Экзамен без проблем

наглядно

доступно

И.В. Третьяк

МАТЕМАТИКА

в схемах и таблицах

эффективная подготовка к ЕГЭ

наглядно

доступно

И.В. Третьяк

МАТЕМАТИКА

в схемах и таблицах

МОСКВА 2018

УДК 51(03)
ББК 22.1я2
Т66

Третьяк, Ирина Владимировна.
Т66 Математика в схемах и таблицах / И. В. Третьяк. — Москва : Эксмо, 2017. — 224 с. — (Наглядно и доступно).

ISBN 978-5-04-089400-0

В издании в сжатой, концентрированной форме приводится основной теоретический материал, охватывающий школьный курс математики. Термины, определения, формулы объединены в наглядные логические модули, позволяющие лучше понять и усвоить информацию.

Пособие окажет учащимся существенную помощь в подготовке к единому государственному экзамену по математике.

УДК 51(03)
ББК 22.1я2

ISBN 978-5-04-089400-0

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

ФУНКЦИИ

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ГЕОМЕТРИЯ

АЛГЕБРА

ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ

Целые числа

Множество целых чисел		
Z	N	Натуральные числа 1; 2; 3; ...; противоположные им числа: −1; −2; −3; ... и число 0 образуют множество целых чисел
	0	
	N_{-}	

Степень с натуральным показателем

Степень
n-й степенью действительного числа a называется действительное число b, полученное в результате умножения числа a самого на себя n раз
$b = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, $n \in N$ a — основание степени, n — показатель степени $0^n = 0$ $(n > 0)$; $1^n = 1$; $a^1 = a$; 0^0 — не определено

Степень с натуральным показателем	
$a^1 = a$; $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, $a \in R$, $n \in N$	$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$; $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$; $0^7 = 0$; $1^{100} = 1$; $(-1)^{99} = -1$; $(-1)^{100} = 1$

Дроби, проценты, рациональные числа

Рациональные числа

<table>
<tr><th colspan="3">Множество рациональных чисел</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Q</td><td>Z</td><td rowspan="2">Числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.
Рациональные числа — бесконечные периодические дроби. Если период состоит из одних нулей, дробь считается конечной десятичной</td></tr>
<tr><td>дроби</td></tr>
</table>

Дроби

<table>
<tr><th colspan="2">Основное свойство дроби</th></tr>
<tr><td>Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число (выражение), не равное нулю</td><td>$\frac{a(b-c)}{m(b-c)} = \frac{a}{m}$;
$\frac{25}{75} = \frac{1}{3}$; $\frac{22}{33} = \frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Сравнение дробей</th></tr>
<tr><td>Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, числитель которой больше</td><td>$\frac{7}{13} < \frac{11}{13}$, т. к. $7 < 11$</td></tr>
<tr><td>Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше</td><td>$\frac{11}{21} < \frac{11}{15}$, т. к. $21 > 15$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Сложение и вычитание</th></tr>
<tr><td>Если знаменатели равны, то числители складываются (вычитаются), а знаменатели сохраняются</td><td>$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$;
$\frac{13}{21} - \frac{7}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

Если знаменатели разные, то сначала дроби приводят к наименьшему общему знаменателю, а потом складывают (вычитают) как дроби с одинаковыми знаменателями	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$; $\frac{3}{7} + \frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 4 \cdot 7}{7 \cdot 9} = \frac{27 + 28}{63} = \frac{55}{63}$
При сложении (вычитании) смешанных чисел можно сложить (вычесть) их целые и дробные части	$5\frac{1}{8} + 1\frac{5}{6} = 5 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{5}{6} =$ $= 6 + \frac{3 + 20}{24} = 6\frac{23}{24}$
Умножение дробей	
При умножении дробей перемножают их числители и знаменатели	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$
При умножении смешанных чисел их сначала превращают в неправильные дроби, а потом перемножают	$2\frac{2}{5} \cdot 7\frac{3}{8} = \frac{12}{5} \cdot \frac{59}{8} = \frac{177}{10} = 17\frac{7}{10}$
Деление дробей	
При делении двух дробей деление заменяют умножением делимого на дробь, обратную делителю	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; $5\frac{1}{3} : 1\frac{5}{9} = \frac{16}{3} : \frac{14}{9} =$ $= \frac{16 \cdot 9}{3 \cdot 14} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$
Возведение дроби в степень	
При возведении дроби в степень возводят числитель и знаменатель дроби в эту степень	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$; $\left(1\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25}$

Проценты

Проценты	
Процент — это сотая часть некоторого числа (которое принимается за единицу)	$1\% = \frac{1}{100}$ 1% от числа a — это $\frac{1}{100}a$
Преобразования процентов	
Чтобы выразить число в процентах, нужно его умножить на 100%	$0{,}23 = 0{,}23 \cdot 100\% = 23\%$; $0{,}07 = 0{,}07 \cdot 100\% = 7\%$; $5 = 5 \cdot 100\% = 500\%$
Чтобы записать проценты в виде числа, нужно число, стоящее перед знаком $\%$, разделить на 100	$13\% = 13 : 100 = 0{,}13$; $2\% = 2 : 100 = 0{,}02$; $123\% = 123 : 100 = 1{,}23$
Нахождение процента от числа	
$p\%$ от числа a равно: $\frac{p}{100} \cdot a$	20% от числа 120 равно: $\frac{20 \cdot 120}{100} = 24$
Нахождение числа по данному проценту	
Если $p\%$ от некоторого числа равно m, то всё число a равно: $a = \frac{m \cdot 100}{p}$	Если 15% от некоторого числа равно 45, то всё число равно: $\frac{45 \cdot 100}{15} = 300$
Нахождение процентного отношения двух чисел	
Число a составляет от числа b: $\frac{a}{b} \cdot 100\%$	Число 22 составляет от числа 88: $\frac{22}{88} \cdot 100\% = 25\%$

Окончание таблицы

Увеличение (уменьшение) на $p\,\%$	
Число a увеличилось на $p\,\%$: $$a+\frac{p\ \%}{100\ \%}=a\left(1+\frac{p\ \%}{100\ \%}\right)$$	Число 110 увеличилось на $5\,\%$: $$110\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)=110\cdot 1{,}05=$$ $$=115{,}5$$
Число a уменьшилось на $p\,\%$: $$a-\frac{p\ \%}{100\ \%}=a\left(1-\frac{p\ \%}{100\ \%}\right)$$	Число 110 уменьшилось на $5\,\%$: $$110\cdot\left(1-\frac{5}{100}\right)=110\cdot 0{,}95=$$ $$=104{,}5$$
Формула сложных процентов	
Если A_0 — начальный капитал (вклад), p — годовой процент, n — количество лет, то в конце n-го года капитал составит: $$A_n=A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$	Если начальный капитал — 5 000 и годовой процент — 6, то в конце 3-го года капитал составит: $$5000\cdot\left(1+\frac{6}{100}\right)^3\approx 5955$$

Степень с целым показателем

Степень с целым показателем	
$a^0=1,\ a\neq 0;$ 0^0 — не определено; $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n},\ a\geq 0,\ n\in Z$	$(-3)^{-3}=\dfrac{1}{(-3)^3}=-\dfrac{1}{27};$ $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4};$ $1{,}3^{-2}=\left(\dfrac{13}{10}\right)^{-2}=\left(\dfrac{10}{13}\right)^2=\dfrac{100}{169}$

Основные свойства степени

Умножение степеней	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^2 = 4;$ $8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2};$ $5^{\sqrt{3}} \cdot 5^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
Деление степеней	
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$5^{-2} : 5^{-5} = 5^{-2-(-5)} = 5^{-2+5} = 5^3 = 125;$ $3^{2\sqrt{3}} : 3^{\sqrt{3}} = 3^{2\sqrt{3}-\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}}$
Возведение степени в степень	
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$((-2)^2)^{-3} = (-2)^{2\cdot(-3)} = (-2)^{-6} = \frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{64};$ $\left(7^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{6}}$
Возведение в степень произведения	
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(-3ab^3c)^3 = -27a^3b^9c^3;$ $0{,}5^7 \cdot (-2)^7 = (0{,}5 \cdot (-2))^7 = (-1)^7 = -1$
Возведение в степень дроби	
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$	$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$

Корень степени $n > 1$ и его свойства

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число b, квадрат которого равен a: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^2 = a \end{cases}$	$\sqrt{36} = 6$, т. к. $6^2 = 36$, $6 > 0$; $\sqrt{25} \neq 8$, т. к. $8^2 \neq 25$; $\sqrt{25} \neq (-5)$, т. к. $-5 < 0$; $\sqrt{-3}$ — не определён

Тождества	
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $a \geq 0$	$\left(\sqrt{121}\right)^2 = 121$; $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$
$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$, $a \in R$	$\sqrt{3^2} = \lvert 3 \rvert = 3$; $\sqrt{(-21)^2} = \lvert -21 \rvert = 21$; $\sqrt{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2} = \left\lvert \sqrt{2} - \sqrt{3} \right\rvert = -\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
Основные свойства корня степени n	
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ $\sqrt{ab} = \sqrt{\lvert a \rvert} \cdot \sqrt{\lvert b \rvert}$	$\sqrt{0,001} \cdot \sqrt{0,4} = \sqrt{0,001 \cdot 0,4} = \sqrt{0,0004} = 0,02$; $\sqrt{121 \cdot 625 \cdot 100} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{625} \cdot \sqrt{100} = 11 \cdot 25 \cdot 10 = 2750$
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \left\lvert \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right\rvert$	$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$; $\sqrt{\dfrac{144}{169}} = \dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}} = \dfrac{12}{13}$
$\left(\sqrt{a}\right)^p = \sqrt{a^p}$; $\sqrt{a^p} = \left(\sqrt{\lvert a \rvert}\right)^p$	$\sqrt{9^3} = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$

Окончание таблицы

Если $a > 1$, то $a > \sqrt{a}$ и $\sqrt{a} > 1$; если $0 < a < 1$, то $a < \sqrt{a}$ и $0 < \sqrt{a} < 1$	$7 > \sqrt{7}$ и $\sqrt{7} > 1$; $\frac{1}{3} < \sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{3}} < 1$
Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$	$\sqrt{3} > \sqrt{2}$, т. к. $3 > 2$

Арифметические корни n-й степени при $n \geq 2$, $n \in N$

Арифметическим корнем n-й степени ($n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$) из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b, n-я степень которого равна a: $\left.\begin{matrix}\sqrt[n]{a} = b \\ n \in N,\ a \geq 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$	$\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[5]{0,00001} = 0,1$; $\sqrt[5]{1024} = 4$; $\sqrt[3]{0,027} = 0,3$
Если $a < 0$, то $\sqrt[2n-1]{a} = -\sqrt[2n-1]{a}$	$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$; $\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-2\right)^3} = -\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3} = -\left(2-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-2$
Корень чётной степени из отрицательного числа не определён	
Тождества	
Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert$, $a \in R$; $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}} = a$, $a \in R$;	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^4 = 5$; $\left(\sqrt[5]{-2}\right)^5 = -2$; $\sqrt[6]{(-2)^6} = \lvert -2 \rvert = 2$; $\sqrt[7]{(-3)^7} = -3$

Основные свойства арифметического корня n-й степени	
$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \ge 0,\ m \in Z,\ n \in N$	$\sqrt[6]{8^8} = \sqrt[3]{8^4} = 2^4 = 16;$ $\sqrt[12]{m^3} = \sqrt[4]{m}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $a \ge 0,\ n \in N,\ n \ne 1$	$\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3};$ $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $a \ge 0,\ k \in N$	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $n \in N,\ n \ge 2,\ a \ge 0,\ b \ge 0$	$\sqrt[4]{16 \cdot 625} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{625} = 2 \cdot 5 = 10;$ $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $n \in N,\ n \ge 2,\ a \ge 0,\ b > 0$	$\sqrt[3]{\dfrac{125}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{5}{3};$ $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\dfrac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$
Если $a > b \ge 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$; если $a > 1$, то $\sqrt[n]{a} > 1$ и $\sqrt[n]{a} < a$; если $0 < a < 1$, то $0 < \sqrt[n]{a} < 1$; $\sqrt[n]{a} > a$	$\sqrt[7]{5} > \sqrt[7]{3}$, т. к. $5 > 3$; $\sqrt[5]{2} > 1,\ \sqrt[5]{2} < 2;$ $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} < 1,\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} > \dfrac{1}{2}$

Степень с рациональным показателем и её свойства

Степень с рациональным показателем	
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \ne 0,\ m \in Z,\ n \in N,$ $n > 2$	$36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6;\ 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = 3^2 = 9;$ $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2;\ 32^{-\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{32^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{32^2}} = \dfrac{1}{4}$

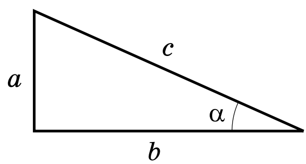
Свойства степени с действительным показателем

Степень с иррациональным показателем	
a^k, где k — иррациональное число, $a \neq 0$	$10^{\sqrt{2}} \approx 10^{1,4142...} \approx 25,9$

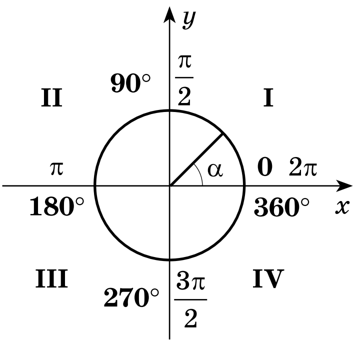
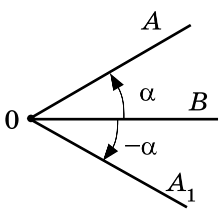
ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла

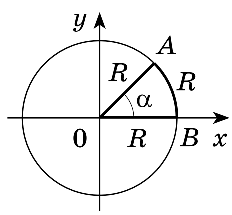
Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника

	a, b — катеты; c — гипотенуза; α — острый угол
Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе	$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$
Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$
Тангенсом угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$
Котангенсом угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$

Углы в тригонометрии

	Оси координат Ox и Oy разбивают окружность на четыре четверти: I четверть: $0° < \alpha < 90°$; II четверть: $90° < \alpha < 180°$; III четверть: $180° < \alpha < 270°$; IV четверть: $270° < \alpha < 360°$
 $\angle AOB=\alpha$; $\angle A_1OB=-\alpha$	В тригонометрии угол рассматривается как фигура, образованная вращением луча вокруг своей начальной точки O. Вращение **против** часовой стрелки — **положительное, по часовой — отрицательное**

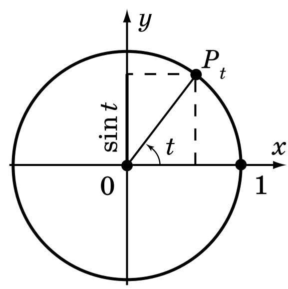
Радианная мера угла

Углы измеряются в градусах и радианах	
$1°$ — это угол, который равен $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла. $1°=60'$ (60 минут) $1'=60''$ (60 секунд) $1° = \frac{\pi}{180°}$ $n° = \frac{\pi \cdot n}{180°}$ $135° = \frac{\pi \cdot 135°}{180°} = \frac{3\pi}{4}$	 $\smile AB=R$, $\alpha=1$ 1 радиан — это центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная радиусу этой окружности. $1 \text{ радиан} = \frac{180°}{\pi}$

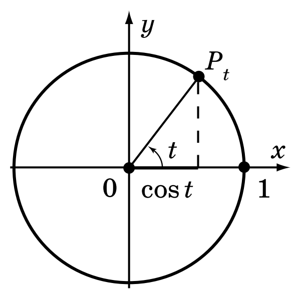
Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Синус, косинус, тангенс и котангенс числа

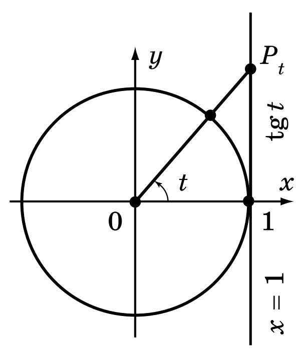
Синусом ($\sin t$) числа t называется ордината точки P_t единичной окружности.
Наименьший положительный период $T=2\pi$



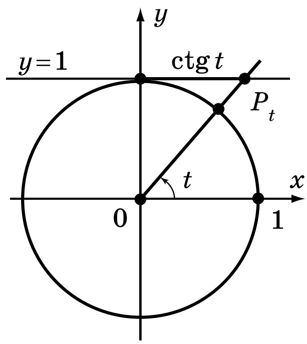
Косинусом ($\cos t$) числа t называется абсцисса точки P_t единичной окружности.
Наименьший положительный период $T=2\pi$



Тангенсом ($\operatorname{tg} t$) числа t называют отношение $\sin t$ и $\cos t$.
Ось тангенсов — прямая $x=1$.
$\operatorname{tg} t$ — ордината соответствующей точки оси тангенсов: $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.
Наименьший положительный период $T=\pi$



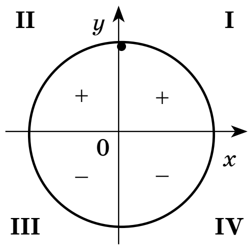
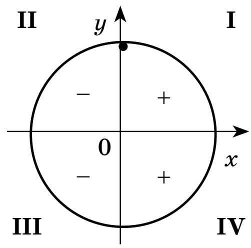
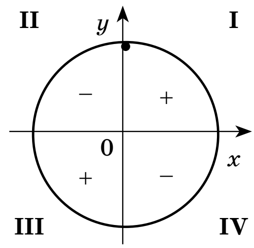
Окончание таблицы

Котангенсом (ctg$t$) числа t называют отношение cos$t$ и sin$t$. Ось котангенсов — прямая $y=1$. ctg$t$ — абсцисса соответствующей точки оси котангенсов: $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$. Наименьший положительный период $T=\pi$	

Значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

t, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t, градусы	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
sin$t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos$t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg$t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
ctg$t$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса

<table>
<tr><td>$\sin t$</td><td>$\cos t$</td><td>$\operatorname{tg} t$ / $\operatorname{ctg} t$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Основные тригонометрические тождества

<table>
<tr><td colspan="2">$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$</td><td colspan="2">$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$</td><td colspan="2">$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$,
$\alpha \in R$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$,
$a \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$</td><td colspan="3">$\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$,
$a \neq \pi n$, $n \in Z$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, $n \neq \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$,
$a \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$</td><td colspan="3">$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$,
$a \neq \pi n$, $n \in Z$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Сумма и разность тригонометрических фукций</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}$;
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}$;
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2}$;
$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2}$</td></tr>
</table>

Произведение тригонометрических функций

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta};$$

$$\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta};$$

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$$

Формулы приведения

t	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin t$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos t$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\,t$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\,t$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$

Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta},\ \alpha,\ \beta,\ a\pm b\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta\mp 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta},\ \alpha,\ \beta,\ a\pm b\neq\pi n,\ n\in Z$$

Синус и косинус двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$$

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \qquad 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

ЛОГАРИФМЫ

Логарифм числа

Логарифмом числа *b* по основанию *a* называется показатель степени, в которую нужно возвести число *a*, чтобы получить число *b*	
Обозначается: $\log_a b$ $a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0$	**Читается:** логарифм *b* по основанию *a*

Показательное равенство		**Логарифмическое равенство**
$a^x = b$		$x = \log_a b$
x — показатель степени;	$\Leftrightarrow$	*x* — логарифм числа *a* по основанию *b*;
a — основание степени;		*a* — основание логарифма;
b — степень числа *a*		*b* — число, стоящее под знаком логарифма

$$2^7 = 128 \Leftrightarrow \log_2 128 = 7;$$

$$\log_3 = \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9};\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 125 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$$

Основное логарифмическое тождество	
$a^{\log_a b} = b$, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$	$5^{\log_5 3} = 3$; $3^{\log_3 5} = 5$; $10^{\lg 7} = 7$; $e^{\ln 3} = 3$
$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$, $a > 0,\ a \neq 1$	$\log_3 1 = 0$; $\lg 1 = 0$; $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 1$; $\ln 1 = 0$

Логарифм произведения, частного, степени

Логарифм произведения	
$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$ $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,$ $c \neq 1$	$\log_8 2 + \log_8 4 =$ $= \log_8 2 \cdot 4 = \log_8 8 = 1$; $\log_3 18 = \log_3(9 \cdot 2) =$ $= \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$
Логарифм частного	
$\log_c \dfrac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$, $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,$ $c \neq 1$	$\log_3 15 - \log_3 5 = \log_3 \dfrac{15}{5} = \log_3 3 = 1$; $\log_2 \dfrac{2}{7} = \log_2 2 - \log_2 7 = 1 - \log_2 7$
Логарифм степени	
$\log_c a^k = k \log_c a$; $a > 0,\ c > 0,\ c \neq 1,$ $k \in \mathrm{R}$	$\log_3 3^{10} = 10 \log_3 3 = 10$; $\lg 10^p = p \lg 10 = p$; $3 \log_8 4 = \log_8 4^3 = \log_8 64 = 2$
$\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$, $a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,$ $m,\ n \in \mathrm{R},\ m \neq 0$	$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \dfrac{3}{2} \log_5 5 = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

Переход к новому основанию	
$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$; $a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1$	$\log_a b = \dfrac{\lg b}{\lg a}$; $\log_3 7 = \dfrac{\ln 7}{\ln 3}$
$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$	$\log_{36} 6 = \dfrac{1}{\log_6 36} = \dfrac{1}{2}$
$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$; $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1$	$8^{\log_2 5} = 5^{\log_2 8} = 5^3 = 125$
Сравнение логарифмов	
Если $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$ (знак неравенства не меняется)	$2 < 3$, $\lg 2 < \lg 3$
Если $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$ (знак неравенства меняется)	$2 < 3$, $\log_{0,5} 2 > \log_{0,5} 3$

Десятичный и натуральный логарифм, число *e*

Логарифмы по основанию 10 называют **десятичными**: $\log_{10} a = \lg a$	$\lg 10 = 1$; $\lg 0{,}1 = -1$; $\lg 100 = 2$; $\lg 0{,}01 = -2$; $\lg 1000 = 3$; $\lg 0{,}001 = -3$
Логарифмы по основанию e называют **натуральными**: $\log_e a = \ln a$. $e = 2{,}718281...$ — иррациональное число; $e \approx 2{,}7$	$\ln e = 1$; $\ln \dfrac{1}{e} = -1$; $\ln e^2 = 2$; $\ln \dfrac{1}{e^2} = -2$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

Преобразование выражений, включающих арифметические операции

Числовые выражения. Действия с десятичными дробями	
Сложение и вычитание десятичных дробей: а) уравнять количество знаков после запятой, записать запятую под запятой; б) выполнить сложение, вычитание, не обращая внимания на запятую; в) поставить в ответе запятую под запятой	$0{,}37+26{,}5=26{,}87$ $\begin{array}{r} 0{,}37 \\ +\,26{,}50 \\ \hline 26{,}87 \end{array}$ $37-0{,}075=36{,}925$ $\begin{array}{r} 37{,}000 \\ -\,0{,}075 \\ \hline 36{,}925 \end{array}$
Умножение десятичных дробей: а) выполнить действие, не обращая внимания на запятую; б) отделить в произведении столько знаков, сколько их имеется после запятой в обоих множителях вместе	$\begin{array}{r} 0{,}\overset{\frown}{215} \\ \times\,0{,}03 \\ \hline 0{,}\overset{\frown}{00}\overset{\frown}{645} \end{array}$ $\begin{array}{r} 15 \\ \times\,0{,}\overset{\frown}{003} \\ \hline 0{,}045 \end{array}$
Деление десятичных дробей: 1. *На натуральное число:* а) разделить дробь на число, не обращая внимания на запятую; б) поставить в частном запятую после того, как закончено деление целой части; в) если целая часть меньше делителя, то частное начинается с нуля целых. 2. *На десятичную дробь*: в делимом и делителе запятую перенести на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, и выполнить деление десятичной дроби на натуральное число	$\begin{array}{r\|l} 30{,}6 & 9 \\ \cline{2-2} -27 & 3{,}4 \\ \hline 36 & \\ -36 & \\ \hline 0 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 3{,}56 & 4 \\ \cline{2-2} -32 & 0{,}89 \\ \hline 36 & \\ -36 & \\ \hline 0 & \end{array}$ $8{,}46:0{,}6=84{,}6:6=14{,}1;$ $0{,}00612:0{,}03=$ $=0{,}612:3=0{,}204;$ $27:0{,}15=2700:15=180$

Арифметические действия с рациональными числами	
Сложение чисел с одинаковыми знаками: сложить модули данных чисел, перед суммой поставить общий знак	а) $(-6)+(-3,7)=-(6+3,7)=-9,7$; б) $-5\frac{7}{8}+\left(-6\frac{3}{4}\right)=-\left(5\frac{7}{8}+6\frac{6}{8}\right)=$ $=-11\frac{13}{8}=-12\frac{5}{8}$
Сложение чисел с разными знаками: модуль суммы равен разности модулей слагаемых, знак суммы совпадает со знаком слагаемого, имеющего больший модуль	а) $4+(-10)=-(10-4)=-6$; б) $5,6+(-4,1)=5,6-4,1=1,5$
Вычитание чисел: чтобы вычесть из числа a число b, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому: $a-b=a+(-b)$	а) $-7-3=-7+(-3)=-10$; б) $-5-(-11,3)=-5+11,3=6,3$; в) $10-25=10+(-25)=-15$
Умножение и деление чисел: а) произведение (частное) чисел **одного знака** есть число **положительное;**	$-6\cdot(-2,1)=12,6$; $-22:\left(-\frac{11}{17}\right)=\frac{22\cdot17}{11}=34$;
б) произведение (частное) двух чисел с **разными знаками** есть число **отрицательное**	$24:(-3)=-8$; $-5:8=-\frac{5}{8}$

Правила раскрытия скобок в числовых выражениях и выражениях с переменной	
1. Если перед скобками стоит **знак «+»**, то, раскрывая скобки, можно: а) опустить скобки и знак «+»; б) записать слагаемые, стоящие в скобках, сохранив их знаки; в) если первое слагаемое, стоящее в скобках, записано без знака, то его нужно записать со знаком «+»	а) $-7{,}21+(3{,}5+7{,}21)=$ $=-7{,}21+3{,}5+7{,}21=3{,}5$; б) $3{,}7+(-2{,}3+5)=$ $=3{,}7-2{,}3+5=6{,}4$; в) $a+(b-2a)=a+b-2a=$ $=b-a$; г) $3x+(-x+2y)=$ $=3x-x+2y=2x+2y$
2. Если перед скобками стоит **знак «–»**, то, раскрывая скобки, можно: а) опустить скобки и знак «–»; б) записать слагаемые, стоящие в скобках, поменяв знаки всех слагаемых на противоположные; в) если первое слагаемое, стоящее в скобках, записано без знака, то его нужно записать со знаком «–»	а) $-2{,}5-(5{,}6+2{,}5)=$ $=-2{,}5-5{,}6-2{,}5=-10{,}6$; б) $-7{,}8-(-3{,}2-6{,}8)=$ $=-7{,}8+3{,}2+6{,}8=2{,}2$; в) $a-(b-2a)=a-b+2a=$ $=3a-b$; г) $3x-(-x+2y)=$ $=3x+x-2y=4x-2y$

Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень

Формулы сокращённого умножения	
Квадрат суммы	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
Куб суммы	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3a^2b+b^3$
Куб разности	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
Сумма кубов	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
Разность квадратов	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
Разность кубов	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень	
Произведение степеней с одинаковыми основаниями	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$
Частное степеней с одинаковым показателем	$a^p : a^q = a^{p-q}$; $a^{p-q} = a^p : q^q = \dfrac{a^p}{a^q}$
Степень степени	$(a^p)^q = a^{pq}$; $a^{pq} = (a^p)^q = (a^q)^p$
Степень произведения и частного	$(ab)^p = a^p \cdot b^p$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$; $a^p \cdot b^p = (ab)^p$; $\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$

Сравнение степеней	
Основания различны	**Основания одинаковы**
Если $0 < a < b$, то $a^r < b^r$ при $r > 0$, $a^r > b^r$ при $r < 0$, r — рациональное число	Если $r > p$, то $a^r > a^p$ при $a > 1$, $a^r < a^p$ при $0 < a < 1$, r, p — рациональные числа

Преобразование выражений, включающих корни натуральной степени

Корень из произведения и произведение корней	Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
Корень из частного, частное корней	Если $a \geq 0$, $b > 0$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ и $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $n \in N$

Окончание таблицы

Корень из степени и степень из корня	Если $a > 0$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $n \in N$, $n \geq 2$; $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$
Корень степени m из корня степени n	Если $a \geq 0$, то $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $m \geq 2$, $n \geq 2$, $m, n \in N$

Тождественные преобразования иррациональных выражений	
Вынесение множителя из-под знака корня	$\sqrt[n]{a^{n+m}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^m} = a\sqrt[n]{a^m}$, $n \in N$, $n \geq 2$, $a \geq 0$
Внесение множителя под знак корня	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$
Приведение подкоренного выражения к целому виду (иррациональность в знаменателе)	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b^k}} = \sqrt[n]{\dfrac{ab^{n-k}}{b^k b^{n-k}}} = \sqrt[n]{\dfrac{ab^{n-k}}{b^n}} = \dfrac{1}{b}\sqrt{ab^{n-k}}$, $a \geq 0$, $b > 0$
Действия с корнями различных показателей	а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^2 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^6} = 2$; б) $\sqrt[3]{18} : \sqrt{6} = \sqrt[6]{18^2} : \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{\dfrac{3^4 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 3^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{3}{2}}$; в) $\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} =$ $= \sqrt[4]{\left(4+\sqrt{7}\right)^2}\sqrt[4]{\left(23-8\sqrt{7}\right)} =$ $= \sqrt[4]{\left(16+8\sqrt{7}+7\right)\left(23-8\sqrt{7}\right)} =$ $= \sqrt[4]{\left(23+8\sqrt{7}\right)\left(23-8\sqrt{7}\right)} =$ $= \sqrt[4]{529-448} = \sqrt[4]{81} = 3$
Формула двойного радикала	$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

Преобразование тригонометрических выражений

Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

Формулы	Примеры
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$ $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$ $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1;$ $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha};$ $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	**Упрощение выражений** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=$ $=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha}=$ $=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$

Тождество

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Доказательство:

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\dfrac{\cos\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha(1-\sin^2\alpha)}=\frac{2\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos^2\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$$

Формулы сложения	
$\sin(\alpha\pm\beta)=$ $=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha\pm\beta)=$ $=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	**Вычисление значений выражений** $\cos105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=$ $\cos60^\circ\cos45^\circ-\sin60^\circ\sin45^\circ=$ $=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt2}{2}-\dfrac{\sqrt3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt2}{2}=\dfrac{\sqrt2-\sqrt6}{4}$

Формулы сложения
Упрощение выражений $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+$ $+\sin\alpha\sin\beta = 2\cos\alpha\cos\beta$

Формулы двойного угла	
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha =$ $=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	**Нахождение тригонометрических функций двойного угла** $\sin\alpha = -0{,}6$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$; $\sin 2\alpha$ — ? $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} =$ $= -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8$, т. е. $\cos\alpha<0$, т. к. $180^\circ<\alpha<270^\circ$. $\sin 2\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$
Упрощение выражений а) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) =$ $= 2\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$; б) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha-(1-\operatorname{tg}\alpha)}{(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)} = \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha-1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} =$ $= \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$	

Формулы приведения	
Для преобразования выражений вида: $\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)$; $\cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)$; $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)$; $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)$, $n \in Z$ используются правила:	**Нахождение значений выражений** а) $\sin\dfrac{8\pi}{3} = \sin\left(2\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right) =$ $= \sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right) =$ $= \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Окончание таблицы

а) перед приведённой функцией ставится знак исходной функции в этой четверти; б) функция не меняется на кофункцию, если n — чётное; меняется, если n — нечётное (кофункциями $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ являются $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ соответственно)	б) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\operatorname{ctg} 330^\circ = \operatorname{ctg}(270^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$
Упрощение выражений	
$\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi+\alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - \cos\alpha}{-\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = 1$	

Сумма и разность тригонометрических функций
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$; $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
Преобразование суммы в произведение
$\cos 40^\circ + \cos 10^\circ = 2\cos\frac{40^\circ+10^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ-10^\circ}{2} = 2\cos 25^\circ \cos 15^\circ$

Окончание таблицы

Упрощение выражений
$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Дополнительные тригонометрические формулы
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$; $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$; $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$; $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$; $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; $\sin\alpha+\cos\beta=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования

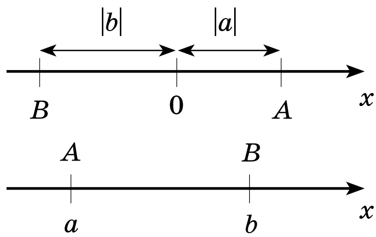
Логарифм произведения и сумма логарифмов	$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$; $\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$, $x>0,\ y>0,\ a>0,\ a\neq 1$
Логарифм частного и разность логарифмов	$\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$; $\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$, $x>0,\ y>0,\ a>0,\ a\neq 1$

Окончание таблицы

Логарифм степени и произведение числа и логарифма	$\log_a x^n = n \log_a x$; $\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x$, $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ k \neq 0$; $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$, $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ k \neq 0$
Формула перехода к новому основанию	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0$; $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
Основное логарифмическое тождество	$a^{\log_a b} = b$, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$

Логарифмирование и потенцирование	
Нахождение логарифмов чисел или выражений называется **логарифмированием**	$x = \frac{3x^7\sqrt{y}}{2b^3}$, $x > 0,\ y > 0,\ b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$\log_a x = \log_a \frac{3x^7\sqrt{y}}{2b^3} = \log_a 3 + \log_a x^7 + \log_a \sqrt{y} - (\log_a 2 + \log_a b^3) =$ $= \log_a 3 + 7\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \log_a 2 - 3\log_a b$	
Нахождение чисел или выражений по данным логарифмам называется **потенцированием**	$\lg x = \lg 5 - 3\lg 2 + \frac{1}{2}\lg 9$; $\lg x = \lg 5 - \lg 2^3 + \lg\sqrt{9}$; $\lg x = \lg\frac{5\cdot\sqrt{9}}{2^3}$; $\lg x = \lg\frac{15}{8}$; $x = \frac{15}{8}$

Модуль (абсолютная величина) числа

$\lvert a\rvert = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0; \\ -a, \text{ если } a < 0; \\ 0, \text{ если } a = 0 \end{cases}$	$\lvert 3{,}7\rvert = 3{,}7$; $\left\lvert -\dfrac{2}{3}\right\rvert = \dfrac{2}{3}$; $\lvert 0\rvert = 0$
	Если точка A имеет на числовой прямой координату a, то расстояние от точки A до точки O равно $\lvert a\rvert$, т. е. $AO = \lvert a\rvert$. Расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ на прямой равно $\lvert a-b\rvert$
Свойства модуля	
$\lvert a\rvert \ge 0$ $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$ $a \le \lvert a\rvert$ $\lvert a+b\rvert \le \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ $\lvert a+b\rvert \ge \lvert a\rvert - \lvert b\rvert$ $\lvert a-b\rvert \ge \lvert\lvert a\rvert - \lvert b\rvert\rvert$ $\lvert a-b\rvert \le \lvert\lvert a\rvert + \lvert b\rvert\rvert$	$\left\lvert \dfrac{a}{b}\right\rvert = \dfrac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$, $b \ne 0$ $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$ $\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$, $n \in N$ $\lvert a\rvert^2 = a^2$; $\lvert a\rvert^{2k} = a^{2k}$ $\lvert a_1 + a_2 + \ldots + a_n\rvert \le \lvert a_1\rvert + \lvert a_2\rvert + \ldots + \lvert a_n\rvert$
По определению модуля $\lvert x\rvert = \begin{cases} x, \text{ если } x \ge 0; \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$	$\lvert a-2\rvert = \begin{cases} a-2, \text{ если } a-2 \ge 0; \\ -(a-2), \text{ если } a-2 < 0, \end{cases}$ т. е. $\lvert a-2\rvert = \begin{cases} a-2, \text{ если } a \ge 2; \\ -a+2, \text{ если } a < 2 \end{cases}$

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

УРАВНЕНИЯ

Квадратные уравнения

Квадратное уравнение — это уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа	$2x^2+5x-4=0$ $a=2$ — первый коэффициент; $b=5$ — второй коэффициент; $c=-4$ — свободный член
Если $a=1$, то уравнение $x^2+bx+c=0$ называется **приведённым**	$x^2-6c+8=0$
Если в уравнении $b=0$ и (или) $c=0$, то уравнение называют **неполным.** $ax^2+bx=0$; $ax^2+c=0$; $ax^2=0$	$2x^2+3x=0$; $x^2-4=0$; $-5x^2=0$

Решение неполных квадратных уравнений

<table>
<tr><th colspan="2">Виды уравнений</th><th colspan="2">Примеры</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\boxed{c=0}$
$ax^2+bx=0$
$x(ax+b)=0$
$x_1=0$;
$x_2=-\frac{b}{a}$</td><td colspan="2">$2x^2-7x=0$
$x(2x-7)=0$
$x=0$ или $2x-7=0$
$x_1=0$;
$x_2=3{,}5$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boxed{b=0}$
$ax^2+c=0$
$ax^2=-c$:</td><td rowspan="2">а) $3x^2-9=0$
$3x^2=9$
$x^2=3$
$x_1=\sqrt{3}$;
$x_2=-\sqrt{3}$</td><td rowspan="2">б) $x^2+16=0$
$x^2=-16$
корней нет</td></tr>
<tr><td>а) $c>0$,
корней нет;</td><td>б) $c<0$,
$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

$\boxed{b = 0,\ c = 0}$ $ax^2 = 0$ $x = 0$	$7x^2 = 0$ $x^2 = 0$ $x = 0$

Решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c = 0$ по формуле

$D = b^2-4ac$	Корни уравнения
$D > 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$D = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$
$D < 0$	корней нет
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	

Частные формулы для решения квадратных уравнений	
Квадратное уравнение **с чётным вторым коэффициентом**	$ax^2+2kx+c = 0\ (b = 2k)$ $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$
Приведённое квадратное уравнение с чётным вторым коэффициентом	$x^2+2kx+c = 0\ (a = 1,\ b = 2k)$ $x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c}$
Квадратный трёхчлен	
Квадратный трёхчлен — это многочлен второй степени	$ax^2+bc+c\ (a \neq 0)$
Корень квадратного трёхчлена ax^2+bx+c	число x_0, для которого $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$
Корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Теорема Виета	
Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, то $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ Если x_1 и x_2 — корни квадратного приведённого трёхчлена x^2+bx+c, то $x_1+x_2=-b$; $x_1\cdot x_2=c$	
Разложение квадратного трёхчлена на множители	
Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, то выполняется равенство $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	$2x^2-x-3$ имеет корни $x_1=1{,}5$ и $x_2=-1$, тогда $2x^2-x-3=2(x-1{,}5)(x+1)=$ $=(2x-3)(x+1)$

Уравнения, сводящиеся к квадратным

Рациональные уравнения — уравнения, в которых левая и правая части представлены рациональными выражениями

Целые — левая и правая части — целые выражения.

$3(x-1)=x+3$; $\frac{1}{3}x=\frac{x-2}{2}$

Дробные — уравнения, у которых хотя бы одна часть — дробное выражение.

$\frac{2x+1}{x}=4$ или $\frac{x}{x-1}=\frac{3}{x+1}$

Рациональные уравнения

Уравнение — равенство, содержащее переменную	$3x=0$; $x^2+3=8$; $x(x-2)=7$
Корень уравнения (решение) — значение переменной, при подстановке которой в уравнение получается верное равенство	$x^3+x=0$ — один корень: $x=0$; $(x-1)(x+2)=0$ — два корня: $x=1$ и $x=-2$;

Окончание таблицы

	$\sin x = \frac{1}{2}$ — бесчисленное множество корней; $x^2+x+1=0$ — нет корней; $x^2+2x+1=(x+1)^2$ — бесчисленное множество корней, $x \in R$
Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет	$2x-7=3$; $x=5$ $2x-1=2x$; корней нет
Равносильные уравнения — уравнения, имеющие одни и те же корни или не имеющие корней	$x-3=6$ и $\frac{x^2+81}{x+9}=0$

Свойства уравнений	
Если из одной части уравнения перенести слагаемые в другую часть и при этом изменить знак слагаемых на противоположный, получим уравнение, равносильное данному. При делении (умножении) обеих частей уравнения на одно и то же число, неравное нулю, получим уравнение, равносильное данному	$-2(2x-3)+3=17$; $-4x+6+3=17$; $-4x=17-6-3$; $-4x=8$; $x=8:(-4)$; $x=-2$

Линейные уравнения $ax=b$ (приводимые к виду $ax=b$)

$a \neq 0$	$a = b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
один корень $x = \frac{b}{a}$	бесчисленное множество корней $x \in R$	корней нет

$a \neq 0$	$a = b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
$2x = -7;\ x = -\frac{7}{2};$ $x = -3{,}5$	$0 \cdot x = 0;$ $x \in R$	$0 \cdot x = 7;$ корней нет

Дробно-рациональные уравнения

Алгоритм решения	Пример
1. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение. 2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель. 3. Решить полученное целое уравнение. 4. Исключить из его корней те, которые обращают знаменатель в нуль	$\frac{x-2}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{-3}{x(x-3)}$ *Решение.* Общий знаменатель: $x(x-3)$. Умножим на него обе части ($x \neq 0$ и $x \neq 3$): $\frac{(x-2)\cdot x(x-3)}{x-3} + \frac{1 \cdot x(x-3)}{x} =$ $= -\frac{3x(x-3)}{x(x-3)};$ $(x-2)x + x - 3 = -3;\ x^2 - x = 0;$ $x_1 = 0;\ x_2 = 1;$ но $x \neq 0$. *Ответ*: 1

Целые уравнения высших степеней, сводящиеся к квадратным

Метод решения	Пример
Разложение многочлена на множители	$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0;$ $x^2(x-1) - 9(x-1) = 0;$ $(x-1)(x^2-9) = 0;$ $(x-1)(x-3)(x+3) = 0;$ $x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ x_3 = -3$
Замена переменной	Биквадратное уравнение: $x^4 + 5x^2 - 36 = 0.$ *Решение.* Сделаем замену: $x^2 = t$. $t^2 + 5t - 36 = 0;\ t_1 = 4;\ x^2 = 4;$ $x_{1,2} = \pm 2;\ t_2 = -9;\ x^2 = -9;$ уравнение корней не имеет. *Ответ*: -2; 2

Иррациональные уравнения

Уравнение, в котором переменная находится под знаком корня, называется **иррациональным**	$\sqrt{x+3}=4$; $\sqrt[3]{x}=\sqrt{x}+2$
Особенности решения иррациональных уравнений	
1. У уравнения корни чётной степени — арифметические, поэтому значение корня и подкоренное выражение неотрицательно. 2. Решение уравнения начинают с нахождения области определения (**область определения** (или область допустимых значений) — это множество всех действительных чисел x, при которых одновременно имеют смысл все выражения, входящие в уравнение)	
Основные методы решения иррациональных уравнений	
Возведение обеих частей уравнения в степень	**Пример.** $\sqrt{9-x}=x+3$ *Решение.* Область определения функции: $9-x\geq 0,\ x\leq 9.\ \left(\sqrt{9-x}\right)^2=(x+3)^2$; $9-x=x^2+6x+9$; $x(x+7)=0;\ x_1=0;\ x_2=-7.$ Проверка показала, что $x=-7$ — посторонний корень. *Ответ*: 0
«Изоляция» корня	**Пример.** $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$ *Решение.* ОДЗ: $\begin{cases}x+2\geq 0;\\3-x\geq 0,\end{cases}\ x\in[-2;\ 3].$ $\sqrt{x+2}=3-\sqrt{3-x}$; $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=\left(3-\sqrt{3-x}\right)^2$;

Окончание таблицы

	$x+2=9-6\sqrt{3-x}+3-x$; $5-x=3\sqrt{3-x}$; $25-10x+x^2=9(3-x)$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$; $x_2=2$. Проверка показала, что оба корня являются корнями уравнения. *Ответ*: -1; 2
Уравнение вида $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[m]{g(x)}$ возводят в степень, k — наименьшее общее кратное чисел m и n	**Пример.** $\sqrt{x-1}=\sqrt[3]{x+3}$ *Решение.* ОДЗ: $x\ge 1$. Возведём обе части уравнения в шестую степень: $\left(\sqrt{x-1}\right)^6=\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^6$; $(x-1)^3=(x+3)^2$; $x^3-4x^2-3x-10=0$. Подбором находим $x=5$. $(x-5)(x^2+x+2)=0$; $x^2+x+2=0$ — корней не имеет. Проверка показала, что $x=5$ — корень уравнения. *Ответ*: 5

Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения

$\boxed{\sin x=a}$ $\lvert a\rvert>1$ — корней нет; $\lvert a\rvert\le 1$; $x=(-1)^n$ $\arcsin a+\pi n$, $n\in Z$; $\boxed{\sin x=0}$ $x=\pi k$, $k\in Z$;	а) $\sin x=\sqrt{3}$; корней нет, т. к. $\sqrt{3}>1$; б) $\sin x=\frac{1}{2}$; $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; в) $\sin x=-\frac{1}{2}$; $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; г) $\sin x=\frac{1}{3}$; $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in Z$;

Окончание таблицы

$\boxed{\sin x = 1}$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \notin Z;$ $\boxed{\sin x = -1}$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \notin Z$	д) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{7};$ $3x - \frac{\pi}{6} = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{7} + \pi n;$ $3x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{7} + \frac{\pi}{6} + \pi n;$ $x = (-1)^n \frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{7} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$
$\boxed{\cos x = a}$ $\|a\| > 1$ — корней нет; $\|a\| \le 1;$ $x = \pm\arccos a + 2\pi n,$ $n \in Z;$ $\boxed{\cos x = 0}$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \notin Z;$ $\boxed{\cos x = 1}$ $x = 2\pi k,\ k \in Z;$ $\boxed{\cos x = -1}$ $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$	а) $\cos x = -15$; корней нет, т. к. $\|-15\| > 1$; б) $\cos x = \frac{1}{2};\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$ в) $\cos x = -\frac{1}{2};\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$ г) $\cos x = \frac{2}{3};\ x = \pm\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$ д) $\cos x = -\frac{2}{3};$ $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{2}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$ е) $\cos\frac{x}{3} = 1;\ \frac{x}{3} = 2\pi n;\ x = 6\pi n,\ n \in Z$
$\boxed{\operatorname{tg} x = a}$ $x = \operatorname{arctg} a + \pi k,$ $k \in Z$	а) $\operatorname{tg} x = 3;\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z;$ б) $\operatorname{tg} x = -4;\ x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi n,\ n \in Z;$ в) $\operatorname{tg}\frac{x}{4} = 1;\ \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} + pn;\ x = \pi + 4\pi n,\ n \in Z$
$\boxed{\operatorname{ctg} x = a}$ $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,$ $k \in Z$	а) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}};\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z;$ б) $\operatorname{ctg} x = -3;\ x = \pi - \operatorname{arcctg} 3 + \pi k,\ k \in Z;$ в) $\operatorname{ctg} x = -1;\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

Основные методы решения тригонометрических уравнений	
Тригонометрические уравнения, приводимые к уравнениям от одной тригонометрической функции одной переменной, решаются (как правило) методом **подстановки**	
$\sin^2 x+4\cos x = 2{,}75;$ $1-\cos^2 x+4\cos^2 x = 2{,}75;$ $\cos x = t,\ \lvert t\rvert \le 1;$ $t^2-4t+1{,}75 = 0;$ $t = \frac{1}{2};\ x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in Z;$ $t = \frac{7}{2} > 1$, решений нет	$\mathrm{tg}\,x+3\,\mathrm{ctg}\,x = 4;$ $\mathrm{tg}\,x+\frac{3}{\mathrm{tg}\,x} = 4;$ $\mathrm{tg}\,x = t;\ t^2-4t+3 = 0;$ $t = 1,\ t = 3;$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4}+\pi n; \\ x = \mathrm{arctg}\,3+\pi k, \end{array}\right.\quad n,\ k \in Z$

Обратные тригонометрические функции

Определение	Свойства
Арксинусом числа a называется угол (число) из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. $\boxed{\arcsin a = \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin\varphi = a \end{cases}$ $\lvert a\rvert \le 1$	$\arcsin(-a) = -\arcsin a;$ $\sin(\arcsin a) = a;$ $\arcsin(\sin\varphi) = \varphi,$ если $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
Арккосинусом числа a называется угол (число) из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a. $\boxed{\arccos a = \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in [0; \pi] \\ \cos\varphi = a \end{cases}$ $\lvert a\rvert \le 1$	$\arccos(-a) = \pi-\arccos a;$ $\cos(\arccos a) = a;$ $\arccos(\cos\varphi) = \varphi,$ если $\varphi \in [0; \pi]$

Окончание таблицы

Арктангенсом числа a называется угол (число) из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. $\boxed{\operatorname{arctg} a = \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{tg}\varphi = a \end{cases}$	$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a;$ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a;$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi,$ если $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
Арккотангенсом числа a называется угол (число) из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a. $\boxed{\operatorname{arcctg} a = \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in (0; \pi) \\ \operatorname{ctg}\varphi = a \end{cases}$	$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a;$ $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a;$ $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\varphi) = \varphi,$ если $\varphi \in (0; \pi)$
$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}; \quad \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$	

Однородные тригонометрические уравнения и сводящиеся к ним	
$2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0;$ $\cos x(2\sin x - \cos x) = 0;$ $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$ $2\sin x - \cos x = 0.$ Корни уравнения $\cos x = 0$ не удовлетворяют этому уравнению. Делим на $\cos x \neq 0$. $2\operatorname{tg} x - 1 = 0;$ $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2};\ x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,$ $n \in Z$	$5\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2;$ $5\sin^2 x + \frac{1}{2}\cdot\sin 2x\cos x -$ $- 2\cos^2 x =$ $= 2(\sin^2 x + \cos^2 x);$ $3\sin^2 x + \sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0.$ $\cos x \neq 0$. Делим на $\cos^2 x$. $3\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 4 = 0;$ $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3};$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n; \\ x = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi k, \end{array}\right.$ $n, k \in Z$

Разложение на множители	
$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x - 2 = \cos x - 2\sqrt{2}\sin x$; $\sqrt{2}\sin x\cos x - \cos x - 2 + 2\sqrt{2}\sin x = 0$; $\cos x(\sqrt{2}\sin x - 1) - 2(1 - \sqrt{2}\sin x) = 0$; $(\sqrt{2}\sin x - 1)(\cos x + 2) = 0$	
$\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$	или $\cos x + 2 = 0$
$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos x = -2$
$x = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	корней нет

Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$) называются **простейшими показательными**		
$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,$ $a \neq 1$ $\Updownarrow$ $f(x) = g(x)$	а) $3^{2x+4} = 9$ $3^{2x+4} = 3^2$ $2x + 4 = 2$ $x = -1$	б) $2^{x+3} = -4$ корней нет, т. к. $-4 < 0$
$a^x = b,\ a > 0,\ a \neq 1,$ $b > 0$ $\Updownarrow$ $x = \log_a b$	$3^x = 9$ $x = 2$	$2^x = 7$ $x = \log_2 7$
	$2^x = -5$, корней нет	

Основные методы решения показательных уравнений	
Сведение обеих частей уравнения к одному основанию	$2^{x-3}\cdot 4^x = \frac{\sqrt{2}}{16^x}$; $2^{x-3}\cdot 2^{2x} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-4x}$; $2^{x-3+2x} = 2^{\frac{1}{2}-4x}$; $3x - 3 = \frac{1}{2} - 4x$; $x = \frac{1}{2}$

Окончание таблицы

Вынесение за скобки общего множителя	$5^x - 2\cdot 5^{x-2} = 23;\ 5^{x-2}(5^2-2) = 23;$ $5^{x-2}\cdot 23 = 23;\ 5^{x-2} = 1;\ 5^{x-2} = 5^0;$ $x-2 = 0;\ x = 2$
Замена переменной	$4^{x+1} - 3\cdot 2^x - 10 = 0;$ $4\cdot 4^x - 3\cdot 2^x - 10 = 0;$ $2^x = t,\ t > 0;\ 4^x = 2^{2x} = t^2;$ $4t^2 - 3t - 10 = 0;$ $t = 2$ и $t = -\frac{5}{4}$ — не удовлетворяет условию $t>0$; $2^x = 2;\ x = 1$
Однородные уравнения и сводящиеся к ним	$4^x + 3\cdot 6^x - 4\cdot 9^x = 0;$ $2^{2x} + 3\cdot 2^x\cdot 3^x - 4\cdot 3^{2x} = 0.$ Делим обе части уравнения на $3^{2x} \neq 0$. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0;\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = t;$ $t > 0;\ t^2 + 3t - 4 = 0;\ t_1 = 1,\ t_2 = -4;$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1,\ x = 0;\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = -4$, корней нет

Логарифмические уравнения

Логарифмическими называются уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма	$\log_2(2x-3) = 1;$ $\log_5 x^2 = \log_5(x+7);$ $\lg\lg x = 3$

Основные виды логарифмических уравнений и методы их решения	
$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a^b \\ a > 0, \\ a \neq 1 \end{cases}$	$\log_2(x-3) = 4;$ $\begin{cases} x-3 = 2^4, \\ x-3 > 0; \end{cases}\ x = 19$

Продолжение таблицы

$\log_{f(x)} g(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)^b = g(x), \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2;$ $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 4 = x^2, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 4$
$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\log_3\left(x^2 - 4x - 5\right) =$ $= \log_3\left(7 - 3x\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 7 - 3x, \\ 7 - 3x > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 12 = 0, \\ x < \dfrac{7}{3} \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -3, \end{array}\right. \\ x < \dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow x = -3$
$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} g(x) = h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$	$\log_x(3x - 1) = \log_x(2x + 5);$ $\begin{cases} 3x - 1 = 2x + 5, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ 3x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 6, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$

Окончание таблицы

$\log_a f(x)+\log_a g(x)=$ $=\log_a h(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x)=h(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ h(x)>0 \end{cases}$	$\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2;$ $\lg(x-9)(2x-1)=\lg 100;$ $\begin{cases} (x-9)(2x-1)=100, \\ x-9>0, \\ 2x-1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2-19x+9=100, \\ x>0, \\ x>\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=13, \\ x=-3,5, \end{array}\right. \\ x>\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $x=13$
$\log_a f(x)-\log_a g(x)=$ $=\log_a h(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}=\log_a h(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ h(x)>0 \end{cases}$	$\log_2(x+1)=\log_2 8-\log_2(x+3);$ $\log_2(x+1)=\log_2\dfrac{8}{x+3};$ $\begin{cases} x+1=\dfrac{8}{x+3}, \\ x+1>0, \\ x+3>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+4x-5=0, \\ x>-1; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-5, \end{array}\right. \\ x>-1; \end{cases}$ $x=1$

Равносильность уравнений, систем уравнений

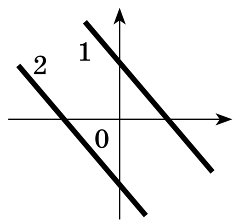
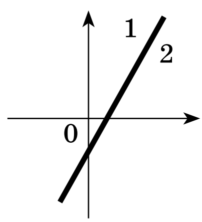
Два уравнения называются **равносильными**, если они имеют одни и те же корни	$\frac{x}{2} = 4$ и $2x - 16 = 0$
Преобразования, при которых уравнение переходит в равносильное ему уравнение: перенос слагаемых из одной части уравнения в другую (при этом знак слагаемого меняется на противоположный); прибавление к обеим частям уравнения одного и того же числа или функции; умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же число или функцию, не равные нулю	
Две системы называются **равносильными**, если они имеют одинаковое множество решений или обе несовместны	

Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными

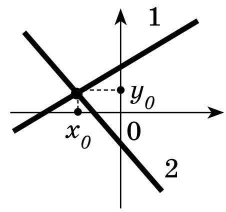
Определение	Примеры
Системой уравнений называют два или несколько уравнений, в которых необходимо найти все общие решения	$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x^2 + y = 1 \end{cases}$
Система уравнений называется **линейной**, если все уравнения, входящие в систему, являются линейными: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ Решениями такой системы является упорядоченная пара чисел $(x; y)$	Пара чисел $(3; -1)$ является решением системы $\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

Окончание таблицы

Определение	Примеры
Решить систему — значит найти все её решения или доказать, что их нет	
Количество решений линейной системы двух уравнений с двумя переменными в зависимости от коэффициентов при неизвестных: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	

Зависимость коэффициентов	Графическая интерпретация
Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, система решений не имеет	 1) $a_1x+b_1y = c_1$; 2) $a_2x+b_2y = c_2$. Прямые параллельны, точек пересечения нет
Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, система имеет бесчисленное множество решений (неопределённа)	 1) $a_1x+b_1y = c_1$; 2) $a_2x+b_2y = c_2$. Прямые совпадают, все точки прямых являются решениями

Окончание таблицы

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ — одно решение	 1) $a_1x+b_1y = c_1$; 2) $a_2x+b_2y = c_2$. Прямые пересекаются, точка пересечения $(x_0; y_0)$ — решение системы

Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных

Способ подстановки: 1) выразить одну переменную из какого-либо уравнения системы через другую; 2) подставить вместо этой переменной в другое уравнение полученное выражение; 3) решить полученное уравнение с одной переменной; 4) найти значение второй переменной; 5) записать ответ	а) $\begin{cases} 3x+4y=-3, \\ y=3x+18. \end{cases}$ *Решение.* $\begin{cases} y=3x+18, \\ 3x+4(3x+18)=-3; \end{cases}$ $3x+12x+72=-3$; $x=-5$; $y=3\cdot(-5)+18=3$. *Ответ*: $(-5; 3)$. б) $\begin{cases} 2x+y=\pi, \\ \cos(3x-2y)=0,5 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} y=\pi-2x, \\ \cos(3x-2\pi+4x)=0,5; \end{cases}$ $\cos 7x = 0,5$; $7x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $x = \pm\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi k}{7}$, $k \in Z$;

Продолжение таблицы

	$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi k}{7}, \\ y = \dfrac{19\pi}{21} - \dfrac{4\pi k}{7} \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi k}{7}, \\ y = \dfrac{23\pi}{21} - \dfrac{4\pi k}{7}; \end{cases}$ $k \in Z$
Метод алгебраического сложения	$\begin{cases} 7 - x + y - xy = 0, \\ 5 - y + x - xy = 0. \end{cases}$ *Решение.* Сложим почленно и вычтем уравнения: $+\begin{cases} 7 - x + y - xy = 0, \\ 5 - y + x - xy = 0; \end{cases}$ $12 - 2xy = 0;$ $xy = 6;$ $-\begin{cases} 7 - x + y - xy = 0, \\ 5 - y + x - xy = 0; \end{cases}$ $2 - 2x + 2y = 0;$ $x - y = 1.$ Получим равносильную систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 6. \end{cases}$ Решим её способом подстановки. *Ответ*: $(-2; -3)$ и $(3; 2)$
Метод замены переменной	$\begin{cases} 5^x - 3^y = 16, \\ 5^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{y}{2}} = 2. \end{cases}$ *Решение.* Обозначим $5^{\frac{x}{2}} = t$, $3^{\frac{y}{2}} = z$ и получим систему алгебраических уравнений.

Окончание таблицы

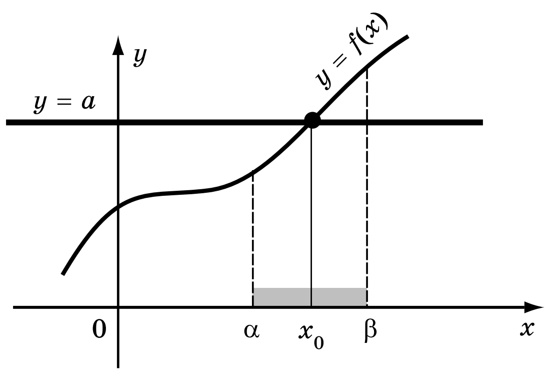
	$\begin{cases} t^2 - z^2 = 16, \\ t - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t-z)(t+z) = 16, \\ t - z = 2 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} 2(t+z) = 16, \\ t - z = 2; \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow t = 5;\ z = 3;$ $5^{\frac{x}{2}} = 5$, $x = 2$; $3^{\frac{y}{2}} = 3$, $y = 2$. *Ответ*: (2; 2)

Использование свойств и графиков функций при решении уравнений

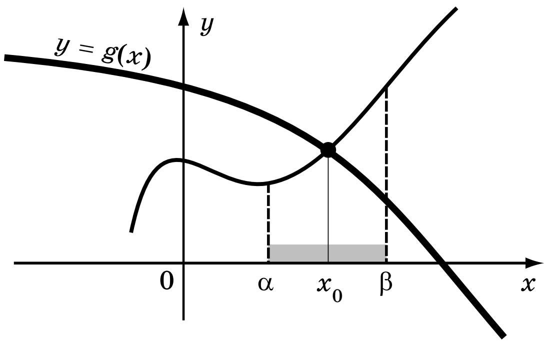
Ограниченность ОДЗ	
Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения, неравенства или системы состоит из ограниченного количества значений, то для решения уравнения достаточно проверить эти значения	$\sqrt{x^2-1} + x = 1 + \sqrt{2-2x^2}$; ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 1 \ge 0, \\ 2 - 2x^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1;$ $x = \pm 1$. Проверка показывает, что $x = 1$ — корень уравнения. *Ответ*: 1
Оценка левой и правой частей уравнения	
$\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) \ge a \\ g(x) \le a \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$ Если при решении уравнения $f(x)=g(x)$ выяснилось, что $f(x) \ge a$ и $g(x) \le a$, то равенство достигается тогда, когда $f(x) = g(x) = a$	$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+\lvert x \rvert}$; $f(x) = 1 - x^2 \le 1$, а $g(x) = \sqrt{1+\sqrt{\lvert x \rvert}} \ge 1$. Тогда уравнение равносильно системе $\begin{cases} 1 - x^2 = 1, \\ \sqrt{1+\sqrt{\lvert x \rvert}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$ *Ответ*: 0

Окончание таблицы

$f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)=0;$ $\begin{cases} f_1(x)\ge 0 \\ f_2(x)\ge 0 \\ \dots \\ f_n(x)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ \dots \\ f_n(x)=0 \end{cases}$	$\sqrt{x-2}+\lvert x^2-2x\rvert+(x^2-4)^2=0;$ $f_1(x)=\sqrt{x-2}\ge 0;$ $f_2(x)=\lvert x^2-2x\rvert\ge 0;$ $f_3(x)=(x^2-4)^2\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=0, \\ \lvert x^2-2x\rvert=0, \\ (x^2-4)^2=0; \end{cases}$ $x=2.$ *Ответ*: 2.

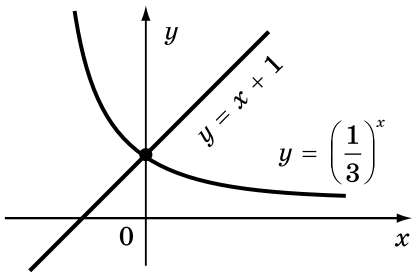
Использование возрастания и убывания функций
Если в уравнении $f(x)=a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение имеет не более одного корня на этом промежутке
 Уравнение $\sqrt{x}+2x^3=3$ имеет один корень $x=1$ ($\sqrt{x}+2\cdot 1^3=3$, т. е. $3=3$), поскольку функция $f(x)=\sqrt{x}+2x^3$ возрастает на всей области определения $x\ge 0$

Окончание таблицы

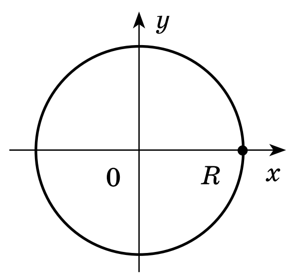
<table>
<tr><td>Если в уравнении $f(x) = g(x)$ одна из функций возрастает, а вторая убывает на некотором промежутке, то уравнение имеет на нём не более одного корня</td></tr>
<tr><td>


Уравнение $\sqrt{x} + x^3 = 3 - x$ имеет один корень $x = 1$ ($\sqrt{x} + 1^3 = 3 - 1$, т. е. $2 = 2$), поскольку $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ возрастает на всей области определения $x \geq 0$, а $g(x) = 3 - x$ убывает на множестве R и $x \geq 0$; $x = 1$</td></tr>
</table>

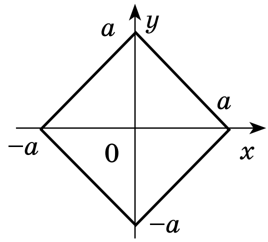
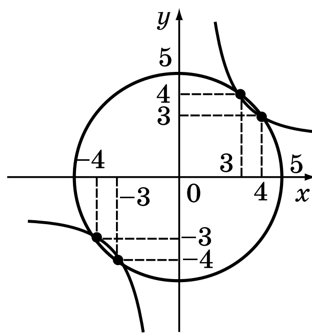
<table>
<tr><th colspan="2">Использование ограниченности функций</th></tr>
<tr><td>При решении тригонометрических уравнений используют ограниченность функций
$y = \sin x$, $y = \cos x$</td><td>$\cos\frac{x}{2} + \cos 2x = 2$, $\cos\frac{x}{2}$ и $\cos 2x$ имеют наибольшее значение, равное 1, сумма $\cos\frac{x}{2}$ и $\cos 2x$ равна 2 тогда и только тогда, когда
$\begin{cases}\cos\frac{x}{2} = 1,\\ \cos 2x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 4\pi n,\ n \in Z,\\ x = \pi k,\ k \in Z\end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 4\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$</td></tr>
</table>

Использование графиков функций
Для решения уравнения $g(x)=f(x)$ нужно построить графики функций $y = g(x)$ и $y=f(x)$ и найти точку их пересечения
 Для решения уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$ построим графики функций $y = x+1$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Они имеют одну общую точку (0; 1). Уравнение имеет один корень: $x = 0$

Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем

Уравнения с двумя переменными — это уравнения вида $f(x;\ y) = 0$. Упорядоченная пара чисел $(x_0;\ y_0)$, которая превращает уравнение в верное равенство, называется **решением уравнения** $f(x;\ y) = 0$	 $x^2+y^2 = R^2$ Окружность с центром (0; 0) и радиусом R

Окончание таблицы

График уравнения с двумя переменными — это множество всех точек координатной плоскости $(x_0;\ y_0)$, где $(x_0;\ y_0)$ — решения уравнения	 $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert = a$ Квадрат с центром (0; 0), диагонали квадрата лежат на осях Ox и Oy
Система двух уравнений с двумя переменными $\begin{cases} f_1(x;\ y) = g_1(x;\ y), \\ f_2(x;\ y) = g_2(x;\ y). \end{cases}$ Чтобы изобразить множество решений системы уравнения с двумя переменными, нужно построить их графики в одной системе координат и найти точки пересечения графиков	 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12 \end{cases}$ $x^2+y^2=25$ — окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 5 $xy = 12 \Leftrightarrow y = \dfrac{12}{x}$ — гипербола. Графики уравнений пересеклись в точках (4; 3), (3; 4), (−3; −4), (−4; −3)

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений

<table>
<tr><td colspan="2">Прикладные задачи — это задачи, условия которых содержат нематематические понятия. Для решения такой задачи математическими методами составляют математическую модель</td></tr>
<tr><td colspan="2">Модель — это специально созданный объект, который отображает свойства исследуемого объекта. Математические модели создают, используя математические понятия и отношения: геометрические фигуры, числа, выражения, а также функции, уравнения, неравенства и их системы</td></tr>
<tr><td>Решение прикладной задачи математическими методами осуществляется в три этапа:
1) создание математической модели данной задачи;
2) решение соответственной математической задачи;
3) анализ ответа, интерпретация результата, учёт реальных ограничений</td><td>Схематично этапы решения прикладной задачи выглядят так:
$A \to B \to C \to D$
A — данная прикладная задача;
B — её математическая модель;
C — ответ для модели;
D — ответ для данной прикладной задачи</td></tr>
<tr><td>Задача 1. Сколько досок потребуется для того, чтобы застелить пол в комнате размерами $7{,}5 \cdot 5$ м, если длина доски 6 м, а ширина 0,35 м?</td><td rowspan="2">Это прикладная задача, т. к. в ней говорится про поверхность пола — нематематическое понятие. Математическая модель — задача о нахождении площади прямоугольника.
Анализ результата — нахождение целочисленного решения путём округления с избытком</td></tr>
<tr><td>Решение.
Поверхность пола имеет форму прямоугольника. Найдём площадь этого прямоугольника:
$7{,}5 \cdot 5 = 37{,}5$ (м^2)</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

<table>
<tr><td colspan="2">Площадь одной доски, которая также представляет собой прямоугольник: $0{,}35 \cdot 6 = 2{,}1$ (м^2).
Значит, досок нужно: $37{,}5 : 2{,}1 = 17{,}86$.
Поскольку количество доски должно быть целым, очевидно, что досок потребуется 18 штук.
Ответ: 18</td></tr>
<tr><td>Задача 2. 30 %-й раствор борной кислоты смешали с 15 %-м раствором и получили 450 г 20 %-го раствора. Сколько граммов исходного раствора взято?</td><td>Раствор борной кислоты — нематематическое понятие.
Математическая модель — система линейных уравнений с двумя переменными</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решение.
Взяли x г 30 %-го раствора, y г — 15 %-го раствора.
Масса смеси: $x + y = 450$.
Чистой борной кислоты: $0{,}3x + 0{,}15y$ или $450 \cdot 0{,}2$.
Получили систему уравнений:
$\begin{cases} x + y = 450, \\ 0,3x + 0,15y = 450 \cdot 0,2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 150, \\ y = 300. \end{cases}$
Ответ: 15 %-го раствора 300 г, 30 %-го — 150 г</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">При выполнении вычислений с реальными данными результат часто необходимо округлить и выполнить оценку результата</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Округление чисел</td></tr>
<tr><td>Если число округляют до какого-либо разряда, то все последующие цифры за этим разрядом заменяют нулями, а если они стоят после запятой — отбрасывают</td><td>Если первая отброшенная или заменённая нулём цифра равна 5, 6, 7, 8, 9, то стоящую перед ним цифру увеличивают на 1.
Если первая отброшенная или заменённая нулём цифра равна 0, 1, 2, 3, 4, то стоящую перед ней цифру оставляют без изменений</td></tr>
</table>

Оценка результатов измерений	
Абсолютная погрешность вычислений — модуль разности между точным значением величины и её приближённым значением	$\lvert x - a\rvert$ x — точное значение, a — приближённое
При невозможности найти точное значение абсолютной погрешности можно дать **оценку абсолютной погрешности**	a — приближённое значение числа x. $\lvert x-a\rvert \leq h$, т. е. число x равно числу a с точностью до h: $x = a \pm h$. Например, запись $x = 3{,}42 \pm 0{,}01$ означает, что x равно 3,42 с точностью до 0,01, т. е. $3{,}41 \leq x \leq 3{,}43$. Числа 3,41 и 3,43 — приближённые значения числа с недостатком и избытком
Относительная погрешность — частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближённого значения величины, умноженное на 100 %	

НЕРАВЕНСТВА

Квадратные неравенства

Квадратные неравенства — это неравенства, приводимые к виду: $ax^2+bx+c > 0$; $ax^2+bx+c \geq 0$; $ax^2+bx+c < 0$, $ax^2+bx+c \leq 0$, $a \neq 0$	$3x^2-7x+1 \geq 0$; $5x^2-1 < 0$ $2x^2+3x-7 \leq 0$; $2x^2-3x > 0$

Основные методы решения квадратных неравенств

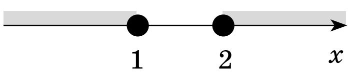
1. Сведения к решению систем линейных неравенств

1. Разложить квадратный трёхчлен ax^2+bx+c на множители (x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена).
2. Решить совокупность соответствующих систем линейных неравенств

$$x^2-3x+2 \le 0;$$
$$(x-1)(x-2) \le 0.$$

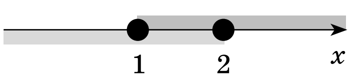
Произведение двух множителей неположительно, значит, множители имеют разные знаки:

$$\begin{cases} x-1 \le 0, \\ x-2 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 1, \\ x \ge 2. \end{cases}$$



Система решений не имеет.

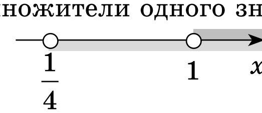
$$\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ x-2 \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 1, \\ x \le 2. \end{cases}$$



$$1 \le x \le 2$$

$$4x^2-3x-1 > 0;$$
$$4(x-1)\left(x+\frac{1}{4}\right) > 0\,.$$

Произведение множителей положительно, значит, множители одного знака.



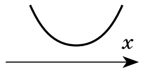
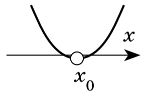
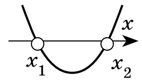
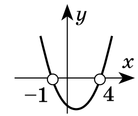
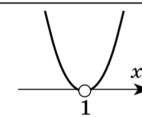
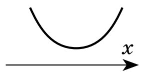
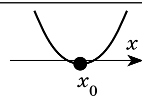
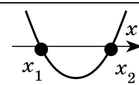
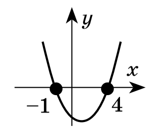
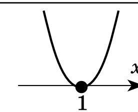
$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x+\dfrac{1}{4} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x > -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 < 0, \\ x+\dfrac{1}{4} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1, \\ x < -\dfrac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$$

2. Графический метод					
Для решения неравенства вычисляется дискриминант квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, $D = b^2-4ac$ и его корни x_1 и x_2					
	$D<\mathbf{0}$	$D=\mathbf{0}$	$D>\mathbf{0}$		
				а) $x^2-3x-4>0$; $D=5>0$; $x_1=-1$, $x_2=4$.	
$ax^2+bx+c<0$	решений нет	решений нет	$x\in(x_1;\ x^2)$	б) $x^2+5x+12>0$; $D=-17<0$; $x\in(-\infty;\ \infty)$	
$ax^2+bx+c>0$	$x\in R$	$x\in(-\infty;$ $x_0)\cup(x_0;$ $+\infty)$	$x\in(-\infty;\ x_1)$ $\cup(x_2;\ +\infty)$	в) $x^2-2x+1>0$; $D=0$; $x_0=1$; $x\in(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$	
				а) $x^2-3x-4\le 0$; $D=5>0$; $x\in[-1;\ 4]$	
$ax^2+bx+c\le 0$	решений нет	$x=x_0$	$x\in[x_1;\ x_2]$	б) $x^2+5x+12\le 0$; $D=-17<0$; решений нет	
$ax^2+bx+c\ge 0$	$x\in R$	$x\in R$	$x\in(-\infty;\ x_1]$ $\cup[x_2;\ +\infty)$	в) $x^2-2x+1\le 0$; $D=0$; $x_0=1$; $x=1$	

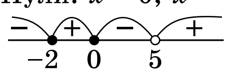
Рациональные неравенства

Неравенства вида $P_n(x) > 0$, $P_n(x) \geq 0$; $P_n(x) < 0$, $P_n(x) \leq 0$, а также неравенства

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0, \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$$

$$\text{и} \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0, \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0,$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно, называются **рациональными**

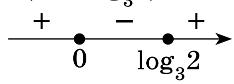
Основные методы решения рациональных неравенств	
Метод интервалов 1. Найти область определения функции $F(x)$ и промежутки, на которых она непрерывна. 2. Найти нули функции $F(x)$. 3. Нанести на числовую ось найденные промежутки и нули. 4. Определить интервалы знакопостоянства. 5. Записать ответ	$\frac{x(x+2)}{x-5} \leq 0.$ Рассмотрим функцию $F(x) = \frac{x(x+2)}{x-5}$. Область определения функции: $D(F) = (-\infty;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$. Нули: $x = 0$; $x = -2$.  *Ответ*: $(-\infty;\ -2] \cup [0;\ 5)$
Метод замены переменной (метод подстановки)	$(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12 < 0.$ *Замена*: $t = x^2-x$; $t^2-8t+12 < 0.$ *Решение*: $2 < t < 6$. Получим систему: $\begin{cases} x^2 - x < 6, \\ x^2 - x > 2. \end{cases}$ Решением системы является объединение множества $x \in (-2;\ 1) \cup (2;\ 3)$. *Ответ*: $(-2;\ 1) \cup (2;\ 3)$

Показательные неравенства

Показательными называются неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Решение показательных неравенств	
$a^{f(x)} \underset{<}{>} a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$ Аналогично для $a^{f(x)} \underset{\le}{<} a^{g(x)}$	а) $2^x < \frac{1}{8}$; $2^x < 2^{-3}$; $x < -3$, т. к. $2 > 1$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; $0 < \frac{1}{3} < 1$, поэтому $x \le \frac{1}{2}$
$a^{f(x)} \underset{\ge}{>} b,\ a > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b \le 0, \\ x \in D(f); \end{cases} \begin{cases} b > 0,\ a > 1, \\ f(x) > \log_a b; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b > 0,\ 0 < a < 1, \\ f(x) < \log_a b \end{cases}$	а) $2^x > 5$; $2^x > 2^{\log_2 5}$; $b = 5 > 0$, $a = 2 > 1$; $x > \log_2 5$; $x \in (\log_2 5; +\infty)$; б) $\left(\frac{1}{7}\right)^x \ge 4$; $\left(\frac{1}{7}\right)^x \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\frac{1}{7}} 4}$; $b = 4 > 0$, $a = \frac{1}{7} < 1$; $x \le \log_{\frac{1}{7}} 4$; $x \le \log_{7^{-1}} 4$; $x \le -\log_7 4$; $x \in (-\infty; -\log_7 4]$; в) $e^x > -3$; $x \in R$; г) $2^x \le -2$; нет решений

Продолжение таблицы

$a^{f(x)} \underset{\geq}{>} b^{(x)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > \phi(x)\log_a b; \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < \phi(x)\log_a b \end{cases}$	$2^x \geq 3^{x^2}$; $\log_2 2^x \geq \log_2 3^{x^2}$; $x \geq x^2\log_2 3$; $x - x^2\log_2 3 \geq 0$; $x(1 - x\log_2 3) \geq 0$; $x(x\log_2 3 - 1) \leq 0$; $x(x - \log_3 2) \leq 0$;  $x \in [0; \log_3 2]$
Замена переменной в показательном неравенстве	$9^x + 27 < 12 \cdot 3^x$. *Замена*: $3^x = t$, $t > 0$, тогда $t^2 - 12t + 27 < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 < t < 9$. $3 < 3^x < 9$; $1 < x < 2$. $x \in (1; 2)$
Показательные неравенства, содержащие **однородные функции**	$4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$; $2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0$. Разделим почленно на $5^{2x} \neq 0$. $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{5}\right)^{x} - 2 > 0$. *Замена*: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} = t$, $t > 0$. $t^2 - t - 2 > 0$; $\left[\begin{array}{l} t < -1, \\ t > 2, \end{array}\right.$ но $t > 0$ $\Rightarrow t > 2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} > 2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2}$; $x < \log_{\frac{2}{5}} 2$, т. к. $\frac{2}{5} < 1$. $x \in \left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2\right)$

Окончание таблицы

Разложение на множители (вынесение за скобку общего множителя)	$3^{x+1}+3^{x-1} \geq 21+3^{x}$; $3^{x+1}+3^{x-1}-3^{x} \geq 21$; $3^{x-1}(3^{2}+1-3^{1}) \geq 21$; $3^{x-1}\cdot 7 \geq 21$; $3^{x-1} \geq 3$; $3 > 1$; $x-1 \geq 1$; $x \geq 2$. $x \in [2; +\infty)$

Логарифмические неравенства

Логарифмическими называют неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма

Решение логарифмических неравенств

Использование определения логарифма при решении логарифмических неравенств	
$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^b, \\ 0 < a < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) > a^b, \\ a > 1. \end{cases}$ Аналогично $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b, \\ 0 < a < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < f(x) < a^b, \\ a > 1 \end{cases}$	а) $\log_3(x-2) \geq 2$. Так как $3 > 1$, то $(x-2) \geq 3^2$; $x-2 \geq 9$; $x \geq 11$. $x \in [11; +\infty)$; б) $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 0$; $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \log_2 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 < \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \log_3 1 < \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \log_3 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \leq x-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} \leq x-1 < \frac{1}{2}$; $\frac{9}{8} \leq x < \frac{3}{2}$; $x \in \left[\frac{9}{8}; \frac{3}{2}\right)$

<table>
<tr><th colspan="2">Использование свойств логарифма
при решении логарифмических неравенств</th></tr>
<tr><td>

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases}$

или

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$

</td><td>

а) $\log_{0,5}(2x-4) \geq$
$\geq \log_{0,5}(x+1)$.
$0 < 0,5 < 1$, поэтому

$\begin{cases} 2x - 4 \leq x + 1, \\ 2x - 4 > 0, \\ x + 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 \leq x + 1, \\ 2x - 4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, \\ x > 2; \end{cases} x \in (2; 5];$

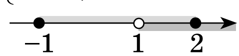
б) $\log_2 x + \log_2(x-1) \leq 1$.
Применим правило:
$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$,
где $x > 0$, $y > 0$.

$\log_2 x(x-1) \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x(x-1) \leq 2^1, \\ x > 0, \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0, \\ x > 1; \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2) \leq 0, \\ x > 1; \end{cases}$



$x \in (1;\ 2]$

</td></tr>
<tr><td>

Использование метода замены переменной

</td><td>

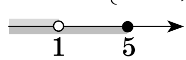
$\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \leq 0$.
Замена: $\log_3 x = t$;
$t^2 - 2t - 3 \leq 0$;
$-1 \leq \log_3 x \leq 3$;

</td></tr>
</table>

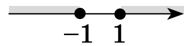
Окончание таблицы

	$\log_3 3^{-1} \le \log_3 x \le$ $\le \log_3 3^3,\ 3 > 1;$ $\frac{1}{3} \le x \le 27;\ x \in \left[\frac{1}{3}; 27\right]$
Решение неравенств, содержащих переменную под знаком логарифма и в основании логарифма $\log_{\phi(x)} f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\phi(x) > 1,\\ f(x) > (\phi(x))^A > 0,\end{cases}\\ \begin{cases}0 < \phi(x) < 1,\\ 0 < f(x) < (\phi(x))^A\end{cases}\end{array}\right.$	$\log_x(x-2) \le 2.$ ОДЗ: $\begin{cases}x-2>0,\\ x>0,\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$ Значит, основание логарифма больше 1, тогда: $\log_x(x-2) \le 2;$ $\log_x(x-2) \le \log_x x^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases}x-2 \le x^2,\\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - x + 2 \ge 0,\\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x \in R,\\ x>2\end{cases} \Rightarrow x > 2.$ $x \in (2; +\infty)$

Системы линейных неравенств. Системы неравенств с одной переменной

Системы неравенств	
Несколько неравенств с одной переменной образуют **систему** неравенств, если ставится задача отыскать все значения переменной, удовлетворяющие **одновременно каждому** из этих неравенств	а) $\begin{cases}-3x+5>2,\\ 4x-5\le 15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x > 2-5,\\ 4x \le 15+5\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases}-3x > -3,\\ 4x \le 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<1,\\ x\le 5;\end{cases}$  $x \in (-\infty; 1).$

Окончание таблицы

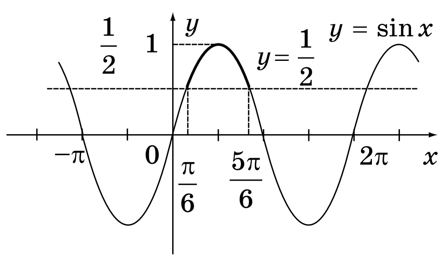
Чтобы **решить систему неравенств,** нужно: 1. Отдельно решить каждое неравенство. 2. Найти пересечение найденных решений	б) $\begin{cases} 5x+6 \le 1, \\ 2x+1 \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \le -5, \\ 2x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1, \\ x \ge 1; \end{cases}$  $x = \varnothing$ (решений нет)

> Две системы неравенств называют **равносильными,** если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам. Равносильность систем неравенств (как и уравнений) обозначается «$\Leftrightarrow$»

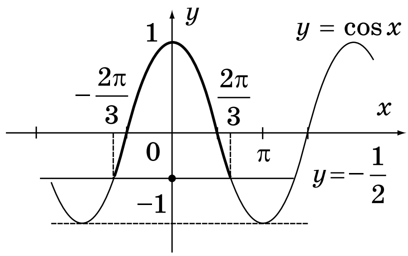
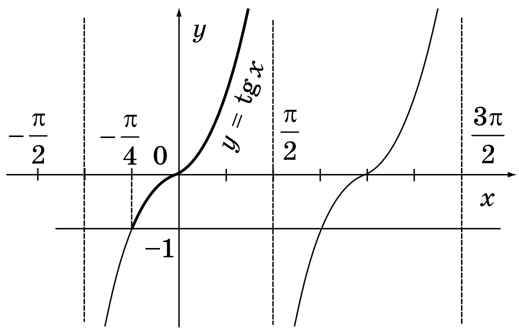
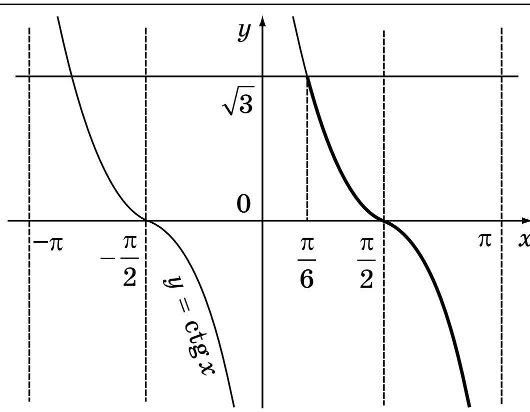
Равносильность неравенств, систем неравенств

> Два неравенства с одной переменной (две системы неравенств) называются **равносильными,** если множество решений этих неравенств (систем неравенств) совпадают; в частности, неравенства равносильны, если оба не имеют решений

Использование свойств и графиков функций при решении неравенств

Решение тригонометрических неравенств с помощью графиков	
$\sin x > \frac{1}{2}$	 $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$

Окончание таблицы

$\cos x > -\dfrac{1}{2}$	 $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$
$\operatorname{tg} x \geq -1$	 $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k \leq x < \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
$\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$	 $\dfrac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in Z$

<table>
<tr><th colspan="2">Использование монотонности функций
для решения неравенств</th></tr>
<tr><td>

1. Записать неравенство в виде:
$f(x) \overset{>}{\underset{\geq}{}} a$, $f(x) \overset{<}{\underset{\leq}{}} a$,
$f(x)$ — некоторая функция, $a \in R$.
2. Найти область определения функции $D(f)$ и характер её монотонности (возрастает, убывает).
3. Если a принадлежит области значений $f(x)$, то существует число $x_0 \in D(f)$, при котором $f(x_0) = a$.
4. Исходное неравенство записать в виде:
$f(x) \overset{>}{\underset{\geq}{}} f(x_0)$, $f(x) \overset{<}{\underset{\leq}{}} f(x_0)$.
5. Решение исходного неравенства сводится к решению равносильной ему системы линейных неравенств:
$\begin{cases} x > x_0, \\ b < x < d, \end{cases}$
если $f(x)$ — возрастающая;
$\begin{cases} x < x_0, \\ b < x < d, \end{cases}$
если $f(x)$ — убывающая.
$(b;\ d)$ — область определения $f(x)$

</td><td>

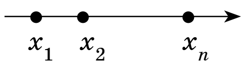
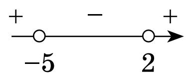
а) $x^5+x^3+x \leq 42$.
Решение.
Обозначим $F(x) = x^5+x^3+x$. Функция определена и непрерывна на R, возрастающая, как сумма возрастающих функций:
$42 = F(2)$, т. е. $F(x) \leq F(2)$. Тогда по свойству возрастающей функции из последнего неравенства следует, что $x \leq 2$.
Ответ: $x \in (-\infty;\ 2]$.

б) $\sqrt{7+x} \geq 7 - 2x$.
Решение.
Пусть $f(x) \geq \sqrt{7+x} + 2x$ тогда $f(x) \geq 7$.
Функция определена на $[-7;\ +\infty)$, монотонно возрастает.
$f(2) = 7$. Тогда $f(x) \geq f(2)$.
Получим систему:
$\begin{cases} x \geq -7, \\ f(x) \geq f(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7, \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \geq 2$.

Ответ: $[2;\ +\infty)$

</td></tr>
</table>

Метод интервалов

Метод интервалов	
$f(x) \geq 0$	$x^2+7x+10 > 0$
1. Найти корни уравнения $f(x) = 0$: $x_1, x_2, \ldots, x_n$	Найдём корни уравнения $x^2+7x+10 = 0$: $x_1 = -2$, $x_2 = -5$
2. Нанести эти корни на числовую прямую, разбивая её на интервалы: 	Наносим корни на числовую прямую, получим три интервала: 
3. Если коэффициент при старшей степени $f(x)$ положителен, то на крайнем правом интервале функция сохраняет знак «+»; остальные знаки расставлены в порядке чередования	Коэффициент при x^2 равен $1>0$, поэтому на интервале $x>2$ функция сохраняет знак «+», остальные знаки ставим в порядке чередования
4. В ответ записать интервалы, соответствующие знаку неравенства	$x^2+7x+10 > 0$, поэтому в ответ пишем интервалы, где сохраняется знак «+». *Ответ*: $(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$

Обобщённый метод интервалов
Для решения неравенств вида $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(x) < 0$ и $\varphi(x) \leq 0$, где $\phi(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots (x-a_n)^{k_n}$, a_1, a_2, ..., a_n — действительные, неравные друг другу числа; k_1, ..., k_n — целые положительные числа используют обобщённый метод интервалов

Окончание таблицы

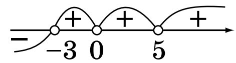
<table>
<tr>
<td>

1. Нанести на числовую ось числа $a_1, a_2, ..., a_n$.
2. В промежутке справа от наибольшего из них поставить знак «+», а затем, двигаясь справа налево при переходе через очередное число a_i $(i = \overline{1, n})$: **поменять знак,** если k_i — **нечётное число; сохранить знак,** если k_i — **чётное число**

</td>
<td>

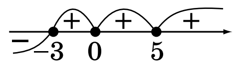
Пример 1

а) $x^2(x+3)^3(x-5)^4 < 0.$



$x \in (-\infty; -3);$

б) $x^2(x+3)^3(x-5)^4 \le 0.$



$x \in (-\infty; -3] \cup \{0\} \cup \{5\};$

в) $x^2(x+3)^3(x-5)^4 > 0.$

$x \in (-3; 0) \cup (0; 5) \cup (5; +\infty);$

г) $x^2(x+3)^3(x-5)^4 \ge 0.$

$x \in [-3; +\infty)$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

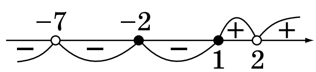
Приведённые рассуждения справедливы для неравенств вида

$$g(x) > 0,\ g(x) \ge 0,\ g(x) < 0,\ g(x) \le 0,$$

$$\text{где } g(x) = \frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}, \ldots (x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}, \ldots (x-b_p)^{m_p}}$$

Пример 2

а) $g(x) = \dfrac{(x-1)^3(x+2)^2(x-2)}{(x-2)^3(x+7)^6} \ge 0$



$x \in \{-2\} \cup [1; 2); \cup (2; +\infty);$

б) $g(x) \le 0.$ $x \in (-\infty; -7) \cup (-7; 1]$

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td colspan="2">

Метод интервалов для решения уравнений и неравенств с модулем

</td>
</tr>
<tr>
<td>

1. Найти нули подмодульных выражений.
2. Разбить область допустимых значений переменных этими нулями на промежутки, на каждом из которых выражения,

</td>
<td>

Пример 1

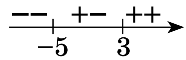
$|x+5| - |x-3| = 8.$

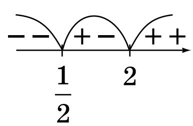
Решение.

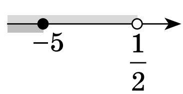
1. Нули подмодульных выражений: $x = -5$ и $x = 3$.

</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td>стоящие под знаком модуля, сохраняют знак.
3. На каждом из найденных промежутков решить уравнение (неравенство) без знака модуля.
Совокупность (объединение) решений на указанном промежутке является решением рассматриваемого уравнения (неравенства)</td>
<td>2. Знаки подмодульных выражений:


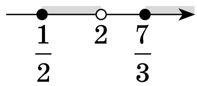
3. Уравнение на каждом промежутке:
а) $x < -5$;
$-(x+5)-(-(x-3))=8$;
$-8 = 8$; решений нет;
б) $-5 \le x < 3$; $x+5-(-x+3) = 8$;
$x = 3$ — не входит в рассматриваемый промежуток;
в) $x \ge 3$; $x+5-(x-3) = 8$;
$8 = 8$.
Получим верное равенство. Решением будет любое число из этого промежутка.
Ответ: $x \in [3; +\infty)$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Пример 2. $|2x-1|-|x-2| \ge 4$.
Решение.
1. Нули подмодульных выражений: $x = \frac{1}{2}$ и $x = 2$.
2. Знаки подмодульных выражений:


3. а) $x < \frac{1}{2}$; $-2x+1+x-2 \ge 4$; $x \le -5$.


На этом промежутке решением является x из промежутка $x \le -5$.</td>
</tr>
</table>

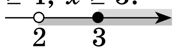
Окончание таблицы

б) $\frac{1}{2} \le x < 2$; $2x - 1 + x - 2 \ge 4$; $x \ge \frac{7}{3}$.



На этом промежутке решений нет.

в) $x > 2$; $(2x - 1) - (x - 2) \ge 4$; $x \ge 3$.

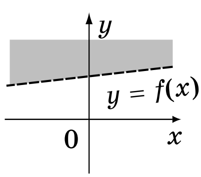
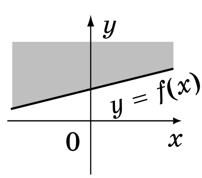
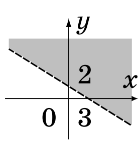
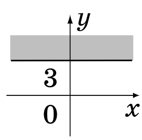
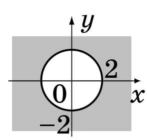
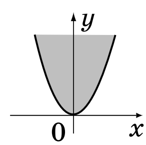


Решением будут все значения из промежутка $x \ge 3$.

4. Объединяем полученные решения: $\left[\begin{array}{l} x \le -5, \\ x \ge 3. \end{array}\right.$

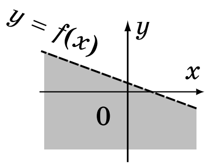
$x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$

Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем

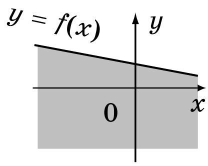
<table>
<tr><th colspan="4">Решение неравенств с двумя переменными</th></tr>
<tr><td colspan="4">График неравенства $y > f(x)$ состоит из всех точек координатной плоскости, которые находятся выше точек графика $y = f(x)$.

$y > f(x)$

$y \ge f(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Решением неравенства $y \ge f(x)$ являются все точки координатной плоскости, которые находятся выше точек графика $y = f(x)$, включая точки графика $y = f(x)$</td></tr>
<tr><td>
$2x + 3y > 6$</td><td>
$y \ge 3$</td><td>
$x^2 + y^2 \ge 4$</td><td>
$y \ge x^2$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

График неравенства $y < f(x)$ состоит из всех точек координатной плоскости, которые находятся **ниже** точек графика $y = f(x)$.

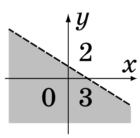
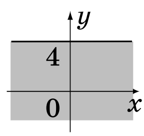
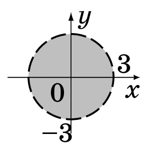
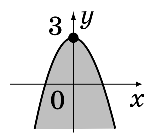


$y < f(x)$



$y \le f(x)$

Решением неравенства $y \le f(x)$ являются все точки координатной плоскости, которые находятся **ниже** точек графика $y = f(x)$, **включая** точки графика $y = f(x)$

			
$2x+3y < 6$	$y \le 4$	$x^2+y^2 < 9$	$y \le -x^2+3$

Решение систем неравенств с двумя переменными

Для решения систем неравенств

$$\begin{cases} F(x;\, y) \substack{\ge \\ \le} 0, \\ Q(x;\, y) \substack{\ge \\ \le} 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} F(x;\, y) \substack{> 0 \\ < 0}, \\ Q(x;\, y) \substack{> 0 \\ < 0} \end{cases}$$

находим:

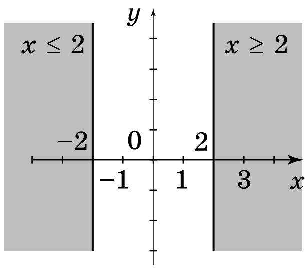
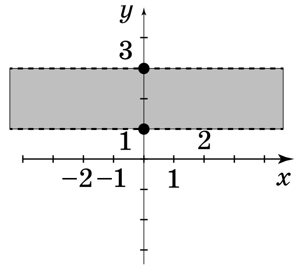
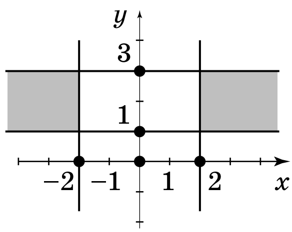
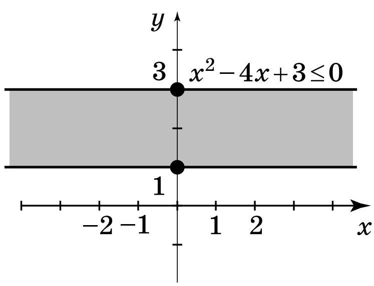
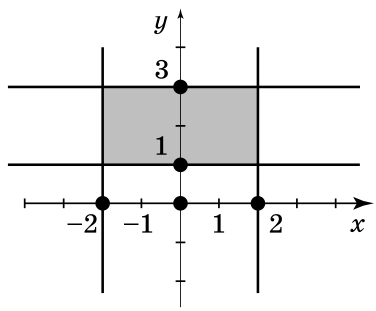
1) множество X_1 — точек плоскости, на котором выполняется первое неравенство;
2) множество X_2 — точек плоскости, на котором выполняется второе неравенство;
3) решение системы — пересечение множеств X_1 и X_2

Пример.

Изобразить на плоскости множество решений системы:

а) $\begin{cases} x^2 - 4 \ge 0, \\ y^2 - 4y + 3 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 4 \le 0, \\ y^2 - 4y + 3 \le 0 \end{cases}$

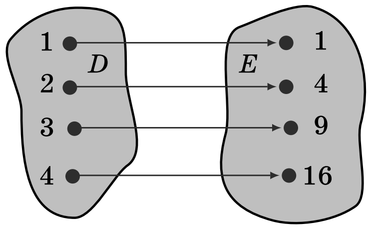
Окончание таблицы

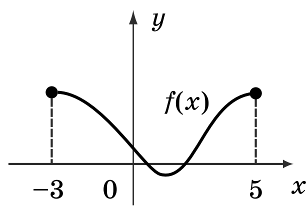
Решение. а) X_1: $x^2-4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2, \\ x\le -2; \end{array}\right.$  	X_2: $y^2-4y+3<0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1<y<3$. 
Пересечение множеств X_1 и X_2: 	
б) X_1: $x_2-4\le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2\le x\le 2$; X_2: $y^2-4y+3\le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $1\le y\le 3$  	Пересечение множеств X_1 и X_2: 

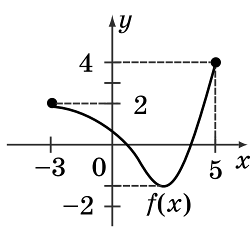
ФУНКЦИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ГРАФИК ФУНКЦИИ

Функция, область определения функции

<table>
<tr>
<td>Числовая функция с областью определения D — это зависимость, при которой каждому числу x из множества D соответствует единственное число y: $y = f(x)$</td>
<td>


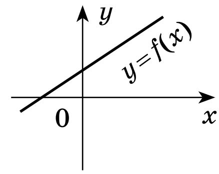
D — область определения;
E — область значений
</td>
</tr>
<tr>
<td>Область определения функции $D(f)$ — множество значений, которые может принимать x</td>
<td>


$D(f) = [-3;\ 5]$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Область значений функции $E(f)$ — множество значений $f(x)$, которые она может принимать при $x \in D(f)$</td>
<td>


$E(f) = [-2;\ 4]$
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<th colspan="2">Способы задания функции</th>
</tr>
<tr>
<td>Аналитический,
т. е. формулой: $y = f(x)$</td>
<td>$y = x^2;\ y = \dfrac{x-1}{x};$
$y = e^x;\ y = \cos x - \sin x$</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

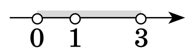
<table>
<tr>
<td>Графический,
т. е. график $y = f(x)$
в системе координат xOy</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Табличный, т. е. соответствие между $D(f)$ и $E(f)$ задаётся с помощью таблицы:
<table>
<tr><td>x</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>...</td><td>x_{n-1}</td><td>x_n</td></tr>
<tr><td>y</td><td>y_1</td><td>y_2</td><td>...</td><td>y_{n-1}</td><td>y_n</td></tr>
</table></td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>−3</td><td>−2</td><td>−1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>y</td><td>9</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

Область определения функции, заданной формулой

Областью определения функции $D(f)$, заданной формулой $y = f(x)$, называют множество значений x, при которых формула имеет смысл (все действия, заданные формулой, можно выполнить)

Функция	**$D(f)$**	**Пример нахождения $D(f)$**
Многочлен $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$	R	$y = x^3 - 7x^2 + 5x - 1$; $x \in R$
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены	$g(x) \neq 0$	$y = \dfrac{x^2}{x(x-3)}$; $x(x-3) \neq 0$; $x \neq 0$; $x \neq 3$. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$
$y = \sqrt[2n]{f(x)}$, $n \in N$	$f(x) \geq 0$	$y = \sqrt[4]{4 - x^2}$; $4 - x^2 \geq 0$; $x^2 - 4 \leq 0$; $-2 \leq x \leq 2$; $D(f) = [-2; 2]$

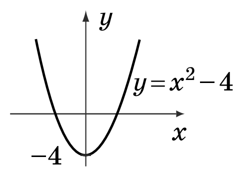
Продолжение таблицы

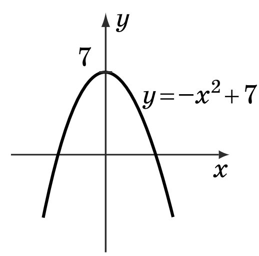
$y = \dfrac{1}{f(x)}$	$f(x) \neq 0$	$y = \dfrac{1}{\lvert x\rvert - 3}$; $\lvert x\rvert - 3 \neq 0$; $\lvert x\rvert \neq 3$; $\left[\begin{array}{l} x \neq 3, \\ x \neq -3. \end{array}\right.$ $D(f) = (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 3)$ $\cup (3;\ +\infty)$
$y = \log_a f(x)$, $a > 0,\ a \neq 1$	$f(x) > 0$	$y = \log_3(2x-3)$; $2x-3 > 0$; $x > 1{,}5$; $D(f) = (1{,}5;\ +\infty)$
$y = \log_{f(x)} g(x)$	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$y = \log_x(3-x)$; $\begin{cases} 3-x > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 3, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$  $D(f) = (0;\ 1) \cup (1;\ 3)$
$y = \mathrm{tg}\, f(x)$	$f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$	$y = \mathrm{tg}\,\dfrac{2x}{3}$; $\dfrac{2x}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $x \neq \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{3\pi n}{2}$, $n \in Z$
$y = \mathrm{ctg}\, f(x)$	$f(x) \neq \pi n$, $n \in Z$	$y = \mathrm{ctg}\, 5x$; $5x \neq \pi n$, $x \neq \dfrac{\pi n}{5}$, $n \in Z$
$y = \arcsin f(x)$ $y = \arccos f(x)$	$-1 \leq f(x) \leq 1$ $-1 \leq f(x) \leq 1$	$y = \arcsin \dfrac{3-x}{2}$; $-1 \leq \dfrac{3-x}{2} \leq 1$; $-2 \leq 3-x \leq 2$; $-5 \leq -x \leq -1$; $1 \leq x \leq 5$
$y = x^a,\ \alpha \in Z$	$x \in R$	$y = x^5,\ x \in R$

Окончание таблицы

$y = x^a$, α — целое отрицательное число или 0	$x \neq 0$	$y = x^{-3}$, $x \neq 0$
$y = x^a$, $\alpha > 0$, α — не целое число	$x \geq 0$	$y = x^{\frac{3}{4}}$, $x \geq 0$
$y = x^a$, $\alpha < 0$, α — отрицательное число	$x > 0$	$y = x^{-\frac{1}{2}}$, $x > 0$

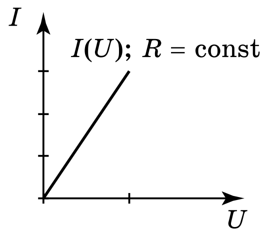
Множество значений функции

<table>
<tr><th colspan="2">Множество значений функции, заданной формулой</th></tr>
<tr><td colspan="2">Множеством значений функции $E(f)$ называется множество тех значений, которые может принимать сама функция при всех значениях аргумента из области определения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Чтобы найти $E(f)$, необходимо найти все значения a, для которых $f(x) = a$ имеет единственное решение</td></tr>
<tr><td>$E(f)$ многочлена чётной степени является:
а) промежуток $[m; +\infty)$, где m — наименьшее значение многочлена</td><td>

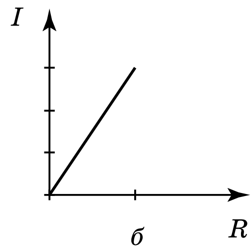
$y = x^2 - 4$
$E(f) = [-4; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>б) промежуток $(-\infty; n]$, где n — наибольшее значение этой функции</td><td>

$y = -x^2 + 7$
$E(f) = (-\infty; 7]$</td></tr>
</table>

График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях



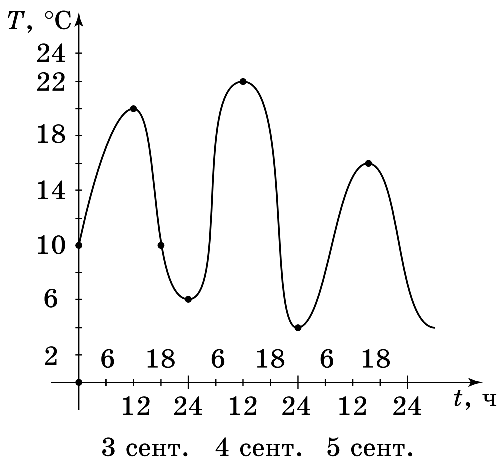
а



б

Закон Ома: сила тока I в цепи прямо пропорциональна напряжению U и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению участка цепи R (*а*).

Обратная зависимость, т. е. $I = \dfrac{U}{R}$ — гипербола (*б*)

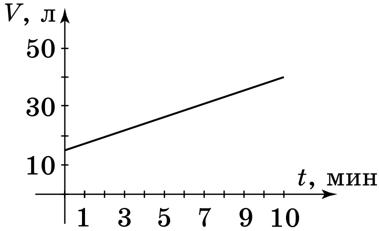


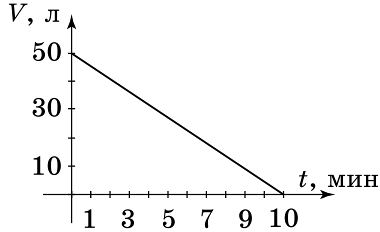
Изменение температуры воздуха на протяжении суток 3, 4 и 5 сентября.

По оси абсцисс — время суток в часах, t (ч).

По оси ординат — значение температуры в градусах, T °C

Окончание таблицы

<table>
<tr><td>

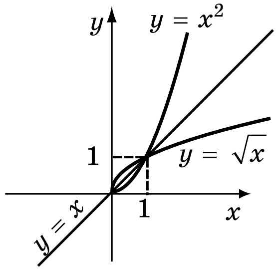
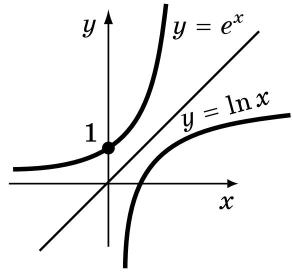
$V(t) = 15+2,5t$
а</td><td>

$V(t) = 50-5t$
б</td></tr>
<tr><td colspan="2">График, на котором изображён процесс наполнения бака водой (*а*). График, на котором изображён процесс вытекания воды из бака (*б*).
По оси абсцисс — время t в минутах, по оси ординат — объём бака V в литрах</td></tr>
</table>

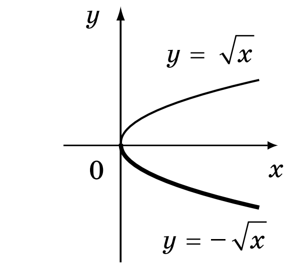
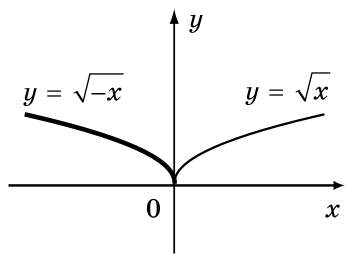
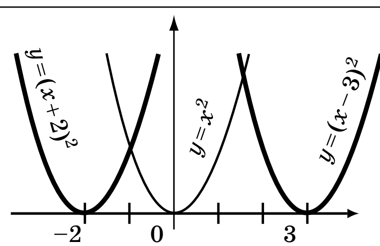
Обратная функция. График обратной функции

Обратная функция — это некоторая функция $y = g(x)$, которая получается из данной функции $y=f(x)$, если в отношении $x = f(y)$ выразить y через x	$y = x+8$ и $y = x-8$ $y = e^x$ и $y = \ln x$
Чтобы найти функцию, обратную для $f(x)$, нужно: 1) в соотношении $y = f(x)$ заменить x на y, а y на x; $x = f(y)$; 2) в выражении $x = f(y)$ выразить y через x. Функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны	Для функции $y = 11-5x$ найдём обратную: $x = 11-5y$; $5y = 11-x$; $y = \dfrac{11-x}{5}$. Функции $y = 11-5x$ и $y = \dfrac{11-x}{5}$ взаимно обратные
Условие обратимости функции — её монотонность (убывает или возрастает)	$y = x^2$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Обратная для неё: $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$ или $y = -\sqrt{x}$, $x \in (-\infty; 0]$

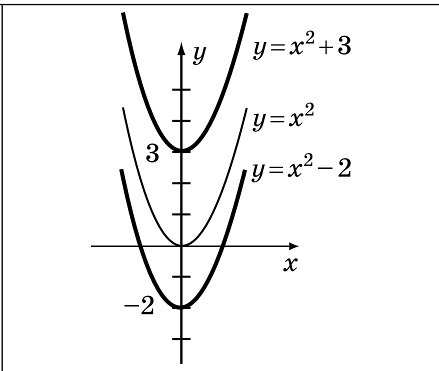
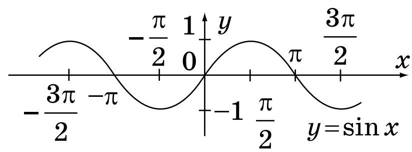
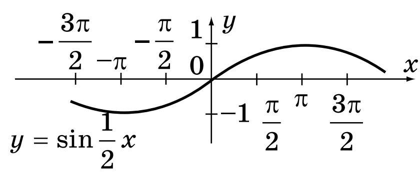
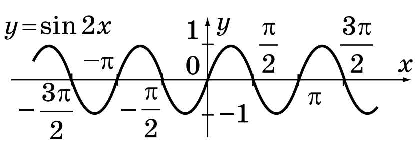
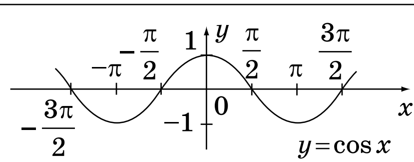
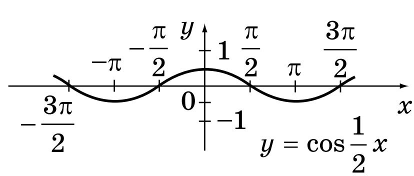
Окончание таблицы

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$	
	

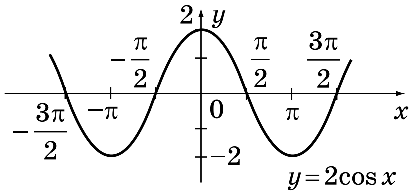
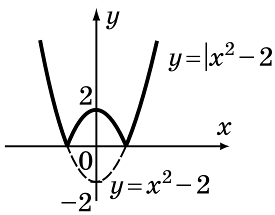
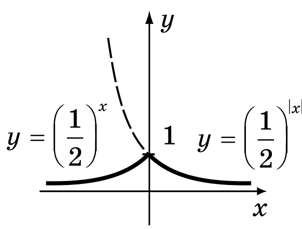
Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат

$y = -f(x)$ Симметрия относительно оси абсцисс	
$y = f(x)$ Симметрия относительно оси ординат	
$g = f(x+a)$ Перенос графика $y = f(a)$ по оси абсцисс на $-a$ единиц	

Продолжение таблицы

$\boxed{y = f(x)+b}$ Перенос графика $y = f(a)$ по оси ординат на b единиц	
$\boxed{f(kx),\ k > 0}$	
а) при $0 < k < 1$ — растяжение от точки (0; 0) вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз;	
б) при $k > 1$ — сжатие к точке (0; 0) вдоль оси абсцисс в k раз	
$\boxed{y = kf(x),\ k > 0}$	
а) при $0 < k < 1$ сжатие к точке (0; 0) вдоль оси ординат;	

Окончание таблицы

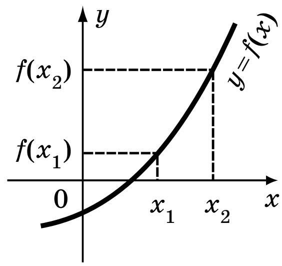
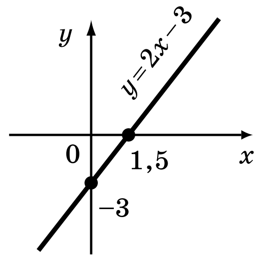
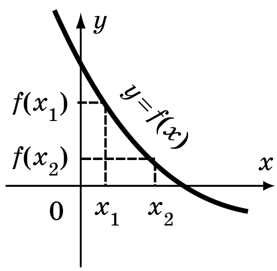
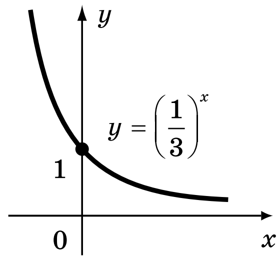
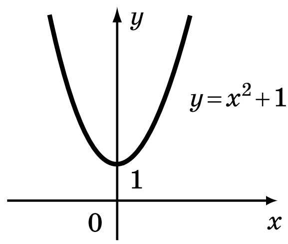
б) при $k > 1$ растяжение от точки (0; 0) вдоль оси ординат	
$\boxed{y = \lvert f(x) \rvert}$ Часть графика в верхней полуплоскости и на оси абсцисс — без изменения; часть графика в нижней полуплоскости — **симметрия относительно** оси Ox	
$\boxed{y = f(\lvert x \rvert)}$ Часть графика в правой полуплоскости и на оси ординат — без изменения; вместо части в левой полуплоскости строим симметричную правой относительно оси Oy	

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на числовом промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из X: $x_2 > x_1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$

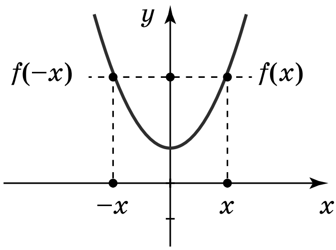
Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Функция $y = f(x)$ называется убывающей на числовом промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из X:
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Если функция только возрастает или только убывает на данном числовом промежутке, то она называется монотонной на этом промежутке</td>
</tr>
</table>

Чётность и нечётность функции

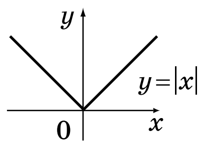
<table>
<tr>
<td>

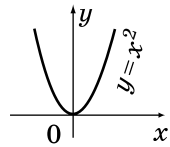
Функция $f(x)$ называется **чётной,** если для любого значения x из её области определения функции значение $-x$ тоже принадлежит области определения и выполняется $f(-x) = f(x)$

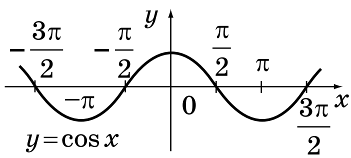


</td>
<td>

График симметричен относительно оси Oy

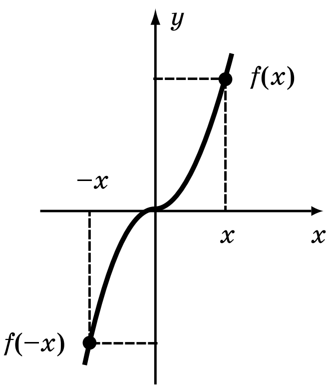






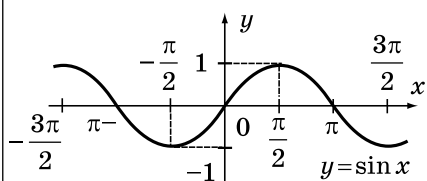
</td>
</tr>
<tr>
<td>

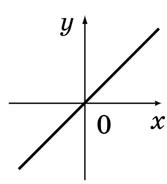
Функция $f(x)$ называется **нечётной,** если для любого значения x из её области определения значение $-x$ тоже принадлежит области определения и выполняется $f(-x) = -f(x)$

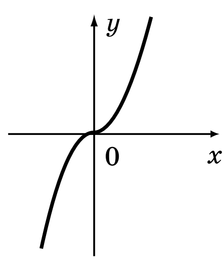


</td>
<td>

График симметричен относительно начала координат





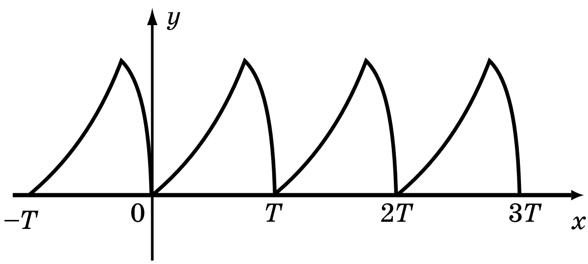


</td>
</tr>
</table>

Периодичность функции

Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $(x-T)$ и $(x+T)$ также принадлежит этой области и выполняется равенство:

$f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, где T — период функции



Если функция $y = f(x)$ имеет наименьший положительный период T, то функция $y = f(kx+b)$ имеет период $T_1 = \dfrac{T}{|k|}$

Ограниченность функции

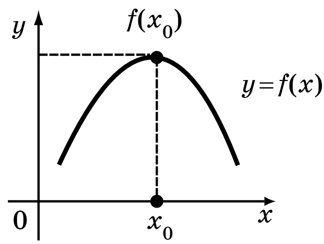
Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на всей области определения $D(f)$, если существует такое число C, что $|f(x)| \leq C$ для каждой точки $x \in D(f)$.
Функция, ограниченная на множестве $x \in D(f)$, может быть неограниченной на всей области определения

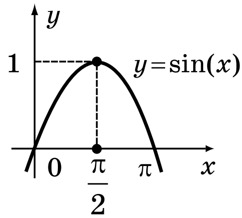
Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции

Точки экстремума — общий термин, объединяющий точки минимума и максимума

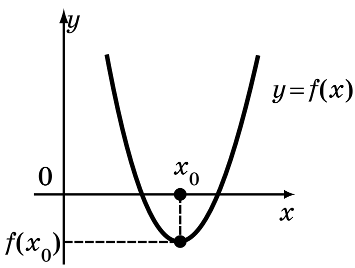
Точка x_0 — **точка максимума**, если для этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме точки x_0) выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$, где x_0 — точка максимума; $f(x_0)$ — максимум функции

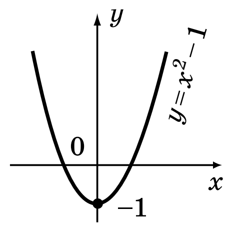
Продолжение таблицы



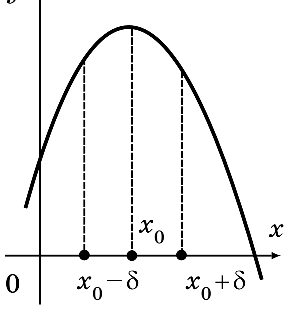


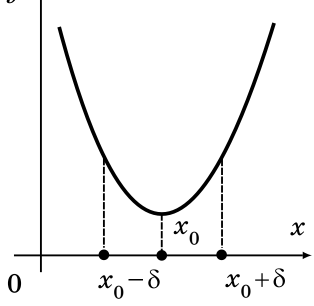
Точка x_0 — **точка минимума**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме точки x_0), выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$ x_0 — точка минимума; $f(x_0)$ — минимум функции





Если функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке $(x_0-\delta;\ x_0)$ и убывает (возрастает) на некотором промежутке $[x_0;\ x_0+\delta)$, то точка x_0 является точкой максимума (минимума) функции $f(x)$

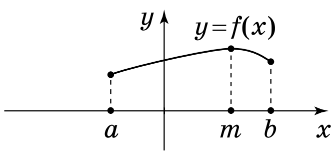


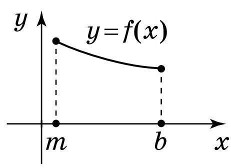


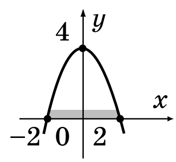
Окончание таблицы

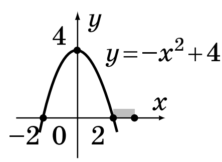
Нахождение экстремумов функции (максимума и минимума) для функции $y=f(x)$: 1) если $x_{\min}$ — точка минимума функции, то минимум этой функции $f_{\min}=f(x_{\min})$; 2) если $x_{\max}$ — точка максимума функции, то максимум этой функции $f_{\max}=f(x_{\max})$

Наибольшее и наименьшее значения функции

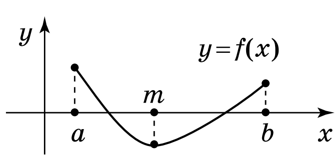


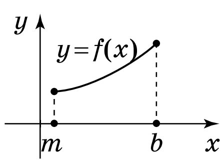


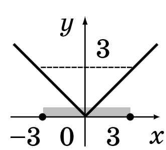


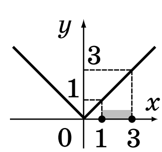


Функция $y = f(x)$, определённая на некотором промежутке, достигает своего **наибольшего значения**, если существует такая точка m из этого промежутка, что для всех x этого промежутка выполняется неравенство $f(x) \le f(m)$









Окончание таблицы

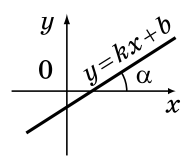
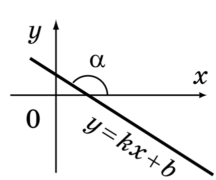
Функция $y = f(x)$, определённая на некотором промежутке, достигает своего **наименьшего значения**, если существует такая точка m из этого промежутка, что для всех x промежутка выполняется неравенство $f(x) \geq f(m)$
Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, нужно: 1) вычислить значение функции в каждой точке минимума (максимума) на этом отрезке; 2) вычислить значение функции на концах отрезка; 3) из полученных чисел выбрать наибольшее (наименьшее)

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

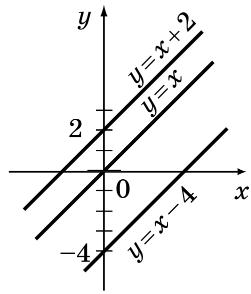
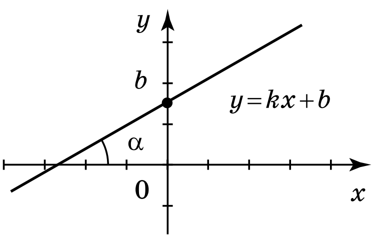
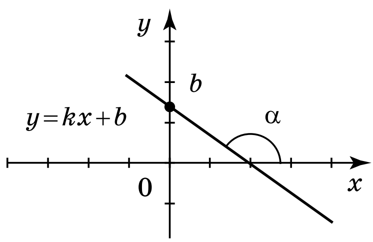
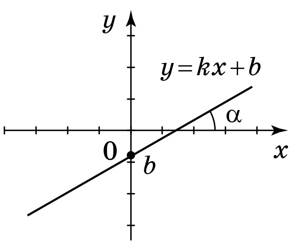
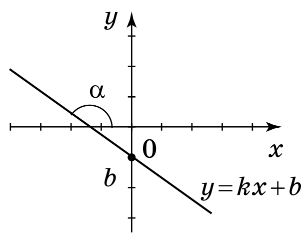
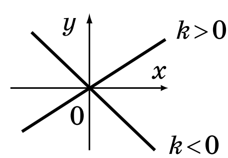
Линейная функция, её график

Функция вида $y = kx+b$, где k и b — числа, а x — переменная, называется **линейной**. Графиком любой линейной функции является прямая

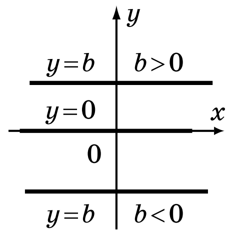
Геометрический смысл коэффициентов *k* и *b*

Коэффициент k (угловой коэффициент) отвечает за наклон графика функции: а) $k > 0 \Leftrightarrow 0° < \alpha < 90°$ функция возрастает; б) $k < 0 \Leftrightarrow 90° < \alpha < 180°$ функция убывает	 при $k > 0$  при $k < 0$

Продолжение таблицы

<table>
<tr>
<td>Коэффициент b отвечает за сдвиг графика вдоль оси Oy:
а) $b > 0$, $y = kx+b$ получается путём сдвига графика $y = kx$ вверх на b единиц вдоль оси Oy;
б) $b < 0$, $y = kx+b$ получается путём сдвига графика $y = kx$ на $|b|$ единиц вниз вдоль оси Oy</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Получаем четыре ситуации</td>
</tr>
<tr>
<td>1. $k > 0$, $b > 0$; $0° < \alpha < 90°$
</td>
<td>2. $k<0$, $b>0$; $90°<\alpha< 180°$
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. $k>0$, $b<0$; $0°<\alpha< 90°$
</td>
<td>4. $k<0$, $b<0$; $90°<\alpha< 180°$
</td>
</tr>
<tr>
<td>$y = kx$
$y = kx+b$; $b = 0$; $k \neq 0$.
График прямой пропорциональности.
Прямая проходит через начало координат</td>
<td></td>
</tr>
</table>

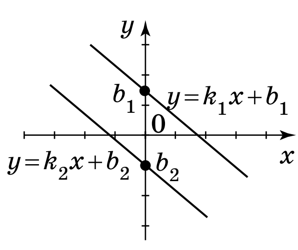
Окончание таблицы

а) $y = b$ $y = kx+b$; $b \neq 0$; $k = 0$. Прямая, параллельная оси Ox; б) $y = kx+b$; $b = 0$; $k = 0$; $y = 0$. Прямая совпадает с осью Ox	

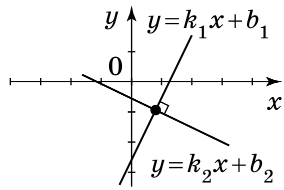
Свойства графика линейной функции

Свойства	$k > 0$	$k < 0$
1. Область определения функции состоит из всех чисел	$y = 3x-2$	$y = -2x+3$
	$x \in R$	
2. Область значений ($k \neq 0$) состоит из всех чисел. Если $k = 0$, то $y = b$ — единственное значение	$y \in R$	
3. $k > 0$ — возрастает; $k < 0$ — убывает	возрастает	убывает
4. Если $b = 0$, то $y = kx$ — функция нечётная	экстремумов нет	
5. Пересекает ось Oy в точке $(0; b)$; ось Ox — в точке $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$, $k \neq 0$	точки пересечения с осями:	
	$(0; -2)$; $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$	$(0; 3)$; $(1{,}5; 0)$

Взаимное расположение графиков линейных функций

Условие параллельности двух прямых $y = k_1x+b_1$ и $y = k_2x+b_2$: графики этих функций параллельны, если $k_1 = k_2$	

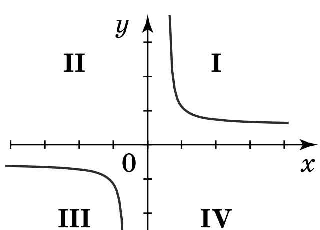
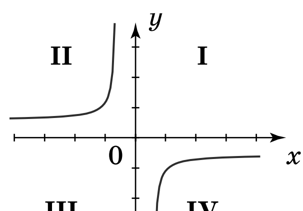
Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td>Условие перпендикулярности прямых $y = k_1x + b_1$
и $y = k_2x + b_2$:
графики этих функций перпендикулярны,
если $k_1 \cdot k_2 = -1$; $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график

Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость
Функция, которую можно задать формулой вида $y = \dfrac{k}{x}$, где x — независимая переменная, k — некоторое число, отличное от нуля, называется обратной пропорциональностью

Свойства функции $y = \dfrac{k}{x}$

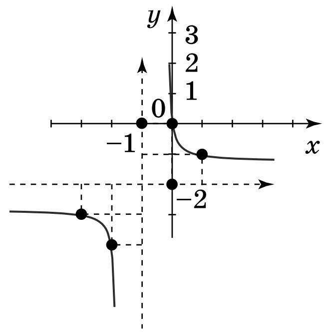
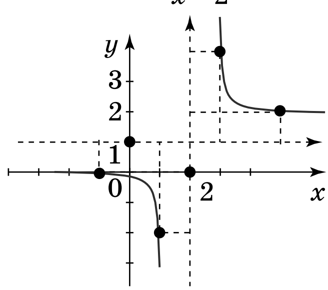
<table>
<tr><th>$k > 0$</th><th>$k < 0$</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">1. Область определения — множество всех действительных чисел, кроме $x = 0$. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

$\boldsymbol{k > 0}$	$\boldsymbol{k < 0}$
2. Множество значений — множество всех действительных чисел, кроме $y = 0$. $E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$	
3. Нечётная. График симметричен относительно начала координат	
4. График функции — **гипербола**. Состоит из двух ветвей	
5. График лежит в I и III координатных четвертях. При $x > 0$, $y > 0$; при $x < 0$, $y < 0$	5. График лежит во II и IV координатных четвертях. При $x > 0$, $y < 0$; при $x < 0$, $y > 0$
6. Функция убывает на всей области определения, т.е. при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$	6. Функция возрастает на всей области определения, т. е. при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$

Дробно-линейная функция, её свойства и график
Функция вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d — постоянные, причём $c \neq 0$, называется **дробно-линейной.** Функция определена всюду, кроме $x = -\dfrac{d}{c}$. Дробно-линейную функцию можно привести к виду: $y = n + \dfrac{k}{x+m}$, где $m = \dfrac{d}{c}$, $n = \dfrac{a}{c}$. Таким образом, график дробно-линейной функции — это **гипербола**, которую можно получить **сдвигом** гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ на $-m$ единиц вдоль оси Ox и на n единиц вдоль оси Oy

Окончание таблицы

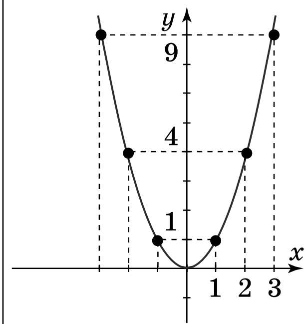
График функции $y = \dfrac{-2x}{x+1}$, $x \neq -1$. $\dfrac{-2x}{x+1} = \dfrac{-2x-2+2}{x+1} =$ $= \dfrac{-2(x+1)}{x+1} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2}{x+1} - 2$. То есть график $y = \dfrac{-2x}{x+1}$ или $y = \dfrac{2}{x+1} - 2$ получается из графика $y = \dfrac{2}{x}$ путём сдвига по оси Ox на 1 единицу влево и по оси Oy на 2 единицы вниз	$y = \dfrac{-2x}{x+1}$ 
График функции $y = \dfrac{x+1}{x-2}$, $x \neq 2$. $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x-2+2+1}{x-2} =$ $= \dfrac{x-2}{x-2} + \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{3}{x-2} + 1$. График $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ или $y = \dfrac{3}{x-2} + 1$ получается путём сдвига на 2 единицы вправо вдоль оси Ox и на 1 единицу вверх вдоль оси Oy ($x \neq 2$)	$y = \dfrac{x+1}{x-2}$ 

Квадратичная функция, её график

Функция вида $y = ax^2+bx+c$, где a, b, c — некоторые числа ($a \neq 0$), x — переменная, называется **квадратичной**

Свойства функции $y = x^2$

1. Область определения — все действительные числа: $D(f) = R$.
2. Множество значений $E(f) = [0; +\infty)$.
3. Графиком функции является парабола. Вершина параболы — (0; 0).
4. $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; отрицательных значений нет.
5. Чётная функция, график симметричен относительно оси Oy.
6. Возрастает при $x \in [0; +\infty)$; убывает при $x \in (-\infty; 0]$



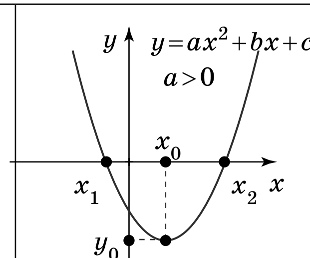
Свойства функции $y = ax^2+bx+c$

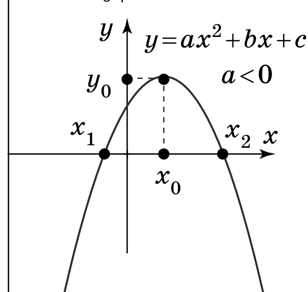
1. Область определения — все действительные числа: $D(f) = R$.
2. Область значений:

   если $a > 0$, то $E(f)$: $[y_0; +\infty)$;

   если $a < 0$, то $E(f)$: $(-\infty; y_0]$,

   где $(x_0; y_0)$ — координаты вершины параболы.
3. При $b = 0$ функция $y = ax^2+c$ — чётная, $b \neq 0$ — общего вида.
4. Графиком функции является парабола. Вершина параболы — точка $(m; n)$, где $m = -\dfrac{b}{2a}$; $n = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$. Координату точки n можно записать и так: $n = am^2+bm+c$.



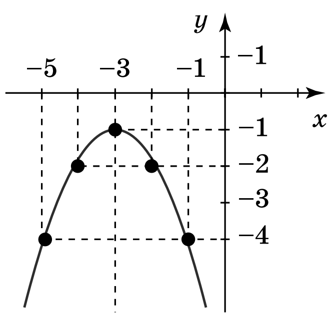


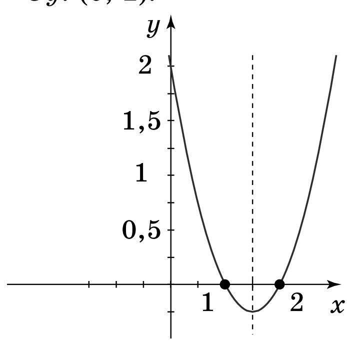
Окончание таблицы

5. При $a>0$ функция убывает на $(-\infty; x_0]$ и возрастает на $[x_0; +\infty)$, где $x_0 = m = -\dfrac{b}{2a}$. 6. Ось симметрии параболы: $x = m = -\dfrac{b}{2a}$. 7. Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, $a < 0$ — ветви параболы направлены вниз	

Основные способы построения параболы

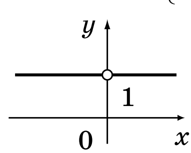
Построение графика квадратичной функции методом выделения полного квадрата и параллельным переносом	
Функцию $y = ax^2+bx+c$ привести к виду $y = a(x-m)^2+n$. Далее — параллельный перенос графика $y = ax^2$ на m единиц вдоль оси Ox, на n единиц по оси Oy	$y = -x^2-6x-10$; $-x^2-6x-10 = -(x^2+6x+10) =$ $=-(x^2+6x+9+1) = -(x+3)^2-1$. Параллельный перенос графика $y = -x^2$ на -3 единицы вдоль оси Ox и на -1 по оси Oy



<table>
<tr><th colspan="2">Построение графика квадратичной функции по четырём характеристическим точкам (вершина, нули, точка пересечения с осью Oy)</th></tr>
<tr><th>Алгоритм</th><th>Пример</th></tr>
<tr><td>
1. Построить вершину параболы $(m;\ n)$, вычислив m и n по формулам: $m = -\frac{b}{2a}$ и $n = am^2 + bm + c$.
2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси Oy, ось симметрии параболы, $x = m$.
3. Нули функции: $ax^2 + bx + c = 0$. x_1 и x_2 — корни уравнения.
4. Точка пересечения с осью Oy: $(0;\ c)$. Отметить её на оси Oy.
5. При необходимости найти дополнительные точки.
6. Построить график через найденные точки
</td><td>
Построить график
$y = x^2 - 3x + 2$
1. $m = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} = 1{,}5;$
$n = 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 2 = -0{,}25.$
2. Ось симметрии: $x = 1{,}5$.
3. Нули функции:
$x^2 - 3x + 2 = 0;$
$x_1 = 1;\ x_2 = 2.$
4. Точка пересечения с осью Oy: $(0;\ 2)$.


</td></tr>
</table>

Степенная функция с натуральным показателем, её график

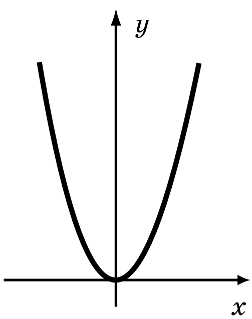
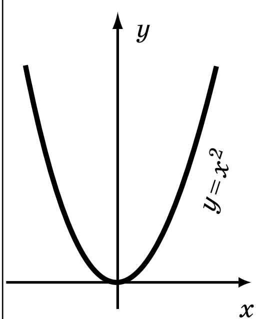
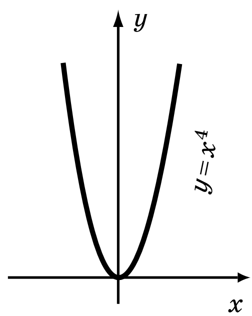
<table>
<tr><td>Функция вида $y = x^a$, где α — действительное число, называется **степенной**</td><td>
Если α = 0, то $y = \begin{cases} x^0 = 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$


</td></tr>
</table>

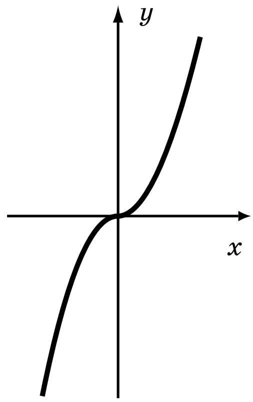
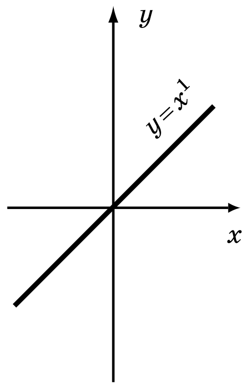
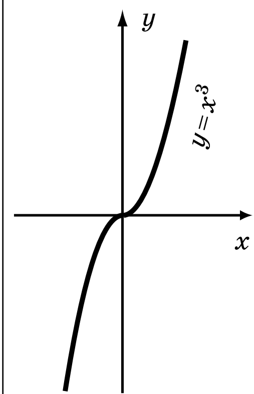
Окончание таблицы

Для описания свойств степенной функции рассматриваются характеристики: 1) область определения: $D(y)$; 2) область значений: $E(y)$; 3) чётность или нечётность; 4) возрастание и убывание функции на области определения

Графики и свойства функции $y = x^a$ ($a \neq 0$)

<table>
<tr><td colspan="4">1. $y = x^{\alpha}$, α — чётное натуральное число ($y = x^{2n}$, $n \in N$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = x^{2n}$, $n \in N$</td><td>$y = x^2$, $n = 1$</td><td>$y = x^4$, $n = 2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$D(y)$</td><td>$E(y)$</td><td>чётность и нечётность</td><td>возрастание, убывание</td></tr>
<tr><td>R</td><td>$[0; +\infty)$</td><td>чётная</td><td>убывает $x \in (-\infty; 0]$; возрастает $x \in [0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. $y = x^{\alpha}$, α — нечётное натуральное число ($y = x^{2n+1}$, $n \in N$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = x^{2n+1}$, $n \in N$</td><td>$n = 1$, $y = x^1$</td><td>$n = 3$, $y = x^3$</td></tr>
</table>

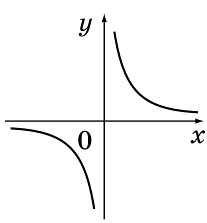
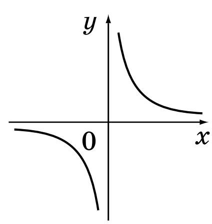
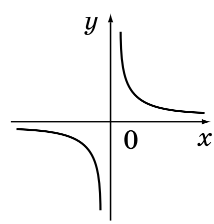
Продолжение таблицы

$D(y)$	$E(y)$	**чётность и нечётность**	**возрастание, убывание**
R	R	нечётная	возрастает

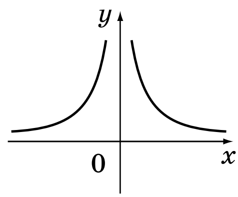
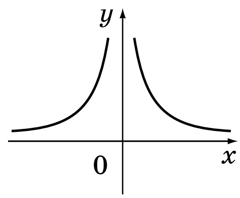
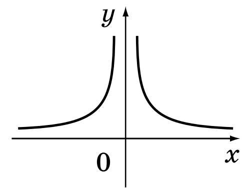
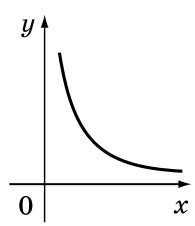
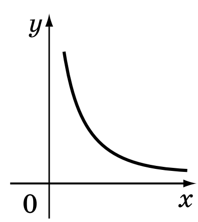
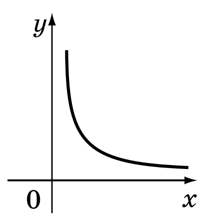
3. $y = x^{\alpha}$, α — нечётное целое отрицательное число

$$\left(y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}},\ n \in Z\right)$$

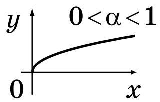
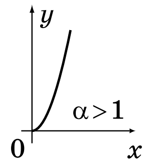
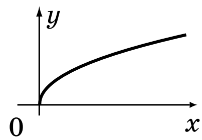
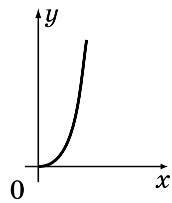
$y = x^{-(2n-1)} = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$	$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$
		

$D(y)$	$E(y)$	**чётность и нечётность**	**возрастание, убывание**
$x \neq 0$	$y \neq 0$	нечётная	убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

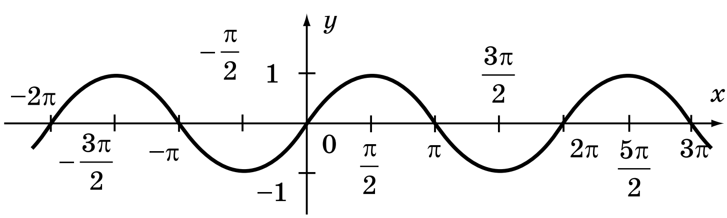
Продолжение таблицы

4. $y = x^{\alpha}$, α — чётное отрицательное число $\left(y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}},\ n \in Z\right)$			
$y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$		$y = \frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{x^4}$
			
***D*(*y*)**	***E*(*y*)**	**чётность и нечётность**	**возрастание, убывание**
$x \neq 0$	$(0; +\infty)$	чётная	возрастает $x \in (-\infty; 0)$; убывает $x \in (0; +\infty)$
5. $y = x^{a}$, α — нецелое отрицательное число			
$y = x^{\alpha}$, $\alpha < 0$		$y = x^{-\frac{1}{2}}$	$y = x^{-\frac{3}{2}}$
			
***D*(*y*)**	***E*(*y*)**	**чётность и нечётность**	**возрастание, убывание**
$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	ни чётная, ни нечётная	убывает
6. $y = x^{a}$, α — нецелое положительное число			
$0 < \alpha < 1$, $\alpha > 1$		$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{\frac{3}{2}}$

Окончание таблицы

			
***D*(*y*)**	***E*(*y*)**	**чётность и нечётность**	**возрастание, убывание**
$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	ни чётная, ни нечётная	возрастает

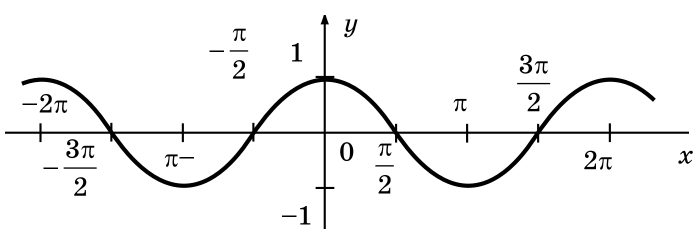
Тригонометрические функции, их графики

График функции $y = \sin x$ (синусоида)	
	
Свойства функции $y = \sin x$	
1. Область определения	$x \in R$ (x — любое число)
2. Область значений	$y \in [-1; 1]$
3. Функция нечётная	$\sin(-x) = -\sin x$
4. Периодическая функция	$T = 2\pi$

Окончание таблицы

5. Точки пересечения с осями координат	$(\pi k;\ 0)$, $k \in \mathrm{Z}$
6. Промежутки знакопостоянства	$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k,\ \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$; $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$
7. Промежутки возрастания и убывания $y = \sin x$	Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$; убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$
8. Наибольшее значение функции	1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$
9. Наименьшее значение функции	-1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$

График функции $y = \cos x$ (косинусоида)



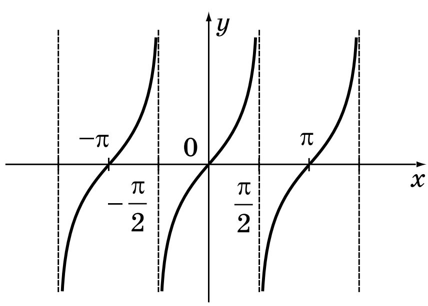
Свойства функции $y = \cos x$

1. Область определения	$x \in R$
2. Область значений	$y \in [-1;\ 1]$

Окончание таблицы

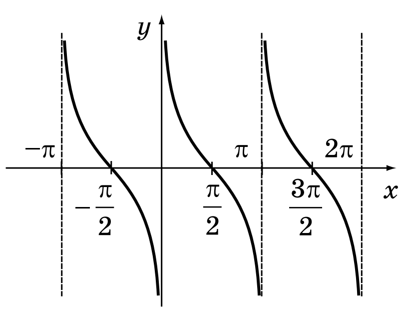
3. Функция чётная	$\cos(-x) = \cos x$
4. Периодическая функция	$T = 2\pi$
5. Точки пересечения с осями координат	$(0;\ 1)$ и $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ 0\right)$, $k \in Z$
6. Промежутки знакопостоянства	$\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; $\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$
7. Промежутки возрастания и убывания	$\cos x$ возрастает на $[\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k]$, $k \in Z$; $\cos x$ убывает на $[2\pi k;\ \pi+2\pi k]$, $k \in Z$
8. Наибольшее значение функции	1 при $x = 2\pi k$, $k \in Z$
9. Наименьшее значение функции	-1 при $x = \pi+2\pi k$, $k \in Z$

График функции $y = \operatorname{tg} x$ (тангенсоида)



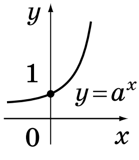
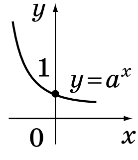
Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ (тангенсоида)	
1. Область определения	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
2. Область значений	$y \in R$
3. Функция нечётная	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
4. Периодическая	$T = \pi$
5. Точки пересечения с осями координат	$(\pi k;\ 0),\ k \in Z$
6. Промежутки знакопостоянства	$\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z;$ $\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right),\ k \in Z$
7. Промежутки возрастания и убывания	$\operatorname{tg} x$ возрастает на каждом промежутке области определения $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$
8. Наибольшего и наименьшего значения	нет

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенсоида)



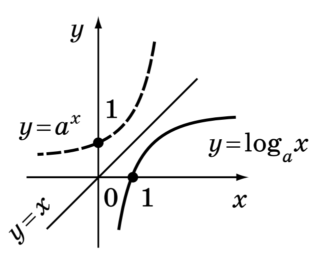
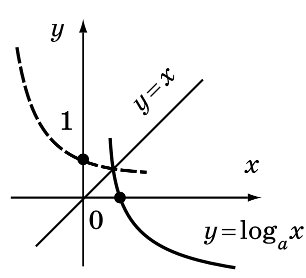
Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенсоида)	
1. Область определения	$x \neq \pi k,\ k \in Z$
2. Область значений	$y \in R$
3. Функция нечётная	$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
4. Функция периодическая	$T = \pi$
5. Точки пересечения с осями координат	с осью Oy — нет; с осью Ox: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ 0\right),\ k \in Z$
6. Промежутки знакопостоянства	$\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$; $\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi + \pi k\right),\ k \in Z$
7. Промежутки возрастания и убывания	функция $\operatorname{ctg} x$ убывает на каждом из промежутков своей области определения: $(\pi k;\ \pi + \pi k),\ k \in Z$
8. Наибольшего и наименьшего значения	нет

Показательная функция, её график

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$	
График показательной функции	
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

Свойства показательной функции	
1. Область определения: $D(a^x) = R$. 2. Область значений: $E(a^x) = (0; +\infty)$, т.е. $y > 0$. 3. Функция ни чётная, ни нечётная. 4. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy: $(0; 1)$; с осью Ox — нет. 5. Промежутки возрастания и убывания	
$a > 1$	$0 < a < 1$
При $a > 1$ функция **возрастает** на всей области определения	При $0 < a < 1$ функция **убывает** на всей области определения
6. Для всех $x \in R$ $(y > 0)$. Наибольшего и наименьшего значения нет	

Логарифмическая функция, её график

Логарифмической функцией называется функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$	
График логарифмической функции	
Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ взаимно обратные, поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

Свойства логарифмической функции	
1. Область определения: $x > 0$; $D(\log_a x) = (0; +\infty)$. 2. Область значений: $y \in R$; $E(\log_a x) = R$. 3. Функция ни чётная, ни нечётная. 4. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy — нет; с осью Ox — (1; 0)	
$a > 1$	$0 < a < 1$
Функция $\log_a x$ **возрастает** при $a > 1$ на всей области определения	Функция $\log_a x$ **убывает** при $0 < a < 1$ на всей области определения
5. Промежутки знакопостоянства	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x > 0$ при $x > 1$; $\log_a x < 0$ при $0 < x < 1$	$\log_a x > 0$ при $0 < x < 1$; $\log_a x < 0$ при $x > 1$
6. Наибольшего и наименьшего значения нет	

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ПРОИЗВОДНАЯ

Понятие о производной функции, геометрический смысл производной

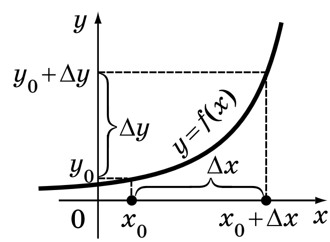
<table>
<tr><th colspan="2">Определение производной</th></tr>
<tr><td>

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, при условии, что Δx стремится к нулю.

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

</td><td>

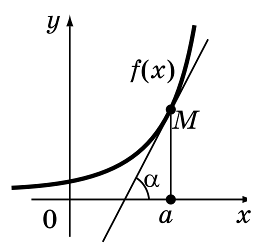


x_0 — начальное значение аргумента;
Δx — приращение аргумента;
$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ — приращение функции

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Операция нахождения производной функции называется дифференцированием</td></tr>
<tr><th colspan="2">Геометрический смысл производной.
Уравнение касательной</th></tr>
<tr><td>

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ — угловой коэффициент касательной:
$k = f'(a)$; $f'(a) = \operatorname{tg}\alpha$

</td><td>



</td></tr>
</table>

Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком

Производная характеризует **скорость изменения функций** при изменении аргумента. Если процесс протекает по закону $s = s(t)$, то $s'(t)$ — скорость протекания процесса в момент времени t	$s = s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени; $v = s'(t)$ — скорость прямолинейного движения; $a = v'(t)$ — ускорение прямолинейного движения

Уравнение касательной к графику функции

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$	
Уравнение прямой имеет вид: $y = kx+b$. $k = f'(a)$, тогда уравнение касательной в точке $x = a$ $y = f(a)+f'(a)(x-a)$	
Составление уравнения касательной	
$y = f(x)$. Составить уравнение касательной в точке $x_0 = a$	$y = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$
1. Вычислить $f(a)$	$f(a) = f(1) = \sqrt{1} = 1$
2. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(a) = f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$
3. Подставить найденные значения в формулу $y = f(a)+f'(a)(x-a)$	$y = 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)$; $y = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$; $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ или $y = -0,5x+1,5$

Производные суммы, разности, произведения, частного

Постоянный множитель можно выносить за знак производной	$C\cdot(u(x))' = C\cdot u'(x)$
Производная суммы функций равна сумме их производных	$(u+v)' = u'+v'$
Производная произведения	$(u\cdot v)' = u'v+v'u$
Производная дроби	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$; $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Производная сложной функции	$(u(v(x)))' = u'(v(x))\cdot v'(x)$

Способы вычисления производной	
Постоянный множитель можно выносить за знак производной	$(7x^5)' = 7\cdot(x^5)' = 7\cdot 5x^4 = 35x^4$
$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$	$x^{25} = 25\cdot x^{25-1} = 25x^{24}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$\left(\frac{1}{x^{10}}\right)' = -\frac{10}{x^{10+1}} = -\frac{10}{x^{11}}$
$(u+v)' = u'+v'$	$\left(\cos x+\sqrt{x}\right)' = (\cos x)' + \left(\sqrt{x}\right)' = -\sin x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(u\cdot v)' = u'v+v'u$	$(x^2\cdot\sin x)' = (x^2)'\cdot\sin x+(\sin x)'\cdot x^2 =$ $= 2x\sin x+x^2\cos x$

Продолжение таблицы

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, $v \neq 0$	$\left(\dfrac{3x+2}{\sin x}\right)' = \dfrac{(3x+2)'\sin x - (\sin x)'(3x+2)}{\sin^2 x} = \dfrac{3\sin x - (3x+2)\cos x}{\sin^2 x}$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\sin 17x)' = \cos 17x \cdot (17x)' = 17\cos 17x$ $\left(\sin\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)' = \left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)'\cos\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2}\cos\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$
$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$\left(\cos\dfrac{x}{3}\right)' = -\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}$
$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$; $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	$(\operatorname{tg} 4x)' = \dfrac{4}{\cos^2 4x}$; $\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)' = -\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$\left(\dfrac{1}{x^2+2x}\right) = -\dfrac{(x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2} = -\dfrac{2x+2}{(x^2+2x)^2}$
$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)' = \dfrac{(x^2+2x+5)'}{2\sqrt{x^2+2x+5}} = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}$
$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{n \cdot u'}{u^{n+1}}$	$\left(\dfrac{1}{(3x+7)^6}\right)' = \dfrac{-6\cdot(3x+7)'}{(3x+7)^7} = \dfrac{-6\cdot 3}{(3x+7)^7} = -\dfrac{18}{(3x+7)^7}$

Окончание таблицы

$(a^{ux})' =$ $= u'(x) \cdot a^{u(x)} \cdot \ln a$	$(a^{\cos x})' = a^{\cos x} \ln a \cdot (\cos x)' = -a^{\cos x}$ $\ln a \cdot \sin x$
$(\log_a u(x))' =$ $= \dfrac{u'(x)}{u \cdot \ln a}$	$(\log_3(x^2 - 3x + 1))' = \dfrac{(x^2 - 3x + 1)'}{(x^2 - 3x + 1)\ln 3} =$ $= \dfrac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 1)\ln 3}$

Производные основных элементарных функций

Функция $f(x)$	**Производная** $f'(x)$	**Функция** $f(x)$	**Производная** $f'(x)$
C (const)	0	$\cos x$	$-\sin x$
$kx+b$	k	$\mathrm{tg}\, x$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathrm{ctg}\, x$, $x \neq \pi n$, $n \in Z$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\sqrt{x}$, $x > 0$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arcsin x$, $\lvert x \rvert \leq 1$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\dfrac{1}{x}$, $x \uparrow 0$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\arccos x$, $\lvert x \rvert \leq 1$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $x \neq 0$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathrm{arctg}\, x$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\dfrac{1}{1 + x^2}$
e^x	e^x	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$

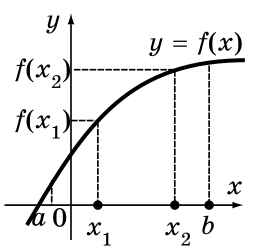
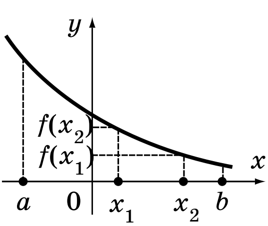
Вторая производная и её физический смысл

Вторая производная — это производная от производной	$y = f(x)$ $y' = f'(x)$ $y'' = (f'(x))' = (y')'$
Если уравнение движения задано функцией, то **первая производная** этой функции даст **скорость**, заданную функцией, а **вторая производная** даст **ускорение**, заданное функцией $a = v'(t)$ — ускорение прямолинейного движения	$a = v'(t) = s''(t)$

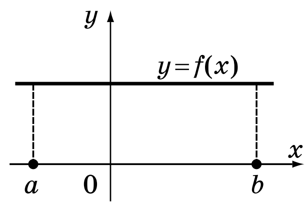
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

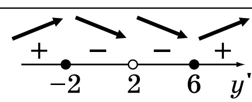
Применение производной к исследованию функций и построению графиков

Исследование функции на монотонность

Возрастание и убывание функции на промежутке	
	Функция $y = f(x)$ **возрастает** на промежутке $(a; b)$, если $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ для всех x_1, $x_2 \in (a; b)$
	Функция $y = f(x)$ **убывает** на промежутке $(a; b)$, если $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) > fx_2)$ для всех x_1, $x_2 \in (a; b)$

Окончание таблицы

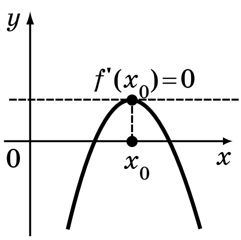
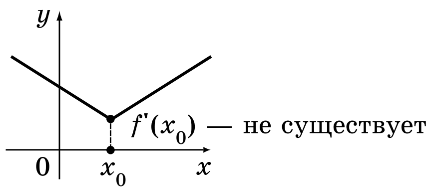
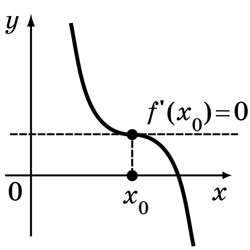
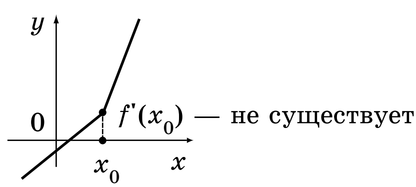
Достаточное условие возрастания (убывания) функции	Если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то функция $f(x)$ **возрастает** на промежутке $(a;\ b)$. Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то функция $f(x)$ **убывает** на промежутке $(a;\ b)$
Необходимое и достаточное условие постоянства функции	 Если $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то функция $f(x)$ **постоянна** на промежутке $(a;\ b)$

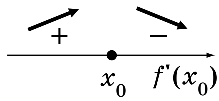
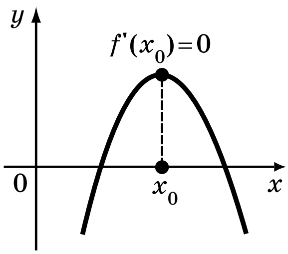
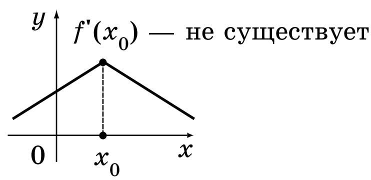
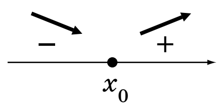
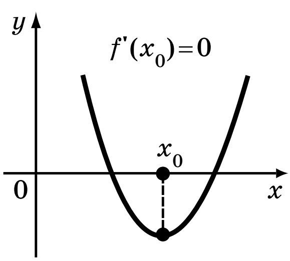
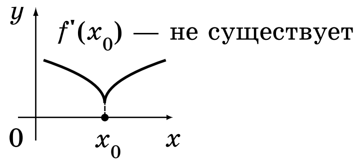
Нахождение промежутков возрастания и убывания функции	
$$y = \frac{x^2 + 6x}{x - 2}$$	
1. Найти область определения функции	$D(y) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$
2. Найти производную, разложить на множители (если возможно)	$y' = \frac{(2x+6)(x-2)-(x^2+6x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-12}{(x-2)^2} = \frac{(x+2)(x-6)}{(x-2)^2}$
3. Исследовать знак производной методом интервалов	
4. Выбрать промежутки, где $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\ -2) \cup (6;\ +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-2;\ 2) \cup (2;\ 6)$

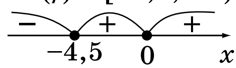
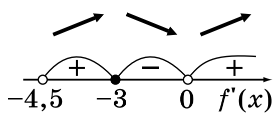
Окончание таблицы

5. Если функция непрерывна на концах промежутка, их можно присоединить к промежутку возрастания (убывания)	Возрастает на $(-\infty; -2]$ и $[6; +\infty)$. Убывает на $[-2; 2)$ и $(2; 6]$

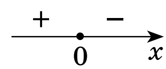
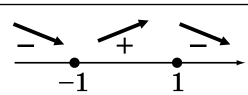
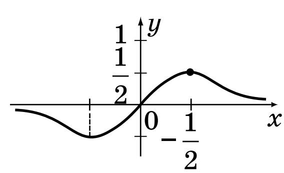
Экстремумы функции

Критические точки функции	
Если $y = f(x)$ непрерывна, а точка $x_0 \in D(y)$, то если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует, x_0 — критическая точка	
	
Необходимые условия экстремума	
Если $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то x_0 — **критическая точка.** Однако не каждая критическая точка является точкой экстремума. $f'(x_0) = 0$ и $f'(x_0)$ — не существует, но x_0 не является точкой экстремума	
	

<table>
<tr><th colspan="2">Достаточное условие экстремума</th></tr>
<tr><td colspan="2">Первый признак экстремума
Если x_0 — критическая точка функции $y = f(x)$ ($f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует) и</td></tr>
<tr><td>а) при переходе через x_0 производная $f'(x_0)$ меняет знак с «+» на «−», то x_0 — точка максимума</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>б) при переходе через x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «−» на «+», то x_0 — точка минимума</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Второй признак экстремума
Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума.
Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума</td></tr>
</table>

Нахождение точек экстремума и экстремумов функций	
$f(x)=\sqrt{2x^3+9x^2}$	
1. Найти область определения функции	$2x^3+9x^2\geq 0;\ x^2(2x+9)\geq 0;$ $D(f)=[-4{,}5;\ +\infty)$ 
2. Найти производную	$f'(x)=\dfrac{6x^2+18x}{2\sqrt{2x^3+9x^2}}=\dfrac{3x(x+3)}{\sqrt{x^2(2x+9)}}$
3. Найти критические точки	$f'(x)$ не существует, если $x=0$. $x=-4{,}5$ не является внутренней точкой области определения. $f'(x)=0$ при $x=-3$
4. Определить знак производной на каждом из интервалов, на которые критические точки разбивают область определения	
5. Найти точки экстремума	$x=-3$ — точка максимума; $x=0$ — точка минимума
6. Найти экстремумы	$f_{\max}=f(-3)=3\sqrt{3}$; $f_{\min}=f(0)=0$

Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических задачах

Схема исследования функции	
$y = \dfrac{x}{x^2+1}$	
1. Область определения функции $D(f)$	$D(f) = R$
2. Точки пересечения с осями координат $(x_0;\ 0)$ и $(0;\ y_0)$. Промежутки знакопостоянства	С осью Ox (нули): $(0;\ 0)$; с осью Oy: $(0;\ 0)$  $f(x) > 0$ при $x \in (0;\ +\infty)$; $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty;\ 0)$
3. Чётность / нечётность, периодичность	Нечётная, $f(x) = -f(x)$ $\dfrac{(-x)}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x}{x^2+1}$, непериодическая
4. Производная и критические точки	$y' = \dfrac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ y' существует при $x \in R$; $y' = 0$ при $x = \pm 1$
5. Промежутки монотонности, точки экстремума	 Возрастает при $x \in [-1;\ 1]$; убывает при $x \in (-\infty;\ -1)$ и $x \in (1;\ +\infty)$
6. Поведение функции на концах области определения. Построение графика	

<table>
<tr><th colspan="2">Использование производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Понятие производной используется для изучения изменяющихся величин, быстроты происходящих изменений</td><td>Физические производные величины</td></tr>
<tr><td>$v(t) = x'(t)$ — скорость;
$a(t) = v'(t)$ — ускорение;
$I(t) = q'(t)$ — сила тока;
$C(t) = Q'(t)$ — теплоёмкость;
$d(l) = m'(l)$ — линейная плотность;
$k(t) = l'(t)$ — коэффициент линейного расширения;
$w(t) = \varphi'(t)$ — угловая скорость;
$a(t) = w'(t)$ — угловое ускорение;
$N(t) = A'(t)$ — мощность</td></tr>
</table>

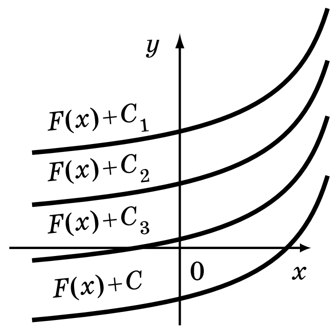
ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Первообразные элементарных функций

<table>
<tr><th colspan="3">Первообразная. Основные свойства первообразной</th></tr>
<tr><td colspan="3">Первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке называется функция $F(x)$, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$F(x)$</td><td>Доказать, что $F(x)$ — первообразная $f(x)$</td></tr>
<tr><td>$2x$</td><td>x^2,
$x \in R$</td><td>$F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x),\ x \in R$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$\frac{x^2}{2}$</td><td>$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = f(x),\ x \in R$</td></tr>
<tr><td>x^a,
$\alpha \neq -1$</td><td>$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$</td><td>$F'(x) = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) \cdot x^{\alpha} = f(x)$,
$x \in R,\ \alpha \neq -1$</td></tr>
</table>

Основное свойство первообразной

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$	то $\Leftrightarrow$	$F(x)+C$ — первообразная для $f(x)$, C — произвольная постоянная

Геометрическая интерпретация основного свойства первообразной: графики всех первообразных можно получить из любого графика путём параллельного переноса вдоль оси Oy	 $F(x)+C$ — общий вид первообразных для $f(x)$
Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на промежутке называется **неопределённым интегралом** от функции f на этом промежутке	

Правила вычисления первообразной (неопределённого интеграла)	
1. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$; $G(x)$ — первообразная для функции $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ — первообразная для $f(x)+g(x)$	$\int(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
2. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $CF(x)$ — первообразная для функции $Cf(x)$	$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$

Окончание таблицы

3. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ и $k \neq 0$, $b \in R$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$	$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$, $k \neq 0,\ b \in R$

Таблица первообразных (неопределённых интегралов)

Функция $f(x)$	**Первообразная $F(x)$**	$\int f(x)dx$
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x+C$	$\int dx = x + C$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

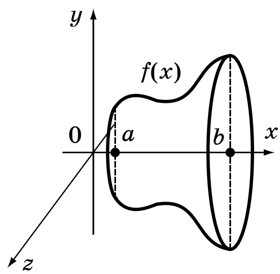
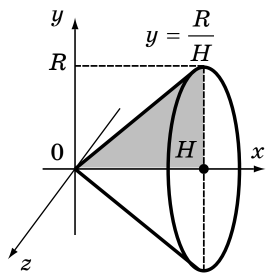
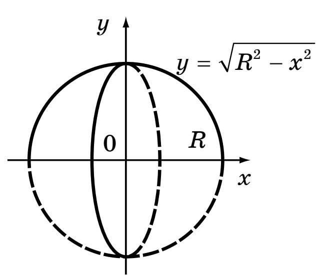
Окончание таблицы

e^x	e^x+C	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$

Примеры применения интеграла в физике и геометрии

Определённый интеграл. Основные свойства определённого интеграла	
Определённым интегралом от a до b непрерывной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $[a; b]$, называется прирост первообразной $F(x)$ для этой функции	Формула Ньютона — Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big\vert_a^b$ $f(x)$ — подынтегральная функция a и b — верхние и нижние пределы интегрирования

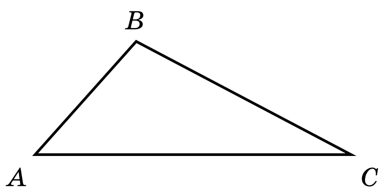
Основные правила и свойства определённого интеграла		
$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$	$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$	$\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx$
$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$	$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$	
$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, $c \in [a; b]$	$\int\limits_a^b f(kx+t)dx = \dfrac{1}{k}\int\limits_{ka+l}^{kb+l} f(t)dt$	

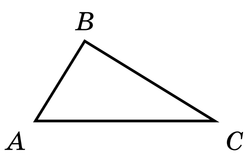
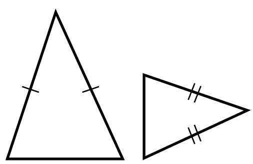
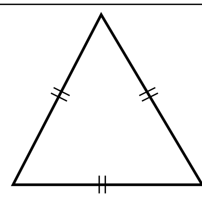
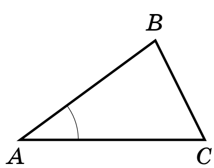
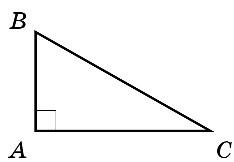
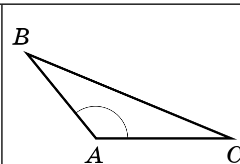
Физический (механический) смысл определённого интеграла	
Если функция $v = f(t)$ обозначает **мгновенную скорость** движения тела в каждый момент времени t на $[a; b]$, то **определённый интеграл** $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен **пути,** пройденному за отрезок времени $t = b - a$	
Геометрический смысл определённого интеграла	
Криволинейная трапеция (вокруг оси Ox): $V_{Ox} = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$	
Конус $V_к = \pi\int\limits_0^H \left(\frac{Rx}{H}\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big\|_0^H$ $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$	 $y = \frac{R}{H}x$
Шар $V_ш = \pi\int\limits_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx =$ $= 2\pi\int\limits_0^R (R^2 - x^2)dx = 2\pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^R$ $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$	 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

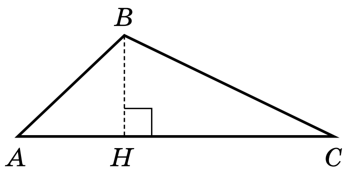
Треугольник

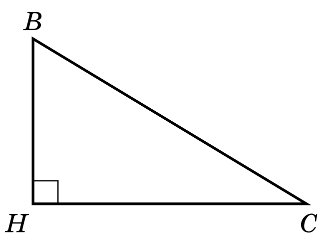
Треугольник — фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, которые их попарно соединяют	 $\triangle ABC$, A, B, C — вершины; AB, BC, AC — стороны

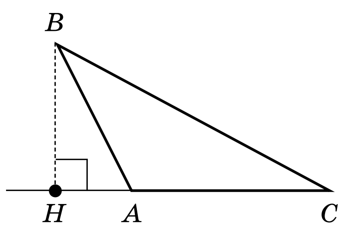
В зависимости от соотношения сторон выделяют такие виды треугольников:		
		
разносторонний — все его стороны разные	**равнобедренный** — равны две стороны	**равносторонний (правильный)** — все стороны равны
В зависимости от соотношения углов выделяют такие виды треугольников:		
		
остроугольный (все углы острые)	**прямоугольный** (один из углов прямой)	**тупоугольный** (один из углов тупой)

Продолжение таблицы

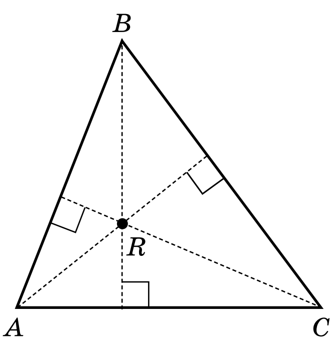
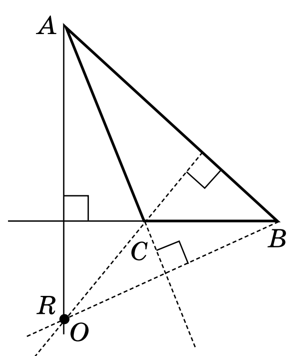
Высота треугольника — перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону



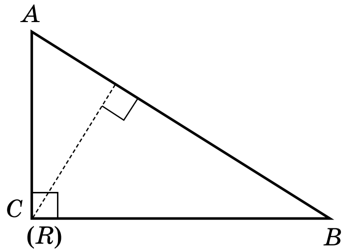


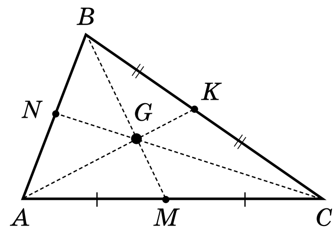
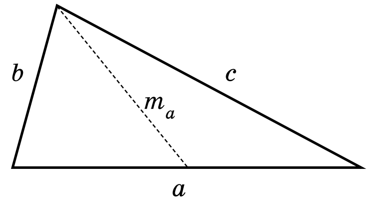


Высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **ортоцентром.** Положение ортоцентра R зависит от вида треугольника

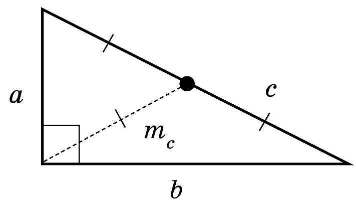
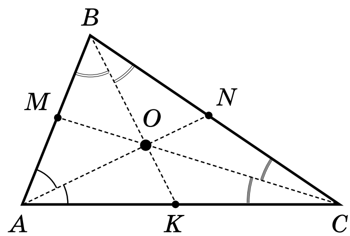
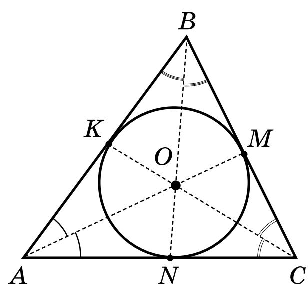
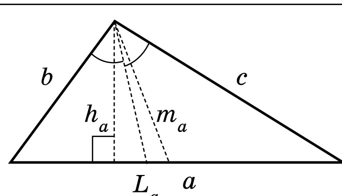
	
остроугольный (внутри области треугольника)	**тупоугольный** (вне области треугольника)

Окончание таблицы

<table>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>прямоугольный (R совпадает с C)</td></tr>
<tr><td>Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам.
То есть наибольшая высота проведена к наименьшей стороне, а наименьшая высота — к наибольшей стороне</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Свойство медианы треугольника
Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.
$BG:GM = 2:1$; $GC:GN = 2:1$; $AG:GK = 2:1$</td></tr>
<tr><td>Задача.
а) $GM = 3$ см, BM — ?
Решение.
$GM = 3$ см, тогда $BG = 6$ см;
$BM = 6 + 3 = 9$ (см).
б) $AG = 12$ см, AK — ?
Решение.
$AG = 12$ см, $GK = 6$ см,
$AK = 12 + 6 = 18$ (см).
Ответ: а) 9 см; б) 18 см</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Медианы пересекаются в одной точке,
она называется центром, или центром масс</td></tr>
<tr><td>Медиану можно вычислить по формуле:
$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$</td><td>
</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

$m_c = \dfrac{1}{2}c$ Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна её половине	
Биссектриса угла треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны и **делящий угол пополам**	
Эта точка является центром вписанной в треугольник окружности. Точка O — центр вписанной окружности, AM, CK и BN — биссектрисы	
Свойство биссектрисы треугольника Биссектриса угла треугольника делит его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам	$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$; AD — биссектриса
$m_a \geq L_a \geq h_a$, где m — медиана, L — биссектриса, h — высота	

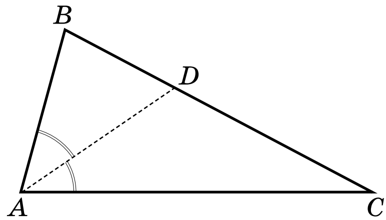
Окончание таблицы

Задача.
$BD = 6$ см, $DC = 8$ см,
AD — биссектриса;
$P_{\triangle ABC} = 35$ см.
AB — ? AC — ?
Решение.
$AB + AC = P_{\triangle ABC} - BC =$
$= 35 - (6 + 8) = 21$ (см).
По свойству биссектрисы:

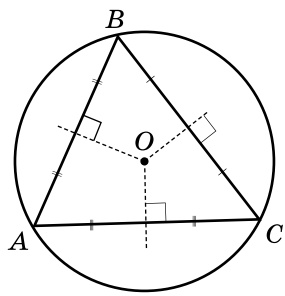
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$$

$$\left.\begin{aligned} AB &= 3x \\ AC &= 4x \end{aligned}\right\} 21$$

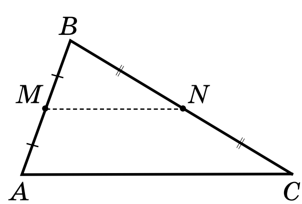
$7x = 21$; $x = 3$; $AB =$
$= 3 \cdot 3 = 9$ (см);
AC $= 4 \cdot 3 = 12$ (см).
Ответ: 12 см



Серединный перпендикуляр — прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему.
Три серединных перпендикуляра в треугольнике пересекаются в одной точке.
Эта точка — **центр окружности, описанной около данного треугольника**

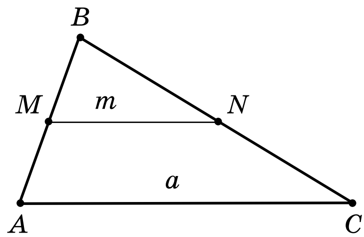


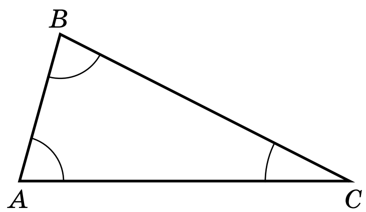
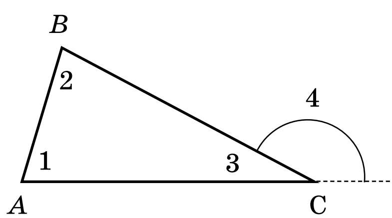
Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон.
Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне, а её длина равна половине третьей стороны

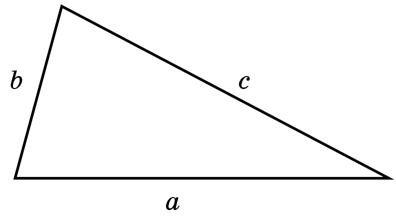


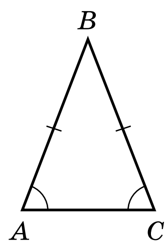
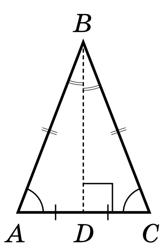
$MN \parallel AC$ и $MN = \dfrac{1}{2}AC$

Окончание таблицы

Задача. Средняя линия равностороннего треугольника равна 2,5 см. *Найти*: его периметр. *Решение.* По теореме о средней линии $m = 0{,}5a$, тогда $a = 2m = 5$ см. $P = 3a = 15$ см. *Ответ*: 15 см	

Свойства сторон и углов треугольника	
Сумма углов треугольника равна 180° $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$	
Внешний угол треугольника	
Внешний угол треугольника при данной вершине — это угол, смежный с внутренним углом треугольника. $\angle 4$ — внешний (при вершине C)	
Свойства внешнего угла треугольника	
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним	$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$
Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним	$\angle 4 > \angle 1$, $\angle 4 > \angle 2$

<table>
<tr><th colspan="2">Неравенство треугольника</th></tr>
<tr><td>$a < b + c$
$a > |b - c|$</td><td>
</td></tr>
</table>

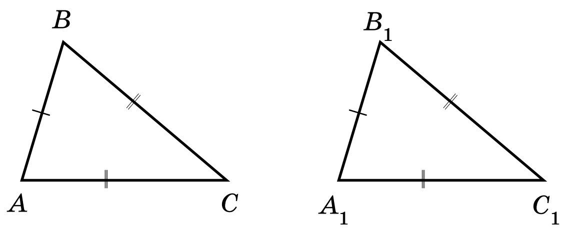
<table>
<tr><th colspan="3">Равнобедренный треугольник</th></tr>
<tr><td colspan="2">ΔABC — равнобедренный ($AB = BC$)
AC — основание, AB и BC — боковые стороны</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Свойства</td><td>Признаки</td></tr>
<tr><td>Если в ΔABC
$AB = BC$,
то $\angle A = \angle C$
(углы при основании равны)</td><td>Если в ΔABC
$\angle A = \angle C$,
то $AB = BC$
(равнобедренный треугольник)</td></tr>
</table>

Если ΔABC — равнобедренный и BD — медиана, проведённая к основанию, то BD — высота и биссектриса	Если в треугольнике совпадают: а) высота и медиана или б) высота и биссектриса или в) медиана и биссектриса, то **треугольник** является **равнобедренным**

Равенство треугольников

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$

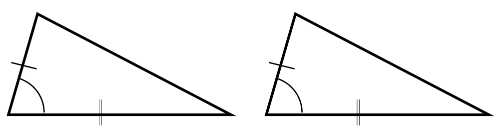
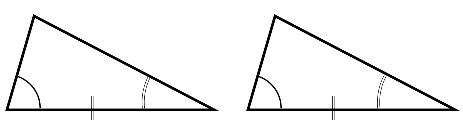
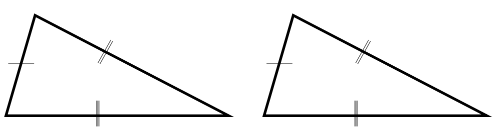
$AB = A_1B_1$	$\angle A = \angle A_1$
$AC = A_1C_1$	$\angle B = \angle B_1$
$BC = B_1C_1$	$\angle C = \angle C_1$

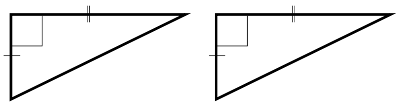
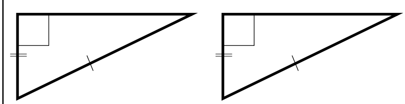
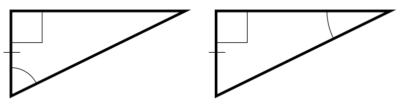
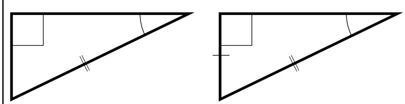


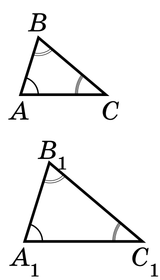
Свойства равных треугольников

1. У равных треугольников равны соответствующие элементы (стороны, углы, медианы, высоты и др.).
2. У равных треугольников против равных сторон лежат равные углы, против равных углов — равные стороны

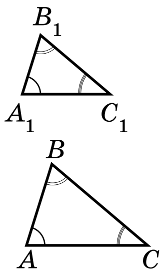
Признаки равенства треугольников

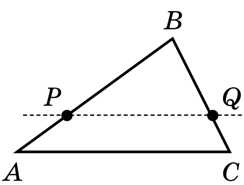
По двум сторонам и углу между ними	
По стороне и двум прилежащим углам	
По трём сторонам	

Признаки равенства прямоугольных треугольников	
По двум катетам	По гипотенузе и катету
	
По катету и острому углу	По гипотенузе и острому углу
	

Подобие треугольников	
Подобные треугольники — это треугольники, у которых соответствующие **углы равны,** а соответствующие **стороны пропорциональны.** $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$; $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$	

Свойства подобных треугольников	
$\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = k$	**Отношение периметров** равно отношению соответственных сторон и равно коэффициенту подобия
$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \left(\dfrac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2$	**Отношение площадей** подобных треугольников равно **квадрату** коэффициента подобия

Признаки подобия треугольников	
	Если $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ — по двум равным углам
	Если $\angle A = \angle A_1$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ — по двум пропорциональным сторонам и углу между ними
	Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ — по трём пропорциональным сторонам

	Если $PQ \parallel AC$, то $\Delta PBQ \sim \Delta ABC$. Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному

Задача.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$; $AB : BC : AC = 2 : 6 : 7$.

$A_1C_1 - A_1B_1 = 35$ см.

Найти: A_1B_1; B_1C_1 и A_1C_1.

Решение.

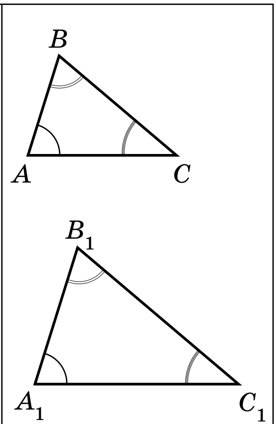
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1 = 2 : 6 : 7$; $A_1B_1 = 2x$; $B_1C_1 = 6x$; $A_1C_1 = 7x$;

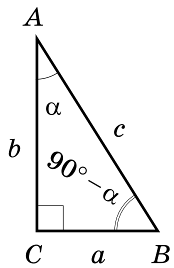
$7x - 2x = 35$; $x = 7$;

$A_1B_1 = 14$; $B_1C_1 = 42$ и $A_1C_1 = 49$.

Ответ: 14; 42; 49.



Соотношение между элементами прямоугольного треугольника



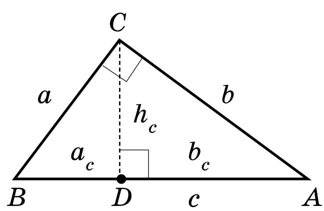
$\angle C = 90°$, a, b — катеты,
c — гипотенуза, $\angle A = \alpha$

$\boxed{a^2+b^2=c^2}$ — теорема Пифагора

$\boxed{\angle B = 90°-\alpha;\ c > a;\ c > b}$

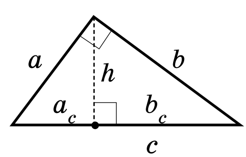
$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$
$a = c\sin\alpha$	$b = c\cos\alpha$	$a = b\operatorname{tg}\alpha$	$b = a\operatorname{ctg}\alpha$

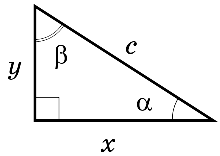
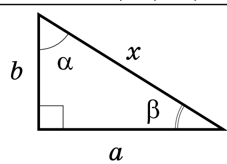
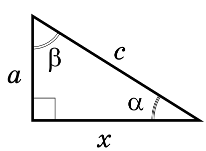
$\Delta ACD \sim \Delta ABC$
$\Delta CBD \sim \Delta ABC$
$\Delta ACD \sim \Delta CBD$
CD — высота,
$AB = c$



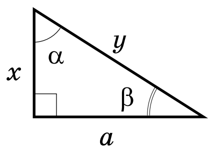
$h^2 = a_c \cdot b_c$
$a^2 = c \cdot a_c$
$b^2 = c \cdot b_c$

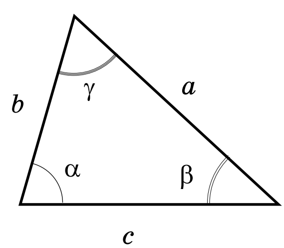
Задача.
$a_c = 9$; $b_c = 16$; a, b, c, h — ?
Решение.
$h^2 = 9\cdot 16$; $h = \sqrt{9\cdot 16} = 3\cdot 4 = 12$;
$c = 9 + 16 = 25$;
$a^2 = a_c\cdot c$; $a = \sqrt{9\cdot 25} = 3\cdot 5 = 15$;
$b^2 = b_c\cdot c$; $b = \sqrt{16\cdot 25} = 4\cdot 5 = 20$.
Ответ: 15; 20; 25; 12



<table>
<tr><th colspan="3">Решение прямоугольных треугольников</th></tr>
<tr><th>Дано</th><th>Найти</th><th>Решение</th></tr>
<tr><td>
c — гипотенуза;
α — острый угол</td><td>x, y, β</td><td>$\beta = 90° - \alpha$;
$x = c \cos\alpha$;
$y = c \sin\alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Пример 1.
Дано: $c = 2$, $\alpha = 20°$.
Найти: β, x, y.
Решение.
$\beta = 90° - 20° = 70°$; $x = c \cos 20° = 2 \cdot 0{,}9397 \approx 1{,}88$;
$y = c \sin 20° = 2 \cdot 0{,}3420 \approx 0{,}68$.
Ответ: 70°; 1,88; 0,68</td></tr>
<tr><td>
a — катет; b — катет</td><td>x, α, β</td><td>$x = \sqrt{a^2 + b^2}$;
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a}$
или $\beta = 90° - \alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Пример 2.
Дано: $a = 11$, $b = 60$.
Найти: c, α, β.
Решение.
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{11}{60} \approx 0{,}833$.
По таблице Брадиса $\alpha \approx 10°$; $\beta = 90° - 10° = 80°$;
$c = \sqrt{11^2 + 60^2} = \sqrt{3721} = 61$.
Ответ: $c = 61$; $\alpha = 10°$; $\beta = 80°$</td></tr>
<tr><td>
c — гипотенуза;
a — катет</td><td>x, α, β</td><td>$x = \sqrt{c^2 - a^2}$;
$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$; $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$
или $\beta = 90° - \alpha$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

Пример 3. *Дано*: $a = 84$, $c = 85$. *Найти*: x, α, β. *Решение.* $x = \sqrt{85^2 - 84^2} = 13$; $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{84}{85} \approx 0{,}9882$; $\alpha \approx 81°$; $\beta = 90° - 81° = 9°$. *Ответ*: $x = 0{,}9882$; $\alpha = 81°$; $\beta = 9°$.		
 a — катет; α — острый угол, противолежащий a	x, y, β	$\beta = 90° - \alpha$; $x = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$; $y = \dfrac{a}{\sin\alpha}$
Пример 4. *Дано*: $a = 9$, $\alpha = 68°$. *Найти*: β, x, y. *Решение.* $\beta = 90° - 68° = 22°$; $y = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{9}{\sin 68°} \approx \dfrac{9}{0{,}9277} \approx 9{,}71$; $x = a\ \mathrm{tg}\ 22° \approx 9 \cdot 0{,}4040 \approx 3{,}64$. *Ответ*: 22°; 3,64; 9,71.		

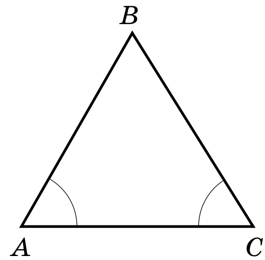
Соотношения между сторонами и углами в произвольном треугольнике	
Теорема синусов Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ **Теорема косинусов** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2c\cos\beta$; $a^2 = b^2 + c^2 - 2c\cos\alpha$	 R — радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b, c

Продолжение таблицы

<table>
<tr>
<td>

Задача 1.
Дано: ΔABC,
$\angle A = \angle C = 67°30'$, $AC = 10\sqrt{2}$.
Найти: R.
Решение.
$\angle B = 180° - (67°30' + 67°30') = 45°$;
$R = \dfrac{AC}{2\sin\angle B} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2\cdot\sin 45°} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 10$
Ответ: 10.

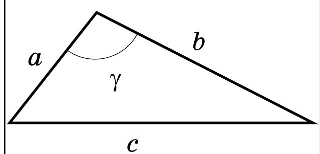
</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Задача 2.
Дано: $a = 8$, $c = 13$, $\gamma = 120°$.
Найти: b.
Решение.
Пусть $b = x$, по теореме косинусов:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°$;
$\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$;
$8^2 + x^2 - 2\cdot 8\cdot x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 13^2$;
$x^2 + 8x - 105 = 0$; $x = b = 15$.
Ответ: 15.

</td>
<td>



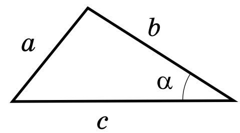
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Следствия из теоремы косинусов

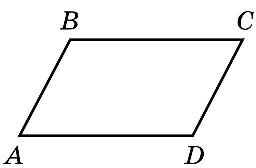
1. Косинус угла можно вычислить по формуле:
   $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.
2. Определение **вида треугольника** по теореме косинусов: если $a^2+b^2 < c^2$, γ — тупой угол, треугольник тупоугольный; если $a^2+b^2 > c^2$, γ — острый угол, треугольник остроугольный;
   если $a^2+b^2 = c^2$, $\gamma = 90°$, то треугольник прямоугольный.
3. Если a, b и c — стороны треугольника, то медиана, проведённая к стороне a, равна: $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(c^2 + b^2) - a^2}$

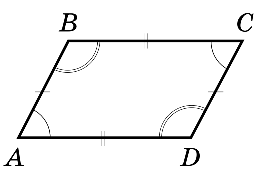
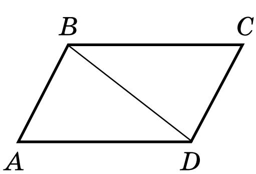
</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

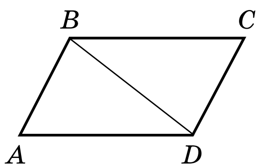
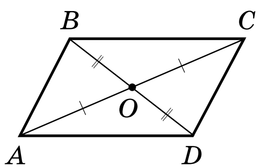
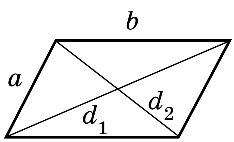
Задача 3. *Дано*: $a = 5$, $b = 5\sqrt{3}$; $c = 10$. *Найти*: α. *Решение.* $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{10^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 - 5^2}{2 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\angle\alpha = 30°$. *Ответ*: $30°$.	

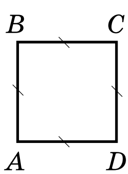
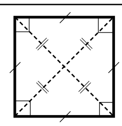
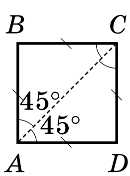
Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

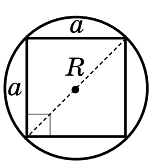
Параллелограмм	
	**Параллелограмм** — четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD \Leftrightarrow$ $ABCD$ — параллелограмм

	Свойства	**Признаки**
	Если $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$	Если $ABCD$ — четырёхугольник и $BC \parallel AD$; $BC = AD$, то $ABCD$ — параллелограмм. Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AB = DC$ и $AD = BC$, то $ABCD$ — параллелограмм
	Если $ABCD$ — параллелограмм, BD — диагональ, то $\Delta ABD = \Delta CDB$	—

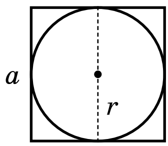
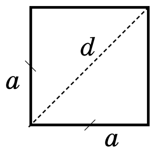
Окончание таблицы

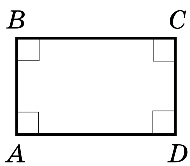
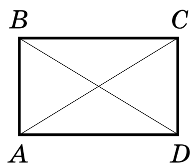
	Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle A + \angle B = 180°$ (сумма соседних углов равна 180°)	—
	Если $ABCD$ — параллелограмм, AC и BD — диагонали, то $AO = OC$; $BO = OD$	Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AO = OC$, $BO = OD$, то $ABCD$ — параллелограмм
	Сумма квадратов диагоналей равна удвоенной сумме квадратов его смежных сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$	Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон: $d_1^2 + d_2^2 =$ $= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

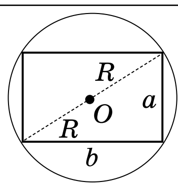
Квадрат	
  	**Квадрат** — прямоугольник, у которого все стороны равны: $AB = BC = CD = AD$. Или **квадрат** — ромб, у которого все углы прямые: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

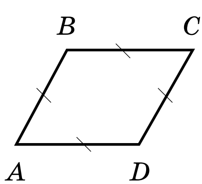
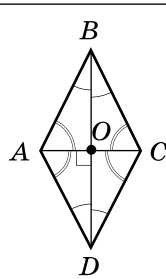
Свойства квадрата	
	Вокруг квадрата можно описать окружность: $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{d}{2}$

Окончание таблицы

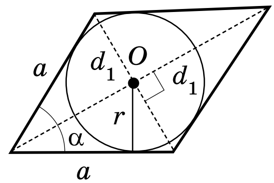
	В квадрат можно вписать окружность $r = \dfrac{a}{2}$
	Диагональ в $\sqrt{2}$ раз больше стороны, т. е. $d = a\sqrt{2}$ и $a = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$

Прямоугольник		
		**Прямоугольник** — параллелограмм, у которого все углы прямые

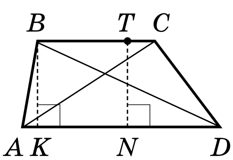
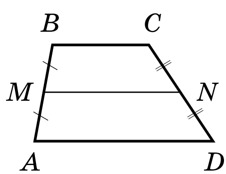
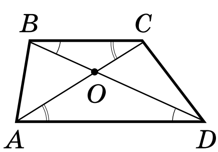
Свойства	**Признаки**
1. Все свойства параллелограмма. 2. Если $ABCD$ — прямоугольник, то $AC = BD$ (диагонали равны)	1. Если $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90°$, то $ABCD$ — прямоугольник. 2. Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, то $ABCD$ — прямоугольник
	Вокруг любого прямоугольника можно описать окружность: $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

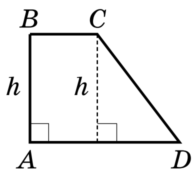
Ромб		
		**Ромб** — параллелограмм, у которого все стороны равны

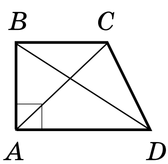
Окончание таблицы

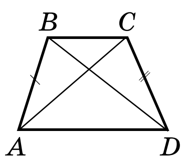
Свойства	Признаки
1. Все свойства параллелограмма. 2. Если $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали, то: а) $AC \perp BD$; б) диагонали являются биссектрисами углов	Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AB = AD = BC = CD$, то $ABCD$ — ромб
	В любой ромб можно вписать окружность: $r = \frac{h}{2} = \frac{a\sin\alpha}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a}$

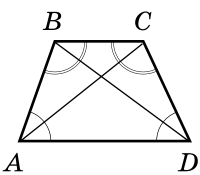
Трапеция

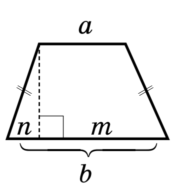
	**Трапеция** — четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. $AD \parallel BC$, AD и BC — основания; AB и CD — боковые стороны; AC и BD — диагонали; BK и TN — высоты
Средняя линия трапеции	
	**Средняя линия трапеции** — отрезок, соединяющий середины боковых сторон. MN — средняя линия **Свойства:** $\begin{matrix} MN \parallel BC \\ MN \parallel AD \end{matrix}$; $MN = \frac{BC + AD}{2}$
	$\Delta BOC \sim \Delta DOA$; $\frac{BO}{DO} = \frac{OC}{AO} = \frac{BC}{AD}$

<table>
<tr><th colspan="2">Прямоугольная трапеция</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Прямоугольная трапеция — это трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям:
$AB \perp AD$; $AB \perp BC$; $AB = h$</td></tr>
</table>

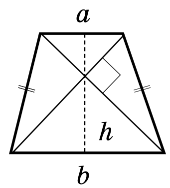
<table>
<tr><th colspan="3">Свойства</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований:
$BD^2 - AC^2 =$
$= AD^2 - BC^2$</td><td>Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов оснований и удвоенного квадрата высоты:
$AC^2 + BD^2 =$
$= AD^2 + BC^2 + 2AB^2$</td></tr>
</table>

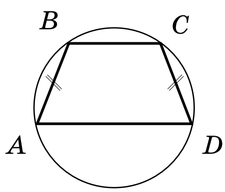
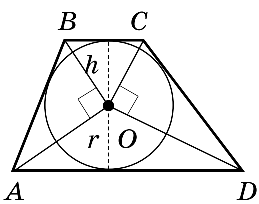
<table>
<tr><th colspan="2">Равнобокая трапеция</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Равнобокая трапеция — трапеция с равными боковыми сторонами</td></tr>
</table>

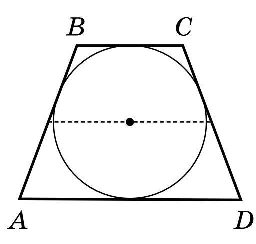
<table>
<tr><th colspan="2">Свойства</th></tr>
<tr><td>


</td><td>1. $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$; углы при основании равны.
2. $AC = BD$; диагонали равны.
Высота, проведённая из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки m и n длиной $m = \frac{a+b}{2}$
(равен средней линии $n = \frac{b-a}{2}$)</td></tr>
</table>

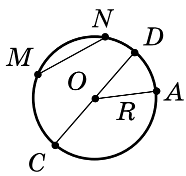
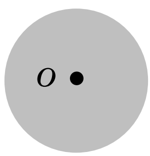
Окончание таблицы

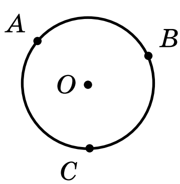
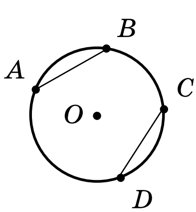
	Если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то высота равна средней линии: $h = \dfrac{a+b}{2}$

Трапеция и окружность	
	Если около трапеции **описана окружность,** эта трапеция **равнобокая.** Обратно: около равнобокой трапеции **можно описать окружность**
 $\angle AOB = \angle COD = 90°$ ΔAOB и ΔCOD — прямоугольные	Если в трапецию **вписана окружность,** то: 1) сумма оснований равна сумме боковых сторон: $AB+CD = BC+AD$; 2) радиус окружности равен половине высоты: $r = \dfrac{h}{2}$; 3) если соединить центр окружности с вершинами трапеции, треугольники, прилежащие к боковым сторонам, будут прямоугольными

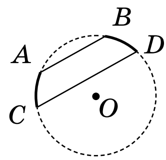
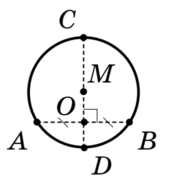
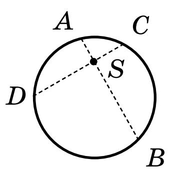
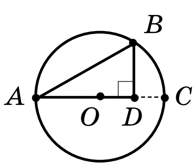
Задача. В трапецию вписана окружность, $AB = CD = 8$ см. *Найти*: среднюю линию трапеции. *Решение*. В трапецию вписана окружность, значит, $AB + CD = BC + AD = 8 + 8 = 16$	
Средняя линия составит: $\dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ (см). *Ответ*: 8 см	

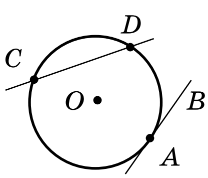
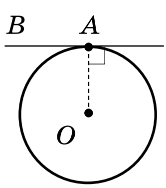
Окружность и круг

	**Окружность** — множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки (центра окружности) одинаково. O — центр окружности. **Радиус окружности** — расстояние от центра до точки на окружности. OA, OC, OD — радиусы. Обозначается R или r. **Хорда** — отрезок, соединяющий две точки на окружности. MN, CD — хорды. **Диаметр** — хорда, проходящая через центр (обозначается D или d). $D = 2R$, $CD = 2OA$
	**Круг** — множество точек плоскости, расстояние до которых от данной точки (центра круга) не превышает данного расстояния (радиуса круга)

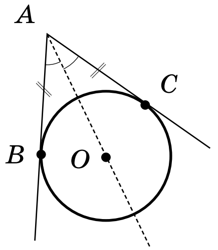
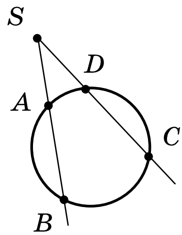
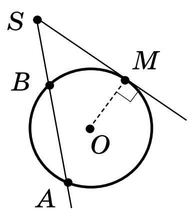
Окружность, хорды и дуги	
	**Дуга окружности** — часть окружности, ограниченная двумя её точками. $\cup AB$, $\cup BC$, $\cup AC$
Свойства	
	Равные дуги стягивают равные хорды. Если $\cup AB = \cup CD$, то $AB = CD$. Равные хорды стягивают равные дуги. Если $AB = CD$, то $\cup AB = \cup CD$

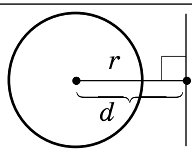
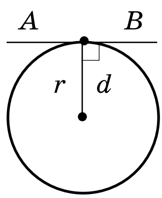
Окончание таблицы

	Параллельные хорды отсекают от окружности равные дуги. Если $AB \parallel CD$, то $\cup AC = \cup BD$
	CD — диаметр, AB — хорда. Если $CD \perp AB$, то $AM = MB$; если $AM = MB$, то $CD \perp AB$
	Если хорды AB и CD пересекаются в точке S, то $AS \cdot SB = CS \cdot SD$
	Если AB — хорда, AC — диаметр, $BD \perp AC$, то $AB^2 = AD \cdot AC;$ $BD^2 = AD \cdot DC$

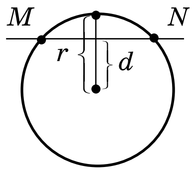
Окружность, касательные и секущие	
	**Касательная** — прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку. AB — касательная. **Секущая** — прямая, имеющая с окружностью две общие точки. CD — секущая
Свойства	
	$OA \perp AB$ Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

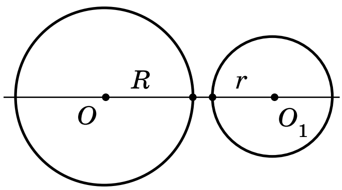
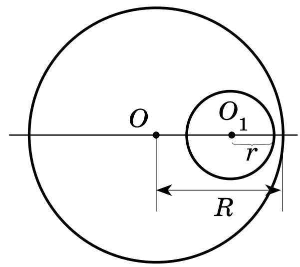
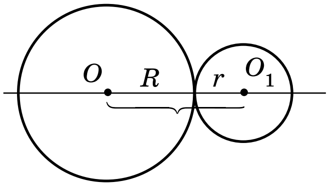
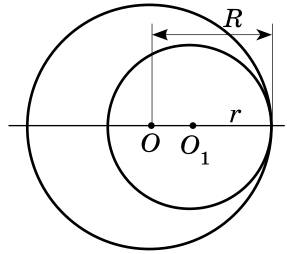
Окончание таблицы

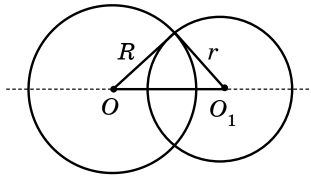
	$AB = AC$; OA — биссектриса $\angle BAC$. Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то: а) отрезки касательных равны; б) биссектриса угла между касательными проходит через центр окружности
	Если SB и SC — секущие, то $SA \cdot SB = SD \cdot SC$
	Если SM — касательная, SA — секущая, то $SM^2 = SB \cdot SA$

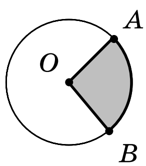
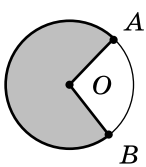
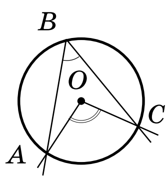
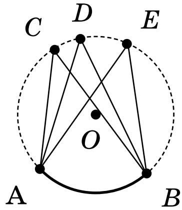
Взаимное расположение прямой и окружности	
d — расстояние от центра окружности до прямой, r — радиус окружности	
	$d > r$; общих точек нет
	$d = r$; одна общая точка; AB — касательная

Окончание таблицы

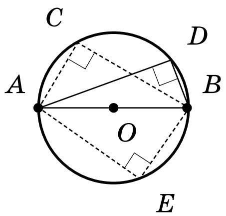
	$d < r$; две общие точки; MN — секущая

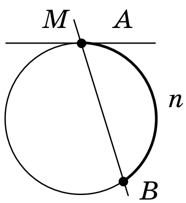
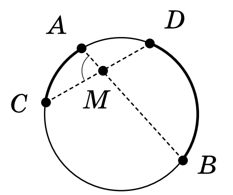
Взаимное расположение двух окружностей	
OO_1 — расстояние между центрами, R и r — радиусы окружностей ($R > r$)	
Окружности не имеют общих точек	
 Окружности лежат одна вне другой $R+r < OO_1$	 Одна окружность лежит внутри другой $OO_1 < R-r$
Окружности касаются (одна общая точка)	
 Касаются внешне $OO_1 = R+r$	 Касаются внутренне $OO_1 = R-r$

Окружности пересекаются (две общие точки)
$R - r < OO_1 < R + r$


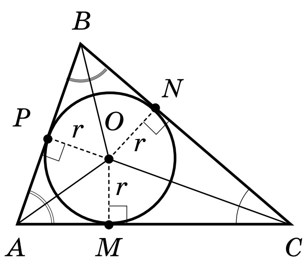
Углы в окружности	
	**Центральный угол** — плоский угол с вершиной в центре окружности. $\angle AOB$ — центральный угол. $\angle AOB = \cup AB$. Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается
	**Вписанный угол** — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают её. $\angle ABC$ — вписанный. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, и половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$; $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$
	Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой. $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$

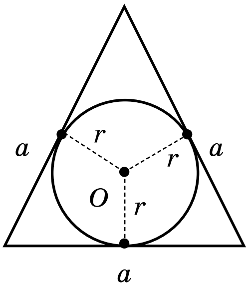
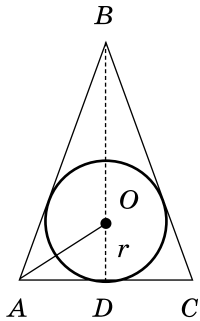
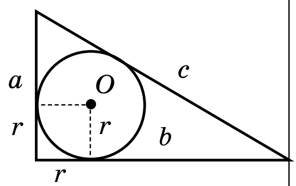
Окончание таблицы

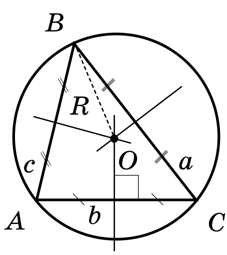
	Вписанные углы, которые опираются на диаметр, прямые. $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90°$

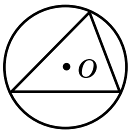
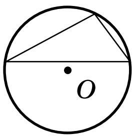
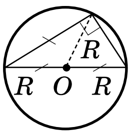
Угол между касательной и секущей	**Угол между хордами**
 MA — касательная; MB — секущая. $\angle AMB = \dfrac{1}{2} \cup MnB$	 AB и CD — хорды. $\angle AMC = \dfrac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$

Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника

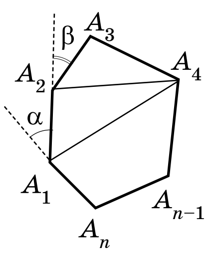
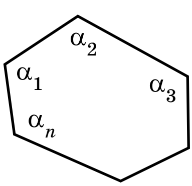
Вписанная окружность	
	Окружность называется **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон. Центр этой окружности — точка пересечения **биссектрис** углов треугольника. $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$ или $r = \dfrac{S}{p}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, S — площадь треугольника, p — полупериметр, a, b, c — длины сторон

Равносторонний треугольник	**Равнобедренный треугольник**	**Прямоугольный треугольник**
 $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ Точка O — центр вписанной и описанной окружности, точка пересечения биссектрис, медиан, высот	 $AB = BC$ BD — высота, медиана, биссектриса, высота. $OD = r$	 a и b — катеты, c — гипотенуза $r = \dfrac{a+b+c}{2}$, $a+b = 2R+2r$, R — радиус описанной окружности

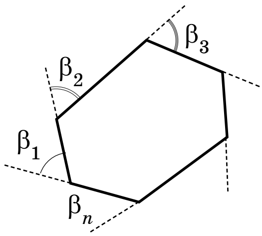
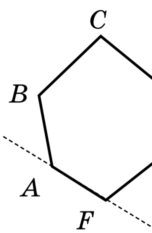
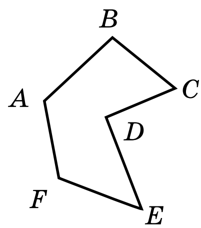
Описанная окружность	
	Окружность называется **описанной** около треугольника, если она проходит через все **его вершины**. Центр этой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. $OA = OB = OC = R$
В произвольном треугольнике: $R = \dfrac{abc}{4S}$; $R = \dfrac{a}{2\sin A}$. В равностороннем треугольнике: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. В прямоугольном треугольнике: $R = \dfrac{c}{2}$, где c — гипотенуза треугольника	

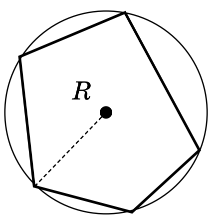
Положение точек описанной окружности в зависимости от вида треугольника	
Остроугольный	
	Центр — во внутренней области треугольника
Тупоугольный	
	Центр — вне области треугольника
Прямоугольный	
	Центр — совпадает с серединой гипотенузы $$R = \frac{c}{2} = m_c$$

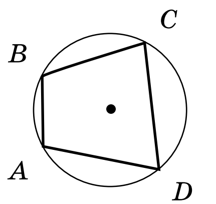
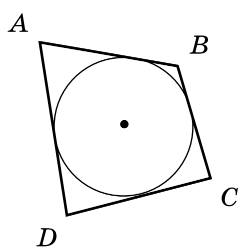
Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника

Сумма углов выпуклого многоугольника	
	**Многоугольник** — простая замкнутая ломаная. Соседние звенья не лежат на одной прямой. A_1, A_2, ... A_{n-1}, A_n — вершины; A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ — стороны; A_1A_4, ... A_nA_4 — диагонали; $\angle A_1$, $\angle A_2$, ..., $\angle A_n$ — внутренние углы; α, β, ... — внешние углы многоугольника
	Сумма углов выпуклого n-угольника $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum_n = 180°(n-2)$

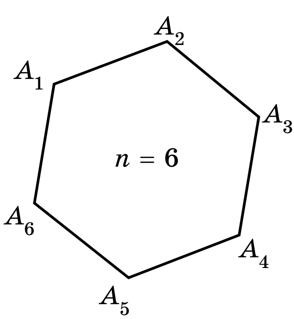
Окончание таблицы

	Сумма внешних углов n-угольника (по одному при вершине) $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_n=360°$
Выпуклый многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей сторону 	**Невыпуклый многоугольник.** Прямая, содержащая сторону многоугольника, делит его плоскость на части. 

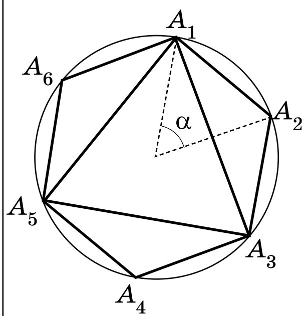
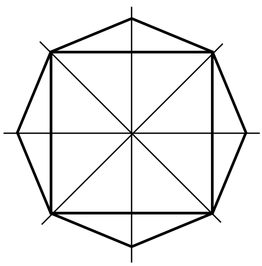
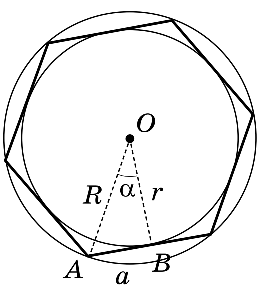
Вписанные и описанные многоугольники	
Вписанный многоугольник  Все вершины лежат на окружности	**Описанный многоугольник**  Все стороны — касательные к окружности. $S=\dfrac{P\cdot r}{2}$, где P — периметр, r — радиус окружности

Вписанные и описанные четырёхугольники	
	$ABCD$ — вписанный четырёхугольник, тогда $\angle A + \angle C = 180°$ и $\angle B + \angle D = 180°$
	$ABCD$ — описанный четырёхугольник, тогда $AB + CD = AD + BC$

Правильные многоугольники. Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника

Правильные многоугольники	
	Выпуклый многоугольник называется **правильным**, если у него все стороны и углы равны. Каждый угол правильного n-угольника равен: $\alpha_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$

Окончание таблицы

 n = 6 и n = 3	Внешний угол правильного n-угольника равен $\beta_n = \dfrac{360°}{n}$. Периметр правильного n-угольника со стороной a: $P_n = a \cdot n$. Площадь правильного n-угольника со стороной a: $S_n = \dfrac{na^2}{4\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{180°}{n}\right)}$
 n = 4 и n = 8	Площадь правильных а) треугольника $S_3 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; б) четырёхугольника (квадрата) $S_4 = a^2$; в) шестиугольника $S_6 = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника	
	**Вписанная окружность** касается всех **сторон** правильного многоугольника. **Описанная окружность** проходит через все **вершины** правильного треугольника
R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, a — сторона правильного многоугольника, S_n — площадь, P_n — периметр	

Связь между P_n, R, r, S_n и a

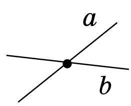
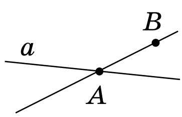
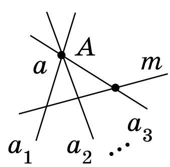
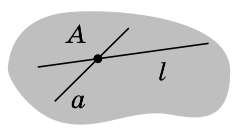
Количество сторон многоугольника	***R***	***r***	***S***
n	$\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$\dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$	$\dfrac{1}{2}P_n r$
3	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{a}{2}$	a^2
6	a	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

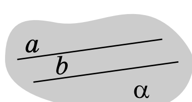
Зависимость стороны a_n правильного n-угольника от R и r

Количество сторон многоугольника	**Зависимость a_n от R и n**	**Зависимость a_n от r и n**
n	$a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$a_n = 2r\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$
3	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$
4	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = 2r$
6	$a_6 = R$	$a_6 = \dfrac{2}{3}r\sqrt{3}$

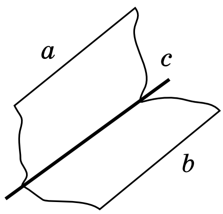
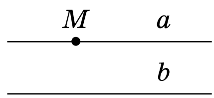
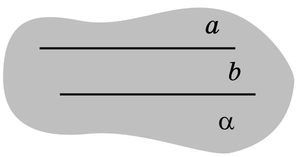
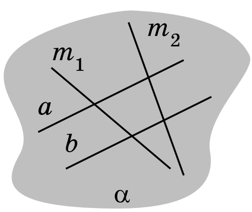
ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

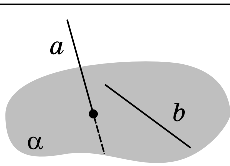
Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые

Пересекающиеся прямые	
	**Пересекающиеся прямые** — две прямые, имеющие только одну общую точку
Признаки	**Свойства**
Если одна точка принадлежит данной прямой, а другая ей не принадлежит, то данная прямая и прямая, проходящая через эти точки, **пересекаются** 	Через точку вне данной прямой можно провести бесконечно много прямых, пересекающих данную прямую 
	 Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и при этом только одну

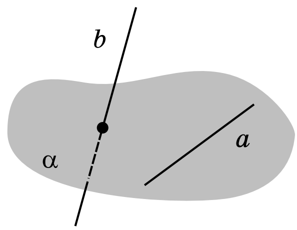
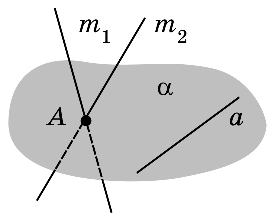
Параллельные прямые	
 $a \parallel b$	**Параллельные прямые** — две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек

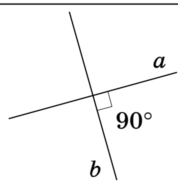
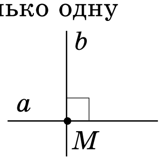
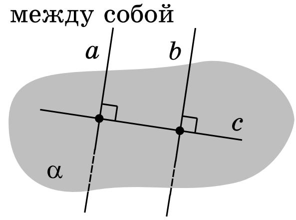
Окончание таблицы

Признаки	**Свойства**
Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны. Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$ 	Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и при этом только одну 
	Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и при этом только одну
	Все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат с ними в одной плоскости. $a \parallel b$; $m_1 \cap a$; $m_1 \cap b$; $m_2 \cap a$; $m_2 \cap b$; $a, b, m_1, m_2 \subset \alpha$

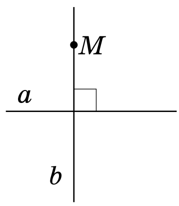
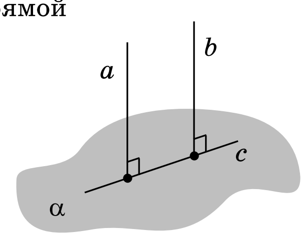
Скрещивающиеся прямые	
	**Скрещивающиеся прямые** — две прямые, не лежащие в одной плоскости

Окончание таблицы

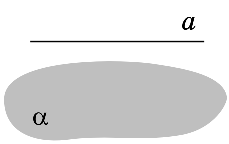
Признаки	**Свойства**
Если одна прямая лежит в плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся 	1. Через точку вне данной прямой можно провести бесконечно много скрещивающихся прямых.  2. Для любых двух скрещивающихся прямых в пространстве существует третья прямая, которая является скрещивающейся для каждой из данных двух прямых

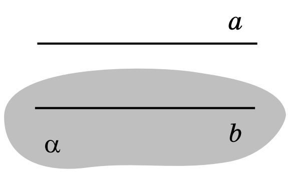
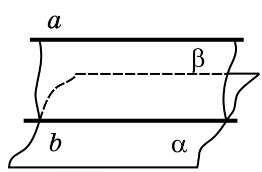
Перпендикулярные прямые	
	**Перпендикулярные прямые** — две прямые, которые пересекаются под углом 90°
Существование и единственность	**Перпендикулярность и параллельность**
Через каждую **точку прямой** можно провести перпендикулярную ей прямую, и при этом только одну 	Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой  $a \perp c,\ b \perp c \Rightarrow a \parallel b$

Окончание таблицы

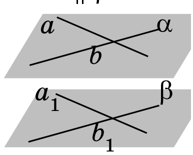
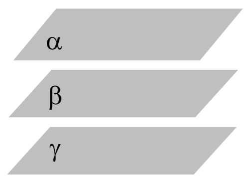
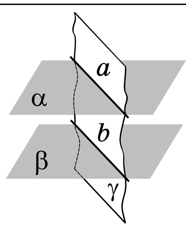
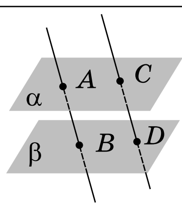
Через каждую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести перпендикулярную ей прямую, и при этом только одну 	Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой  $a \perp c,\ a \parallel b \Rightarrow b \perp c$

Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства

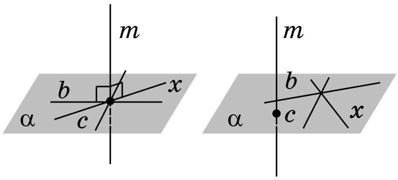
	Прямая и плоскость **параллельны**, если они не имеют общих точек. $a \parallel \alpha$

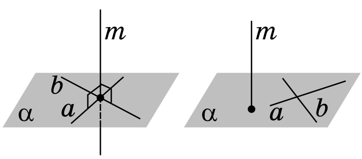
Признак	Свойство
 Если $a \parallel b$ и $b \subset \alpha$, то $a \parallel b$. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой в этой плоскости, то она параллельна всей плоскости	 Если $a \parallel \alpha$, β проходит через a, β пересекает α по b, то $a \parallel b$. Если через прямую, параллельную плоскости, провести вторую плоскость, которая пересекает первую, то прямая пересечения плоскостей будет параллельна первой прямой

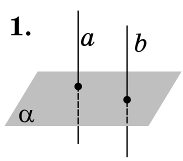
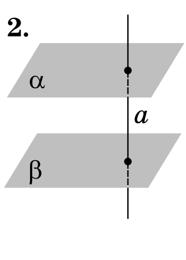
Параллельность плоскостей, признаки и свойства

<table>
<tr><th colspan="2">Параллельность плоскостей</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Две плоскости называют параллельными, если они не имеют общих точек.
$\alpha \parallel \beta$</td></tr>
<tr><th>Признаки</th><th>Свойства</th></tr>
<tr><td>Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны</td><td>Если две различные плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой</td></tr>
<tr><td>Прямые обоих плоскостей пересекаются. Если $a \parallel a_1$; $b \parallel b_1$ ($a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$), то $\alpha \parallel \beta$

</td><td>Если $\alpha \parallel \beta$ и $\gamma \parallel \beta$, то $\alpha \parallel \gamma$

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.
Если $\alpha \parallel \beta$ и плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a, плоскость γ пересекает плоскость β по прямой b, то $a \parallel b$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Отрезки параллельных прямых, заключённых между параллельными плоскостями, равны.
Если $AB \parallel CD$ и $\alpha \parallel \beta$,
($A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$),
то $AB = CD$</td></tr>
</table>

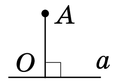
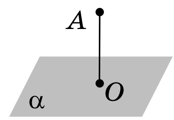
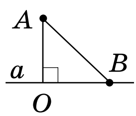
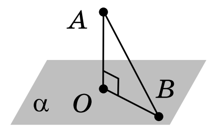
Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трёх перпендикулярах

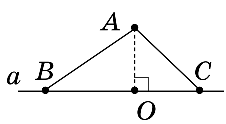
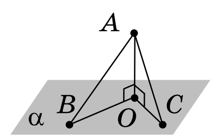
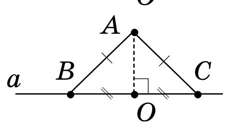
<table>
<tr><td>
</td><td>Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости:
$m \perp \alpha \Leftrightarrow m \perp x$,
x — любая прямая плоскости α</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Признак перпендикулярности прямой и плоскости</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Если $a \perp m$ и $b \perp m$
(a и b лежат в плоскости α и пересекаются), то $a \perp \alpha$.
Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости</td></tr>
</table>

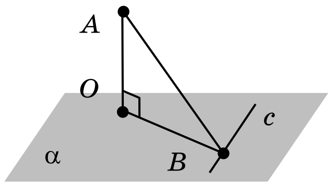
<table>
<tr><th colspan="3">Свойства перпендикулярных прямой и плоскости</th></tr>
<tr><td>1. 
</td><td>Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и второй прямой.
Если $a \parallel b$ и $a \perp \alpha$, то $\alpha \perp b$</td><td>Если прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.
Если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$</td></tr>
<tr><td>2. 
</td><td>Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и второй.
Если $\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha$, то $a \perp \beta$</td><td>Две различные плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.
Если $\alpha \perp a$ и $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$</td></tr>
</table>

Перпендикуляр и наклонная

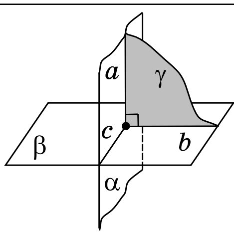
На плоскости	В пространстве
 $AO \perp a$, $O \in a$ AO — перпендикуляр из точки A к прямой a	 $AO \perp \alpha$, $O \in \alpha$ AO — перпендикуляр из точки A на плоскость α
 AO — расстояние от точки A до прямой a; AB — наклонная	 AO — расстояние от точки A до плоскости α; AB — наклонная
Перпендикуляр короче всякой наклонной. $AO < AB$	

OB — проекция наклонной AB на прямую a		OB — проекция наклонной AB на плоскость α
	$AB > AC \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow BO > OC$	
	$AB = AC \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow BO = OC$	

Если из одной точки к одной прямой (плоскости) проведены две наклонные, то:
- равные наклонные имеют равные проекции;
- если проекции наклонных равны, то равны и сами наклонные;
- бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию;
- из двух наклонных больше та, у которой проекция больше

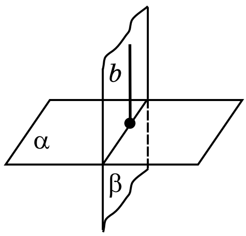
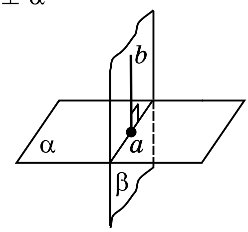
<table>
<tr><th colspan="3">Теорема о трёх перпендикулярах</th></tr>
<tr><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td>OB — проекция AB на плоскость α, c — прямая на плоскости α, $OB \perp c$</td><td>$\Leftrightarrow$</td><td>$AB \perp c$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и наклонной.
Обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции прямой</td></tr>
</table>

Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства

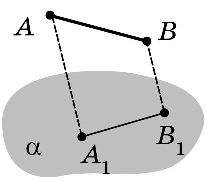
<table>
<tr><td rowspan="3">
</td><td colspan="2"></td><td rowspan="3">α пересекает β по прямой c
γ пересекает α по прямой a
γ пересекает β по прямой b
$a \perp b$, $\gamma \perp c$</td></tr>
<tr><td>$\alpha \perp \beta$</td><td>$\Leftrightarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

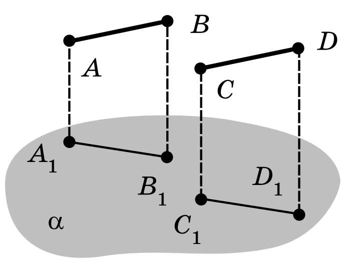
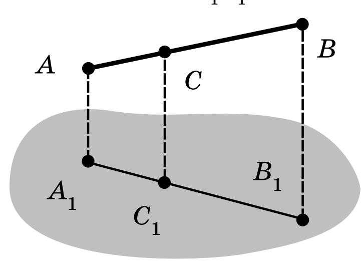
Две пересекающиеся плоскости называют **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой их пересечения, пересекает эти плоскости по перпендикулярным прямым

Признак перпендикулярности плоскостей	Свойство
Если прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны	Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости

Признак перпендикулярности плоскостей	Свойство
Если $b \perp \alpha$ и β проходит через b, то $\beta \perp \alpha$ 	Если $\beta \perp \alpha$, β пересекает α по a и $b \perp a$ (b лежит в β), то $b \perp \alpha$ 

Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур

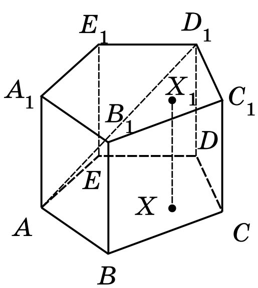
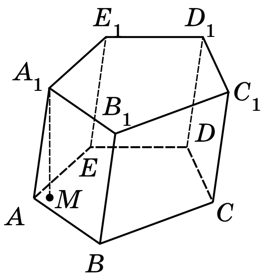
	$AA_1 \parallel BB_1$. Прямая AA_1 пересекает α в точке A_1, т. е. точка A проектируется в точку A_1 на плоскости α. $A \to A_1$; $B \to B_1$; $AB \to A_1B_1$. Отрезок проектируется в отрезок $AB \to A_1B_1$

При параллельном проектировании параллельность отрезков сохраняется. Если $AB \parallel CD$ ($AB \to A_1B_1$; $CD \to C_1D_1$), то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ 	При параллельном проектировании отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется. $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{A_1C_1}{C_1B_1}$ 

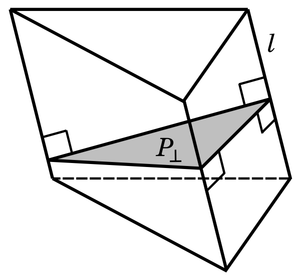
Следствие
Если C — середина AB, $AB \to A_1C_1$; $C \to C_1$, то C_1 — середина A_1B_1. Середина отрезка проектируется в середину отрезка

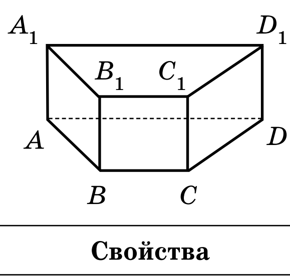
МНОГОГРАННИКИ

Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма

<table>
<tr><th colspan="2">Призма</th></tr>
<tr><td></td><td>Призма — многогранник, состоящий из плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.
$ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ — основания призмы;
AA_1, BB_1, CC_1, ... — боковые рёбра;
ABB_1A_1, BB_1C_1C, ... — боковые грани;
AD_1 — диагональ призмы (отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани;
$A_1M \perp (ABC)$, $A_1M = H$ — высота)</td></tr>
</table>

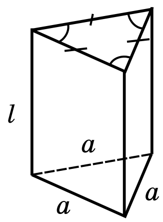
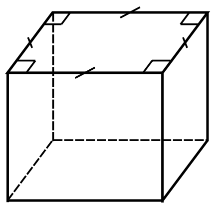
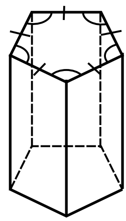
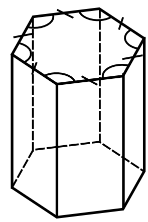
Окончание таблицы

Свойства	**Формулы**
1. Основания призмы равны. 2. Основания призмы лежат в параллельных плоскостях. 3. Боковые рёбра параллельны и равны. 4. Боковые грани — параллелограммы	 **Боковая поверхность** — сумма площадей боковых граней или $S_{бок} = P_\perp \cdot\ l$, где l — длина бокового ребра; $P_\perp$ — сечение плоскостью, перпендикулярной к её боковым граням. Полная поверхность — сумма боковой поверхности и площадей оснований: $S = S_{бок} + 2S_{осн}$. Объём призмы $V = S_{осн} \cdot H_{призмы}$

Прямая призма	
	Призма называется **прямой**, если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям. $AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, ...
Свойства	**Формулы**
1. Высота равна боковому ребру. 2. Боковые грани — прямоугольники	**Боковая поверхность:** $S_{бок} = P_{осн} \cdot\ H$, где $P_{осн}$ — периметр основания; $H = AA_1$ — высота

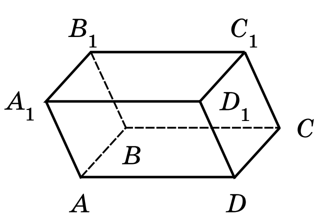
Окончание таблицы

	Полная поверхность: $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$. **Объём:** $V = S_{\text{осн}} \cdot H = S_{\text{осн}} \cdot AA_1$

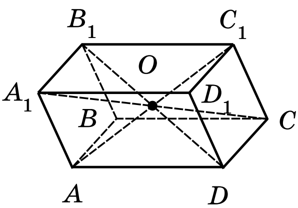
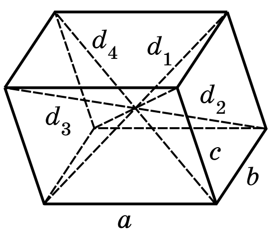
Правильная призма			
Прямая призма называется **правильной,** если её основания — правильные многоугольники			
			
треугольная	четырёх-угольная	пяти-угольная	шести-угольная

Площадь боковой поверхности правильной призмы	
$S_{\text{бок}} = S_{\text{гр}} \cdot n = aln$	$S_{\text{гр}}$ — площадь грани; n — количество граней; a — сторона основания; l — длина бокового ребра

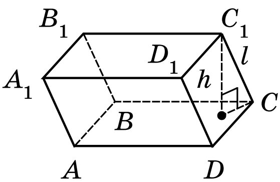
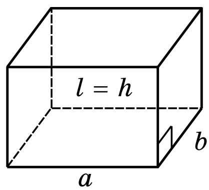
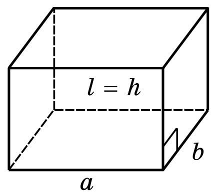
Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде

Параллелепипед	
	**Параллелепипед** — призма, в основании которой лежит параллелограмм

Окончание таблицы

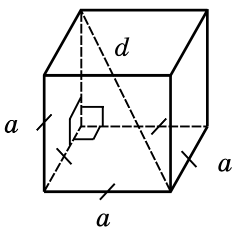
	**Свойства:** 1. Все грани — параллелограммы. 2. Противолежащие грани параллельны и равны. 3. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. O — середина A_1C, BD_1, AC_1 и B_1D. 4. Точка O — центр симметрии параллелепипеда
	Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов его рёбер. $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$. Существует три вида параллелепипедов. 1. Прямой — все боковые грани перпендикулярны плоскостям оснований, основания — параллелограммы. 2. Прямоугольный — все боковые грани и основания — прямоугольники. 3. Наклонный — боковые грани не перпендикулярны основаниям, все шесть граней — параллелограммы

Виды параллелепипедов

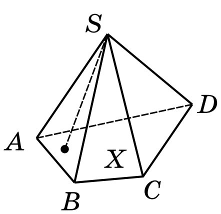
Наклонный	Прямой	Прямоугольный
		
1. Боковые рёбра **не перпендикулярны** плоскостям основания. 2. Высота **не совпадает** с боковым ребром. 3. Все боковые грани — **параллелограммы**	1. Боковые рёбра **перпендикулярны** основаниям. 2. Боковое ребро **совпадает** с высотой. 3. В основаниях — **параллелограммы.** 4. Все боковые грани — **прямоугольники**	1. Боковые рёбра **перпендикулярны** основаниям. 2. Боковое ребро **совпадает** с высотой. 3. Оба основания и боковые грани — **прямоугольники**
Площадь боковой поверхности параллелепипеда		
$S_{бок} = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{AA_1B_1B})$	$S_{бок} = 2(a+b) \cdot l$	$S_{бок} = 2(a+b) \cdot l$
Площадь полной поверхности параллелепипеда		
$S_{полн} = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{AA_1B_1B} + S_{ABCD})$	$S_{полн} = 2(a+b) \cdot l + 2S_{осн}$	$S_{полн} = 2(ab+al+bl)$
Объём параллелепипеда		
1. Произведение площади основания $S_{осн}$ на высоту h: $V = S_{осн} \cdot h$	Произведение площади основания $S_{осн}$ на длину бокового ребра l: $V = S_{осн} \cdot l$	Произведение трёх измерений: $V = abl$

Окончание таблицы

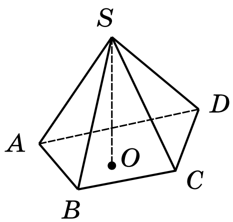
Наклонный	Прямой	Прямоуголь-ный
2. Произведение площади перпендикулярного сечения $S_{\perp}$ на длину бокового ребра l: $V = S_{\perp} \cdot l$		

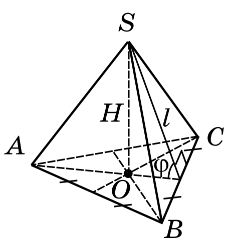
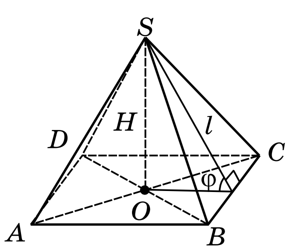
Куб	
	**Куб** — прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны. **Свойство:** Все боковые грани — квадраты. **Формулы** 1. Диагональ: $d = a\sqrt{3}$. 2. Площадь: $S_{бок} = 4a^2$; $S_{полн} = 6a^2$. 3. Объём: $V = a^3$ или $V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$

Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида

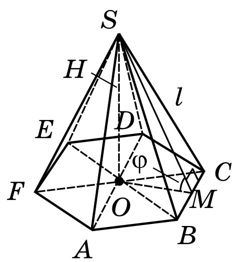
Пирамида	
	**Пирамидой** называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания пирамиды), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с вершинами основания
$ABCD$ — основание пирамиды; S — вершина пирамиды; SA, SB, SC, SD — боковые рёбра; $\triangle ASB$, $\triangle BSC$, $\triangle CSD$, $\triangle ASD$ — боковые грани	

Окончание таблицы

	**Высота пирамиды** — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания. SO — высота пирамиды; $SO = H$ ($SO \perp (ABCD)$). $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$; $S_{\text{бок.пир}} = S_{\Delta ASB} + S_{\Delta BSC} + S_{\Delta CSD} + S_{\Delta ASD}$; $S_{\text{полн.пир}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$

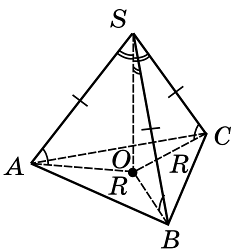
Правильная пирамида	
Пирамида называется **правильной**, если её основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника	
Некоторые виды правильных пирамид	
	**Треугольная** ΔABC — правильный; O — точка пересечения медиан (высот и биссектрис), центр вписанной и описанной окружностей
	**Четырёхугольная** $ABCD$ — квадрат; O — точка пересечения диагоналей

Окончание таблицы

<table>
<tr><td>
</td><td>Шестиугольная
$ABCDEF$ — правильный шестиугольник;
O — точка пересечения диагоналей AD, BE и FC</td></tr>
<tr><td colspan="2">SO — высота правильной пирамиды ($SO \perp (ABC)$;
O — центр основания).
SM — апофема правильной пирамиды (высота боковой грани, $SM \perp BC$)</td></tr>
</table>

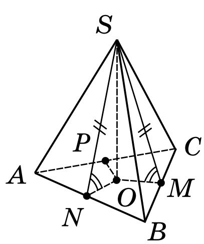
Свойства	Формулы
1. Боковые рёбра равны, одинаково наклонены к плоскости основания. $SA = SB = SC = \ldots$; $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \ldots$ 2. Боковые грани — равные друг другу равнобедренные треугольники. $\Delta ASB = \Delta BSC = \ldots$ Апофемы равны и наклонены к плоскости основания под одним углом	**Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot SM = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot l$, где l — апофема или $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}$, где φ — угол наклона боковой грани к плоскости основания, $\varphi = \angle SMO$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$. **Объём:** $V_{пир} = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, $H = SO$, H — высота пирамиды

Положение высоты в некоторых видах пирамид



1. Если в пирамиде:
а) все **боковые рёбра** равны
или
б) все **боковые рёбра** составляют одинаковые углы с плоскостью основания
или
в) **боковые рёбра** составляют одинаковые углы с высотой пирамиды, то **высота проходит через центр окружности, описанной около основания**

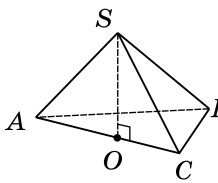
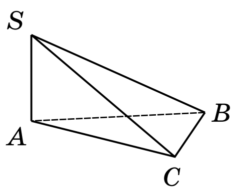
Примечание: высота пирамиды может располагаться внутри пирамиды, на боковой грани или вне пирамиды, в зависимости от размещения центра описанной окружности. Около такой пирамиды можно описать конус

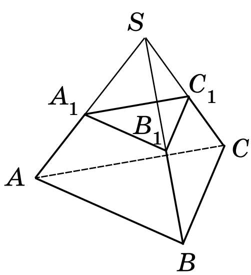


2. Если в пирамиде:
а) все **двугранные углы** при основании равны
или
б) все **высоты боковых граней** равны
или
в) высота составляет одинаковые углы с плоскостями боковых граней,
то **высота проходит через центр окружности, вписанной в основание**

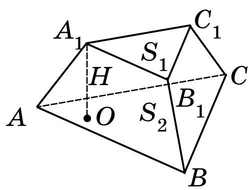
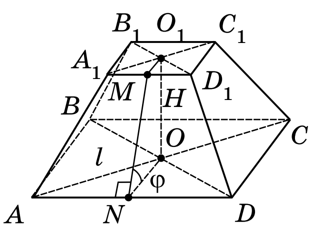
В такую пирамиду можно вписать конус.
Площадь боковой поверхности пирамиды, в которой все **двугранные углы при основании равны** α, можно вычислять по формуле: $S_{\text{бок}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha}$

Окончание таблицы

	3. Если **одна боковая грань** пирамиды перпендикулярна **плоскости основания**, то **высотой пирамиды является высота этой грани.** Если в $SABC$ $(SAC) \perp (ABC)$ и $SO \perp AC$ $(O \in AC)$, то SO — высота пирамиды, $SO \perp (ABC)$
	4. Если **две смежные боковые** грани перпендикулярны плоскости основания, то **высотой пирамиды является их общее боковое ребро.** Если $(SAB) \perp (ABC)$ и $(SAC) \perp (ABC)$, то SA — высота пирамиды $(SA \perp (ABC))$

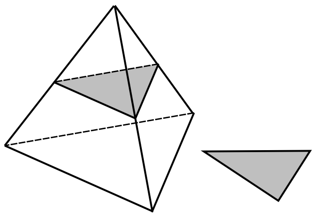
<table>
<tr><th colspan="2">Усечённая пирамида</th></tr>
<tr><td></td><td>Образование усечённой пирамиды
Если задана пирамида $SABC$
и проведена плоскость $A_1B_1C_1$, параллельная основанию пирамиды $((A_1B_1C_1) \parallel (ABC))$, то эта плоскость отсекает от заданной пирамиды пирамиду $SA_1B_1C_1$, подобную данной.
(С коэффициентом подобия
$k = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB}$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Другая часть заданной пирамиды — многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — называется усечённой пирамидой.
Грани ABC и $A_1B_1C_1$ — основания $((ABC) \parallel (A_1B_1C_1))$.
Трапеции ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1 — боковые грани</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

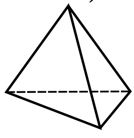
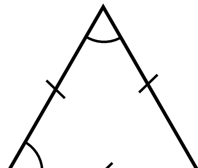
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Высотой усечённой пирамиды называется расстояние между плоскостями её оснований.
$A_1O \perp (ABC)$; $A_1O = H$ — высота.
$$V_{\text{усеч. пир}} = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right),$$
где S_1, S_2 — площади оснований</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Площадь поверхности усечённой пирамиды равна сумме площадей оснований и боковой поверхности:
$S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}}$.
Правильная усечённая пирамида — усечённая пирамида, являющаяся частью правильной пирамиды.
Апофема — высота боковой грани.
$MN \perp AD$ и $MN \perp A_1D_1$;
MN — апофема</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<th colspan="2">Площадь боковой поверхности
правильной усечённой пирамиды</th>
</tr>
<tr>
<td>$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot l,$$
где P_1 и P_2 — периметры оснований;
l — апофема</td>
<td>$$S_{\text{бок}} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\varphi},$$
где S_1 и S_2 — площади оснований;
φ — угол наклона боковой грани к бóльшему основанию</td>
</tr>
</table>

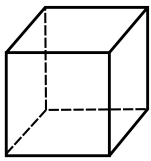
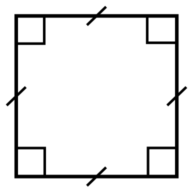
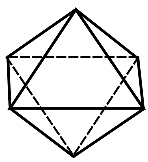
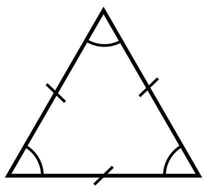
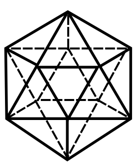
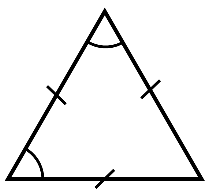
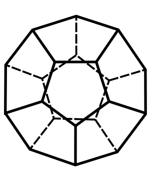
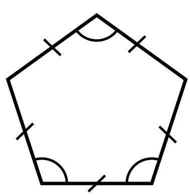
Сечения куба, призмы, пирамиды

	**Секущая плоскость** геометрического тела — это любая плоскость, по обе стороны от которой — точки данного тела. **Сечение геометрического тела** — фигура, составленная общими точками секущей плоскости и данного тела
Методы построения сечений: а) метод следов; б) метод внутреннего проектирования; в) метод переноса секущей плоскости	**Секущая плоскость может быть задана:** а) тремя точками, не лежащими на одной прямой; б) прямой и точкой, не лежащей на ней; в) двумя пересекающимися прямыми

Представления о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр)

<table>
<tr><td colspan="6">Правильный выпуклый многогранник — выпуклый многогранник, грани которого являются правильными многоугольниками с одинаковым количеством сторон и к каждой вершине сходится одинаковое количество рёбер</td></tr>
<tr><th>№</th><th>Многогранник</th><th>Многоугольник</th><th>Число граней</th><th>Число вершин</th><th>Число рёбер</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Правильный тетраэдр (четырёхгранник)
</td><td></td><td>4</td><td>4</td><td>6</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

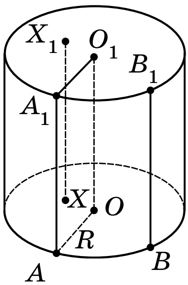
№	Многогранник	Многоугольник	Число граней	Число вершин	Число рёбер
2	Гексаэдр (шестигранник), куб 		6	8	12
3	Октаэдр (восьмигранник) 		8	6	12
4	Икосаэдр (двадцатигранник) 		20	12	30
5	Додекаэдр (двенадцатигранник) 		12	20	30

Площадь поверхности, объём, радиусы вписанной и описанной сфер

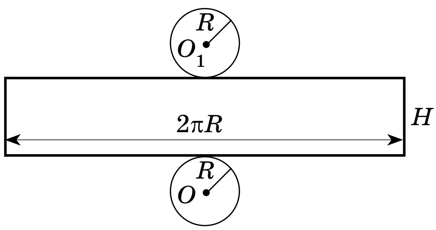
Тип многогранника	Площадь поверхности	Объём	Радиус описанной сферы	Радиус вписанной сферы
Правильный тетраэдр	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$\frac{3}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{1}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{12}$
Правильный октаэдр	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$
Правильный икосаэдр	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$	$\frac{a\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$
Правильный гексаэдр	$4a^2$	a^3	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$
Правильный додекаэдр	$3a^2\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}$	$\frac{a^3\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$	$\frac{a\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}$

ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

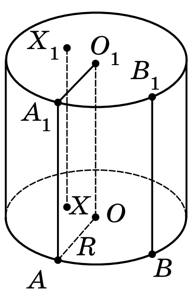
Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка

	**Цилиндр (круговой цилиндр)** — тело, состоящее из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки окружностей, лежащих в основаниях этих цилиндров. **Основания** цилиндра — круги. **Образующие** — отрезки, соединяющие точки окружностей. AA_1, BB_1 — образующие

Развёртка цилиндра

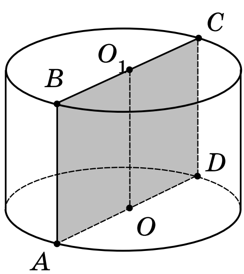


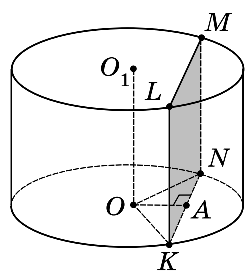
Развёртка цилиндра — **прямоугольник** со сторонами $2\pi R$ и H (боковая поверхность) и **два круга** радиусами R (основания цилиндра)

	Свойства	**Формулы**
	1. Основания цилиндра равны и параллельны: $AO = O_1A_1 = R$; $(AOB) \parallel (A_1O_1B_1)$. 2. Образующие цилиндра равны и параллельны $AA_1 \parallel BB_1$; $AA_1 = BB_1$	**Площадь основания:** $S_{осн} = \pi R^2$. **Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = 2\pi RH$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$; $S_{полн} = 2\pi R(H + R)$

Окончание таблицы

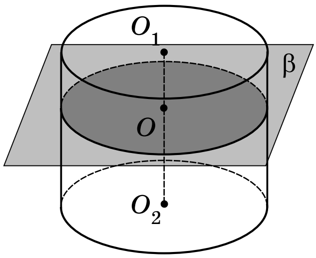
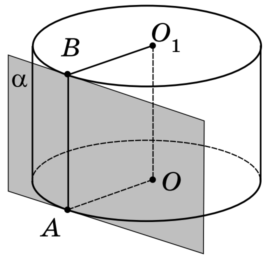
	3. Высота цилиндра равна образующей: $H_{\text{осн}} = AA_1 = OO_1$ При вращении прямоугольника около его стороны как оси образуется цилиндр	**Объём:** $V = S_{\text{осн}} \cdot H$; $V = \pi R^2 H$; OMM_1O_1 — прямоугольник; OO_1 — ось цилиндра; $R_{\text{цил}} = OM = O_1M_1$; $H_{\text{цил}} = MM_1 = OO_1$

<table>
<tr><th colspan="2">Сечение цилиндра плоскостями</th></tr>
<tr><th>Осевое сечение</th><th>Сечение плоскостью, параллельной оси</th></tr>
<tr><td>


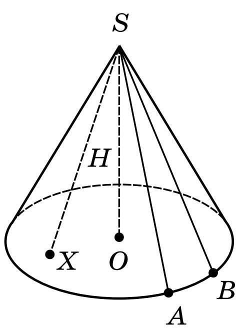
</td><td>


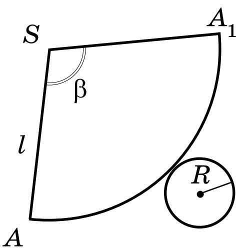
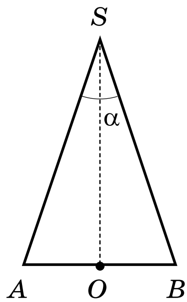
</td></tr>
<tr><td>$ABCD$ — осевое сечение (сечение, проходящее через ось OO_1);
$ABCD$ — прямоугольник;
$AD = d_{\text{осн}} = 2R$;
$AB = CD = H_{\text{цил}}$;
AB и CD — образующие</td><td>$(KLMN) \parallel OO_1$;
$KLMN$ — прямоугольник;
KL и MN — образующие;
$KL = H_{\text{цил}}$, KN — хорда;
OA — расстояние от основания высоты до хорды NK</td></tr>
</table>

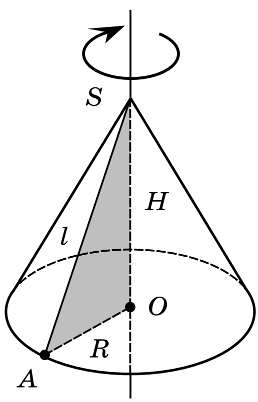
Окончание таблицы

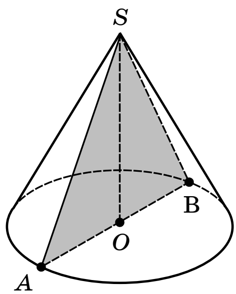
<table>
<tr><th>Сечение плоскостью, параллельной основанию</th><th>Касательная плоскость</th></tr>
<tr><td>
Плоскость, параллельная основанию, пересекает боковую поверхность цилиндра по окружности, равной окружности основания:
$R_{\text{сеч}} = R_{\text{осн}}$</td><td>
Касательная плоскость — плоскость, проходящая через образующую и перпендикулярная плоскости осевого сечения, проходящего через эту образующую.
α — касательная плоскость,
AB — образующая,
α проходит через AB:
$\alpha \perp (AOO_1B)$</td></tr>
</table>

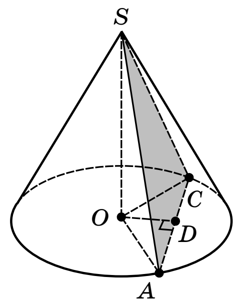
Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка

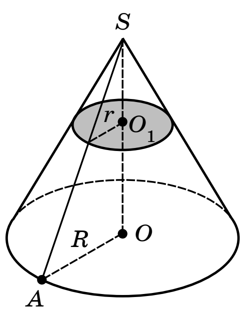
<table>
<tr><td></td><td>Конус (круговой конус) — тело, состоящее из круга, точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих заданную точку с точками окружности основания.
Основание конуса — круг, т. S — вершина конуса.
SA и SB — образующие (отрезки, соединяющие вершину с точками окружности основания)</td></tr>
</table>

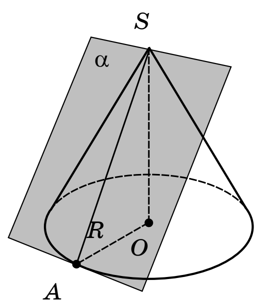
Развёртка конуса		
		**Развёртка** конуса состоит из сектора SAA_1, радиус которого равен образующей конуса, длина дуги — длине окружности основания. $SA = SA_1 = l$; $\cup AA_1 = 2\pi R$. $\angle ASA_1 = \beta$ — угол в развёртке конуса. $\angle ASB = \alpha$ — угол при вершине осевого сечения, $\beta = 2\pi \sin\frac{\alpha}{2}$; $\alpha = 2\arcsin\frac{\beta}{2\pi}$

	Свойства	**Формулы**
	1. Образующие конуса равны: $SA = SB = \ldots$ 2. $H_{кон} = SO$, $SO \perp (AOB)$ При вращении прямоугольного треугольника около его катета как оси образуется конус. ΔAOS — прямоугольный. SO — ось симметрии, AS — образующая. $R_{кон} = AO$; $H_{кон} = SO$; $AS = l$	**Площадь основания:** $S_{осн} = \pi R^2$. **Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = \pi Rl$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$; $S_{полн} = \pi R(l + R)$. **Объём:** $V_{кон} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$; $V_{кон} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$

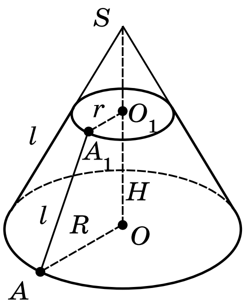
<table>
<tr><th colspan="2">Сечение конуса плоскостями</th></tr>
<tr><th>Осевое сечение</th><th>Сечение, проходящее через вершину</th></tr>
<tr>
<td>

ΔSAB — осевое сечение (проходит через ось SO);
ΔSAB — равнобедренный;
$SA = SB = l$ — образующие</td>
<td>

ΔASC — равнобедренный;
$AS = SC = l$ — образующие;
AC — хорда, $OA = OC = R$;
OD — расстояние от основания высоты до хорды AC;
$OD^2 = AO^2 - AD^2$</td>
</tr>
<tr><th>Сечение плоскостью, параллельной основанию</th><th>Касательная плоскость</th></tr>
<tr>
<td>

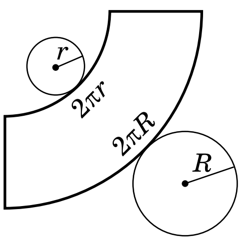
Плоскость, параллельная основанию, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.
$$\frac{r_{\text{сеч}}}{R_{\text{кон}}} = \frac{SO_1}{SO}$$</td>
<td>

Касательная плоскость — это плоскость, проходящая через образующую конуса перпендикулярно осевому сечению, содержащему эту образующую.
α — касательная плоскость;
SA — образующая, α проходит через SA; $\alpha \perp (SAO)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Усечённый конус</th></tr>
<tr><td>


</td><td>

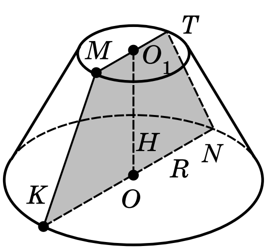
Усечённый конус — часть конуса, заключённая между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.
Основания — круги с центрами O и O_1.
l — образующая, $AA_1 = l$;
$OA = R$ и $O_1A_1 = r$ — радиусы оснований

</td></tr>
<tr><th colspan="2">Развёртка усечённого конуса</th></tr>
<tr><td>


</td><td>

Два круга — верхнее и нижнее основания радиусами r и R; часть кольца — боковая поверхность

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Свойства</th><th>Формулы</th></tr>
<tr><td>


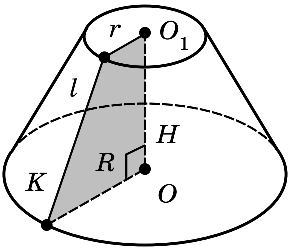
Осевое сечение — равнобокая трапеция.
$MKNT$ — осевое сечение.
$MT \parallel KN$ и $MK = TN$.
$MT = 2r$; $KN = 2R$.
$OO_1 \perp KN$.
$OO_1 = H$

</td><td>

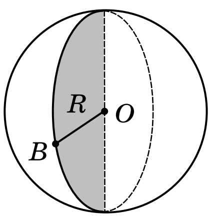
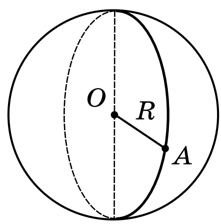
Площадь боковой поверхности:
$S_{\text{бок}} = \pi(R+r)l.$
Площадь полной поверхности:
$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}}+S_{1\text{осн}}+S_{2\text{осн}}.$
Объём:
$V_{\text{ус.кон}} = \dfrac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2);$
R и r — радиусы нижнего и верхнего оснований;
l — образующая

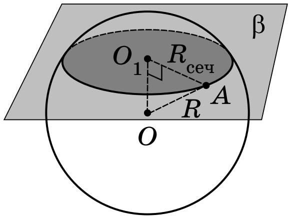
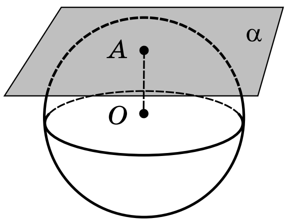
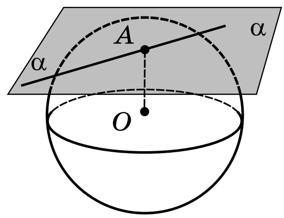
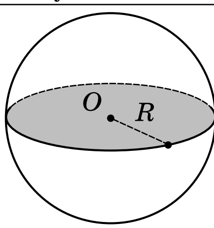
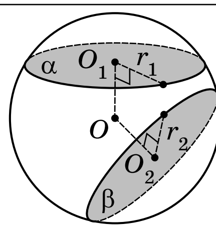
</td></tr>
</table>

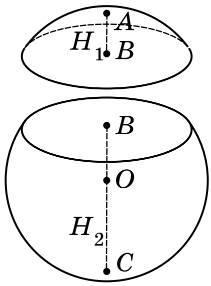
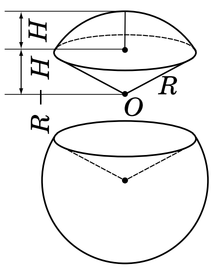
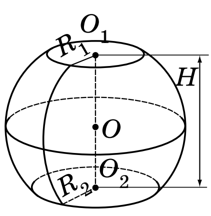
Окончание таблицы

	При вращении прямоугольной трапеции около оси, проходящей через меньшую боковую сторону, перпендикулярную основаниям, образуется усечённый конус

Шар и сфера, их сечения

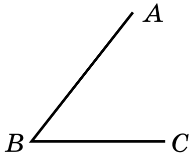
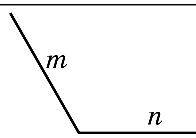
Шар	**Сфера**
 **Шар** — тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного (R) от данной точки (O). O — центр шара; OB — радиус шара; $OB = R$. Шар получается при вращении полукруга вокруг его диаметра. **Объём шара:** $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3$	 **Сфера** — тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии (R) от данной точки (O). O — центр сферы; OA — радиус сферы; $AO = R$. При вращении полуокружности вокруг её диаметра получаем сферу. **Площадь поверхности сферы:** $S_{сф} = 4\pi R^2$

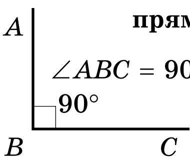
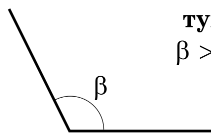
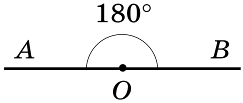
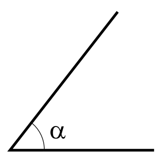
<table>
<tr><th colspan="2">Сечение шара плоскостью</th></tr>
<tr><td>
O — центр шара;
O_1 — центр круга сечения;
$OO_1 \perp \beta$</td><td>Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга — основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.
Из ΔOO_1A:
$R_{\text{сеч}} = \sqrt{R^2_{\text{шара}} - OO_1^2}$</td></tr>
<tr><th>Большой круг</th><th>Сечение двумя плоскостями</th></tr>
<tr><td>
Касательная плоскость к шару — это плоскость, проходящая через точку сферы, перпендикулярная к радиусу, проведённому в эту точку. $OA \perp \alpha$</td><td>
Касательная к шару — это прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку касания.
$OA \perp \alpha$; $OA \perp a$; $a \in \alpha$</td></tr>
<tr><td>
Большой круг — сечение шара, проходящее через центр.
$R_{\text{сеч}} = R_{\text{шара}}$</td><td>
$OO_1 \perp \alpha$ и $OO_2 \perp \beta$;
r_1 и r_2 — радиусы кругов сечения.
$OO_1 = OO_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$;
$OO_1 < OO_2 \Leftrightarrow r_1 > r_2$;
$OO_1 > OO_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2$</td></tr>
</table>

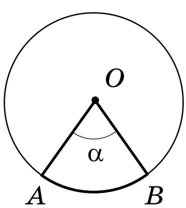
Части шара		
	**Шаровой сегмент** — часть шара, которую отсекает секущая плоскость. Плоскость делит шар на два сегмента: $AB = H_1$ — высота меньшего сегмента; $BC = H_2$ — высота большего сегмента	**Основные формулы** Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi RH$. Площадь полной поверхности: $S_{полн} = \pi H(4R - H)$. Объём: $V_{сегм} = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$
	**Шаровой сектор** — тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, которое имеет общее основание с сегментом и вершину в центре конуса	**Основные формулы** Площадь полной поверхности: $S_{полн} =$ $= \pi R\left(2H + \sqrt{H(2R - H)}\right)$. Объём: $V_{сек} = \frac{2}{3}\pi R^2 H$
	**Шаровой слой** — часть шара между двумя параллельными секущими плоскостями. H — расстояние между секущими плоскостями; R_1 и R_2 — радиусы оснований	**Основные формулы** Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi RH$; R — радиус шара. Площадь полной поверхности: $S_{полн} =$ $= \pi(2RH + R_1^2 + R_2^2)$. Объём: $V =$ $= \frac{\pi H}{6}(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2)$

ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности

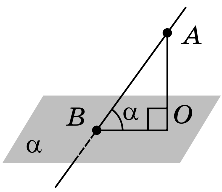
Угол. Величина угла, градусная мера угла		
 $\angle ABC$	 $\angle(m,\ n)$	**Угол** — фигура, состоящая из точки (вершины угла) и двух различных лучей, исходящих из этой точки
Углы измеряют в градусах. $1^\circ = \frac{1}{180}$ развёрнутого угла		

Виды углов	
 **прямой** $\angle ABC = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ рад	 **тупой** $\beta > 90^\circ$
развёрнутый $\angle AOB = 180^\circ$ 	 **острый** $\alpha < 90^\circ$

Дуга	
	**Дуга** — часть окружности между двумя точками. **Градусная мера дуги** — градусная мера соответствующего центрального угла. Длина дуги 1°: $l_{1^\circ} = \frac{\pi R}{180^\circ}$. Длина дуги n°: $l_{n^\circ} = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$.

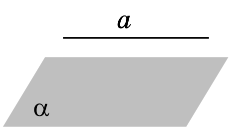
Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями

Угол между прямой и плоскостью

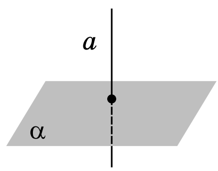


Угол между прямой и пересекающей её плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость.
$\angle ABO$ — угол между прямой AB и плоскостью α;
BO — проекция AB на α, $AO \perp \alpha$

Особые случаи

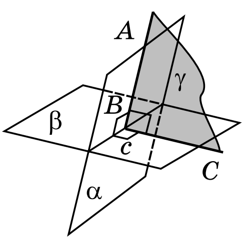


$a \parallel \alpha \Leftrightarrow \angle(a;\ \alpha) = 0$

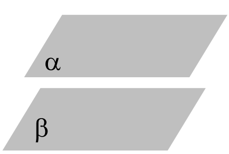


$a \perp \alpha \Leftrightarrow \angle(a;\ \alpha) = 90^\circ$

Угол между плоскостями (двугранный угол)

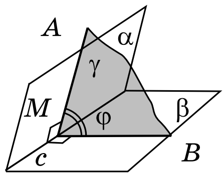
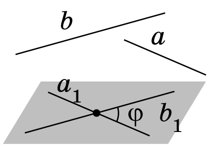


Углом между плоскостями α и β, пересекающимися по прямой c, называется угол между прямыми, по которым третья плоскость γ, перпендикулярная их линии пересечения, пересекает плоскости α и β.
$\angle ABC$ — угол между плоскостями α и β, т. е. $AB \perp c$; $BC \perp c$, $AB \subset \alpha$; $BC \subset \beta$



Угол между параллельными плоскостями равен 0°.
$\angle(\alpha;\ \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$

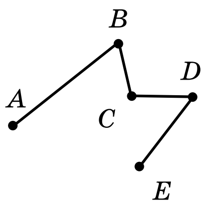
Окончание таблицы

<table>
<tr><td>
</td><td>Двугранный угол — фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой.
α и β — грани двугранного угла,
c — ребро двугранного угла.
$AM \perp c$, $BM \perp c$, $AM \subset \alpha$, $MB \subset \beta$.
$\angle AMB = \varphi$ — линейный угол двугранного угла</td></tr>
<tr><td colspan="2">Свойства
Плоскость линейного угла перпендикулярна каждой грани двугранного угла.
$(AMB) \perp \alpha$ и $(AMB) \perp \beta$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Угол между скрещивающимися прямыми</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Угол между скрещивающимися прямыми — это угол между прямыми, которые пересекаются и параллельны данным скрещивающимся.
$a \parallel a_1$; $b \parallel b_1$; $\angle(a;\, b) = \angle(a_1;\, b_1) = \varphi$;
$0° < \varphi < 90°$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если угол между скрещивающимися прямыми равен 90°, то они называются перпендикулярными</td></tr>
</table>

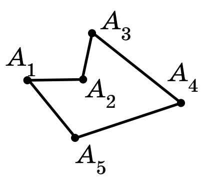
Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника

<table>
<tr><td>
</td><td>Отрезок — часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя её точками — концами отрезка</td></tr>
<tr><td colspan="2">Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые отрезок разбивается любой его точкой: $AB = AK + KB$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы



Ломаная — геометрическая фигура, состоящая из точек, не лежащих на одной прямой **(вершин)**, соединённых отрезками **(звеньями).**
Длина ломаной равна сумме длин её звеньев



Многоугольник — простая замкнутая ломаная, соседние звенья которой не лежат на одной прямой.
Многоугольник называется **выпуклым,** если каждая из его диагоналей лежит внутри многоугольника

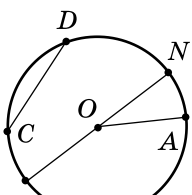
Число диагоналей выпуклого многоугольника:

$$n_d = \frac{n(n-3)}{2},$$

n — число сторон многоугольника.

Периметр многоугольника равен сумме длин его сторон:

$$P_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$$



Окружность — фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки (центра).
$OA = R$ — радиус;
$MN = D = 2R$ — диаметр;
CD — хорда;
$\smile AN$, $\smile AM$ — дуги

Длина окружности:

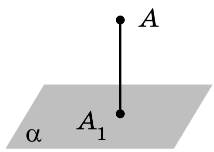
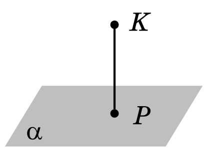
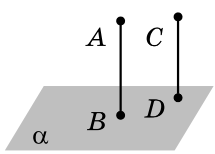
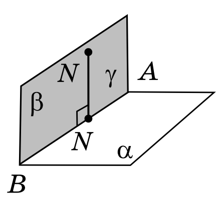
$$C = 2\pi R,$$

где R — радиус; число π — отношение длины окружности к диаметру:

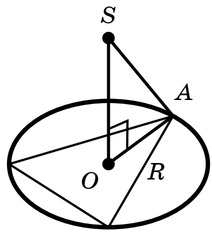
$$\pi = \frac{C}{2R} \approx 3,14$$

Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями

Расстояние в пространстве

Расстояние от точки до плоскости (r — расстояние)	
	**Расстояние от точки до плоскости** — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость
Способы построения	
	Провести $KP \perp \alpha$; $P \in \alpha$. $KP = \rho(K; \alpha)$, где ρ — расстояние от точки до плоскости
	$AB \perp \alpha$. Провести $CD \parallel AB \Rightarrow CD \perp \alpha$. $CD = \rho(C; \alpha)$
	Провести $\beta \perp \alpha$ через точку M (β пересекает α по AB). Провести $MN \perp AB \Rightarrow MN \perp \alpha$. $MN = \rho(N; \alpha)$

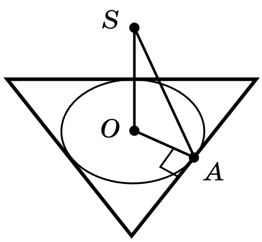
Частные случаи нахождения расстояния от точки до плоскости (до прямой)



SO — расстояние от точки до плоскости многоугольника; $OA = R$ — радиус описанной окружности; SA — расстояние от точки до вершины многоугольника

Свойство точки, равноудалённой от всех вершин многоугольника

Если точка вне плоскости многоугольника **равноудалена от всех его вершин,** то основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости многоугольника, является центром **окружности, описанной** около многоугольника



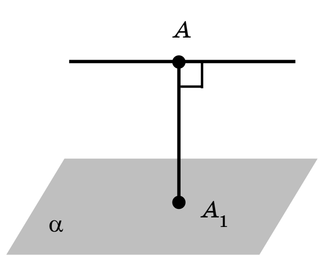
SO — расстояние от точки до плоскости многоугольника; $AO = r$ — радиус окружности, вписанной в многоугольник

Свойство точки, равноудалённой от сторон многоугольника

Если точка вне плоскости многоугольника **равноудалена от его сторон,** то основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости многоугольника, является центром **окружности, вписанной** в многоугольник.

SA — расстояние от точки до стороны многоугольника

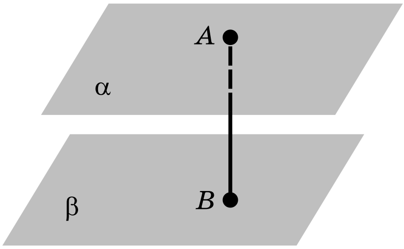
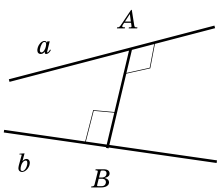
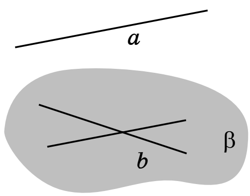
Расстояние между параллельными прямой и плоскостью

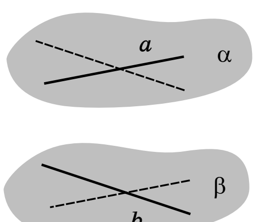


Выбрать на прямой a произвольную точку A и найти расстояние от этой точки до плоскости α.

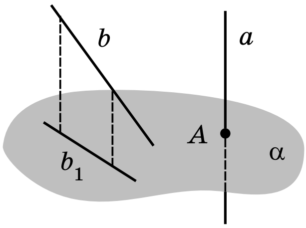
$a \parallel \alpha,\ A \in a;$

$\rho(a;\ \alpha) = \rho(A;\ \alpha) = AA_1$

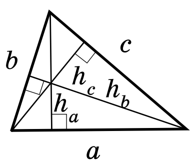
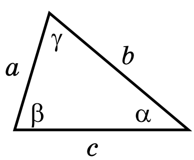
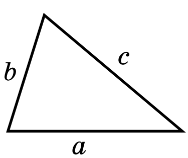
Расстояние между параллельными плоскостями	
	Выбрать в плоскости произвольную точку A и найти расстояние от точки A до плоскости β. $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$ $\rho(\alpha;\ \beta) = \rho(A;\ \beta) = AB$
Расстояние между скрещивающимися прямыми	
	**Расстояние между скрещивающимися прямыми** — это длина **общего перпендикуляра** к этим прямым. $AB \perp a$; $AB \perp b$; $\rho(a;\ b) = AB$; прямые a и b скрещиваются
Способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми	
 $\rho(a;\ b) = \rho(a;\ \beta)$	Провести через прямую b плоскость $\beta \parallel a$

 $\rho(a;\ b) = \rho(\alpha;\ \beta)$	Провести через a и b параллельные плоскости α и β

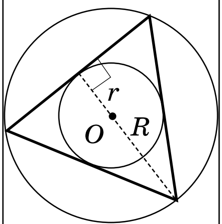
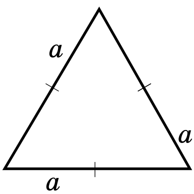
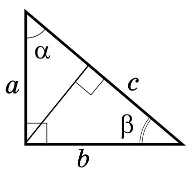
Окончание таблицы

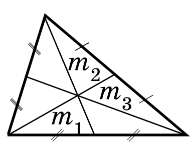
 $\rho(a;\ b) = \rho(A;\ b_1)$	Провести $\alpha \perp a$, спроектировать a и b на эту плоскость: $a \to A$, $b \to b_1$

Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора

Площадь треугольника	
	$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
	$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$
	Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ или $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

Окончание таблицы

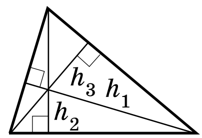
	Нахождение площади через радиусы вписанной и описанной окружностей r и R. $S = p \cdot r$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$; $S = \dfrac{a+b+c}{2}r$, где r — радиус вписанной окружности; $S = \dfrac{abc}{4R}$ или $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, где R — радиус описанной окружности
	Площадь равностороннего треугольника: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
	Площадь прямоугольного треугольника: $S = \dfrac{1}{2}ab$; $S = \dfrac{1}{2}ch_c$; $S = \dfrac{1}{2}ac\sin\alpha = \dfrac{1}{2}bc\sin\beta$. Следствие: $h_c = \dfrac{ab}{c}$

Дополнительные формулы для площади треугольника
Через медианы треугольника m_1, m_2, m_3: $S = \dfrac{1}{3}\sqrt{(m_1+m_2+m_3)(-m_1+m_2+m_3)(m_1-m_2+m_3)(m_1+m_2-m_3)}$ 

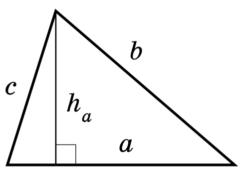
Окончание таблицы

Через высоты треугольника h_1, h_2, h_3:

$$S = \sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)}$$



Нахождение высоты произвольного треугольника методом площадей

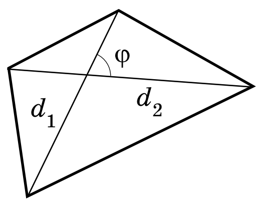


Метод площадей заключается в нахождении площади различными способами. Далее из этого равенства находят различные элементы треугольника, например высоту

$$S = \frac{1}{2}ah_a \text{ или } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$$

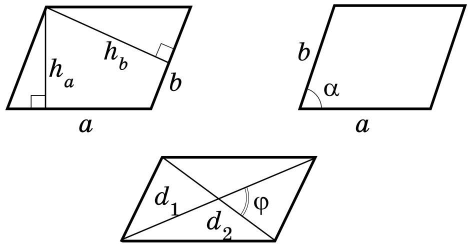
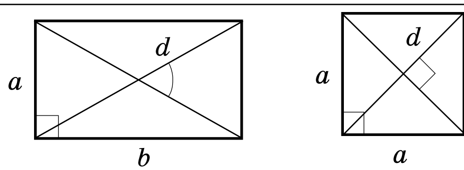
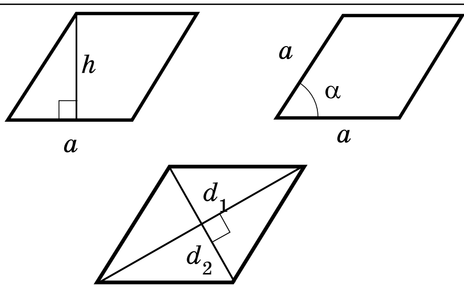
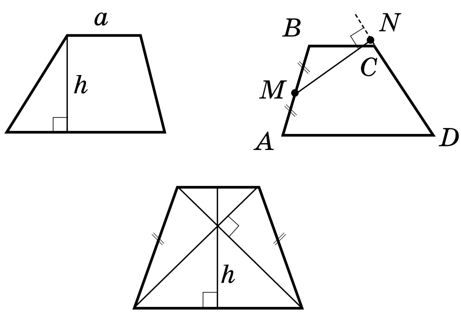
Площадь четырёхугольника



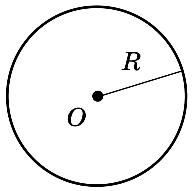
Площадь любого выпуклого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$$

Окончание таблицы

	**Площадь параллелограмма:** $S = ah_a = bh_b$; $S = ab\sin\alpha$; $S = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
	**Площадь прямоугольника и квадрата:** $S_{пр} = ab$; $S_{пр} = \dfrac{1}{2}d^2\sin\varphi$; $S_{кв} = a^2$. $S_{кв} = \dfrac{d^2}{2}$
	**Площадь ромба:** $S_р = ah$; $S_р = a^2\sin\alpha$; $S_р = \dfrac{1}{2}d_1d_2$
	**Площадь трапеции:** $S_{тр} = \dfrac{a+b}{2}\cdot h$ или $S_{тр} = m\cdot h$, где $m = \dfrac{a+b}{2}$ — средняя линия трапеции, $S_{тр} = CD\cdot MN$
В равнобокой трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями площадь равна квадрату высоты: $S_{тр} = h^2$	

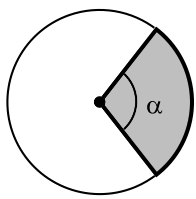
Площадь круга и его частей



Круг — фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного.
Точка O — центр круга,
данное расстояние R — радиус круга

Площадь круга:

$S = \pi R^2$ или $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$, где D — диаметр



Круговой сектор — часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла

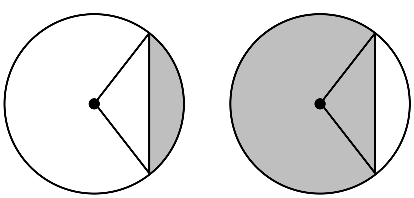
Площадь кругового сектора:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ},$$

где n° — градусная мера соответствующего центрального угла.

$$S_{\text{сект}} = \frac{\alpha R^2}{2},$$

где α — радианная мера соответствующего центрального угла

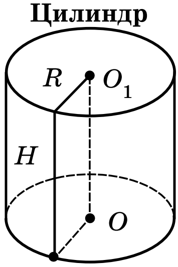
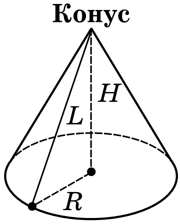
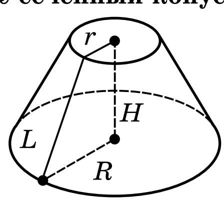


Круговой сегмент — общая часть круга и полуплоскости

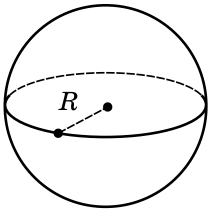
Окончание таблицы

Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле: $$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ \pm S_\triangle,$$ где n° — градусная мера соответствующего центрального угла; S_Δ — площадь треугольника с вершиной в центре круга; «+», если $n^\circ > 180^\circ$; «−», если $n^\circ < 180^\circ$

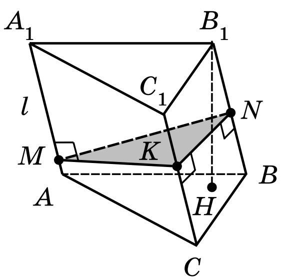
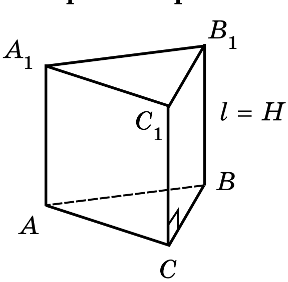
Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы

Вид тела вращения	Боковая поверхность	Полная поверхность
Цилиндр 	$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$ $S_{\text{полн}} = 2\pi R(H+R)$
	R — радиус основания; L — образующая; H — высота; $L = H$	
Конус 	$S_{\text{бок}} = \pi RL$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$ $S_{\text{полн}} = \pi R(L+R)$
	R — радиус основания; L — образующая; H — высота	
Усечённый конус 	$S_{\text{бок}} = \pi(R+r)L$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2}$
	R и r — радиусы большего и меньшего оснований; L — образующая; H — высота	

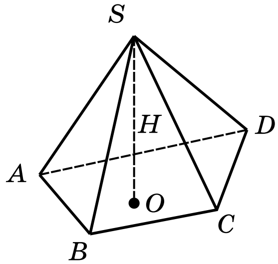
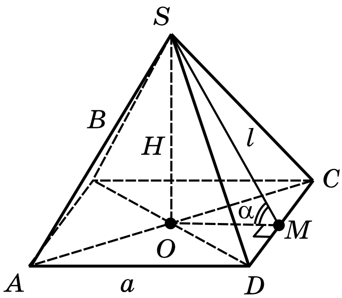
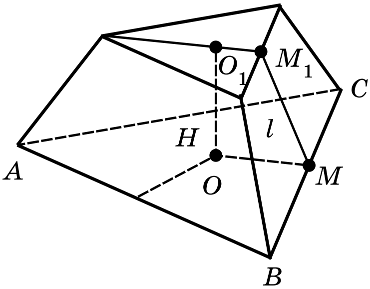
Окончание таблицы

Шар и сфера	**Площадь сферы** $S_{сф} = 4\pi R^2$
	R — радиус шара

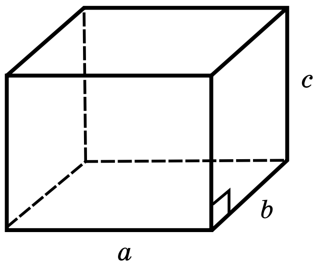
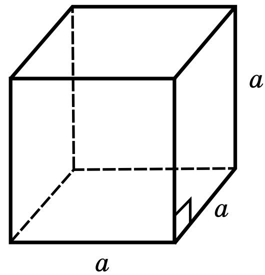
Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

Вид многогранника	Объём
Наклонная призма 	$V_{н.пр.} = S^{\wedge} \cdot l$ или $V_{н.пр.} = S_{осн} \cdot H$ MNK — перпендикулярное сечение; $S^{\wedge}$ — площадь перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра; $S_{осн}$ — площадь основания; H — высота
Прямая призма 	$V = S_{осн} \cdot H$ или $V = S_{осн} \cdot l$ Длина высоты совпадает с длиной бокового ребра

Продолжение таблицы

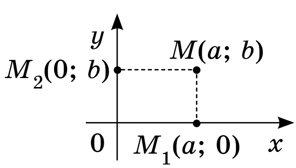
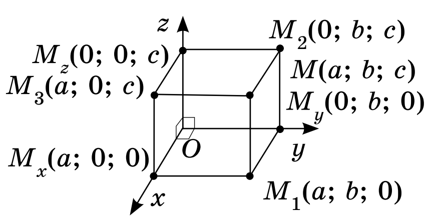
Пирамида 	$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$
Правильная пирамида 	$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$ $S_{\text{осн}}$ — площадь основания; H — высота; l — апофема; a — сторона основания; α — угол наклона боковой грани
Правильная усечённая пирамида 	$V = \frac{1}{3} H(S_{\text{осн}_1} + \sqrt{S_{\text{осн}_1} \cdot S_{\text{осн}_2}} + S_{\text{осн}_2})$

Окончание таблицы

Прямоугольный параллелепипед	**Куб**
 $V = abc$	 $V = a^3$

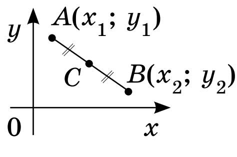
КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

Координаты на прямой, декартовы координаты на плоскости и в пространстве

Декартовы координаты	
Декартовы координаты на плоскости	**Декартовы координаты в пространстве**
 O — начало координат; Ox — ось абсцисс; Oy — ось ординат	 O — начало координат; Ox — ось абсцисс; Oy — ось ординат; Oz — ось аппликат

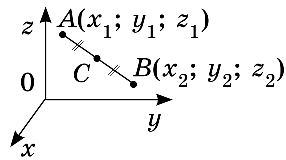
Координаты середины отрезка

$C(x_C;\, y_C)$ — середина отрезка AB



$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2};\; y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

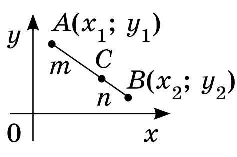
$C(x_C;\, y_C;\, z_C)$ — середина отрезка AB



$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2};\; y_C = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

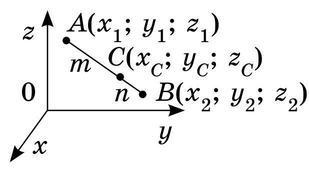
$$z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении



Даны точки $A(x_1;\, y_1)$, $B(x_2;\, y_2)$. Точка $C(x_C;\, y_C)$ делит отрезок AB в отношении $m:n$, считая от точки A. Тогда координаты точки C:

$$x_C = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n};\; y_C = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$$



$A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $C(x_C;\, y_C;\, z_C)$, $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$.

Точка $C(x_C;\, y_C;\, z_C)$ делит отрезок AB в отношении $m:n$, считая от точки A.

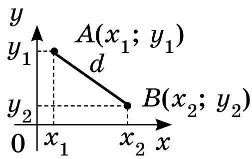
$$x_C = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n};\; y_C = \frac{ny_1 + my_2}{m + n};$$

$$z_C = \frac{nz_1 + mz_2}{m + n}$$

Формула расстояния между двумя точками; уравнение сферы

Формула расстояния между точками

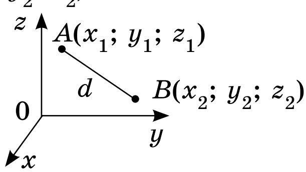
$A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$



Расстояние d между точками A и B:

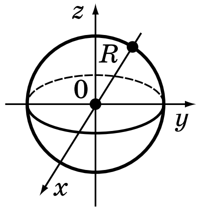
$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

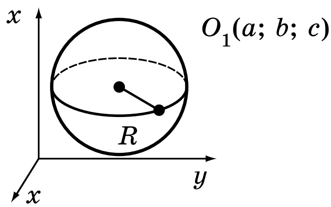
$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$



Расстояние d между точками A и B:

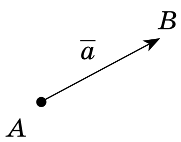
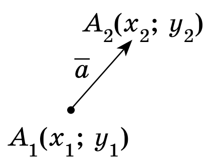
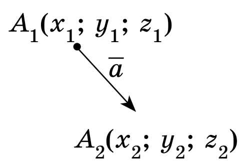
$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

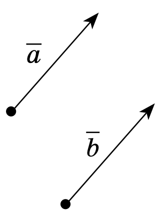
<table>
<tr><th colspan="2">Уравнение сферы</th></tr>
<tr><th>с центром в начале координат</th><th>с центром в произвольной точке</th></tr>
<tr>
<td>


$x^2+y^2+z^2 = R^2$.
Центр сферы $O(0;\ 0;\ 0)$
</td>
<td>


$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$.
Центр сферы $O_1(a;\ b;\ c)$,
радиус R
</td>
</tr>
</table>

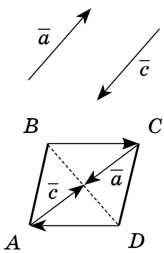
Вектор, модуль вектора, равенство векторов, сложение векторов и умножение вектора на число

Векторы на плоскости	Векторы в пространстве
	**Вектором** называется направленный отрезок: $\overline{AB} = \overline{a}$ Длина этого отрезка называется **длиной (модулем, абсолютной величиной)** вектора: $\lvert\overline{a}\rvert = AB$
Координаты вектора на плоскости	**Координаты вектора в пространстве**
 $\overline{a}(a_1;\ a_2)$, где $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$. $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	 $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$, где $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$; $a_3 = z_2 - z_1$. $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Равные векторы

$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \lvert\overline{a}\rvert = \lvert\overline{b}\rvert \\ \text{векторы } \overline{a} \text{ и } \overline{b} \text{ одинаково направлены} \end{cases}$

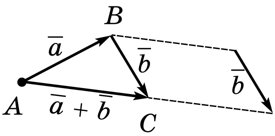
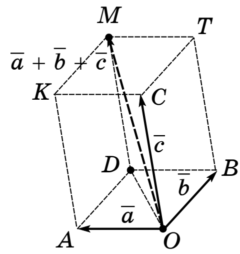
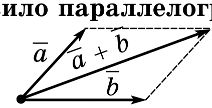
Окончание таблицы

В координатах
$\overline{a}(a_1;\, a_2) = \overline{b}(b_1;\, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$ $\overline{a}(a_1;\, a_2;\, a_3) = \overline{b}(b_1;\, b_2;\, b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

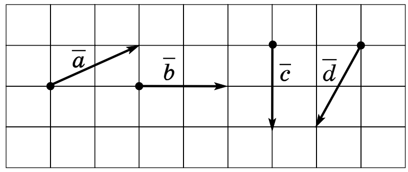
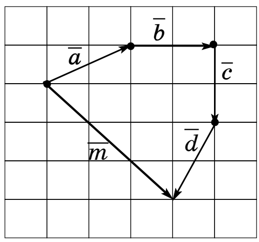
Противоположные векторы	
	**Противоположные векторы** — векторы, имеющие одинаковую длину и противоположное направление. Векторы $\overline{AO}$ и $\overline{CO}$; $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ — противоположные. $\|\overline{a}\| = \|\overline{c}\|$; $\overline{a} = -\overline{c}$

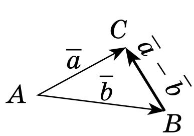
Операции над векторами

Сумма векторов	
На плоскости	**В пространстве**
$\overline{a}(a_1;\, a_2) + \overline{b}(b_1;\, b_2) =$ $= \overline{c}(a_1 + b_1;\, a_2 + b_2)$	$\overline{a}(a_1;\, a_2;\, a_3) + \overline{b}(b_1;\, b_2;\, b_3) =$ $= \overline{c}(a_1 + b_1;\, a_2 + b_2;\, a_3 + b_3)$

Правило треугольника	**Правило параллелепипеда**
 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$	 $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$
Правило параллелограмма 	

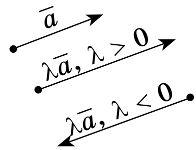
Окончание таблицы

<table>
<tr><td colspan="2">Найти сумму векторов
</td></tr>
<tr><td></td><td>$+\begin{array}{l}\overline{a}(2;\ 1)\\ \overline{b}(2;\ 0)\\ \overline{c}(0;\ -2)\\ \overline{d}(-1;\ -2)\end{array}$
$\overline{m}(3;\ -3)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правило многоугольника
Пусть даны векторы $\overline{a}$; $\overline{b}$; $\overline{c}$; $\overline{d}$.
а) от произвольной точки строим вектор $\overline{a}$;
б) от конца вектора $\overline{a}$ строим вектор $\overline{b}$;
в) от конца вектора $\overline{b}$ строим вектор $\overline{c}$;
г) от конца вектора $\overline{c}$ строим вектор $\overline{d}$;
д) вектор-сумма $\overline{m}$ — его начало совпадает с началом вектора $\overline{a}$, конец — с концом вектора $\overline{d}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Разность векторов</td></tr>
<tr><td>$\overline{a}(a_1;\ a_2) - \overline{b}(b_1;\ b_2) =$
$= \overline{c}(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2)$</td><td>$\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3) - \overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3) =$
$= \overline{c}(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Умножение вектора на число</td></tr>
<tr><td>$\lambda \cdot (\overline{a_1;\ a_2}) = (\overline{\lambda a_1;\ \lambda a_2})$</td><td>$\lambda \cdot (a_1;\ a_2;\ a_3) = (\overline{\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3})$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

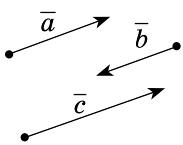
	При $\lambda > 0$ вектор $\lambda\overline{a}$ одинаково направлен с вектором $\overline{a}$. При $\lambda < 0$ вектор $\lambda\overline{a}$ противоположно направлен с вектором $\overline{a}$. $\lvert\lambda\overline{a}\rvert = \lvert\lambda\rvert\cdot\lvert\overline{a}\rvert$

Векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ коллинеарны

Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то $\overline{b} = \lambda\overline{a}$	$\Leftrightarrow$	Если $\overline{b} = \lambda\overline{a}$, то $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — коллинеарны

Свойства действий над векторами	
Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ и любых чисел γ и μ:	
1) $\overline{a} + b = \overline{b} + \overline{a}$; 2) $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (a + b) + \overline{c}$; 3) $\overline{a} + 0 = \overline{a}$; 4) $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-1)\cdot\overline{b}$; 5) $(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$; 6) $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{a}$;	7) $0\cdot\overline{a} = \overline{0}$; 8) $\lambda\cdot\overline{0} = \overline{0}$; 9) $\lvert\lambda\overline{a}\rvert = \lvert\lambda\rvert\cdot\lvert\overline{a}\rvert$; 10) $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$; 11) $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$;

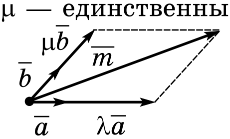
Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Коллинеарные векторы	
	Ненулевые векторы называют **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы направлены одинаково или противоположно

Условие коллинеарности векторов	
$\overline{a}$ коллинеарно $\overline{b}$ $\overline{a}(a_1;\ a_2)$; $\overline{b}(b_1;\ b_2) \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$	$\overline{a}$ коллинеарно $\overline{b}$ $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$; $\overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3) \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

Разложение вектора на плоскости: по двум неколлинеарным векторам

$\overline{m}$ — произвольный вектор плоскости;
$\overline{a}$ и $\overline{b}$ — неколлинеарные векторы.
Всегда существует разложение: $\overline{m} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$,
где λ и μ — единственные числа

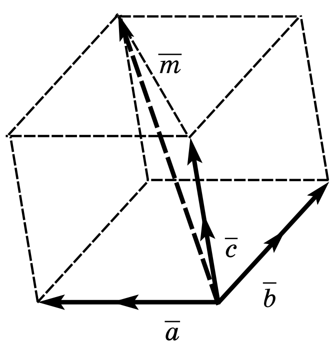


Векторы $\overline{a}(a_1;\ a_2)$ и $\overline{b}(b_1;\ b_2)$ неколлинеарны, если $\dfrac{a_1}{b_1} \neq \dfrac{a_2}{b_2}$

Компланарные векторы. Разложение по трём некомпланарным векторам

В пространстве: по трём неколлинеарным векторам

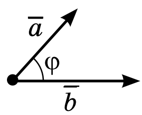
$\overline{m}$ — произвольный вектор пространства; $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — некомпланарные (т. е. не параллельные одной плоскости) векторы.
Всегда существует разложение: $\overline{m} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$,
где λ, μ и ν — единственные числа

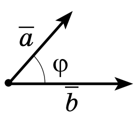
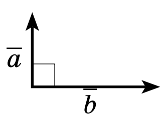
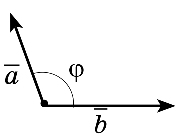


Условие компланарности векторов

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — компланарны, если $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, где $\lambda^2+\mu^2 \neq 0$

Координаты вектора; скалярное произведение векторов, угол между векторами

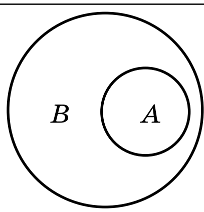
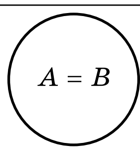
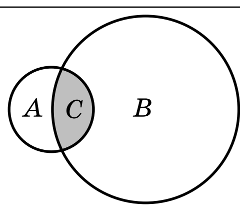
Скалярное произведение векторов на плоскости	**Скалярное произведение векторов в пространстве**
$\overline{a}(a_1;\ a_2);\ \overline{b}(b_1;\ b_2)$ $\overline{a}\cdot\overline{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$	$\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3);\ \overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ $\overline{a}\cdot\overline{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$
	**Теорема о скалярном произведении векторов** $\overline{a}\cdot\overline{b} = \lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert\cos\varphi$, где φ — угол между векторами

Следствия из теоремы о скалярном произведении	
Численное значение скалярного произведения характеризует величину угла между векторами:	
	$\overline{a}\cdot\overline{b} > 0 \Leftrightarrow 0^\circ \le \varphi < 90^\circ$ Угол между векторами — **острый**
	**Условие перпендикулярности векторов** $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a}\perp\overline{b}$ Угол между векторами 90° (векторы перпендикулярны)
	$\overline{a}\cdot\overline{b} < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \varphi < 180^\circ$ Угол между векторами — **тупой**
Косинус угла между векторами вычисляется по формуле: $$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert}$$	

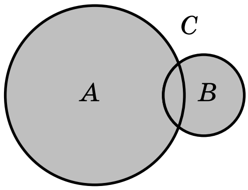
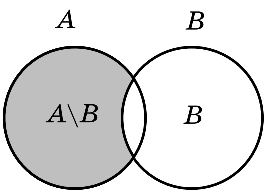
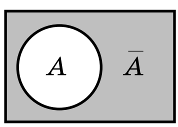
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Поочерёдный и одновременный выбор

Понятие множества и его элементов	
Множество — совокупность некоторых объектов, объединённых по определённому признаку	Элемент a принадлежит множеству $A \Leftrightarrow a \in A$. Элемент b не принадлежит множеству $A \Leftrightarrow b \notin A$. В множестве нет элементов $\Leftrightarrow \varnothing$
Подмножество ($\subset$)	
	$A \subset B \Leftrightarrow$ Если $x \in A$, то $x \in B$
Равенство множеств (=)	
	Если $x \in A$, то $x \in B$ Если $x \in B$, то $x \in A$
Пересечение множеств ($\cap$)	
	$C = A \cap B$ $x \in C \Rightarrow x \in A$ и $x \in B$

Окончание таблицы

Объединение множеств (∪)	
	$A \cup B = C$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$
Разность множеств (\\)	
	$C = A \setminus B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$
Дополнение множеств	
	$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$

Простейшие комбинаторные задачи: перебор вариантов, правило суммы и произведения	
В простейших комбинаторных задачах осуществляют перебор всех возможных комбинаций и строится **дерево возможных вариантов**	
Поочерёдный и одновременный выбор	
Правило суммы (одновременный выбор)	**Правило произведения (поочерёдный выбор)**
Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами, то A или B можно выбрать $m+n$ способами	Если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то A и B можно выбрать $m \cdot n$ способами

В комбинаторных задачах изучаются способы выбора и размещения элементов конечного множества. Такие группы элементов называют **соединениями**

Соединения

Все элементы полученного множества разные	Элементы полученного множества повторяются
$\Downarrow$	$\Downarrow$
Соединения без повторений	Соединения с повторениями

Формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона

Основные виды соединений без повторений	
Перестановка из n элементов (различают порядком следования элементов)	$P_n = n!$ $n!$ (факториал) $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ $0! = 1$
Размещения из n элементов по m (различаются или порядком, или элементами)	$A_n^m = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
Сочетания из n элементов по m (отличаются лишь элементами)	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{A_n^m}{P_m}$, $C_n^0 = 1.$ Свойство сочетания $C_n^m = C_n^{n-m}$

Бином Ньютона						
Двучлен вида $a+x$ называют биномом	**Треугольник Паскаля**					
$(a+x)^0 = 1;\ (a+x) \neq 0$	1					
$(a+x)^1 = a+x$	1	1				
$(a+x)^2 = a^2+2ax+x^2$	1	2	1			
$(a+x)^3 = a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$	1	3	3	1		
$(a+x)^4 =$ $= a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4$	1	4	6	4	1	
$(a+x)^5 = a^5+5a^4x+10a^3x^2+$ $+ 10a^2x^3+5ax^4+x^5$	1	5	10	10	5	1

Общая формула бинома Ньютона	
$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots$ $+ C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n$	
Общий член разложения $T_{n+1} = C_n^k a^{n-k} x^k$ **($k = 0, 1, 2, \ldots n$).** C_n^k называют **биномиальными коэффициентами**	
Свойства биномиальных коэффициентов	
Число биномиальных коэффициентов (a равно n слагаемых в разложении) равно $n+1$	Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$
Коэффициенты членов, равноудалённых от начала и конца разложения, равны между собой: $C_n^k = C_n^{k-1}$	Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на чётных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечётных местах

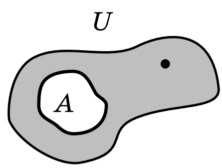
ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

Числовые характеристики рядов данных

<table>
<tr><td colspan="2">Ранжирование ряда чисел. Чтобы вычислять статистические характеристики, ряд чисел, полученных в результате сбора данных, надо ранжировать, т. е. расположить числа в порядке неубывания (каждое следующее число не меньше предыдущего)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Числовые характеристики рядов данных</td></tr>
<tr><td>Размах (R) — разница между наибольшим и наименьшим значением ряда чисел.
Размах находят, если необходимо определить, как велик разброс данных в ряду</td><td>Среднее значение ряда чисел (среднее арифметическое) — частное от деления суммы этих чисел на количество слагаемых.
Среднее значение — это значение величины, которое получается, если сумма всех наблюдаемых значений распределяется поровну между единицами наблюдения</td></tr>
<tr><td>Мода (Mo) — число, которое встречается в данном ряду чаще всего</td><td>Медиана — так называемое серединное значение ранжированного ряда чисел:</td></tr>
<tr><td>Ряд чисел может иметь более одной моды или не иметь её совсем.
Моду ряда чисел находят, когда хотят выяснить некоторый типичный показатель</td><td>а) если количество чисел в ряду нечётное, то медиана — это число, записанное посередине;
б) если количество чисел в ряду чётное, то медиана — это среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине</td></tr>
</table>

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

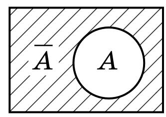
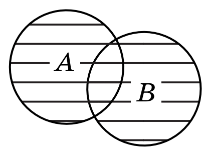
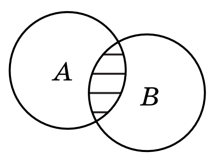
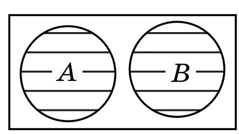
Вероятности событий

<table>
<tr>
<td>Классическое определение вероятности</td>
<td>Вероятность $P(A)$ случайного события A — это отношение числа событий, которые способствуют событию A, к общему количеству пространства элементарных событий: $P(A) = \frac{m}{n}$,
где n — число всех событий пространства; m — число событий пространства, способствующих событию A.
<table>
<tr><td>Событие</td><td>Его вероятность $P(A)$</td></tr>
<tr><td>Невозможно</td><td>$P(A) = 0$</td></tr>
<tr><td>Случайно</td><td>$0 < P(A) < 1$</td></tr>
<tr><td>Вероятно</td><td>$P(A) = 1$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Статистическое определение вероятности</td>
<td>Статистическая вероятность $P(A)$
Событие A — предел, к которому приближается относительная частота $\frac{m}{n}$
(n — количество всех испытаний серии, m — количество испытаний, в которых происходит событие A).
Появление события A при неограниченном увеличении числа всех испытаний:
$P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{m}{n}$


U — площадь фигуры на плоскость;
$S(U)$ — площадь фигуры U;
A — часть фигуры U ($A \subset U$);
$S(A)$ — площадь фигуры A.
Событие A — попадание точек U в фигуру A</td>
</tr>
</table>

Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач

Операции над событиями

Определение	Теоретико-множественная иллюстрация
Противоположное событие	
Событие $\overline{A}$ называется **противоположным** событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A. Вероятность противоположного события: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	 U — достоверное событие $P(U) = 1$
Сумма событий	
Суммой (или объединением) событий A и B называется событие $A+B$ (или $A \cup B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A или событие B	 $A+B$ или $A \cup B$
Произведение событий	
Произведением (или пересечением) событий A и B называется событие $A \cdot B$ (или $A \cap B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B	 $A \cdot B$ или $A \cap B$
Несовместные события	
Два события A и B называются **несовместными**, если их произведение является невозможным событием, т. е. $A \cdot B = \varnothing$ (или $A \cap B = \varnothing$)	 $A \cdot B = \varnothing$

Окончание таблицы

Определение	**Теоретико-множественная иллюстрация**
Вероятность суммы двух несовместных событий	
Если события A и B несовместные, то $P(A+B) = P(A)+P(B)$	

Вероятность сложных событий

Теоремы сложения вероятностей	
События A и B совместимы	
нет	да
$P(A+B) = P(A) + P(B)$	$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$
Следствия сложения вероятностей	
Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n, которые образуют полную группу и попарно несовместимы, равна 1: $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n) = 1$	Сумма вероятностей **противоположных** событий равна 1: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Справочное издание
анықтамалық баспа

Для старшего школьного возраста
мектеп жасындағы ересек балаларға арналған

НАГЛЯДНО И ДОСТУПНО

Третьяк Ирина Владимировна

МАТЕМАТИКА В СХЕМАХ И ТАБЛИЦАХ
(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *А. Кашлев*

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша
арыз-талаптарды қабылдаушының
өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8(727) 2 51 59 89,90,91,92, факс: 8 (727) 251 58 12 вн. 107; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно
законодательству РФ о техническом регулировании
можно получить по адресу: http://eksmo.ru/certification/

Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Дата изготовления / Подписано в печать 15.09.2017. Формат 60x90$^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,0.
Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-04-089400-0

9 785040 894000 >

ISBN 978-5-04-089400-0
www.vk.com/eksmo_kids

ЭФФЕКТИВНАЯ ПОДГОТОВКА

к уроку

к экзамену

Курс математики в схемах и таблицах подготовлен в полном соответствии с современными требованиями школьной программы и представляет собой учебное пособие, в котором в сжатой, концентрированной форме даются основные сведения по математике.

- **Необходимый объем информации по математике**
- **Структура текстов, удобная для запоминания**
- **Ключевые термины и понятия**
- **Иллюстративные материалы, таблицы, схемы**

Эта книга поможет:

- эффективно подготовиться к единому государственному экзамену;
- быстро повторить школьный курс математики;
- сэкономить свое время и силы.

МАТЕМАТИКА

в схемах и таблицах