqslant x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Вероятностное пространство $(\Omega;\ \Im;\ P)$ представляет собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной X, если $X = 5$.

3. Может ли число всех событий какого-либо вероятностного пространства быть равным 512?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $|X(\omega)| + 1$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $X(\omega) + aY(\omega)$ $(a > 0)$ является случайной величиной.

Вариант 14

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 < X(\omega) \leqslant x_2\}$ и $\{\omega\colon x_1 \leqslant X(\omega) < x_2\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Вероятностное пространство $(\Omega;\ \Im;\ P)$ представляет собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной X, если

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \left[0;\ \dfrac{1}{3}\right), \\ 2, & \omega \in \left[\dfrac{1}{3};\ \dfrac{2}{3}\right), \\ 3, & \omega \in \left[\dfrac{2}{3};\ 1\right]. \end{cases}$$

3. Доказать, что для любого пространства Ω никакая σ-алгебра его подмножеств не может иметь счетную мощность.

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $3X^2(\omega) - 4$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $X(\omega) - bY(\omega)$ $(b > 0)$ является случайной величиной.

Вариант 15

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 < X(\omega) < x_2\}$ и $\{\omega\colon X(\omega) > x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Вероятностное пространство $(\Omega;\ \Im;\ P)$ представляет собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной X, если

$$X = \begin{cases} 0, & \omega \in \left[0;\ \frac{1}{5}\right), \\ 1, & \omega \in \left[\frac{1}{5};\ 1\right]. \end{cases}$$

3. Пусть Ω — конечное пространство равновозможных элементарных событий. $\Im$ — σ-алгебра всех подмножеств Ω. Доказать, что классическая вероятность, заданная $\Im$, будет вероятностной мерой.

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $X^4(\omega)$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве, $P(Y(\omega) \neq 0) = 1$. Доказать, что функция $\dfrac{X(\omega)}{aY(\omega)}$ $(a > 0)$ является случайной величиной.

Вариант 16

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 < X(\omega) < x_2\}$ и $\{\omega\colon X(\omega) = x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0;\ 1]$, порожденную множествами $\left[0;\ \frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ 1\right]$.

3. Образует ли σ-алгебру множество всех событий, вероятности которых выражаются рациональными числами?

4. Пусть $X(\omega)$ — неотрицательная случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $2\sqrt{X(\omega)} - 3$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $X(\omega)\cdot(bY(\omega))$ $(b>0)$ является случайной величиной.

Вариант 17

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$. Доказать, что множества $\{\omega: x_1 < X(\omega) < x_2\}$ и $\{\omega: X(\omega) \geqslant x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0; 1]$, порожденную множеством $\left[0; \frac{1}{3}\right)$.

3. Число элементарных событий некоторого вероятностного пространства равно n. Указать максимальное возможное значение для числа событий.

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$. Доказать, что функция $5|X(\omega)|$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $aX(\omega)+bY(\omega)$ $(a>0,\ b>0)$ является случайной величиной.

Вариант 18

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$. Доказать, что множества $\{\omega: x_1 < X(\omega) < x_2\}$ и $\{\omega: X(\omega) \leqslant x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0; 1]$, порожденную множествами $\{0; 1\}$, $\{1; 2\}$.

3. Число элементарных событий некоторого вероятностного пространства равно n. Указать минимальное возможное значение для числа событий.

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$. Доказать, что функция $(X(\omega)+1)^2$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $aX(\omega)-Y(\omega)$ $(a>0)$ является случайной величиной.

Вариант 19

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$. Доказать, что множества $\{\omega: x_1 < X(\omega) < x_2\}$ и $\{\omega: x_1 \leqslant X(\omega) < x_2\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0;\ 1]$, порожденную множеством $\{3;\ 4\}$.

3. Может ли быть: число элементарных событий бесконечно, а число событий конечно?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $(X(\omega)-1)^3$ будет случайной величиной.

5. Пусть $\{X_n(\omega)\}$ — последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $\overline{\lim}\, X_n(\omega)$ будет случайной величиной.

Вариант 20

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 \leqslant X(\omega) \leqslant x_2\}$ и $\{\omega\colon x_1 \leqslant X(\omega) < x_2\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0;\ 1]$, порожденную множествами $\{0\}$, $\left(0;\ \frac{1}{2}\right]$.

3. Может ли быть число элементарных событий конечно, а число событий бесконечно?

4. Пусть $X(\omega)$ — неотрицательная случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $\sqrt{2X(\omega)}$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $\min\ \{X(\omega);\ Y(\omega)\}$ является случайной величиной.

Вариант 21

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 \leqslant X(\omega) \leqslant x_2\}$ и $\{\omega\colon X(\omega) \leqslant x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Описать σ-алгебру подмножеств отрезка $[0;\ 1]$, порожденную множеством $\{0;\ 1\}$.

3. Может ли число всех событий какого-либо вероятностного пространства быть равным 128?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $5|X(\omega)|+4$ будет случайной величиной.

5. Пусть $\{X_n(\omega)\}$ — последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $\sup\limits_n X_n(\omega)$ будет случайной величиной.

Вариант 22

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 \leqslant X(\omega) \leqslant x_2\}$ и $\{\omega\colon X(\omega) > x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$ являются случайными событиями.

2. Вероятностное пространство $(\Omega;\ \Im;\ P)$ представляет собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной X, если $X = \omega - 3$.

3. Может ли число всех событий какого-либо вероятностного пространства быть равным 129?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$, $P(X(\omega) \neq 0) = 1$. Доказать, что функция $\dfrac{1}{X(\omega)}$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $X(\omega) - Y(\omega)$ является случайной величиной.

Вариант 23

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon x_1 \leqslant X(\omega) \leqslant x_2\}$ и $\{\omega\colon X(\omega) = x_1\}$, $x_i \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Вероятностное пространство $(\Omega;\ \Im;\ P)$ представляет собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной X, если $X = \sqrt{2}$.

3. Может ли число всех событий какого-либо вероятностного пространства быть равным 127?

4. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$. Доказать, что функция $e^{X(\omega)}$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве, $P(Y(\omega) \neq 0) = 1$. Доказать, что функция $\dfrac{X(\omega)}{Y(\omega)}$ является случайной величиной.

Вариант 24

1. Пусть $X(\omega)$ — случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$. Доказать, что множества $\{\omega\colon X(\omega) > x\}$ и $\{\omega\colon X(\omega) \leqslant x\}$, $x \in \mathrm{R}$, являются случайными событиями.

2. Вероятностное пространство $(\Omega; \Im; P)$ представляет собой отрезок $[0; 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порожденную случайной величиной X, если

$$X(\omega) = \begin{cases} -2, & \omega \in \left[0; \dfrac{2}{5}\right), \\ 2, & \omega \in \left[\dfrac{2}{5}; 1\right]. \end{cases}$$

3. Будет ли случайной величиной вещественная функция $X(\omega)$, заданная на $(\Omega; \Im; P)$, если для любого вещественного x $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \leqslant x\} \in \Im$?

4. Пусть $X(\omega)$ — неотрицательная случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$. Доказать, что функция $\sqrt{X(\omega)+3}$ будет случайной величиной.

5. Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функция $X(\omega) \cdot Y(\omega)$ является случайной величиной.

§ 2.2. Распределения вероятностей дискретных случайных величин

Пусть $(\Omega; \Im; P)$ — вероятностное пространство. Случайная величина $X(\omega)$ называется *дискретной случайной величиной*, если она принимает не более чем счетное число значений. Если $X(\omega)$ принимает значения $x_1, x_2, \ldots$, то

$$\{X(\omega) = x_n\} = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) = x_n\} \in \Im$$

для каждого n.

Набор вероятностей $p_n = P\{\omega\colon X(\omega) = x_n\}$ называется *распределением дискретной случайной величины* (дискретным распределением). Дискретные распределения задаются аналитически или в виде таблицы:

Значение $X(\omega)$	x_1	x_2	...	x_n	...
Вероятность	p_1	p_2	....	p_n	...

Заметим, что $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Приведем некоторые наиболее важные дискретные распределения:

1. *Вырожденное распределение*. Случайная величина X имеет вырожденное распределение, сосредоточенное в точке a, если $P\{X=a\}=1$.

Вырожденное распределение описывает неслучайные величины.

2. *Распределение Бернулли*. Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром p $(0<p<1)$, если $P\{X=1\}=p$, $P\{X=0\}=1-p$.

Распределение Бернулли является математической моделью стохастического эксперимента, исходы которого принадлежат двум взаимно исключающим классам.

3. *Биномиальное распределение*. Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p $(n \geqslant 0, 0<p<1)$, если

$$P(X=m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \; m=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Биномиальное распределение описывает число успехов (появления события A) в схеме Бернулли.

4. *Отрицательное биномиальное распределение* (распределение Паскаля). Случайная величина X имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами n и p $(n \geqslant 0,\ 0<p<1)$, если

$$P(X=m)=C_{r+m-1}^m\, p^r (1-p)^m, \; m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Отрицательное биномиальное распределение описывает число испытаний в схеме Бернулли, предшествующих наступлению r-го успеха (события A).

5. *Геометрическое распределение*. Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром p $(0<p<1)$, если

$$P(X=m)=p(1-p)^m, \; m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Является частным случаем отрицательного биномиального распределения при $r=1$. Описывает число испытаний в схеме Бернулли, предшествующих первому появлению успеха (события A).

6. *Гипергеометрическое распределение*. Случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами N, n и p $(0<p<1)$, если

$$P(X=m)=\frac{C_{Np}^m C_{N(1-p)}^{n-m}}{C_N^n}, \; m=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Типичная схема, в которой появляется гипергеометрическое распределение: проверяется партия готовой продукции, которая содержит Np годных и $N(1-p)$ негодных изделий. Случайным образом выбирают n изделий. Число годных изделий среди выбранных описывается гипергеометрическим распределением.

7. *Распределение Пуассона.* Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda\,(\lambda > 0)$, если

$$P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Распределение Пуассона является моделью для описания случайного числа появления определенных событий в фиксированном промежутке времени, в фиксированной области пространства.

Задача 1. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число появлений решки при пяти подбрасываниях правильной монеты? Составьте таблицу распределения вероятностей.

Решение. Пусть случайная величина X — число появлений решки. Так как правильная монета подбрасывается пять раз, то случайная величина X может принимать следующие значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, $x_5=4$, $x_6=5$. Случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, поскольку испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. По формуле

$$P_n(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $n=5$, $p=0{,}5$ и $m=0,\ 1,\ \ldots,\ 5$ — находим

$$P(X=0)=\frac{1}{32},\quad P(X=1)=\frac{5}{32},\quad P(X=2)=\frac{10}{32},$$

$$P(X=3)=\frac{10}{32},\quad P(X=4)=\frac{5}{32},\quad P(X=5)=\frac{1}{32}.$$

Таким образом, получаем следующую таблицу распределения вероятностей случайной величины X:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Проверка: $\sum_{i=1}^{6} p_i = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = 1.$

Задача 2. В коробке имеются 10 карандашей, среди которых 6 красных. Наудачу извлекаются два карандаша. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число извлеченных красных карандашей? Составьте таблицу распределения вероятностей.

Решение: Пусть случайная величина X — число извлеченных красных карандашей. Так как извлекаются два карандаша, то случайная величина X может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение вероятностей. Число всевозможных наборов, содержащих два карандаша, равно C_{10}^2; среди них имеется $C_6^k C_4^{2-k}$ наборов, содержащих ровно $k = 0, 1, 2$ красных карандаша. По формуле

$$P(X = k) = \frac{C_6^k C_4^{2-k}}{C_{10}^2}, \quad k = 0,\ 1,\ 2$$

находим

$$P(X = 0) = \frac{6}{45},\ P(X = 1) = \frac{24}{45},\ P(X = 2) = \frac{15}{45}.$$

Таким образом, получаем следующую таблицу распределения вероятностей случайной величины X:

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{6}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{15}{45}$

Проверка: $\sum_{i=1}^{3} p_i = \frac{6}{45} + \frac{24}{45} + \frac{15}{45} = 1.$

Задача 3. Имеются десять билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу последовательно, без возвращения извлекается по одному билету до первого появления билета на первый ряд. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа извлечённых билетов до появления билета на первый ряд.

Решение. Пусть случайная величина X — число извлеченных билетов до появления билета на первый ряд. Так как имеется 6 билетов, не являющихся билетами на первый ряд, то случайная величина X может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$, $x_7 = 6$. Далее, обозначим событие $A_i = \{i$-ый извлеченный билет является билетом на первый ряд$\}$, тогда

$$P(X=0) = P(A_1) = \frac{4}{10}, \quad P(X=1) = P(\overline{A}_1 A_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{15},$$

$$P(X=2) = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}, \ldots,$$

$$P(X=6) = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5 \overline{A}_6) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{210}.$$

Таким образом, получаем следующую таблицу распределения вероятностей случайной величины X:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{105}$	$\frac{1}{210}$

Проверка: $\sum\limits_{i=1}^{7} p_i = \frac{84}{210} + \frac{56}{210} + \frac{35}{210} + \frac{20}{210} + \frac{10}{210} + \frac{4}{210} + \frac{1}{210} = 1.$

Задача 4. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 500. На пробу берется 4 дм^3 воздуха. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа болезнетворных микробов, находящихся во взятой пробе.

Решение. Случайная величина X — число болезнетворных микробов, находящихся во взятой пробе — может принимать значения 0, 1, 2, ..., причем $P\{X=n\} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$. Поскольку средняя плотность болезнетворных микробов в 4 дм^3 равна 2, то случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 2$. Таким образом, получаем следующую таблицу распределения вероятностей случайной величины X:

x_i	0	1	2	...	n	...
p_i	e^{-2}	$2e^{-2}$	$2e^{-2}$	...	$\frac{e^{-2}}{n!}$	...

Проверка: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = e^{-2}\left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots\right)=1.$

Задача 5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения вероятностей:

x_i	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
p_i	0,1	0,2	0,7

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = X + 2$, $Z = 2\sin X$.

Решение. Случайная величина Y связана со случайной величиной X функциональной зависимостью $Y = X + 2$, поэтому она может принимать значения

$$y_1 = x_1 + 2 = \frac{\pi}{4} + 2;\; y_2 = x_2 + 2 = \frac{\pi}{3} + 2,\; y_3 = x_3 + 2 = \frac{2\pi}{3} + 2.$$

Найдем соответствующие вероятности:

$$P\left(Y = \frac{\pi}{4} + 2\right) = P\left(X = \frac{\pi}{4}\right) = 0,1;\; P\left(Y = \frac{\pi}{3} + 2\right) = P\left(X = \frac{\pi}{3}\right) = 0,2;$$

$$P\left(Y = \frac{2\pi}{3} + 2\right) = P\left(X = \frac{2\pi}{3}\right) = 0,7.$$

Случайная величина Z связана со случайной величиной X функциональной зависимостью $Z = 2\sin X$, поэтому она может принимать значения $z_1 = 2\sin x_1 = \sqrt{2}$, $z_2 = 2\sin x_2 = 2\sin x_3 = \sqrt{3}$. Учитывая несовместность событий $\left\{X = \frac{\pi}{3}\right\}$ и $\left\{X = \frac{2\pi}{3}\right\}$, найдем соответствующие значениям вероятности:

$$P\left(Z = \sqrt{2}\right) = P\left(X = \frac{\pi}{4}\right) = 0,1;$$

$$P\left(Z = \sqrt{3}\right) = P\left(X = \frac{\pi}{3}\right) + P\left(X = \frac{2\pi}{3}\right) = 0,2 + 0,7 = 0,9.$$

Таким образом, получим следующие таблицы распределения вероятностей случайных величин Y и Z:

y_i	$\frac{\pi}{4} + 2$	$\frac{\pi}{3} + 2$	$\frac{2\pi}{3} + 2$
p_i	0,1	0,2	0,7

z_i	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
p_i	0,1	0,9

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число появления герба при двух подбрасываниях правильной монеты? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В коробке имеются 12 карандашей, из которых 8 карандаша красные. Наудачу извлекаются семь карандашей. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число извлеченных красных карандашей? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Буквы слова КОМБИНАТОРИКА написаны на одинаковых карточках. Наудачу выбирается карточка. Если выбрана согласная буква, то карточка возвращается назад, и снова наудачу выбирается карточка. Если выбрана гласная буква, то эксперимент прекращается. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа испытаний до первого появления гласной буквы.

4. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа страниц с опечатками, если проверяемая книга насчитывает 800 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,0025.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-1	1	3
p_i	0,2	0,5	0,3

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = 3X + 1$, $Z = X^2$.

Вариант 2

1. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число выпадения шестерки при трех подбрасываниях правильной игральной кости? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на отлично, наугад извлекаются шесть работ. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число

работ, оцененных на отлично и оказавшихся в выборке? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. В колоде 36 карт. Наудачу извлекается одна карта, фиксируется и возвращается назад. Эксперимент продолжается до первого появления туза. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа извлечений.

4. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа изделий, выдержавших испытание, если испытываются 600 деталей, а вероятность того, что изделие выдержит испытание, равна 0,005.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,5	0,3

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y=4-2X$, $Z=|X|$.

Вариант 3

1. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число попаданий при четырех бросках? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. Имеются десять билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу берут пять билетов. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число билетов на первый ряд среди выбранных билетов? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Правильная монета подбрасывается до первого появления герба. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа подбрасываний до появления герба.

4. Упаковщик укладывает 900 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,005. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа деталей, помеченных личным клеймом.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-2	2	3
p_i	0,2	0,5	0,3

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = 2X$, $Z = X^2 - 3$.

Вариант 4

1. На самолете имеются два одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна 0,8. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число двигателей, в которых могут возникнуть неполадки в полете? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В колоде 36 карт. Наудачу извлекают семь карт. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число тузов среди выбранных карт? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Правильная монета подбрасывается до первого появления герба. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа подбрасываний.

4. Электростанция обслуживает сеть с 600 лампочек, вероятность включения каждой из которых за время t равна 0,02. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа лампочек, включенных за время t.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
p_i	0,1	0,2	0,7

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = 2X + \frac{\pi}{4}$, $Z = \sin X$.

Вариант 5

1. Испытываются три независимо работающих одинаковых прибора. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная

величина, означающая число отказавших приборов? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В ящике 15 деталей, среди которых 12 стандартных. Наудачу извлекаются шесть деталей. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число нестандартных деталей среди отобранных? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Набрасываются кольца на колышек либо до первого попадания, либо до полного израсходования всех колец, число которых равно 5. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа брошенных колец, если вероятность набрасывания кольца на колышек при каждом испытании постоянна и равна 0,9.

4. Некто приобрел 100 билетов лотереи. Известно, что вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,02. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа приобретенных выигрышных билетов.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	$\frac{\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
p_i	0,2	0,2	0,6

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = X + \frac{\pi}{4}$, $Z = \operatorname{tg} X$.

Вариант 6

1. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число рабочих дней, в течение которых не будет перерасхода электроэнергии, если проверены четыре рабочих дня? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В урне 15 шаров, из них 8 белых. Наудачу извлекают шесть шаров. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число белых шаров среди извлеченных шаров? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Набрасываются кольца на колышек либо до первого попадания, либо до полного израсходования всех колец, число которых

равно 5. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа брошенных колец до первого попадания, если вероятность набрасывания кольца на колышек при каждом испытании постоянна и равна 0,9.

4. Прядильщица обслуживает 100 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одного часа равна 0,04. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа веретен, на которых произойдет обрыв нити в течение одного часа.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
p_i	0,1	0,2	0,7

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = 4X$, $Z = 3 - \cos X$.

Вариант 7

1. Вероятность того, что стрелок попадет в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится два независимых выстрела. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число пробоин в мишени? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В ящике 10 деталей, среди которых 8 стандартных. Наудачу берутся пять деталей. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число стандартных деталей из наудачу взятых? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Набрасываются кольца на колышек до первого попадания. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа брошенных колец до первого попадания, если вероятность набрасывания кольца на колышек при каждом испытании постоянна и равна 0,9.

4. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 200. На пробу берется 5 дм^3 воздуха. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа болезнетворных микробов, находящихся во взятой пробе.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,5	0,3

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = -3X$, $Z = |X| + 5$.

Вариант 8

1. В горном районе создано три автоматических сейсмических станций. Каждая станция в течение года может выйти из строя с вероятностью 0,9. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число станций, вышедших из строя в одном рассматриваемом году? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. Буквы слова КОМБИНАТОРИКА написаны на одинаковых карточках. Наудачу извлекаются семь карточек. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число гласных букв среди извлеченных карточек? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,6. Стрелок, имея в запасе 6 патронов, ведет огонь по мишени до первого попадания или до полного израсходования всех патронов. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа израсходованных патронов до первого попадания.

4. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,03. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа абонентов, позвонивших на коммутатор в течение часа.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-2	1	2
p_i	0,3	0,3	0,4

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = 4 + 5X^2$, $Z = \exp(X)$.

Вариант 9

1. Контрольная работа состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос приведено пять ответов, один из которых правильный. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величи-

на, означающая число угаданных правильных ответов? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. Из полного набора костей домино наудачу выбирают шесть костей. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число дублей среди выбранных костей? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,6. Стрелок, имея в запасе 6 патронов, ведет огонь по мишени до первого попадания или до полного израсходования всех патронов. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа израсходованных патронов.

4. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,01. Произведено 300 независимых выстрелов. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа попаданий в цель.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$
p_i	0,1	0,2	0,7

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y=4X^2$, $Z=2+\operatorname{ctg} X$.

Вариант 10

1. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживаются. Посажено два куста помидоров. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число прижитых растений? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В группе 10 юношей, которые играют, набрасывая кольца на колышек. Для шести из них вероятность попадания кольца на колышек равна 0,6, а для остальных — 0,5. По жребию отобрано пятеро юношей. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число юношей с лучшей подготовкой среди отобранных лиц? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Набрасываются кольца на колышек до первого попадания. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа брошенных колец, если вероятность набрасывания кольца на колышек при каждом испытании постоянна и равна 0,9.

4. Имеется общество из 500 человек. Считая, что вероятность рождения в фиксированный день равна $\frac{1}{365}$, составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа людей, родившихся 1 января.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-2	1	2
p_i	0,3	0,3	0,4

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y=3X^2$, $Z=e+e^X$.

Вариант 11

1. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число появления герба при трех подбрасываниях правильной монеты? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В одной студенческой группе обучается 20 студентов, среди которых 5 отличников. По жребию отобрано семь студентов. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число отличников среди отобранных студентов? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,6. Стрелок ведет огонь по мишени до первого попадания. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа израсходованных патронов до первого попадания.

4. Аппаратура содержит 200 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,005. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа отказавших элементов.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-2	0	1	2
p_i	0,1	0,1	0,5	0,3

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y=-2X-2$, $Z=X^2$.

Вариант 12

1. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число выпадения пятерки при четырех подбрасываниях правильной игральной кости? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. Студент подготовил 24 вопроса из 30 экзаменационных вопросов. Наудачу выбранный студентом экзаменационный билет состоит из шести вопросов. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число вопросов в билете, на которые студент знает вопрос? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,6. Стрелок ведет огонь по мишени до первого попадания. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа израсходованных патронов.

4. В течение часа коммутатор получает 40 вызовов. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа вызовов, полученных коммутатором за четверть часа, в течение которых телефонистка отлучалась.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-2	-1	1	2
p_i	0,2	0,1	0,5	0,2

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y=|X|+2$, $Z=X^3$.

Вариант 13

1. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число попаданий при пяти бросках? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В личной библиотеке у некоторого лица 10 книг, 3 из которых книги по математике. Наудачу выбираются две книги. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число книг по математике среди выбранных книг? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Правильная игральная кость бросается до первого выпадения шестерки. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа бросков.

4. Среднее число ошибочных соединений, приходящихся на одного телефонного абонента в течение года, равно 10. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа ошибочных соединений, приходящихся на одного абонента в течение полугода.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-2	-1	1	2
p_i	0,2	0,1	0,5	0,2

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y=4X$, $Z=X^2-5$.

Вариант 14

1. На самолете имеются шесть одинаковых двигателей. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна 0,8. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число двигателей, в которых могут возникнуть неполадки в полете? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В личной библиотеке у некоторого лица 12 книг, 5 из которых книги по математике. Наудачу выбираются три книги. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число книг по математике среди выбранных книг? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Правильная игральная кость бросается до первого выпадения шестерки. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа бросков до выпадения шестерки.

4. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа страниц без опечаток, если проверяемая книга насчитывает 500 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,003.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-2	-1	2	5
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y=|X-2|$, $Z=X^2+5$.

Вариант 15

1. Испытываются семь независимо работающих одинаковых прибора. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число отказавших приборов? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. Студент подготовил 20 вопросов из 35 экзаменационных вопросов. Наудачу выбранный студентом экзаменационный билет состоит из четырех вопросов. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число вопросов в билете, на которые студент знает вопрос? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. В урне 9 шаров, из них 4 белых. Наудачу последовательно, без возвращения извлекаются шары до первого появления белого шара. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа извлеченных черных шаров.

4. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа изделий, выдержавших испытание, если испытываются 400 деталей, а вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,992.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-2	-1	0	2
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Составить таблицу распределения вероятностей случайной величины $Y = |X^2 + X - 2|$.

Вариант 16

1. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число рабочих дней, в течение которых не будет перерасхода электроэнергии, если проверены пять рабочих дней? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В одной студенческой группе обучается 25 студентов, среди которых 6 отличников. По жребию отобрано три студента. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число отличников среди отобранных студентов? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. В урне 9 шаров, из них 4 белых. Наудачу последовательно, без возвращения извлекаются шары до первого появления белого шара. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа извлеченных шаров.

4. Упаковщик укладывает 900 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,005. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа деталей, проверенных ОТК.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-2	-1	2	5
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Составить таблицу распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2 + 3X - 5$.

Вариант 17

1. Контрольная работа состоит из шести задач. Вероятность выполнения студентом каждой задачи равна 0,4. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число выполненных задач? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В группе 10 юношей, которые играют, набрасывая кольца на колышек. Для шести из них вероятность попадания кольца на колышек равна 0,6, а для остальных — 0,5. По жребию отобрано двое юношей. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число юношей с лучшей подготовкой среди отобранных лиц? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Студент знает 20 вопросов из 35 тестовых вопросов. Преподаватель задает вопросы студенту до его первого верного ответа. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа заданных вопросов.

4. Электростанция обслуживает сеть с 700 лампочек, вероятность включения каждой из которых за время t равна 0,01. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа лампочек, не включенных за время t.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-100	-10	10	100
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = \lg |X|$, $Z = \dfrac{X}{20}$.

Вариант 18

1. В горном районе создано семь автоматических сейсмических станций. Каждая станция в течение года может выйти из строя с вероятностью 0,9. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число станций, вышедших из строя в одном рассматриваемом году? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. Из полного набора костей домино наудачу выбирают четыре кости. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число дублей среди выбранных костей? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Студент знает 20 вопросов из 35 тестовых вопросов. Преподаватель задает вопросы студенту до его первого верного ответа. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа неверных ответов.

4. Некто приобрел 200 билетов лотереи. Известно, что вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,002. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа приобретенных выигрышных билетов.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-8	-4	4	8
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = \log_2 |X|$, $Z = 3X - 10$.

Вариант 19

1. Контрольная работа состоит из пяти вопросов. На каждый вопрос приведено пять ответов, один из которых правильный. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число угаданных правильных ответов? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. Буквы слова ВЕРОЯТНОСТЬ написаны на одинаковых карточках. Наудачу извлекаются три карточки. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число гласных букв среди извлеченных карточек? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Из полного набора костей домино наудачу последовательно, без возвращения извлекается по одной кости домино до первого появления дубля. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа извлеченных костей домино.

4. Прядильщица обслуживает 200 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одного часа равна 0,02. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа веретен, на которых не произойдет обрыва нити в течение одного часа.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	-9	-3	3	9
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y=\log_3|X|$, $Z=3X-2$.

Вариант 20

1. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживаются. Посажено шесть кустов помидоров. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число прижитых растений? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В урне 9 шаров, из них 4 белых. Наудачу извлекают два шара. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число белых шаров среди извлеченных шаров? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Буквы слова ВЕРОЯТНОСТЬ написаны на одинаковых карточках. Наудачу последовательно, без возвращения извлекается по одной карточке до первого появления гласной буквы. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа извлеченных карточек.

4. В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа вызовов, полученных коммутатором за 10 минут, в течение которых телефонистка отлучалась.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	−2	−1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = 2X^2 + 8$, $Z = X - 1$.

Вариант 21

1. Известно, что 5% радиоламп, изготовляемых заводом, являются нестандартными. Проверено семь радиоламп. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число нестандартных радиоламп? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В ящике 10 деталей, среди которых 4 стандартных. Наудачу извлекаются четыре детали. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число нестандартных деталей среди отобранных? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Буквы слова ВЕРОЯТНОСТЬ написаны на одинаковых карточках. Наудачу последовательно, без возвращения извлекается по одной карточке до первого появления гласной буквы. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа извлеченных карточек с согласными буквами.

4. Аппаратура содержит 400 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,002. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа отказавших элементов.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	−1	0	1
p_i	0,3	0,3	0,4

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = 1 - 2X$, $Z = e^{|X|} + 2$.

Вариант 22

1. В котельной пять одинаковых котлов. Вероятность бесперебойной работы в течение месяца каждого котла равна 0,6. Какой

закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число вышедших из строя котлов в рассматриваемом месяце? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. В колоде 36 карт. Наудачу извлекают три карты. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число тузов среди выбранных карт? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Известно, что 5% радиоламп, изготовляемых заводом, являются нестандартными. Из партии в 40 радиоламп последовательно, без возвращения извлекается по одной радиолампе до первого появления стандартной детали. Составьте таблицу распределения вероятностей числа извлеченных деталей.

4. Имеется общество из 600 человек. Считая, что вероятность рождения в фиксированный день равна $\frac{1}{365}$, составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа людей, не родившихся 1 января.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
p_i	0,2	0,1	0,2	0,5

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = 3X^2$, $Z = \operatorname{ctg}\left(X - \frac{\pi}{4}\right)$.

Вариант 23

1. Вероятность того, что стрелок попадет в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится шесть независимых выстрелов. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число пробоин в мишени? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. Имеются десять билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу берут четыре билета. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число билетов на первый ряд среди выбранных билетов? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Известно, что 5% радиоламп, изготовляемых заводом, являются нестандартными. Из партии в 40 радиоламп последовательно, без возвращения извлекается по одной радиолампе до первого появления стандартной детали. Составьте таблицу распределения вероятностей числа извлеченных нестандартных деталей.

4. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,02. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа абонентов, не позвонивших на коммутатор в течение часа.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
p_i	0,2	0,1	0,2	0,5

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = 5X$, $Z = \operatorname{tg}\left(X + \frac{\pi}{4}\right)$.

Вариант 24

1. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число выпадения двойки при семи подбрасываниях правильной игральной кости? Составьте таблицу распределения вероятностей.

2. Из 20 контрольных работ, среди которых 5 оценены на отлично, наугад извлекаются три работы. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число работ, оцененных на отлично и оказавшихся в выборке? Составьте таблицу распределения вероятностей.

3. Имеются десять билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу последовательно, без возвращения извлекается по одному билету до первого появления билета на первый ряд. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа извлеченных билетов.

4. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,03. Произведено 100 независимых выстрелов. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа промахов.

5. Задано распределение дискретной случайной величины X:

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
p_i	0,2	0,1	0,2	0,5

Составить таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = 4 - 2X$, $Z = \cos\left(X - \frac{\pi}{4}\right)$.

§ 2.3. Функция распределения вероятностей случайной величины

Пусть $(\Omega;\ \mathfrak{I};\ P)$ — вероятностное пространство, а $X(\omega)$ — случайная величина на этом пространстве.

Функция $F(x) = P\{\omega\colon X(\omega) < x\}$, $x \in R$, называется *функцией распределения вероятностей* случайной величины $X(\omega)$.

Отметим следующие важные свойства функций распределения:

1. если $a < b$, то $P\{\omega\colon a \leqslant X(\omega) < b\} = F(b) - F(a)$;
2. $F(x)$ неубывающая функция;
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
4. $F(x)$ непрерывна слева;
5. $P\{\omega\colon X(\omega) \leqslant x\} = F(x+0)$;
6. $P\{\omega\colon X(\omega) \geqslant x\} = 1 - F(x)$;
7. $P\{\omega\colon X(\omega) = x\} = F(x+0) - F(x)$.

Функции распределения могут иметь разрывы только первого рода. Величина $F(x+0) - F(x)$ называется скачком функции и равна вероятности события $\{X(\omega) = x\}$. Скачок функции распределения положителен во всех точках разрыва и равен нулю во всех точках непрерывности $F(x)$. Множество точек разрыва $F(x)$ не более чем счетно.

Дискретными функциями распределения называются функции распределения дискретных случайных величин. Такие функции распределения можно представить в виде

$$F(x) = P(X(\omega) < x) = \sum_{i\colon x_i < x} p(x_i)\,,\ p(x_i) > 0,\ \sum_i p(x_i) = 1,$$

где $\{x_i\}$ — множество точек разрыва $F(x)$.

Случайная величина с непрерывной функцией распределения вероятностей называется непрерывной.

Абсолютно непрерывными функциями распределения называются функции распределения непрерывных случайных величин, допускающие представление

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du. \qquad (*)$$

Функция распределения непрерывных случайных величин, не допускающая представление (*), называется сингулярной. Примером такой функции является канторова функция, определяемая равенствами $F(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $F(x) = 1$ при $x > 1$ и

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{F(3x)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{1+F(3x-2)}{2}, & \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Теорема Лебега. Каждая функция распределения $F(x)$ единственным образом может быть представлена в виде

$$F(x) = a_1F_1(x) + a_2F_2(x) + a_3F_3(x),$$

где $a_i \geqslant 0$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$; $F_1(x)$ — дискретная функция распределения, $F_2(x)$ — абсолютно непрерывная функция распределения, $F_3(x)$ — сингулярная функция распределения.

Теорема. Пусть $F(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $F(x)$ неубывающая функция на $(-\infty; +\infty)$;
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
3. $F(x)$ непрерывна слева.

Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega; \Im; P)$ и случайная величина $X(\omega)$ на этом пространстве такая, что функция распределения $X(\omega)$ равна $F(x)$.

Пусть X — непрерывная случайная величина с функцией распределения $F_X(x)$, $y = G(x)$ — монотонно возрастающая функция, $x = g(y)$ — обратная функция. Тогда функция распределения случайной величины $Y = G(X)$ равна

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(G(X) < y) = P(X < g(y)) = F_X(g(y)).$$

Если $y = G(x)$ — монотонно убывающая функция, то

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(G(X) < y) = P(X > g(y)) = 1 - F_X(g(y)).$$

Задача 1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	0	3	5
p_i	0,1	0,8	0,1

Найти функцию распределения вероятностей X.

Решение. Для дискретной случайной величины

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{i:\, x_i < x} P(X = x_i)\,.$$

Следовательно,

если $x \leqslant 0$, то $F(x) = 0$;

если $0 < x \leqslant 3$, то $F(x) = 0{,}1$;

если $3 < x \leqslant 5$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}8 = 0{,}9$;

если $x > 5$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}8 + 0{,}1 = 1$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}1 & \text{при } 0 < x \leqslant 3, \\ 0{,}9 & \text{при } 3 < x \leqslant 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Задача 2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1, \\ 0{,}25 & \text{при } -1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}65 & \text{при } 2 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(-1 < X < 5)$, $P(-1 \leqslant X < 4)$, $P(2 < X \leqslant 5)$, $P(2 \leqslant X < 4)$, $P(X < 2)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Y = \log_2 |X|$.

Решение. а) Функция $F(x)$ кусочно-постоянная, точками скачка функции являются $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$. Поэтому случайная величина X является дискретной и принимает значения $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

б) В силу определения функции $F(x)$, а также в силу ее непрерывности слева, имеем:

$$P(-1 < X < 5) = F(5) - F(-1+0) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75,$$

$P(-1 \leqslant X < 4) = F(4) - F(-1) = 0{,}65 - 0 = 0{,}65,$
$P(2 < X \leqslant 5) = F(5+0) - F(2+0) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35,$
$P(2 \leqslant X < 4) = F(4) - F(2) = 0{,}65 - 0{,}25 = 0{,}4,$
$P(X < 2) = F(2) = 0{,}25.$

в) Найдем закон распределения вероятностей случайной величины X. Так как вероятность $P(X=a)$ для дискретной случайной величины равна скачку функции $F(x)$ распределения вероятностей в точке $x=a$, имеем:

x_i	-1	2	4
p_i	0,25	0,4	0,35

Случайная величина Y связана со случайной величиной X функциональной зависимостью $Y=\log_2|X|$, поэтому она может принимать значения $y_1=\log_2|x_1|=\log_2 1=0$, $y_2=\log_2|x_2|=\log_2 2=1$, $y_3=\log_2|x_3|=\log_2 4=2$. Найдем соответствующие вероятности:

$$P(Y=0)=P(X=-1)=0{,}25,\ P(Y=1)=P(X=2)=0{,}4,$$
$$P(Y=2)=P(X=4)=0{,}35.$$

Таким образом, получим таблицу распределения вероятностей случайной величины Y:

y_i	0	1	2
p_i	0,25	0,4	0,35

Тогда

$$F_y(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ 0{,}25 & \text{при } 0<x\leqslant 1,\\ 0{,}65 & \text{при } 1<x\leqslant 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Задача 3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(0;\ 1)$; б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение из интервала $(1;\ +\infty)$.

Решение. а) В силу непрерывности заданной функции $F(x)$ распределения вероятностей имеем

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

б) Найдем вероятность события A, состоящего в том, что случайная величина X примет значение из интервала $(1;\ +\infty)$:

$$P(A) = P(1 < X < +\infty) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Проводится 2 независимых испытания. Каждое испытание имеет только два исхода: событие A наступило, событие A не наступило. Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна 0,5. Следовательно, эксперимент представляет собой схему Бернулли. Событие $(m \geqslant 1)$ состоит в том, что событие A наступит хотя бы один раз. По формуле Бернулли найдем

$$P_2(m=0) = C_2^0 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}25.$$

Тогда

$$P(m \geqslant 1) = 1 - P(m=0) = 0{,}75.$$

Задача 4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины

$$Y = \exp(-X).$$

Решение. Функция $F_X(x)$ непрерывная, а функция $y = \exp(-x)$ — непрерывная и монотонно убывающая, поэтому для определения $F_Y(y)$ можно применить формулу $F_Y(y) = 1 - F_X(g(y))$. Обратную функцию $x = g(y)$ находим, решая уравнение $y = \exp(-x)$ относительно x, получим $g(y) = -\ln y$, $y > 0$. Далее находим:

$$F_X(g(y)) = F_X(-\ln y) = \begin{cases} 1 - y & \text{при } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{при } y \geqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leqslant 0, \\ y & \text{при } 0 < y < 1, \\ 1 & \text{при } y \geqslant 1. \end{cases}$$

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	0	2	4
p_i	0,3	0,5	0,2

а) найти функцию распределения X и построить ее график;
б) указать отрезки, равные $P(0 < X < 5)$, $P(0 < X < 4)$, $P(X=4)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 2,\\ 0{,}4 & \text{при } 2<x\leqslant 3,\\ 0{,}7 & \text{при } 3<x\leqslant 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?
б) Найти $P(2<X<4)$, $P(2\leqslant X<4)$, $P(2<X\leqslant 4)$, $P(2\leqslant X\leqslant 4)$, $P(X<4)$.
в) Найти функцию распределения случайной величины $Y=3X^2$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant \dfrac{3}{2},\\ 2x-3 & \text{при } \dfrac{3}{2}<x\leqslant 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (1,75; 2); б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X оба раза примет значение из интервала (1,7; 1,9).

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-\infty;\ 1)$; б) в результате четырех независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение из интервала $(0;\ \ln 2)$.

5. Функция распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $F(x) = A + B \operatorname{arcctg} x$, $-\infty < x < +\infty$. Найти параметры A и B.

Вариант 2

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,6	0,2

а) найти функцию распределения X и построить ее график;
б) указать отрезки, равные $P(1 < X < 3)$, $P(0 < X < 3)$, $P(X > 2)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}3 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}8 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?
б) Найти $P(1 < X < 2)$, $P(1 \leqslant X < 2)$, $P(1 < X \leqslant 2)$, $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$, $P(X = 1)$.
в) Найти функцию распределения случайной величины $Y = \exp(X)$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 2, \\ 0{,}5x - 1 & \text{при } 2 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(2{,}5;\ 3)$; б) в результате трех независимых испытаний случайная величина X ровно два раза примет значение из интервала $(2;\ 3)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \sqrt[3]{x} & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (0; 0,5); б) в результате пяти независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение из интервала (0,2; $+\infty$).

5. Функция распределения вероятностей случайной величины X имеет вид: $F(x) = A + B \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$. Найти параметры A и B.

Вариант 3

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	-1	0	1
p_i	0,3	0,4	0,3

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(0 < X < 2)$, $P(-1 < X < 2)$, $P(X = 0)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 2, \\ 0{,}5 & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}9 & \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(2 < X < 4)$, $P(2 \leqslant X < 4)$, $P(2 < X \leqslant 4)$, $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$, $P(X < 4)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Z = X^2 - 3$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1, \\ 2x+2 & \text{при } -1 < x \leqslant -0{,}5, \\ 1 & \text{при } x > -0{,}5. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (-1; $-0{,}75$); б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение из интервала ($-0{,}9$; $-0{,}7$).

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ x^3 & \text{при } 0<x\leqslant 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(0{,}5;\ +\infty)$; б) в результате четырех независимых испытаний случайная величина X ровно два раза примет значение из интервала $(0{,}1;\ 0{,}2)$.

5. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, принимающей значения только из интервала $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$, имеет на указанном интервале вид $F(x)=A+B\sin x$. Найти параметры A и B.

Вариант 4

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	-2	0	2
p_i	0,35	0,45	0,2

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(-4<X<2)$, $P(-2<X<2)$, $P(X=2)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -1,\\ 0{,}5 & \text{при } -1<x\leqslant 3,\\ 0{,}9 & \text{при } 3<x\leqslant 5,\\ 1 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(-1<X<5)$, $P(-1\leqslant X<4)$, $P(-1<X\leqslant 4)$, $P(-1\leqslant X\leqslant 5)$, $P(X>3)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Z=3X^2$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -2,\\ 3x+6 & \text{при } -2<x\leqslant -\dfrac{5}{3},\\ 1 & \text{при } x>-\dfrac{5}{3}.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-1{,}75;\ -1)$; б) в результате трех независимых испытаний случайная величина X ровно один раз примет значение из интервала $(-2;\ -1{,}75)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(1;\ +\infty)$; б) в результате пяти независимых испытаний случайная величина X хотя бы два раза примет значение из интервала $(0;\ 1)$.

5. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, принимающей значения только из интервала $\left(-\frac{\pi}{4};\ -\frac{\pi}{2}\right)$, имеет на указанном интервале вид $F(x)=A+B\cos x$. Найти параметры A и B.

Вариант 5

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	5	7	9
p_i	0,1	0,4	0,5

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(4<X<9)$, $P(5<X<9)$, $P(X=9)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 2,\\ 0{,}2 & \text{при } 2<x\leqslant 5,\\ 0{,}6 & \text{при } 5<x\leqslant 10,\\ 1 & \text{при } x>10.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(2<X<10)$, $P(2\leqslant X<6)$, $P(2<X\leqslant 6)$, $P(2\leqslant X\leqslant 10)$, $P(X\geqslant 5)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Z=5X-3$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 1,\\ 0{,}1(x-1+\lg x) & \text{при } 1<x\leqslant 10,\\ 1 & \text{при } x>10.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-\infty;\ 5)$; б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X оба раза примет значение из интервала $(1;\ 4)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{9}x^2 & \text{при } 0<x\leqslant 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-2;\ 2)$; б) в результате четырех независимых испытаний случайная величина X хотя бы четыре раза примет значение из интервала $(1;\ 2)$.

5. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, принимающей значения только из интервала $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, имеет на указанном интервале вид $F(x)=A+B\sin x$. Найти параметры A и B.

Вариант 6

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	2	4	6
p_i	0,15	0,3	0,55

а) найти функцию распределения X и построить ее график;
б) указать отрезки, равные $P(2<X<6)$, $P(1<X<6)$, $P(X=6)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -2,\\ 0{,}2 & \text{при } -2<x\leqslant 0,\\ 0{,}6 & \text{при } 0<x\leqslant 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(-2 < X < 1)$, $P(-2 \leqslant X < 3)$, $P(0 < X \leqslant 3)$, $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$, $P(X \leqslant 3)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Z = |X| + 5$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \ln x & \text{при } 1 < x \leqslant e, \\ 1 & \text{при } x > e. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(1; \dfrac{e}{2}\right)$; б) в результате трех независимых испытаний случайная величина X все три раза примет значение из интервала $\left(\dfrac{e}{2}; +\infty\right)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 8, \\ (x-8)^2 & \text{при } 8 < x \leqslant 9, \\ 1 & \text{при } x > 9. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-\infty; 8{,}5)$; б) в результате пяти независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение из интервала $(8{,}5; +\infty)$.

5. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, принимающей значения только из интервала $\left(-\dfrac{\pi}{4}; 0\right)$, имеет на указанном интервале вид $F(x) = A + B \cos x$. Найти параметры A и B.

Вариант 7

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	-4	-2	0
p_i	0,4	0,3	0,3

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(-4<X<-1)$, $P(-4<X<0)$, $P(X \leqslant 0)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x \leqslant 4,\\ 0{,}45 & \text{при } 4<x \leqslant 7,\\ 0{,}8 & \text{при } 7<x \leqslant 8,\\ 1 & \text{при } x>8.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(4<X<8)$, $P(4 \leqslant X<9)$, $P(4<X \leqslant 7)$, $P(4 \leqslant X \leqslant 7)$, $P(X=4)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Z=2X+5$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)=1-\dfrac{\operatorname{arcctg} x}{\pi}$, $-\infty<x<+\infty$. Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(0;\ 1)$; б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X ни разу не примет значения из интервала $(0;\ \sqrt{3})$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x \leqslant 5,\\ x^2-10x+25 & \text{при } 5<x \leqslant 6,\\ 1 & \text{при } x>6.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-\infty;\ 5{,}5)$; б) в результате четырех независимых испытаний случайная величина X ровно два раза примет значение из интервала $(5{,}1;\ 5{,}2)$.

5. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, принимающей значения только из интервала $(3;\ 5)$, имеет на указанном интервале вид $F(x)=Ax+B$. Найти параметры A и B.

Вариант 8

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	-2	4	10
p_i	0,35	0,55	0,1

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(-2<X<5)$, $P(-1<X<4)$, $P(X=4)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 3,\\ 0{,}4 & \text{при } 3<x\leqslant 5,\\ 0{,}85 & \text{при } 5<x\leqslant 7,\\ 1 & \text{при } x>7.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(3<X<6)$, $P(3\leqslant X<7)$, $P(2<X\leqslant 5)$, $P(2\leqslant X\leqslant 7)$, $P(X<4)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Z=\exp(X)$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)=0{,}5+\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\pi}$, $-\infty<x<+\infty$. Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(0;\ \sqrt{3})$; б) в результате трех независимых испытаний случайная величина X два раза примет значение из интервала $(1;\ +\infty)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 3,\\ 0{,}25(x^2-3x) & \text{при } 3<x\leqslant 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-\infty;\ 3{,}5)$; б) в результате пяти независимых испытаний случайная величина X хотя бы четыре раза примет значение из интервала $(3{,}2;\ 3{,}5)$.

5. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, принимающей значения только из интервала $(-1;\ 2)$, имеет на указанном интервале вид $F(x)=Ax+B$. Найти параметры A и B.

Вариант 9

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	22	33	44
p_i	0,35	0,4	0,25

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(22<X<45)$, $P(30<X<44)$, $P(X=44)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -2,\\ 0{,}3 & \text{при } -2<x\leqslant 3,\\ 0{,}77 & \text{при } 3<x\leqslant 8,\\ 1 & \text{при } x>8.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(-2<X<8)$, $P(-2\leqslant X<7)$, $P(0<X\leqslant 8)$, $P(3\leqslant X\leqslant 7)$, $P(X>-2)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Y=3X^2$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -2,\\ 0{,}5+\dfrac{\arcsin\frac{x}{2}}{\pi} & \text{при } -2<x\leqslant 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(1;\ 2)$; б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение из интервала $(0;\ +\infty)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 4,\\ x^2-8x+16 & \text{при } 4<x\leqslant 5,\\ 1 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-\infty;\ 4{,}5)$; б) в результате четырех независимых испытаний случайная величина X ровно три раза примет значение из интервала $(4{,}3;\ 4{,}8)$.

5. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, принимающей значения только из интервала $(0{,}5;\ 4{,}5)$, имеет на указанном интервале вид $F(x)=Ax+B$. Найти параметры A и B.

Вариант 10

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	0	3	6
p_i	0,15	0,45	0,4

а) найти функцию распределения X и построить ее график;
б) указать отрезки, равные $P(-2 < X < 5)$, $P(0 < X < 6)$, $P(X = 3)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 4, \\ 0{,}44 & \text{при } 4 < x \leqslant 5, \\ 0{,}75 & \text{при } 5 < x \leqslant 6, \\ 1 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?
б) Найти $P(3 < X < 6)$, $P(3 \leqslant X < 8)$, $P(3 < X \leqslant 6)$, $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$, $P(X \leqslant 4)$.
в) Найти функцию распределения случайной величины $Z = e + e^X$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 4^x & \text{при } -\infty < x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-1;\ 2)$; б) в результате трех независимых испытаний случайная величина X ровно один раз примет значение из интервала $(-\infty;\ -2)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 2, \\ 0{,}5x - 1 & \text{при } 2 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(3;\ +\infty)$; б) в результате пяти независимых испытаний случайная величина X хотя бы два раза примет значение из интервала $(3;\ 4)$.

5. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, принимающей значения только из интервала (1; 3), имеет на указанном интервале вид $F(x) = Ax^2 + B$. Найти параметры A и B.

Вариант 11

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	1	5	9
p_i	0,33	0,55	0,12

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(1 < X < 9)$, $P(0 < X < 9)$, $P(X = 5)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 7, \\ 0{,}35 & \text{при } 7 < x \leqslant 9, \\ 0{,}75 & \text{при } 9 < x \leqslant 11, \\ 1 & \text{при } x > 11. \end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(7 < X < 11)$, $P(5 \leqslant X < 11)$, $P(5 < X \leqslant 11)$, $P(7 \leqslant X \leqslant 11)$, $P(X \geqslant 9)$.

в) Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Z = 2X - 3$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (1; 3,5); б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X ровно один раз примет значение из интервала (–2; +∞).

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x^4 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y = X^4$.

5. Продолжение задачи 4. Определить вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина Y примет значение,

заключенное в интервале $(-\infty; -2)$; б) в результате четырех независимых испытаний случайная величина Y хотя бы два раза примет значение из интервала $(-3; -2)$.

Вариант 12

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	-2	0	2
p_i	0,25	0,5	0,25

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(-2<X<5)$, $P(-2<X<2)$, $P(X<0)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 3,\\ 0{,}55 & \text{при } 3<x\leqslant 7,\\ 0{,}65 & \text{при } 7<x\leqslant 10,\\ 1 & \text{при } x>10.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(3<X<10)$, $P(2\leqslant X<7)$, $P(2<X\leqslant 7)$, $P(3\leqslant X\leqslant 10)$, $P(X=7)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Y=X^2$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(1; 2)$; б) в результате трех независимых испытаний случайная величина X один раз примет значение из интервала $(\ln 2; +\infty)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 2,\\ 0{,}5x-1 & \text{при } 2<x\leqslant 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y=-2X-2$.

5. Продолжение задачи 4. Определить вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина Y примет значение, заключенное в интервале $(-\infty; 8)$; б) в результате пяти независи-

мых испытаний случайная величина Y хотя бы три раза примет значение из интервала (6; 10).

Вариант 13

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	0	5	10
p_i	0,33	0,44	0,23

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(0<X<7)$, $P(0<X<10)$, $P(X>5)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -2,\\ 0{,}35 & \text{при } -2<x\leqslant -1,\\ 0{,}7 & \text{при } -1<x\leqslant 0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(-2 < X < 0)$, $P(-2 \leqslant X < 0)$, $P(-2 < X \leqslant 0)$, $P(-2 \leqslant X \leqslant 0)$, $P(X=-2)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Y=|X|+2$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x & \text{при } -\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant 0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$; б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение из интервала $\left(-\infty;\ -\dfrac{\pi}{6}\right)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{3} & \text{при } 1<x\leqslant 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y=\sqrt{X}$.

5. Продолжение задачи 4. Определить вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина Y примет значение, заключенное в интервале $(1{,}5;\ +\infty)$; б) в результате четырех независимых испытаний случайная величина Y три раза примет значение из интервала $(1;\ 1{,}5)$.

Вариант 14

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	-1	5	14
p_i	0,15	0,25	0,6

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(-1<X<14)$, $P(0<X<14)$, $P(X\geqslant 5)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 4,\\ 0{,}65 & \text{при } 4<x\leqslant 5,\\ 0{,}85 & \text{при } 5<x\leqslant 6,\\ 1 & \text{при } x>6.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(3<X<6)$, $P(3\leqslant X<7)$, $P(4<X\leqslant 6)$, $P(4\leqslant X\leqslant 7)$, $P(X=6)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Y=4X$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \frac{2}{\sqrt{3}}\sin x & \text{при } 0<x\leqslant \frac{\pi}{3},\\ 1 & \text{при } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$; б) в результате трех независимых испытаний случайная величина X ни разу не примет значения из интервала $\left(0;\ \frac{\pi}{6}\right)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -1,\\ 2x+2 & \text{при } -1<x\leqslant -0{,}5,\\ 1 & \text{при } x>-0{,}5.\end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y=|X|$.

5. Продолжение задачи 4. Определить вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина Y примет значение, заключенное в интервале $(0{,}5;\ +\infty)$; б) в результате пяти независимых испытаний случайная величина Y хотя бы один раз примет значение из интервала $(-\infty;\ 0{,}5)$.

Вариант 15

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	3	6	9
p_i	0,65	0,25	0,1

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(3<X<9)$, $P(2<X<9)$, $P(X\leqslant 6)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 2,\\ 0{,}22 & \text{при } 2<x\leqslant 3,\\ 0{,}55 & \text{при } 3<x\leqslant 7,\\ 1 & \text{при } x>7.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(2<X<7)$, $P(2\leqslant X<8)$, $P(3<X\leqslant 8)$, $P(3\leqslant X\leqslant 7)$, $P(X=7)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Z=X^2+5$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant\dfrac{3\pi}{4},\\ \cos 2x & \text{при } \dfrac{3\pi}{4}<x\leqslant\pi,\\ 1 & \text{при } x>\pi.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(-\infty;\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$; б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X один раз примет значение из интервала $\left(\dfrac{7\pi}{8};\ \pi\right)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 2,\\ x^2-4 & \text{при } 2<x\leqslant\sqrt{5},\\ 1 & \text{при } x>\sqrt{5}.\end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y=X^2$.

5. Продолжение задачи 4. Определить вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина Y примет значение, заключенное в интервале $(1;\ +\infty)$; б) в результате четырех независимых испытаний случайная величина Y хотя бы три раза примет значение из интервала $(2;\ \sqrt{5})$.

Вариант 16

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	-8	2	4
p_i	0,75	0,15	0,1

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(-8 < X < 4)$, $P(-8 < X < 8)$, $P(X=4)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -4,\\ 0{,}1 & \text{при } -4<x\leqslant 3,\\ 0{,}4 & \text{при } 3<x\leqslant 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(-4 < X < 4)$, $P(3 \leqslant X < 4)$, $P(3 < X \leqslant 4)$, $P(-4 \leqslant X \leqslant 4)$, $P(X < 4)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Y=|X-2|$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0<x\leqslant \dfrac{\pi}{4},\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$; б) в результате трех независимых испытаний случайная величина X все три раза примет значение из интервала $\left(-\infty;\ \dfrac{\pi}{6}\right)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 4,\\ \sqrt{x}-2 & \text{при } 4<x\leqslant 9,\\ 1 & \text{при } x>9.\end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y=\sqrt{X}$.

5. Продолжение задачи 4. Определить вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина Y примет значение, заключенное в интервале $(2{,}5;\ +\infty)$; б) в результате пяти независимых испытаний случайная величина Y хотя бы два раза примет значение из интервала $(2;\ 2{,}5)$.

Вариант 17

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	0	1	2
p_i	0,78	0,11	0,11

а) найти функцию распределения X и построить ее график;
б) указать отрезки, равные $P(0 < X < 2)$, $P(0 < X < 3)$, $P(X=2)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x \leqslant -3,\\ 0{,}15 & \text{при } -3<x\leqslant 3,\\ 0{,}6 & \text{при } 3<x\leqslant 10,\\ 1 & \text{при } x>10.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?
б) Найти $P(-3 < X < 10)$, $P(-2 \leqslant X < 10)$, $P(-3 < X \leqslant 12)$, $P(-2 \leqslant X \leqslant 3)$, $P(X > 3)$.
в) Найти функцию распределения случайной величины $Y=|X-3|$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 1,\\ \ln x & \text{при } 1<x\leqslant e,\\ 1 & \text{при } x>e.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(\sqrt{e};\ +\infty)$; б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение из интервала $(1;\ \sqrt[3]{e})$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -2,\\ \dfrac{x+2}{5} & \text{при } -2<x\leqslant 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y=X^2$.

5. Продолжение задачи 4. Определить вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина Y примет значение, заключенное в интервале $(-\infty;\ 8)$; б) в результате четырех незави-

симых испытаний случайная величина Y два раза примет значение из интервала (6; 9).

Вариант 18

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	4	8	12
p_i	0,44	0,44	0,12

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(4 < X < 12)$, $P(3 < X < 12)$, $P(X = 4)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -4, \\ 0{,}33 & \text{при } -4 < x \leqslant 0, \\ 0{,}55 & \text{при } 0 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(-4 < X < 4)$, $P(-4 \leqslant X < 0)$, $P(-4 < X \leqslant 4)$, $P(-4 \leqslant X \leqslant 0)$, $P(X \leqslant 3)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Y = |X| + 2$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ e^x - 1 & \text{при } 0 < x \leqslant \ln 2, \\ 1 & \text{при } x > \ln 2. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (0; 1); б) в результате трех независимых испытаний случайная величина X два раза примет значение из интервала ($\ln 1{,}5$; $\ln 1{,}7$).

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 2, \\ (x-2)^2 & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y = X + 3$.

5. Продолжение задачи 4. Определить вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина Y примет значение,

заключенное в интервале (5,5; 6); б) в результате пяти независимых испытаний случайная величина Y хотя бы три раза примет значение из интервала (5,5; $+\infty$).

Вариант 19

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	5	10	15
p_i	0,66	0,33	0,01

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(5 < X < 15)$, $P(4 < X < 14)$, $P(X = 5)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1, \\ 0{,}45 & \text{при } -1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}6 & \text{при } 2 < x \leqslant 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(-1 < X < 4)$, $P(-1 \leqslant X < 5)$, $P(0 < X \leqslant 4)$, $P(0 \leqslant X \leqslant 5)$, $P(X \geqslant 2)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Z = X^2 - 5$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{при } 1 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (1; 2); б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X по крайней мере один раз примет значение из интервала (1,5; $+\infty$).

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1, \\ \sqrt{1-x^2} & \text{при } -1 < x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-\infty;\ -0{,}5)$; б) в результате четырех независимых испытаний случайная величина X ровно два раза примет значение из интервала $(-0{,}5;\ 0)$.

5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y = \dfrac{1}{X}$.

Вариант 20

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	6	12	18
p_i	0,56	0,34	0,1

а) найти функцию распределения X и построить ее график;
б) указать отрезки, равные $P(6 < X < 18)$, $P(6 < X < 20)$, $P(X < 12)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -3, \\ 0{,}25 & \text{при } -3 < x \leqslant -1, \\ 0{,}4 & \text{при } -1 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?
б) Найти $P(-3 < X < 1)$, $P(-2 \leqslant X < 0)$, $P(-2 < X \leqslant 1)$, $P(-3 \leqslant X \leqslant 0)$, $P(X \geqslant -1)$.
в) Найти функцию распределения величины $Y = |X^2 + X - 2|$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}25x^2 & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-\infty;\ 1)$; б) в результате трех независимых испытаний случайная величина X ровно два раза примет значение из интервала $(0;\ 1{,}5)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{\pi}x\ \sin x & \text{при } 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(-\infty;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$; б) в результате пяти независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение из интервала $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y=\sqrt{X}$.

Вариант 21

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	-4	-2	0
p_i	0,24	0,24	0,52

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(-4<X<0)$, $P(-4<X<4)$, $P(X>-4)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 2,\\ 0{,}2 & \text{при } 2<x\leqslant 6,\\ 0{,}6 & \text{при } 6<x\leqslant 7,\\ 1 & \text{при } x>7.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(2<X<7)$, $P(2\leqslant X<7)$, $P(3<X\leqslant 6)$, $P(3\leqslant X\leqslant 6)$, $P(X\leqslant 6)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Y=|X-4|$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 5,\\ x-5 & \text{при } 5<x\leqslant 6,\\ 1 & \text{при } x>6.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (5,5; 6); б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X оба раза примет значение из интервала (5; 5,5).

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{1}{x} & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(-\infty;\ \dfrac{4}{\pi}\right)$; б) в результате четырех независимых испытаний случайная величина X хотя бы два раза примет значение из интервала $\left(\dfrac{4}{\pi};\ \dfrac{6}{\pi}\right)$.

5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{x}{\pi}+\dfrac{1}{2} & \text{при } -\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y=\sin X$.

Вариант 22

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	-6	-3	0
p_i	0,33	0,33	0,34

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(-6 < X < 0)$, $P(-7 < X < 0)$, $P(X \leqslant -3)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 2, \\ 0{,}43 & \text{при } 2 < x \leqslant 4, \\ 0{,}76 & \text{при } 4 < x \leqslant 6, \\ 1 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(3 < X < 6)$, $P(3 \leqslant X < 7)$, $P(2 < X \leqslant 6)$, $P(2 \leqslant X \leqslant 7)$, $P(X > 4)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Y = X^2 + 2X + 4$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 4, \\ 0{,}25x - 1 & \text{при } 4 < x \leqslant 8, \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (5; 6); б) в результате трех независимых испытаний случайная величина X два раза примет значение из интервала (7; 8).

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 - \cos x & \text{при } 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x \geqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(-\infty;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$; б) в результате пяти независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение из интервала $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y=X^2$.

Вариант 23

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	-4	-3	-2
p_i	0,23	0,54	0,23

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(-4<X<-2)$, $P(-5<X<-2)$, $P(X\geqslant -3)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ 0{,}65 & \text{при } 0<x\leqslant 3,\\ 0{,}85 & \text{при } 3<x\leqslant 6,\\ 1 & \text{при } x>6.\end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(0<X<6)$, $P(0\leqslant X<3)$, $P(3<X\leqslant 6)$, $P(2\leqslant X\leqslant 3)$, $P(X<6)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Y=|X^2-10|$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (0; 2); б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X оба раза примет значение из интервала $(-\infty;\ 1)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ 3x^2+2x & \text{при } 0<x\leqslant \dfrac{1}{3},\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (0,25; $+\infty$); б) в результате четырех независимых испытаний случайная величина X хотя бы два раза примет значение из интервала (0; 0,25).

5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = 0{,}5 + \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi}, \quad -\infty < x + \infty.$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y = \operatorname{arctg} X$.

Вариант 24

1. Случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	-5	-3	-1
p_i	0,3	0,5	0,2

а) найти функцию распределения X и построить ее график;

б) указать отрезки, равные $P(-5 < X < -1)$, $P(-3 < X < 0)$, $P(X = -3)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 0{,}11 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}33 & \text{при } 2 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

а) Какие значения может принимать случайная величина?

б) Найти $P(0 < X < 4)$, $P(2 \leqslant X < 4)$, $P(2 < X \leqslant 4)$, $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$, $P(X > 1)$.

в) Найти функцию распределения случайной величины $Z = \dfrac{X}{2}$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 0{,}5(x^2 - x) & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (0; 1,5); б) в результате трех независимых испытаний случайная величина X ровно два раза примет значение из интервала (1,2; 1,5).

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \exp\left\{\dfrac{2x}{1-x^2}\right\} & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Построить ее график. Найти вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-\infty;\ 2)$; б) в результате пяти независимых испытаний случайная величина X хотя бы два раза примет значение из интервала $(1;\ 2)$.

5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = 0{,}5 + \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi},\ -\infty < x +\infty.$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y = 0{,}5 + \dfrac{\operatorname{arctg} X}{\pi}$.

§ 2.4. Плотность распределения вероятностей случайной величины

Пусть $(\Omega;\ \mathfrak{Z};\ P)$ — вероятностное пространство, а $X(\omega)$ — случайная величина на этом пространстве с функцией распределения $F(x)$. Говорят, что случайная величина имеет плотность распределения вероятностей, если существует интегрируемая борелевская функция $f(x)$ такая, что для всех $x \in R$ выполнимо равенство

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du\,.$$

Функция $f(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* случайной величины $X(\omega)$.

Отметим следующие важные свойства плотности распределения:

1. $f(x)$ неотрицательная функция;

2. $F'(x) = f(x)$;

3. если $a < b$, то $P\{\omega\colon a \leqslant X(\omega) < b\} = \int_a^b f(u)\, du$;

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du = 1$.

Если $f(x)$ неотрицательная функция, обладающая свойством $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 1$, то $f(x)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины.

Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f_X(x)$, $y = G(x)$ — монотонно возрастающая функция, $x = g(y)$ — обратная функция. Тогда плотность распределения случайной величины $Y = G(X)$ равна

$$f_Y(y) = f_X(g(y))\; g'(y).$$

Если $y = G(x)$ — монотонно убывающая функция, то

$$f_Y(y) = -f_X(g(y))\; g'(y).$$

Приведем некоторые абсолютно непрерывные распределения вероятностей:

1. *Равномерное распределение*. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a;\, b]$ $(a < b)$, если ее плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a; b], \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Равномерное распределение является непрерывным аналогом распределений классической теории вероятностей, описывающих стохастические эксперименты с равновероятными исходами.

Если случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$, то случайная величина $F(X)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

2. *Треугольное распределение* (распределение Симпсона). Случайная величина X имеет треугольное распределение на отрезке $[a;\, b]$ $(a < b)$, если ее плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a \text{ и } x > b, \\ \dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a < x \leqslant \dfrac{a+b}{2}, \\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \dfrac{a+b}{2} < x \leqslant b. \end{cases}$$

3. *Показательное (экспоненциальное) распределение*. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ $(\lambda > 0)$, если ее плотность распределения равна

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Непрерывный аналог геометрического распределения.

4. *Двойное экспоненциальное распределение* (распределение Лапласа). Случайная величина X имеет распределение Лапласа с параметрами α и λ ($\lambda > 0$), если ее плотность распределения равна

$$f(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-\alpha|},\ x\in(-\infty;\ +\infty).$$

5. *Нормальное (гауссовское) распределение.* Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами α и σ^2 ($\sigma > 0$), если ее плотность распределения равна

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right),\ x\in(-\infty,\ +\infty).$$

6. *Распределение Коши.* Случайная величина X имеет распределение Коши с параметрами α и λ ($\lambda > 0$), если ее плотность распределения равна

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\alpha)^2},\ x\in(-\infty;\ +\infty).$$

Задача 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ 1-\cos x & \text{при } 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

а) Найти плотность $f(x)$ распределения вероятностей;

б) Найти $P\left(0<X<\dfrac{\pi}{4}\right)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

Решение. а) Так как $f(x)=F'(x)$, то

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \sin x & \text{при } 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

б) Найдем искомую вероятность, используя функцию $F(x)$:

$$P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)=\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)-0=\frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

Для того, чтобы найти искомую вероятность, используя функцию $f(x)$, вычислим площадь криволинейной трапеции:

$$P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx=-\cos\Big|_0^{\pi/4}=-\left(\cos\frac{\pi}{4}-1\right)=\frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

Задача 2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(1;5),\\ \frac{1}{4}, & x\in(1;5).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(2<X<3)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=\frac{X}{2}$.

Решение. а) Для нахождения функции распределения вероятностей воспользуемся формулой $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(u)\,du$.

При $x\leqslant 1$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0\,du=0$.

При $1<x\leqslant 5$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1}0\,du+\int\limits_{1}^{x}\frac{1}{4}\,du=\frac{x-1}{4}$.

При $x>5$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1}0\,du+\int\limits_{1}^{5}\frac{1}{4}\,du+\int\limits_{5}^{x}0\,du=1$.

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 1,\\ \frac{x-1}{4} & \text{при } 1<x\leqslant 5,\\ 1 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

Контроль: Полученная функция $F(x)$ обладает тремя свойствами функции распределения: 1) непрерывна слева, 2) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, 3) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$. А также $f(x) = F'(x)$.

б) Найдем искомую вероятность, используя функцию $F(x)$:

$$P(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25.$$

Для того, чтобы найти искомую вероятность, используя функцию $f(x)$, вычислим площадь криволинейной трапеции:

$$P(2 < X < 3) = \int_2^3 \frac{1}{4}\,dx = \left.\frac{x}{4}\right|_2^3 = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

в) Найдем плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \dfrac{X}{2}$. Функция $y = \dfrac{x}{2}$ — непрерывная и монотонно возрастающая, поэтому для определения $f_Y(y)$ можно применить формулу $f_Y(y) = f_X(g(y)) \cdot (g(y))'$. Из уравнения $y = \dfrac{x}{2}$ найдем обратную функцию $g(y) = 2y$. Далее

$$f_X(g(y)) = f_X(2y) = \begin{cases} 0, & 2y \notin (1;5), \\ \dfrac{1}{4}, & 2y \in (1;5). \end{cases} = \begin{cases} 0, & 2y \notin \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right), \\ \dfrac{1}{4}, & 2y \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right). \end{cases}$$

Таким образом,

$$f_Y(y) = f_X(2y) \cdot 2 = \begin{cases} 0, & y \notin \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right), \\ \dfrac{1}{2}, & y \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right). \end{cases}$$

Контроль:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{2}\,dy = \left.\frac{y}{2}\right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1, \quad f_Y(y) \geqslant 0.$$

Задача 3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти плотность распределения случайной величины $Y=(X^2+1)^{-1}$.

Решение. а) Найдем функцию распределения вероятностей по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\,du$. Для любого $x\in(-\infty;+\infty)$ имеем

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi(x^2+1)}\,du=\left.\frac{\operatorname{arctg} u}{\pi}\right|_{-\infty}^{x}=\frac{\operatorname{arctg} x}{\pi}+\frac{1}{2}.$$

Контроль: Полученная функция $F(x)$ обладает тремя свойствами функции распределения 1) непрерывна слева, 2) $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, 3) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$. А также $f(x)=F'(x)$.

б) Найдем плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=(X^2+1)^{-1}$. Из уравнения $y=(x^2+1)^{-1}$ найдем обратную функцию $x=g(y)$. Так как функция $y=(x^2+1)^{-1}$ не является монотонной на интервале $(-\infty;+\infty)$, разобьем этот интервал на интервалы $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, в которых функция монотонна. В интервале $(-\infty;0)$ обратная функция $g_1(y)=-\sqrt{\dfrac{1-y}{y}}$, $0<y\leqslant 1$. В интервале $(0;+\infty)$ обратная функция $g_2(y)=\sqrt{\dfrac{1-y}{y}}$, $0<y\leqslant 1$. Для определения $f_Y(y)$ применим формулу

$$f_Y(y)=f_X(g_1(y))\cdot|g_1'(y)|+f_X(g_2(y))\cdot|g_2'(y)|.$$

Найдем производные обратных функций:

$$g_1'(y)=\left(-\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)'=\frac{1}{2y\sqrt{y-y^2}},$$

$$g_2'(y)=\left(\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)'=-\frac{1}{2y\sqrt{y-y^2}}.$$

Так как

$$f_X(g_1(y))=f_X\left(-\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\left(-\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)^2+1\right)^{-1}=\frac{y}{\pi},$$

$$f_X(g_2(y))=f_X\left(\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\left(\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)^2+1\right)^{-1}=\frac{y}{\pi},$$

имеем

$$f_Y(y)=\frac{1}{2y\sqrt{y-y^2}}\,\frac{2y}{\pi}=\frac{1}{\pi\sqrt{y-y^2}}.$$

Таким образом,

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{y-y^2}}, & y\in(0;1),\\ 0, & y\notin(0;1).\end{cases}$$

Контроль:

$$f_Y(y)\geqslant 0,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy=\int\limits_0^1\frac{dy}{\pi\sqrt{y-y^2}}=\frac{1}{\pi}\arcsin\,(2y-1)\Big|_0^1=1.$$

Задача 4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$ равенством $f(x)=C\cdot\cos 2x$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

Решение. Плотность распределения вероятностей должна удовлетворять условию $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1.$

Найдем интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} C\cdot\cos 2x\,dx=\frac{C}{2}\sin\,2x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{C}{2}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=C.$$

Следовательно, $C=1$.

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant-\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x & \text{при } -\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant 0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P\left(-\infty < X < -\dfrac{\pi}{6}\right)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right), \\ (\cos x + \sin x)e^{-x} & x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P\left(0 < X < \dfrac{\pi}{4}\right)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = \dfrac{X}{2}$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 2x + 2)}, \ x \in (-\infty; +\infty).$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(-2 < X < 0)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = \operatorname{arctg}(X + 1)$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0; +\infty)$ равенством $f(x) = C \cdot e^{-2x}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 2

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}} \sin x & \text{при } 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{3}, \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P\left(0 < X < -\dfrac{\pi}{6}\right)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (1; +\infty), \\ 3x^{-4} & x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < 3)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = X + 2$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ 2x^3 e^{-x^2}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < 4)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = \ln X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ 4)$ равенством $f(x) = C \cdot \sqrt{x}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 3

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant \dfrac{3\pi}{4}, \\ \cos 2x & \text{при } \dfrac{3\pi}{4} < x \leqslant \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P\left(\dfrac{7\pi}{8} < X < \pi\right)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0;1), \\ 4x - 4x^3 & x \in (0;1). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < 0,5)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = 5X$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0;+\infty), \\ 2x^3 e^{-x^2}, & x \in (0;+\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(-4 < X < 4)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^3$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(1; +\infty)$ равенством $f(x) = C \cdot x^{-4}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 4

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P\left(\dfrac{7\pi}{6} < X < \dfrac{\pi}{2}\right)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-1;0), \\ -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1;0). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(-0{,}5 < X < 0)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=|X|$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;+\infty),\\ 2x^3e^{-x^2} & x\in(0;+\infty).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(2 < X < 5)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=\sqrt{X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x)=\dfrac{C}{x^2+2x+2}$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 5

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 1,\\ \ln x & \text{при } 1<x\leqslant e,\\ 1 & \text{при } x>e.\end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(1<X<\sqrt[3]{e})$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(1;e),\\ \dfrac{1}{x}, & x\in(1;e).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P\left(1<X<\dfrac{e}{2}\right)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=X-3$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;+\infty),\\ 2x(1+x)^{-3}, & x\in(0;+\infty).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(5 < X < 6)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=\exp(-X)$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x)=\dfrac{C}{x^2+1}$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 6

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ e^x-1 & \text{при } 0<x\leqslant \ln 2,\\ 1 & \text{при } x>\ln 2.\end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(\ln 1{,}5 < X < \ln 1{,}7)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{4}{\pi(x^2+1)^2},\ x\in(0;\ +\infty).$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(1 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=\sqrt{X}$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;+\infty),\\ 2x(1+x)^{-3}, & x\in(0;+\infty).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(5 < X < 6)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=\ln X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ равенством $f(x) = C(\cos\ x + \sin\ x)\, e^{-x}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 7

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1, \\ \sqrt{1-x^2} & \text{при } -1 < x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(-0{,}5 < X < 0)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (2; 4), \\ \frac{1}{2}, & x \in (2; 4). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(2 < X < 3)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Z = X^2$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ 2x(1+x)^{-3}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(-3 < X < 3)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = \frac{1}{X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ +\infty)$ равенством $f(x) = Cx^3\ \exp\ (-x^2)$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 8

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ 25x^2 & \text{при } 0<x\leqslant 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(0 < X < 1)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in\ (-\infty;\ +\infty).$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(-2 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^2$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;+\infty),\\ 2x\exp(-x^2), & x\in(0;+\infty).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < 3)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=\sqrt{X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x) = C\ (x^2 + 1)^{-2}$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 9

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{1}{x} & \text{при } x>1.\end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P\left(\dfrac{4}{\pi}<X<\dfrac{6}{\pi}\right)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}, \; x \in (-\infty; +\infty).$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(-3 < X < 0)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = |X|$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ 2x \exp(-x^2), & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < 3)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = \ln X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале (0; 1) равенством $f(x) = Cx\,(1 - x^2)$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 10

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(0 < X < 1)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (6; 9), \\ \dfrac{1}{9}(x-6)^2, & x \in (6; 9). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(6 < X < 9)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^2 + 4X + 2$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ \dfrac{\exp(-\sqrt{x})}{2}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.
б) Найти $P(0 < X < 4)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.
в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = e^{-X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(-1;\ 0)$ равенством $f(x) = \dfrac{Cx}{\sqrt{1-x^2}}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 11

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = 0{,}5 + \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi},\ -\infty < x < +\infty.$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.
б) Построить график $f(x)$.
в) Найти $P\left(0 < X < \dfrac{\pi}{4}\right)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ 3e^{-3x}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.
б) Найти $P(0 < X < 1)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.
в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = 3 \exp(-3X)$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{2}{\pi(x^2+1)^2},\ x \in (-\infty;\ +\infty).$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.
б) Найти $P(-1 < X < 1)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.
в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = \operatorname{arctg} X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(1;\ +\infty)$ равенством $f(x) = C \cdot x^{-3}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 12

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \exp\left\{\dfrac{2x}{1-x^2}\right\} & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(1 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ \dfrac{\exp(-\sqrt{x})}{2}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(4 < X < 9)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = 3X + 1$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{2}{\pi(x^2+1)^2}, \; x \in (-\infty; +\infty).$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(-1 < X < 1)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = |X|$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(1; 4)$ равенством $f(x) = C \cdot \sqrt{x}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 13

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant \dfrac{3}{2}, \\ 2x-3 & \text{при } \dfrac{3}{2} < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(1{,}75 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \sin x, & x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < \ln 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = 3X + 1$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (1; 2], \\ x - 0{,}5, & x \in (1; 2]. \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < 1)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Случайная величина X равномерно распределена в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \sin X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x) = \dfrac{4C}{e^x + e^{-x}}$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 14

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \sqrt[3]{x} & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(0 < X < 0{,}5)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right],\\ 3\sin 3x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right].\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P\left(\dfrac{\pi}{6}<X<\dfrac{4}{\pi}\right)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=-X+2$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(1;\,1+\sqrt{2}\right),\\ x-1, & x\in\left(1;\,1+\sqrt{2}\right).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0<X<1)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $Y=X^2$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x)=\dfrac{2C}{1+x^2}$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 15

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ x^3 & \text{при } 0<x\leqslant 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(0<X<0{,}5)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right],\\ \cos x, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P\left(0 < X < \dfrac{\pi}{4}\right)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Z = 2X + 3$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; 1], \\ 2x, & x \in (0; 1]. \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < 0{,}5)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $Y = 4X^2$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ равенством $f(x) = C \sin 2x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 16

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(0 < X < 1)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \notin (0; 3), \\ \dfrac{1}{9}x^2, & x \in (0; 3). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Z = -3X + 5$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ \dfrac{2}{\pi(1 + x^2)}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = \ln X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ 1)$ равенством $f(x) = C \cdot \operatorname{arcctg} x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 17

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 0{,}1(x - 1 + \lg x) & \text{при } 1 < x \leqslant 10, \\ 1 & \text{при } x > 10. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(1 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; 4), \\ \dfrac{3}{16}\sqrt{x}, & x \in (0; 4). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(1 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Z = -4X - 3$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ \dfrac{2}{\pi(1 + x^2)}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(1 < X < 3)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = e^{-X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ 2)$ равенством $f(x) = C \cdot x^2$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 18

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 1,\\ \ln x & \text{при } 1<x\leqslant e,\\ 1 & \text{при } x>e.\end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(1 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;2),\\ \frac{1}{4}x^3, & x\in(0;2).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(1 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Z=2X+5$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;+\infty),\\ \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & x\in(0;+\infty).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < 6)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=\sqrt{X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ 4)$ равенством $f(x)=C\cdot\sqrt{x}$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 19

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=1-\frac{\operatorname{arcctg} x}{\pi},\quad -\infty < x < +\infty.$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(0 < X < \sqrt{3})$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;1),\\ \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}, & x\in(0;1).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(1 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Z=2X+5$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;+\infty),\\ \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & x\in(0;+\infty).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < 6)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=\dfrac{1}{X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале (0; 8) равенством $f(x)=C\cdot x^3$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 20

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=0{,}5+\frac{\operatorname{arctg} x}{\pi},\quad -\infty < x < +\infty.$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(-2 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(1;+\infty),\\ \dfrac{1}{x^2}, & x\in(1;+\infty).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(2 < X < 4)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Z=\exp(X)$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ 2e^{-2x}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0 < X < 6)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = \ln X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0; +\infty)$ равенством $f(x) = \dfrac{C}{1+x^2}$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 21

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -2, \\ 0{,}5 + \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2} & \text{при } -2 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(0 < X < 2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (1; 2), \\ \dfrac{1}{x \ln 2}, & x \in (1; 2). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(1 < X < 1{,}5)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = -3X^2$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ 2e^{-2x}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(4 < X < 6)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = \sqrt{X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ +\infty)$ равенством $f(x) = C \cdot e^{-\sqrt{x}}$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 22

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 4^x & \text{при } -\infty < x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(-2 < X < 0)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (1; +\infty), \\ \dfrac{2}{x^3}, & x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(1 < X < 1{,}5)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = -3X + 2$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ 2e^{-2x}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(-4 < X < 4)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^3$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ +\infty)$ равенством $f(x) = \dfrac{Cx}{(1+x)^3}$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 23

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du, \quad -\infty < x < +\infty.$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(-3 < X < 3)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;1),\\ (x+1)e^{x-1}, & x\in(0;1).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(0<X<0,5)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=-2X+3$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{\pi(x^2+2x+2)},\ x\in\ (-\infty;\ +\infty).$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(-2<X<2)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=\operatorname{arctg}\ X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ 1)$ равенством $f(x)=\dfrac{C}{\sqrt{1-x}}$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

Вариант 24

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x\leqslant 0.\end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей.

б) Построить график $f(x)$.

в) Найти $P(\ln\ 2<X<+\infty)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right),\\ (\cos x+\sin x)\,e^{-x}, & x\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P\left(0<X<\dfrac{\pi}{4}\right)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=4X+3$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{\pi(x^2+2x+2)},\ x\in(-\infty;\ +\infty).$$

а) Найти функцию распределения вероятностей.

б) Найти $P(-3<X<4)$ двумя способами: используя $F(x)$ и $f(x)$.

в) Найти плотность распределения случайной величины $Y=|X|$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(1;\ 2)$ равенством $f(x)=\dfrac{C}{x}$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

§ 2.5. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Если X — дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1,\ x_2,\ \ldots$ с вероятностями $p_1,\ p_2,\ \ldots$ соответственно, то ее *математическим ожиданием* называется величина

$$MX=\sum_k p_k x_k$$

при условии, что ряд справа абсолютно сходится.

При определении дискретной случайной величины не важен порядок нумерации ее возможных значений, поэтому естественно предполагать, что сумма ряда в определении ее математического ожидания не зависит от порядка слагаемых, а это возможно при абсолютной сходимости ряда.

Если ряд в определении математического ожидания расходится, то считают, что $MX=\infty$.

Отметим следующую механическую интерпретацию математического ожидания. Представим себе, что на числовой оси в точках с координатами $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ расположены массы $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$. Тогда $MX=\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k$ есть координата центра тяжести этой системы масс.

Свойства математического ожидания:

1. Если $a=\text{const}$, то $Ma=a$;
2. Если $X\geqslant 0$, то $MX\geqslant 0$;
3. Если $|X|\leqslant C$, то $|MX|\leqslant C$;

4. $M\ (aX + b) = aMX + b$;
5. $M(X + Y) = MX + MY$;
6. Если X и Y независимы, то $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$;
7. Если X — неотрицательная величина и $a > 0$, то

$$P\ (X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a} MX.$$

Это неравенство называется *неравенством Чебышёва*.

Заметим, что свойства (1–7) верны и для абсолютно непрерывных случайных величин.

Математическое ожидание функции $Y = g(X)$ от случайной величины X выражается формулой

$$Mg\,(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k g(x_k),$$

где p_i — вероятность значения x_i случайной величины X.

Для целых неотрицательных k величина MX^k, если она определена, называется *моментом k-го порядка*. В этом случае существует также и величина $M|X|^k$, которая называется абсолютным моментом k-го порядка. Моменты величины $(X - MX)$ называются *центральными моментами*.

Наиболее употребляемой числовой характеристикой случайной величины X является ее второй центральный момент.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $DX = M(X - MX)^2$.

Величина $\sigma(X) = \sqrt{DX}$ называется средним квадратическим отклонением, или стандартным отклонением величины X.

Величины DX и $\sigma(X)$ характеризуют, как тесно группируются значения X вокруг среднего значения.

Свойства дисперсии:

1. Если $a = \text{const}$, то $Da = 0$;
2. $DX \geqslant 0$;
3. $D(aX + b) = a^2 DX$;
4. Если X и Y независимы, то $D(X + Y) = DX + DY$;
5. $DX = MX^2 - (MX)^2$;
6. Если DX конечна, то для всякого $a > 0$

$$P\ (|X - MX| > a) \leqslant \frac{1}{a^2} DX.$$

Это неравенство также называют *неравенством Чебышёва*.

Заметим, что приведенные определения моментов и свойства дисперсии (1–6) верны и для абсолютно непрерывных случайных величин.

Случайная величина $X - MX$ называется центрированной случайной величиной, так как $M(X - MX) = 0$. Случайная величина $\dfrac{X}{\sqrt{DX}}$ называется нормированной случайной величиной, так как $D\left(\dfrac{X}{\sqrt{DX}}\right) = 1$. Ясно, что случайная величина $\dfrac{X - MX}{\sqrt{DX}}$ имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную единице.

Приведем формулы для вычисления моментов дискретной случайной величины:

$$MX^k = \sum_i p_i x_i^k; \quad M(X - MX)^k = \sum_i p_i (x_i - MX)^k.$$

Дисперсия функции $Y = g(X)$ от случайной величины X находится по формулам

$$Dg(X) = M(g(X) - Mg(X))^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k \big(g(x_k) - Mg(X)\big)^2,$$

$$Dg(X) = Mg^2(X) - (Mg(X))^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k g^2(x_k) - \left(\sum_{k=1}^{n} p_k g(x_k)\right)^2,$$

где p_i — вероятность значения x_i случайной величины X.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение, то

$$MX = np, \quad DX = npq.$$

Если случайная величина X имеет геометрическое распределение, то

$$MX = \frac{1}{p}, \quad DX = \frac{q}{p^2}.$$

Если случайная величина X имеет распределение Пуассона, то

$$MX = \lambda, \quad DX = \lambda.$$

Задача 1. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа рабочих дней, в течение которых не будет перерасхода электроэнергии, если проверены пять рабочих дней.

Решение. Пусть X — число рабочих дней, в течение которых не будет перерасхода электроэнергии. Случайная величина X имеет биномиальное распределение, так как испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли, где $n = 5$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. Поэтому $MX = np = 5 \cdot 0{,}8 = 4$, $DX = npq = 5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$.

Задача 2. В одной студенческой группе обучается 25 студентов, среди которых 6 отличников. По жребию отобрано три студента. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа отличников среди отобранных студентов.

Решение. Пусть случайная величина X — число отличников среди отобранных студентов. Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины X. Число всех возможных вариантов отбора студентов равно C_{25}^3; среди них имеется $C_6^k C_{19}^{3-k}$ вариантов, содержащих ровно $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ отличника. По формуле

$$P(X = k) = \frac{C_6^k C_{19}^{3-k}}{C_{25}^3},\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

находим $P(X = 0) = 0{,}421$, $P(X = 1) = 0{,}446$, $P(X = 2) = 0{,}124$, $P(X = 3) = 0{,}009$. Таким образом,

x_i	0	1	2	3
p_i	0,421	0,446	0,124	0,009

Тогда по формуле вычисления математического ожидания имеем

$$MX = 0 \cdot 0{,}421 + 1 \cdot 0{,}446 + 2 \cdot 0{,}124 + 3 \cdot 0{,}009 = 0{,}721.$$

Для вычисления DX найдем сначала MX^2:

$$MX^2 = 0 \cdot 0{,}421 + 1 \cdot 0{,}446 + 4 \cdot 0{,}124 + 9 \cdot 0{,}009 = 1{,}023.$$

Тогда по формуле вычисления дисперсии имеем

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 1{,}023 - 0{,}721^2 = 0{,}503.$$

Задача 3. В урне 9 шаров, из них 4 белых. Наудачу последовательно, без возвращения извлекаются шары до первого появления белого шара. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа извлеченных шаров.

Решение. Пусть случайная величина X — число извлеченных шаров до появления белого шара. Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины X. Пусть событие $A_i = \{i\text{-ый извлеченный шар белый}\}$, тогда

$$P(X = 0) = P(A_1) = \frac{4}{9},\quad P(X = 1) = P(\overline{A}_1 A_2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18},$$

$$P(X=2)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{126}, \ \dots ,$$

$$P(X=5)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{126}.$$

Таким образом,

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{56}{126}$	$\frac{35}{126}$	$\frac{20}{126}$	$\frac{10}{126}$	$\frac{4}{126}$	$\frac{1}{126}$

Тогда по формуле вычисления математического ожидания имеем

$$MX=\frac{1}{126}(0\cdot 56+1\cdot 35+2\cdot 20+3\cdot 10+4\cdot 4+5\cdot 1)=1.$$

Для вычисления DX найдем сначала MX^2:

$$MX^2=\frac{1}{126}(0\cdot 56+1\cdot 35+4\cdot 20+9\cdot 10+16\cdot 4+25\cdot 1)=2{,}333.$$

Тогда по формуле вычисления дисперсии имеем

$$DX=MX^2-(MX)^2=1{,}333.$$

И, наконец, найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{DX}=\sqrt{1{,}333}=1{,}154.$$

Задача 4. Упаковщик укладывает 900 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,005. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа деталей, помеченных личным клеймом.

Решение. Пусть X — число деталей, помеченных личным клеймом. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda=np=900\cdot 0{,}005=4{,}5$. Поэтому $MX=\lambda=4{,}5$, $DX=\lambda=4{,}5$.

Задача 5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения вероятностей:

x_i	−2	−1	2	5
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Y = X^2 + 3X - 5$.

Решение. Случайная величина Y связана со случайной величиной X функциональной зависимостью $Y = X^2 + 3X - 5$, поэтому она может принимать значения $y_1 = x_1^2 + 3x_1 - 5 = x_2^2 + 3x_2 - 5 = -7$, $y_2 = x_3^2 + 3x_3 - 5 = 5$, $y_3 = x_4^2 + 3x_4 - 5 = 35$. Найдем соответствующие вероятности:

$$P(Y = -7) = P(X = -2) + P(X = -1) = 0{,}5,$$
$$P(Y = 5) = P(X = 2) = 0{,}3, \quad P(Y = 35) = P(X = 5) = 0{,}2.$$

Таким образом, получим таблицу распределения вероятностей случайной величины Y:

y_i	-7	5	35
p_i	0,5	0,3	0,2

Тогда по формуле вычисления математического ожидания имеем

$$MY = -7 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}3 + 35 \cdot 0{,}2 = 5.$$

Далее, по определению дисперсии имеем

$$DY = M(Y - MY)^2 =$$
$$= (-7 - 5)^2 \cdot 0{,}5 + (5 - 5)^2 \cdot 0{,}3 + (35 - 5)^2 \cdot 0{,}2 = 252.$$

И, наконец, найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(Y) = \sqrt{DY} = \sqrt{252} = 15{,}875.$$

Приведем другое решение этой задачи, основанное на формулах вычисления математического ожидания и дисперсии функции одной случайной величины.

$$MY = M(X^2 + 3X - 5) = \sum_{k=1}^{4} p_k\ (x_i^2 + 3x_i - 5) =$$
$$= 0{,}2 \cdot (-7) + 0{,}3 \cdot (-7) + 0{,}3 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 35 = 5,$$

$$DY = \sum_{k=1}^{4} p_k\ (x_i^2 + 3x_i - 5)^2 - (MY)^2 =$$
$$= (0{,}2 \cdot 49) + 0{,}3 \cdot 49 + 0{,}3 \cdot 25 + 0{,}2 \cdot 1225) - 25 = 252.$$

Откуда $\sigma(Y) = \sqrt{DY} = \sqrt{252} = 15{,}875$.

Задача 6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	1	2	5
p_i	0,1	0,6	0,3

y_i	-1	0
p_i	0,2	0,8

Найдите математическое ожидание случайной величины $Z=-2XY-3$ и дисперсию случайной величины $V=-X+Y-3$.

Решение. Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайных величин X и Y:

$$MX=2{,}8,\ DX=2{,}16,\ MY=-0{,}2,\ DY=0{,}16.$$

В силу независимости случайных величин X и Y имеем

$$MZ=M(-2XY-3)=-2MX\cdot MY-3=-4{,}12.$$

$$DV=D(-X+Y-3)=DX+DY=2{,}32.$$

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Контрольная работа состоит из шести задач. Вероятность выполнения студентом каждой задачи равна 0,4. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа выполненных задач.

2. В группе 10 юношей, которые играют, набрасывая кольца на колышек. Для шести из них вероятность попадания кольца на колышек равна 0,6, а для остальных — 0,5. По жребию отобрано двое юношей. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа юношей с лучшей подготовкой среди отобранных лиц.

3. Студент знает 20 вопросов из 35 тестовых вопросов. Преподаватель задает вопросы студенту до его первого верного ответа. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа заданных вопросов.

4. Электростанция обслуживает сеть с 700 лампочек, вероятность включения каждой из которых за время t равна 0,01. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа лампочек, не включенных за время t.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	-100	-10	10	100
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y=5+3\lg|X|$, $Z=\dfrac{X}{20}$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	−5	−4	−3
p_i	0,1	0,1	0,8

y_i	1	2	3
p_i	0,2	0,2	0,6

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 2X^2 - 4Y + 2$, $Z = XY$.

Вариант 2

1. В горном районе создано семь автоматических сейсмических станций. Каждая станция в течение года может выйти из строя с вероятностью 0,9. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа станций, вышедших из строя в одном рассматриваемом году.

2. Из полного набора костей домино наудачу извлекают четыре кости. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа дублей среди извлеченных костей.

3. Студент знает 20 вопросов из 35 тестовых вопросов. Преподаватель задает вопросы студенту до его первого верного ответа. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа неверных ответов.

4. Некто приобрел 200 билетов лотереи. Известно, что вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,002. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа приобретенных выигрышных билетов.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	−8	−4	4	8
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = \log_2|X|$, $Z = 5X^2 + 1$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	−4	−3	−2
p_i	0,2	0,2	0,6

y_i	2	3	4
p_i	0,3	0,3	0,4

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 3X^2 - 5Y$, $Z = XY + 3$.

Вариант 3

1. Контрольная работа состоит из пяти вопросов. На каждый вопрос приведено пять ответов, один из которых правильный. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа угаданных правильных ответов.

2. Буквы слова ВЕРОЯТНОСТЬ написаны на одинаковых карточках. Наудачу извлекаются три карточки. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа гласных букв среди извлеченных карточек.

3. Из полного набора костей домино наудачу последовательно, без возвращения извлекается по одной кости домино до первого появления дубля. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа извлеченных костей домино.

4. Прядильщица обслуживает 200 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одного часа равна 0,02. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа веретен, на которых не произойдет обрыва нити в течение одного часа.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	-9	-3	3	9
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = \log_3 |X|$, $Z = 3X - 2$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	-3	-2	-1
p_i	0,3	0,3	0,4

y_i	3	4	5
p_i	0,4	0,4	0,2

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 4X^2 + 5Y - 1$, $Z = 3XY$.

Вариант 4

1. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживаются. Посажено шесть кустов помидоров. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа прижитых растений.

2. В урне 9 шаров, из них 4 белых. Наудачу извлекают два шара. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа белых шаров среди извлеченных шаров.

3. Буквы слова ВЕРОЯТНОСТЬ написаны на одинаковых карточках. Наудачу последовательно, без возвращения извлекается по одной карточке до первого появления гласной буквы. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа извлеченных карточек.

4. В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа вызовов, полученных коммутатором за 10 минут, в течение которых телефонистка отлучалась.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	−2	−1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y=2X^2+8$, $Z=X-1$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	−2	−1	0
p_i	0,4	0,4	0,2

y_i	4	5	6
p_i	0,4	0,4	0,2

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z=5X^2-6Y$, $Z=XY+3$.

Вариант 5

1. Известно, что 5% радиоламп, изготовляемых заводом, являются нестандартными. Проверено семь радиоламп. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа нестандартных радиоламп.

2. В ящике 10 деталей, среди которых 4 стандартных. Наудачу извлекаются четыре детали. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа нестандартных деталей среди извлеченных.

3. Буквы слова ВЕРОЯТНОСТЬ написаны на одинаковых карточках. Наудачу последовательно, без возвращения извлекается по одной карточке до первого появления гласной буквы. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа извлеченных карточек с согласными буквами.

4. Аппаратура содержит 400 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,002. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа отказавших элементов.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	-1	0	1
p_i	0,3	0,3	0,4

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = 1 - 2X$, $Z = e^{|X|} + 2$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	-1	0	1
p_i	0,45	0,45	0,1

y_i	5	6	7
p_i	0,1	0,8	0,1

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 5X^2 + 3Y - 6$, $Z = 4XY$.

Вариант 6

1. В котельной пять одинаковых котлов. Вероятность бесперебойной работы в течение месяца каждого котла равна 0,6. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа вышедших из строя котлов в рассматриваемом месяце.

2. В колоде 36 карт. Наудачу извлекают три карты. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа тузов среди извлеченных карт.

3. Известно, что 5% радиоламп, изготовляемых заводом, являются нестандартными. Из партии в 40 радиоламп последовательно, без возвращения извлекается по одной радиолампе до первого появления стандартной детали. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа извлеченных деталей.

4. Имеется общество из 600 человек. Считая, что вероятность рождения в фиксированный день равна $\frac{1}{365}$, найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа людей, не родившихся 1 января.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
p_i	0,2	0,1	0,2	0,5

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = 3X^2 + 2$, $Z = \operatorname{ctg}\left(X - \frac{\pi}{4}\right)$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	1	3
p_i	0,35	0,35	0,3

y_i	6	7	8
p_i	0,2	0,6	0,2

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 2X^2 + 4Y$, $Z = 2XY - 6$.

Вариант 7

1. Вероятность того, что стрелок попадет в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится шесть независимых выстрелов. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа пробоин в мишени.

2. Имеются десять билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу берут четыре билета. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа билетов на первый ряд среди выбранных билетов.

3. Известно, что 5% радиоламп, изготовляемых заводом, являются нестандартными. Из партии в 40 радиоламп последовательно, без возвращения извлекается по одной радиолампе до первого появления стандартной детали. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа извлеченных нестандартных деталей.

4. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,02. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа абонентов, не позвонивших на коммутатор в течение часа.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
p_i	0,2	0,1	0,2	0,5

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = 5X^2 - 1$, $Z = \mathrm{tg}\left(X + \frac{\pi}{4}\right)$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	2	4
p_i	0,25	0,25	0,5

y_i	−2	0	2
p_i	0,3	0,4	0,3

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 3X^2 + 5Y + 7$, $Z = 2XY$.

Вариант 8

1. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа выпадений двойки при семи подбрасываниях правильной игральной кости.

2. Из 20 контрольных работ, среди которых 5 оценены на отлично, наугад извлекаются три работы. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа работ, оцененных на отлично и оказавшихся в выборке.

3. Имеются десять билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу последовательно, без возвращения извлекается по одному билету до первого появления билета на первый ряд. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа извлеченных билетов.

4. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,03. Произведено 100 независимых выстрелов. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа промахов.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
p_i	0,2	0,1	0,2	0,5

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = 4 - 2X$, $Z = \cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right)$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	3	6
p_i	0,15	0,15	0,7

y_i	−1	0	1
p_i	0,4	0,2	0,4

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 4X^2 + 6Y - 8$, $Z = 5XY + 1$.

Вариант 9

1. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа появлений решки при пяти подбрасываниях правильной монеты.

2. В коробке имеются 10 карандашей, из которых 6 карандашей — красные. Наудачу извлекаются два карандаша. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа извлеченных красных карандашей.

3. Имеются десять билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу последовательно, без возвращения извлекается по одному билету до первого появления билета на первый ряд.

Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа извлеченных билетов до появления билета на первый ряд.

4. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 500. На пробу берется 4 дм^3 воздуха. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа болезнетворных микробов, находящихся во взятой пробе.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
p_i	0,1	0,2	0,7

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = X + 2$, $Z = 2 \sin X$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	4	8
p_i	0,1	0,2	0,7

y_i	−3	0	3
p_i	0,45	0,1	0,45

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 9X^2 - 3Y + 2$, $Z = 2XY - 1$.

Вариант 10

1. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа появлений герба при двух подбрасываниях правильной монеты.

2. В коробке имеются 12 карандашей, из которых 3 карандаша — красные. Наудачу извлекаются семь карандашей. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа извлеченных красных карандашей.

3. Буквы слова КОМБИНАТОРИКА написаны на одинаковых карточках. Наудачу выбирается карточка. Если выбрана согласная буква, то карточка возвращается назад, и снова наудачу выбирается карточка. Если выбрана гласная буква, то эксперимент прекращается. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа испытаний до первого появления гласной буквы.

4. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа страниц с опечатками, если проверяемая книга насчитывает 800 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,0025.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,5	0,3

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = 3X + 1$, $Z = X^2$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	5	10
p_i	0,1	0,3	0,6

y_i	−4	0	4
p_i	0,35	0,3	0,35

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 2X^2 - 4Y - 6$, $Z = 3XY - 5$.

Вариант 11

1. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа выпадения шестерки при трех подбрасываниях правильной игральной кости.

2. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на отлично, наугад извлекаются шесть работ. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа работ, оцененных на отлично и оказавшихся в выборке.

3. В колоде 36 карт. Наудачу извлекается одна карта, фиксируется и возвращается назад. Эксперимент продолжается до первого появления туза. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа извлечений.

4. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа изделий, выдержавших испытание, если испытываются 600 деталей, а вероятность того, что изделие выдержит испытание, равна 0,005.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,5	0,3

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = 4 - 2\exp(X)$, $Z = |X|$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	1	3	5
p_i	0,1	0,4	0,5

y_i	-4	-3	0
p_i	0,25	0,5	0,25

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 3X^2 + 5Y - 7$, $Z = -4XY + 2$.

Вариант 12

1. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа попаданий при четырех бросках.

2. Имеются десять билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу берут пять билетов. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа билетов на первый ряд среди выбранных билетов.

3. Правильная монета подбрасывается до первого появления герба. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа подбрасываний до появления герба.

4. Упаковщик укладывает 900 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,005. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа деталей, помеченных личным клеймом.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,5	0,3

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = 2X$, $Z = X^2 - 3$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	1	4	6
p_i	0,1	0,5	0,4

y_i	−3	−2	0
p_i	0,15	0,7	0,15

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 4X^2 + 3Y - 1$, $Z = -5XY + 2$.

Вариант 13

1. На самолете имеются два одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна 0,8. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа двигателей, в которых могут возникнуть неполадки в полете.

2. В колоде 36 карт. Наудачу извлекают семь карт. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа тузов среди выбранных карт.

3. Правильная монета подбрасывается до первого появления герба. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа подбрасываний.

4. Электростанция обслуживает сеть с 600 лампочек, вероятность включения каждой из которых за время t равна 0,02. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа лампочек, включенных за время t.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	−1	0	1
p_i	0,2	0,5	0,3

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = -3 \exp(X)$, $Z = |X| + 5$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	1	5	7
p_i	0,1	0,6	0,3

y_i	−2	−1	0
p_i	0,05	0,9	0,05

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 2X^2 + 7Y - 2$, $Z = -3XY + 1$.

Вариант 14

1. Испытываются три независимо работающих одинаковых прибора. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

2. В ящике 15 деталей, среди которых 12 стандартных. Наудачу извлекаются шесть деталей. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа нестандартных деталей среди отобранных.

3. Набрасываются кольца на колышек либо до первого попадания, либо до полного израсходования всех колец, число которых равно 5. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа брошенных колец, если вероятность набрасывания кольца на колышек при каждом испытании постоянна и равна 0,9.

4. Некто приобрел 100 билетов лотереи. Известно, что вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,02. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа приобретенных выигрышных билетов.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
p_i	0,1	0,2	0,7

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = 2X + \frac{\pi}{4}$, $Z = \sin X$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	1	6	8
p_i	0,1	0,6	0,3

y_i	−1	0	2
p_i	0,05	0,9	0,05

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 3X^2 + 4Y - 5$, $Z = -6XY + 7$.

Вариант 15

1. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа рабочих дней, в течение которых не будет перерасхода электроэнергии, если проверены четыре рабочих дня.

2. В урне 15 шаров, из них 8 белых. Наудачу извлекают шесть шаров. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа белых шаров среди извлеченных шаров.

3. Набрасываются кольца на колышек либо до первого попадания, либо до полного израсходования всех колец, число которых равно 5. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа брошенных колец до первого попадания, если вероятность набрасывания кольца на колышек при каждом испытании постоянна и равна 0,9.

4. Прядильщица обслуживает 100 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одного часа равна 0,04. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа веретен, на которых произойдет обрыв нити в течение одного часа.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
p_i	0,1	0,2	0,7

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y=4X$, $Z=3-\cos X$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	3	5
p_i	0,4	0,2	0,4

y_i	−1	0	5
p_i	0,25	0,5	0,25

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z=5X^2-4Y+3$, $Z=2XY-1$.

Вариант 16

1. Вероятность того, что стрелок попадет в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится два независимых выстрела.

Найдите математическое ожидание и дисперсию числа пробоин в мишени.

2. В ящике 10 деталей, среди которых 8 стандартных. Наудачу берутся пять деталей. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа стандартных деталей из наудачу взятых.

3. Набрасываются кольца на колышек до первого попадания. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа брошенных колец до первого попадания, если вероятность набрасывания кольца на колышек при каждом испытании постоянна и равна 0,9.

4. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 200. На пробу берется 5 дм^3 воздуха. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа болезнетворных микробов, находящихся во взятой пробе.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
p_i	0,2	0,2	0,6

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = X + \dfrac{\pi}{4}$, $Z = \operatorname{tg} X$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	3	6
p_i	0,3	0,2	0,5

y_i	-1	0	6
p_i	0,35	0,5	0,15

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 6X^2 + 5Y + 4$, $Z = -3XY - 2$.

Вариант 17

1. В горном районе создано три автоматических сейсмических станций. Каждая станция в течение года может выйти из строя с

вероятностью 0,9. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа станций, вышедших из строя в одном рассматриваемом году.

2. Буквы слова КОМБИНАТОРИКА написаны на одинаковых карточках. Наудачу извлекаются семь карточек. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа гласных букв среди извлеченных карточек.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,6. Стрелок, имея в запасе 6 патронов, ведет огонь по мишени до первого попадания или до полного израсходования всех патронов. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа израсходованных патронов до первого попадания.

4. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,01. Произведено 300 независимых выстрелов. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа попаданий в цель.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
p_i	0,1	0,2	0,7

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = 4X + 2$, $Z = 2 + \operatorname{ctg} X$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	3	7
p_i	0,3	0,2	0,5

y_i	−1	0	7
p_i	0,35	0,5	0,15

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = -7X^2 + 6Y - 5$, $Z = 4XY + 3$.

Вариант 18

1. Контрольная работа состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос приведено пять ответов, один из которых правильный. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа угаданных правильных ответов.

2. Из полного набора костей домино наудачу выбирают шесть костей. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа дублей среди выбранных костей.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,6. Стрелок, имея в запасе 6 патронов, ведет огонь по мишени до первого попадания или до полного израсходования всех патронов. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа израсходованных патронов.

4. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,03. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа абонентов, позвонивших на коммутатор в течение часа.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,3	0,4

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = 4 + 5X^2$, $Z = \exp(X)$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	3	8
p_i	0,2	0,2	0,6

y_i	−1	0	8
p_i	0,45	0,5	0,05

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = -8X^2 + 7Y - 6$, $Z = 5XY + 4$.

Вариант 19

1. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживаются. Посажено два куста помидоров. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа прижитых растений.

2. В группе 10 юношей, которые играют, набрасывая кольца на колышек. Для шести из них вероятность попадания кольца на колышек равна 0,6, а для остальных — 0,5. По жребию отобрано пятеро юношей. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа юношей с лучшей подготовкой среди отобранных лиц.

3. Набрасываются кольца на колышек до первого попадания. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа брошенных колец, если вероятность набрасывания кольца на колышек при каждом испытании постоянна и равна 0,9.

4. Имеется общество из 500 человек. Считая, что вероятность рождения в фиксированный день равна $\frac{1}{365}$, найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа людей, родившихся 1 января.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,3	0,4

Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайных величин $Y=3X^2$, $Z=e+e^X$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	3	9
p_i	0,1	0,2	0,7

y_i	−1	0	9
p_i	0,15	0,5	0,35

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z=-9X^2-8Y+7$, $Z=6XY-5$.

Вариант 20

1. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа появлений герба при трех подбрасываниях правильной монеты.

2. В одной студенческой группе обучается 20 студентов, среди которых 5 отличников. По жребию отобрано семь студентов. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа отличников среди отобранных студентов.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,6. Стрелок ведет огонь по мишени до первого попадания. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа израсходованных патронов до первого попадания.

4. Аппаратура содержит 200 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,005. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа отказавших элементов.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	-2	0	1	2
p_i	0,1	0,1	0,5	0,3

Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайных величин $Y = -2|X| - 2$, $Z = \exp(X)$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	2	5
p_i	0,3	0,1	0,6

y_i	-2	0	5
p_i	0,1	0,2	0,7

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 2X^2 - 3Y + 4$, $Z = 5XY - 6$.

Вариант 21

1. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа выпадений пятерки при четырех подбрасываниях правильной игральной кости.

2. Студент подготовил 24 вопроса из 30 экзаменационных вопросов. Наудачу выбранный студентом экзаменационный билет состоит из шести вопросов. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа вопросов в билете, на которые студент знает вопрос.

3. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,6. Стрелок ведет огонь по мишени до первого попадания. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа израсходованных патронов.

4. В течение часа коммутатор получает 40 вызовов. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа вызовов, полученных коммутатором за четверть часа, в течение которых телефонистка отлучалась.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	-2	-1	1	2
p_i	0,2	0,1	0,5	0,2

Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайных величин $Y = X + 2$, $Z = X^2 + 5$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,2	0,5

y_i	-2	-1	5
p_i	0,1	0,3	0,6

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = -3X^2 - 4Y + 5$, $Z = 6XY - 7$.

Вариант 22

1. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий при пяти бросках.

2. В личной библиотеке у некоторого лица 10 книг, 3 из которых книги по математике. Наудачу выбираются две книги. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа книг по математике среди выбранных книг.

3. Правильная игральная кость бросается до первого выпадения шестерки. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа бросков.

4. Среднее число ошибочных соединений, приходящихся на одного телефонного абонента в течение года, равно 10. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа ошибочных соединений, приходящихся на одного абонента в течение полугода.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	-2	-1	1	2
p_i	0,2	0,1	0,5	0,2

Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайных величин $Y = 4X$, $Z = |X| - 5$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	5	6
p_i	0,3	0,3	0,4

y_i	−6	−2	5
p_i	0,1	0,4	0,5

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = 4X^2 - 5Y + 6$, $Z = -7XY - 8$.

Вариант 23

1. На самолете имеются шесть одинаковых двигателей. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна 0,8. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа двигателей, в которых могут возникнуть неполадки в полете.

2. В личной библиотеке у некоторого лица 12 книг, 5 из которых книги по математике. Наудачу выбираются три книги. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа книг по математике среди выбранных книг.

3. Правильная игральная кость бросается до первого выпадения шестерки. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа бросков до выпадения шестерки.

4. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа страниц без опечаток, если проверяемая книга насчитывает 500 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,003.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	−2	−1	2	5
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайных величин $Y = |X - 2|$, $Z = X^2 + 5$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	3	5
p_i	0,3	0,4	0,3

y_i	−3	−2	5
p_i	0,1	0,5	0,4

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z = -5X^2 + 6Y - 7$, $Z = 2XY - 3$.

Вариант 24

1. Испытываются семь независимо работающих одинаковых прибора. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

2. Студент подготовил 20 вопросов из 35 экзаменационных вопросов. Наудачу выбранный студентом экзаменационный билет состоит из четырех вопросов. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа вопросов в билете, на которые студент знает вопрос.

3. В урне 9 шаров, из них 4 белых. Наудачу последовательно, без возвращения извлекаются шары до первого появления белого шара. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа извлеченных черных шаров.

4. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа изделий, выдержавших испытание, если испытываются 400 деталей, а вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,992.

5. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	-2	-1	2	5
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Y=|X^2+X-2|$.

6. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	4	5
p_i	0,3	0,45	0,25

y_i	-4	-2	5
p_i	0,1	0,15	0,75

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Z=4X^2-3Y-2$, $Z=-3XY+4$.

§ 2.6. Числовые характеристики абсолютно непрерывных случайных величин

Пусть X — случайная величина с плотностью распределения $f(x)$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется интеграл

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx$$

при условии, что интеграл абсолютно сходится.

Свойства математического ожидания, определение и свойства моментов случайной величины приведены в § 2.5.

Дисперсию непрерывной случайной величины X вычисляют по формулам:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2\ f(x)\ dx$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx - (MX)^2.$$

Для вычисления моментов непрерывной случайной величины X используют формулы:

$$MX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\ f(x)\ dx,\ M(X - MX)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^k\ f(x)\ dx$$

И, наконец, математическое ожидание и дисперсия функции $Y = g(X)$ от непрерывной случайной величины X выражаются формулами

$$Mg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ f(x)\ dx,$$

$$Dg(X) = M(g(X) - Mg(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - Mg(X))^2 f(x)\ dx,$$

$$Dg(X) = Mg^2(X) - (Mg(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) f(x)\ dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ f(x) dx \right)^2.$$

Если случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a;\ b]$ $(a < b)$, то $MX = \dfrac{a+b}{2}$, $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Если случайная величина X имеет треугольное распределение на отрезке $[a;\ b]$ $(a < b)$, то $MX = \dfrac{a+b}{2}$, $DX = \dfrac{(b-a)^2}{24}$.

Если случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ $(\lambda > 0)$, то $MX = \dfrac{1}{\lambda}$, $DX = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Если случайная величина X имеет распределение Лапласа с параметрами α и λ $(\lambda > 0)$, то $MX = \alpha$, $DX = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

Если случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами α и σ^2 $(\sigma > 0)$, то $MX = \alpha$, $DX = \sigma^2$.

Математическое ожидание случайной величины X, имеющей распределение Коши с параметрами α и λ $(\lambda > 0)$, не существует.

Задача 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \ln x & \text{при } 1 < x \leqslant e, \\ 1 & \text{при } x > e. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию X.

Решение. Так как $f(x) = F'(x)$, то

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{при } 1 < x \leqslant e, \\ 1 & \text{при } x > e. \end{cases}$$

Тогда по определению математического ожидания абсолютно непрерывной случайной величины имеем

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\Big|_1^e = e - 1.$$

Воспользовавшись свойством дисперсии, найдем

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\ dx - (MX)^2 = \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx(e^2 - 1) - (e-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(e-1)(3-e).$$

Задача 2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;2),\\ \dfrac{1}{4}x^3, & x\in(0;2).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y=-2X+4$.

Решение. а) По определению математического ожидания абсолютно непрерывной случайной величины имеем

$$MX=\int_0^2 x\cdot\frac{x^3}{4}\,dx=1{,}6.$$

Воспользовавшись свойством дисперсии, найдем

$$DX=\int_0^2 x^2\cdot\frac{x^3}{4}\,dx-1{,}6^2=\frac{8}{75}.$$

Зная дисперсию, найдем среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{8}{75}}\approx 0{,}33.$$

б) Найдем математическое ожидание случайной величины $Y=-2X+4$, воспользовавшись свойством математического ожидания

$$MY=-2MX+4=-2\cdot 1{,}6+4=0{,}8.$$

Воспользовавшись свойством дисперсии найдем

$$DY=4DX=4\cdot\left(\frac{8}{75}\right)=\frac{32}{75}.$$

Зная дисперсию, найдем среднее квадратическое отклонение Y

$$\sigma(Y)=\sqrt{\frac{32}{75}}\approx 0{,}653.$$

Задача 3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \dfrac{\operatorname{ctg}x}{\ln 2}, & x\in\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=\dfrac{1}{\sin x}$.

Решение. Найдем математическое ожидание случайной величины $Y=\dfrac{1}{\sin x}$. Функция $y=\dfrac{1}{\sin x}$ на интервале $\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ определена и непрерывна, поэтому

$$MY=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\,\frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2}\,dx=\frac{1}{\ln 2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{\ln 2}\approx 1{,}44.$$

Воспользовавшись свойством дисперсии, найдем

$$DY=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}\,\frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2}\,dx-\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2=\frac{3}{2\ln 2}-\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2\approx 0{,}08.$$

Задача 4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале (0; 4) равенством $f(x)=C\cdot\sqrt{x}$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков:

Решение. Плотность распределения вероятностей должна удовлетворять условию $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx=1.$

Найдем интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx=\int_0^4 C\cdot\sqrt{x}dx=\frac{2C}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4=\frac{16C}{3}.$$

Следовательно, $C=\dfrac{3}{16}$.

Найдем моменты первых трех порядков, т. е. найдем MX, MX^2, MX^3. По определению имеем

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx=\frac{3}{16}\int_0^4 x\cdot\sqrt{x}dx=2{,}4.$$

$$MX^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\ dx=\frac{3}{16}\int_0^4 x^2\cdot\sqrt{x}dx\approx 6{,}857.$$

$$MX^3=\int_{-\infty}^{+\infty} x^3f(x)\ dx=\frac{3}{16}\int_0^4 x^3\cdot\sqrt{x}dx\approx 21{,}333.$$

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -1,\\ \sqrt{1-x^2} & \text{при } -1<x\leqslant 0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(2;4),\\ \dfrac{1}{2}, & x\in(2;4).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Z=X^2-5$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;+\infty),\\ 2x(1+x)^{-3}, & x\in(0;+\infty).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y=\dfrac{1}{X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(1;\, e)$ равенством $f(x)=\dfrac{C}{x}$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 2

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ 0{,}25x^2 & \text{при } 0<x\leqslant 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y=5X+2$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; \pi), \\ \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & x \in (0; \pi). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = \sin\left(\frac{X}{2}\right)$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x) = C(x^2 + 1)^{-2}$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 3

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1, \\ 2x+2 & \text{при } -1 < x \leqslant -0{,}5, \\ 1 & \text{при } x > -0{,}5. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y = -5X - 3$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; \pi), \\ \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & x \in (0; \pi). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = \cos\left(\frac{X}{2}\right)$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ 1)$ равенством $f(x) = Cx(1 - x^2)$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 4

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{9}x^2 & \text{при } 0 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (6; 9), \\ \frac{1}{9}(x-6)^2, & x \in (6; 9). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y = X + 6$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ 4e^{-4x}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = e^{-X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(-1;\ 0)$ равенством $f(x) = \dfrac{Cx}{\sqrt{1-x^2}}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 5

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = 0{,}5 + \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi},\ -\infty < x\ +\infty.$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ 3e^{-3x}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y = -3X + 4$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{2}{\pi(x^2+1)^2},\ x \in (-\infty;\ +\infty).$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = |X|$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(1; +\infty)$ равенством $f(x) = C \cdot x^{-3}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 6

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 8, \\ (x-8)^2 & \text{при } 8 < x \leqslant 9, \\ 1 & \text{при } x > 9. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{2}{\pi(x^2+1)^2}, \ x \in (-\infty; +\infty).$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y = X^2 + 1$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \dfrac{8}{\pi+2}\cos^2 x, & x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = \dfrac{1}{\cos X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(1; 4)$ равенством $f(x) = C \cdot \sqrt{x}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 7

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} < x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{\pi(x^2+2x+2)},\ x\in(-\infty;\ +\infty).$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y=\dfrac{X^2+2X+2}{X^2+1}$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right),\\ (\cos x+\sin x)\,e^{-x}, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y=e^X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ +\infty)$ равенством $f(x)=C\cdot e^{-2x}$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 8

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin x & \text{при } 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{3},\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(1;+\infty),\\ 3x^{-4}, & x\in(1;+\infty).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y=-2X+1$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(-1;1),\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x\in(-1;1).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y=\sqrt{1-X^2}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале (0; 4) равенством $f(x)=C\cdot\sqrt{x}$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 9

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant\frac{3\pi}{4},\\ \cos 2x & \text{при } \frac{3\pi}{4}<x\leqslant\pi,\\ 1 & \text{при } x>\pi. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin(0;1),\\ 4x-4x^3, & x\in(0;1). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y=3X+4$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $f(x)=\dfrac{e^{-|x|}}{2}$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y=X^2$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(1;+\infty)$ равенством $f(x)=C\cdot x^{-4}$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 10

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 2,\\ 0{,}5x-1 & \text{при } 2<x\leqslant 4,\\ 1 & \text{при } x>4. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right),\\ 3\sin 3x, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y=-3X-4$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(-1;0),\\ -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & x\in(-1;0).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y=\sqrt{1-X^2}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x)=Ce^{-|x|}$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 11

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 1,\\ \ln x & \text{при } 1<x\leqslant e,\\ 1 & \text{при } x>e.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(1;e),\\ \dfrac{1}{x}, & x\in(1;e).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y=-4X+1$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;+\infty),\\ 2x(1+x)^{-3}, & x\in(0;+\infty).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y=\dfrac{X+1}{X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x) = Ce^{-\frac{|x|}{2}}$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 12

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ e^x - 1 & \text{при } 0 < x \leqslant \ln 2, \\ 1 & \text{при } x > \ln 2. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{2}{\pi(x^2+1)^2},\ x \in (-\infty;\ +\infty).$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y = -X + 2$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ 4e^{-4x}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = e^X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ равенством $f(x) = C \sin x \cos x$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 13

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = 1 - \frac{\operatorname{arcctg} x}{\pi},\ -\infty < x < +\infty.$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; 1), \\ \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}}, & x \in (0; 1). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Z = 2X + 5$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln\sqrt{2}}, & x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = \cos X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале (0; 8) равенством $f(x) = Cx^3$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 14

1. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = 0{,}5 + \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (1; 2), \\ \dfrac{2}{x^2}, & x \in (1; 2). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y = -4X - 3$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; +\infty), \\ 2e^{-2x}, & x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = 3X^2$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале (0; 1) равенством $f(x) = \dfrac{C}{1+x^2}$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 15

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -2,\\ 0{,}5+\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{2}}{\pi} & \text{при } -2<x\leqslant 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(1;2),\\ \dfrac{1}{x\ln 2}, & x\in(1;2).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y=-3X$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;+\infty),\\ 2e^{-2x}, & x\in(0;+\infty).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y=\sin X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ +\infty)$ равенством $f(x)=Ce^{-\sqrt{x}}$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 16

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}4x & \text{при } -\infty<x\leqslant 0,\\ 1, & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(1;2),\\ \dfrac{8}{3x^3}, & x\in(1;2).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y=-3X+2$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{\pi(x^2+1)},\ x\in(-\infty;\ +\infty).$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = \operatorname{arctg} X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ +\infty)$ равенством $f(x) = \dfrac{C}{(1+x)^3}$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 17

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 4, \\ x^2 - 8x + 16 & \text{при } 4 < x \leqslant 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; 1), \\ (x+1)e^{x-1}, & x \in (0; 1). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y = -2X + 3$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln\sqrt{2}}, & x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = \dfrac{1}{\cos X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ 1)$ равенством $f(x) = \dfrac{C}{\sqrt{1-x}}$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 18

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{при } x > 0, \\ 1 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{\pi(x^2+2x+2)},\ x\in(-\infty;\ +\infty).$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y=\operatorname{arctg}(X+1)$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;+\infty),\\ 2e^{-2x}, & x\in(0;+\infty).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y=e^{-X}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале (1; 2) равенством $f(x)=\dfrac{C}{x}$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 19

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ 1-\cos x & \text{при } 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при } x\geqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(1;5),\\ \dfrac{1}{4}, & x\in(1;5).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Z=\dfrac{X}{2}$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{\pi(x^2+1)},\ x\in(-\infty;\ +\infty).$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y=\dfrac{1}{X^2+1}$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ равенством $f(x) = C \cdot \cos 2x$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 20

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant \frac{3}{2}, \\ 2x-3 & \text{при } \frac{3}{2} < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y = 3X + 1$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (1; 2], \\ x - 0{,}5, & x \in (1; 2]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = X^2$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале (0; 2) равенством $f(x) = \frac{C}{e^x}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 21

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \sqrt[3]{x} & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right], \\ 3\sin 3x, & x \in \left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Y = -X + 2$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (1; 1+\sqrt{3}], \\ \dfrac{2}{3}(x-1), & x \in (1; 1+\sqrt{3}]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = -X^2$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ 1)$ равенством $f(x) = \dfrac{C}{1+x^2}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 22

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x^3 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \cos x, & x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Z = 2X + 3$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; 1], \\ 2x, & x \in (0; 1]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = -4X^2$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ равенством $f(x) = C\sin 2x$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 23

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 3, \\ 0{,}25(x^2 - 3x) & \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; 3), \\ \dfrac{1}{9}x^2, & x \in (0; 3). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Z = -3X + 5$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \cos x, & x \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = \sin X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале $(0;\ 1)$ равенством $f(x) = C\operatorname{arcctg} x$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

Вариант 24

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 0{,}1(x - 1 + \lg x) & \text{при } 1 < x \leqslant 10, \\ 1 & \text{при } x > 10. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;4),\\ \dfrac{3}{16}\sqrt{x}, & x\in(0;4).\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение: а) X, б) $Z=-4X-3$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right],\\ \cos x, & x\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y=e^X$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана в интервале (0; 2) равенством $f(x)=Cx^2$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C и моменты первых трех порядков.

§ 2.7. Равномерное, показательное и нормальное распределения

Рассмотрим более подробно наиболее важные из абсолютно непрерывных распределений: равномерное, показательное и нормальное.

Равномерное распределение. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a;\ b]$ $(a<b)$, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\notin[a;b].\end{cases}$$

Ее функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a<x\leqslant b,\\ 1 & \text{при } x>b.\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия:

$$MX=\frac{a+b}{2},\quad DX=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Равномерное распределение является непрерывным аналогом распределений классической теории вероятностей, описывающих стохастические эксперименты с равновероятными исходами.

Если случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$, то случайная величина $F(X)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0;\ 1]$.

С помощью линейного преобразования $Y=\dfrac{X-a}{b-a}$ приводится к равномерному распределению на отрезке $[0;\ 1]$.

Если X_1 и X_2 независимые равномерно распределенные на отрезке $[a;\ b]$ $(a < b)$ случайные величины, то случайная величина X_1+X_2 имеет треугольное распределение на отрезке $[2a;\ 2b]$

Показательное (экспоненциальное) распределение. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ $(\lambda > 0)$, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Ее функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия: $MX=\dfrac{1}{\lambda}$, $DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Непрерывный аналог геометрического распределения.

Если X_1 и X_2 независимые случайные величины, имеющие показательное распределенные с параметром λ, то случайная величина $X_1-X_2+\alpha$ имеет распределение Лапласа с параметрами α и λ.

Нормальное (гауссово) распределение. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами α и σ^2 $(\sigma > 0)$, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right),\ x\in(-\infty;\ +\infty).$$

Ее функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}\,dt.$$

Математическое ожидание и дисперсия: $MX=\alpha$, $DX=\sigma^2$.

Известно, что $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{-\infty} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{1}{2}$.

Фундаментальная роль, которую играет нормальное распределение, объясняется тем, что при широких предположениях суммы случайных величин с ростом числа слагаемых ведут себя асимптотически нормально. Примером могут служить предельные теоремы Муавра—Лапласа для схемы Бернулли.

Сумма двух независимых нормально распределенных случайных величин с параметрами $(\alpha_1;\ \sigma_1^2)$ и $(\alpha_2;\ \sigma_2^2)$ имеет нормальное распределение с параметрами $(\alpha_1 + \alpha_2;\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

С помощью линейного преобразования $Y = \frac{X-\alpha}{\sigma}$ нормальное распределение с параметрами α и σ^2 $(\sigma > 0)$ приводится к стандартному нормальному распределению с параметрами 0 и 1 и функцией распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Функция Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, связанная с $\Phi(x)$ соотношением $\Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$, протабулирована (приложение 3).

Протабулирована также и плотность стандартного нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),\ x \in (-\infty;\ +\infty)$$

(приложение 2).

Вероятность попадания нормально распределенной с параметрами α и σ^2 случайной величины в заданный интервал $(a;\ b)$ определяется по формуле

$$P\ (a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\alpha}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{b-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-\alpha}{\sigma}\right).$$

Вероятность того, что отклонение случайной величины, имеющей нормальное распределение с параметрами α и σ^2, от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше, чем ε $(\varepsilon > 0)$, определяется по формуле

$$P\ (|X-\alpha| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Нормально распределенная величина с большой вероятностью принимает значения, близкие к своему математическому ожиданию, что выражается правилом сигм:

$$P\ (|X-\alpha| < k\sigma) = \begin{cases} 2\Phi_0(1) = 0{,}6826 & k = 1, \\ 2\Phi_0(2) = 0{,}9544 & k = 1, \\ 2\Phi_0(3) = 0{,}9973 & k = 3. \end{cases}$$

Таким образом, по правилу трех сигм, практически достоверно, что распределенная по нормальному закону случайная величина X принимает свои значения в интервале $(\alpha - 3\sigma;\ \alpha + 3\sigma)$.

Задача 1. В круге радиуса 5 наудачу проведены две хорды. Середины хорд равномерно распределены в круге. Случайная величина X_i, $i = 1, 2$, выражает длину i-ой хорды. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X_1;

б) математическое ожидание X_1;

в) вероятность того, что длина ровно одной хорды больше стороны вписанного в круг правильного треугольника.

Решение. а) Для того чтобы найти функцию $F_1(x)$ распределения вероятностей случайной величины X_1, вычислим $P(X_1 < x)$, где $0 \leqslant x \leqslant 10$. Следовательно, необходимо найти вероятность того, что длина первой хорды не превзойдет x. Положение хорды по условию задачи полностью задается серединой хорды. Чтобы длина хорды не превосходила x, необходимо чтобы ее середина находилась вне круга, концентрического данному, но радиуса $r = \sqrt{25 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$. Множество точек круга радиуса 5, благоприятствующих событию $(X_1 < x)$, имеет площадь, равную $S_x = 25\pi - \left(25 - \frac{x^2}{4}\right)\pi = \frac{\pi x^2}{4}$.

Тогда искомая вероятность равна $P\ (X_1 < x) = \frac{\pi x^2/4}{25\pi} = \left(\frac{x}{10}\right)^2$.

Отсюда

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2}{100} & \text{при } 0 < x \leqslant 10, \\ 1 & \text{при } x > 10. \end{cases}$$

б) Зная функцию распределения вероятностей $F_1(x)$, получим плотность распределения

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{x}{50} & \text{при } 0 < x \leqslant 10, \\ 0 & \text{при } x \geqslant 10. \end{cases}$$

Тогда математическое ожидание X_1 равно

$$MX_1 = \int_0^{10} x \cdot \frac{x}{50}\,dx = \frac{20}{3}.$$

в) Пусть событие A_1 означает, что длина первой хорды больше стороны вписанного в круг правильного треугольника. Сторона вписанного в круг правильного треугольника равна $a = 5\sqrt{3}$. Тогда $P(A_1) = P(X_1 > 5\sqrt{3}) = 1 - F_1(5\sqrt{3}) = \dfrac{1}{4}$. Заметим, что случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют одинаковое распределение. Поэтому рассматриваемый эксперимент удовлетворяет схеме Бернулли с $n = 2$, $p = \dfrac{1}{4}$, $q = \dfrac{3}{4}$. Следовательно, искомая вероятность равна $P_2(m = 1) = 2 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8}$.

Задача 2. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x + y$ не превышает единицы, а произведение $x \cdot y$ не меньше 0,09.

Решение. Множество всех возможных пар чисел $(x; y)$ задается точками квадрата с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1), поэтому $|\Omega| = 1$. Искомому событию A благоприятствует множество точек квадрата, удовлетворяющих условиям: $x + y \leqslant 1$, $xy \geqslant 0{,}09$. Или, что то же, условиям: $y \leqslant 1 - x$, $y \geqslant \dfrac{0{,}09}{x}$. Точек пересечения кривых $y = 1 - x$, $y = \dfrac{0{,}09}{x}$ две: (0,1; 0,9) и (0,9; 0,1). Поэтому

$$|A| = \int_{0,1}^{0,9} \left(1 - x - \frac{0{,}09}{x}\right) dx = 0{,}4 - 0{,}09 \ln 9 \approx 0{,}2.$$

Тогда $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} \approx 0{,}2$.

Задача 3. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное на отрезке [0; 1] распределение. Найти $M(aX+bY+c)$ и $D(aX+bY+c)$.

Решение. Так как случайные величины X и Y имеют равномерное на отрезке [0; 1] распределение, то $MX=\frac{1}{2}$, $DX=\frac{1}{12}$, $MY=\frac{1}{2}$, $DY=\frac{1}{12}$. По свойству математического ожидания

$$M(aX+bY+c)=aMX+bMY+c=\frac{a+b}{2}+c.$$

По свойству дисперсии в силу независимости X и Y

$$D(aX+bY+c)=a^2DX+b^2DY=\frac{a^2+b^2}{12}.$$

Задача 4. Некоторая категория людей имеет средний вес 60 кг и среднее квадратическое отклонение веса 3 кг. Если вес имеет нормальное распределение, определить:

а) плотность распределения вероятностей веса;

б) вероятность того, что вес случайно взятого человека отличается от среднего веса не более чем на 5 кг.

Решение. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$$

Из условия задачи $\alpha=60$, $\sigma=3$.

Следовательно,

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-60)^2}{18}}.$$

б) Требуется найти вероятность события $(|X-MX|\leqslant 5)$. Используем формулу $P(|X-MX|\leqslant\varepsilon)=2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$. По условию задачи $\varepsilon=5$, $\sigma=3$.

По таблице значений функции Лапласа $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2}du$ находим, что $\Phi_0\left(\frac{5}{3}\right)=0{,}4525$. Следовательно, $P(|X-MX|\leqslant 5)=0{,}905$.

Задача 5. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 100 м. Определить вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м.

Решение. Обозначим через X суммарную ошибку измерения дальности. Ее систематическая составляющая $\alpha = -50$ м, а случайная ошибка имеет $\sigma = 100$ м. Следовательно, плотность распределения вероятностей суммарных ошибок имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x+50)^2}{20\,000}}.$$

Требуется найти вероятность события $(|X| \leqslant 150)$. Используем формулу $P\ (|X| \leqslant \varepsilon) = \Phi_0\dfrac{\varepsilon-\alpha}{\sigma} - \Phi_0\dfrac{-\varepsilon-\alpha}{\sigma}$. Получим

$$P\ (|X| \leqslant 150) = \Phi_0\frac{150+50}{100} - \Phi_0\frac{-150+50}{100} = \Phi_0(2) - \Phi_0(-1).$$

По таблице значений функции Лапласа, учитывая ее нечетность, находим, что $\Phi_0(2) = 0{,}4772$, $\Phi_0(-1) = -\Phi_0(1) = -0{,}3413$. Следовательно, $P(|X| \leqslant 150) = 0{,}8185$.

Задача 6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2$.

Решение. Для того, чтобы найти функцию распределения вероятностей Y, определим вероятность события $(Y < y)$ для любого действительного y.

Если $y \leqslant 0$, то $P(Y < y) = P(X^2 < y) = 0$.

Если $y > 0$, то учитывая распределение X, имеем

$$P(Y < y) = P(X^2 < y) = P(|X| < \sqrt{y}) =$$
$$= P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du.$$

Далее, учитывая четность функции под знаком интеграла, имеем

$$\Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{y} e^{-\frac{t}{2}} t^{-\frac{1}{2}}\, dt.$$

Следовательно,

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t}{2}} t^{-\frac{1}{2}}\, dt \text{ при } y > 0, \quad F_Y(y) = 0 \text{ при } y \leqslant 0.$$

Задача 7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2) = (0;\ 1)$. Какое из двух событий: $\{2X - 1 \leqslant 1\}$ или $\{2X - 1 \geqslant 1\}$ имеет большую вероятность?

Решение. Найдем вероятность

$$P(2X - 1 \leqslant 1) = P(2X \leqslant 2) = P(X \leqslant 1) = \Phi(1).$$

По таблице значений функции Лапласа найдем $\Phi_0(1) = 0{,}3413$. В силу равенства $\Phi(1) = 0{,}5 + \Phi_0(1)$ имеем $P(2X - 1 \leqslant 1) = 0{,}8413$. Очевидно, что $P(2X - 1 \leqslant 1) > P(2X - 1 \geqslant 1)$.

Задача 8. Найти асимметрию показательного распределения с параметром $\lambda = 5$.

Решение. По определению асимметрии

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{M(X - MX)^3}{\left(\sqrt{DX}\right)^3}.$$

Для упрощения подсчета вычислим центральный момент третьего порядка по формуле

$$\begin{aligned} M(X - MX)^3 &= M(X^3 - 3X^2 \cdot MX + 3X \cdot (MX)^2 - (MX)^3) = \\ &= M(X - MX)^3 = M(X^3 - 3X^2 \cdot MX + 3X \cdot (MX)^2 - (MX)^3) = \\ &= MX^3 - 3MX^2 \cdot MX + 3MX \cdot (MX)^2 - (MX)^3 = \\ &= MX^3 - 3MX^2 \cdot MX + 2(MX)^3. \end{aligned}$$

Найдем начальные моменты первых трех порядков:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} x \cdot 5e^{-5x}\ dx = \frac{1}{5},$$

$$MX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot 5e^{-5x}\ dx = \frac{2}{25},$$

$$MX^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} x^3 \cdot 5e^{-5x}\ dx = \frac{6}{125}.$$

Тогда

$$M(X - MX)^3 = \frac{6}{125} - 3 \cdot \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{125} = \frac{2}{125},$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \frac{2}{25} - \frac{1}{25} = \frac{1}{25}.$$

Следовательно, асимметрия показательного распределения с параметром $\lambda = 5$ равна 2.

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Поезда метро идут с интервалом в 1 минуту. Пассажир появляется на перроне в произвольный момент времени. Время ожидания поезда есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X;

б) центральный момент третьего порядка X;

в) вероятность того, что пассажир будет ожидать поезд не более 5 сек.

2. Из фиксированной вершины квадрата со стороной a произвольным радиусом, меньшим его диагонали, проведена окружность. Какова вероятность того, что она пересечет стороны квадрата, которым принадлежит данная вершина?

3. Случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[a; b]$ распределение. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2$.

4. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения, с гарантией на 15 лет и средним квадратическим отклонением, равным 3 годам. Определить:

а) плотность распределения вероятностей;

б) вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет.

5. Заряд пороха для охотничьего ружья должен составлять 2,3 г. Заряд отвешивается на весах, имеющих ошибку взвешивания, распределенную по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 0,2 г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес заряда составляет 2,8 г.

6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = aX + b$, $a > 0$.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a; \sigma^2) = (1; 4)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $(-2; 4)$ или в интервале $(-3; 3)$.

8. Найти асимметрию показательного распределения с параметром $\lambda = 1$.

Вариант 2

1. Событие, состоящее из мгновенного сигнала, должно произойти между одним и пятью часами. Время ожидания сигнала есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение. Найти:

а) плотность распределения вероятностей X;

б) момент третьего порядка X;

в) вероятность того, что сигнал будет зафиксирован в течение 20 мин. после двух часов.

2. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что их сумма квадратов меньше 100. Какова вероятность того, что сумма этих квадратов окажется больше 64?

3. Случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[a; b]$ распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = cX + d$, $c > 0$.

4. Распределение веса консервных банок, выпускаемых заводом, подчиняется закону нормального распределения со средним весом 250 г и средним квадратическим отклонением, равным 5 г. Определить:

а) функцию распределения вероятностей;

б) вероятность того, что отклонение веса банок от среднего веса по абсолютной величине не превысит 8 г.

5. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 100 м. Определить вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = |X|$.

7. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти вероятность того, что случайная величина $Y = 2X + 1$ примет значение в интервале $(0; 4)$ и в интервале $(-4; 2)$.

8. Найти эксцесс показательного распределения с параметром $\lambda = 2$.

Вариант 3

1. Внутри круга радиуса 1 наудачу выбирают две точки. Случайная величина X_i, $i = 1, 2$, является расстоянием от i-ой точки до центра круга. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X_1;

б) математическое ожидание X_1;

в) вероятность того, что обе точки окажутся ближе к центру, чем к краю круга.

2. Шарик радиуса $r = 2$ см наудачу бросают в круг радиуса $R = 25$ см, в котором вырезано отверстие в виде квадрата со стороной $a = 14$ см. Какова вероятность того, что шар пройдет через это отверстие, не задев его края, если он непременно попадет в круг?

3. Случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[-a; a]$ распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = |X|$.

4. Отклонение размера детали от стандарта представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения с дисперсией, равной 0,04. Систематическая ошибка отсутствует. Определить:

а) плотность распределения вероятностей;

б) вероятность изготовления детали, отвечающей требованиям стандарта, если задан допуск $\pm 0{,}5$.

5. Прибор не имеет систематической ошибки, а случайные ошибки распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы ± 20 м. Определить среднее квадратическое отклонение случайной ошибки прибора.

6. Случайная величина aX, $a \neq 0$, имеет стандартное нормальное распределение. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2$.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a; \sigma^2) = (2; 9)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $(-2; 2)$ и в интервале $(-1; 3)$.

8. Найти момент третьего порядка показательного распределения с параметром $\lambda = 3$.

Вариант 4

1. Внутри круга радиуса 1 наудачу выбирают две точки. Случайная величина X_i, $i = 1, 2$, является расстоянием от i-ой точки до центра круга. Найти:

а) плотность распределения вероятностей X_1;

б) дисперсию X_1;

в) вероятность того, что хотя бы одна точка окажется ближе к центру, чем к краю круга.

2. Дано линейное уравнение $ax = b$. Если a выбирается наудачу на интервале $(0; 8)$ и b — на интервале $(0; 10)$, то какова

вероятность того, что корень данного уравнения будет больше единицы?

3. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 4$. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = aX + b$, $a > 0$.

4. При измерении детали ее длина является случайной величиной X, распределенной по нормальному закону с параметрами $a = 22$ см и $\sigma = 0{,}2$ см. Определить:

а) функцию распределения вероятностей X;

б) интервал, в который с вероятностью 0,9544 попадет X.

5. Систематическая ошибка удержания высоты самолетом +20 м, а случайная ошибка подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 10 м. Для полета самолета отведен коридор высотой 100 м. Определить вероятность того, что самолет будет лететь выше коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора.

6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \sin X$.

7. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти вероятность того, что случайная величина $Y = 3X - 1$ примет значение в интервале $(-1;\ 4)$ или в интервале $(-4;\ 2)$.

8. Найти центральный момент третьего порядка равномерного на отрезке $[-4;\ 4]$ распределения.

Вариант 5

1. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Ошибка округления отсчета есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X;

б) центральный момент третьего порядка X;

в) вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02А.

2. В течение 20 мин. после девяти часов ученик А в случайный момент времени звонит по телефону ученику В, ждет 2 мин., после чего кладет трубку. В течение тех же 20 мин. ученик В заходит в свою квартиру в случайный момент и остается дома в течение 4 мин. Какова вероятность того, что разговор между учениками состоится?

3. Случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[-2; 2]$ распределение. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = \sin X$.

4. Случайные ошибки измерения дальности радиолокатором имеют нормальное распределение со средним квадратическим отклонением, равным 5 м. Систематическая ошибка отсутствует. Определить:

а) плотность распределения вероятностей;

б) вероятность получения ошибки измерения дальности, по абсолютной величине не превосходящей 20 м.

5. Станок-автомат изготовляет детали, длина которых по стандарту может отклоняться от 125 мм не более чем на 0,5 мм. Среди продукции станка 7% нестандартной. Считая, что длина детали имеет нормальное распределение, найти их дисперсию.

6. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 5$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2$.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a; \sigma^2) = (0; 9)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $(-1; 1)$ или в интервале $(-2; 0)$.

8. Найти эксцесс стандартного нормального распределения.

Вариант 6

1. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Ошибка округления отсчета есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение. Найти:

а) плотность распределения вероятностей X;

б) асимметрию X;

в) вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 сек.

2. На отрезке $AB = a$ независимо друг от друга наудачу взяты 3 точки. Какова вероятность того, что все они лежат от точки A не далее, чем на b $(b < a)$?

3. Найти плотность распределения вероятности объема куба, ребро которого X — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(0; 6)$.

4. Случайные ошибки измерения прибора имеют нормальное распределение с дисперсией, равной 25. Систематические ошибки отсутствуют. Определить:

а) функцию распределения вероятностей;

б) сколько необходимо произвести измерений, чтобы с вероятностью более 0,9 ошибка хотя бы одного из них не превосходила по абсолютной величине 5?

5. Производится стрельба по цели из артиллерийского орудия. Принимая, что дальность полета снаряда имеет нормальное распределение со средним квадратическим отклонением, равным 20 м, рассчитать, какой процент выпускаемых снарядов будет иметь перелет от 20 до 50 м.

6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = e^X$.

7. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти вероятность того, что случайная величина $Y = -X + 2$ примет значение в интервале $(-3; 3)$ и в интервале $(0; 4)$.

8. Найти центральный момент третьего порядка показательного распределения с параметром $\lambda = 6$.

Вариант 7

1. Внутри квадрата со стороной $a = 7$ наудачу выбирают две точки. Случайная величина X_i, $i = 1, 2$, является расстоянием от i-ой точки до ближайшей стороны квадрата. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X_1;

б) математическое ожидание X_1;

в) вероятность того, что обе точки окажутся ближе к центру, чем к ближайшей стороне квадрата.

2. В равносторонний треугольник, сторона которого равна 7, вписан круг. Внутри треугольника независимо друг от друга наудачу выбираются пять точек. Какова вероятность того, что 3 из этих точек окажутся внутри круга?

3. Случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[0; 1]$ распределение с функцией распределения $F(x)$. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = F(X)$.

4. Производится измерение диаметра вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 100 мм. Определить:

а) плотность распределения вероятностей;

б) вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

5. Высотомер имеет случайные и систематические ошибки. Систематическая ошибка равна ± 20 м. Случайные ошибки распределены по нормальному закону. Найти среднее квадратическое отклонение случайной ошибки, если с вероятностью 0,9 ошибка измерения высоты меньше 100 м.

6. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 7$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^3$.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2) = (1;\ 25)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $(0;\ 2)$ и в интервале $(1;\ 3)$.

8. Найти момент третьего порядка стандартного нормального распределения.

Вариант 8

1. В круге радиуса 8 наудачу проведены две хорды. Один конец хорд закреплен, а другой равномерно распределен на окружности. Случайная величина X_i, $i = 1, 2$, выражает длину i-ой хорды. Найти:

а) плотность распределения вероятностей X_1;

б) дисперсию X_1;

в) вероятность того, что хотя бы одна хорда будет иметь длину, больше $8\sqrt{2}$.

2. На окружности радиуса 8 наудачу поставлены три точки A, B, C. Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный?

3. Случайная величина X имеет равномерное распределение в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right)$. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = \sin X$.

4. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 25. Вероятность попадания X в интервал $(15;\ 35)$ равна 0,61. Определить:

а) функцию распределения вероятностей X;

б) вероятность попадания X в интервал $(35;\ 40)$.

5. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением, равным 0,4 мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины

$$Y=\begin{cases}\sqrt{X}, & X \geqslant 0,\\ \sqrt{-X}, & X < 0.\end{cases}$$

7. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти вероятность того, что случайная величина $Y=-2X+2$ примет значение в интервале $(0;\,4)$ или в интервале $(0;\,2)$.

8. Найти эксцесс показательного распределения с параметром $\lambda=8$.

Вариант 9

1. Автобусы некоторого маршрута идут с интервалом в 9 минут. Пассажир появляется на перроне в произвольный момент времени. Время ожидания пассажиром автобуса есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X;

б) центральный момент третьего порядка X;

в) вероятность того, что пассажир будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

2. Диаметр круга X измерен приближенно, причем $a \leqslant X \leqslant b$. Рассматривая диаметр как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале $(a;\,b)$, найти MX и DX.

3. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda=9$. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y=\sqrt{X}$.

4. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения, с гарантией на 10 лет и средним квадратическим отклонением, равным 1 году. Определить:

а) плотность распределения вероятностей;

б) вероятность того, что прибор прослужит более 10 лет.

5. Заряд пороха для охотничьего ружья должен составлять 2,5 г. Заряд отвешивается на весах, имеющих ошибку взвешивания, распределенную по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 0,3 г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес заряда составляет 3 г.

6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Доказать, что $F(x)=1-F(-x)$, где $F(x)$ — функция распределения вероятностей случайной величины X.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2) = (0;\ 1)$. Какое из двух событий: $\{|X| \leqslant 0{,}7\}$ или $\{|X| \geqslant 0{,}7\}$ имеет большую вероятность?

8. Найти асимметрию равномерного на отрезке $[-9;\ 9]$ распределения.

Вариант 10

1. Событие, состоящее из мгновенной вспышки, должно произойти в течение часа. Время ожидания вспышки есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение. Найти:

а) плотность распределения вероятностей X;

б) момент третьего порядка X;

в) вероятность того, что вспышка будет зафиксирована не ранее получаса.

2. Ребро куба X измерено приближенно, причем $a \leqslant X \leqslant b$. Рассматривая ребро куба как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале $(a;\ b)$, найти MX и DX.

3. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 10$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = e^{-10X}$.

4. Распределение веса консервных банок, выпускаемых заводом, подчиняется закону нормального распределения со средним весом 200 г и средним квадратическим отклонением, равным 7 г. Определить:

а) функцию распределения вероятностей;

б) вероятность того, что отклонение веса банок от среднего веса по абсолютной величине не превысит 10 г.

5. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 10 м в сторону завышения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 20 м. Определить вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти $M\sin X$ и $D\sin X$.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2) = (0;\ 1)$. Что больше: $P\{-0{,}5 \leqslant X \leqslant -0{,}1\}$ или $P\{1 \leqslant X \leqslant 2\}$?

8. Найти эксцесс равномерного на отрезке $[-10;\ 10]$ распределения.

Вариант 11

1. Внутри шара с центром в точке A радиуса 1 наудачу выбирают две точки. Случайная величина X_i, $i = 1, 2$, является расстоянием от i-ой точки до точки A. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X_1;

б) математическое ожидание X_1;

в) вероятность того, что ровно одна точка окажется внутри шара с центром в A и радиусом 0,5.

2. Случайная точка X имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 1. Найти вероятность того, что расстояние от X до ближайшей стороны квадрата меньше, чем расстояние от X до ближайшей диагонали квадрата.

3. Случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[0; 1]$ распределение. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = -\dfrac{1}{\lambda} \ln X$, $\lambda > 0$.

4. Отклонение размера детали от стандарта представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения с дисперсией, равной 0,5. Систематическая ошибка отсутствует. Определить:

а) плотность распределения вероятностей;

б) вероятность изготовления детали, отвечающей требованиям стандарта, если задан допуск $\pm 0{,}2$.

5. Прибор не имеет систематической ошибки, а случайные ошибки распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,95 не выходят за пределы ± 10 м. Определить среднее квадратическое отклонение случайной ошибки прибора.

6. Случайная величина $2X - 4$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти функцию распределения вероятностей X.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a; \sigma^2) = (-2; 1)$. Какое из двух событий: $\{|X + 2| \leqslant 0{,}5\}$ или $\{|X + 2| \geqslant 0{,}5\}$ имеет большую вероятность?

8. Найти асимметрию стандартного нормального распределения.

Вариант 12

1. Внутри шара с центром в точке A радиуса 2 наудачу выбирают две точки. Случайная величина X_i, $i = 1, 2$, является расстоянием от i-ой точки до точки A. Найти:

а) плотность распределения вероятностей X_1;

б) дисперсию X_1;

в) вероятность того, что ровно две точки окажутся внутри шара с центром в A и радиусом 1.

2. Случайная точка X имеет равномерное распределение в квадрате $A = \{(x;\ y)\colon |x| \leqslant a,\ |y| \leqslant a\}$. Найти вероятность того, что квадрат с центром X и сторонами длины b, параллельными осям координат, целиком содержится в квадрате A.

3. Случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[0;\ 1]$ распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \ln \dfrac{X}{1-X}$.

4. При измерении детали ее длина является случайной величиной X, распределенной по нормальному закону с параметрами $a = 10$ см и $\sigma = 0{,}5$ см. Определить:

а) функцию распределения вероятностей X;

б) интервал, в который с вероятностью 0,9973 попадет X.

5. Систематическая ошибка удержания высоты самолетом ± 20 м, а случайная ошибка подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 50 м. Для полета самолета отведен коридор высотой 100 м. Определить вероятность того, что самолет будет лететь выше коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора.

6. Случайная величина $5X - 4$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти MX и DX.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2) = (0;\ 1)$. Какое из двух событий: $\{|-3X + 2| < 0{,}5\}$ или $\{|-3X + 2| > 0{,}5\}$ имеет большую вероятность?

8. Найти эксцесс стандартного нормального распределения.

Вариант 13

1. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Ошибка округления отсчета есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X;

б) центральный момент третьего порядка X;

в) вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, меньшая 0,04 или большая 0,06.

2. Случайная точка X имеет равномерное распределение в квадрате $A = \{(x;\ y)\colon |x| + |y| \leqslant a\}$. Найти вероятность того, что квадрат

с центром X и сторонами длины b, параллельными осям координат, целиком содержится в квадрате A.

3. Случайная величина X имеем показательное распределение с параметром $\lambda = 3$ и функцией распределения $F(x)$. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = F(X)$.

4. Случайные ошибки измерения дальности радиолокатором имеют нормальное распределение со средним квадратическим отклонением, равным 3 м. Систематическая ошибка отсутствует. Определить:

а) плотность распределения вероятностей;

б) вероятность получения ошибки измерения дальности, по абсолютной величине не превосходящей 10 м.

5. Станок-автомат изготовляет детали, длина которых по стандарту может отклоняться от 10 см не более, чем на 5 мм. Среди продукции станка 5% нестандартной. Считая, что длина детали имеет нормальное распределение, найти их дисперсию.

6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения вероятностей X^3.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2) = (0;\ 1)$. Что больше: $P\{-6 \leqslant 2X - 4 \leqslant -2\}$ или $P\{-1 \leqslant X \leqslant 2\}$?

8. Найти момент третьего порядка равномерного на отрезке $[-3;\ 3]$ распределения.

Вариант 14

1. В круге радиуса 4 наудачу проведены две хорды. Направление хорд задано и середины хорд равномерно распределены на диаметре, перпендикулярном заданному направлению. Случайная величина X_i, $i = 1, 2$, выражает длину i-ой хорды. Найти:

а) плотность распределения вероятностей X_1;

б) дисперсию X_1;

в) вероятность того, что длина ровно одной хорды больше стороны правильного вписанного в круг треугольника.

2. Случайная точка X имеет равномерное распределение в правильном треугольнике с вершинами $(a;\ 0)$, $(-a;\ 0)$, $(0;\ a\sqrt{3})$. Найти вероятность того, что квадрат с центром X и сторонами длины b, параллельными осям координат, целиком содержится в этом треугольнике.

3. Найти функцию распределения вероятности объема куба, ребро которого X — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(0;\ 4)$.

4. Случайные ошибки измерения прибора имеют нормальное распределение с дисперсией, равной 100. Систематические ошибки отсутствуют. Определить:

а) функцию распределения вероятностей;

б) сколько необходимо произвести измерений, чтобы с вероятностью более 0,95 ошибка хотя бы одного из них не превосходила по абсолютной величине 5?

5. Производится стрельба по цели из артиллерийского орудия. Принимая, что дальность полета снаряда имеет нормальное распределение со средним квадратическим отклонением, равным 10 м, рассчитать, какой процент выпускаемых снарядов будет иметь перелет от 10 до 20 м.

6. Случайная величина $2X+1$ имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения вероятностей $Y=|X|$.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2)=(0;\ 1)$. Что больше: $P\{1 \leqslant -X+1 \leqslant 2\}$ или $P\{0 \leqslant X \leqslant 1\}$?

8. Найти асимметрию показательного распределения с параметром $\lambda=4$.

Вариант 15

1. Внутри куба с ребром $a=5$ наудачу выбирают две точки. Случайная величина X_i, $i=1, 2$, является расстоянием от i-ой точки до ближайшей грани куба. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X_1;

б) математическое ожидание X_1;

в) вероятность того, что обе точки окажутся ближе к центру, чем к ближайшей грани куба.

2. На паркет, составленный из правильных треугольников со стороной 5, случайно бросается монета радиуса 1. Найти вероятность того, что упавшая монета не заденет границу ни одного из треугольников паркета.

3. Случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[0;\ 1]$ распределение. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y=e^X$.

4. Производится измерение глубины колодца без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 0,2 м. Определить:

а) плотность распределения вероятностей;

б) вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 1 м.

5. Высотомер имеет случайные и систематические ошибки. Систематическая ошибка равна ± 10 м. Случайные ошибки распределены по нормальному закону. Найти среднее квадратическое отклонение случайной ошибки, если с вероятностью 0,8 ошибка измерения высоты меньше 50 м.

6. Случайные величины $2X-4$ и $-3Y+9$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти

$$M(aX+b)(cY+d).$$

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2)=(-3;\ 9)$. Какое из двух событий: $\{|X|<1\}$ или $\{|X|>1\}$ имеет большую вероятность?

8. Найти момент третьего порядка показательного распределения с параметром $\lambda=5$.

Вариант 16

1. В круге радиуса 6 наудачу проведены две хорды. Один конец хорд закреплен, а другой равномерно распределен на окружности. Случайная величина X_i, $i=1,\ 2$, выражает длину i-ой хорды. Найти:

а) плотность распределения вероятностей X_2;

б) дисперсию X_2;

в) вероятность того, что длина хотя бы одной хорды больше стороны правильного вписанного в круг треугольника.

2. Случайная точка X имеет равномерное распределение в круге $A=\{(x;\ y)\colon x^2+y^2\leqslant a^2\}$. Найти вероятность того, что параллельный оси абсцисс отрезок длины a с серединой в точке X целиком содержится в круге A.

3. Случайная величина X имеет равномерное распределение в интервале $(0;\ \pi)$. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y=\cos X$.

4. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 16. Вероятность попадания X в интервал $(11;\ 21)$ равна 0,47. Определить:

а) функцию распределения вероятностей X;

б) вероятность попадания X в интервал $(14;\ 18)$.

5. Автомат изготовляет пуговицы. Пуговица считается стандартной, если отклонение X диаметра пуговицы от проектного размера

по абсолютной величине меньше 0,5 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением, равным 0,2 мм, найти, сколько в среднем будет стандартных пуговиц среди ста изготовленных.

6. Случайные величины $-X+3$ и $2Y-2$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти

$$M(aX+bY+c) \text{ и } D(aX+bY+c),\ a>0,\ b>0.$$

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2)=(1;\ 4)$. Какое из двух событий: $\{|-3X|<6\}$ или $\{|-3X|>6\}$ имеет большую вероятность?

8. Найти центральный момент третьего порядка показательного распределения с параметром $\lambda=6$.

Вариант 17

1. Трамваи некоторого маршрута идут с интервалом в 7 минут. Пассажир появляется на остановке в произвольный момент времени. Время ожидания пассажиром трамвая есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X;

б) центральный момент третьего порядка X;

в) вероятность того, что пассажир будет ожидать очередной трамвай более 2 мин.

2. Случайная точка X имеет равномерное на отрезке $[0;\ 1]$ распределение и делит этот отрезок на две части. Пусть Y — длина большей части. Найти $P\{Y<x\}$ при любом x.

3. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda=7$. Найти плотность распределения случайной величины $Y=\ln X$.

4. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения, с гарантией на 15 лет и средним квадратическим отклонением, равным 3 годам. Определить:

а) плотность распределения вероятностей;

б) вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет.

5. Заряд пороха для охотничьего ружья должен составлять 2,3 г. Заряд отвешивается на весах, имеющих ошибку взвешивания, распределенную по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 0,2 г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес заряда составляет 2,8 г.

6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = aX + b$, $a < 0$.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a; \sigma^2) = (-1; 4)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $(-2; 7)$ или в интервале $(-7; 3)$.

8. Найти асимметрию равномерного на отрезке $[0; 1]$ распределения.

Вариант 18

1. Внутри квадрата со стороной 8 наудачу выбирается точка. Случайная величина X является расстоянием от точки до фиксированной стороны квадрата. Найти:

а) плотность распределения вероятностей X;

б) момент третьего порядка X;

в) вероятность того, что расстояние не превзойдет 2.

2. Случайная точка X имеет равномерное на отрезке $[0; 1]$ распределение и делит этот отрезок на две части. Пусть Y — длина меньшей части. Найти $P\{Y < x\}$ при любом x.

3. Случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[0; 1]$ распределение и связана с Y функциональной зависимостью $\operatorname{tg}\dfrac{\pi Y}{2} = e^X$. Найти плотность вероятности случайной величины Y.

4. Распределение веса консервных банок, выпускаемых заводом, подчиняется закону нормального распределения со средним весом 250 г и средним квадратическим отклонением, равным 5 г. Определить:

а) функцию распределения вероятностей;

б) вероятность того, что отклонение веса банок от среднего веса по абсолютной величине не превысит 8 г.

5. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 100 м. Определить вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

6. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 8$. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = aX + b$, $a < 0$.

7. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти вероятность того, что случайная величина $Y=-2X+1$ примет значение в интервале $(-1;\ 4)$ и в интервале $(-4;\ 1)$.

8. Найти эксцесс стандартного нормального распределения.

Вариант 19

1. Внутри квадрата со стороной 9 наудачу выбирается точка. Случайная величина X является расстоянием от точки до центра квадрата. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X;

б) математическое ожидание и дисперсию X;

в) вероятность того, что расстояние превзойдет 1.

2. Стержень длины a сломали на три части, выбирая наудачу места разлома. Найти вероятность того, что из получившихся трех частей можно составить треугольник?

3. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda=9$. Найти плотность распределения $Y=\frac{1}{9}\ln X$.

4. Отклонение размера детали от стандарта представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения с дисперсией, равной 0,04. Систематическая ошибка отсутствует. Определить:

а) плотность распределения вероятностей;

б) вероятность изготовления детали, отвечающей требованиям стандарта, если задан допуск $\pm 0{,}5$.

5. Прибор не имеет систематической ошибки, а случайные ошибки распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы ± 20 м. Определить среднее квадратическое отклонение случайной ошибки прибора.

6. Случайные величины X и Y независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины

$$Z=(aX+b)(cY+d),\ a>0,\ c>0.$$

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2)=(-2;\ 0{,}09)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $(-2;\ 1)$ и в интервале $(-1;\ 3)$.

8. Найти момент третьего порядка равномерного на отрезке $[-3;\ 3]$ распределения.

Вариант 20

1. Внутри квадрата со стороной 10 наудачу выбирается точка. Случайная величина X является расстоянием от точки до фиксированной вершины квадрата. Найти:

а) плотность распределения вероятностей X;

б) математическое ожидание и дисперсию X;

в) вероятность того, что расстояние превзойдет 4.

2. Шар $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ помещен внутри эллипсоида

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1.$$

Найти вероятность того, что поставленная наудачу внутри эллипсоида точка окажется внутри шара.

3. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 10$. Найти M (cos X).

4. Случайное отклонение X размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными деталями являются те, для которых $c < X < d$. Найти функцию распределения случайных отклонений размеров годных деталей.

5. Систематическая ошибка удержания высоты самолетом ± 20 м, а случайная ошибка подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 50 м. Для полета самолета отведен коридор высотой 100 м. Определить вероятность того, что самолет будет лететь внутри коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора.

6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \dfrac{X}{1+X^2}$.

7. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти вероятность того, что случайная величина $Y = -X + 4$ примет значение в интервале $(-1; 3)$ или в интервале $(-3; 1)$.

8. Найти центральный момент третьего порядка равномерного на отрезке $[1; 5]$ распределения.

Вариант 21

1. Внутри прямоугольника со сторонами 1 и 2 наудачу выбирается точка. Случайная величина X является расстоянием от точки до ближайшей малой стороны прямоугольника. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X;

б) центральный момент третьего порядка X;

в) вероятность того, что расстояние превысит 0,5.

2. В течение 30 мин. после десяти часов ученик А в случайный момент времени звонит по телефону ученику В, ждет 3 мин., после чего кладет трубку. В течение тех же 30 мин. ученик В заходит в свою квартиру в случайный момент и остается дома в течение 5 мин. Какова вероятность того, что разговор между учениками состоится?

3. Случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[0; 1]$ распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = -\ln(1 - X)$.

4. Случайное отклонение X размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Деталями, подлежащими переделке, являются те, для которых $X > d$. Найти функцию распределения случайных отклонений размеров деталей, подлежащих переделке.

5. Станок-автомат изготовляет детали, длина которых по стандарту может отклоняться от 100 мм не более, чем на 1 мм. Среди продукции станка 3% нестандартной. Считая, что длина детали имеет нормальное распределение, найти их дисперсию.

6. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти $Y = M \sin X$.

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a; \sigma^2) = (-1; 0{,}04)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $(0; 1)$ или в интервале $(-1; 0)$.

8. Найти эксцесс стандартного нормального распределения.

Вариант 22

1. Внутри прямоугольника со сторонами 1 и 2 наудачу выбирается точка. Случайная величина X является расстоянием от точки до центра прямоугольника. Найти:

а) плотность распределения вероятностей X;

б) момент третьего порядка X;

в) вероятность того, что расстояние не превысит 0,5.

2. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов.

3. Случайные величины X и Y независимы и имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти

$$M(aX + b)(cY + d),\ a > 0,\ c > 0.$$

4. Случайные ошибки измерения толщины изделия имеют нормальное распределение со средним квадратическим отклонением, равным 5 м. Систематические ошибки отсутствуют. Определить:

а) функцию распределения вероятностей;

б) сколько необходимо произвести измерений, чтобы с вероятностью более 0,97 ошибка хотя бы одного из них не превосходила по абсолютной величине 2 м?

5. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически: их средняя масса равна 1,06 кг. Найти среднее квадратическое отклонение, если 5% коробок имеют массу меньше 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.

6. Случайная величина $2X - 6$ имеет стандартное нормальное распределение. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = -6X + 2$.

7. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти вероятность того, что случайная величина $Y = -\dfrac{X}{2}$ примет значение в интервале $(-6;\ 6)$ и в интервале $(0;\ 8)$.

8. Найти асимметрию равномерного на отрезке $[0;\ 1]$ распределения.

Вариант 23

1. Внутри квадрата со стороной $a = 3$ наудачу выбирают две точки. Случайная величина X_i, $i = 1,\ 2$, является расстоянием от i-ой точки до центра квадрата. Найти:

а) функцию распределения вероятностей X_2;

б) математическое ожидание X_2;

в) вероятность того, что расстояние от обеих точек до центра не превзойдет 2.

2. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что xy будет больше единицы, а частное $\dfrac{y}{x}$ не больше двух.

3. Случайная величина X имеет равномерное распределение в интервале $(0,\ \pi)$. Найти $M(\cos X)$.

4. Производится измерение веса некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены

нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 4 мм. Определить:

а) плотность распределения вероятностей;

б) вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 1 мм.

5. Изделие считается высшего качества, если отклонение его размеров от номинала не превосходит по абсолютной величине 3,45 мм. Случайные отклонения размера изделия от номинала подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 3 мм, а систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества, если изготовляются 4 изделия.

6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины

$$Y = \begin{cases} X, & |X| \leqslant 1, \\ -X, & |X| > 1. \end{cases}$$

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2) = (-1;\ 0{,}25)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $(-2;\ 2)$ и в интервале $(1;\ 3)$.

8. Найти момент третьего порядка показательного распределения с параметром $\lambda = 3$.

Вариант 24

1. В круге радиуса 4 наудачу проведены две хорды параллельно заданному направлению. Середины хорд равномерно распределены на диаметре, перпендикулярном заданному направлению. Случайная величина X_i, $i = 1,\ 2$, выражает длину i-ой хорды. Найти:

а) плотность распределения вероятностей X_2;

б) дисперсию X_2;

в) вероятность того, что ровно одна хорда будет иметь длину, больше $4\sqrt{2}$.

2. На окружности радиуса 4 наудачу поставлены три точки — A, B, C. Какова вероятность того, что треугольник ABC тупоугольный?

3. Случайная величина X имеет равномерное распределение в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Найти $M(\sin X)$.

4. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 5. Вероятность попадания X в интервал (0; 10) равна 0,52. Определить:

а) функцию распределения вероятностей X;

б) вероятность попадания X в интервал (–5; 0).

5. Производятся два независимых измерения прибором, имеющим систематическую ошибку ± 10 м. Среднее квадратическое отклонение случайной ошибки равно 2 м. Какова вероятность того, что обе ошибки измерений, имея разные знаки, по абсолютной величине не превзойдут 10 м?

6. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = e^X$.

7. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти вероятность того, что случайная величина $Y = -3X + 5$ примет значение в интервале (–4; 4) или в интервале (0; 8).

8. Найти центральный момент третьего порядка показательного распределения с параметром $\lambda = 4$.

ГЛАВА 3

ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 3.1. Двумерный случайный вектор

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega;\ \Im;\ \mathrm{R})$ и R^n — n-мерное линейное пространство, в котором выбран определенный базис.

n-мерным случайным вектором называется любая $\Im$-измеримая функция $X(\boldsymbol{\omega}) = (X_1(\omega),\ X_2(\omega),\ \ldots,\ X_n(\omega))$ со значениями в R^n. Эта функция отображает Ω на R^n. Величину $X_k(\omega)$ называют k-ой координатой вектора $X(\boldsymbol{\omega})$ или его составляющей. Составляющими случайного вектора $X(\boldsymbol{\omega})$ являются случайные величины $X_k(\omega)$, $k = 1$, ..., n, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ \mathrm{R})$.

Функцией распределения $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ случайного вектора $X(\boldsymbol{\omega})$ называют функцию

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = P(X_1 < x_1,\ X_2 < x_2,\ \ldots,\ X_n < x_n),\ \boldsymbol{x} \in R^n.$$

В частном случае, для двумерного случайного вектора $(X;\ Y)$ по определению имеем $F(x;\ y) = P(X < x,\ Y < y)$, $x \in R$, $y \in R$.

Функция распределения $F(x;\ y)$ обладает следующими свойствами:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x;\ y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x;\ y) = 0,$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x;\ y) = F_Y(y),\quad \lim\limits_{y \to +\infty} F(x;\ y) = F_X(x)$, где $F_X(x)$ — функция распределения составляющей X, $F_Y(y)$ — функция распределения составляющей Y,

3. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \to +\infty}} F(x;\ y) = 1,$

4. $F(x;\ y)$ — неубывающая функция своих аргументов,

5. $F(x;\ y)$ — непрерывна слева по каждому из аргументов,

6. Вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, может быть вычислена по формуле

$$P(a \leqslant X < b,\ c \leqslant Y < d) = (F(b;\ d) - F(a;\ d)) - (F(b;\ c) - F(a;\ c)).$$

Случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда имеет место равенство $F(x;\ y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

Двумерный случайный вектор $(X;\ Y)$ называется дискретным, если множество его значений не более чем счетно.

Совокупность возможных значений $(x_i;\ y_j)$ дискретного случайного вектора $(X;\ Y)$ и соответствующих им вероятностей

$$p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j),\ \sum_{i,j} p_{ij} = 1,$$

называется законом распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$. Вероятности p_{ij} называются также совместными вероятностями случайных величин X и Y. Закон распределения двумерного случайного вектора удобно представлять в виде таблицы

y_j \ x_i	x_1	x_2	...	x_n	$P(Y=y_j)$
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}	$P(Y=y_1)$
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}	$P(Y=y_2)$
...	...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}	$P(Y=y_m)$
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$	1

Функция распределения дискретного двумерного случайного вектора определяется с помощью совместных вероятностей

$$F(x;\ y) = P(X < x,\ Y < y) = \sum_{\substack{i:\, x_i < x \\ j:\, y_j < y}} P\ (X < x_i,\ Y < y_j).$$

Законы распределения вероятностей составляющих случайного вектора выражаются через совместные вероятности по формулам

$$P(X = x_i) = \sum_j p_{ij},\ \ P(Y = y_i) = \sum_i p_{ij}.$$

Условным распределением составляющей X при условии, что составляющая Y приняла определенное значение y_j, называется совокупность возможных значений X и соответствующих этим значениям условных вероятностей $P(X = x_i \mid Y = y_j)$, определяемых равенством

$$P\,(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}.$$

Пусть $(X;\ Y)$ — случайный вектор с функцией распределения $F(x;\ y)$. Если существует борелевская функция $f(x,\ y)$ такая, что имеет место представление

$$F(x,\ y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(s;\ t)\, dsdt,$$

то говорят, что $(X;\ Y)$ — абсолютно непрерывный случайный вектор, а функцию $f(x;\ y)$ называют его плотностью распределения вероятностей.

Плотность распределения $f(x;\ y)$ обладает следующими свойствами:

1. $f(x;\ y) \geqslant 0,\ (x;\ y) \in R^2$,

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s;\ t)\, dsdt = 1$,

3. если $(x;\ y)$ — точка непрерывности плотности $f(x;\ y)$, то $f(x;\ y)=\dfrac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x\, \partial y}$,

4. $f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;\ y)\, dy,\ f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;\ y)\, dx$, где $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ — плотности распределения составляющих X и Y случайного вектора,

5. вероятность попадания случайной точки в область G (G — борелевское множество) определяется по формуле

$$P((X;\ Y) \in G)=\iint\limits_{G} f(x;\ y)\, dx\, dy.$$

Случайные величины X и Y *независимы* тогда и только тогда, когда имеет место равенство $f(x,\ y)=f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

Условной плотностью распределения вероятностей составляющей X при условии, что составляющая Y приняла определенное значение y, $f_Y(y) > 0$, называется неотрицательная функция

$$f(x|y)=\frac{f(x;y)}{f_Y(y)},\ x \in R.$$

Математическим ожиданием или центром рассеивания случайного вектора $(X;\ Y)$ называется неслучайный вектор $(MX;\ MY)$. Дисперсией случайного вектора $(X;\ Y)$ называется неслучайный вектор $(DX;\ DY)$.

Величина $\mu_{XY} = M((X - MX)(Y - MY))$ называется *ковариацией* случайных величин X и Y.

Ковариация может быть также вычислена по формуле

$$\mu_{XY} = M(XY) - MX \cdot MY.$$

Приведем формулы для вычисления некоторых числовых характеристик:

Для дискретных X и Y	Для абсолютно непрерывных X и Y
$MX = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i p_{ij}$	$MX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf\,(x;\ y)\,dx\,dy$
$DX = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (x_i - MX)^2 p_{ij}$	$DX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x;\ y)\,dx\,dy$
$DX = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i^2 p_{ij} - (MX)^2$	$DX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x;\ y)\,dx\,dy - (MX)^2$
$\mu_{XY} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (x_i - MX)(y_j - MY) p_{ij}$	$\mu_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)\,(y - MY)\,f(x;\ y)\,dx\,dy$
$\mu_{XY} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j p_{ij} - MX \cdot MY$	$\mu_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf\,(x;\ y)\,dx\,dy - MX \cdot MY$

Нормированная ковариация

$$k_{XY} = \frac{M(XY) - MX \cdot MY}{\sqrt{DX \cdot DY}}$$

называется *коэффициентом корреляции* случайных величин X и Y. Коэффициент корреляции удовлетворяет условию $|k_{xy}| \leqslant 1$ и определяет степень линейной зависимости между X и Y. Если $k_{xy} = 0$, то случайные величины X и Y называются *некоррелированными*. Из независимости случайных векторов X и Y следует их некоррелированность (обратное, вообще говоря, неверно). Если $k_{xy} = +1$, то имеет место линейная зависимость $X = aY + b$, $a > 0$; если $k_{xy} = -1$, то $X = aY + b$, $a < 0$.

Пусть $(X;\ Y)$ — дискретный случайный вектор. Условным математическим ожиданием $M(X|\,Y=y_j)$ случайной величины X при условии $Y=y_j$ называется неслучайная величина

$$M(X|\,Y=y_j)=\sum_i x_i\cdot P(X=x_i|\,Y=y_j).$$

Пусть $(X;\ Y)$ — абсолютно непрерывный случайный вектор с плотностью $f(x;\ y)$. Условным математическим ожиданием $M(X|\,Y=y)$ случайной величины X при условии $Y=y$ называется неслучайная величина

$$M(X|\,Y=y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf\,(x|\,y)\,dx.$$

Условное математическое ожидание $M(X|\,Y)=f(y)$, рассматриваемое как функция от y, называется функцией регрессии X на Y.

Имеет место равенство $M(M(X|\,Y)=MX$.

Приведенные выше определения и формулы для двумерного случайного вектора по аналогии могут быть обобщены на случай n-мерного случайного вектора $X(\omega)=(X_1(\omega),\ X_2(\omega),\ \ldots,\ X_n(\omega))$.

Задача 1. Задано распределение вероятностей двумерного дискретного случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	0	1	3
0	0,1	0,3	0,05
2	0,2	0,15	0,2

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y=y_j$, $j=1,\ 2$;

д) условные математические ожидания $M(X|\,Y=y_j)$, $j=1,\ 2$.

Решение. а) Сложив вероятности «по столбцам», получим вероятности возможных значений случайной величины X:

$$P(X=0)=0{,}1+0{,}2=0{,}3,\quad P(X=1)=0{,}3+0{,}15=0{,}45,$$
$$P(X=3)=0{,}05+0{,}2=0{,}25.$$

Сложив вероятности «по строкам», получим вероятности возможных значений случайной величины Y:

$$P(Y=0) = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}05 = 0{,}45,$$

$$P(Y=2) = 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}55.$$

Напишем законы распределения составляющих X и Y:

x_i	0	1	3
p_i	0,3	0,45	0,25

y_i	0	2
p_i	0,45	0,55

Контроль: $0{,}3 + 0{,}45 + 0{,}25 = 1$, $0{,}45 + 0{,}55 = 1$.

б) Для дискретного двумерного случайного вектора

$$F(x;\ y) = P(X < x,\ Y < y) = \sum_{\substack{i:\, x_i < x \\ j:\, y_j < y}} P\,(X < x_i,\ Y < y_j).$$

Следовательно,

если $x \leqslant 0$ или $y \leqslant 0$, то

$$F(x;\ y) = 0;$$

если $0 < x \leqslant 1$, $0 < y \leqslant 2$, то

$$F(x;\ y) = P(X=0,\ Y=0) = 0{,}1;$$

если $0 < x \leqslant 1$, $y > 2$, то

$$F(x; y) = P(X=0,\ Y=0) + P(X=0,\ Y=2) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3;$$

если $1 < x \leqslant 3$, $0 < y \leqslant 2$, то

$$F(x;\ y) = P(X=0,\ Y=0) + P(X=1,\ Y=0) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4;$$

если $1 < x \leqslant 3$, $y > 2$, то

$$F(x;\ y) = P(X=0,\ Y=0) + P(X=1,\ Y=0) + \\ + P(X=0,\ Y=2) + P(X=1,\ Y=2) = 0{,}75;$$

если $x > 3$, $0 < y \leqslant 2$, то

$$F(x;\ y) = P(X=0,\ Y=0) + P(X=1,\ Y=0) + \\ + P(X=3,\ Y=0) = 0{,}45;$$

если $x > 3$, $y > 2$, то

$$F(x;\ y) = P(X=0,\ Y=0) + P(X=1,\ Y=0) + P(X=3,\ Y=0) + \\ + P(X=0,\ Y=2) + P(X=1,\ Y=2) + P(X=3,\ Y=2) = 1.$$

Функцию распределения $(X;\ Y)$ представим в виде таблицы

$F(x;\ y)$	$x \leqslant 0$	$0 < x \leqslant 1$	$1 < x \leqslant 3$	$x > 3$
$y \leqslant 0$	0	0	0	0
$0 < y \leqslant 2$	0	0,1	0,4	0,45
$y > 2$	0	0,3	0,75	1

Заметим, что первая и последняя строка в таблице является функцией распределения вероятностей случайной величины X, а первый и последний столбец — функцией распределения Y.

в) Из законов распределения случайных величин X и Y найдем $MX = 1{,}2$, $DX = 1{,}26$, $MY = 1{,}1$, $DY = 0{,}99$. Математическим ожиданием и дисперсией случайного вектора $(X;\ Y)$ будут вектора:

$$M(X;\ Y) = (MX;\ MY) = (1{,}2;\ 1{,}1) \text{ и}$$

$$D(X;\ Y) = (DX;\ DY) = (1{,}26;\ 0{,}99).$$

Коэффициент корреляции X и Y вычислим по формуле

$$k_{XY} = \frac{M(XY) - MX \cdot MY}{\sqrt{DX \cdot DY}}.$$

Так как нет условия независимости случайных величин X и Y, найдем значения, которые может принимать случайная величина $Z = X \cdot Y$: $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = 6$. Далее, найдем их вероятности:

$$P(XY = 0) = P(X = 0,\ Y = 0) + P(X = 1,\ Y = 0) +$$
$$+ P(X = 3,\ Y = 0) + P(X = 0,\ Y = 2) = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}05 + 0{,}2 = 0{,}65;$$

$$P(XY = 2) = P(X = 1,\ Y = 2) = 0{,}15;$$

$$P(XY = 6) = P(X = 3,\ Y = 2) = 0{,}2;$$

Откуда $M(XY) = 0 \cdot 0{,}65 + 2 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}2 = 1{,}5$.

Следовательно,

$$k_{XY} = \frac{1{,}5 - 1{,}2 \cdot 1{,}1}{\sqrt{1{,}26 \cdot 0{,}99}} \approx 0{,}24.$$

Контроль: $1 \leqslant k_{xy} \leqslant 1$.

Замечание: $M(XY)$ можно найти из распределения вероятностей двумерного дискретного случайного вектора $(X;\ Y)$ согласно формуле $M(XY) = \sum\limits_{i,j} x_i y_j P(X = x_i,\ Y = y_j)$ следующим образом:

$$M(XY) = 0 \cdot 0 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 3 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}2 = 1{,}5.$$

г) условное распределение составляющей X при $Y = y_j$, $j = 1,\ 2$ есть совокупность условных вероятностей

$$P\,(X = x_i | \, Y = y_j),\ i = 1,\ 2,\ 3;\ j = 1,\ 2,$$

определяемых равенством

$$P\,(X = x_i | \, Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}.$$

Имеем

$$P(X=0 \mid Y=0)=\frac{0{,}1}{0{,}45}=\frac{1}{45}; \qquad P(X=0 \mid Y=2)=\frac{0{,}2}{0{,}55}=\frac{4}{11};$$

$$P(X=1 \mid Y=0)=\frac{0{,}3}{0{,}45}=\frac{2}{3}; \qquad P(X=1 \mid Y=2)=\frac{0{,}15}{0{,}55}=\frac{3}{11};$$

$$P(X=3 \mid Y=0)=\frac{0{,}05}{0{,}45}=\frac{1}{9}; \qquad P(X=3 \mid Y=2)=\frac{0{,}2}{0{,}55}=\frac{4}{11}.$$

д) Условные математические ожидания $M(X \mid Y=y_j)$, $j=1,\ 2$, вычислим по формуле

$$M(X \mid Y=y_j)=\sum_i x_i \cdot P(X=x_i \mid Y=y_j).$$

$$M(X|Y=0)=0\cdot P(X=0|Y=0)+1\cdot P(X=1|Y=0)+3\cdot P(X=3|Y=0)=1;$$

$$M(X|Y=2)=0\cdot P(X=0|Y=2)+1\cdot P(X=1|Y=2)+3\cdot P(X=3|Y=2)=\frac{15}{11}.$$

Заметим, что случайная величина $M(X \mid Y)$ будет иметь распределение

$M(X \mid Y=y_j)$	1	$\frac{15}{11}$
p_i	0,45	0,55

Контроль:

$$M(M(X \mid Y))=MX,$$

$$M(M(X \mid Y))=1\cdot 0{,}45+15\cdot 0{,}05=1{,}2,$$

$$MX=1{,}2.$$

Задача 2. Стрелок производит три независимых выстрела в цель. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,7. Цель считается уничтоженной при двух и более попаданиях в нее. Случайная величина X означает число попаданий стрелком в цель. Случайная величина Y принимает значение 1 при уничтожении цели и значение 0 в противном случае. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

Решение. Из условия задачи имеем

$$P(X=0)=C_3^0\cdot 0{,}7^0\cdot 0{,}3^3=0{,}027,\quad P(X=1)=C_3^1\cdot 0{,}7^1\cdot 0{,}3^2=0{,}189,$$
$$P(X=2)=C_3^2\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}3^1=0{,}441,\quad P(X=3)=C_3^3\cdot 0{,}7^3\cdot 0{,}3^0=0{,}343.$$

$P(Y=0|X=0)=1;$ $\quad$ $P(Y=1|X=0)=0;$

$P(Y=0|X=1)=1;$ $\quad$ $P(Y=1|X=1)=0;$

$P(Y=0|X=2)=0;$ $\quad$ $P(Y=1|X=2)=1;$

$P(Y=0|X=3)=0;$ $\quad$ $P(Y=1|X=3)=1.$

Для составления закона распределения случайного вектора $(X;\ Y)$ найдем вероятности

$P(Y=0,\ X=0)=P(X=0)\cdot P(Y=0|X=0)=0{,}027\cdot 1=0{,}027;$
$P(Y=0,\ X=1)=P(X=1)\cdot P(Y=0|X=0)=0{,}189\cdot 1=0{,}189;$
$P(Y=0,\ X=2)=P(X=2)\cdot P(Y=0|X=2)=0{,}441\cdot 0=0;$
$P(Y=0,\ X=3)=P(X=3)\cdot P(Y=0|X=3)=0{,}343\cdot 0=0;$
$P(Y=1,\ X=0)=0;$
$P(Y=1,\ X=1)=0;$
$P(Y=1,\ X=2)=0{,}441;$
$P(Y=1,\ X=3)=0{,}343.$

Следовательно,

y_j \ x_i	0	1	2	3	$P(Y=y_j)$
0	0,027	0,189	0	0	0,216
1	0	0	0,441	0,343	0,784
$P(X=x_i)$	0,027	0,189	0,441	0,343	1

Задача 3. Задана функция распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

$$F(x;\ y)=\begin{cases}(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2}) & \text{при } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти:

а) функцию распределения вероятностей случайной величины X;

б) вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0,\ x=1,\ y=2,\ y=5$;

в) плотность распределения вероятностей случайного вектора.

Решение. а) В силу свойства $F(x, +\infty) = F_X(x)$ двумерной функции распределения найдем функцию распределения вероятностей случайной величины X.

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Заметим, что

$$F_Y(y) = F(+\infty; y) = \begin{cases} 1 - e^{-y^2} & \text{при } y \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Поэтому имеет место тождество $F(x; y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$. Следовательно, случайные величины X и Y независимы.

б) Вероятность попадания случайной точки $(X; Y)$ в область, ограниченную прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $y = 5$, найдем по формуле

$$P(a < X < b,\ c < Y < d) = (F(b; d) - F(a; d)) - (F(b; c) - F(a; c)).$$

Так как

$$F(1; 5) = (1 - e^{-1})(1 - e^{-25}),\ F(0; 5) = 0,$$
$$(F(1; 2) = (1 - e^{-1})(1 - e^{-4}),\ F(0; 2) = 0.$$

Получим

$$P(0 < X < 1,\ 2 < Y < 5) = (F(1; 5) - F(0; 5)) - (F(1; 2) - F(0; 2)) =$$
$$= (1 - e^{-1})(e^{-4} - e^{-25}) \approx 0{,}01.$$

Замечание: Используя независимость случайных величин X и Y можно найти вероятность проще:

$$P(0 < X < 1,\ 2 < Y < 5) = P(0 < X < 1)\ P(2 < Y < 5) =$$
$$= (F_X(1) - F_X(0)(F_Y(5) - F_Y(2)) = (1 - e^{-1})(e^{-4} - e^{-25}) \approx 0{,}01.$$

в) Для нахождения плотности распределения случайного вектора используем формулу $f(x; y) = \dfrac{\partial^2 F(x; y)}{\partial x\, \partial y}$. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = (1 - e^{-y^2})(-e^{-x^2})(-2) = 2xe^{-x^2}\ (1 - e^{-y^2}),$$

$$\frac{\partial^2 F(x; y)}{\partial x\, \partial y} = 2xe^{-x^2}\ (-e^{-y^2})(-2y) = 4xye^{-(x^2 + y^2)}.$$

Итак, искомая двумерная плотность распределения вероятностей

$$f(x;\ y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)} & \text{при } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0. \end{cases}$$

Контроль: убедитесь, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;\ y)\,dx\,dy = 1.$

Задача 4. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = C\cos x \cos y$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; вне квадрата $f(x;\ y) = 0$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{6}$, $y=0$, $y=\dfrac{\pi}{6}$;

б) плотность распределения вероятностей случайной величины Y, условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y=y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Решение. а) Используем свойство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;\ y)\,dx\,dy = 1$ двумерной плотности распределения.

Найдем интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} C\cdot\cos x\,\cos y\ dx\ dy = C\cdot\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos y\ dx\ dy = \frac{1}{2}C.$$

Откуда $C=2$.

Вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{6}$, $y=0$, $y=\dfrac{\pi}{6}$, найдем по формуле

$$P(a < X < b,\ c < Y < d) = \int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x;\ y)\,dx\,dy.$$

Так как

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos\, x\, \cos\, y\, dx\, dy = 2\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right)\left(\sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Получим искомую вероятность:

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{6},\ 0 < Y < \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5.$$

б) Плотность распределения вероятностей случайной величины Y найдем по формуле

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\ y)\, dx.$$

Найдем интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos\, x\, \cos\, y\, dx = 2\, \cos\, y\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}\, \cos\, y.$$

Следовательно, $f_Y(y) = \sqrt{2}\, \cos y$ на сегменте $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}$; вне сегмента $f_Y(y) = 0$.

Условная плотность распределения случайной величины X при условии, что $Y = y$ определяется следующим образом:

$$f(x|y) = \frac{f(x;\, y)}{f_Y(y)}.$$

Тогда $f(x|y) = \dfrac{2\cos x\, \cos y}{\sqrt{2}\cos y} = \sqrt{2}\, \cos\, x$ на сегменте $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}$; вне сегмента $f(x|y) = 0$.

Заметим, что $f(x|y) = f_X(x)$ и $f(y|x) = f_Y(y)$, т. е. условные плотности распределения составляющих случайного вектора равны их безусловным плотностям. Следовательно, случайные величины X и Y независимы.

в) Математическое ожидание и дисперсию случайной величины X найдем по формулам:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\ y)\, dx\, dy,$$

$$MY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x;\ y)\,dx\,dy,$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x;\ y)\,dx\,dy - (MX)^2,$$

$$DY = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x;\ y)\,dx\,dy - (MY)^2.$$

Получим

$$MX = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x\ \cos\ x\ \cos\ y\ dx\ dy =$$

$$= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos\ x\ dx\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\ y\ dy\right) = \frac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4},$$

$$DX = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x^2\ \cos\ x\ \cos\ y\ dx\ dy - (MX)^2 = (2\sqrt{2} - 5) + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

$$MX = \frac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4},\ DX = (2\sqrt{2} - 5) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично,

$$MY = \frac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4},\ DY = (2\sqrt{2} - 5) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Математическим ожиданием и дисперсией случайного вектора $(X;\ Y)$ будут вектора:

$$M(X;\ Y) = (MX;\ MY) = \left(\frac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4};\ \frac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4}\right),$$

$$D(X;\ Y) = (DX;\ DY) = \left((2\sqrt{2} - 5) + \frac{\pi}{\sqrt{2}};\ (2\sqrt{2} - 5) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right).$$

Коэффициент корреляции X и Y вычислим по формуле

$$k_{XY} = \frac{M(XY) - MX \cdot MY}{\sqrt{DX \cdot DY}}.$$

Найдем

$$M(XY) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x;\ y)\,dx\,dy.$$

$$M(XY) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2xy\cos x\cos y\,dx\,dy =$$

$$= 2\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx\right)\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} y\cos y\,dy\right) = \left(\frac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4}\right)^2.$$

Следовательно, $k_{xy} = 0$, т. е. случайные величины X и Y некоррелированы.

Заметим, что вывод о некоррелированности X и Y следовал из установленной в пункте б) данной задачи независимости случайных величин X и Y.

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	0	1	2
−1	0,25	0,2	0,3
1	0,05	0,15	0,05

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y = y_j$, $j = 1,\ 2$;

д) условные математические ожидания $M(X \mid Y = y_j)$, $j = 1,\ 2$.

2. Подбрасывают правильную шестигранную игральную кость и правильную монету. Случайная величина X означает число очков, выпавших на верхней грани кости. Случайная величина Y принима-

ет значение 0 при выпадении решки и значение 1 при выпадении герба. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = \dfrac{C}{(16+x^2)(25+y^2)}$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$;

б) плотность распределения случайной величины Y; условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y=y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 2

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	1	2	3
0	0,15	0,25	0,25
1	0,15	0,1	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей Y при $X=x_i$, $i=1,\ 2,\ 3$;

д) условные математические ожидания $M(Y|X=x_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$.

2. Два стрелка производят по два выстрела в цель. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго — 0,2. Случайные величины X и Y означают число попаданий в цель первого и второго стрелка соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = C \cdot \sin(x+y)$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; вне квадрата $f(x;\ y)=0$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{2}$;

б) плотность распределения случайной величины X; условную плотность распределения составляющей Y при условии, что $X=x$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 3

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

$y_j \backslash x_i$	-1	0	1
1	0,05	0,15	0,05
2	0,25	0,2	0,3

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y=y_j$, $j=1,\ 2$;

д) условные математические ожидания $M(X \mid Y=y_j)$, $j=1,\ 2$.

2. В самолете два двигателя. Вероятность безотказной работы в полете для первого двигателя равна 0,8, для второго — 0,9. Случайная величина X (Y) принимает значение 0 при отказе в полете первого (второго) двигателя и значение 1 в противном случае. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y)=C\ (2-\sqrt{x^2+y^2})$ при $x^2+y^2 \leqslant 4$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в круг радиуса $r=1$ с центром в начале координат;

б) плотность распределения случайной величины Y; условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y=y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 4

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	-2	-1	0
1	0,1	0,2	0,2
3	0,2	0,1	0,2

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей Y при $X=x_i$, $i=1,\ 2,\ 3$;

д) условные математические ожидания $M(Y|X=x_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$.

2. Из двух колод в 36 карт наудачу вынимают по две карты. Случайные величины X и Y означают число вынутых тузов из первой колоды и второй колоды соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y)=C$ в прямоугольнике $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$; вне прямоугольника $f(x;\ y)=0$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=4$;

б) плотность распределения случайной величины X; условную плотность распределения составляющей Y при условии, что $X=x$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 5

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	0	2	4
1	0,05	0,45	0,2
3	0,05	0,15	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y=y_j$, $j=1,\ 2$;

д) условные математические ожидания $M(X\,|\,Y=y_j)$, $j=1,\ 2$.

2. Первая урна содержит 2 белых и 3 черных шара, вторая урна — 1 белый и 2 черных шара. Из каждой урны наудачу вынимают по 2 шара одновременно. Случайные величины X и Y означают число вынутых черных шаров из первой и второй урны соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y)=\begin{cases} C & \text{при } x^2+y^2\leqslant 4, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2>4. \end{cases}$ Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область $x^2+y^2\leqslant 1$;

б) плотность распределения случайной величины Y; условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y=y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 6

1. Задано распределение вероятностей двумерного дискретного случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	2	4	6
0	0,1	0,2	0,2
3	0,3	0,1	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей Y при $X=x_i$, $i=1,\ 2,\ 3$;

д) условные математические ожидания $M(Y\,|\,X=x_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$.

2. В круг радиуса $\sqrt{2}$ вписан квадрат, а в квадрат вписана окружность. В круг радиуса $\sqrt{2}$ наудачу бросаются две точки. Случайные величины X и Y означают число точек, попавших в квадрат и в малый круг соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = C \exp\left\{-\dfrac{x^2+y^2}{2}\right\}$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=4$, $y=0$, $y=6$;

б) плотность распределения случайной величины X; условную плотность распределения составляющей Y при условии, что $X=x$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 7

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	-3	-1	0
2	0,25	0,15	0,1
4	0,25	0,15	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y=y_j$, $j=1,\ 2$;

д) условные математические ожидания $M(X \mid Y=y_j)$, $j=1,\ 2$.

2. Первый станок изготавливает за час три детали с вероятностью брака 0,1, а второй станок — две детали с вероятностью брака 0,05. Случайная величина $X(Y)$ означает количество бракованных деталей, изготовленных первым (вторым) станком за час работы. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = C \exp\{-x^2 - 2xy - 4y^2\}$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = 2$, $y = 7$;

б) плотность распределения случайной величины Y; условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y = y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 8

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	−5	-3	0
1	0,3	0,1	0,1
2	0,3	0,1	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей Y при $X = x_i$, $i = 1, 2, 3$;

д) условные математические ожидания $M(Y|X = x_i)$, $i = 1, 2, 3$.

2. Из двух полных наборов домино наудачу вынимают по три кости. Случайные величины X и Y означают число вынутых дублей из первого и второго наборов домино соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = \dfrac{C}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в круг радиуса $r = 8$ с центром в начале координат;

б) плотность распределения случайной величины X; условную плотность распределения составляющей Y при условии, что $X = x$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 9

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	0	2	3
0	0,35	0,1	0,2
1	0,05	0,15	0,15

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y=y_j$, $j=1,\ 2$;

д) условные математические ожидания $M(X\,|\,Y=y_j)$, $j=1,\ 2$.

2. Подбрасывают две правильные шестигранные игральные кости. Случайные величины X и Y означают число очков, выпавших на верхней грани первой и второй кости соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y)=\dfrac{C}{(4+x^2)(9+y^2)}$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=1$, $y=4$, $y=9$;

б) плотность распределения случайной величины Y; условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y=y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 10

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	2	3	4
1	0,15	0,25	0,25
2	0,15	0,1	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей Y при $X=x_i$, $i=1, 2, 3$;

д) условные математические ожидания $M(Y|X=x_i)$, $i=1, 2, 3$.

2. Два стрелка производят по три выстрела в цель. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,7. Случайные величины X и Y означают число попаданий в цель первого и второго стрелка соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y)=C\cos(x+y)$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; вне квадрата $f(x;\ y)=0$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{6}$, $y=\dfrac{\pi}{6}$, $y=\dfrac{\pi}{4}$;

б) плотность распределения случайной величины X; условную плотность распределения составляющей Y при условии, что $X=x$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 11

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	0	1	2
2	0,15	0,05	0,15
3	0,35	0,1	0,2

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y=y_j$, $j=1,\ 2$;

д) условные математические ожидания $M(X\,|\,Y=y_j)$, $j=1,\ 2$.

2. В самолете два двигателя. Вероятность безотказной работы в полете для первого двигателя равна 0,85, для второго — 0,95. Случайная величина $X(Y)$ принимает значение 0 при отказе в полете первого (второго) двигателя и значение 1 в противном случае. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y)=C\ (3-\sqrt{x^2+y^2})$ при $x^2+y^2 \leqslant 9$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в круг радиуса $r=2$ с центром в начале координат;

б) плотность распределения случайной величины Y; условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y=y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 12

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	-1	0	1
2	0,2	0,1	0,2
4	0,3	0,05	0,15

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей Y при $X=x_i$, $i=1,\ 2,\ 3$;

д) условные математические ожидания $M(Y|X=x_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$.

2. Из двух колод в 36 карт наудачу вынимают по три карты. Случайные величины X и Y означают число вынутых тузов из первой колоды и второй колоды соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = C$ в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 4$; вне прямоугольника $f(x;\ y) = 0$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$;

б) плотность распределения случайной величины X; условную плотность распределения составляющей Y при условии, что $X = x$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 13

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	1	3	5
0	0,15	0,35	0,1
2	0,15	0,05	0,2

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y = y_j$, $j = 1, 2$;

д) условные математические ожидания $M(X \mid Y = y_j)$, $j = 1, 2$.

2. Первая урна содержит 3 белых и 2 черных шара, вторая урна — 2 белых и 3 черных шара. Из каждой урны наудачу вынимают по 2 шара одновременно. Случайные величины X и Y означают число вынутых белых шаров из первой и второй урны соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x,\ y) = \begin{cases} C & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 9. \end{cases}$ Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область $x^2 + y^2 \leqslant 4$;

б) плотность распределения случайной величины Y; условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y=y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 14

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

$y_j \backslash x_i$	3	5	7
−1	0,2	0,1	0,15
0	0,4	0,05	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей Y при $X=x_i$, $i=1,\ 2,\ 3$;

д) условные математические ожидания $M(Y|X=x_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$.

2. В квадрат со стороной $a=3$ вписана окружность, а в окружность вписан квадрат. В больший квадрат наудачу бросаются две точки. Случайные величины X и Y означают число попаданий в круг и в малый квадрат соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y)=C\exp\left\{-\dfrac{(x-1)^2+y^2}{8}\right\}$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=2$, $y=-4$, $y=4$;

б) плотность распределения случайной величины X; условную плотность распределения составляющей Y при условии, что $X=x$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 15

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	-2	0	1
0	0,25	0,15	0,1
2	0,25	0,15	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y=y_j$, $j=1,\ 2$;

д) условные математические ожидания $M(X \mid Y=y_j)$, $j=1,\ 2$.

2. Первый станок изготавливает за час две детали с вероятностью брака 0,05, а второй станок — четыре детали с вероятностью брака 0,1. Случайная величина $X(Y)$ означает количество бракованных деталей, изготовленных первым (вторым) станком за час работы. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y)=C\exp\left\{-\dfrac{x^2+2xy+5y^2}{2}\right\}$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=3$, $y=1$, $y=5$;

б) плотность распределения случайной величины Y; условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y=y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 16

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	-4	-2	1
0	0,3	0,1	0,1
3	0,3	0,1	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей Y при $X = x_i$, $i = 1, 2, 3$;

д) условные математические ожидания $M(Y|X = x_i)$, $i = 1, 2, 3$.

2. Из двух полных наборов домино наудачу вынимают по три кости. Случайные величины X и Y означают число вынутых дублей из первого и второго наборов домино соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = \dfrac{C}{(x^2 + y^2)^4}$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в круг радиуса $r = 6$ с центром в начале координат;

б) плотность распределения случайной величины X; условную плотность распределения составляющей Y при условии, что $X = x$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 17

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	1	3	5
−1	0,3	0,05	0,25
0	0,1	0,1	0,2

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y = y_j$, $j = 1, 2$;

д) условные математические ожидания $M(X|Y = y_j)$, $j = 1, 2$.

2. Две правильные монеты подбрасывают два раза. Случайные величины X и Y означают число выпадений герба при первом и втором броске соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y)=\dfrac{C}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=4$, $y=3$, $y=7$;

б) плотность распределения случайной величины Y; условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y=y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 18

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

$y_j \backslash x_i$	3	4	5
0	0,25	0,15	0,35
1	0,25	0,05	0

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей Y при $X=x_i$, $i=1,\ 2,\ 3$;

д) условные математические ожидания $M(Y|X=x_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$.

2. Студент подготовил 20 из 30 экзаменационных вопросов. Экзаменационные билеты состоят из трех вопросов. Случайная величина X означает число подготовленных вопросов в наудачу выбранном билете. Случайная величина Y — оценку, полученную студентом, если три правильных ответа преподаватель оценивает на «отлично», два — на «хорошо», один — на «удовлетворительно» и

ни одного ответа — на «неудовлетворительно». Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = C\cos(2x + 2y)$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{8}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{8}$; вне квадрата $f(x;\ y) = 0$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{12}$, $y = \frac{\pi}{12}$, $y = \frac{\pi}{8}$;

б) плотность распределения случайной величины X; условную плотность распределения составляющей Y при условии, что $X = x$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 19

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	1	2	3
4	0,25	0,05	0,05
5	0,45	0,1	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y = y_j$, $j = 1,\ 2$;

д) условные математические ожидания $M(X \mid Y = y_j)$, $j = 1,\ 2$.

2. Прибор содержит четыре одинаковых элемента. Вероятность отказа элемента в течение гарантийного года равна 0,2. Прибор выходит из строя в случае отказа двух и более элементов. Случайная величина X означает число отказавших в течение гарантийного года элементов. Случайная величина Y принимает значение 0 при

выходе из строя прибора и значение 1 в противном случае. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = C\,(x^2 + y^2 + \sqrt{x^2+y^2})$ при $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в круг радиуса $r = 1$ с центром в начале координат;

б) плотность распределения случайной величины Y; условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y = y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 20

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	0	1	2
3	0,3	0,1	0,1
5	0,4	0,05	0,05

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей Y при $X = x_i$, $i = 1, 2, 3$;

д) условные математические ожидания $M(Y|X = x_i)$, $i = 1, 2, 3$.

2. Из колоды в 36 карт наудачу вынимают две карты, затем наудачу вынимают еще две карты. Случайные величины X и Y означают число вынутых тузов из колоды в первый и во второй раз соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = \dfrac{C}{(x+y+1)^2}$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; вне квадрата $f(x;\ y) = 0$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $y = 3$;

б) плотность распределения случайной величины X; условную плотность распределения составляющей Y при условии, что $X=x$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 21

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	2	4	6
–2	0,25	0,15	0,1
0	0,25	0,15	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X,;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y=y_j$, $j=1,\ 2$;

д) условные математические ожидания $M(X\,|\,Y=y_j)$, $j=1,\ 2$.

2. Урна содержит 7 белых и 3 черных шара. Из урны наудачу вынимают одновременно 2 шара, а затем еще один шар. Случайные величины X и Y означают число вынутых из урны белых шаров в первый и во второй раз соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y)=Cxy$ в прямоугольнике $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 4$; вне прямоугольника $f(x;\ y)=0$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=1$, $y=2$, $y=3$;

б) плотность распределения случайной величины Y; условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y=y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 22

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

$y_j \backslash x_i$	3	5	7
−1	0,35	0,1	0,05
0	0,35	0,05	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей Y при $X = x_i$, $i = 1, 2, 3$;

д) условные математические ожидания $M(Y|X = x_i)$, $i = 1, 2, 3$.

2. В равносторонний треугольник со стороной $a = 3$ вписана окружность, а в окружность вписан равносторонний треугольник. В больший треугольник наудачу бросаются две точки. Случайные величины X и Y означают число попаданий в круг и в малый треугольник соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = C\exp\left\{-\dfrac{(x-2)^2+3(y-1)^2}{6}\right\}$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x = 0$, $x = 3$, $y = -2$, $y = 2$;

б) плотность распределения случайной величины X; условную плотность распределения составляющей Y при условии, что $X = x$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 23

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

$y_j \backslash x_i$	−2	0	1
0	0,25	0,15	0,1
2	0,25	0,15	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей X при $Y=y_j$, $j=1,\ 2$;

д) условные математические ожидания $M(X|\,Y=y_j)$, $j=1,\ 2$.

2. Студент подготовил 20 из 40 экзаменационных вопросов. Экзаменационные билеты состоят из четырех вопросов. Случайная величина X означает число подготовленных вопросов в наудачу выбранном билете. Случайная величина Y — оценку, полученную студентом, если четыре правильных ответа преподаватель оценивает на «отлично», три ответа — на «хорошо», два или один — на «удовлетворительно» и ни одного правильного ответа — на «неудовлетворительно». Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y)=\begin{cases} Ce^{-\frac{x+y}{2}} & \text{при } x>0,\ y>0,\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$ Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в область, ограниченную прямыми $x=0$, $x=2$, $y=1$, $y=3$;

б) плотность распределения случайной величины Y; условную плотность распределения составляющей X при условии, что $Y=y$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

Вариант 24

1. Задано распределение вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	-3	-1	0
0	0,3	0,1	0,1
1	0,3	0,1	0,1

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y;

г) условное распределение составляющей Y при $X = x_i$, $i = 1, 2, 3$;

д) условные математические ожидания $M(Y|X = x_i)$, $i = 1, 2, 3$.

2. Из полного набора домино наудачу вынимают три кости, а затем (не возвращая вынутых костей) еще две кости. Случайные величины X и Y означают число вынутых дублей из набора в первый и во второй раз соответственно. Написать закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$.

3. Задана плотность распределения вероятностей случайного вектора $(X;\ Y)$: $f(x;\ y) = C\ (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$. Найти:

а) постоянный параметр C и вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в круг радиуса $r = 4$ с центром в начале координат;

б) плотность распределения случайной величины X; условную плотность распределения составляющей Y при условии, что $X = x$;

в) математическое ожидание и дисперсию случайного вектора $(X;\ Y)$, коэффициент корреляции X и Y.

§ 3.2. Функция двух случайных величин

Зная плотность распределения $f(x;\ y)$ двумерного случайного вектора $(X;\ Y)$, можно определить функцию распределения вероятностей функции $g(X;\ Y)$ от этих случайных величин, где $g(x;\ y)$ — неслучайная борелевская функция, определенная на R^2. Пусть $Z = g(X;\ Y)$, тогда

$$F_Z(z) = P(Z < z) = \iint\limits_{g(x,\,y) < z} f(x;\ y)\,dx\,dy.$$

Рассмотрим распределения простейших функций от пары случайных величин.

Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$, тогда случайными величинами являются функции

$$X(\omega) + Y(\omega),\ X(\omega) - Y(\omega),\ X(\omega)\ Y(\omega),\ \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}\ (Y(\omega) \neq 0,\ \omega \in \Omega).$$

Если (X, Y) — дискретный случайный вектор, то закон распределения $Z=X+Y$ записывается в виде

$$P(Z=z_k) = \sum_{i,j:\, x_i+y_j=z_k} P(X=x_i,\ Y=y_j).$$

В частности, если X и Y независимы, то

$$P(Z=z_k)=\sum_i P(X=x_i)P(Y=z_k-x_i).$$

Если $(X; Y)$ — абсолютно непрерывный случайный вектор с плотностью распределения $f(x, y)$, то

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,\ y)dy.$$

Если случайные величины X и Y независимы и имеют плотности распределения вероятностей $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, то плотность распределения $X+Y$ определяется по формуле

$$f_{X+Y}(z)=\int f_1(z-y)\,f_2(y)\,dy=\int f_1(x)\,f_2(z-x)\,dx.$$

Плотность, определяемая данным равенством, называется сверткой двух плотностей $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и обозначается

$$f_{X+Y}(x)=f_1(x)*f_2(x).$$

Если случайные величины X и Y независимы и имеют плотности распределения вероятностей $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, то плотность распределения $X-Y$ определяется по формуле

$$f_{X-Y}(z)=\int f_1(z+y)\,f_2(y)\,dy=\int f_1(x)\,f_2(x-z)\,dx.$$

Плотность распределения вероятностей произведения независимых случайных величин X и Y с плотностями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно определяется по формуле

$$f_{XY}(z)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}f_1(x)\,f_2\left(\frac{z}{x}\right)dx-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}f_1(x)\,f_2\left(\frac{z}{x}\right)dx.$$

Плотность распределения вероятностей отношения независимых случайных величин X и Y с плотностями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно определяется по формуле

$$f_{\frac{X}{Y}}(z)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{z^2}f_1(x)\,f_2\left(\frac{x}{z}\right)dx-\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{z^2}f_1(x)\,f_2\left(\frac{x}{z}\right)dx.$$

Задача 1. Имеется 15 урн. В пяти урнах по 8 шаров: 4 белых и 4 черных. В остальных урнах по 10 шаров: 2 черных и 8 белых. Из каждой урны наудачу извлекается по два шара. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайного числа X извлеченных черных шаров.

Решение. Пусть случайная величина X_i означает число извлеченных черных шаров из i-ой урны, содержащей 4 белых и 4 черных шара; а Y_j — число извлеченных черных шаров из j-ой урны, содержащей 8 белых и 2 черных шара. Тогда

$$X=\sum_{i=1}^{5}X_i+\sum_{j=1}^{10}Y_j.$$

Откуда в силу независимости испытаний

$$MX=\sum_{i=1}^{5}MX_i+\sum_{j=1}^{10}MY_j,\quad DX=\sum_{i=1}^{5}DX_i+\sum_{j=1}^{10}DY_j.$$

Так как

$$P(X_1=0)=\frac{C_4^0C_4^2}{C_8^2}=\frac{3}{14},\quad P(X_1=1)=\frac{C_4^1C_4^1}{C_8^2}=\frac{8}{14},$$

$$P(X_1=2)=\frac{C_4^2C_4^0}{C_8^2}=\frac{3}{14},$$

то $MX_1=1,\ DX_1=\dfrac{3}{7}$.

Так как случайные величины X_i, $i=1,\ ...,\ 5$, одинаково распределены, то $MX_i=1,\ DX_i=\dfrac{3}{7}$, $i=1,\ ...,\ 5$.

Аналогично, $MY_j=\dfrac{2}{5}$, $DY_j=\dfrac{64}{225}$, $j=1,\ ...,\ 10$.

Следовательно,

$$MX=\sum_{i=1}^{5}1+\sum_{j=1}^{10}\frac{2}{5}=9,\quad DX=\sum_{i=1}^{5}\frac{3}{7}+\sum_{j=1}^{10}\frac{64}{225}=4{,}987,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{DX}\approx 2{,}23.$$

Задача 2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	$x_1=1$	$x_3=2$	$x_3=5$
p_i	0,1	0,6	0,3

y_i	$y_1=-1$	$y_2=0$	$y_3=3$
p_i	0,2	0,3	0,5

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = (-2X + 1)Y$,

б) коэффициент корреляции случайных величин $X - Y$ и $2X + 3Y$.

Решение: а) Введем вспомогательную случайную величину $V = -2X + 1$, закон распределения которой имеет вид

v_i	$v_1 = -1$	$v_2 = -3$	$v_3 = -9$
p_i	0,1	0,6	0,3

Обозначим $p_i = P(V = v_i)$, $q_j = P(Y = y_j)$. Тогда, учитывая независимость случайных величин V и Y, найдем закон распределения $Z = (-2X + 1)Y$.

z_i	-27	-9	-3	0	1	3	9
p_i	$p_3 \cdot q_3 =$ $= 0{,}15$	$p_2 \cdot q_3 =$ $= 0{,}3$	$p_1 \cdot q_3 =$ $= 0{,}05$	$q_2 =$ $= 0{,}3$	$p_1 \cdot q_1 =$ $= 0{,}02$	$p_2 \cdot q_1 =$ $= 0{,}12$	$p_3 \cdot q_1 =$ $= 0{,}06$

б) Введем обозначения $U = X - Y$ и $V = 2X + 3Y$. Коэффициент корреляции U и V вычислим по формуле

$$k = \frac{M(UV) - MU \cdot MV}{\sqrt{DU \cdot DV}}.$$

Учитывая независимость случайных величин X и Y, имеем

$$M(UV) = M((X - Y)(2X + 3Y)) = M(2X^2 + XY - 3Y^2) =$$
$$= 2MX^2 + MXMY - 3MY^2,$$

$$MU \cdot MV = M(X - Y) \cdot M(2X + 3Y) =$$
$$= (MX - MY) \cdot (2MX + 3MY) = 2(MX)^2 + MXMY - 3(MY)^2,$$

$$M(UV) - MU \cdot MV = 2(MX^2 - (MX)^2) - 3(MY^2 - (MY)^2) = 2DX - 3DY,$$

$$DU = D(X - Y) = DX + DY,$$

$$DV = D(2X + 3Y) = 4DX + 9DY.$$

Откуда

$$k = \frac{2DX - 3DY}{\sqrt{DX + DY}\sqrt{4DX + 9DY}}.$$

По законам распределений X и Y найдем их дисперсии

$DX = (0{,}1 + 4 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3) - (0{,}1 + 2 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3)^2 = 2{,}16$,

$DY = (0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}5) - (-1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}5)^2 = 3{,}01$.

Следовательно, $k \approx -0{,}35$.

Задача 3. Задано распределение вероятностей двумерного случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	4	5
2	0,3	0,4
3	0,2	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = \dfrac{-X+5}{Y+2}$.

Решение: Заметим, что случайные величины X и Y зависимы, поэтому вначале составим закон распределения случайной величины Z. Она может принимать три значения: $z_1 = \dfrac{1}{4}$, $z_2 = \dfrac{1}{5}$ и $z_3 = 0$. Их вероятности равны

$$P(Z=0) = P(X=5,\ Y=2) + P(X=5,\ Y=3) = 0{,}5;$$

$$P\left(Z=\frac{1}{5}\right) = P(X=4,\ Y=3) = 0{,}2;$$

$$P\left(Z=\frac{1}{4}\right) = P(X=4,\ Y=2) = 0{,}3.$$

Следовательно,

z_i	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
p_i	0,5	0,2	0,3

Откуда

$$MZ = 0 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}25 \cdot 0{,}3 = 0{,}115;$$
$$DZ = (0 \cdot 0{,}5 + 0{,}04 \cdot 0{,}2 + 0{,}0625 \cdot 0{,}3) - 0{,}115^2 = 0{,}013525.$$

Задача 4. Независимые случайные величины X и Y имеют плотности

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty < x < +\infty;$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}} & y > 0, \\ 0 & y \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины XY.

Решение. Плотность распределения вероятностей произведения случайных величин X и Y с плотностями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определяется по формуле

$$f_{XY}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f_1(x)\ f_2\left(\frac{z}{x}\right)dx - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} f_1(x)\ f_2\left(\frac{z}{x}\right)dx.$$

Подставим в формулу заданные плотности

$$f_{XY}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f_Y(x)\ f_X\left(\frac{z}{x}\right)dx - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} f_Y(x)\ f_X\left(\frac{z}{x}\right)dx = J_1(z) + J_2(z),$$

$$J_1(z) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} x e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{z^2}{x^2}\right)} dx,$$

$$J_2(z) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} \cdot 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2x^2}} dx = 0.$$

Преобразуем интеграл $J_1(z)$

$$J_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{z^2}{x^2}\right)} dx = \frac{e^{-|z|}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2-2x\frac{|z|}{x}+\frac{z^2}{x^2}\right)} dx =$$

$$= \frac{e^{-|z|}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{|z|}{x}\right)^2} dx.$$

Произведем в последнем интеграле замену переменных

$$x - \frac{|z|}{x} = t,\ x = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t^2+4|z|},\ dx = \frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}\frac{tdt}{\sqrt{t^2+4|z|}}.$$

Имеем

$$J_1(z) = \frac{e^{-|z|}}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{e^{-|z|}}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \frac{t}{\sqrt{t^2+4|z|}} dt =$$

$$= \frac{e^{-|z|}}{2\sqrt{2\pi}} (I_1(z) + I_2(z)).$$

Интеграл $I_1(z)$ известен как интеграл Лапласа и равен $\sqrt{2\pi}$. Интеграл $I_2(z)$ равен нулю, так как подинтегральная функция является нечетной.

Следовательно, $f_{XY}(z) = \dfrac{e^{-|z|}}{2}$, $z \in \mathrm{R}$.

Контроль: убедиться, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz = 1$.

Задача 5. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на $[0;\ 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

Решение. Плотности распределения вероятностей X и Y равны

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x \leqslant 0 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

Обозначим через $u(x)$ плотность распределения суммы $X + Y$. Получим

$$u(x) = \int f_1(x-y)\, f_2(y)\, dy = \int\limits_0^1 f_1(x-y)\, dy = \int\limits_{x-1}^{x} f_1(z)\, dz.$$

Если $x \leqslant 0$, то отрезок $[x-1;\ x]$ лежит левее отрезка $[0;\ 1]$, поэтому $u(x) = \int\limits_{x-1}^{x} f_1(z)\, dz = \int\limits_{x-1}^{x} 0 dz = 0$.

Если $0 < x \leqslant 1$, то $-1 < x - 1 \leqslant 0$, поэтому

$$u(x) = \int\limits_{x-1}^{x} f_1(z)\, dz = \int\limits_{x-1}^{0} f_1(z)\, dz + \int\limits_{0}^{x} f_1(z)\, dz = \int\limits_{x-1}^{0} 0 dz + \int\limits_{0}^{x} 1 dz = x.$$

Если $1 < x \leqslant 2$, то $0 < x - 1 \leqslant 1$, поэтому

$$u(x) = \int\limits_{x-1}^{x} f_1(z)\, dz = \int\limits_{x-1}^{1} f_1(z)\, dz + \int\limits_{1}^{x} f_1(z)\, dz = \int\limits_{x-1}^{1} 1 dz + \int\limits_{1}^{x} 0 dz = 2 - x.$$

Если $x > 2$, то отрезок $[x-1;\ x]$ лежит правее отрезка $[0;\ 1]$, поэтому

$$u(x) = \int\limits_{x-1}^{x} f_1(z)\, dz = \int\limits_{x-1}^{x} 0 dz = 0.$$

Собрав вместе полученные данные, получим

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & x \leqslant 0 \text{ или } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Распределение с плотностью $u(x)$ называется *треугольным распределением* на отрезке $[0;\ 2]$ (распределением Симпсона).

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. В группе 10 юношей, которые играют, набрасывая кольца на колышек. Вероятность попадания кольца на колышек для каждого из них равна 0,6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий кольца на колышек в течение одной игры, если каждому юноше предоставляются две попытки.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	4	5
p_i	0,1	0,1	0,8

y_i	1	2	3
p_i	0,2	0,2	0,6

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = 2X - 4Y + 2$,

б) коэффициент корреляции случайных величин X и XY.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	0	1
0	0,1	0,15
2	0,15	0,6

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = X + Y$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $\dfrac{X}{Y}$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

Вариант 2

1. Имеется пять полных наборов костей домино. Из каждого набора наудачу извлекают две кости. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа дублей среди всех извлеченных костей.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	-4	-3	-2
p_i	0,2	0,2	0,6

y_i	2	3	4
p_i	0,3	0,3	0,4

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = XY + 3$,

б) коэффициент корреляции случайных величин X и $3X - 5Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	-1	1
1	0,2	0,25
2	0,25	0,3

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = 2X + 3Y - 1$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют плотности

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины XY.

Вариант 3

1. Тест состоит из 25 вопросов. На каждый вопрос приведено пять ответов, один из которых правильный. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа угаданных правильных ответов.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	-3	-2	-1
p_i	0,3	0,3	0,4

y_i	3	4	5
p_i	0,4	0,4	0,2

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = 4X + 5Y$,

б) коэффициент корреляции случайных величин X и $(3X + 2)Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

$y_j \backslash x_i$	-2	2
1	0,15	0,2
3	0,2	0,45

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = \dfrac{X}{Y}$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины XY.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на $[0;\ 3]$. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

Вариант 4

1. Имеется 20 одинаковых урн. В каждой урне по 9 шаров: 5 черных и 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекают один шар. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа белых шаров среди всех извлеченных шаров.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	-2	-1	0
p_i	0,4	0,4	0,2

y_i	4	5	6
p_i	0,4	0,4	0,2

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = X + Y$,

б) коэффициент корреляции случайных величин X и $(X+2)(Y-3)$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

$y_j \backslash x_i$	-3	3
1	0,25	0,3
4	0,3	0,15

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = X - Y$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют распределение с плотностью $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda = 4$. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

Вариант 5

1. Имеется 15 ящиков. В каждом ящике 10 деталей, среди которых 4 стандартных. Из каждого ящика наудачу извлекают две детали. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа извлеченных стандартных деталей.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	-1	0	1
p_i	0,45	0,45	0,1

y_i	2	5	10
p_i	0,1	0,8	0,1

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = \frac{X}{Y}$,

б) коэффициент корреляции случайных величин X и $(X - 6)Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X; Y)$:

y_j \ x_i	-1	1
1	0,5	0,1
5	0,1	0,3

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = 5X - 2Y$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 5$. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на $[0; 5]$. Найти плотность распределения случайной величины XY.

Вариант 6

1. Имеется 10 колод карт, в каждой из которых по 36 карт. Из каждой колоды наудачу извлекают две карты. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа тузов среди извлеченных 20 карт.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	1	3
p_i	0,35	0,35	0,3

y_i	2	4	5
p_i	0,2	0,6	0,2

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = \dfrac{X+3}{Y}$,

б) коэффициент корреляции случайных величин X и $X + Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	0	1
2	0,1	0,25
6	0,25	0,4

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = (X + 3)Y$.

4. Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X имеет равномерное распределение в интервале $(-6;\ 6)$, а Y имеет функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $X + Y$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 6$. Найти плотность распределения случайной величины XY.

Вариант 7

1. В соревновании участвуют три стрелка. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для каждого стрелка равна 0,7. Стрелки производят по три независимых выстрела. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа попаданий в мишень.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	2	4
p_i	0,25	0,25	0,5

y_i	1	5	10
p_i	0,3	0,4	0,3

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = \dfrac{2X-3}{Y}$,

б) коэффициент корреляции случайных величин X и $X - Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	0	2
3	0,25	0,2
7	0,35	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = (2X - 5)Y$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2) = (1;\ 4)$. Найти плотность распределения случайной величины XY.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 7$. Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

Вариант 8

1. Одновременно подбрасывается 8 правильных шестигранных игральных костей. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа выпадений шестерки.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	3	6
p_i	0,15	0,15	0,7

y_i	1	2	3
p_i	0,4	0,2	0,4

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = \dfrac{5X-2}{Y+1}$,

б) коэффициент корреляции случайных величин X и $2X - 6Y + 4$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

$y_j \backslash x_i$	-1	0
2	0,15	0,3
8	0,25	0,3

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = (X+3)(Y-1)$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют плотности распределения $f_1(x) = f_2(x) = \dfrac{C}{1+x^4}$. Найти C и доказать, что случайная величина $\dfrac{X}{Y}$ распределена по закону Коши.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda = 8$. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

Вариант 9

1. Одновременно подбрасывается 24 симметричных монет. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа появлений решки.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	4	8
p_i	0,1	0,2	0,7

y_i	1	2	4
p_i	0,45	0,1	0,45

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = \dfrac{X-1}{Y+1}$,

б) коэффициент корреляции случайных величин XY и $2X + Y - 3$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

$y_j \backslash x_i$	-3	0
7	0,2	0,25
9	0,3	0,25

Найти математическое ожидание и дисперсию

$$Z = (2X-4)(Y+3).$$

4. Независимые случайные величины X и Y имеют нормальное распределение с параметрами (1; 4). Доказать, что случайная величина $X+Y$ имеет нормальное распределение.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение в интервалах (0; 9) и (–9; 0) соответственно. Найти плотность распределения случайной величины XY.

Вариант 10

1. В ящике находятся 10 коробок карандашей. Коробки содержат по 12 карандашей, среди которых 3 красных карандаша. Из каждой коробки, находящихся в ящике, наудачу извлекают два карандаша. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа извлеченных красных карандашей.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	5	10
p_i	0,1	0,3	0,6

y_i	–4	0	4
p_i	0,35	0,3	0,35

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z=(X+1)(Y-1)$,

б) коэффициент корреляции случайных величин XY и $(-3X+5Y)$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X; Y)$:

y_j \ x_i	–1	1
2	0,35	0,25
4	0,25	0,15

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z=\dfrac{X+3}{Y}$.

3. Независимые случайные величины X и Y имеют следующие плотности распределения вероятностей:

$$f_1(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}},\ (|x|<1);\ f_2(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}},\ (x>0).$$

Доказать, что случайная величина XY имеет нормальное распределение.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda = 1$. Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

Вариант 11

1. В отдел технического контроля поступило 12 ящиков, содержащих по 3 детали, изготавливаемых заводом. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа стандартных деталей, если вероятность того, что деталь бракованная, равна 0,05.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	1	3	5
p_i	0,1	0,4	0,5

y_i	−4	−3	0
p_i	0,25	0,5	0,25

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = (-3X + 1)Y$,

б) коэффициент корреляции случайных величин XY и $X + Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X; Y)$:

y_j \ x_i	−1	0
1	0,15	0,5
2	0,15	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = \dfrac{-2X+5}{Y}$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти плотность распределения случайной величины XY.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на $[0; 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

Вариант 12

1. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по одной цели. Вероятность попадания в первого стрелка в цель равна 0,7, второго — 0,8 и третьего — 0,9. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий в цель.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	1	4	6
p_i	0,1	0,5	0,4

y_i	−3	−2	0
p_i	0,15	0,7	0,15

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = (X - 5)Y$,

б) коэффициент корреляции случайных величин XY и $(X+2)(Y-1)$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X; Y)$:

y_j \ x_i	−6	6
2	0	0,4
3	0,4	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = \dfrac{X-3}{Y+2}$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют следующие функции распределения вероятностей: $F_1(x) = F_2(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$. Найти функцию распределения случайной величины $X + Y$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на $(0; 2)$. Найти плотность распределения случайной величины $\dfrac{X}{Y}$.

Вариант 13

1. На самолете имеются четыре двигателя. Вероятность безотказной работы в полете для первого двигателя равна 0,8, для второго — 0,85, для третьего — 0,9 и для четвертого — 0,95. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа двигателей, в которых могут возникнуть неполадки в полете.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	1	5	7
p_i	0,1	0,6	0,3

y_i	−2	−1	0
p_i	0,05	0,9	0,05

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = X - Y$,

б) коэффициент корреляции случайных величин XY и $(-5X + 7)Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

$y_j \backslash x_i$	−1	1
3	0,1	0,4
4	0,4	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = \dfrac{X+3}{Y-1}$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2) = (0;\ 9)$. Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют плотности распределения $f_1(x) = f_2(x) = \dfrac{C}{1+x^4}$. Найти C и доказать, что случайная величина $\dfrac{X}{Y}$ распределена по закону Коши.

Вариант 14

1. Испытывается устройство, состоящее из пяти независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов при испытании соответственно равны 0,03; 0,04; 0,05; 0,06; 0,08. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	1	6	8
p_i	0,1	0,6	0,3

y_i	−1	0	2
p_i	0,05	0,9	0,05

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = XY$,

б) коэффициент корреляции случайных величин XY и $X - Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

$y_j \backslash x_i$	0	1
4	0,3	0,4
5	0,2	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = \dfrac{-4X+3}{Y}$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 4$. Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на $(0;\ 1)$. Найти плотность распределения случайной величины $\dfrac{X}{X+Y}$.

Вариант 15

1. Подбрасывают 10 правильных шестигранных игральных костей. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы числа очков, которые выпадут на их верхних гранях.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	3	5
p_i	0,4	0,2	0,4

y_i	−1	0	5
p_i	0,25	0,5	0,25

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = -2X + 3Y - 1$,

б) коэффициент корреляции случайных величин XY и $(X - 2)Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	0	3
5	0,5	0,25
6	0	0,25

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = \dfrac{X-6}{Y}$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2) = (0;\ 9)$. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на $(0;\ 5)$. Найти плотность распределения случайной величины $\dfrac{X}{Y}$.

Вариант 16

1. Три стрелка производят по два независимых выстрела в мишень. Вероятность попадания в мишень каждым стрелком при одном выстреле равна 0,7. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа пробоин в мишени.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	3	6
p_i	0,3	0,2	0,5

y_i	−1	0	6
p_i	0,35	0,5	0,15

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = (X + 3)(Y - 3)$,

б) коэффициент корреляции случайных величин $X + Y$ и $(X + 7)Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	−2	2
6	0,3	0,35
8	0,35	0

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = \dfrac{X}{Y}$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 6$. Найти плотность распределения случайной величины $\dfrac{X}{Y}$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют распределение Пуассона с параметрами $\lambda_1 = 6$ и $\lambda_2 = 2$ соответственно. Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

Вариант 17

1. В горном районе создано три автоматических сейсмических станций. Каждая станция в течение года может выйти из строя с вероятностями соответственно 0,7; 0,8 и 0,9. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа станций, вышедших из строя в одном рассматриваемом году.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	7	12
p_i	0,3	0,2	0,5

y_i	1	5	10
p_i	0,35	0,5	0,15

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = \dfrac{X+3}{Y}$,

б) коэффициент корреляции случайных величин $X + Y$ и $(X + 7)Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	-1	1
0	0,35	0,15
2	0,15	0,35

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = -X + 3Y + 2$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 7$. Найти плотность распределения случайной величины $|X - Y|$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на $[1;\ 7]$ и $[-7;\ -1]$ соответственно. Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

Вариант 18

1. Тест состоит из четырех разделов, содержащих по 20 вопросов соответственно. На каждый тестовый вопрос приведено в первом разделе по два ответа, во втором — три, в третьем — 4, в четвертом — пять ответов. Только один из указанных ответов правильный. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа угаданных правильных ответов.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	-2	3	8
p_i	0,2	0,2	0,6

y_i	0	3	8
p_i	0,45	0,5	0,05

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = \dfrac{X-3}{Y+2}$,

б) коэффициент корреляции случайных величин $X + Y$ и $X + 2Y - 7$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	0	5
8	0,1	0,5
10	0,3	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = -2X + 3Y$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром λ. Доказать, что случайная величина $\dfrac{X}{Y+X}$ равномерно распределена на $(0;\ 1)$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют соответственно равномерное распределение на $[0;\ 1]$ и показательное распределение с параметром $\lambda = 8$. Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

Вариант 19

1. Пятеро юношей соревнуются следующим образом: каждый из них набрасывает кольца на колышек до первого попадания. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа брошенных колец, если вероятность набрасывания кольца на колышек для каждого юноши при каждом испытании постоянна и равна 0,8.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	3	9
p_i	0,1	0,2	0,7

y_i	−1	0	9
p_i	0,15	0,5	0,35

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = XY - 2$,

б) коэффициент корреляции случайных величин $X + Y$ и $(-2X + 1)Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	−1	1
1	0,3	0,2
2	0,4	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = X + Y$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют нормальное распределение с параметрами $(a;\ \sigma^2) = (1;\ 4)$. Найти плотность распределения случайной величины $\dfrac{X}{Y}$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют распределение Эрланга с параметрами $(n;\ \lambda) = (2;\ 1)$:

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

Вариант 20

1. В одной студенческой группе обучается 20 студентов, которым предстоит тест по теории вероятностей. Для каждого студента вероятность получить три балла равна 0,6, четыре балла — 0,3, пять баллов — 0,1. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы числа баллов, полученных студентами всей группы.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	0	2	5
p_i	0,3	0,1	0,6

y_i	−2	0	5
p_i	0,1	0,2	0,7

Найти:

а) закон распределения случайной величины

$$Z = (2X - 3)(Y + 2),$$

б) коэффициент корреляции случайных величин $X + Y$ и $(-2X + 3Y)$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	1	2
2	0,25	0,25
3	0,25	0,25

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = X - Y$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют распределение с плотностью $f(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{|x|}{2}}$. Найти плотность распределения случайной величины $X+Y$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют распределение Коши с параметрами $(\mu;\ a)=(1;\ 1)$: $f_1(x)=f_2(x)=\frac{1}{\pi}\frac{a}{(x-\mu)^2+a^2}$.

Доказать, что случайная величина $X+Y$ имеет распределение Коши с параметрами (2; 2).

Вариант 21

1. Команда из 10 студентов участвует в олимпиаде по теории вероятностей. Участникам олимпиады предложены 5 задач. За каждую решенную задачу студент получает одно очко. Вероятность для каждого студента решить любую задачу постоянна и равна 0,7. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы очков, заработанных командой студентов.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,2	0,5

y_i	−2	−1	5
p_i	0,1	0,3	0,6

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z=\frac{-2X+5}{Y}$,

б) коэффициент корреляции случайных величин $X+Y$ и $X-Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	1	3
1	0,2	0,2
4	0,2	0,4

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z=(X+3)(Y-4)$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на (0; 1). Найти плотность распределения случайной величины $\frac{X}{X+Y}$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют гамма-распределение с параметрами $(\alpha;\ \beta) = \left(\frac{1}{2};\ 1\right)$:

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Доказать, что случайная величина $X + Y$ имеет гамма распределение с параметрами (1; 1).

Вариант 22

1. Шесть игроков соревнуются следующим образом: каждый из них бросает правильную игральную кость до первого выпадения шестерки. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа бросков, произведенных всеми игроками.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	5	6
p_i	0,3	0,3	0,4

y_i	−4	−2	5
p_i	0,1	0,4	0,5

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = \dfrac{X}{Y}$,

б) коэффициент корреляции случайных величин $X + Y$ и $(X - 1)(Y + 1)$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	1	3
1	0,1	0,3
5	0,2	0,4

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = X - 5Y$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют хи-квадрат распределение с плотностью

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Доказать, что случайная величина $X + Y$ имеет распределение хи-квадрат.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти плотность распределения случайной величины $\frac{X}{Y}$.

Вариант 23

1. На самолете имеются шесть двигателей. Вероятность безотказной работы в полете для первого двигателя равна 0,8; для второго и третьего — 0,85; для остальных — 0,9. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа двигателей, в которых могут возникнуть неполадки в полете.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	3	5
p_i	0,3	0,4	0,3

y_i	−3	−2	5
p_i	0,1	0,5	0,4

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = (X - 5)Y$,

б) коэффициент корреляции случайных величин $X - Y$ и $2X - 3Y + 2$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	−3	1
1	0,3	0,3
3	0,3	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = -3 + XY$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 3$. Найти плотность распределения случайной величины $|X - Y|$.

5. Плотность распределения случайного вектора $(X;\ Y)$ равна

$$f(x;\ y) = \begin{cases} \dfrac{6}{(1+x+y)^4}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{в остальных сл.} \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

Вариант 24

1. Испытываются семь независимо работающих прибора: если прибор выдержит испытание, то его подвергают следующему испытанию. Вероятность отказа каждого прибора при первом испытании равна 0,1, при втором испытании — 0,2, при третьем — 0,4. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа отказавших при испытаниях приборов.

2. Независимые дискретные случайные величины X и Y имеют следующие распределения вероятностей:

x_i	2	4	5
p_i	0,3	0,45	0,25

y_i	0	1	2
p_i	0,1	0,15	0,75

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Z = X - Y$,

б) коэффициент корреляции случайных величин $X - Y$ и $(3X - 9)Y$.

3. Задан закон распределения случайного вектора $(X;\ Y)$:

y_j \ x_i	−2	2
2	0,55	0,2
3	0,05	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию $Z = \dfrac{-X+2}{Y-1}$.

4. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром λ. Доказать, что случайная величина $\dfrac{X}{Y+X}$ равномерно распределена на $(0;\ 1)$.

5. Независимые случайные величины X и Y имеют соответственно равномерное распределение на $[0;\ 1]$ и показательное распределение с параметром $\lambda = 4$. Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

§ 3.3. Характеристическая функция

Комплекснозначной случайной величиной $Z(\omega)$ называется величина вида

$$Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega),$$

где $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ — действительные случайные величины.

Математическое ожидание комплекснозначной случайной величины определяется следующим образом:

$$MZ(\omega) = MX(\omega) + iMY(\omega).$$

Характеристической функцией $\varphi(t)$ случайной величины X называется комплекснозначная функция, определенная при $t \in (-\infty, +\infty)$ соотношением

$$\varphi(t) = Me^{itX} = M(\cos tX - i \sin tX).$$

Если $F(x)$ — функция распределения X, то

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x).$$

Если $f(x)$ — плотность распределения X, то

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx.$$

Если X — дискретная случайная величина, то

$$\varphi(t) = \sum_k e^{itx_k} P(X = x_k).$$

Свойства характеристической функции:

1. $\varphi(0) = 1$, $|\varphi(t)| \leqslant 1$.

2. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$. Если $\varphi(t)$ — действительная функция, то она четная.

3. $\varphi(t)$ — равномерно непрерывная функция на всей числовой оси.

4. Для любого n, любых вещественных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и любых комплексных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \varphi(t_k - t_r) c_k \bar{c}_r \geqslant 0.$$

6. Если $\varphi(t)$ — характеристическая функция X и $Y = aX + b$, то $\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi(at)$.

7. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

8. Характеристическая функция однозначно определяет распределение случайной величины. Если X случайная величина с плотностью $f(x)$ и ее характеристическая функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема, то $f_X(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt.$

9. Если существует m-й абсолютный момент $M\,|X|^m$, то существуют производные характеристической функции $\varphi(t)$ до m-го порядка включительно, причем

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k MX^k,\ k = 1,\ \ldots,\ m.$$

Характеристические функции основных распределений приведены в приложении 4.

Применение теории характеристических функций значительно упрощает доказательство следующих утверждений.

Сумма n независимых случайных величин, имеющих распределение Бернулли с параметром p, имеет биномиальное распределение с параметрами n и p.

Если X и Y независимы и имеют биномиальное распределение с параметрами $(n_1,\ p)$ и $(n_2,\ p)$, то $X + Y$ имеет биномиальное распределение с параметрами $(n_1 + n_2,\ p)$.

Если X и Y независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2, то величина $X + Y$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

Если X и Y — независимы и имеют геометрическое распределение, то случайная величина $X + Y$ имеет отрицательное биномиальное распределение.

Если X и Y независимы и имеют равномерное на отрезке $[a,\ b]$ распределение, то случайная величина $X + Y$ имеет треугольное распределение на отрезке $[2a,\ 2b]$.

Если X и Y независимы и нормально $N(a_1,\ \sigma_1^2)$, $N(a_2,\ \sigma_2^2)$ распределены, то величина $X + Y$ имеет нормальное $N(a_1 + a_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ распределение.

Если X и Y независимы и имеют распределение Коши с параметрами $(\alpha_1,\ \lambda_1)$, $(\alpha_2,\ \lambda_2)$, то величина $X + Y$ имеет распределение Коши с параметрами $(\alpha_1 + \alpha_2,\ \lambda_1 + \lambda_2)$.

Если X и Y независимы и имеют гамма-распределение с параметрами $(\alpha_1,\ \beta)$ и $(\alpha_2,\ \beta)$, то величина $X + Y$ имеет гамма-распределение с параметрами $(\alpha_1 + \alpha_2,\ \beta)$.

Если X и Y независимы и имеют распределение хи-квадрат с α_1 и α_2 степенями свободы соответственно, то величина $X + Y$ имеет распределение хи-квадрат с $\alpha_1 + \alpha_2$ степенями свободы.

Задача 1. На вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$, представляющем собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$.

Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & \omega \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right], \\ 2\omega - 1, & \omega \in \left(\frac{1}{2};\ 1\right]. \end{cases}$$

Решение. Когда ω пробегает отрезок $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$, 2ω принимает значения из отрезка $[0;\ 1]$, когда ω пробегает интервал $\left(\frac{1}{2};\ 1\right]$, $2\omega - 1$ принимает значения из интервала $(0;\ 1]$. Поэтому случайной величины $X(\omega)$ принимает значения из отрезка $[0;\ 1]$. Найдем функцию распределения вероятностей $X(\omega)$.

При $x \leqslant 0$

$$F(x) = P(X\ (\omega) < x) = 0.$$

При $0 < x \leqslant 1$

$$F(x) = P(X\ (\omega < x) + P(2\omega - 1 < x) =$$

$$= P\left(\omega < \frac{x}{2}\right) + P\left(\omega < \frac{x+1}{2}\right) = \left(\frac{x}{2} - 0\right) + \left(\frac{x+1}{2} - \frac{1}{2}\right) = x.$$

При $x > 1$

$$F(x) = P(X\ (\omega) < x) = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Следовательно, случайная величина $X(\omega)$ имеет равномерное на отрезке $[0;\ 1]$ распределение с плотностью $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$

По определению характеристической функции имеем

$$\varphi(t) = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it} - 1}{it}.$$

Задача 2. Найти характеристическую функцию нормального распределения с параметрами a и σ^2.

Решение. Пусть X_0 — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение. Тогда

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx.$$

Заметим, что

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx - \frac{x^2}{2}} dx.$$

(Дифференцирование под знаком интеграла по t законно, так как интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx - \frac{x^2}{2}} dx$$

сходится равномерно относительно $t \in (-\infty;\ +\infty)$). Интегрируя по частям получим

$$\varphi'(t) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} de^{-\frac{x^2}{2}} =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx = -t\varphi(t).$$

Следовательно, функция $\varphi(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi'(t) = -t\varphi(t),$$

решая которое находим

$$\varphi(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Поскольку $\varphi(0) = 1$, то $C = 1$ и, следовательно, характеристическая функция X_0 равна $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Известно, что случайная величина $X = \sigma X_0 + a$ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2. Характеристическая функция X равна

$$\varphi_X(t) = Me^{itX} = Me^{it\,(\sigma X_0 + \alpha)} = e^{i\alpha t} \cdot \varphi(\sigma t) = e^{i\alpha t - \frac{\sigma^2 x^2}{2}}.$$

Задача 3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие распределение Коши с параметрами $(\alpha_1;\ \lambda_1)$, $(\alpha_2;\ \lambda_2)$. Доказать, что случайная величина $X-Y$ имеет распределение Коши с параметрами $(\alpha_1-\alpha_2;\ \lambda_1+\lambda_2)$.

Решение. Запишем $X-Y=X+(-Y)$. Характеристическая функция случайной величины $(-Y)$ равна

$$\varphi_{-Y}(t)=\varphi_Y(-t).$$

Если X и Y — независимые случайные величины, то независимы X и $-Y$. По свойству характеристической функции

$$\varphi_{X-Y}(t)=\varphi_X(t)\ \varphi_{-Y}(t)=\varphi_X(t)\ \varphi_Y(-t).$$

Подставляя характеристическую функцию распределения Коши, имеем

$$e^{i\alpha_1 t-\lambda_1|t|}\bullet e^{i\alpha_2(-t)-\lambda_2|-t|}=e^{i(\alpha_1-\alpha_2)t-(\lambda_1+\lambda_2)|t|}.$$

Это характеристическая функция распределения Коши с параметрами $(\alpha_1-\alpha_2;\ \lambda_1+\lambda_2)$. Характеристическая функция однозначно определяет распределение случайной величины. Следовательно, случайная величина $X-Y$ имеет распределение Коши с параметрами $(\alpha_1-\alpha_2;\ \lambda_1+\lambda_2)$.

Задача 4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, имеющей распределение Лапласа (двойное экспоненциальное распределение) с параметрами $\alpha=0$ и $\lambda=1$.

Решение. Характеристическая функция распределения Лапласа с параметрами $\alpha=0$ и $\lambda=1$ равна

$$\varphi(t)=\frac{1}{t^2+1}.$$

Найдем три первых производных характеристической функции:

$$\varphi'(t)=-2t\varphi^2\ (t),$$
$$\varphi''(t)=-2\varphi^2\ (t)+8t^2\ \varphi^3\ (t),$$
$$\varphi'''(t)=24t\varphi^3(t)-48t^3\ \varphi^4\ (t).$$

Откуда

$$\varphi'(0)=0,\ \varphi''(0)=-2,\ \varphi'''(0)=0.$$

Используем свойство характеристической функции

$$f^{(k)}(0)=i^k\ MX^k.$$

Следовательно, $MX=0$, $MX^2=\dfrac{-2}{i^2}=2$, $MX^3=0$.

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. На вероятностном пространстве (Ω; $\Im$; P), представляющем собой отрезок [0; 1] с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega)=\begin{cases}1-3\omega, & \omega\in\left[0;\ \dfrac{1}{3}\right),\\[2mm] \dfrac{3\omega-1}{2}, & \omega\in\left[\dfrac{1}{3};\ 1\right].\end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию гамма-распределения с параметрами α и β ($\alpha>0$, $\beta>0$).

3. Пусть X и Y — независимые нормально $N(a_1;\ \sigma_1^2)$, $N(a_2;\ \sigma_2^2)$ распределенные случайные величины. Доказать, что случайная величина $X+Y$ имеет нормальное $N(a_1+a_2;\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ распределение.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t)=\dfrac{1}{ch^2 t}$.

Вариант 2

1. На вероятностном пространстве (Ω; $\Im$; P), представляющем собой отрезок [0; 1] с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & \omega\in\left[0;\ \dfrac{1}{4}\right),\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & \omega\in\left[\dfrac{1}{4};\ \dfrac{3}{4}\right),\\[2mm] 1, & \omega\in\left[\dfrac{3}{4};\ 1\right].\end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию равномерного на отрезке $[a;\ b]$ распределения.

3. Доказать, что функция $\varphi(t)=\cos^2 t$ является характеристической функцией вероятностного распределения.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t)=\left(\dfrac{\beta}{1-it}\right)^{\alpha}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

Вариант 3

1. На вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$, представляющем собой отрезок $[0; 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если $X(\omega) = \ln \omega$, $X(0) = 0$.

2. Найти характеристическую функцию распределения Пуассона с параметром λ $(\lambda > 0)$.

3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие гамма-распределение с параметрами $(\alpha_1; \beta)$, $(\alpha_2; \beta)$. Доказать, что случайная величина $X + Y$ имеет гамма-распределение с параметрами $(\alpha_1 + \alpha_2; \beta)$.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = \cos t$.

Вариант 4

1. На вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$, представляющем собой отрезок $[0; 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \omega \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{1}{2}, & \omega \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию биномиального распределения с параметрами $(n; p)$ $(0 < p < 1,\ n \geqslant 1)$.

3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие равномерное на отрезке $[a; b]$ распределение. Доказать, что случайная величина $X + Y$ имеет треугольное распределение на отрезке $[2a; 2b]$.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = \dfrac{4}{t^2} \cos t \sin^2 \dfrac{t}{2}$.

Вариант 5

1. На вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$, представляющем собой отрезок $[0; 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$.

Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in\left[0;\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};\ 1\right],\\ 0, & \omega\in\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right).\end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию показательного распределения с параметром λ ($\lambda > 0$).

3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие биномиальное распределение с параметрами $(n_1;\ p)$, $(n_2;\ p)$. Доказать, что случайная величина $X+Y$ имеет биномиальное распределение с параметрами $(n_1+n_2;\ p)$.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t)=e^{-t^2}$.

Вариант 6

1. На вероятностном пространстве $(\Omega;\ \mathfrak{I};\ P)$, представляющем собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если $X(\omega)=\omega$.

2. Найти характеристическую функцию распределения Коши с параметрами α и λ ($\lambda > 0$).

3. Доказать, что сумма n независимых случайных величин, имеющих распределение Бернулли с параметром p, имеет биномиальное распределение с параметрами n и p.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t)=\cos^2 t$.

Вариант 7

1. На вероятностном пространстве $(\Omega;\ \mathfrak{I};\ P)$, представляющем собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если $X(\omega)=\omega^2$.

2. Найти характеристическую функцию распределения Бернулли с параметром p ($0 < p < 1$).

3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие распределение Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2. Доказать, что случайная величина $X+Y$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1+\lambda_2$.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна

$$\varphi(t)=(1-it)^{-p}\ (1+it)^{-q},\ p,\ q>0.$$

Вариант 8

1. На вероятностном пространстве (Ω; $\Im$; P), представляющем собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если $X(\omega) = \omega^{\alpha}$, $\alpha < 0$.

2. Найти характеристическую функцию геометрического распределения с параметром p $(0 < p < 1)$.

3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат с α_1 и α_2 степенями свободы соответственно. Доказать, что случайная величина $X + Y$ имеет распределение хи-квадрат с $\alpha_1 + \alpha_2$ степенями свободы.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

Вариант 9

1. На вероятностном пространстве (Ω; $\Im$; P), представляющем собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если $X(\omega) = \sin \pi\omega$.

2. Найти характеристическую функцию треугольного распределения на отрезке $[a;\ b]$ (распределение Симпсона).

3. Случайная величина X имеет нормальное $N(a_1;\ \sigma_1^2)$ распределение. Найти плотность распределения случайной величины $Y = aX + b$.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = e^{-|t|} \cos t$.

Вариант 10

1. На вероятностном пространстве (Ω; $\Im$; P), представляющем собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & \omega \in \left[0;\ \dfrac{1}{2}\right], \\ 2(1-\omega), & \omega \in \left[\dfrac{1}{2};\ 1\right). \end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию распределения Лапласа (двойное экспоненциальное распределение) с параметрами α и λ.

3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром $\lambda = \frac{1}{2}$. Доказать, что случайная величина $X + Y$ имеет распределение хи-квадрат с 4 степенями свободы.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = \frac{1}{1+it}$.

Вариант 11

1. На вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$, представляющем собой отрезок $[0; 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega) = \begin{cases} \omega, & \omega \in \left[0; \frac{1}{3}\right], \\ -1, & \omega \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right], \\ -\omega^3, & \omega \in \left(\frac{2}{3}; 1\right]. \end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию случайной величины с распределением, приписывающим вероятности $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ точкам -2; 0; 2 соответственно.

3. Случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[a; b]$ распределение. Найти плотность распределения случайной величины $Y = aX + b$.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = \frac{1}{cht}$.

Вариант 12

1. На вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$, представляющем собой отрезок $[0; 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & \omega\in\left[0;\ \dfrac{1}{4}\right],\\ 1, & \omega\in\left(\dfrac{1}{4};\ \dfrac{3}{4}\right],\\ \dfrac{1}{4}, & \omega\in\left(\dfrac{3}{4};\ 1\right].\end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию распределения хи-квадрат с α степенями свободы.

3. Пусть случайная величина X имеет распределение: а) нормальное, б) равномерное, в) Коши, г) хи-квадрат, д) Лапласа, е) Пуассона. Указать распределения, для которых случайные величины X и $Y=X+b$ $(b\neq 0)$ имеют одинаковое распределение.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t)=\dfrac{1}{sht}$.

Вариант 13

1. На вероятностном пространстве $(\Omega;\ \mathfrak{S};\ P)$, представляющем собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega)=\begin{cases}4\omega, & \omega\in\left[0;\ \dfrac{1}{4}\right),\\ 1, & \omega\in\left[\dfrac{1}{4};\ \dfrac{3}{4}\right),\\ 4\omega-3, & \omega\in\left[\dfrac{3}{4};\ 1\right].\end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию распределения с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\pi\cdot chx},\ -\infty<x<+\infty.$$

3. Пусть случайная величина X имеет распределение: а) нормальное, б) равномерное, в) Коши, г) показательное, д) Лапласа, е) Пуассона. Указать распределения, для которых случайные величины X и $Y=aX$ $(a\neq 0)$ имеют одинаковое распределение.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

Вариант 14

1. На вероятностном пространстве (Ω; $\Im$; P), представляющем собой отрезок $[0; 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega) = \begin{cases} 4\omega, & \omega \in \left[0; \dfrac{1}{4}\right), \\ 1, & \omega \in \left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{4}\right), \\ 4\omega - 3, & \omega \in \left[\dfrac{3}{4}; 1\right]. \end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2ch\dfrac{\pi x}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

3. Пусть случайная величина X имеет распределение: а) нормальное, б) равномерное, в) Коши, г) биномиальное, д) Лапласа, е) Пуассона. Указать распределения, для которых случайные величины X и $Y = aX + b$ ($ab \neq 0$) имеют одинаковый вид распределения.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = 1 + p\,(e^{it} - 1)$, $0 < p < 1$.

Вариант 15

1. На вероятностном пространстве (Ω; $\Im$; P), представляющем собой отрезок $[0; 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \left[0; \dfrac{1}{5}\right), \\ 1, & \omega \in \left[\dfrac{1}{5}; 1\right]. \end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{\pi}{4ch^2\frac{\pi x}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

3. Случайная величина X распределение Коши с параметрами α и λ ($\lambda > 0$). Найти распределение случайной величины $Y = aX + b$.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = (1 + p\ (e^{it} - 1))^n$, $0 < p < 1$, $n \geqslant 1$.

Вариант 16

1. На вероятностном пространстве (Ω; $\Im$; P), представляющем собой отрезок [0; 1] с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega) = \begin{cases} -2, & \omega \in \left[0; \frac{2}{5}\right), \\ 2, & \omega \in \left[\frac{2}{5}; 1\right]. \end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2sh\frac{\pi x}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ. Доказать, что случайная величина $X - Y$ имеет распределение Лапласа.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = \dfrac{p}{1-(1-p)e^{it}}$, $0 < p < 1$.

Вариант 17

1. На вероятностном пространстве (Ω; $\Im$; P), представляющем собой отрезок [0; 1] с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \left[0; \dfrac{1}{3}\right), \\ 2, & \omega \in \left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right), \\ 3, & \omega \in \left[\dfrac{2}{3}; 1\right]. \end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \cos x, & x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие геометрическое распределение. Доказать, что случайная величина $X + Y$ имеет отрицательное биномиальное распределение.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$, $\lambda > 0$.

Вариант 18

1. На вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$, представляющем собой отрезок $[0; 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если $X(\omega) = 1 - \omega^2$.

2. Найти характеристическую функцию распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{\pi x^2}.$$

3. Случайная величина X имеет распределение Лапласа с параметрами α и λ ($\lambda > 0$). Найти распределение случайной величины $Y = aX + b$.

4. Найти моменты первых трех порядков равномерно распределенной на отрезке $[a; b]$ случайной величины X.

Вариант 19

1. На вероятностном пространстве $(\Omega; \Im; P)$, представляющем собой отрезок $[0; 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и ме-

рой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если $X(\omega) = \frac{\omega}{2}$.

2. Найти характеристическую функцию распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant 1, \\ 1-|x|, & |x| < 1. \end{cases}$$

3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат с 2 степенями свободы. Доказать, что случайная величина $X - Y$ имеет распределение Лапласа.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, имеющей показательное распределение с параметром λ.

Вариант 20

1. На вероятностном пространстве (Ω; $\Im$; P), представляющем собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если $X(\omega) = \sin 2\pi\omega$.

2. Найти характеристическую функцию распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0;\ 1+\sqrt{3}\right], \\ x-1, & x \in \left(0;\ 1+\sqrt{3}\right]. \end{cases}$$

3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие равномерное на отрезке $[-a;\ a]$ распределение. Доказать, что случайная величина $X - Y$ имеет треугольное распределение на отрезке $[-2a;\ 2a]$.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, имеющей распределение Коши с параметрами α и λ.

Вариант 21

1. На вероятностном пространстве (Ω; $\Im$; P), представляющем собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если $X(\omega) = \omega - \frac{1}{2}$.

2. Найти характеристическую функцию случайной величины X, если

$$P(X = m) = \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}},\ a > 0.$$

3. Доказать, что функция $\varphi(t) = \cos t$ является характеристической функцией вероятностного распределения.

4. Найти моменты первых трех порядков величины X, имеющей нормальное распределение с параметрами a и σ^2.

Вариант 22

1. На вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$, представляющем собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если $X(\omega) = \frac{1}{2}$.

2. Найти характеристическую функцию распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \sin x, & x \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

3. Пусть X и Y — независимые нормально $N(a_1;\ \sigma_1^2)$, $N(a_2;\ \sigma_2^2)$ распределенные случайные величины. Доказать, что случайная величина $X - Y$ имеет нормальное $N(a_1 - a_2;\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ распределение.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = \dfrac{1}{1-it}$.

Вариант 23

1. На вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$, представляющем собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если $X(\omega) = e^{\omega}$.

2. Найти характеристическую функцию распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0;\ 3), \\ \dfrac{1}{9}x^2, & x \in (0;\ 3). \end{cases}$$

3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие распределение Коши с параметрами $(\alpha_1;\ \lambda_1)$, $(\alpha_2;\ \lambda_2)$. Доказать, что случайная величина $X + Y$ имеет распределение Коши с параметрами $(\alpha_1 + \alpha_2;\ \lambda_1 + \lambda_2)$.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, характеристическая функция которой равна $\varphi(t) = e^{-|t|}$.

Вариант 24

1. На вероятностном пространстве $(\Omega;\ \Im;\ P)$, представляющем собой отрезок $[0;\ 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина $X(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если $X(\omega) = e^{\omega} - 1$.

2. Найти характеристическую функцию случайной величины с распределением, приписывающим вероятности $\frac{1}{2}$ точкам -1 и 1.

3. Доказать, что функция $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ $(t \neq 0)$, $\varphi(0) = 1$, является характеристической функцией вероятностного распределения.

4. Найти моменты первых трех порядков случайной величины X, имеющей распределение хи-квадрат с α степенями свободы.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $P(\lambda,\ k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0.5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0.090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0.016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7					0,000001	0,000003

k \ λ	0,7	0.8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0.496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0.347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0.168031
5	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0.000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8		0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008101
9				0,000001	0,000191	0,002701
10					0,000038	0,000810

11					0,000007	0,000221
12					0,000001	0,000055
13						0,000013
14						0,000003
15						0,000001

k \ λ	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0.013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18		0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19		0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20			0,000004	0,000030	0,000159	0,000617

21			0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22				0,000003	0,000022	0,000108
23				0,000001	0,000008	0,000042
24					0,000003	0,000016
25					0,000001	0,000006
26						0,000002
27						0,000001

Приложение 2

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315

1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 3

Таблица значений функции $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0909	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2356	2389	2421	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2793	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3728	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3949	3869	3888	3906	3925	3943	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4648	4656	4664	4671	4678	4686	4692	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916

2,4	4918	4920	4922	4924	4927	4929	4930	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4958	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4878	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	4986									
3,1	4990									
3,2	49931									
3,3	49952									
3,4	49966									
3,5	49980									
3,6	49980									
3,7	49989									
3,8	49993									
3,9	49995									
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

Приложение 4

Основные распределения и их характеристики

Наименование распределения	Плотность распределения	Математическое ожидание	Дисперсия	Характеристическая функция
Вырожденное	$P\{X=a\}=1$	a	0	e^{ita}
Бернулли с параметром p $(0<p<1)$	$P\{X=1\}=p$, $P\{X=0\}=1-p$	p	$p(1-p)$	$1+p(e^{it}-1)$
Биномиальное с параметрами n и p $(0<p<1)$	$P(X=m)=$ $=C_n^m\, p^m\,(1-p)^{n-m}$ $m=0,\ 1,\ \ldots,\ n$	np	$np\,(1-p)$	$(1+p(e^{it}-1))^n$
Отрицательно-биномиальное (Паскаля) с параметрами n и p $(0<p<1)$	$P(X=m)=$ $=C_{r+m-1}^m\, p^r\,(1-p)^m$ $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\dfrac{r(1-p)}{p}$	$\dfrac{r(1-p)}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-(1-p)e^{it}}\right)^r$
Геометрическое с параметром p $(0<p<1)$	$P(X=m)=p(1-p)^m$ $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\dfrac{1-p}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\dfrac{p}{1-(1-p)e^{it}}$
Гипергеометрическое с параметрами N, n и p $(0<p<1)$	$P(X=m)=$ $=\dfrac{C_{Np}^m C_{N(1-p)}^{n-m}}{C_N^n}$ $m=0,\ 1,\ \ldots,\ n$	np	$\dfrac{N-n}{N-1}\,np\,(1-p)$	

Пуассона с параметром λ (λ > 0)	$P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, $m=0,1,2,\ldots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Равномерное на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Треугольное (Симпсона) на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$	$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a \text{ и } x>b,\\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a<x\leqslant\frac{a+b}{2},\\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2}<x\leqslant b.\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{24}$	$\left(\frac{2(e^{itb/2}-e^{ita/2})}{it(b-a)}\right)^2$
Показательное с параметром λ (λ > 0)	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-it}$
Нормальное с параметрами α и σ^2 $(\sigma > 0)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x\in(-\infty,+\infty)$	α	σ^2	$\exp\left(iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$

Гамма-распределение с параметрами α и β ($\alpha > 0$, $\beta > 0$)	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{\lambda}$	$\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(1 - \dfrac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}$
Коши с параметрами α и λ ($\lambda > 0$)	$f(x) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\alpha)^2}$ $x \in (-\infty, +\infty)$	не существует	не существует	$\exp(i\alpha t - \lambda\|t\|)$
Двойное экспоненциальное (Лапласа) с параметрами α и λ ($\lambda > 0$)	$f(x) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda\|x-\alpha\|}$ $x \in (-\infty; +\infty)$	α	$\dfrac{2}{\lambda^2}$	$\dfrac{\lambda^2 e^{it\alpha}}{t^2 + \lambda^2}$
Хи-квадрат с α степенями свободы ($\alpha > 0$)	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)} x^{\alpha/2-1} e^{-x/2}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	α	2α	$(1 - 2it)^{-\alpha/2}$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986.
2. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — М.: Высшая школа, 1999.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Киев: Выща школа, 1988.
4. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 2002.
5. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высшая школа, 2002.
6. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1988.
7. *Ежов И. И., Скороход А.В., Ядренко М. И.* Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977.
8. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. — М.: Наука, 1986.
9. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1982.
10. *Севостьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М.* Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Наука, 1982.
11. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А. А. Свешникова. — М.: Наука, 1970.
12. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1980.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Мынбаева Гульшат Узакбаевна
Дмитриев Иван Григорьевич
Борисов Владимир Захарович
Саввин Афанасий Семенович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Книга издана в авторской редакции

Ответственный редактор *Н.Г. Карасева*
Технический редактор *П.С. Корсунская*
Компьютерная верстка *И.В. Ломакиной*

Подписано в печать 15.08.2005. Формат 60 x 84 $^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Бумага газетная. Гарнитура «Ньютон»
Усл. печ. л. 25,34. Заказ № 1334. Тираж 500 экз.

ЗАО «Издательское предприятие «Вузовская книга»
125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.
МАИ, Главный административный корпус, к. 301а.
Тел. 158-02-35. E-mail: vbook@mai.ru

ISBN 5-9502-0122-1
9785950201226