

Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

в задачах и упражнениях

Учебное пособие

2-е издание

Москва
ФОРУМ
2008

УДК 519.21
ББК 22.171
К55

Р е ц е н з е н т ы:

к-т физ.-мат. наук, доцент, *А. А. Макаров*
(МГУ им. Ломоносова);

д-р тех. наук, профессор, *В. П. Майборода*
(зав. каф. «Математическое моделирование» МИЭМ)

Кочетков Е. С., Смерчинская С. О.

К 55 Теория вероятностей в задачах и упражнениях:
Учебное пособие. — 2-е изд. — М.: ФОРУМ, 2008. —
480 с.: ил. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-91134-181-7

Учебное пособие содержит задачи по всем разделам теории вероятностей, изучаемым в технических университетах и институтах, а также решения наиболее важных задач; практически ко всем задачам приведены ответы, а к некоторым задачам — указания по их решению.

Для студентов технических специальностей.

УДК 519.21
ББК 22.171

ISBN 978-5-91134-181-7

© Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская,
2005, 2008
© Издательство «ФОРУМ», 2005, 2008

Оглавление

Предисловие ко второму изданию	7
Из предисловия ко второму изданию	7
Глава I. Случайные события	9
§ 1. Классическая схема теории вероятностей	9
Основные соглашения	9
Простейшие задачи	10
Перестановки в классической схеме теории вероятностей	13
Размещения в классической схеме теории вероятностей	16
Сочетания в классической схеме теории вероятностей	19
Примеры из статистической физики	26
Симметрия в классической схеме теории вероятностей	27
Условная вероятность в классической схеме теории вероятностей	28
Геометрические вероятности	30
Разные задачи	32
§ 2. Аксиоматика теории вероятностей	36
Множества и операции над ними	36
Алгебра случайных событий	37
Вероятность случайного события	39
Вероятностное пространство	39
Дискретное вероятностное пространство	40
Основные свойства вероятности	42
§ 3. Формулы сложения и умножения вероятностей	45
Формула сложения вероятностей	45
Оценка снизу для вероятности произведения событий	50
Формула умножения вероятностей	52
Независимые события	55
Примеры совместного использования формул сложения и умножения вероятностей	61
Расчет надежности простейших схем	67
Разные задачи	70
§ 4. Формула полной вероятности; формула Байеса	75
Простейшие задачи	75
Примеры специального выбора гипотез	85
Разные задачи	87
§ 5. Схема Бернулли; полиномиальная схема	90
Формула Бернулли	90
Число испытаний до k -го успеха	98
Полиномиальная формула	99
Разные задачи	102
Глава II. Случайные величины	104

§ 6. Дискретные случайные величины	104
Случайная величина и ее функция распределения	104
Общие понятия, связанные с дискретными случайными величинами	107
Равномерное распределение на конечном множестве	115
Распределение Бернулли	117
$Bi(n, p)$ — биномиальное распределение с параметрами n и p	121
$G(p)$ — геометрическое распределение с параметром p	124
Энтропия дискретного распределения	128
Разные задачи	131
§ 7. Предельные теоремы в схеме Бернулли	137
Пуассоновская аппроксимация биномиального распределения	137
Пуассоновский поток событий	140
Нормальная аппроксимация биномиального распределения .	145
Разные задачи	152
§ 8. Непрерывные случайные величины	154
Общие теоретические положения	154
• $R(a, b)$ — равномерное распределение в интервале (a, b) . .	158
• $E(\lambda)$ — экспоненциальное (показательное) распределение с параметром λ	165
• $N(\mu, \sigma^2)$ — нормальное (гауссовское) распределение с параметрами μ и σ	168
Функциональные преобразования непрерывных случайных величин	176
Логарифмически нормальное распределение	177
• Распределение Коши	179
Энтропия абсолютно непрерывного распределения вероятностей	180
Разные задачи	183
§ 9. Смешанные задачи на случайные величины	187
Определение математического ожидания	187
Неравенства Чебышева	189
Еще несколько важных неравенств	192
Геометрическая интерпретация математического ожидания .	194
Несколько примеров из теории надежности	197
Примеры исследования разрывных распределений	201
Асимметрия и эксцесс распределения вероятностей	205
Моделирование случайных величин	207
Разные задачи	209

Глава III. Многомерные распределения вероятностей 213

§ 10. Дискретные двумерные распределения вероятностей	213
Общие понятия, связанные с двумерными случайными векторами	213
Дискретные распределения вероятностей в $\mathbb{R}^2$	218
Формула полного математического ожидания	227

Энтропия и информация	231
Разные задачи	233
§ 11. Непрерывные двумерные распределения вероятностей	236
Общие понятия, связанные с двумерным абсолютно непрерывным распределением вероятностей	236
Примеры исследования двумерных непрерывных распределений вероятностей	240
Вероятность попадания случайной точки в заданную область	244
Функциональные преобразования случайных векторов	247
Суммирование независимых случайных величин	253
Мультипликативное свойство математического ожидания	256
Энтропия и информация	258
Разные задачи	259
§ 12. Распределения вероятностей в $\mathbb{R}^n$	264
Общие понятия	264
Абсолютно непрерывное распределение вероятностей в $\mathbb{R}^n$	271
Мультипликативное свойство математического ожидания	276
Вариационный ряд	278
Линейное преобразование случайного вектора к вектору с попарно некоррелированными составляющими	280
Разные задачи	285
§ 13. Характеристические функции	288
Определение и простейшие свойства	288
Дифференцирование характеристических функций	295
Метод характеристических функций	297
Конструирование характеристических функций	303
Некоторые специальные свойства характеристических функций	308
Характеристические функции случайных векторов	310
Разные задачи	311
§ 14. Многомерное нормальное распределение вероятностей	315
Определение и простейшие свойства нормального распределения вероятностей в $\mathbb{R}^n$	315
Двумерное нормальное распределение вероятностей	325
Количество информации об одной случайной величине, содержащейся в другой случайной величине	334
Теорема о нормальной корреляции в $\mathbb{R}^2$	336
Теорема о нормальной корреляции в $\mathbb{R}^n$	338
Линейное преобразование нормально распределенного случайного вектора к вектору с независимыми составляющими	339
Линейное преобразование одного многомерного нормального распределения вероятностей в другое	344
Моделирование многомерного нормального распределения вероятностей	346

Линейные и квадратичные формы от нормальных случайных величин	348
Вырожденное нормальное распределение вероятностей	354
Разные задачи	356

Глава IV. Предельные теоремы теории вероятностей 363

§ 15. Виды вероятностной сходимости	363
Сходимость по вероятности и сходимость почти наверное (с вероятностью 1)	363
Сходимость в среднем	375
Сходимость по распределению (слабая сходимость)	378
Асимптотически нормальные случайные величины	390
Переход к пределу под знаком математического ожидания . .	393
Разные задачи	399
§ 16. Основные предельные теоремы	402
Закон больших чисел	402
Метод урезания	406
Усиленный закон больших чисел	409
Центральная предельная теорема	411
Вычисление интегралов методом статистических испытаний (методом Монте-Карло)	417
Задачи из классического анализа	419
Разные задачи	420

Приложение	423
Элементы комбинаторики	423

Таблицы	437
1. Таблица распределения Пуассона	437
2. Таблица значений функции $\phi(x)$	438
3. Таблица значений функции Лапласа	439
4. Псевдослучайные числа с равномерным распределением в интервале $(0, 1)$	440
5. Псевдослучайные числа со стандартным нормальным распределением	441

Ответы и указания	442

Предметный указатель	471

Литература	478

Предисловие ко второму изданию

Настоящее издание практически не отличается от первого издания: исправлены лишь замеченные опечатки и неточности, слегка расширен предметный указатель.

Из предисловия к первому изданию

В книге приведено около 1200 задач различной степени трудности по тем разделам теории вероятностей, которые изучаются в технических университетах и институтах.

Весь материал разбит на четыре главы, каждая глава — на параграфы, каждый параграф — на пункты (в зависимости от методов решения приведенных задач). Думается, что такое представление материала позволит преподавателю легко решить, какие из предложенных задач — в зависимости от отведенного учебным планом времени — следует выбрать в качестве обязательных для рассмотрения в аудитории на практическом занятии, оставить для самостоятельной работы студентов и использовать в контрольных работах. При этом часть задач вполне может быть положена в основу расчетно-графических работ, выполняемых по учебному плану.

Каждый параграф и некоторые пункты предваряются теоретической справкой, содержащей все основные положения, используемые при решении предложенных задач. Принимая во внимание, что подавляющее большинство студентов технических вузов не знакомо с комбинаторикой в том объеме, в каком это существенно требуется, по крайней мере на начальном этапе изучения теории вероятностей, мы в качестве приложения на с. 423–436 приводим краткий очерк «Элементы комбинаторики».

Наиболее важные типовые задачи приводятся с решениями. Практически ко всем задачам в конце книги даны ответы,

а к части задач — указания по их решению. Некоторые из предложенных задач относятся к непростым «теоретическим» задачам и содержат результаты, по характеру близкие к справочному материалу. Эта часть книги, мы надеемся, окажется полезной не только для преподавателей и продвинутых студентов, но и для научных сотрудников.

Решение некоторых задач по теории вероятностей связано с использованием непростых аналитических методов. Мы стремились как можно чаще обращать внимание читателей на вероятностный смысл получаемых при этом результатов.

Приведенный в конце книги предметный указатель отчасти выполняет функции путевода по основным распределениям вероятностей и смежным понятиям. В нем для каждого из ключевых понятий приводится не только номер страницы, где это понятие появляется впервые, но и номера страниц, где оно существенно используется, а также номера наиболее информативных задач.

При написании книги были использованы многие отечественные и зарубежные учебники и задачки по теории вероятностей. Приводимый в конце книги список использованной литературы охватывает общедоступные задачки и лишь те теоретические курсы, которые были использованы нами наиболее полно. Мы сочли возможным включить сюда ряд методических пособий по теории вероятностей, изданных за последние 10–15 лет в МАИ — Московском государственном авиационном институте (техническом университете), — которые составили основу данной книги.

Авторы благодарят А. А. Макарова, сделавшего много важных замечаний по рукописи книги.

Часть I

Случайные события

§ 1. Классическая схема теории вероятностей

Основные соглашения

В простейших вероятностных задачах случайные события $A, B, C, \dots$ рассматриваются как *исходы* того или иного опыта, который можно воспроизводить в одинаковых условиях любое число раз. При этом некоторые наиболее простые исходы $E_1, E_2, \dots$ выделяются особо и называются *элементарными исходами*. Предполагается, что через них можно выразить и все остальные исходы; в частности, относительно всякого случайного события A можно однозначно решить, произойдет оно или нет в зависимости от того, к какому элементарному исходу приведет данный опыт.

Классическая схема теории вероятностей охватывает те опыты, элементарные исходы которых удовлетворяют следующим условиям.

1. Элементарных исходов — конечное множество: $\{E_1, E_2, \dots, E_N\}$.
2. Элементарные исходы образуют *полную группу попарно несовместных случайных событий*. (Это означает, что каждый опыт дает в результате один и только один из N элементарных исходов.)
3. Элементарные исходы *равновозможны*.

В этих условиях *вероятность* $P(A)$ *случайного события* A вычисляется как

$$P(A) = \frac{N_A}{N}, \quad (1.1)$$

где N_A — число элементарных исходов, *благоприятствующих* событию A , т. е. тех исходов, при которых событие A происходит.

Пусть A и B — произвольные случайные события, связанные с некоторым опытом. Тогда с этим опытом можно связать и события $A + B$, AB , $\bar{A}$.

Сумма $A + B$ случайных событий A и B есть такое случайное событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий A и B (при этом наступление и A и B не исключается).

Произведение AB случайных событий A и B — это случайное событие, наступающее в том и только в том случае, если наступает каждое из событий A и B .

Событие $\bar{A}$, противоположное событию A , наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A .

В число случайных событий включают и событие Ω , которое наблюдается в результате опыта всегда, а также событие $\emptyset$, которое не наблюдается в результате опыта никогда. На это наводят, в частности, тождества

$$A + \bar{A} = \Omega, \quad A\bar{A} = \emptyset.$$

При этом Ω называется *достоверным событием*, а $\emptyset$ — *невозможным событием*. Очевидно, что $N_{\Omega} = N$, $N_{\emptyset} = 0$, так что

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0. \quad (1.2)$$

События A и B называются *несовместными*, если они не могут наступить в одном и том же опыте, т. е. $AB = \emptyset$.

Вероятность, определенная формулой (1.1), обладает следующими основными свойствами.

$$1. \quad 0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1.3)$$

2. Если события A и B несовместны, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.4)$$

В общем же случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.5)$$

3. Вероятность события A и вероятность противоположного события $\bar{A}$ связаны соотношением

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}). \quad (1.6)$$

Простейшие задачи

1.1. Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, наугад извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет: белым; черным?

Решение. Рассматриваемый опыт — извлечение шара из урны — интуитивно связывается с $N = m + n$ элементарными исходами, из которых событию $A = \{\text{извлекаемый шар будет белым}\}$ благоприятствуют $N_A = m$ исходов, а событию $B = \{\text{извлекаемый шар будет черным}\}$ — $N_B = n$ исходов; отсюда

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{m}{m+n}, \quad P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{n}{m+n}. \quad (*)$$

С формальной же точки зрения не все так просто. Изначально можно говорить лишь о двух элементарных исходах: «белый» и «черный» (ведь шары одного цвета

попарно неразличимы!). Однако никаких оснований считать такие элементарные исходы равно возможными нет, по крайней мере при $n \neq m$. И нужно еще что-то предпринять прежде, чем мы окажемся в условиях классической схемы теории вероятностей.

Занумеруем все содержащиеся в урне шары от 1 до $m+n$ включительно. Это позволит нам говорить об $m+n$ различных шарах, из которых m будут белыми, а n — черными. И тогда соотношения (*) получат простое формальное обоснование.

1.2. Из урны, содержащей 10 белых, 8 черных и 2 оранжевых шара, случайно выпал какой-то шар. Какова вероятность того, что этот шар:

- а) был либо белым, либо черным;
- б) не был ни белым, ни черным;
- в) был либо не белым, либо не черным?

1.3. Деревянный кубик с окрашенными гранями распиливается на 125 равных кубиков, из которых затем наугад выбирается один кубик. Какова вероятность того, что он будет содержать:

- а) ровно одну окрашенную грань;
- б) ровно две окрашенные грани;
- в) ровно три окрашенные грани;
- г) хотя бы одну окрашенную грань;
- д) хотя бы одну неокрашенную грань?

Решение. На рис. 1.1 изображена одна из граней распиленного кубика, к которой примыкают 25 малых кубиков; помечено, сколько окрашенных граней имеет каждый из этих 25 кубиков. Внутренние малые кубики, не примыкающие ни к одной из граней большого кубика, очевидно, не будут иметь ни одной окрашенной грани. Нетрудно подсчитать, что одну окрашенную грань будут иметь 54 малых кубика, две окрашенные грани — 36 малых кубиков, три окрашенные грани — 8 малых кубиков.

	2	2	2	
2	1	1	1	2
2	1	1	1	2
2	1	1	1	2
	2	2	2	

Рис. 1.1.

Это приводит к следующим искомым вероятностям:

- а) $\frac{54}{125}$; б) $\frac{36}{125}$; в) $\frac{8}{125}$; г) $\frac{98}{125}$; д) 1.

1.4. Деревянный кубик с окрашенными гранями распиливается на 64 равных кубика, из которых наугад выбирается один

кубик. Какова вероятность того, что он содержит:

- а) ровно одну окрашенную грань;
- б) ровно две окрашенные грани;
- в) ровно три окрашенные грани;
- г) хотя бы одну окрашенную грань;
- д) хотя бы одну неокрашенную грань?

1.5. Что более вероятно при подбрасывании двух монет: монеты лягут одноименными или разноименными сторонами?

Решение. Полную группу попарно несовместных и равно-возможных исходов рассматриваемого опыта (подбрасывание двух монет) представим в виде

$$\{gg, gr, rg, rr\},$$

(g — герб, r — решка). Из этих четырех исходов событию $A = \{\text{монеты лягут одноименными сторонами}\}$ благоприятствуют исходы gg и rr , а событию $B = \{\text{монеты лягут разноименными сторонами}\}$ — исходы gr и rg . Следовательно,

$$P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

и, таким образом, события A и B равновероятны.

З а м е ч а н и е. Иногда полагают, что подбрасывание двух монет описывается не четырьмя, а тремя элементарными исходами

{два герба, две решки, один герб и одна решка}.

Это приводит к другому ответу: $P(A) = 2/3$, $P(B) = 1/3$. Однако нет никаких оснований считать, что указанные три исхода являются равновероятными.

1.6. Какова вероятность того, что при подбрасывании двух монет выпадет хотя бы один герб?

1.7. Какова вероятность того, что при случайном расположении трехтомника стихотворений на книжной полке по крайней мере один том окажется на своем естественном месте?

Решение. Трехтомник может быть расположен на книжной полке шестью равновероятными способами:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

Из них событию $A = \{\text{хотя бы один том окажется на своем естественном месте}\}$ благоприятствуют четыре способа:

123, 132, 213, 321.

Поэтому $P(A) = 4/6 = 2/3$.

З а м е ч а н и е. В случае большего числа томов описанное решение оказалось бы слишком громоздким. Сама же задача достаточно интересна, и к ней мы еще вернемся в § 3.

1.8. Написано три письма и к ним подписано три конверта. Затем письма наугад вложены в конверты и отосланы по почте. Какова вероятность того, что по назначению:

- а) не попадет ни одно письмо;
- б) попадет ровно одно письмо;
- в) попадут ровно два письма?

1.9. Восемь девушек, в том числе две сестры, водят хоровод. Какова вероятность того, что, встав в круг наугад, сестры окажутся:

- а) рядом; б) друг против друга?

Перестановки в классической схеме теории вероятностей

Число перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad (1.7)$$

(n попарно различных предметов можно расположить в том или ином порядке $n!$ способами).

1.10. В ряд в случайном порядке располагаются m белых и n черных шаров. Найти вероятность того, что в этом ряду на k -м месте, $1 \leq k \leq m+n$, окажется белый шар?

Р е ш е н и е. Как и в задаче 1.1, занумеруем шары от 1 до $m+n$ включительно, тем самым сделав их попарно различными. Такие шары могут быть расположены в ряд следующим числом способов:

$$N = (m+n)!$$

Далее, подсчитаем N_A — число тех способов, которые благоприятствуют событию $A = \{\text{белый шар на } k\text{-м месте}\}$. Поставить белый шар на k -е место можно m способами — по числу имеющихся белых шаров. Осуществив это тем или иным способом, оставшиеся $m+n-1$ шаров можно распределить между незанятыми $m+n-1$ местами $(m+n-1)!$ способами. По комбинаторному принципу умножения $N_A = m \cdot (m+n-1)!$.

Следовательно,

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{m(m+n-1)!}{(m+n)!} = \frac{m}{m+n}.$$

Выходит, что для всех значений $k = 1, 2, \dots, m+n$ искомая вероятность одна и та же* и совпадает с вероятностью достать белый шар из урны, содержащей m белых и n черных шаров.

З а м е ч а н и е. Полученный результат совпадает с результатом задачи 1.1 отнюдь не случайно. Сравнивая формулировки задач 1.1 и 1.10, нетрудно заметить, что с чисто математической точки зрения они повторяют друг друга. Действительно, выбор наугад одного шара из m белых и n черных шаров ничто не мешает осуществить следующим образом: сначала располагаем данные $m+n$ шаров в ряд наугад, а затем «выбираемым» объявляем шар, находящийся на k -м месте. Случайность выбора (в смысле задачи 1.1) обеспечивается при этом случайностью расположения $m+n$ шаров в ряд (в смысле задачи 1.10). Выходит, что мы дважды, по-разному, решили одну и ту же задачу.

Ситуация, описанная в задаче 1.10, используется в качестве удобной «математической модели» при решении многих элементарных задач. Так, приводимые ниже задачи 1.11–1.16 решаются практически устно, если перевести их на язык задачи 1.10; вопрос лишь в том, чтобы увидеть в этих задачах «белые и черные шары, расположенные в ряд наугад».

1.11. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наугад составляется пятизначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что составленное число будет четным?

1.12. В связке 20 ключей, из которых только один подходит к данному замку. Найдите вероятность того, что для открывания замка придется испробовать ровно половину этих ключей.

1.13. В группе 20 студентов. Из 30-ти экзаменационных билетов студент знает лишь 25 билетов. Какова вероятность того, что идя на экзамен последним, он достанет счастливый билет?

1.14. Из тридцати экзаменационных билетов один студент не знает двух, а другой студент — трех билетов. Кому из них выгоднее брать билет первым и кому вторым?

1.15. Какова вероятность угадать с трех попыток пятизначный двоичный код?

*Это нетрудно было предвидеть: в силу случайности расположения шаров в ряд все места от 1 до $m+n$ включительно выступают равноправно.

1.16. Техническое устройство, состоящее из десяти блоков, вышло из строя из-за отказа одного какого-то блока. Для его отыскания проверяют все блоки по очереди, пока не обнаружится неисправный блок. Определите вероятность того, что проверять придется не менее половины всех блоков.

1.17. Отдельные тома некоторого пятитомного издания располагаются на книжной полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что хотя бы один том окажется не на своем месте?

Решение. Пять томов можно расположить на полке следующим числом способов: $N = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Если A — событие состоящее в том, что хотя бы один том оказывается не на своем месте, то $\bar{A}$ есть событие, состоящее в том, что все тома располагаются в естественном порядке: 1, 2, 3, 4, 5. Но в таком случае $N_{\bar{A}} = 1$ и, следовательно,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{120} = \frac{119}{120}.$$

1.18. Из всех пятизначных чисел, записываемых цифрами 1, 2, 3, 4, 5 (без повторений) наугад выбрано одно число. Чему равна вероятность того, что оно не делится на 5?

1.19. Какова вероятность того, что число, выбранное наугад из всех трехзначных чисел, не делится хотя бы на одно из чисел 4 и 6?

1.20. Из урны, содержащей первоначально 20 белых и 10 черных шаров, пропал один какой-то шар. После этого из нее наугад извлекают шар. Какова вероятность того, что это будет белый шар?

Решение. Эта задача сводится к задаче 1.10 следующей «математической моделью» описываемой в ней ситуации. В случайном расположении в ряд 20 белых и 10 черных шаров ничто не мешает нам первый шар рассматривать как «потерянный», а второй шар — как «шар, извлеченный из урны». Поэтому искомая вероятность, в соответствии с результатом задачи 1.10, равна $20/30 = 2/3$.

1.21. Из урны, содержащей первоначально 30 белых и 10 черных шаров, пропало 15 каких-то шаров. После этого из нее наугад извлекают один шар. Какова вероятность того, что это будет черный шар?

1.22. Из первой урны, содержащей m белых и n черных шаров, наугад извлекают k шаров, $1 \leq k \leq m + n$, и помещают их во вторую, пустую урну. Затем из второй урны наугад извлекают один шар. Какова вероятность того, что это будет белый шар?

Решение. В случайном расположении в ряд m белых и n черных шаров первые k шаров будем рассматривать как содержимое второй урны, а самый первый шар — как тот шар, который наугад из нее извлекается. Тогда, в соответствии с результатом задачи 1.10, искомая вероятность равна $\frac{m}{m+n}$ (и, заметьте, не зависит от k).

1.23. Шары — 10 белых и 5 черных — наугад рассыпают в две урны: в первую попадает 8 шаров, во вторую — 7 шаров. Из какой урны вероятнее достать наугад белый шар: из первой или из второй?

Размещения в классической схеме теории вероятностей

Число размещений из n элементов по m элементов вычисляется как

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1) \quad (1.8)$$

(произведение m последовательных целых чисел, большее из которых равно n). Иногда для A_n^m оказывается полезным следующее представление:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (1.9)$$

1.24. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наугад составляется трехзначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что это число будет четным? (Сопоставьте с задачей 1.11.)

Решение. Всего из данных цифр можно составить: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$ трехзначных чисел. Из них четными окажутся $2 \cdot A_4^2 = 2 \cdot 4 \cdot 3$ чисел: сначала выбирается четная цифра (2 или 4) для разряда единиц, а затем любая упорядоченная комбинация двух цифр из оставшихся четырех цифр — для разрядов десятков и сотен. Следовательно, искомая вероятность

$$p = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{5}.$$

З а м е ч а н и е. Совпадение с ответом к задаче 1.11, конечно же, не случайно. Можно было бы с самого начала говорить не о трехзначных, а о пятизначных числах, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторений, и отыскивать долю тех из них, у которых на третьем месте стоит четная цифра.

1.25. На некотором малом предприятии работают десять человек, в том числе одна семья — отец, мать и сын. В правление этого предприятия входят: председатель, коммерческий директор и бухгалтер. Предполагается, что никакие две из этих трех должностей не может занимать один и тот же человек. Какова вероятность того, что в результате случайного выбора правления:

а) в него попадут все члены семьи, причем председателем станет отец, коммерческим директором — сын, а бухгалтером — мать;

б) в него попадут все члены семьи;

в) бухгалтером станет кто-то из членов семьи?

1.26. Собрание клуба филателистов (20 человек) должно выбрать председателя, его заместителя и казначея. Какова вероятность того, что при случайном выборе председателем станет либо А, либо В, заместителем председателя — либо В, либо С, а казначеем — либо С, либо А?

1.27. Белая и черная ладьи наугад ставятся на шахматной доске. Какова вероятность того, что ладьи не будут бить друг друга?

1.28. В чулане десять разных пар ботинок. Случайно выбираются четыре ботинка. Определите вероятность того, что среди них найдется по крайней мере одна пара.

1.29. Бросают три игральные кости. Какова вероятность того, что выпавшие цифры будут попарно различными?

Р е ш е н и е. Элементарные исходы этого опыта будем рассматривать как тройки (a_1, a_2, a_3) , где a_i — число очков, выпавшее на i -й игровой кости; $i = 1, 2, 3$.

Для общего числа N таких исходов и числа N_A тех из них, которые соответствуют попарно различным числам a_1, a_2 и a_3 , по комбинаторному принципу умножения имеем: $N = 6 \cdot 6 \cdot 6$, $N_A = 6 \cdot 5 \cdot 4$. Следовательно, искомая вероятность

$$p = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{9}.$$

1.30. В поезде (10 вагонов) случайно оказались преступник и комиссар Мегрэ. Какова вероятность того, что они находятся:
а) в одном вагоне; б) в соседних вагонах?

1.31. Как велика вероятность того, что взятое наугад пятизначное число записывается пятью разными цифрами?

1.32. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли четыре человека. Чему равна вероятность того, что на каком-нибудь этаже выйдет не менее двух из них?

З а м е ч а н и е. Каждый пользователь лифта, независимо от остальных пользователей, с одинаковыми вероятностями выходит на любой из возможных остановок*. Так, в данном случае каждый вошедший в лифт на первом этаже с вероятностью $1/8$ выходит на 2-м этаже, с вероятностью $1/8$ на 3-м этаже, ..., с вероятностью $1/8$ на 9-м этаже.

1.33. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли трое. Найти вероятность того, что для их выхода лифт будет останавливаться дважды.

Р е ш е н и е. Для выхода трех пассажиров потребуется одна, две или три остановки лифта. Вероятности этих событий обозначим p_1, p_2 и p_3 соответственно, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Требуется найти вероятность p_2 . Очевидно, что

$$p_1 = \frac{8}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{1}{64}, \quad p_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{42}{64},$$

и потому

$$p_2 = 1 - (p_1 + p_3) = \frac{21}{64}.$$

1.34. Каждая партия матча между равносильными спортсменами заканчивается победой одного из них, который получает одно очко. Матч продолжается до тех пор, пока кто-нибудь из участников не наберет 6 очков; победителю предусмотрен денежный приз. При счете 5:3 уставшие соперники решили прекратить матч. В каком отношении между ними вы поделили бы приз?

*Это соглашение распространяется и на все последующие «задачи с лифтом».

Сочетания в классической схеме теории вероятностей

Число сочетаний из n элементов по m может быть вычислено по любой из формул

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}; \quad (1.10)$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}. \quad (1.11)$$

При этом

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad (1.12)$$

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m. \quad (1.13)$$

Полезно также иметь в виду, что при $n \rightarrow \infty$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (1.14)$$

(формула Стирлинга).

1.35. Шары — 3 белых и 5 черных — располагаются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что белые шары окажутся расположенными подряд?

Решение. Совсем не обязательно нумеровать рассматриваемые шары, делая их попарно различимыми.

Составить какое-то расположение в ряд трех белых и пяти черных шаров — это все равно, что из всех возможных мест выбрать три места для белых шаров, отводя остальные пять мест под черные шары. Сделать это можно $N = C_8^3$ способами.

Среди них событию $A = \{\text{белые шары расположатся подряд}\}$ благоприятствуют $N_A = 6$ способов (белые шары занимают места: 123, 234, 345, 456, 567, 678). Следовательно,

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{6}{C_8^3} = \frac{6 \cdot 6}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{3}{28}.$$

1.36. Восемь юношей, в том числе двое братьев, садятся наугад с двух противоположных сторон прямоугольного стола — по четыре человека с каждой стороны. Какова вероятность того, что братья окажутся сидящими:

- а) по разные стороны стола напротив друг друга;
- б) рядом, с одной стороны стола?

1.37. Восемь девушек, в том числе три сестры, водят хоровод. Какова вероятность того, что встав в круг наугад, сестры окажутся рядом?

1.38. Из n билетов, участвующих в лотерее, m билетов — выигрышные. Какова вероятность того, что из k купленных билетов хотя бы один окажется выигрышным?

Решение. Выбрать k билетов из n билетов можно $N = C_n^k$ способами. Выигрышными при этом могут оказаться $0, 1, 2, \dots$, и даже все k билетов, если, конечно, $k \leq m$. Таким образом, событие $A = \{\text{хотя бы один из купленных билетов выиграет}\}$ достаточно сложно. Значительно проще противоположное событие $\bar{A} = \{\text{ни один из } k \text{ купленных билетов не выиграет}\}$. Очевидно, что $N_{\bar{A}} = C_{n-m}^k$ и, следовательно,

$$P(\bar{A}) = \frac{N_{\bar{A}}}{N} = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}, \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

Полученный результат относится к случаю, когда $k \leq n - m$.

Если $k > n - m$, то по смыслу задачи $P(\bar{A}) = 0$, $P(A) = 1$.

1.39. Из колоды карт (52 листа) извлекают наугад одновременно четыре карты. Рассмотрим события:

$A = \{\text{среди извлеченных карт есть хотя бы один туз}\};$

$B = \{\text{среди извлеченных карт есть хотя бы одна бубновая карта}\};$

$C = \{\text{среди извлеченных карт есть хотя бы одна червовая карта}\}.$

Найдите вероятности: а) $P(A)$; б) $P(B + C)$.

1.40. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 наугад выбирают три цифры. Какова вероятность того, что:

а) в число отобранных цифр попадет цифра 9;

б) произведение отобранных цифр будет четным?

1.41. Из чисел 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13 наугад выбирают два числа и одно из них рассматривают как числитель, а другое как знаменатель дроби. Определите вероятность того, что полученная в результате дробь будет несократимой.

1.42. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 10 человек. Известно, что для их высадки лифт, поднимаясь вверх, останавливался 6 раз, в том числе — на 5-м этаже. Какова вероятность того, что он останавливался на 4-м этаже?

1.43. Из чисел 1, 2, ..., 100 наугад выбирают 70 чисел. Какова вероятность того, что наибольшим из них окажется число 98?

Решение. Для выбора семидесяти чисел из данных ста чисел существует C_{100}^{70} способов. Максимальное число 98 в выборке обеспечивают те из них, которые предписывают выбрать само это число и 69 чисел, меньших, чем 98. Таких способов будет, очевидно, C_{97}^{69} . Поэтому искомая вероятность

$$p = \frac{C_{97}^{69}}{C_{100}^{70}} = \frac{97!}{69! \cdot 28!} : \frac{100!}{70! \cdot 30!} = \frac{97! \cdot 70! \cdot 30!}{100! \cdot 69! \cdot 28!} = \\ = \frac{70 \cdot 29 \cdot 30}{98 \cdot 99 \cdot 100} = \frac{29}{462}.$$

1.44. В условиях задачи 1.43 найдите вероятность того, что:

- а) наибольшее из выбранных чисел равно 70; 100;
- б) наименьшее из выбранных чисел равно 1; 31;
- в) из выбранных чисел наименьшим будет 3, а наибольшим — 85;
- г) размах выборки (разность между наибольшим и наименьшим из выбранных чисел) равен 98.

1.45. Решите заново задачу 1.10 в терминах сочетаний.

У к а з а н и е. Существует C_{m+n}^m способов расположения в ряд m белых и n черных шаров; из них C_{m+n-1}^{m-1} способов обеспечивают белый шар на k -м месте.

1.46. Шары — m белых, n черных и k желтых — располагают в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что в образовавшемся ряду белый шар встретится раньше черного?

Решение. Располагая в ряд m белых, n черных и k желтых шаров, сначала определим местоположение желтых шаров (C_{m+n+k}^k вариантов), а затем на оставшихся свободными $m+n$ местах как-то расположим белые шары (C_{m+n}^m вариантов), отводя незанятые места под черные шары. Общее число N способов расположения данных шаров в ряд определяется формулой (комбинаторный принцип умножения)

$$N = C_{m+n+k}^k \cdot C_{m+n}^m.$$

Сколько же среди них благоприятствует событию $A = \{\text{в образовавшемся ряду белый шар встречается раньше черного}\}$?

Составить такой ряд можно следующим образом. Сначала определим местонахождение желтых шаров (C_{m+n+k}^k вариантов); на первом из незанятых мест расположим белый шар, после чего оставшиеся $m-1$ белых шаров можно будет расположить на $m+n-1$ местах произвольно (C_{m+n-1}^{m-1} вариантов); наконец, оставшиеся свободными n мест отведем

под черные шары. Отсюда для N_A — числа исходов нашего опыта, благоприятствующих событию A , получаем:

$$N_A = C_{m+n+k}^k \cdot C_{m+n-1}^{m-1}.$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{C_{m+n+k}^k \cdot C_{m+n-1}^{m-1}}{C_{m+n+k}^k \cdot C_{m+n}^m} = \frac{C_{m+n-1}^{m-1}}{C_{m+n}^m} = \frac{m}{m+n}.$$

Независимость от k и совпадение этого результата с результатом решения задачи 1.10, опять же, не случайны. Желтые шары играют здесь роль отвлекающего фактора. На самом деле нас интересует лишь взаимное расположение белых и черных шаров. Поэтому на желтые шары можно не обращать внимания. Интересующее нас случайное событие тогда будет заключаться в том, что при случайном расположении (на $m+n+k$ местах) m белых и n черных шаров в ряд первым окажется белый шар.

1.47. В борьбе за золотую, серебряную и бронзовую медали участвуют три спортклуба, причем первый спортклуб представляют 3 спортсмена, второй спортклуб — 2 спортсмена, а третий спортклуб — 1 спортсмен. В зачет каждому спортклубу идет лишь один результат — лучший у представителей этого спортклуба. В предположении, что все шестеро участников соревнования имеют одинаковые индивидуальные шансы на успех, определите, с какой вероятностью третий спортклуб:

- а) опередит первый спортклуб;
- б) опередит второй спортклуб;
- в) завоюет золотую медаль;
- г) завоюет золотую или серебряную медаль;
- д) завоюет бронзовую медаль;
- е) завоюет серебряную медаль.

1.48. Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, наугад одновременно извлекают $r+s \leq m+n$ шаров (рис. 1.2, а). Какова вероятность того, что из них $r \leq m$ шаров будут белыми, а $s \leq n$ — черными?

Решение. Извлечь $r+s$ шаров из $m+n$ занумерованных шаров можно C_{m+n}^{r+s} способами. Среди них условию задачи удовлетворяют лишь $C_m^r \cdot C_n^s$ способов (комбинаторный принцип умножения). Поэтому искомая вероятность

$$p = \frac{C_m^r \cdot C_n^s}{C_{m+n}^{r+s}}.$$

Рассмотренную задачу можно легко обобщить на случай шаров трех и большего числа цветов. Так, для случая, пред-

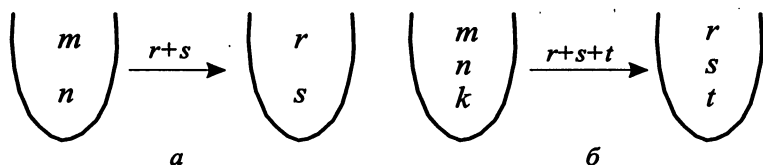


Рис. 1.2.

ставленного на рис. 1.2, б,

$$p = \frac{C_m^r C_n^s C_k^t}{C_{m+n+k}^{r+s+t}}.$$

1.49. В коробке 90 годных и 10 дефектных шурупов. Какова вероятность того, что из 5 взятых наугад шурупов ровно 2 шурупа окажутся дефектными?

1.50. Из чисел 1, 2, ..., 100 наугад одновременно выбирают два числа. Какова вероятность того, что:

- одно из них будет меньше 50, другое больше 50;
- одно из них будет меньше 40, другое меньше 50;
- одно из них будет больше 40, другое больше 50?

1.51. В урне 12 шаров, в том числе несколько красных. Вероятность того, что среди трех одновременно извлеченных из урны шаров ровно 2 шара будут красными, равна 0,25. Сколько в урне красных шаров?

1.52. Из колоды карт (52 листа) одновременно извлекают три карты. Какова вероятность того, что:

- этим картами окажутся тройка, семерка, туз;
- среди извлеченных карт хотя бы две будут картами одной масти;
- среди извлеченных карт окажется ровно две дамы, причем одна из них — дама пик?

1.53. Какова вероятность того, что при случайной расстановке букв А, А, Б, Н, Н образуется слово БАНАН?

Решение. Из данных букв можно составить следующее число пятибуквенных «слов»:

$$N = \frac{5!}{2! 2! 1!} = 30$$

(см. формулу (П.11) в приложении на с. 429). Следовательно, искомая вероятность

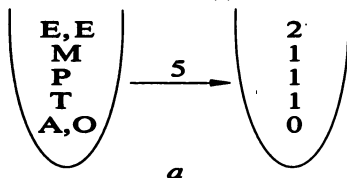
$$p = \frac{1}{N} = \frac{1}{30}.$$

1.54. С какой вероятностью при случайной расстановке букв А, А, А, А, А, Б, Б, Д, К, Р, Р образуется слово АБРАКАДАБРА?

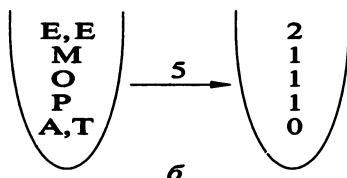
1.55. Из букв слова ТЕОРЕМА наугад выбирают пять букв. Вычислить вероятность того, что из выбранных букв можно составить слово:

а) ТЕРЕМ; б) МОРЕ; в) ТОР.

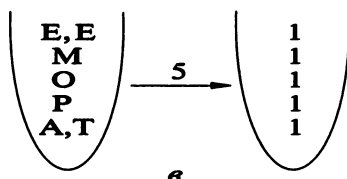
Решение. Исходное слово содержит 7 букв: А, Е, Е, М, О, Р, Т. В первом случае благоприятным является выбор



а



б



в

Рис. 1.3.

Р, Т. В первом случае благоприятным является выбор пяти из них: Е, Е, М, Р, Т (рис. 1.3, а). Поэтому вероятность события X — «из выбранных букв можно составить слово ТЕРЕМ» — может быть вычислена как

$$P(X) = \frac{C_2^2 C_1^1 C_1^1 C_1^1 C_2^0}{C_7^5} = \frac{1}{21}.$$

Во втором случае благоприятным служит выбор пяти букв, в том числе каждой из букв М, О, Р и хотя бы одной буквы Е. Такой выбор может быть достигнут или в виде Е, Е, М, О, Р (рис. 1.3, б), или же в виде Е, М, О, Р, *, где * — любая из букв А, Т (рис. 1.3, в). Используя комбинаторный принцип сложения, находим, что вероятность события Y — «из выбранных букв можно составить слово МОРЕ» — равна

$$P(Y) = \frac{C_2^2 C_1^1 C_1^1 C_1^1 C_2^0 + C_2^1 C_1^1 C_1^1 C_1^1 C_2^1}{C_7^5} = \frac{5}{21}.$$

Третий случай читателям предлагается решить самостоятельно.

1.56. Из букв слова КОРОБКА наугад выбирают 5 букв. Вычислите вероятность того, что из выбранных букв можно составить слово:

а) КОБРА; б) КРАБ; в) БОР.

1.57. Из букв слова СИМФОНИЯ наугад выбирают 6 букв. Какова вероятность того, что из выбранных букв можно составить любое из слов ФОН, МИФ, СОН?

1.58. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию разбиваются на две группы по 10 человек. Найдите вероятность того, что двое наиболее сильных игроков попадут в разные группы?

Решение. С формальной точки зрения разбить 20 человек на две группы по 10 человек — это то же самое, что из данных 20 человек составить одну группу в 10 человек (не вошедшие в нее 10 человек определяют вторую группу). Рис. 1.4 иллюстрирует эту ситуацию и приводит к следующему значению искомой вероятности:

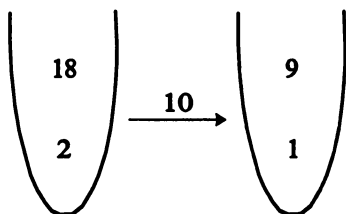


Рис. 1.4.

$$p = \frac{C_{18}^9 \cdot C_2^1}{C_{20}^{10}} = \frac{18! \cdot 2}{9! \cdot 9!} : \frac{20!}{10! \cdot 10!} = \frac{2 \cdot 18! \cdot 10! \cdot 10!}{20! \cdot 9! \cdot 9!} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10}{19 \cdot 20} = \frac{10}{19}.$$

З а м е ч а н и е. Предложенный метод решения задачи применим и к ряду более сложных задач (см., например, задачу 1.60). Полученный же результат становится вполне очевидным, если заметить, что для любого из двух наиболее сильных игроков есть 10 из 19 равновозможных вариантов, когда он оказывается в разных группах с другим игроком.

1.59. В шахматном турнире участвуют $2n$ человек, которые по жребию разбиваются на две группы по n человек. Докажите, что вероятность оказаться двум наиболее сильным игрокам в одной группе меньше, чем вероятность оказаться им в разных группах.

1.60. Какова вероятность того, что в условиях задачи 1.58 четверо наиболее сильных игроков попадут по два в разные группы?

1.61. Из ста чисел 1, 2, ..., 100 наугад выбирают пятнадцать чисел $x_1, x_2, \dots, x_{15}$, которые затем располагают в порядке возрастания: $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(15)}$. Вычислите вероятность того, что $x_{(13)} = 87$.

1.62. Колоду из 36 карт наугад разбивают на две равные части. С какой вероятностью в обеих частях колоды окажется по равному числу красных и черных карт?

Решение. Для искомой вероятности P имеем:

$$P = \frac{C_{18}^9 \cdot C_{36}^9}{C_{36}^{18}} = \frac{(18!)^4}{36! (9!)^4}. \quad (*)$$

Представление об этой величине, без громоздких вычислений, можно составить с помощью формулы Стирлинга (см. с. 19):

$$P \approx \frac{(\sqrt{2\pi \cdot 18} \cdot 18^{18} \cdot e^{-18})^4}{\sqrt{2\pi \cdot 36} \cdot 36^{36} \cdot e^{-36} \cdot (\sqrt{2\pi \cdot 9} \cdot 9^9 \cdot e^{-9})^4} = \frac{2}{\sqrt{18\pi}} \approx 0,266.$$

З а м е ч а н и е. Расчеты по формуле (*) с помощью ЭВМ дают:

$$P = 0,2604... .$$

1.63. Среди 1000 лотерейных билетов 100 билетов — выигрышные. Все эти билеты разделяются наугад поровну между двумя распространителями. Оцените вероятность того, что распространители получат по равному числу выигрышных билетов.

Примеры из статистической физики

Предположим, что механическая система состоит из r частиц и рассматривается в фазовом пространстве, разбитом на n ячеек. Сколькими равновероятными состояниями характеризуется данная система? Ответ на этот вопрос зависит от того, различимы (индивидуализированы) ли частицы и как они могут распределяться по ячейкам.

Статистика Максвелла–Больцмана базируется на гипотезе о том, что частицы индивидуализированы, причем каждая из них, независимо от остальных частиц, с одинаковой вероятностью попадает в любую из n ячеек. В этом случае механическая система характеризуется следующим числом равновероятных состояний:

$$N = n^r. \quad (1.15)$$

Статистика Бозе–Эйнштейна основывается на предположении о том, что частицы неразличимы, причем все возможные их распределения по ячейкам равновероятны. В этом случае рассматриваемая механическая система характеризуется следующим числом равновероятных состояний:

$$N = C_{n+r-1}^r \quad (1.16)$$

(см. приложение, с. 436).

Статистика Ферми–Дирака исходит из того, что частицы неразличимы, их число меньше числа ячеек ($r < n$) и каждая ячейка может

содержать не более одной частицы. В этом случае механическая система характеризуется следующим числом равновероятных состояний:

$$N = C_n^r. \quad (1.17)$$

З а м е ч а н и е. Логически возможная статистика Максвелла–Больцмана оказывается не применимой ни к каким известным в статистической механике частицам. Статистика Бозе–Эйнштейна справедлива для фотонов, атомных ядер и атомов, содержащих четное число элементарных частиц. Статистика Ферми–Дирака применима к электронам, нейтронам и протонам (см., например, [20], т. 1, гл. II, § 5).

1.64. Для каждой из статистик Максвелла–Больцмана, Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака найдите вероятность того, что рассматриваемые r частиц окажутся расположенными по одной:

- а) в заданных r ячейках из числа возможных n ячеек;
- б) в каких-то r ячейках из числа возможных n ячеек.

Симметрия в классической схеме теории вероятностей

1.65. Из множества $\{1, 2, \dots, 100\}$ последовательно, без возвращения, выбирают наугад два числа. Какова вероятность того, что второе число будет больше первого?

Р е ш е н и е. Исходы рассматриваемого опыта — упорядоченные пары (a, b) неравных чисел; $a, b \in \{1, 2, \dots, 100\}$.
Соответствие

$$(a, b) \rightarrow (b, a)$$

показывает, что пар, у которых первая составляющая больше второй составляющей, столько же, сколько и пар, у которых, наоборот, вторая составляющая больше первой составляющей. Поэтому искомая вероятность равна $1/2$.

1.66. Какова вероятность того, что при подбрасывании ста монет выпадет четное число гербов?

1.67. Из множества $\{1, 2, \dots, 100\}$ последовательно, без возвращения, выбирают наугад три числа. Найдите вероятность того, что третье число будет заключено между двумя первыми числами.

1.68. Двое по очереди по одному разу подбрасывают игральную кость. Выигрывает тот, у кого выпало больше очков. Какова вероятность того, что начинающий игру победит?

1.69. Из всех подмножеств множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ наугад выбирают одно подмножество. Чему равна вероятность того, что оно содержит элемент a_n ?

Решение. **Способ 1.** Пусть A — событие, состоящее в том, что выбранное подмножество содержит элемент a_n , N — общее число элементарных исходов рассматриваемого опыта, N_A — число тех из них, которые благоприятствуют событию A . Поскольку всякое n -элементное множество имеет 2^n подмножеств (см. приложение, с. 431),

$$N = 2^n, \quad N_{\bar{A}} = 2^{n-1}.$$

Отсюда:

$$P(\bar{A}) = \frac{N_{\bar{A}}}{N} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}, \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{1}{2}.$$

Способ 2. Пусть A — произвольное подмножество множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Определим подмножество A' следующим образом:

$$A' = \begin{cases} A \setminus \{a_n\}, & \text{если } a_n \in A; \\ A \cup \{a_n\}, & \text{если } a_n \notin A \end{cases}$$

(попросту говоря, A' получается из A путем изъятия элемента a_n или, наоборот, путем добавления этого элемента в зависимости от того, содержит множество A элемент a_n или нет).

Соответствие $A \rightarrow A'$ показывает, что подмножеств, содержащих элемент a_n , столько же, сколько и подмножеств, его не содержащих. Следовательно, искомая вероятность равна $1/2$.

Условная вероятность в классической схеме теории вероятностей

Предположим, что рассматриваемый опыт с N элементарными исходами вписывается в классическую схему, A и B — случайные события, связанные с этим опытом. Отношение $\frac{N_{AB}}{N_B}$ (при $N_B \neq 0$) естественно рассматривать как долю тех исходов, благоприятствующих событию B , которые благоприятствуют и событию A . Такое отношение называется *условной вероятностью* события A при условии B (относительно B) и обозначается $P(A|B)$. Итак, в классической схеме теории вероятностей

$$P(A|B) = \frac{N_{AB}}{N_B}. \quad (1.18)$$

Деление числителя и знаменателя в правой части (1.18) на N дает

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (1.19)$$

1.70. Из урны, в которой первоначально было 10 белых и 5 черных шаров, потеряны 2 каких-то шара. После этого из нее наугад извлекли одновременно три шара и все они оказались белыми. Какова вероятность того, что оба потерянных шара были черными?

Решение. Отмеченные в условии задачи три белых шара, разумеется, не имели никакого отношения к «потере двух каких-то шаров». Следовательно, потерянными были шары из числа «остальных» семи белых и пяти черных шаров. Отсюда искомая вероятность

$$p = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2}}{\frac{12 \cdot 11}{2}} = \frac{5}{33}.$$

1.71. Из урны, в которой первоначально было 10 белых, 5 черных и 1 оранжевый шар, пропал какой-то шар. После этого из нее извлекли наугад два шара: один из них оказался белым, а другой — черным. Какова вероятность того, что из урны пропал оранжевый шар?

1.72. Трехтомник стихотворений расположен на полке в случайном порядке. Найдите:

а) вероятность того, что первый том будет расположен на своем естественном (порядковом) месте;

б) условную вероятность того, что первый том окажется на первом месте, при условии, что вторым на полке стоит второй том.

1.73. Двое по одному разу подбрасывают игральную кость. Выигрывает тот игрок, у кого выпадает больше очков. Найдите:

а) вероятность победы первого игрока;

б) условную вероятность того, что победит первый игрок, при условии, что победитель будет определен.

1.74. Какова вероятность того, что при бросании двух игральных костей выпало две «тройки», если сумма выпавших цифр делится на три?

1.75. В семье двое детей. Известно, что по крайней мере один из них — мальчик. Какова вероятность того, что другой ребенок в семье — тоже мальчик?

Геометрические вероятности

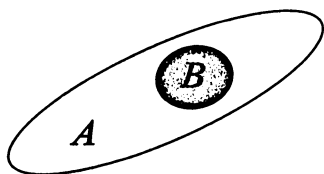


Рис. 1.5.

Приводимые здесь задачи не укладываются в классическую схему, поскольку они связаны с бесконечным множеством элементарных исходов опыта. Но в основе их, как и в классической схеме, лежит представление о равновероятных исходах, а вероятности трактуются как «доли» множества элементарных исходов.

Говоря о том, что точка бросается наугад в некоторую область A , имеют в виду следующее.

Вероятность попадания точки в некоторую часть B области A (рис. 1.5) равна отношению меры (длины, площади, объема) этой части к мере всей области A :

$$P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(A)}, \quad (1.20)$$

естественно, в предположении, что указанные меры определены, причем $\mu(A) \neq 0$.

1.76. Точку бросают наугад в круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Какова вероятность того, что:

- расстояние от точки до центра круга превысит $1/2$;
- абсцисса точки будет не больше $1/2$;
- точка окажется вне квадрата, вписанного в данный круг.

1.77. Задача о встрече. Двое условились встретиться в определенном месте между полуднем и часом дня. Каждый из пришедших ждет другого 20 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится, если приход каждого в течение указанного часа происходит наугад и моменты прихода независимы?

Решение. Пусть x и y — моменты прихода договорившихся сторон; $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (в часах). Тогда условие встречи запишется в виде

$$|x - y| \leq \frac{1}{3}.$$

Теперь задачу можно интерпретировать следующим образом. В квадрат $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ в декартовой прямоугольной системе координат (рис. 1.6) наугад бросают точку. Какова вероятность того, что ее координаты (x, y) будут удовлетворять условию $|x - y| \leq 1/3$?

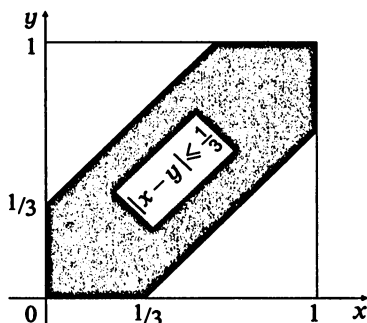


Рис. 1.6.

Искомая вероятность p , очевидно, равна отношению площади выделенного шестиугольника к площади квадрата:

$$p = \frac{1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}{1^2} = \frac{5}{9}.$$

1.78. Задача Бюффона. Плоскость разбита на полосы шириной $2a$ параллельными прямыми. На плоскость наугад бросают иглу длины $2\ell < 2a$. Докажите, что вероятность пересечения иглой какой-либо из указанных параллельных прямых составляет

$$p = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ell}{a}.$$

З а м е ч а н и е. В свое время эта задача послужила поводом для нахождения числа π методом статистических испытаний. Если при N бросаниях иглы зафиксировано N_A пересечений, то

$$\frac{N_A}{N} \approx \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ell}{a},$$

откуда

$$\pi \approx \frac{2\ell}{a} \cdot \frac{N}{N_A}.$$

1.79. На отрезке AB наугад и независимо друг от друга отмечают две точки M и N . Вычислите вероятность того, что
а) $|AM| < |AN|$; б) $|AM| > |MN|$.

1.80. Стержень разломан в двух наугад выбранных точках. Какова вероятность того, что из образовавшихся трех стержней можно составить треугольник?

Разные задачи

1.81. Из букв слова БАМБУК наугад выбирают пять букв. Какова вероятность того, что из них можно составить слово КУБ?

1.82. Какова вероятность того, что число, взятое наугад из n первых чисел натурального ряда, делится на заданное натуральное число m ? Найдите предел этой вероятности при $n \rightarrow \infty$. (Какую долю всех натуральных чисел составляют числа, кратные m ?)

1.83. Какова вероятность того, что число, взятое наугад из всех трехзначных чисел, делится:

- а) на каждое из чисел 4 и 6;
- б) хотя бы на одно из чисел 4 и 6?

1.84. Какая сумма очков — 9 или 10 — наблюдается чаще при подбрасывании:

- а) двух игральных костей; б) трех игральных костей?

1.85. Числа $1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n$ рабиваются наугад на две группы по n чисел в каждой группе. Что более вероятно: числа 1 и $2n$ окажутся в одной группе или в разных группах?

1.86. В аудитории, где $2n$ студентов должны сдавать письменный экзамен по теории вероятностей, n столов. Перед экзаменом студенты договорились, кто с кем сядет за одним столом. Однако экзаменатор рассадил студентов наугад. Какова вероятность того, что это привело к полному совпадению с замыслом студентов?

1.87. За неделю в городе произошло семь автомобильных катастроф. Предположим, что каждая из них, независимо от остальных катастроф, с одной и той же вероятностью могла случиться в любой день недели. Разумно ли в этих предположениях заключить, что эти семь катастроф распределились по одной на каждый день недели?

1.88. Из ста членов клуба велосипедистов никто не хочет, чтобы его регистрационный номер (от 1 до 100 включительно) содержал восьмерку — цифру, напоминающую погнутое колесо велосипеда. Поэтому все они условились выбирать номера по жребью. Какова вероятность того, что последний участник жеребьевки будет обрадован доставшемся ему номеру?

1.89. В условиях задачи 1.88 последнему участнику жеребьевки достался номер 88. Раздосадованный этим велосипедист

заявил, что жеребьевка была изначально несправедливой: тот, кто вступал в нее раньше, имел якобы, больше шансов получить «хороший» номер. Он потребовал провести жеребьевку заново, предварительно обозначив порядок вступления в нее всех участников, проведя еще одну, дополнительную жеребьевку. Прав ли раздосадованный велосипедист?

1.90. Из 100 равных по силе участников марафонского забега 30 человек не выдержали испытания и сошли с дистанции, не добравшись до финиша. Какова вероятность того, что последним на финише был участник под номером 98?

1.91. Известно, что из пункта $O(0, 0)$ туристы кратчайшим путем направляются в пункт $Q(m, n)$. Все тропинки из O в Q проходят по прямоугольной сетке с образующими вида $x = k$ и $y = \ell$, где k и ℓ — целые неотрицательные числа (рис. 1.7). В пункте $R(r, s)$ расположен ресторан.

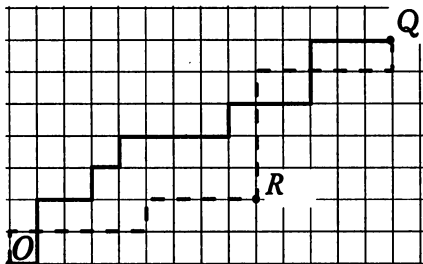


Рис. 1.7.

1) Какова вероятность того, что не знающий о ресторане турист сможет посетить этот ресторан, если путь из O в Q он выбирает наугад?

2) При $m = 6$, $n = 4$, $r = 3$ найдите значение s , определяющее наиболее выгодное расположение ресторана (с точки зрения его посещаемости туристами).

1.92. Шары — 8 белых и 4 черных — располагают в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что крайними окажутся шары одинакового цвета?

1.93. Из урны, содержащей 2 белых, 3 черных и 5 оранжевых шаров, наугад извлекают 3 шара. Найдите вероятность того, что среди них найдутся шары одинакового цвета.

1.94. Какова вероятность того, что одна из пяти подброшенных игральные кости выпала шестеркой, если известно, что все пять игральные кости выпали разными цифрами?

1.95. Из урны, содержащей 7 белых, 4 черных и 3 оранжевых шара, одновременно извлекают 5 шаров. Определите вероятность того, что среди них окажется ровно 3 белых шара?

1.96. Десять юношей, в том числе двое братьев, садятся наугад с двух противоположных сторон прямоугольного стола —

по пять человек с каждой стороны. Какова вероятность того, что братья окажутся сидящими по одну сторону стола?

1.97. Для выполнения лабораторной работы группа студентов из 10 девушек и 5 юношей случайным образом разбивается на 5 подгрупп по 3 студента в каждой. Найдите вероятность того, что в каждой подгруппе будет юноша.

1.98. Находящиеся в урне шары — 10 белых, 3 черных и 7 оранжевых — извлекаются парами без возвращения. Какова вероятность того, что все 10 пар будут состоять из шаров разного цвета?

1.99. Из цифр 0, 1, 2, ..., 9 наугад выбирают три цифры. Какова вероятность того, что с помощью этих цифр можно записать:

- а) хотя бы одно нечетное трехзначное число;
- б) ровно одно нечетное трехзначное число;
- в) ровно два нечетных трехзначных числа?

1.100. Натуральное число назовем «хорошим», если цифры в десятичной записи этого числа следуют в порядке возрастания. Например, числа 123 и 1689 — «хорошие»; число 132 к «хорошим» не относится. Какова вероятность того, что число, выбранное наугад из всех пятизначных натуральных чисел, окажется «хорошим»?

1.101. Из всех непустых подмножеств множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ наугад выбирается одно подмножество. Какова вероятность того, что оно будет содержать четное число цифр?

1.102. Из вершин $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ правильного шестиугольника наугад выбирают три вершины. Вычислите вероятность того, что эти вершины являются также вершинами:

- а) правильного треугольника;
- б) равнобедренного треугольника.

1.103. Из всех треугольников, приведенных на рис. 1.8, наугад выбирается один треугольник. Какова вероятность того, что это будет:

- а) равнобедренный треугольник;
- б) остроугольный треугольник?

1.104. Из всех прямоугольников, приведенных на рис. 1.9, наугад выбирается один прямоугольник. Какова вероятность того, что это будет квадрат?

1.105. 1) Каждый из трех шаров, независимо от остальных шаров, с одинаковыми вероятностями попадает в любую из трех

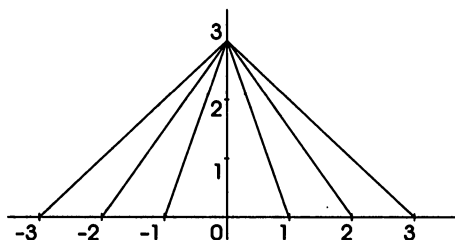


Рис. 1.8.

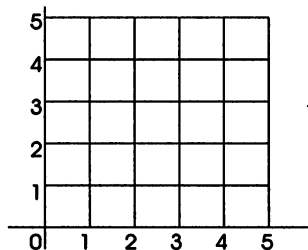


Рис. 1.9.

урн. С какой вероятностью в каждой из этих урн окажется по одному шару?

2) Из всех неотрицательных целочисленных решений уравнения

$$x + y + z = 3$$

наугад выбирается одно решение. Какова вероятность того, что им окажется решение $x = y = z = 1$?

1.106. Из всех неотрицательных целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ наугад выбирается одно решение. Чему равна вероятность того, что:

- а) им будет решение $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 4$;
- б) выбранное решение удовлетворяет условию $x_4 = 0$;
- в) для выбранного решения $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \neq 0$?

1.107. Два кандидата получили на выборах n и m голосов соответственно, причем $n > m$. Какова вероятность того, что при подсчете голосов первый кандидат всегда опережал второго?

§ 2. Аксиоматика теории вероятностей

Классическая схема и геометрические вероятности затрагивают лишь небольшую, хотя и важную часть теории вероятностей. К тому же, и эти разделы нуждаются в определенной формализации. (Что такое опыт и его исходы, в каком смысле то или иное событие рассматривается как случайное событие и т. п.)

Аксиоматическое построение теории вероятностей (по образцу, скажем, геометрии) опирается на ряд начальных понятий, не определяемых ни через какие другие понятия, но связанных между собой некоторыми аксиомами. При этом используются общематематические понятия, такие как множество, число, функция и т. д.

Аксиоматика, предложенная А. Н. Колмогоровым, существенно использует теоретико-множественные понятия. Очевидная связь элементарных вероятностных задач с понятием множества и его подмножеств неоднократно отмечалась в предыдущем параграфе.

Множества и операции над ними

Мы полагаем, что читатели знакомы с начальными понятиями теории множеств и лишь напомним эти понятия.

Равенство $A = B$ множеств A и B означает, что они состоят из одних и тех же элементов: если $x \in A$, то $x \in B$; обратно, если $x \in B$, то $x \in A$.

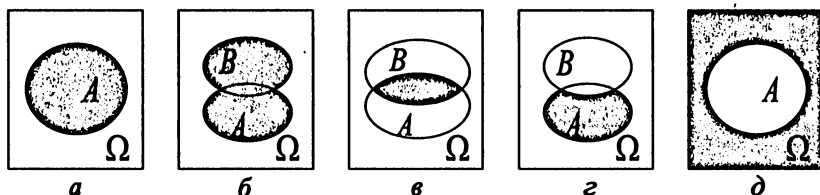


Рис. 2.1.

На рис. 2.1, а изображено множество Ω и его подмножество A :

$$A \subset \Omega.$$

К подмножествам множества Ω относятся также само множество Ω и пустое множество $\emptyset$:

$$\Omega \subset \Omega, \quad \emptyset \subset \Omega.$$

Очевидно, $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

Рис. 2.1, б и в иллюстрируют понятия объединения (суммы) $A \cup B$ и пересечения (произведения) $A \cap B$ подмножеств A и B данного множества Ω .

Операции объединения и пересечения множеств обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, & (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ A \cap B &= B \cap A, & (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

При этом для всякого $A \subset \Omega$

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A, & A \cap \emptyset &= \emptyset, \\ A \cup \Omega &= \Omega, & A \cap \Omega &= A. \end{aligned}$$

Разность $A \setminus B$ множеств A и B (рис. 2.1, г) состоит из тех элементов множества A , которые не являются элементами множества B . *Дополнение* $\bar{A}$ подмножества A множества Ω до всего множества Ω (рис. 2.1, д) представляет собой множество тех элементов Ω , которые не являются элементами A . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}} &= A, \\ A \setminus B &= A \cap \bar{B}, & \bar{A} &= \Omega \setminus A, \\ A \cup \bar{A} &= \Omega, & A \cap \bar{A} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Формулы

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B}, \\ \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B}, \end{aligned}$$

называемые *формулами двойственности*, показывают, что при переходе в объединении и пересечении подмножеств A и B к дополнению до Ω объединение заменяется пересечением, пересечение — объединением, сами подмножества A и B — их дополнениями до Ω .

В дальнейшем наряду с обозначениями $A \cup B$ и $A \cap B$ мы будем использовать также соответствующие обозначения $A + B$ и AB .

Алгебра случайных событий

Пусть Ω — произвольное непустое множество. Всякий элемент ω этого множества, $\omega \in \Omega$, условимся называть *элементарным исходом*, а само множество Ω — *множеством элементарных исходов*.

Далее нас будут интересовать подмножества множества Ω — возможно, не все, а лишь некоторые, — $A, B, C, \dots$, которые мы назовем *случайными событиями* (или просто: *событиями*) и объединим в один класс $\mathcal{A}$, потребовав, чтобы этот класс

$$\mathcal{A} = \{A, B, C, \dots\}$$

удовлетворял следующим аксиомам.

А1. В класс $\mathcal{A}$ в качестве подмножества множества Ω входит само множество Ω :

$$\Omega \in \mathcal{A}.$$

Случайное событие Ω называется *достоверным событием*.

А2. Если события A и B входят в класс $\mathcal{A}$, то в него входят также их объединение $A \cup B$ и пересечение $A \cap B$:

$$(A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}).$$

Это, естественно, обобщается на произвольное число n случайных событий:

$$\begin{aligned} (A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A}, \dots, A_n \in \mathcal{A}) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}, \quad \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A} \right). \end{aligned}$$

В связи с этим говорят, что класс $\mathcal{A}$ замкнут относительно конечных сумм и произведений входящих в него случайных событий.

А3. Если $A \in \mathcal{A}$, то и $\bar{A} \in \mathcal{A}$:

$$(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bar{A} \in \mathcal{A}).$$

При этом $\bar{A}$ называется *событием, противоположным событию A* .

Приведенные три аксиомы отражают тот простой факт, что над случайными событиями выполнимы операции сложения, умножения и перехода к противоположному событию. При этом одно из случайных событий (достоверное событие Ω) выделяется особо; любое другое случайное событие A рассматривается как «часть» достоверного события: $A \subset \Omega$.

Всякий класс $\mathcal{A} = \{A, B, C, \dots\}$, составленный из подмножеств непустого множества Ω и удовлетворяющий аксиомам А1–А3, называется *алгеброй множеств*. Таким образом, приведенные три аксиомы и соглашение рассматривать подмножества множества Ω как случайные события определяют *алгебру случайных событий*.

Заметим, что в соответствии с аксиомами А1 и А3 алгебра $\mathcal{A}$ содержит случайное событие

$$\bar{\Omega} = \emptyset.$$

Это событие называется *невозможным событием*.

События A и B называются *несовместными*, если их произведение есть невозможное событие:

$$AB = \emptyset.$$

Такие события интерпретируются как случайные события, которые не могут осуществиться одновременно.

Вероятность случайного события

Вероятность $P(A)$ случайного события A представляет собой число, которое ставится в соответствие случайному событию A и удовлетворяет следующим аксиомам.

$$P1. P(A) \geq 0.$$

$$P2. P(\Omega) = 1.$$

P3. Для всяких несовместных событий A и B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

P4. (*Аксиома непрерывности*). Пусть $A_1, A_2, \dots$ — монотонная бесконечно убывающая последовательность случайных событий, т. е.

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0.$$

Первые три аксиомы представляют вероятность как «аддитивную функцию множеств» или, иначе говоря, «меру» — такую, как, скажем, длина, площадь, объем, вес. Поэтому иногда случайные события для наглядности интерпретируются как геометрические фигуры, а их вероятности как площади этих фигур (все используемые при этом фигуры, естественно, являются частями фигуры площади 1).

Вероятностное пространство

Здесь мы наложим дополнительные ограничения на класс $\mathcal{A}$, потребовав, чтобы он был замкнут относительно счетных объединений и пересечений входящих в него случайных событий:

$$\begin{aligned} (A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A}, \dots, A_n \in \mathcal{A}, \dots) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \right). \end{aligned}$$

Такой класс $\mathcal{A}$ называется *σ -алгеброй случайных событий*. В дальнейшем под $\mathcal{A}$ мы будем понимать именно такой класс подмножеств множества Ω , а вероятность $P(A)$ будем считать заданной для всякого A из σ -алгебры $\mathcal{A}$.

P3*. Если события $A_1, A_2, \dots$ попарно несовместны (т. е. $A_i A_j = \emptyset$ при $i \neq j$), то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

(счетная аддитивность вероятностной меры).

Можно доказать, что система четырех аксиом **P1, P2, P3, P4** равносильна системе трех аксиом **P1, P2, P3***.

Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, состоящая из непустого множества Ω , σ -алгебры $\mathcal{A}$ его подмножеств и заданной на $\mathcal{A}$ вероятностной меры P , называется *вероятностным пространством*.

Теория вероятностей ограничивается рассмотрением лишь тех экспериментов со случайными исходами, которые допускают описание в терминах вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Если таких возможных пространств несколько, возникает вопрос, какое из них наиболее адекватно описывает данное явление. Решение этого вопроса лежит уже за пределами теории вероятностей.

Дискретное вероятностное пространство

Пусть Ω — конечное множество элементарных исходов,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\},$$

σ -алгебра случайных событий $\mathcal{A}$ состоит из всех 2^N подмножеств множества Ω , и для любого $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega),$$

где $P(\omega_1), P(\omega_2), \dots, P(\omega_N)$ — заданные неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

Нетрудно проверить, что эта математическая модель удовлетворяет всем аксиомам теории вероятностей. Соответствующее вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется *конечным вероятностным пространством*. При

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_N) = \frac{1}{N}$$

такое вероятностное пространство дает формальное описание классической схемы теории вероятностей, в которой равновозможным элементарным исходам соответствуют равные вероятности.

Аналогично определяется *счетное вероятностное пространство*. В этом случае $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, σ -алгебра случайных событий $\mathcal{A}$ состоит из всех подмножеств множества Ω и для всякого $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega),$$

где $P(\omega_1), P(\omega_2), \dots$ — заданные неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

Дискретное вероятностное пространство — это либо конечное, либо счетное вероятностное пространство.

2.1. Упростите выражения:

- а) $A \cup (B \setminus A)$; б) $A \cup B \bar{A} \cup (C \setminus AB)$;
в) $(A \cup B) \cap (A \setminus B)$; г) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$.

2.2. Как через случайные события A, B, C выражается событие, состоящее в том, что из данных трех событий:

- а) произойдет хотя бы одно событие;
б) хотя бы одно событие не произойдет;
в) ни одно событие не произойдет;
г) произойдет каждое событие;
д) произойдет ровно одно событие;
е) произойдет не более двух событий.

2.3. Докажите формулы двойственности:

- а) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; б) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

2.4. Покажите, что в аксиоме $A2$ требование $A \cap B \in \mathcal{A}$ может быть опущено: оно выводится из остальных аксиом.

2.5. Пусть Ω — непустое множество. Можно ли двухэлементный класс $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ рассматривать как некоторую σ -алгебру подмножеств множества Ω ?

2.6. Пусть Ω — непустое множество, $A \subset \Omega$, $A \neq \Omega$, $A \neq \emptyset$ и $\mathcal{A} = \{A, \bar{A}, \Omega, \emptyset\}$. Можно ли $\mathcal{A}$ рассматривать как некоторую σ -алгебру подмножеств множества Ω ?

2.7. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство. Всякий ли элементарный исход $\omega \in \Omega$ можно в рамках данной вероятностной модели рассматривать как случайное событие?

2.8. 1) Может ли σ -алгебра случайных событий $\mathcal{A}$ быть бесконечной в случае конечного множества элементарных исходов Ω ?

2) Может ли σ -алгебра случайных событий $\mathcal{A}$ быть конечной в случае бесконечного множества элементарных исходов Ω ?

2.9. Непустые попарно непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ множества Ω образуют разбиение этого множества, если $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_m$. Докажите, что каждая конечная алгебра $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω порождается некоторым разбиением этого множества — в том смысле, что она состоит только из пустого подмножества и подмножеств вида $\Omega_{i_1} \cup \Omega_{i_2} \cup \dots \cup \Omega_{i_k}$.

2.10. Сколько элементов может содержать σ -алгебра случайных событий $\mathcal{A}$, если множество элементарных исходов Ω содержит n элементов?

2.11. Из какого минимального числа подмножеств множества Ω может состоять алгебра $\mathcal{A}$, если в нее входят подмножества A и B , причем $A \cup B \neq \Omega$, а $A \cap B$ не совпадает ни с $\emptyset$, ни с A , ни с B ?

2.12. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — заданное вероятностное пространство. Для всякого ли числа p , $0 \leq p \leq 1$, существует случайное событие $A \in \mathcal{A}$, такое, что $P(A) = p$?

2.13. Покажите, как в аксиоматику теории вероятностей вписываются геометрические вероятности.

2.14. 1) Докажите, что всякая σ -алгебра подмножеств непустого множества Ω является алгеброй подмножеств множества Ω .

2) Пусть $\Omega = [0, 1]$. В класс $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω включим пустое подмножество $\emptyset$, каждую (отдельно взятую) точку отрезка $[0, 1]$ и всевозможные конечные объединения промежутков, входящих в этот отрезок. Докажите, что $\mathcal{A}$ является алгеброй, но не является σ -алгеброй подмножеств множества Ω .

Основные свойства вероятности

На основе приведенной выше аксиоматики — $P1, P2, P3^*$ — могут быть доказаны следующие свойства вероятности.

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно несовместны, то

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

(конечная аддитивность вероятностной меры).

3. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

4. Если $B \subset A$, то $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
(см. рис. 2.2) и, как следствие этого,

$$P(B) \leq P(A).$$

5. $P(AB) \leq P(A), \quad P(AB) \leq P(B).$

6. $0 \leq P(A) \leq 1.$

7. Для всяких событий $A_1, A_2, \dots$, взятых в конечном или в счетном множестве,

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k P(A_k).$$

8. *Непрерывность вероятности:*

- а) если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$, то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n);$$

- б) если $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$, то

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

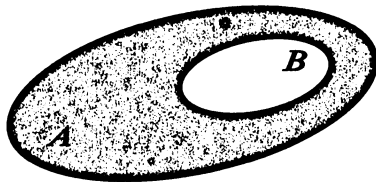


Рис. 2.2.

2.15. 1) Докажите, что всякая счетно-аддитивная мера P , заданная на σ -алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств непустого множества Ω , является и конечно-аддитивной на $\mathcal{A}$.

2) Подмножество множества $\Omega = [0, 1]$ назовем Q -подмножеством, если оно состоит из рациональных чисел r , удовлетворяющих любому из неравенств

$$a \leq r \leq b, \quad a \leq r < b, \quad a < r < b, \quad a < r \leq b$$

при некоторых $a, b \in [0, 1]$. Указанные подмножества обозначим

$$Q[a, b], \quad Q[a, b), \quad Q(a, b), \quad Q(a, b] \quad (*)$$

соответственно. Пусть $\mathcal{A}$ — класс подмножеств множества Ω , составленный из конечных объединений непересекающихся Q -подмножеств: если $A \in \mathcal{A}$, то

$$A = \bigcup_{i=1}^n Q_i, \quad (**)$$

где n — некоторое натуральное число, а $Q_i, i = 1, 2, \dots, n$, — множества вида (*), причем $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, если $i \neq j$. Далее, положим

$$\begin{aligned} P(Q[a, b]) &= P(Q[a, b)) = P(Q(a, b)) = P(Q(a, b]) = \\ &= \begin{cases} b - a, & \text{если } b \geq a, \\ 0, & \text{если } b < a \end{cases} \end{aligned}$$

и, в соответствии с (**),

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(Q_i).$$

Докажите, что так определенная функция P является конечно-аддитивной, но не является счетно-аддитивной на $\mathcal{A}$.

§ 3. Формулы сложения и умножения вероятностей

Формула сложения вероятностей

Если случайные события $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно несовместны, т. е. удовлетворяют условию $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (3.1)$$

Для произвольных же слагаемых

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \\ = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned} \quad (3.2)$$

В частности,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB); \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В некоторых задачах данного раздела полезно использовать *формулы двойственности*: для всяких случайных событий $A_1, A_2, \dots$

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}, \quad (3.5)$$

$$\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i} \quad (3.6)$$

и, соответственно,

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_i \overline{A_i}\right), \quad (3.7)$$

$$P\left(\bigcap_i A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_i \overline{A_i}\right). \quad (3.8)$$

В частности,

$$P(A + B) = 1 - P(\overline{A} \overline{B}), \quad (3.9)$$

$$P(AB) = 1 - P(\overline{A} + \overline{B}). \quad (3.10)$$

3.1. Из урны, содержащей 6 белых, 4 черных и 2 оранжевых шара, наугад одновременно извлекают 3 шара. Какова вероятность того, что это будут шары одного цвета?

Решение. Здесь нас интересует ситуация, когда все извлеченные шары оказываются либо белыми шарами (событие A), либо черными шарами (событие B); оранжевыми все три извлеченных шара быть не могут. Задача состоит в том, чтобы вычислить $P(A + B)$.

Учитывая, что A и B — несовместные события, находим по формуле (3.1)

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Очевидно, что

$$P(A) = \frac{C_6^3}{C_{12}^3}, \quad P(B) = \frac{C_4^3}{C_{12}^3}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P(A + B) &= \frac{C_6^3 + C_4^3}{C_{12}^3} = \frac{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 2}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{6}{55}. \end{aligned}$$

Примечание. Полезно обратить внимание на то, что применительно к классической схеме формула (3.1) в вероятностных терминах выражает комбинаторный принцип сложения.

3.2. Из урны, содержащей 10 белых, 8 черных и 1 оранжевый шар, наугад одновременно извлекают 3 шара. Какова вероятность того, что это будут шары одного цвета?

3.3. Из урны, содержащей 5 белых, 4 синих и 3 красных шара, наугад одновременно извлекают 3 шара. Какова вероятность того, что среди них найдутся два шара разного цвета?

3.4. Из 30 вопросов, включенных в программу экзамена, студент подготовил лишь 18. На экзамене ему будет предложено пять вопросов, причем для получения положительной оценки нужно правильно ответить хотя бы на три из них. Что более вероятно: сдаст студент экзамен или не сдаст?

3.5. Из колоды карт (36 листов) наугад достают одну карту. Пусть A — событие, состоящее в том, что этой картой окажется какая-то из четырех дам, а B — событие, состоящее в том, что извлеченная из колоды карта окажется картой черной масти. Найдите $P(A + B)$.

Решение. Заметим, что A и B — совместные случайные события. Извлеченной из колоды картой может оказаться, например, дама треф, и тогда произойдет и событие A и событие B . Поэтому в данном случае следует обратиться к общей формуле для вероятности суммы двух событий. Имеем:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{4}{36} + \frac{18}{36} - \frac{2}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

3.6. Чему равна вероятность того, что число, взятое наугад из всех трехзначных чисел, делится хотя бы на одно из чисел:

- а) 4 и 6; б) 9 и 12?

3.7. Вычислите вероятность того, что число, взятое наугад из всех трехзначных чисел, делится хотя бы на одно из чисел 4, 6 и 15.

3.8. Из букв слова СИМФОНИЯ наугад выбирают 5 букв. Вычислите вероятность того, что из выбранных букв можно составить:

- а) любое из слов ФОН, СОН, МИФ;
б) хотя бы одно из слов ФОН, СОН, МИФ.

3.9. Симметрическая разность случайных событий A и B обозначается $A \triangle B$ и определяется как

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(из событий A и B одно выполняется, а другое — нет; см. рис. 3.1). Выразите вероятность $P(A \triangle B)$ через вероятности $P(A)$, $P(B)$ и $P(AB)$.

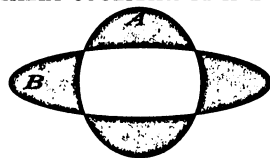


Рис. 3.1.

3.10. Чему равна вероятность того, что число, взятое наугад из всех трехзначных чисел, на одно из чисел 4 и 6 делится, а на другое не делится?

3.11. Из букв слова ПРЕЛЕСТЬ наугад выбирают 6 букв. Вычислите вероятность того, что из выбранных букв можно составить:

- а) любое из слов СТЕПЬ и ЛЕС;
б) хотя бы одно из слов СТЕПЬ и ЛЕС;
в) только одно из слов СТЕПЬ и ЛЕС.

3.12. Из букв слова КРАСОТА наугад выбирают 5 букв. Какова вероятность того, что из выбранных букв можно составить:

- хотя бы одно из слов КОСА и РОСА;
- только одно из слов КОСА и РОСА?

3.13. Некоторое n -томное издание расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что хотя бы один из томов оказался на своем естественном (порядковом) месте? (Сопоставьте с задачей 1.7).

Решение. Пусть A_i — событие состоящее в том, что i -й том окажется на i -м месте, $1 \leq i \leq n$. Нам предстоит найти вероятность $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$. По формуле (3.2) имеем

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k,$$

где
$$S_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}). \quad (*)$$

Вероятность $P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k})$ при $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ находится комбинаторными методами и равна

$$\frac{(n-k)!}{n!}.$$

Число слагаемых в (*) равно C_n^k — числу способов выбрать k мест из n мест. Следовательно, $S_k = C_n^k \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$. Отсюда

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \quad (**) \end{aligned}$$

В пределе при $n \rightarrow \infty$ сумма, заключенная в скобки, дает e^{-1} ; поэтому при достаточно больших n

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \approx 1 - \frac{1}{e} \approx 0,632.$$

На самом же деле приближение 0,632 получается для всех n , начиная с $n = 7$. Мы пришли к любопытному и совсем не очевидному, на первый взгляд, результату: при $n \geq 7$ искомая вероятность практически не зависит от n .

3.14. Написано 7 писем и к ним подписано 7 конвертов. Затем письма наугад вложили в конверты и отправили по почте. Какова вероятность того, что по назначению:

- не попадет ни одно письмо;

- б) попадет ровно одно письмо;
 в) попадут ровно два письма?

3.15. Каждый из шести участников вечеринки пришел в шляпе. Отправляясь после вечеринки домой, шляпы надевали наугад. Какова вероятность того, что ровно половина участников вечеринки надела чужие шляпы?

3.16. Из $10!$ слагаемых в представлении определителя десятого порядка через его элементы наугад выбирают одно слагаемое. Какова вероятность того, что оно не содержит в качестве множителя ни одного элемента главной диагонали определителя?

3.17. Докажите, что если $P(A) = P(B) = 1/2$, то

$$P(AB) = P(\overline{A} \overline{B}).$$

Решение. По формулам двойственности

$$\overline{A} \overline{B} = \overline{A + B};$$

следовательно,

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \overline{B}) &= 1 - P(A + B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + P(AB) = P(AB). \end{aligned}$$

Примечание. Доказано больше, чем требовалось: равенство $P(AB) = P(\overline{A} \overline{B})$ возможно тогда и только тогда, когда $P(A) + P(B) = 1$.

3.18. При каждом выстреле, независимо от остальных выстрелов, стрелок попадает в мишень с вероятностью p . Какова вероятность того, что произведя n выстрелов, стрелок хотя бы один раз попадет в мишень и хотя бы один раз промахнется?

Решение. Пусть A и B — события, состоящие в том, что в n выстрелах стрелок хотя бы один раз попадет в мишень и, соответственно, хотя бы один раз промахнется. Требуется найти $P(AB)$.

Из общей формулы

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

следует, что

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A + B).$$

Замечая, что в данном случае $A + B$ — достоверное событие, находим:

$$P(AB) = (1 - q^n) + (1 - p^n) - 1 = 1 - p^n - q^n.$$

3.19. При каком значении p вероятность $P(AB)$, найденная в предыдущей задаче, принимает наибольшее значение? (Помимо аналитического решения приведите интуитивные соображения в пользу полученного результата.)

3.20. Найдите вероятность того, что при бросании шести игральных костей выпадет хотя бы одна четная цифра и хотя бы одна нечетная цифра.

3.21. Какова вероятность того, что при бросании шести игральных костей выпадет не менее двух различных цифр, в том числе — шестерка?

3.22. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Вычислите вероятность того, что для их высадки лифт сделает не менее двух остановок, в том числе остановку на 7-м этаже.

3.23. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Вычислите вероятность того, что для их обслуживания — при отсутствии других пользователей — лифт:

- а) на 3-м этаже остановится;
- б) на 4-м этаже не остановится;
- в) на 3-м этаже остановится, а на 4-м не остановится;
- г) остановится и на 3-м, и на 4-м этаже.

Оценка снизу для вероятности произведения событий

3.24. Доказать неравенства:

- 1) $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$.
- 2) $P(A_1 A_2 \cdots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n - 1)$.

Решение. 1) В тождестве

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A + B)$$

достаточно вероятность $P(A + B)$ заменить единицей.

Второе неравенство доказывается индукцией по n .

3.25. Какие наименьшее и наибольшее значения может принимать вероятность $P(ABC)$, если $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,8$, $P(C) = 0,9$?

3.26. 1) Последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ случайных событий удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 0.$$

Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n + B_n) = 0.$$

2) Последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ случайных событий удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 1.$$

Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n B_n) = 1.$$

3.27. 1) Докажите, что если $P(A) = 0$, то $P(A + B) = P(B)$. Верно ли обратное утверждение?

2) Докажите, что если $P(A) = 1$, то $P(AB) = P(B)$. Верно ли обратное утверждение?

3.28. 1) Докажите, что если $P(A) = 0$, то $P(A \triangle B) = P(B)$. Верно ли обратное утверждение?

2) Докажите, что если $P(A) = 1$, то $P(A \triangle B) = P(\bar{B})$. Верно ли обратное утверждение?

3.29. Могут ли быть несовместными события A и B , если $P(A) = 1$, $P(B) \neq 0$?

$$\left| \begin{array}{l} \text{3.30. Доказать, что если } P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{3}{4}, \text{ то} \\ P(A|B) \geq \frac{5}{9}. \end{array} \right.$$

Р е ш е н и е.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - 1}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{9}.$$

3.31. Докажите, что если $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,4$, то

$$0,25 \leq P(B|A) \leq 0,5.$$

Формула умножения вероятностей

При $P(B) \neq 0$ формула

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad (3.11)$$

естественно возникающая в классической схеме теории вероятностей, в общем случае принимается как определение условной вероятности события A относительно события B (или: при условии B ; при условии, что произошло событие B).

Легко проверяется каждое из следующих трех свойств условной вероятности.

1. *Неотрицательность*:

$$P(A|B) \geq 0. \quad (3.12)$$

2. *Нормированность*:

$$P(\Omega|B) = 1. \quad (3.13)$$

3. *Счетная аддитивность*: если события $A_1, A_2, \dots$ попарно несовместны, то

$$P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \middle| B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B). \quad (3.14)$$

Таким образом, условная вероятность удовлетворяет всем аксиомам, а стало быть, и свойствам (безусловной) вероятности. В частности,

$$\begin{aligned} P(A|B) &= 1 - P(\bar{A}|B); \\ P(A + B|C) &= P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C); \\ P\left(\left(\bigcup_n A_n\right) \middle| B\right) &\leq \sum_n P(A_n|B) \end{aligned}$$

и т. п. Специально доказывать эти соотношения (после того, как установлены соотношения (3.12)–(3.14)) нет нужды. Можно сказать, что условная вероятность относительно события B порождает новое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$, отличающееся от исходного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ вероятностной мерой

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Из определения условной вероятности (3.11) вытекает, что

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \quad (3.15)$$

(в предположении, что $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$). Формула (3.15) называется *формулой умножения вероятностей*. Ее обобщение на случай n сомножителей записывается в виде

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 A_3 \cdots A_{n-1} A_n) &= \\ &= P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

в предположении, что $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \neq 0$.

3.32. Цифры 1, 2, 3, 4, 5 располагаются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что первой окажется четная, а последней — нечетная цифра?

Решение. Со случайным расположением цифр 1, 2, 3, 4, 5 в ряд свяжем следующие случайные события:

$A = \{\text{первой окажется четная цифра}\},$

$B = \{\text{последней окажется нечетная цифра}\}.$

Нам предстоит найти вероятность $P(AB)$. Имеем

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

3.33. Двенадцатитомное издание расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что третий том окажется на седьмом месте, а седьмой том на третьем месте?

3.34. Вероятность того, что письмо находится в письменном столе, равна p . Если оно находится в письменном столе, то с одинаковыми вероятностями может оказаться в любом из восьми ящиков этого стола. Какова вероятность того, что, заглянув в восьмой ящик стола, мы обнаружим в нем письмо?

Решение. Рассмотрим следующие случайные события:

$A = \{\text{в восьмом ящике стола лежит письмо}\},$

$B = \{\text{письмо находится в письменном столе}\}.$

Требуется найти вероятность события A . Имеем $A = AB$, и потому

$$P(A) = P(AB) = P(B)P(A|B) = p \cdot \frac{1}{8} = \frac{p}{8}.$$

3.35. В некотором институте лишь пятая часть студентов — спортсмены. Среди них мастера спорта составляют 5%, кандидаты в мастера спорта — 15%, а остальные — спортсмены-разрядники, т. е. имеющие первый, второй или третий спортивный разряд. Чему равна вероятность того, что встретившийся случайно студент этого института является спортсменом-разрядником?

3.36. В условиях задачи 1.47 (см. с. 22) найти вероятность того, что наиболее удачливый представитель второго спортклуба окажется на финише четвертым.

Решение. Рассмотрим случайные события:

$S_1 = \{\text{тройку победителей в личном зачете составят представители первого и третьего спортклубов}\};$

$S_2 = \{\text{четвертым на финише будет представитель второго спортклуба}\}.$

Надо найти вероятность произведения этих событий. Имеем:

$$P(S_1 S_2) = P(S_1)P(S_2|S_1).$$

Далее, получаем:

$$P(S_1) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}, \quad P(S_2|S_1) = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$P(S_1 S_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}.$$

3.37. В условиях задачи 1.47 найдите вероятность того, что наиболее удачливый представитель второго спортклуба уступит всем представителям первого спортклуба, но обеспечит своему клубу второе место.

3.38. В условиях задачи 1.47 найдите вероятность того, что первое место займет первый спортклуб, второе — второй спортклуб, третье — третий спортклуб.

3.39. В условиях задачи 1.47 найдите условную вероятность того, что второй спортклуб опередит третий спортклуб при условии, что первый спортклуб опередит второй спортклуб.

3.40. Из букв разрезной азбуки составили слово КОМБИНАТОРИКА. Не умеющий читать ребенок перемешал буквы этого слова и составил из них «слово» из четырех букв. Какова вероятность того, что этим «словом» оказалось слово КИНО?

Решение. Пусть $K, И, Н, О$ — события, заключающиеся в том, что ребенок выбрал K первой буквой, $И$ — второй буквой, $Н$ — третьей буквой, $О$ — четвертой буквой. Тогда по формуле (3.16)

$$P(КИНО) = P(K)P(И|K)P(Н|КИ)P(О|КИН).$$

Первоначальное слово КОМБИНАТОРИКА содержит 13 букв:

дважды каждую из букв А, И, К, О и по одной букве Б, М, Н, Р, Т. Поэтому

$$P(K) = \frac{2}{13}, \quad P(I|K) = \frac{2}{12}, \quad P(N|KI) = \frac{1}{11}, \quad P(O|KIN) = \frac{2}{10}.$$

Следовательно,

$$P(KINO) = \frac{2}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{2145}.$$

Примечание. В условиях классической схемы формула умножения вероятностей (3.16) скрывает в себе комбинаторный принцип умножения (см. с. 426). В рассмотренной задаче можно было бы говорить об опыте, заключающемся в выборе из 13 букв А, А, Б, И, И, К, К, М, Н, О, О, Р, Т четырех букв в следующей последовательности: К, И, Н, О. Такой опыт имеет $N = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17\,160$ элементарных исходов, из которых интересующему нас событию $S = \{КИНО\}$ благоприятствует $N_S = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8$ элементарных исходов.

3.41. В случайном порядке в ряд располагают 5 белых, 7 черных и 3 оранжевых шара. Найдите вероятность того, что на 1-м и 5-м местах в этом ряду будут белые шары, а на 15-м месте — оранжевый шар.

3.42. Вычислите вероятность того, что число, выбранное наугад из всех трехзначных чисел, кратных хотя бы одного из чисел 4 или 6, делится на: а) 6; б) 4.

3.43. Вычислите вероятность того, что число, выбранное наугад из всех трехзначных чисел:

а) делится хотя бы на одно из чисел 4 и 6, если известно, что оно не делится хотя бы на одно из этих чисел.

б) не делится хотя бы на одно из чисел 4 и 6, если известно, что оно делится хотя бы на одно из этих чисел;

Независимые события

Случайные события A и B называются *независимыми*, если

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (3.17)$$

Для таких событий

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B), \quad (3.18)$$

— в первом случае при $P(B) \neq 0$, во втором — при $P(A) \neq 0$.

Случайные события $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *независимыми (независимыми в совокупности)*, если

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}) \quad (3.19)$$

для всяких $i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \leq n$.

В частности, независимость трех случайных событий A, B, C определяется равенствами

$$\begin{cases} P(ABC) = P(A)P(B)P(C), \\ P(AB) = P(A)P(B), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) = P(B)P(C), \end{cases} \quad (3.20)$$

причем выписывать нужно все четыре условия. Вообще говоря, из первого равенства последние три равенства, не следуют, так же, как из последних трех равенств не следует первое равенство.

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы, то независимы и события $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ при $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n; m \geq 2$.

3.44. 1) Может ли событие A быть независимым от себя?

2) Докажите, что A и B — независимые события, если вероятность хотя бы одного из них равна 0 или 1.

3.45. Могут ли:

а) независимые события A и B быть несовместными;

б) несовместные события A и B быть независимыми?

3.46. Докажите, что несовместные события A и B при $P(A) > 0, P(B) > 0$ являются зависимыми.

3.47. Вероятность того, что деталь окажется первосортной, равна 0,95 при условии, что она изготовлена на первом станке, и 0,8 при условии, что она изготовлена на втором станке. На первом станке изготовлено 3, а на втором — 4 детали. Определите вероятность того, что все эти детали первосортные.

3.48. Доказать, что если события A и B независимы, то независимыми будут также события:

а) A и $\bar{B}$; б) $\bar{A}$ и B ; в) $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Решение. Очевидно, что $A = AB + A\bar{B}$, причем, слагаемые AB и $A\bar{B}$ несовместны, поскольку несовместны события B и $\bar{B}$. Поэтому

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB) + P(A\bar{B}), \\ P(A\bar{B}) &= P(A) - P(AB). \end{aligned}$$

По условию $P(AB) = P(A)P(B)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} P(A\bar{B}) &= P(A) - P(AB) = \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}). \end{aligned}$$

Таким образом, $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$. А это означает, что A и $\bar{B}$ — независимые случайные события.

Итак, доказана импликация

$$(A \text{ и } B \text{ независимы}) \implies (A \text{ и } \bar{B} \text{ независимы}). \quad (*)$$

Заменяя в $(*)$ A на B , а B на A , получаем

$$(B \text{ и } A \text{ независимы}) \implies (B \text{ и } \bar{A} \text{ независимы}).$$

Наконец, двукратное использование импликации $(*)$ дает:

$$\begin{aligned} (A \text{ и } B \text{ независимы}) &\implies (\bar{A} \text{ и } B \text{ независимы}) \implies \\ &\implies (\bar{A} \text{ и } \bar{B} \text{ независимы}). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Полученный результат допускает следующее, вполне естественное обобщение.

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы, то независимы и события, которые получаются заменой каких-нибудь из данных событий (и даже всех их) соответствующими противоположными событиями.

Если, например, A, B и C — независимые случайные события, то независимыми будут случайные события $A, \bar{B}, \bar{C}$.

3.49. Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет герб. Какова вероятность того, что монету придется подбрасывать:

- а) ровно 5 раз; б) не менее 5 раз; в) не более 5 раз?

Р е ш е н и е. В пункте а) речь идет о случайном событии $rrrrg$ (r — решка, g — герб). Поэтому

$$P(rrrrg) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

Не менее пяти раз придется подбрасывать монету тогда и только тогда, когда каждое из первых четырех подбрасываний даст решку. Таким образом, в пункте б) речь идет о случайном событии $rrrrr$:

$$P(rrrrr) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

В пункте в) проще всего начать с рассмотрения события $\bar{A} = \{\text{монету придется подбрасывать более пяти раз}\}$, проти-

воположного тому событию A , которое приведено в условии задачи. Очевидно, что $\bar{A} \equiv \{ppppp\}$; откуда

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32},$$

и, следовательно,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}.$$

3.50. При каждом выстреле, независимо от остальных выстрелов, стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8. Ему разрешено стрелять до первого промаха. Какова вероятность того, что стрелок произведет:

- а) ровно три выстрела;
- б) не менее трех выстрелов;
- в) не более трех выстрелов?

3.51. При включении зажигания двигатель, независимо от остальных включений, начинает работать с вероятностью 0,7. Найдите вероятность того, что:

- а) двигатель заработает при втором включении зажигания;
- б) для ввода двигателя в работу зажигания придется включать не менее четырех раз?

3.52. Стрелку, имеющему пять патронов, разрешено стрелять до первого промаха или пока не кончатся патроны. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Какова вероятность того, что стрелок израсходует не все имеющиеся у него патроны?

3.53. Студент пользуется тремя библиотеками, комплектование которых осуществляется независимо друг от друга. Нужная ему книга может быть в данных библиотеках с вероятностями 0,5, 0,6 и 0,7 соответственно. Какова вероятность того, что студент достанет нужную ему книгу в этих библиотеках?

Решение. Нужная студенту книга может быть в одной, двух или даже во всех трех библиотеках. Однако перебирать все такие варианты нет нужды. Проще рассмотреть противоположное событие: нужной студенту книги нет ни в первой, ни во второй, ни в третьей библиотеке. Вероятность такого события равна

$$(1 - 0,5) \cdot (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,7) = 0,06.$$

Следовательно, искомая вероятность равна $1 - 0,06 = 0,94$.

3.54. Три студента на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности ее решения этими студентами равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Найдите вероятность того, что:

- а) хотя бы один студент решит задачу;
- б) хотя бы один студент не решит задачу.

3.55. Три стрелка независимо друг от друга попадают в цель с вероятностями 0,7, 0,6 и 0,6 соответственно. Для поражения цели достаточно одного попадания в нее. Чему равна вероятность того, что при одновременном выстреле трех стрелков цель будет поражена?

3.56. Детали проходят три независимые фазы обработки. Вероятность получения брака составляет: на первой фазе 0,03; на второй фазе 0,02; на третьей фазе 0,01. Какова вероятность того, что деталь, прошедшая все три фазы обработки, окажется бракованной?

3.57. При одном цикле обзора радиолокационной станции объект обнаруживается с вероятностью 0,85. Обнаружение объекта в каждом цикле достигается независимо от других циклов. Какое минимальное число циклов обзора надо осуществить, чтобы вероятность обнаружения объекта была не меньше, чем 0,999?

Решение. Искомое число циклов обзора обозначим n . Тогда вероятность обнаружения объекта окажется равной

$$1 - (1 - 0,85)^n = 1 - 0,15^n,$$

а искомое n найдется как наименьшее натуральное решение неравенства

$$1 - 0,15^n \geq 0,999.$$

Простые расчеты дают:

$$0,15^n \leq 0,001; \quad n \geq 4.$$

3.58. Какое минимальное число игральных костей нужно подбросить одновременно, чтобы с вероятностью, не меньшей, чем 0,6, выпала хотя бы одна шестерка?

3.59. Рыбак подметил, что каждая пойманная им рыба приходится в среднем на 200 забрасываний спиннинга. Какова вероятность поймать хотя бы одну рыбку при 100 забрасываниях спиннинга?

Решение. Искомая вероятность

$$\begin{aligned} p &= 1 - \left(\frac{199}{200}\right)^{100} = 1 - \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{200 \cdot \frac{1}{2}} = \\ &= 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{200}\right)^{200}\right]^{\frac{1}{2}} \approx 1 - e^{-1 \cdot \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,39. \end{aligned}$$

3.60. Докажите, что если $P(A|B) = P(A|\bar{B})$, то A и B — независимые события.

3.61. *Игральный тетраэдр* представляет собой правильный четырехгранник, у которого одна грань окрашена в белый цвет, другая — в черный, третья — в желтый, а четвертая грань является трехцветной, поскольку содержит краски трех цветов: и белого, и черного, и желтого. Будем считать, что при подбрасывании игрального тетраэдра выпадает та грань, на которую он ложится. Пусть B , $Ч$, $Ж$ — случайные события, состоящие в том, что при подбрасывании игрального тетраэдра выпадет грань, содержащая белую, черную, желтую краски соответственно. Докажите, что события B , $Ч$, $Ж$ независимы попарно, но зависимы в совокупности.

3.62. Подбрасывают три игральные кости. Исследуйте на независимость — попарную и совокупную — три события:

$A = \{\text{на первой и второй костях выпала одна и та же цифра}\};$

$B = \{\text{на первой и третьей костях выпала одна и та же цифра}\};$

$C = \{\text{на второй и третьей костях выпала одна и та же цифра}\}.$

3.63. Приведите пример случайных событий A , B , C , не являющихся попарно независимыми, но удовлетворяющих условию

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

3.64. В условиях задачи 1.47 рассмотрим два события:

$S = \{\text{первый спортклуб опередит второй спортклуб}\},$

$T = \{\text{второй спортклуб опередит третий спортклуб}\}.$

Зависимы ли случайные события S и T ?

Примеры совместного использования формул сложения и умножения вероятностей

3.65. Три стрелка, попадающие в цель независимо друг от друга с вероятностями 0,5, 0,4 и 0,3 соответственно, выстрелили по мишени одновременно. Какова вероятность того, что в мишени:

- а) не образовалось ни одной пробоины (событие X_0);
- б) образовалась одна пробоина (событие X_1);
- в) образовалось две пробоины (событие X_2);
- г) образовалось три пробоины (событие X_3);
- д) образовалась хотя бы одна пробоина (событие Y);
- е) образовалось не менее двух пробоин (событие Z)?

Решение. Пусть A , B и C — события, состоящие в том, что первый (соответственно, второй, третий) стрелок попал в мишень. Тогда

$$P(A) = 0,5, \quad P(B) = 0,4, \quad P(C) = 0,3,$$

причем A , B и C — независимые события.

а) Очевидно, что $X_0 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ (каждый из трех стрелков промахнулся). Следовательно,

$$\begin{aligned} P(X_0) &= P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = \\ &= 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,7 = 0,21. \end{aligned}$$

б) Нетрудно понять, что

$$X_1 = A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C,$$

причем слагаемые в приведенной сумме попарно несовместны. Но в таком случае

$$\begin{aligned} P(X_1) &= P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) = \\ &= P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(B)P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(\overline{B})P(C) = \\ &= 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 0,44. \end{aligned}$$

Решение пунктов в) и г) приводится без комментариев.

$$\begin{aligned} \text{в) } P(X_2) &= P(\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}) = \\ &= P(\overline{A})P(B)P(C) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(A)P(B)P(\overline{C}) = \\ &= 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,7 = 0,29. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } P(X_3) &= P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = \\ &= 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,06. \end{aligned}$$

д) Для вычисления вероятности события Y проще всего заметить, что это событие противоположно событию X_0 :

$$Y = \overline{X_0}.$$

Следовательно,

$$P(Y) = P(\overline{X_0}) = 1 - P(X_0) = 1 - 0,21 = 0,79.$$

К тому же результату, естественно, приводит и другое, более длинное и менее рациональное решение:

$$\begin{aligned} Y &= X_1 + X_2 + X_3; \\ P(Y) &= P(X_1) + P(X_2) + P(X_3) = \\ &= 0,44 + 0,29 + 0,06 = 0,79. \end{aligned}$$

В ходе преобразований мы использовали то, что события X_1 , X_2 и X_3 попарно несовместны.

е) В основу решения этого вопроса может быть положено любое из следующих представлений события Z :

$$\begin{aligned} Z &= \overline{X_0 + X_1}, \\ Z &= X_2 + X_3. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P(Z) &= 1 - P(X_0 + X_1) = 1 - P(X_0) - P(X_1) = \\ &= 1 - 0,21 - 0,44 = 0,35, \end{aligned}$$

или (с тем же, разумеется, результатом)

$$P(Z) = P(X_2) + P(X_3) = 0,29 + 0,06 = 0,35.$$

3.66. Вероятности попадания в цель для трех стрелков равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Для поражения цели в нее нужно попасть хотя бы два раза. Определите вероятность того, что в результате выстрелов трех стрелков цель будет поражена.

3.67. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Определите наиболее вероятное число попаданий охотника в цель.

3.68. Управляющие роботом команды искажаются из-за помех в канале связи (надежность канала связи 0,95) и, независимо от этого, из-за неисправности системы управления (надежность системы управления 0,90), причем данные два типа искажений не компенсируют, а лишь усиливают друг друга. Какова вероятность того, что робот не выполнит команды?

3.69. Синоптики Аляски и Чукотки независимо друг от друга предсказывают погоду («ясно» — «пасмурно») в Беринговом проливе, ошибаясь с вероятностями p_1 и p_2 соответственно. Их предсказания на завтра разошлись. Какова вероятность того, что синоптики Аляски ошиблись?

Решение. Множество Ω элементарных исходов в данном случае можно записать в виде:

$$\Omega = \{++, +-, -+, --\},$$

где «+» соответствует правильному, а «-» — ошибочному прогнозу синоптиков Аляски и Чукотки соответственно. При этом

$$P(++) = (1 - p_1)(1 - p_2),$$

$$P(+-) = (1 - p_1)p_2,$$

$$P(-+) = p_1(1 - p_2),$$

$$P(--) = p_1p_2.$$

Событие $A = \{\text{предсказания синоптиков на завтра разошлись}\}$ может быть записано в виде

$$A = \{+-\} \cup \{-+\}.$$

При этом

$$P(A) = (1 - p_1)p_2 + p_1(1 - p_2).$$

Если теперь $B = \{\text{синоптики Аляски ошиблись}\}$, то

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\{-+\})}{P(A)} = \frac{p_1(1 - p_2)}{(1 - p_1)p_2 + p_1(1 - p_2)}.$$

3.70. Синоптики Аляски и Чукотки независимо друг от друга предсказывают погоду («ясно» — «пасмурно») в Беринговом проливе, ошибаясь с вероятностями 0,1 и 0,3 соответственно. Их предсказания на завтра совпали. Какова вероятность того, что эти предсказания ошибочны?

3.71. Двое поочередно подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Определить вероятность выигрыша каждого игрока.

Решение.

Способ 1. Событие A , состоящее в том, что первый вступающий в игру победит, можно записать в виде следующей

суммы попарно несовместных событий:

$$A = \{z\} + \{ppz\} + \{ppppz\} + \dots;$$

поэтому

$$P(A) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots$$

По формуле $S = \frac{a_1}{1-q}$ для суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом a_1 и знаменателем q находим:

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Вероятность $P(B)$ того, что победит игрок, вступающий в борьбу вторым, вычисляется как

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

При этом используется то, что ничья (событие C) в данной игре имеет нулевую вероятность. Этот вполне очевидный факт формально можно доказать, например, исходя из соотношения

$$C = \{pp\} \cap C$$

(при первых двух подбрасываниях монеты выпадают решки). Имеем:

$$P(C) = P(pp)P(C|pp) = P(pp)P(C) = \frac{1}{4}P(C),$$

откуда $P(C) = 0$.

С п о с о б 2. Пусть p — событие, состоящее в том, что при первом подбрасывании монеты выпадет решка. Тогда

$$P(B) = P(pB) = P(p)P(B|p) = P(p)P(A).$$

Использованное здесь соотношение $P(B|p) = P(A)$ отражает тот факт, что при выпадении монеты решкой игроки как бы меняются местами: тот, кто в начале игры был первым, теперь становится вторым; второй же, наоборот, выступает в роли первого. Итак,

$$P(B) = 1 - P(A) = P(p)P(A),$$

$$1 - P(A) = \frac{1}{2} P(A),$$

$$P(A) = \frac{2}{3}.$$

То, что рассматриваемая игра несправедлива, было очевидно с самого начала. Теперь же мы знаем, насколько она несправедлива: первый вступающий в нее игрок, имеет вдвое больше шансов победить, чем его соперник.

3.72. Двое поочередно подбрасывают игральную кость. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет шестерка. Определите вероятность выигрыша для каждого игрока.

3.73. Из колоды карт (52 листа) двое поочередно по схеме с возвращением достают по одной карте. Выигрывает тот, у кого раньше выйдет туз. Определите вероятности победы для каждого игрока. Будет ли игра более справедливой, если требование достать туза заменить требованием достать туза пик?

3.74. В урне n шаров, помеченных числами $1, 2, \dots, n$. Двое поочередно вынимают один шар по схеме с возвращением. Выигрывает тот, у кого раньше появится шар с номером n . Определите вероятность выигрыша для каждого игрока. Рассмотрите случай, когда $n \rightarrow \infty$.

3.75. Два стрелка имеют по три патрона. Для каждого стрелка вероятность попадания в мишень при одном выстреле, независимо от остальных выстрелов, равна p . Стрелки поочередно стреляют по мишени. Победителем становится тот, кто первым попадет в мишень. Найдите вероятность того, что:

- а) победит первый стрелок;
- б) победит второй стрелок;
- в) победитель не выявится;
- г) стрелки израсходуют все имеющиеся у них патроны.

3.76. Двое поочередно извлекают шары (без возвращения) из урны, содержащей 2 белых и 4 черных шара. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Найдите вероятность выигрыша участника, начинающего игру.

3.77. Двое поочередно без возвращения достают по одному шару из урны, содержащей 3 белых, 2 черных и 1 оранжевый шар. Игра заканчивается в любом из следующих трех случаев: кто-то достает оранжевый шар — тогда объявляется ничья; вступающий в игру первым достает белый шар — тогда он объявляется победителем; вступающий в игру вторым достает черный шар — тогда он объявляется победителем. Введем в рассмотрение случайные события:

$A \equiv \{\text{побеждает вступающий в игру первым}\};$

$B \equiv \{\text{побеждает вступающий в игру вторым}\};$

$C \equiv \{\text{ничья}\};$

$D_k \equiv \{\text{до конца игры извлечено ровно } k \text{ шаров}\}.$

Вычислите следующие вероятности:

- а) $P(A)$; б) $P(B)$; в) $P(C)$;
г) $P(A|D_3)$; д) $P(B|D_4)$; е) $P(C|D_2)$.

3.78. Какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты герб выпадет по меньшей мере три раза подряд?

Решение. Рассматриваемое в этой задаче случайное событие A можно представить в виде следующей суммы трех попарно несовместных случайных событий:

$$A = \{ggg**\} + \{pggg*\} + \{*pggg\},$$

где символом «*» обозначено событие: выпал герб или выпала решка — безразлично, что именно; очевидно, что $P(*) = P(\Omega) = 1$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

3.79. Какова вероятность того, что при пяти бросаниях игральной кости шестерка выпадет не менее трех раз подряд?

3.80. Какова вероятность того, что при четырех подбрасываниях игральной кости шестерка не выпадет дважды подряд?

3.81. Вычислите вероятность того, что при пяти бросаниях монеты решка выпадет по меньшей мере два раза подряд.

3.82. Определите вероятность того, что при шести подбрасываниях игрального тетраэдра (см. задачу 3.61) трехцветная грань выпадет по меньшей мере четыре раза подряд.

3.83. Монету бросают до тех пор, пока не будет зафиксирована серия ГГГ (герб–герб–герб). Какова вероятность того, что монету придется бросать ровно: а) 6 раз; б) 7 раз?

3.84. Монету бросают до тех пор, пока не будет зафиксирована серия РГР (решка–герб–решка). Какова вероятность того, что монету придется бросать ровно: а) 6 раз; б) 7 раз?

3.85. При каждом выстреле, независимо от остальных выстрелов, стрелок попадает в цель с вероятностью p . Первый этап соревнования приносит стрелку успех и право на участие в следующем этапе соревнования тогда и только тогда, когда он,

располагая шестью патронами, продемонстрирует три попадания подряд при условии, что перед этим не было трех промахов подряд.

1) Какова вероятность того, что первый этап соревнования окажется успешным для стрелка?

2) Вычислите вероятность того, что результат первого этапа соревнования для стрелка определится после того, как он произведет 3 выстрела; 5 выстрелов.

3.86. В месте пешеходного перехода появление машины в течение секунды не зависит от потока машин в другие моменты времени и наблюдается с вероятностью p . При зеленом сигнале светофора улицу можно перейти за 3 с; поэтому светофор разрешает переход, если в течение ближайших трех секунд автомашин не будет. С какой вероятностью на переход улицы (ожидание разрешающего сигнала светофора и собственно переход) пешеход затратит:

а) 3 с; б) 4 с; в) 5 с; г) 6 с; д) 7 с?

Расчет надежности простейших схем

В задачах этого раздела, касающихся надежности технических систем, рассматриваются в основном два типа соединения блоков в систему: *последовательное* соединение (рис. 3.2, а) и *параллельное* соединение (рис. 3.2, б). В первом случае система отказывает, или выходит из строя тогда и только тогда, когда отказывает (выходит из строя) хотя бы один из блоков этой системы. Во втором случае система отказывает тогда и только тогда, когда отказывают все блоки этой системы.

Надежность блока (системы) в данном разделе понимается как вероятность того, что в течение заданного промежутка времени блок (система) не выйдет из строя.

В случае последовательного соединения (рис. 3.2, а) надежности $p_1, p_2, \dots, p_n$ блоков приводят к следующей надежности P системы:

$$P = p_1 p_2 \dots p_n. \quad (3.21)$$

В случае параллельного соединения (рис. 3.2, б) надежности $p_1, p_2, \dots, p_n$ блоков приводят к следующей надежности P' системы:

$$P' = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n). \quad (3.22)$$

В формулах (3.21) и (3.22) предполагается, что (в смысле надежности) блоки системы работают независимо друг от друга.

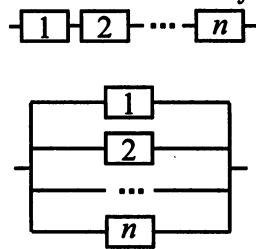


Рис. 3.2.

При $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$ формулы (3.21) и (3.22) принимают вид

$$P = p^n, \quad (3.23)$$

$$P' = 1 - (1 - p)^n. \quad (3.24)$$

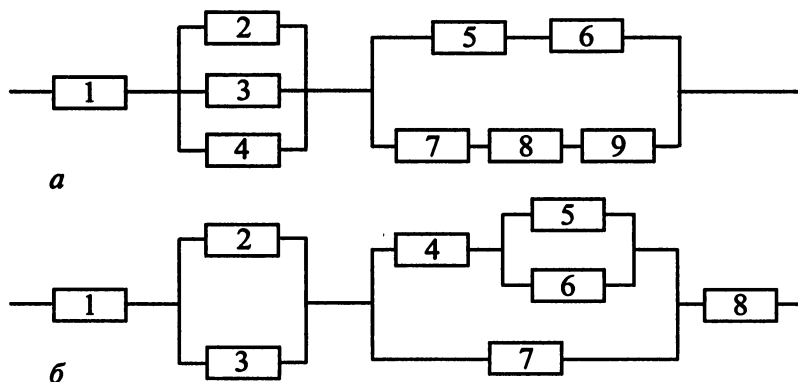


Рис. 3.3.

3.87. Вычислите надежность схем, представленных на рис. 3.3, а и 3.3, б, где $p_1, p_2, \dots, p_9$ — надежности их отдельных частей.

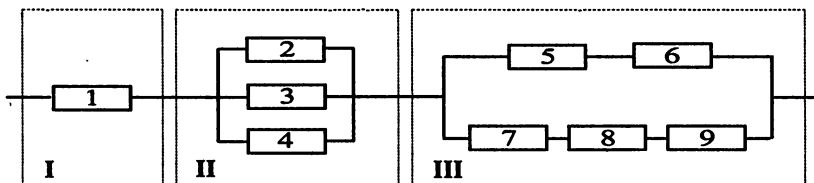


Рис. 3.4.

Решение (частично).

а) Данную систему можно рассматривать как последовательное соединение трех блоков I, II, III (рис. 3.4) надежности P_I, P_{II} и P_{III} соответственно, где

$$P_I = p_1,$$

$$P_{II} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4),$$

$$P_{III} = 1 - (1 - p_5 p_6)(1 - p_7 p_8 p_9).$$

Поэтому надежность всей схемы

$$P = P_I P_{II} P_{III}.$$

3.88. Техническая система состоит из соединенных последовательно n блоков, надежность каждого из которых равна p . С целью повышения надежности системы производится дублирование, для чего выделено еще n таких блоков. Какой из двух способов дублирования, представленных на рис.

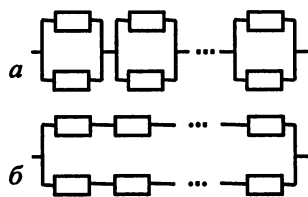


Рис. 3.5.

3.5, а и 3.5, б, обеспечивает большую надежность системы?

3.89. Техническая система состоит из трех последовательно соединенных блоков типа I, II, III, надежности 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно. Разрешается выбрать еще три блока — в любом наборе из числа блоков указанных типов. Как нужно выбрать эти три блока, чтобы в результате поблочного дублирования получилась система наибольшей надежности?

3.90. Электрическая цепь, изображенная на рис. 3.6, собрана из шести элементов, расположенных на трех участках. Каждый элемент, независимо от остальных элементов, в момент включения с вероятностью p проводит, а с вероятностью $q = 1 - p$ не проводит ток.

1) Какова вероятность того, что цепь проводит ток?

2) Известно, что цепь не проводит ток. Вычислить вероятность того, что ток не проводит первый участок; второй участок; третий участок.

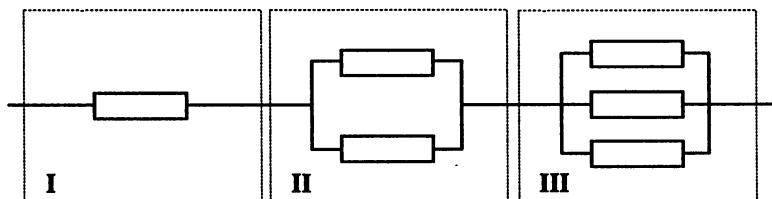


Рис. 3.6.

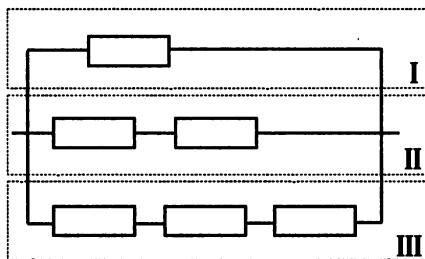


Рис. 3.7.

3.91. Электрическая цепь, изображенная на рис. 3.7, собрана из шести элементов, разбитых на три участка. Каждый элемент, независимо от остальных элементов, в момент включения с вероятностью p проводит, а с вероятностью $q = 1 - p$ не проводит ток.

- 1) Какова вероятность того, что цепь проводит ток?
- 2) Известно, что цепь проводит ток. Вычислите вероятность того, что ток проводит: участок I; участок II; участок III; каждый из участков I и II.

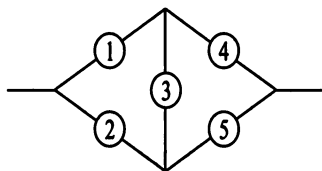


Рис. 3.8.

3.92. Электрическая цепь, представленная на рис. 3.8, собрана из пяти элементов, каждый из которых, независимо от остальных элементов, в момент включения с вероятностью p проводит, а с вероятностью $q = 1 - p$ не проводит ток.

- 1) Какова вероятность того, что цепь проводит ток?
- 2) Известно, что цепь проводит ток. Вычислите вероятность того, что ток проводит: элемент 1; элемент 3?
- 3) Известно, что цепь не проводит ток. Какой из ее элементов не проводит ток с наименьшей вероятностью? Чему равна эта вероятность?

Разные задачи

3.93. Докажите, что если

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k),$$

то $P(A_i A_j) = 0$ при $i \neq j$.

3.94. Из урны, содержащей только белые и черные шары (количество их неизвестно), извлекают поочередно по схеме с возвращением два шара. Что более вероятно: извлеченные шары будут одного или разного цвета?

3.95. Вычислите вероятность того, что в записи числа, выбранного наугад из всех пятизначных чисел, встречается:

- а) хотя бы один нуль;
- б) хотя бы одна девятка;
- в) хотя бы один нуль и хотя бы одна девятка;
- г) хотя бы один нуль или хотя бы одна девятка.

3.96. В городе N каждый день независимо от остальных дней с вероятностью p ясно и с вероятностью $q = 1 - p$ пасмурно. Художник, работая над очередным полотном, намерен пробыть в этом городе до тех пор, пока не увидит его и в ясную и в пасмурную погоду. Какова вероятность того, что художник пробудет в городе:

- а) не менее пяти дней; б) ровно пять дней;
- в) не более пяти дней?

3.97. Система контроля качества состоит из двух независимых проверок. В результате первой проверки стандартное изделие отбраковывается с вероятностью 0,01, а бракованное изделие принимается с вероятностью 0,02. При второй проверке, которую проходят лишь изделия, признанные стандартными по результатам первой проверки, стандартное изделие отбраковывается с вероятностью 0,001, а бракованное изделие принимается с вероятностью 0,002. Найдите вероятность того, что:

- а) бракованное изделие будет принято;
- б) стандартное изделие будет отбраковано.

3.98. Десять единиц, десять двоек и десять троек располагаются в ряд в случайном порядке, образуя некоторое тридцатизначное число. Какова вероятность того, что это число делится на:

- а) 2; б) 3; в) 4?

3.99. Три самолета поочередно по одному разу атакуют наземную цель, поражая ее с вероятностями 0,8, 0,9 и 0,85 соответственно. В случае поражения цели атаки прекращаются. Найдите вероятность:

- а) поражения цели;
- б) поражения цели при условии, что цель была атакована каждым из трех самолетов;
- в) атаки цели каждым из трех самолетов, при условии, что цель была поражена.

3.100. Игральный тетраэдр (см. задачу 3.61) подбрасывается до тех пор, пока не выпадет трехцветная грань. Какова

вероятность того, что тетраэдр придется подбрасывать:

- а) ровно три раза; б) не менее трех раз;
- в) не более трех раз?

3.101. Для любых ли случайных событий A и B , таких, что $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, верны равенства:

- а) $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$; б) $P(A|A+B) = \frac{P(A)}{P(A+B)}$;
- в) $P(B|A+B) = 1 - P(A|A+B)$?

3.102. Какова вероятность того, что при подбрасывании трех игральных костей хотя бы на одной выпадет шестерка, если известно, что на всех гранях выпали четные цифры?

3.103. Из букв слова ЛАМБАДА наугад выбирают пять букв. Какова вероятность того, что из выбранных букв можно составить:

- а) слово БАЛДА; б) слово ЛАДА; в) слово БАЛ;
- г) любое из слов БАЛДА, ЛАДА, БАЛ;
- д) хотя бы одно из слов БАЛДА, ЛАДА, БАЛ?

3.104. Случайные события A , B и C независимы в совокупности, а их вероятности равны 0,2, 0,3 и 0,5 соответственно. Найдите вероятность события $D = A + B + C$.

3.105. Независимые в совокупности события $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеют вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n$ соответственно. Докажите, что

$$1 - e^{-(p_1+p_2+\dots+p_n)} \leq P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \leq p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

3.106. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 10 человек. Вычислите вероятность того, что (при отсутствии других пользователей) лифт, поднимаясь вверх:

- а) не остановится ни на 5-м, ни на 6-м этаже;
- б) на 5-м этаже остановится, а на 6-м — не остановится;
- в) остановится и на 5-м, и на 6-м этажах;
- г) остановится по крайней мере дважды, в том числе на 5-м этаже;
- д) остановится по крайней мере дважды.

3.107. Игральную кость бросают 6 раз. Вычислите вероятности того, что:

- а) ни единица, ни шестерка не выпадут ни разу;
- б) единица выпадет хотя бы один раз, а шестерка не выпадет ни разу;
- в) и единица и шестерка окажутся в числе выпавших цифр.

3.108. В ряд в случайном порядке располагаются 4 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что в этом ряду белый шар:

- а) впервые появится на 3-м месте;
- б) в последний раз появится на 9-м месте;
- в) впервые появится на 3-м месте, а в последний раз — на 9-м месте?

3.109. Водитель был оштрафован десять раз за незаконную парковку автомобиля, причем все эти штрафы налагались либо в понедельник, либо во вторник. Насколько неожиданным является этот результат? (Найдите вероятность того, что все десять штрафов придутся на какие-то два дня недели.)

3.110. Каждое изготовленное изделие с вероятностью p имеет дефект и поэтому проходит три этапа контроля. На первом этапе контроля дефект обнаруживается с вероятностью p_1 , на втором — с вероятностью p_2 , на третьем — с вероятностью p_3 . При обнаружении дефекта изделия его дальнейший контроль прекращается. Известно, что изделие было забраковано. Какова вероятность того, что это произошло на первом, втором, третьем этапе контроля?

3.111. Собираясь сыграть три теннисных матча со своими родителями, юноша намерен победить два раза подряд. Порядок матчей может быть «отец–мать–отец» или «мать–отец–мать». Какой из них предпочтительней для юноши, если известно, что отец играет лучше матери?

3.112. В городе N каждый день независимо от остальных дней с вероятностью p ясно и с вероятностью $q = 1 - p$ пасмурно; $0 < p < 1$.

1) С какой вероятностью с 1-го на 2-е сентября погода изменится? При каком значении p эта вероятность будет наибольшей?

2) Пусть A_k — событие, состоящее в том, что с k -го на $(k+1)$ -е сентября погода изменится, $k = 1, 2, 3$. Зависимы ли события:

- а) A_1 и A_2 ; б) A_1 и A_3 ; в) A_1, A_2 и A_3 ?

3.113. Подбрасывают n монет. Исследуйте на независимость случайные события $A = \{\text{выпадает не менее одного герба и не менее одной решки}\}$ и $B = \{\text{выпадает не более одного герба}\}$, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$.

3.114. Пусть A, B и C — случайные события, причем

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Верно ли, что

$$P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)?$$

3.115. Докажите, что в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ для любых событий A и B существует событие C такое, что

$$P(AB|C) = P(A|C)P(B|C).$$

3.116. Обладает ли отношение независимости двух случайных событий свойством транзитивности? (Верно ли, что если $P(AB) = P(A)P(B)$ и $P(BC) = P(B)P(C)$, то $P(AC) = P(A)P(C)$?)

3.117. Докажите, что

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \cdots A_n | C) &= \\ &= P(A_1 | C) P(A_2 | A_1 C) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1} C), \end{aligned}$$

если $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} C) \neq 0$.

3.118. Бесконечная последовательность случайных событий $A_1, A_2, \dots$, называется *независимой*, если независима любая ее конечная подпоследовательность. Докажите, что для такой последовательности

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \prod_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

3.119. Какие значения может принимать величина p , если:

$$\begin{cases} P(A) = P(B) = P(C) = p, \\ P(AB) = P(AC) = P(BC) = p^2, \\ P(ABC) = 0? \end{cases}$$

§ 4. Формула полной вероятности; формула Байеса

Простейшие задачи

Предположим, что случайные события $H_1, H_2, \dots$ образуют полную группу попарно несовместных событий с положительными вероятностями, т. е.:

- 1) $H_i \cap H_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$;
- 2) $\bigcup_i H_i = \Omega$;
- 3) $P(H_i) > 0, \quad i = 1, 2, \dots$

Тогда для всякого случайного события A

$$P(A) = \sum_i P(A|H_i)P(H_i). \quad (4.2)$$

Это — так называемая *формула полной вероятности*. Случайные события $H_1, H_2, \dots$ в этой формуле часто называют *гипотезами*: вероятность события A вычисляется как бы при разных гипотезах и результаты $P(A|H_1), P(A|H_2), \dots$ усредняются с учетом вероятности («веса») каждой гипотезы.

При дополнительном предположении $P(A) > 0$ *формула Байеса*

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_i P(A|H_i)P(H_i)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

позволяет выразить условные вероятности $P(H_k|A)$ рассматриваемых гипотез при условии, что произошло событие A .

При всей внешней громоздкости формулы Байеса запомнить ее совсем нетрудно. Достаточно обратить внимание на то, что знаменатель в правой части (4.3) представляет собой вероятность $P(A)$, расписанную по формуле полной вероятности в виде суммы, а числитель — то из слагаемых этой суммы, которое соответствует номеру k рассматриваемой гипотезы H_k .

Вероятности $P(H_1), P(H_2), \dots$ называются *априорными вероятностями* гипотез, а условные вероятности $P(H_1|A), P(H_2|A), \dots$ — *апостериорными вероятностями* гипотез* относительно события A .

4.1. Докажите, что формула полной вероятности (4.2) и, соответственно, формула Байеса (4.3) останутся верными, если

* По латыни *a priori* — до (опыта), *a posteriori* — после (опыта).

в (4.1), сохранив первое и третье условие, заменить второе условие любым из следующих условий:

- а) $A \subset \bigcup_i H_i$ (рассматриваемые гипотезы учитывают все случаи, когда происходит событие A);
 б) $\sum_i P(H_i) = 1$ (событие $\bigcup_i H_i$ является почти достоверным).

4.2. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй 8 белых и 4 черных шара, в третьей 2 белых и 13 черных шаров. Из этих трех урн наугад выбирается одна урна и из нее наугад извлекается один шар.

- 1) Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется белым?
- 2) Шар, извлеченный из выбранной урны, оказался белым. Чему равна вероятность того, что из трех урн была выбрана первая (вторая, третья) урна?

Решение. С рассматриваемым событием

$$A = \{\text{из выбранной урны извлечен белый шар}\}$$

естественно связать гипотезы H_1, H_2, H_3 о том, что из данных трех урн выбрана первая, вторая, третья урны соответственно. Эти гипотезы образуют полную группу попарно несовместных событий с положительными вероятностями

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3},$$

так что применима формула полной вероятности

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3).$$

Остается заметить, что

$$P(A|H_1) = \frac{7}{10}, \quad P(A|H_2) = \frac{2}{3}, \quad P(A|H_3) = \frac{2}{15}.$$

- 1) По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{3} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}.$$

2) По формуле Байеса

$$\begin{aligned} P(H_1|A) &= \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)} = \\ &= \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{7 \cdot 1 \cdot 3}{7 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \cdot 2} = \\ &= \frac{21}{45} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

Аналогично (проверьте),

$$\begin{aligned} P(H_2|A) &= \frac{2 \cdot 1 \cdot 10}{7 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}, \\ P(H_3|A) &= \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{7 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{4}{45}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Естественно, что

$$P(H_1|A) + P(H_2|A) + P(H_3|A) = 1.$$

4.3. На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый дает в среднем 0,2 % брака, второй — 0,1 % брака; продукция, поступающая с третьего автомата, не содержит бракованных изделий. На сборку поступило 2000 деталей с первого автомата, 3000 деталей со второго автомата и 5000 деталей с третьего автомата.

1) Найдите вероятность того, что деталь, выбранная наугад из всех этих деталей, будет бракованной.

2) Какова вероятность того, что деталь, выбранная наугад из данных деталей, поступила с первого автомата, если известно, что она является небракованной?

4.4. В специализированную клинику поступают больные с одним из заболеваний A , B и C : в среднем 50 % больных с заболеванием A , 30 % с заболеванием B и 20 % с заболеванием C . Вероятности полного излечения этих болезней равны 0,95, 0,90 и 0,85 соответственно.

1) Какова вероятность того, что выбранный наугад пациент клиники будет вылечен полностью?

2) Больной, поступивший в клинику, был полностью вылечен. Какова вероятность того, что он страдал заболеванием B ?

4.5. Из первой урны, содержащей 8 белых и 4 черных шара, наугад переложили один шар во вторую урну, содержащую 2

белых и 3 черных шара. Затем из второй урны наугад извлекли один шар.

1) Какова вероятность того, что извлеченный из второй урны шар оказался белым?

2) Шар, извлеченный из второй урны, оказался белым. Вычислите вероятность того, что из первой урны во вторую был переложён белый шар.

4.6. Из первой урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наугад переложили два шара во вторую урну, содержащую 2 белых и 6 черных шаров. Затем из второй урны наугад извлекли один шар.

1) Какова вероятность того, что извлеченный из второй урны шар оказался белым?

2) Шар, извлеченный из второй урны, оказался белым. Вычислите вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены шары разного цвета.

4.7. В двух цехах изготавливается однотипная продукция. Производительность первого цеха вдвое выше, чем производительность второго цеха. Изделия высшего качества составляют в среднем для первого цеха 95 %, для второго цеха — 90 %. Из общей продукции этих цехов наугад берется одно изделие.

1) Найти вероятность того, что оно окажется изделием высшего качества.

2) Какова вероятность того, что выбранное изделие изготовлено во втором цехе, если известно, что оно оказалось изделием высшего качества?

Решение. С событием $A = \{\text{выбранное изделие является изделием высшего качества}\}$ свяжем две гипотезы: $H_1 = \{\text{выбранное изделие изготовлено в первом цехе}\}$ и $H_2 = \{\text{выбранное изделие изготовлено во втором цехе}\}$. Данные о производительности цехов определяют априорные вероятности:

$$P(H_1) = \frac{2}{3}, \quad P(H_2) = \frac{1}{3}.$$

Кроме того (также по условию)

$$P(A|H_1) = 0,95, \quad P(A|H_2) = 0,90.$$

Это приводит к следующему результату.

1) По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0,95 + \frac{1}{3} \cdot 0,90 = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}. \end{aligned}$$

2) По формуле Байеса

$$\begin{aligned} P(H_2|A) &= \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} = \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,90}{\frac{2}{3} \cdot 0,95 + \frac{1}{3} \cdot 0,90} = \frac{0,90}{1,90 + 0,90} = \frac{9}{28}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$P(H_1|A) = 1 - P(H_2|A) = \frac{19}{28},$$

и, таким образом, всякое изделие высшего качества с большей вероятностью изготовлено в первом цехе, чем во втором. Это и понятно: первый цех и работает качественнее и продукции выпускает больше, чем второй цех.

4.8. Легковых автомобилей у бензоколонки проезжает вчетверо больше, чем грузовых машин. Вероятность того, что проезжающая автомашина подъедет на заправку, составляет для грузовой машины 0,05, для легковой — 0,15.

1) К месту, где расположена бензоколонка, приближается какая-то машина. Чему равна вероятность того, что она подъедет на заправку?

2) Только что от бензоколонки отъехала заправленная машина. Какова вероятность того, что это был грузовик?

4.9. По каналу связи передается один из сигналов X_1 и X_2 . Сигнал X_2 передается в среднем втрое чаще, чем сигнал X_1 . Вследствие искажений вместо переданного сигнала X_1 на приемнике может быть зафиксирован сигнал X_2 и, наоборот, вместо сигнала X_2 — сигнал X_1 . При этом сигнал X_1 искажается в среднем в 10 % случаев, а сигнал X_2 — в 20 % случаев.

1) По каналу связи передан какой-то сигнал. Какова вероятность того, что на приемнике будет зафиксирован сигнал X_1 ?

2) На приемнике зафиксирован сигнал X_1 . С какой вероятностью этот сигнал и был передан?

4.10. Среди наблюдаемых спиральных галактик 23 % принадлежат подтипу Sa , 31 % — подтипу Sb и 46 % — подтипу Sc . Вероятность вспышки в течение года сверхновой звезды в этих галактиках составляет: 0,0020, 0,0035, и 0,0055 соответственно.

1) Найдите вероятность вспышки в течение года сверхновой звезды в далекой спиральной галактике, подтип которой определить не удастся.

2) В некоторой спиральной галактике обнаружена вспышка сверхновой звезды. С какой вероятностью наблюдаемая при этом галактика принадлежит подтипу: Sa ; Sb ; Sc ?

4.11. На предприятии 96 % выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Используемая схема контроля качества признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную — с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что изделие, признанное в результате контроля пригодным, действительно является таковым?

4.12. Пусть A — произвольное случайное событие ненулевой вероятности, а $H_1, H_2, \dots, H_n$ — полная группа попарно несовместных гипотез. Докажите, что из апостериорных вероятностей

$$P(H_1|A), \quad P(H_2|A), \quad \dots, \quad P(H_n|A)$$

большей является та, которой соответствует большая из вероятностей

$$P(AH_1), \quad P(AH_2), \quad \dots, \quad P(AH_n).$$

Решение. Поскольку при $1 \leq k \leq n$

$$P(H_k|A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)}$$

и $P(A)$ от k не зависит,

$$\max_{1 \leq k \leq n} P(H_k|A) = \frac{1}{P(A)} \max_{1 \leq k \leq n} P(AH_k);$$

отсюда и получаем требуемый результат.

4.13. Вероятности попадания в мишень для трех стрелков равны $4/5$, $3/4$ и $2/3$ соответственно. В результате одновременного выстрела трех стрелков в мишени образовалось две пробоины.

1) Что более вероятно: попал 3-й, наименее опытный стрелок или промахнулся?

2) Какова вероятность того, что 3-й стрелок попал в мишень?

Решение. Со случайным событием $A = \{\text{два попадания при одновременном выстреле трех стрелков}\}$ свяжем две гипотезы:

$H_1 = \{\text{третий стрелок попал в мишень}\},$

$H_2 = \{\text{третий стрелок промахнулся}\}.$

Имеем:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{2}{3}, & P(A|H_1) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{20}; \\ P(H_2) &= \frac{1}{3}, & P(A|H_2) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20}. \end{aligned}$$

1) Из соотношений

$$\begin{aligned} P(AH_1) &= P(A|H_1)P(H_1) = \frac{7}{20} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{60}, \\ P(AH_2) &= P(A|H_2)P(H_2) = \frac{12}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{60}, \end{aligned}$$

на основании задачи 4.12, заключаем, что

$$P(H_1|A) > P(H_2|A).$$

Таким образом, в данных условиях более вероятно, что третий стрелок попал в мишень.

2) Воспользуемся формулой Байеса

$$\begin{aligned} P(H_1|A) &= \frac{P(AH_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} = \\ &= \frac{\frac{14}{60}}{\frac{14}{60} + \frac{12}{60}} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}. \end{aligned}$$

Эти выкладки, кстати, можно рассматривать и как другое решение вопроса, содержащегося в пункте 1.

4.14. Вероятности попадания в цель для трех стрелков равны соответственно $4/5$, $3/4$ и $2/3$. Для поражения цели в нее нужно попасть не менее двух раз. В результате одновременного выстрела трех стрелков цель была поражена.

1) Что более вероятно: попал 3-й, наименее опытный стрелок или промахнулся?

2) Какова вероятность того, что 3-й стрелок попал в цель?

4.15. В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар. Известно, что все возможные предположения о первоначальном числе белых шаров в урне равновероятны. Из урны наугад извлекается один шар.

1) Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым?

2) Какое первоначальное число белых шаров в урне наиболее вероятно, если извлеченный шар оказался белым?

Решение. Пусть $A = \{\text{шар, извлеченный из урны, — белый}\}$, а $H_0, H_1, \dots, H_n$ — гипотезы, заключающиеся в том, что первоначально в урне было $0, 1, 2, \dots, n$ белых шаров соответственно. По условию задачи

$$P(H_0) = P(H_1) = \dots = P(H_n) = \frac{1}{n+1}.$$

С учетом того, что перед извлечением шара из урны в нее был опущен белый шар, находим:

$$P(A|H_0) = \frac{1}{n+1},$$

$$P(A|H_1) = \frac{2}{n+1},$$

...

$$P(A|H_k) = \frac{k+1}{n+1},$$

...

$$P(A|H_n) = \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

Дальнейшее решение очевидно:

$$\begin{aligned} 1) \quad P(A) &= \sum_{i=0}^n P(A|H_i)P(H_i) = \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} (1 + 2 + \dots + (n+1)) = \frac{n+2}{2(n+1)}; \end{aligned}$$

$$2) \quad P(AH_k) = P(H_k)P(A|H_k) = \frac{k+1}{(n+1)^2}.$$

Понятно, что максимум полученной дроби достигается при $k = n$. Этот результат хорошо согласуется с нашими интуитивными представлениями и вполне бы мог быть предсказан без формальных вычислений.

4.16. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй 8 белых и 4 черных шара, в третьей 2 белых и 13 черных шаров. Из этих трех урн наугад выбрана одна урна и из нее наугад извлечен один шар; он оказался белым (событие A). Этот шар возвратился в урну, после чего наугад решили извлечь из нее еще один шар. Какова вероятность того, что и он окажется белым (событие B)?

Решение. Мы приведем два способа вычисления искомой условной вероятности $P(B|A)$.

Способ 1. Исходные данные этой задачи совпадают с исходными данными задачи 4.2. Поэтому ее можно решать по формуле полной вероятности при тех же гипотезах H_1 , H_2 и H_3 , которые были использованы при решении задачи 4.2. Однако теперь вместо априорных вероятностей этих гипотез $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$ должны быть использованы апостериорные вероятности (см. с. 75)

$$P(H_1|A) = \frac{7}{15}, \quad P(H_2|A) = \frac{4}{9}, \quad P(H_3|A) = \frac{4}{15}$$

— в этом суть *байесовского подхода* к решению подобных задач. Таким образом (сравните с решением задачи 4.2),

$$P(B|A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{15} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{15} \cdot \frac{4}{45} = \frac{857}{1350}.$$

Способ 2 не использует ни результата решения задачи 4.2, ни даже самой формулы Байеса. Достаточно дважды воспользоваться формулой полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(AB|H_1)P(H_1) + P(AB|H_2)P(H_2) + P(AB|H_3)P(H_3)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)} = \\ &= \frac{\left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{15}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{857}{1350}. \end{aligned}$$

4.17. В первой урне 10 белых и 5 черных шаров, во второй — 4 белых и 4 черных шара. Наугад выбрана одна из этих урн.

1) Какова вероятность того, что шар, извлеченный наугад из выбранной урны, окажется белым?

2) Какова вероятность того, что из двух урн была выбрана первая, если наугад извлеченный из нее шар оказался белым?

3) Шар, извлеченный наугад из выбранной урны, оказался белым. Какова вероятность того, что белым будет и второй шар, извлеченный из выбранной урны, в предположении, что шары извлекаются из урны без возвращения?

4.18. В первой урне 12 белых и 8 черных шаров, во второй — 10 белых и 20 черных шаров. Наугад выбирается одна из этих урн и из нее наугад извлекается шар, оказавшийся черным. Затем этот шар возвращается в урну и из нее снова наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?

4.19. Чему равна вероятность события A , состоящего в том, что при бросаниях монеты серия ГР впервые появится раньше, чем серия ГГ?

Решение. После появления первого герба монета выпадает гербом или решкой с одинаковыми вероятностями, так что ответ к задаче вполне очевиден: $P(A) = 1/2$.

Приведем и более формальное обоснование. Пусть Γ_k и P_k — события, состоящие в том, что при k -м бросании монета выпадает гербом и, соответственно, решкой, а

$$H_k = P_1 P_2 \cdots P_{k-1} \Gamma_k$$

(герб впервые выпадает при k -м бросании монеты); $k = 1, 2, \dots$. События $H_1, H_2, \dots$ попарно несовместны и

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(H_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

так что можно использовать формулу полной вероятности, приняв эти события за гипотезы (задача 4.1). С учетом того, что $P(A|H_k) = P(P_{k+1}) = 1/2$, это дает:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(A|H_k)P(H_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(P_{k+1})P(H_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} P(H_k) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Примеры специального выбора гипотез

4.20. В первой урне 10 белых и 20 черных шаров, во второй — 10 белых и 10 черных шаров. Из первой урны наугад извлекают 4 шара, из второй — 6 шаров и перекладывают эти шары в третью, пустую урну. Какова вероятность того, что шар, извлеченный наугад из третьей урны, окажется белым?

Решение. Перекладывание четырех шаров из первой урны в третью можно осуществить пятью способами (четыре белых шара; три белых и один черный шар; два белых и два черных шара; один белый и три черных шара; четыре черных шара).

Аналогично, шесть шаров из второй урны в третью можно переложить семью способами ($6+0$; $5+1$; $4+2$; $3+3$; $2+4$; $1+5$; $0+6$). Всего же получается $5 \cdot 7 = 35$ способов (комбинаторный принцип умножения). Каждый из этих 35 способов приводит к простой ситуации. Но это — долгий и неинтересный путь решения задачи.

В данном случае достаточно рассмотреть лишь две гипотезы H_1 и H_2 , соответствующие тому, что взятый из 3-й урны шар первоначально был в 1-й урне и, соответственно, во 2-й урне. При этом $P(H_1) = 0,4$, $P(H_2) = 0,6$ (ведь из 10 шаров, находящихся в третьей урне, четыре шара переложено из первой и шесть шаров — из второй урны). Если теперь A — случайное событие, состоящее в том, что шар, извлеченный из третьей урны, является белым, то

$$P(A|H_1) = \frac{10}{30}, \quad P(A|H_2) = \frac{10}{20}$$

(см. задачу 1.22). Следовательно,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \\ &= \frac{10}{30} \cdot 0,4 + \frac{10}{20} \cdot 0,6 = \frac{13}{30}. \end{aligned}$$

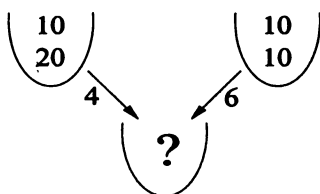


Рис. 4.1.

4.21. В первой урне 4 белых и 6 черных шаров, во второй — 8 белых и 2 черных шара. Из каждой урны наугад удаляют по k шаров, $1 \leq k \leq 9$, а оставшиеся шары сыпают в третью, пустую урну. Какова вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, будет белым?

4.22. В первой урне было 12 белых и 8 черных шаров, во второй — 8 белых и 4 черных шара, в третьей — 10 белых шаров. В четвертую, пустую урну ссыпали выбранные случайно шары: 6 шаров из первой урны, 5 шаров из второй урны и 4 шара из третьей урны. Затем из четвертой урны одновременно извлекли 2 шара; оба они оказались белыми. Чему равна вероятность того, что эти шары первоначально находились:

- а) в одной урне — в первой, или во второй;
- б) в разных урнах?

4.23. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Определить вероятность выигрыша для каждого игрока.

Решение. Эту задачу мы уже решали и даже двумя способами (см. решение задачи 3.71 на с. 63). Небезынтересно рассмотреть еще одно ее решение — с помощью формулы полной вероятности.

Пусть A и B — случайные события, состоящие в том, что выигрывает первый и, соответственно, второй игрок, а x и $1 - x$ — вероятности этих событий:

$$P(A) = x, \quad P(B) = 1 - x.$$

Введем в рассмотрение две гипотезы:

$H_1 = \{\text{при первом подбрасывании монеты выпадет герб}\},$

$H_2 = \{\text{при первом подбрасывании монеты выпадет решка}\}.$

Очевидно, что $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$ и

$$P(A|H_1) = 1, \quad P(A|H_2) = P(B) = 1 - x.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)$$

или, в принятых обозначениях,

$$x = 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 - x) \cdot \frac{1}{2},$$

откуда $x = 2/3$.

4.24. Игральный тетраэдр (задача 3.61) подбрасывают, до тех пор, пока не выпадет трехцветная грань. Какова вероятность того, что тетраэдр придется подбрасывать четное число раз?

4.25. Монету бросают до тех пор, пока герб не выпадет дважды подряд. Найдите вероятность того, что монету придется бросать нечетное число раз.

4.26. Монету бросают до тех пор, пока не будет зафиксирована серия ГРГ (герб–решка–герб). Какова вероятность того, что монету придется бросать нечетное число раз?

Разные задачи

4.27. Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может создавать помехи. За один цикл обзора станция обнаруживает объект с вероятностью p_1 , если помехи не создаются, и с вероятностью p_2 , если они создаются. Вероятность того, что во время цикла обзора помехи будут созданы, равна p_0 и не зависит от того, создаются ли помехи во время других циклов обзора. Чему равна вероятность того, что объект будет обнаружен хотя бы один раз за n циклов обзора?

4.28. Вероятность того, что письмо находится в столе, равна p . Если оно находится в этом столе, то с одинаковыми вероятностями может оказаться в любом из восьми ящиков стола. В проверенных семи ящиках стола письма не обнаружили. Какова вероятность того, что письмо находится в восьмом ящике стола?

4.29. Двумя предприятиями выпускается однотипная продукция. Объем продукции, поставляемый в продажу вторым предприятием, в k раз превышает соответствующий объем продукции первого предприятия. Доля брака в среднем составляет: на первом предприятии 10 %, а на втором — 5 %. Купленное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно было выпущено вторым предприятием? Рассмотрите предельные случаи $k \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow 0$.

4.30. В некоторой местности одинаковое количество мужчин и женщин. Известно также, что 5 % мужчин и 0,25 % женщин — дальтоники. Наугад выбранный житель данной местности страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это — мужчина?

4.31. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпала единица, если известно, что на второй кости выпало очков больше, чем на первой?

4.32. Спутник передает на землю сведения об облачности. Вероятность облачности на территории, наблюдаемой со спутника, равна 0,6. Из-за помех в канале связи правильный прием сообщения со спутника осуществляется лишь с вероятностью 0,95. Сообщение, переданное со спутника, принято как «облачность». Какова вероятность того, что действительно наблюдается облачность?

4.33. По каналу связи передается одно из сообщений: 1111, 2222, 3333. В среднем первое сообщение передается в полтора раза чаще второго и в три раза чаще третьего сообщения. На приемнике вследствие различных помех единица с вероятностью 0,1 заменяется двойкой и с вероятностью 0,1 — тройкой; двойка с вероятностью 0,1 заменяется единицей и с вероятностью 0,1 — тройкой; тройка с вероятностью 0,1 заменяется единицей и с вероятностью 0,1 — двойкой. Искажения разных знаков в сообщении происходят независимо друг от друга. Получено сообщение: 3213. Как решить, какое сообщение в действительности было передано?

4.34. Вероятность безотказного срабатывания реле при отсутствии перегрева и вибрации равна 0,99, при перегреве — 0,95, при вибрации — 0,90, при вибрации и перегреве — 0,80. Рассматривая вибрацию и перегрев как независимые случайные события, найдите:

а) вероятность p_1 отказа реле при работе в жарких странах (вероятность перегрева 0,2, вероятность вибрации 0,1);

б) вероятность p_2 отказа реле при работе в передвижной лаборатории (вероятность вибрации 0,3, вероятность перегрева 0,1).

4.35. В каких пределах могут изменяться вероятности p_1 и p_2 в задаче 4.34, если отказаться от предположения о независимости перегрева и вибрации?

4.36. Вероятность безотказного срабатывания реле при отсутствии перегрева и вибрации равна 0,99, при перегреве — 0,97, при вибрации — 0,95, при вибрации и перегреве — 0,90. В каких пределах заключена вероятность p срабатывания реле в условиях, когда вероятность перегрева составляет 0,6, а вероятность вибрации — 0,8?

4.37. При каждом выстреле, независимо от остальных выстрелов, первый стрелок попадает в мишень с вероятностью p_1 , второй с вероятностью p_2 . Из них наугад выбирается один стрелок. Пусть A и B — события, состоящие в том, что выбранный стрелок попадет в мишень при первом и, соответственно, при втором выстреле. Какими являются события A и B — зависимыми или независимыми?

4.38. При каждом выстреле, независимо от остальных выстрелов, первый стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8, второй с вероятностью 0,7. Из них наугад выбирается

один стрелок. Первый выстрел, произведенный им, оказался успешным. С какой вероятностью успешным будет и второй выстрел, произведенный этим стрелком?

4.39. Имеется N урн, в каждой из которых находится m белых и n черных шаров. Наугад последовательно переключают по одному шару из первой урны во вторую, из второй урны в третью, ..., из $(N - 1)$ -й урны в N -ю, из N -й урны в первую. Найдите вероятность того, что шар, наугад извлеченный после этого из N -й урны, окажется белым.

4.40. (*Игра в «орлянку»*). Игрок выбирает герб или решку, после чего бросается монета. Если выпадает сторона, названная игроком, он выигрывает 1 рубль; в противном случае игрок проигрывает 1 рубль. Обладая начальным капиталом в a рублей, игрок ставит себе целью довести капитал до $b > a$ рублей. Игра заканчивается, когда игрок либо набирает сумму b , либо разоряется, проиграв весь имевшийся у него капитал. Какова вероятность того, что игрок разорится?

§ 5. Схема Бернулли; полиномиальная схема

Формула Бернулли

О *схеме Бернулли* говорят, когда рассматривается последовательность независимых испытаний, каждое из которых завершается наступлением (успех) или ненаступлением (неудача) случайного события A . Вероятность $P_n(m)$ того, что в n -таких испытаниях произойдет ровно m успехов (событие A произойдет ровно m раз) вычисляется по *формуле Бернулли*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (5.1)$$

где $p = P(A)$, $q = 1 - p$. Очевидно,

$$\sum_{m=0}^n P_n(m) = 1. \quad (5.2)$$

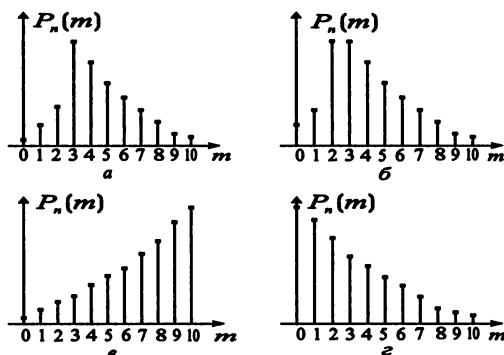
Помимо чисто вероятностных соображений, связанных с формулой (5.2), полезно обратить внимание на то, что эта формула служит следствием формулы бинома Ньютона:

$$\sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = (p + q)^n = 1^n = 1. \quad (5.3)$$

На рис. 5.1, *a*-*г* представлены типичные случаи изменения вероятности

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

в зависимости от $m = 0, 1, 2, \dots, n$ при фиксированных n и p . Первые



два случая отражают ту ситуацию, когда вероятности $P_n(0), P_n(1), P_n(2), \dots, P_n(n)$ следуют сначала возрастаю, а затем убывая. При этом возможны одна или две равные наибольшие вероятности.

В третьем и четвертом случаях вместо двух участков — возрастание и убывание — мы имеем только один: возрастание или убывание (точнее, неубывание или невозрастание).

Рис. 5.1.

Если $np - q$ — не целое число, то наибольшей среди вероятностей $P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(n)$ является вероятность $P_n(m_0)$, где

$$m_0 = [np - q] + 1 \quad (5.4)$$

(символом $[x]$ обозначается целая часть числа x т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x).

Если $np - q$ — целое число, то наибольшими среди указанных вероятностей служат вероятности $P_n(m'_0) = P_n(m''_0)$, где

$$m'_0 = np - q, \quad m''_0 = np - q + 1. \quad (5.5)$$

5.1. Какова вероятность того, что при бросании десяти монет выпадет семь гербов и три решки?

Решение. Здесь речь идет о десяти испытаниях Бернулли с вероятностью успеха (выпадение герба) $p = 1/2$. Следовательно, по формуле Бернулли

$$\begin{aligned} P_{10}(7) &= C_{10}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = C_{10}^7 \frac{1}{2^{10}} = \\ &= C_{10}^3 \frac{1}{2^{10}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{2^{10}} = \frac{15}{2^7} = \frac{15}{128}. \end{aligned}$$

5.2. Бросают пять игральных костей. Чему равна вероятность того, что из пяти выпавших цифр одна — четная, а остальные — нечетные?

5.3. Какова вероятность того, что при бросании семи игральных костей шестерка выпадет трижды?

5.4. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже:

- а) не выйдет ни один из них;
- б) выйдет один из них;
- в) выйдут трое из них.

5.5. В четырех опытах, проводимых по схеме Бернулли, вероятность хотя бы одного успеха равна 0,5904. Что более вероятно в этих четырех опытах: достижение ровно двух успехов или ровно трех успехов?

5.6. Что вероятнее: выиграть у равносильного партнера три партии из четырех или пять партий из восьми? (Ничьи исключаются.)

Решение. В первом случае (три партии из четырех) нужно набрать 75 % очков, во втором случае (пять партий из восьми) — 62,5 % очков. Может показаться, что второй случай легче и поэтому является более вероятным. Однако одержи-

вать верх в борьбе с равносильным партнером в более продолжительном турнире сложнее, чем в менее продолжительном. Непосредственные расчеты дают:

$$\frac{P_4(3)}{P_8(5)} = \frac{C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}{C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{C_4^1 \frac{1}{2^4}}{C_8^3 \frac{1}{2^8}} = \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^4}} = \frac{8}{7} > 1.$$

Следовательно, $P_4(3) > P_8(5)$.

Итак, вероятность выиграть у равносильного партнера три партии из четырех больше, чем вероятность выиграть у него пять партий из восьми.

5.7. Бросают 10 монет. Какое число выпавших гербов более вероятно: 5 или 4?

5.8. Бросают 19 монет. Какое число выпавших гербов более вероятно: 10 или 9?

5.9. Определите вероятность P_n того, что при n подбрасываниях монеты гербов выпадет больше, чем решек. Приведите числовые значения этой вероятности при $n = 5$ и $n = 6$.

5.10. Каждый выпущенный по цели снаряд попадает в нее, независимо от других снарядов, с вероятностью 0,4. Если в цель попал один снаряд, она поражается с вероятностью 0,3; если два снаряда, — с вероятностью 0,7; если три или более снарядов, то цель поражается наверняка. Найдите вероятность поражения цели при условии, что по ней выпущено: а) 3 снаряда; б) 4 снаряда.

Решение (частично).

а) Пусть A — событие, состоящее в том, что в результате трех выстрелов цель будет поражена. Рассмотрим три гипотезы:

$H_1 = \{\text{в цель попал один снаряд}\},$

$H_2 = \{\text{в цель попало два снаряда}\},$

$H_3 = \{\text{в цель попало три снаряда}\}.$

Тогда

$$P(H_1) = C_3^1 \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 = 0,432;$$

$$P(H_2) = C_3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,288;$$

$$P(H_3) = C_3^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^0 = 0,064.$$

По условию задачи

$$P(A|H_1) = 0,3; \quad P(A|H_2) = 0,7; \quad P(A|H_3) = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) = \\ &= 0,3 \cdot 0,432 + 0,7 \cdot 0,288 + 1 \cdot 0,064 = 0,3952. \end{aligned}$$

5.11. Цель, по которой ведется стрельба, состоит из двух различных по уязвимости блоков. Для поражения цели достаточно одного попадания в первый блок или двух попаданий во второй блок. Вероятность попадания в цель при одном выстреле p_0 . Для каждого попавшего в цель снаряда вероятность попадания в первый блок равна p_1 , а во второй $p_2 = 1 - p_1$. По цели производится три выстрела. Какова вероятность того, что цель будет поражена?

5.12. По данным технологического контроля в среднем 2% выпущенных станков нуждаются в дополнительной регулировке. Какова вероятность того, что из шести выпущенных станков не менее двух потребуют дополнительной регулировки?

Решение. В этой задаче $n = 6$, $p = 0,02$, и, следовательно,

$$P_6(m \geq 2) = P_6(2) + P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6).$$

Вычисления сократятся, если использовать событие $\{m < 2\}$, противоположное событию $\{m \geq 2\}$. Имеем:

$$\begin{aligned} P_6(m \geq 2) &= 1 - P_6(m < 2) = 1 - P_6(0) - P_6(1) = \\ &= 1 - 0,98^6 - C_6^1 \cdot 0,02 \cdot 0,98^5 \approx 0,006. \end{aligned}$$

5.13. Перерасход горючего в течение рабочего дня наблюдается в среднем по парку у 20% машин. Найдите вероятность того, что из десяти вышедших на линию машин перерасход горючего произойдет не менее, чем у трех машин.

5.14. Каждый билет лотереи независимо от остальных билетов выигрывает с вероятностью 0,001. У меня 20 билетов. Чему равна вероятность того, что я выиграю:

- а) хотя бы по одному билету;
- б) не менее, чем по двум билетам?

5.15. Решите задачу 3.18 заново — с помощью формулы Бернулли.

5.16. При каждом выстреле независимо от остальных выстрелов стрелок попадает в мишень с вероятностью p . Какова вероятность того, что в результате шести выстрелов произойдет не менее двух попаданий и хотя бы один промах?

5.17. Вероятность попадания стрелка в десятку равна 0,7, в девятку — 0,3. Чему равна вероятность того, что при трех выстрелах стрелок наберет не менее 29 очков?

5.18. Для нормального обслуживания пассажиров на данном маршруте требуется 20 автобусов. Всего же для этой цели выделено 22 автобуса с учетом того, что каждый из них, независимо от остальных, выходит на линию лишь с вероятностью 0,95. С какой вероятностью обслуживание пассажиров на данном маршруте будет нормальным?

5.19. На испытательном стенде было установлено 10 приборов. Известно, что каждый из них, независимо от остальных приборов, во время испытания выходит из строя с вероятностью 0,15. Вычислить:

1) вероятность того, что за время испытаний отказало три прибора;

2) условную вероятность того, что отказало три прибора, если известно, что не все приборы выдержали испытание.

Решение. Здесь речь идет о десяти испытаниях, проводимых по схеме Бернулли с вероятностью успеха $p = 0,15$ в отдельном испытании.

$$1) P_{10}(3) = C_{10}^3 \cdot 0,15^3 \cdot 0,85^7 \approx 0,13.$$

$$2) P_{10}(m = 3 | m \geq 1) = \frac{P_{10}(m = 3, m \geq 1)}{P_{10}(m \geq 1)} = \\ = \frac{P_{10}(3)}{1 - P_{10}(0)} \approx \frac{0,13}{1 - 0,85^{10}} \approx 0,15.$$

5.20. Подбросили 6 игральные кости. Вычислите:

а) вероятность того, что цифра 6 выпала дважды;

б) вероятность того, что цифра 6 выпала дважды, если известно, что она выпала по крайней мере на одной из игровых костей.

5.21. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 6 человек. Известно, что по крайней мере один из них вышел на 7-м этаже. С какой вероятностью на этом этаже из лифта (из числа данных шести пассажиров):

а) вышел лишь один человек;

б) вышли два человека;

в) вышли не менее двух человек;

г) вышли шесть человек?

5.22. Четыре сестры моют посуду по очереди. Из четырех разбитых тарелок три приходится на долю младшей сестры, и поэтому ее называют неуклюжей. Можно ли оправдать младшую сестру, приписывая ее неудачи чистой случайности?

Решение. Будем считать, что каждая разбитая тарелка с одинаковыми вероятностями $1/4$ могла быть разбита первой, второй, третьей, четвертой сестрой. Тогда вероятность того, что из четырех разбитых тарелок три — на счету одной, вполне определенной сестры, равна

$$p_1 = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{64}.$$

А вероятность того, что из четырех разбитых тарелок три были разбиты какой-нибудь одной из сестер, равна

$$p_2 = 4p_1 = \frac{3}{16}.$$

Таким образом, в задаче описана ситуация, которая в случае аккуратности всех сестер могла бы произойти лишь с вероятностью $3/16$. Можно считать (но это дело условное), что эта вероятность достаточно мала; и уж раз описанное событие произошло, его следует объяснить именно неуклюжестью младшей сестры.

5.23. На молодежную газету в среднем подписывается 25 % студентов. Чему равно наиболее вероятное число подписчиков этой газеты на потоке, насчитывающем:

а) 100 студентов; б) 103 студента?

Решение. В рассматриваемом случае $p = 0,25$, $q = 0,75$.

а) При $n = 100$

$$np - q = 25 - 0,75 = 24,25.$$

Поскольку это число не целое,

$$m_0 = [np - q] + 1 = 24 + 1 = 25.$$

б) При $n = 103$

$$np - q = 25,75 - 0,75 = 25.$$

Следовательно, по формулам (5.5), наиболее вероятных значений — два:

$$m'_0 = 25, \quad m''_0 = 26.$$

5.24. На данной остановке данным маршрутом автобуса пользуются 20 человек, причем каждый из них, независимо от остальных, опаздывает на автобус с вероятностью p . Чему равно наиболее вероятное число пассажиров, заполняющих автобус данного маршрута на данной остановке, если:

а) $p = 1/10$; б) $p = 1/7$?

5.25. В круг вписан квадрат. Чему равна вероятность того, что из четырех точек, брошенных наугад в данный круг, только одна попадет внутрь квадрата? Каково наиболее вероятное число точек, попавших в квадрат?

Решение. Вероятность p попадания точки внутрь квадрата (рис. 5.2) вычисляется следующим образом:

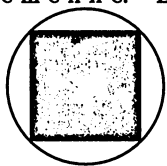


Рис. 5.2.

$$p = \frac{S_{\text{кв.}}}{S_{\text{кр.}}} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$$

(r — радиус круга). Отсюда

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^3 \approx 0,122.$$

Далее,

$$np - q = 4 \cdot \frac{2}{\pi} - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 2,183...;$$

$$m_0 = [np - q] + 1 = 3.$$

Итак, наиболее вероятное число точек, попадающих внутрь квадрата, равно 3.

5.26. В круг вписан правильный треугольник. Какова вероятность того, что из пяти точек, брошенных наугад в данный круг, ровно три окажутся внутри треугольника? Каково наиболее вероятное число точек, не попадающих внутрь треугольника?

5.27. Прибор выходит из строя, если перегорит не менее пяти ламп первого типа или не менее двух ламп второго типа. Из всех перегорающих ламп в среднем лампы первого типа составляют 70 %, а лампы второго типа — 30 %. Известно, что в приборе перегорело пять ламп.

а) Какое сочетание перегоревших ламп первого и второго типа является наиболее вероятным?

б) Какова вероятность того, что прибор вышел из строя?

5.28. На выходе логического элемента может оказаться либо знак 0, либо знак 1; верный знак появляется с вероятностью p (надежность элемента). Для повышения надежности логические элементы резервируют по *схеме голосования*: нечетное число элементов соединяют параллельно, а выходной знак определяется (специальным прибором — элементом голосования) по большинству знаков на выходе всех элементов. Вычислите надежность схемы голосования, представленной на рис. 5.3, а, если надежность элемента голосования равна: а) 1; б) p' .

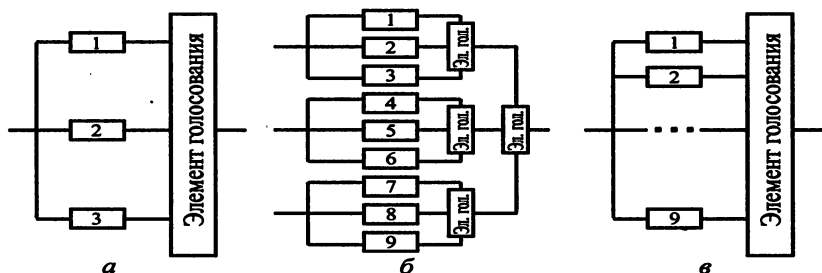


Рис. 5.3.

5.29. Какая из двух схем голосования, представленных на рис. 5.3, б и рис. 5.3, в, более надежна при абсолютно надежных элементах голосования? Надежности всех девяти логических элементов одинаковы и равны $p = 0,90$.

5.30. Зачет по теории вероятностей заканчивается для студента положительно, если будет решено не менее половины предложенных задач. Каждую из них, независимо от остальных задач, студент решает лишь с вероятностью p . Пусть α_n — вероятность того, что студент, получив n задач, сдаст зачет. Докажите, что

$$\alpha_{2n+1} - \alpha_{2n-1} = C_{2n-1}^n (pq)^n (2p - 1),$$

где $q = 1 - p$. Таким образом, при нечетном числе задач сильным студентам ($1/2 < p < 1$) выгодно, когда предлагается больше задач, слабым студентам ($0 < p < 1/2$) выгодно, когда предлагается меньше задач, средним студентам ($p = 1/2$) — все равно: они сдают зачет с вероятностью $1/2$.

5.31. В условиях предыдущей задачи найдите

$$\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{2n-1}$$

для каждого из трех случаев: $1/2 < p < 1$, $0 < p < 1/2$, $p = 1/2$. Предварительно попытайтесь «угадать» ответ.

5.32. При каждом выстреле независимо от остальных выстрелов стрелок попадает в цель с вероятностью $0,75$. Для поражения цели в нее нужно попасть хотя бы два раза. В результате пяти выстрелов цель была поражена. С какой вероятностью удачными оказались не менее четырех выстрелов?

5.33. При каждом выстреле независимо от остальных выстрелов стрелок попадает в цель с вероятностью p . Вычислите

вероятность того, что второй из пяти произведенных выстрелов оказался неудачным, если

- а) стрелок попал в мишень ровно 3 раза;
- б) не все выстрелы оказались успешными.

Число испытаний до k -го успеха

5.34. Стрелок стреляет по мишени до тех пор, пока общее число промахов не станет равным 3. Вероятность промаха при одном выстреле равна 0,2. Какова вероятность того, что:

- а) стрелок израсходует ровно семь патронов;
- б) стрелку хватит пяти патронов?

Решение. а) Ошибочно было бы считать, что речь идет о семи выстрелах, три из которых оказываются неудачными. По условию задачи последний, седьмой выстрел должен дать промах (вероятность этого равна 0,2); остальные два промаха могут случиться произвольно в шести предыдущих выстрелах (вероятность этого равна $C_6^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^4$). Таким образом, искомая вероятность равна

$$(C_6^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^4) \cdot 0,2 = C_6^2 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^4 = 0,049152.$$

б) В данном случае обойтись пятью патронами — это значит израсходовать или 3, или 4, или 5 патронов. Поэтому для искомой вероятности p получаем:

$$p = C_2^2 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^0 + C_3^2 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8 + C_4^2 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = 0,05792.$$

Существует и другой (возможно, более простой) способ решения данного вопроса. В условиях задачи стрелку хватит пяти патронов тогда и только тогда, когда в результате пяти выстрелов произойдет не менее трех промахов (т. е., три, четыре или пять промахов). Следовательно,

$$p = C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 + C_5^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8 + C_5^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^0 = 0,05792.$$

5.35. Игральную кость бросают до тех пор, пока суммарное число выпавших шестерок не достигнет трех. Какова вероятность того, что игральную кость придется бросать ровно 8 раз?

5.36. Каждая партия двух равносильных игроков заканчивается победой одного из них, в результате чего он получает одно очко. Турнир продолжается до тех пор, пока кто-нибудь из них не наберет 6 очков. Какова вероятность того, что турнир закончится победой кого-то из игроков со счетом:

- а) 6 : 5; б) 6 : 4; в) 6 : 1?

Сравните найденные вероятности и прокомментируйте результат, используя интуитивные соображения.

5.37. Каждая партия двух равносильных игроков заканчивается победой одного из них, в результате чего он получает одно очко. Турнир продолжается до тех пор, пока кто-нибудь из них не наберет n очков. Какой окончательный счет очков является наиболее вероятным и какой — наименее вероятным?

5.38. Каждая партия двух игроков заканчивается с вероятностью 0,6 в пользу старшего игрока и с вероятностью 0,4 в пользу младшего игрока. Матч продолжается до тех пор, пока кто-нибудь из них не наберет 6 очков. Какова вероятность того, что победитель опередит соперника:

- а) ровно на одно очко;
- б) ровно на два очка?

5.39. В условиях задачи 5.38 в первых восьми партиях старший игрок одержал 5 побед. Какова вероятность того, что:

- а) он начал турнир с поражения;
- б) свою первую победу он одержал в третьей партии?

Полиномиальная формула

Полиномиальная схема служит обобщением схемы Бернулли на случай, когда каждое испытание имеет произвольное число $k > 2$ исходов $A_1, A_2, \dots, A_k$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_k$ соответственно, $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$. При этом вероятность $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ того, что в n испытаниях исход A_1 будет наблюдаться n_1 раз, исход A_2 — n_2 раз, ..., исход A_k — n_k раз, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, определяется *полиномиальной формулой*

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}. \quad (5.6)$$

Полиномиальная схема дает возможность формализовать понятие *случайных чисел*. Под n однозначными случайными числами подразумеваются исходы n испытаний, проводимых по полиномиальной схеме, каждое из которых с одинаковыми вероятностями приводит к одному из десяти исходов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

5.40. Подбрасывают три игральные кости. Какова вероятность того, что произведение всех выпавших цифр будет равно: а) 20; б) 24?

Решение. Подбрасывание игральной кости можно рассматривать как опыт с равновероятными исходами: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

- а) Число 20 может быть представлено произведением трех

множителей из числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 двумя способами:

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 1 \cdot 4 \cdot 5.$$

Первый из них имеет вероятность

$$P_3(0, 2, 0, 0, 1, 0) = \frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot (0!)^4} \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{3}{216},$$

второй — вероятность

$$P_3(1, 0, 0, 1, 1, 0) = \frac{3!}{(1!)^3 \cdot (0!)^3} \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{6}{216}.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$p = \frac{3}{216} + \frac{6}{216} = \frac{9}{216} = \frac{1}{24}.$$

б) Число 24 представляется произведением трех множителей из числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 тремя способами:

$$24 = 6 \cdot 4 \cdot 1 = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2.$$

При этом (в использованных обозначениях разберитесь самостоятельно)

$$P(6 \cdot 4 \cdot 1) = P_3(1, 0, 0, 1, 0, 1) = \frac{3!}{(1!)^3 \cdot (0!)^3} \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{6}{216},$$

$$P(6 \cdot 2 \cdot 2) = P_3(0, 2, 0, 0, 0, 1) = \frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot (0!)^4} \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{3}{216},$$

$$P(4 \cdot 3 \cdot 2) = P_3(0, 1, 1, 1, 0, 0) = \frac{3!}{(1!)^3 \cdot (0!)^3} \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{6}{216}.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$p = \frac{6}{216} + \frac{3}{216} + \frac{6}{216} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}.$$

5.41. Какова вероятность того, что при подбрасывании двенадцати игральных костей каждая из цифр 1, 2, ..., 6 выпадет дважды?

5.42. Вычислите вероятность того, что среди десяти однозначных случайных чисел:

- нет ни одного четного числа;
- четных чисел в 4 раза больше, чем нечетных;
- четных и нечетных чисел — одинаковое количество;
- каждое число либо меньше 3, либо больше 6;
- нет совпадающих чисел;
- четыре числа не превосходят 3 и семь чисел не превосходят 6.

5.43. В интервале (1, 5) наугад выбирают пять точек. Определите вероятность того, что из них:

- две приходятся на интервал (1, 2) и три на интервал (3, 5);
- две приходятся на интервал (1, 3) и три на интервал (2, 5);
- на интервалы (1, 3) и (2, 5) приходится одинаковое количество точек;

г) на интервал (1, 2) приходится больше точек, чем на интервал (4, 5).

5.44. Квадрат, вписанный в круг, разбивает его на пять частей. В данном круге наугад выбирают пять точек. Какова вероятность того, что эти точки распределятся по одной в каждой из данных пяти частей?

5.45. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 9 человек. Какова вероятность того, что при отсутствии других пассажиров лифт, поднимаясь вверх, будет останавливаться на каждом этаже?

Решение. Каждый из девяти человек, находящихся в лифте, независимо от остальных, с одинаковыми вероятностями выходит на любом из восьми этажей (2, 3, ..., 9). Поэтому можно говорить о том, что опыт, имеющий 8 равновероятных исходов, повторяется 9 раз. Интересующее нас событие — лифт остановится на каждом из указанных восьми этажей — можно рассматривать как объединение

$$\begin{aligned} & \{2, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \cup \\ & \cup \{1, 2, 1, 1, 1, 1, 1\} \cup \\ & \cup \{1, 1, 2, 1, 1, 1, 1\} \cup \\ & \dots \\ & \cup \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2\} \end{aligned}$$

восьми попарно несовместных событий $B_2, B_3, \dots, B_9$; событие B_k , $2 \leq k \leq 9$, состоит в том, что на k -м этаже выйдут двое, а на каждом из остальных этажей — по одному человеку. Имеем:

$$P(B_k) = \frac{9!}{2! \cdot (1!)^7} \cdot \frac{1}{8^9} = \frac{9!}{2 \cdot 8^9};$$

поэтому искомая вероятность

$$p = 8P(B_k) = \frac{8 \cdot 9!}{2 \cdot 8^9} = \frac{9!}{2 \cdot 8^8} = \frac{9!}{2^{25}} \approx 0,011.$$

5.46. В урне 10 белых, 2 синих и 3 красных шара. Из нее наугад достают шар, фиксируют его цвет и возвращают в урну, повторяя этот опыт 15 раз. Какова вероятность того, что в результате этого белый шар будет зафиксирован 10 раз, синий — 2 раза и красный — 3 раза?

5.47. В задаче 5.46 опыт повторяется до тех пор, пока общее число красных шаров не станет равным 3. Какова вероятность того, что при этом будет зафиксировано 10 белых и 2 синих шара?

5.48. При прохождении порога байдарка не получает повреждений с вероятностью 0,6, получает серьезные повреждения с вероятностью 0,3 и полностью ломается с вероятностью 0,1. Два серьезных повреждения приводят к полной поломке.

Какова вероятность того, что при прохождении пяти порогов байдарка не будет полностью сломана?

5.49. Докажите, что если в формуле (5.6) числа $n_1^0, n_2^0, \dots, n_k^0$ доставляют максимум вероятности $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$, то

$$|n_i^0 - np_i| \leq 1$$

для всякого $i = 1, 2, \dots, k$.

5.50. Каждую партию с шахматистом B , независимо от остальных партий, шахматист A выигрывает с вероятностью $1/6$, проигрывает с вероятностью $1/5$ и сводит вничью с вероятностью $19/30$. Соперники играют матч из трех партий; пусть ξ — число побед шахматиста A , η — число его поражений и ζ — число ничьих в этом матче.

1) Какой исход матча (ξ, η, ζ) является наиболее вероятным?

2) Вычислите наиболее вероятное значение для каждой из величин ξ, η, ζ и сопоставьте их сумму с числом партий в матче.

Разные задачи

5.51. На факультете в среднем 10 % студентов — отличники. Определите наиболее вероятное число отличников в группе из девятнадцати студентов.

5.52. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Какова вероятность того, что на седьмом этаже выйдут трое из них?

5.53. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже выйдет один из них, а на 7-м этаже — двое.

5.54. Вычислите вероятность того, что в испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $p = 0,4$ три (суммарно) успеха произойдут раньше, чем пять (суммарно) неудач.

5.55. Один игрок бросает шесть игровых костей и выигрывает, если выпадет хотя бы одна единица. Другой игрок бросает двенадцать игровых костей и выигрывает, если выпадут хотя бы две единицы. У кого больше шансов выиграть?

5.56. Монету бросают до тех пор, пока общее число выпавших гербов не станет равным пяти. Что более вероятно: монету придется бросать ровно девять или ровно десять раз?

5.57. При передаче сообщения по каналу связи отдельные знаки этого сообщения независимо друг от друга искажаются

с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что сообщение из пяти знаков:

- а) не содержит ни одного искаженного знака;
- б) содержит не менее двух искаженных знаков;
- в) содержит искаженных знаков больше, чем неискаженных?

5.58. Каждая партия между шахматистами A и B , независимо от остальных партий, заканчивается победой A , победой B или вничью с вероятностями 0,3; 0,2; 0,5 соответственно. Вычислите вероятность того, что в турнире из шести партий:

- а) не менее двух партий закончится вничью;
- б) шахматист B одержит не менее двух побед;
- в) каждый из шахматистов одержит не менее двух побед;
- г) победит шахматист A ;
- д) победит шахматист B .

5.59. Из всех подмножеств множества $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ наугад по схеме выбора с возвращением выбирают два подмножества. Какова вероятность того, что:

- а) выбранные подмножества не имеют общих элементов;
- б) выбранные подмножества имеют ровно k общих элементов;
- в) одно из выбранных множеств служит подмножеством другого множества?

5.60. Какова вероятность того, что в компании из шести студентов найдется хотя бы один студент, родившийся летом, хотя бы один студент, родившийся осенью, хотя бы один студент, родившийся зимой, и хотя бы один студент, родившийся весной?

5.61. Каждая партия между двумя шахматистами, независимо от остальных партий, с вероятностью $1/3$ заканчивается вничью, с вероятностью $1/3$ победой одного из них и с вероятностью $1/3$ победой другого. За победу победителю начисляется 1 очко; в случае ничьей каждый из шахматистов получает по 0,5 очка. Партнеры договорились провести матч из шести партий. Чему равна вероятность того, что матч закончится вничью?

5.62. Каждая партия между равносильными партнерами заканчивается победой одного из них, так что ничьи исключены. Однако ничейным может оказаться общий счет. При каком числе сыгранных партий — 100 или 200 — общий ничейный счет более вероятен? (Сначала рекомендуется решить задачу интуитивно и уж затем привести формальные выкладки.)

5.63. Докажите, что при $0 < p < 1$ и фиксированном $m \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = 0.$$

Часть II

Случайные величины

§ 6. Дискретные случайные величины

Случайная величина и ее функция распределения

Первоначальное представление о случайных величинах можно составить по таким примерам, как число выстрелов по мишени до первого промаха, количество космических частиц, попадающих на заданный участок земной поверхности в определенное время, ошибка измерения дальности или какой-то иной величины, время безотказной работы технического устройства и т. п.

Приводимое ниже формальное определение вскрывает не только случайный характер описываемых величин, но и учитывает необходимость вычисления связанных с ними вероятностей. Естественно, что такое определение должно базироваться на понятии вероятностного пространства.

О п р е д е л е н и е 6.1. Случайной величиной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется любая вещественнозначная функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная для всякого $\omega \in \Omega$ и такая, что

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A} \quad (6.1)$$

при всяком вещественном x .

Условие (6.1) означает, что подмножество множества Ω , на котором $\xi(\omega) < x$, принадлежит σ -алгебре случайных событий $\mathcal{A}$, т. е. является случайным событием. В дальнейшем это событие мы будем записывать в виде $\{\xi < x\}$, а его вероятность — в виде $P(\xi < x)$.

О п р е д е л е н и е 6.2. Функцией распределения случайной величины ξ называется функция

$$F(x) = P(\xi < x), \quad (6.2)$$

заданная на всей числовой прямой, $x \in \mathbb{R}$.

Функция распределения $F(x)$, как и всякая вероятность, заключена в пределах от 0 до 1:

$$0 \leq F(x) \leq 1. \quad (6.3)$$

Т е о р е м а 6.1. Функция распределения обладает следующими свойствами:

- 1) $(x_1 < x_2) \implies (F(x_1) \leq F(x_2))$
(монотонное неубывание);
- 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ (x < c)}} F(x) = F(c)$, или $F(c-0) = F(c)$
(непрерывность слева);
- 3) $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,
 $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
(поведение на бесконечности).

Приведенные три свойства являются *характеристическими* для функции распределения. Это означает следующее.

Т е о р е м а 6.2. Всякую функцию $F(x)$, обладающую приведенными выше тремя свойствами, можно рассматривать как функцию распределения некоторой случайной величины.

На рис. 6.1 графически представлено несколько типичных функций распределения.

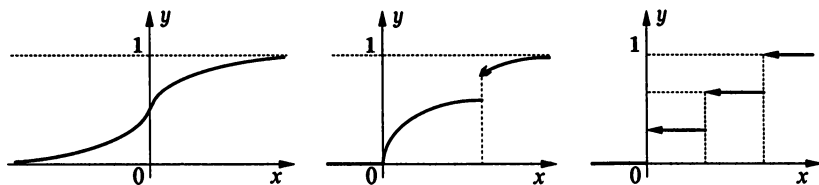


Рис. 6.1.

Знание функции распределения случайной величины дает возможность вычислять вероятности любых событий, связанных с этой случайной величиной.

Т е о р е м а 6.3. Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ , то при $a < b$

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a). \quad (6.4)$$

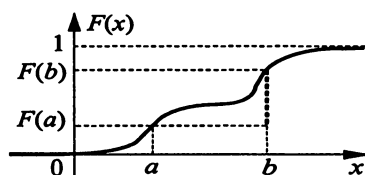


Рис. 6.2.

Таким образом, вероятность попадания случайной величины ξ в полуинтервал $[a, b)$ (левый конец включается, а правый исключается — это важно!) равна приращению функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ (см. рис. 6.2).

Теорема 6.4. Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ и c — произвольное вещественное число, то

$$P(\xi = c) = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ (x > c)}} (F(x) - F(c)),$$

или

$$P(\xi = c) = F(c+0) - F(c). \quad (6.5)$$

Принимая во внимание, что $F(c+0) - F(c)$ есть скачок функции $F(x)$ в точке $x = c$, теорему 6.4 можно привести в следующем виде.

Каждое свое значение c случайная величина ξ принимает с вероятностью, равной скачку ее функции распределения $F(x)$ в точке $x = c$.

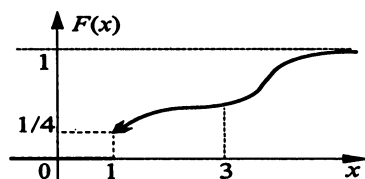


Рис. 6.3.

Так, для случайной величины ξ , функция распределения $F(x)$ которой представлена графически на рис. 6.3,

$$\begin{aligned} P(\xi = 1) &= 1/4, \\ P(\xi = 3) &= 0. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Функция распределения иногда определяется не формулой (6.2), а формулой

$$F(x) = P(\xi \leq x)$$

(нестрогое неравенство). В этом случае она оказывается непрерывной справа (а не слева как у нас), а вместо (6.4) и (6.5) получается, что

$$\begin{aligned} P(a < \xi \leq b) &= F(b) - F(a), \\ P(\xi = c) &= F(c) - F(c-0). \end{aligned}$$

Определение функции распределения в точках разрыва не влияет на содержательные утверждения теории вероятностей.

Общие понятия, связанные с дискретными случайными величинами

Случайная величина ξ называется *дискретной* (имеет *дискретное распределение вероятностей*), если множество ее значений конечно $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ или счетно $\{x_1, x_2, \dots\}$.

Таблица

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

в верхней строке которой перечислены все значения величины ξ , а в нижней строке соответствующие им вероятности

$$p_n = P(\xi = x_n), \quad (6.7)$$

называется *законом распределения* случайной величины ξ , или *рядом распределения* случайной величины ξ (последний термин используется, как правило, в случае монотонной последовательности $\{x_n\}$). При этом $x_1, x_2, \dots$ могут быть любыми попарно различными числами; а вероятности $p_1, p_2, \dots$ должны удовлетворять условиям

$$p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1. \quad (6.8)$$

(неотрицательность и нормированность вероятности).

Функция распределения $F(x)$ рассматриваемой случайной величины ξ может быть записана в виде

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{k: x_k < x} p_k. \quad (6.9)$$

Эта функция является кусочно постоянной. Если среди значений $x_1, x_2, \dots$ есть наименьшее и наибольшее значения, то $F(x) = 0$ при $x \leq \min(x_1, x_2, \dots)$ и $F(x) = 1$ при $x > \max(x_1, x_2, \dots)$; в точках $x_1, x_2, \dots$ функция $F(x)$ претерпевает разрывы со скачками, равными $p_1, p_2, \dots$ соответственно. В качестве примера на рис. 6.4 представлен график функции распределения случайной величины

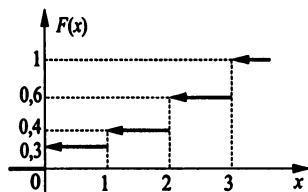


Рис. 6.4.

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо учитывать, что один и тот же закон распределения вероятностей могут иметь разные случайные величины. Пусть, например, ξ и η — число гербов и, соответственно, число решек, выпадающих при одном подбрасывании монеты. Тогда $P(\xi \neq \eta) = 1$; тем не менее, каждая из величин ξ и η имеет ряд распределения

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

и функцию распределения (см. рис. 6.5)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \leq 0, \\ 1/2 & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

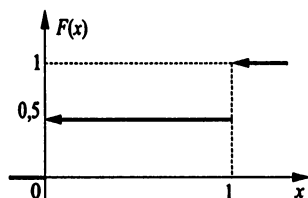


Рис. 6.5.

Таким образом, функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ является исчерпывающей характеристикой распределения вероятностей этой величины, но не самой этой величины.

Если для распределения (6.6) ряд $\sum_k x_k p_k$ является абсолютно сходящимся, то его сумма доставляет *среднее значение*, или *математическое ожидание* случайной величины ξ , которое мы будем обозначать $M\xi$:

$$M\xi = \sum_k x_k p_k. \quad (6.10)$$

В случае, когда приведенный ряд расходится или сходится, но не абсолютно, говорят, что математического ожидания случайной величины ξ не существует.

При достаточно слабых ограничениях, накладываемых на функцию $g(x)$ (например, $g(x)$ — непрерывная или кусочно-непрерывная функция), можно говорить о случайной величине $g(\xi)$. Ее математическое ожидание может быть вычислено по формуле

$$Mg(\xi) = \sum_k g(x_k) p_k \quad (6.11)$$

в предположении, что ряд в правой части этой формулы сходится абсолютно. В частности, для всякого $r = 1, 2, 3, \dots$

$$a_r = M\xi^r = \sum_k x_k^r p_k, \quad (6.12)$$

$$\alpha_r = M[(\xi - M\xi)]^r = \sum_k (x_k - a_1)^r p_k, \quad (6.13)$$

$$b_r = M|\xi|^r = \sum_k |x_k|^r p_k, \quad (6.14)$$

$$\beta_r = M|\xi - M\xi|^r = \sum_k |x_k - a_1|^r p_k. \quad (6.15)$$

Неслучайные величины $a_r, \alpha_r, b_r, \beta_r, r = 1, 2, \dots$, называются соответственно *начальным, центральным, абсолютным, абсолютным центральным* моментами r -го порядка случайной величины ξ .

Начальный момент первого порядка, как уже отмечалось, представляет собой математическое ожидание случайной величины ξ . Центральный

момент второго порядка случайной величины ξ называется *дисперсией* этой величины и обозначается $D\xi$:

$$D\xi = M[(\xi - M\xi)^2]. \quad (6.16)$$

Математическое ожидание случайной величины может быть любым действительным числом — положительным, отрицательным, равным нулю. Дисперсия же случайной величины всегда неотрицательна:

$$D\xi \geq 0, \quad (6.17)$$

причем равенство в (6.17) достигается тогда и только тогда, когда случайная величина ξ принимает некоторое значение C с вероятностью 1:

$$P(\xi = C) = 1.$$

Среднее значение (математическое ожидание) такой величины, естественно, равно C , так что

$$MC = C, \quad DC = 0. \quad (6.18)$$

Неотрицательная величина

$$\sigma = \sqrt{D\xi} \quad (6.19)$$

называется *среднеквадратическим*, или *стандартным отклонением* случайной величины ξ . Эту величину удобно использовать в качестве единицы измерения отклонений значений случайной величины ξ от их среднего значения.

Важным свойством математического ожидания служит *свойство линейности*, записываемое как:

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta, \quad (6.20)$$

$$M(\lambda\xi) = \lambda M\xi \quad (6.21)$$

— для любых случайных величин ξ и η , для которых существуют $M\xi$ и $M\eta$, и для любого действительного числа λ . Формула (6.20) выражает *аддитивность* математического ожидания.

Формулы (6.20) и (6.21) допускают следующее естественное обобщение:

$$M(\lambda_0 + \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \dots + \lambda_n\xi_n) = \lambda_0 + \lambda_1 M\xi_1 + \lambda_2 M\xi_2 + \dots + \lambda_n M\xi_n. \quad (6.22)$$

Из определения (6.16) дисперсии и свойств (6.18)–(6.22) математического ожидания легко выводится формула

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2, \quad (6.23)$$

которую часто используют для вычисления $D\xi$.

Дисперсия суммы случайных величин, вообще говоря, не равна сумме их дисперсий. Но для *независимых случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n \quad (6.24)$$

(*аддитивное свойство дисперсии*). При этом под независимыми случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ подразумеваются такие случайные величины,

для которых независимы случайные события $\{\xi_1 < x_1\}, \{\xi_2 < x_2\}, \dots, \{\xi_n < x_n\}$ — при любых $x_1, x_2, \dots, x_n$. Напомним, что в отличие от аддитивности дисперсии аддитивность математического ожидания не требует независимости слагаемых.

Для всяких действительных чисел C и λ

$$D(\xi + C) = D\xi, \quad (6.25)$$

$$D(\lambda\xi) = \lambda^2 D\xi, \quad (6.26)$$

в предположении, что $D\xi < \infty$.

При рассмотрении случайной величины ξ часто приходится обращаться к случайным величинам

$$\overset{\circ}{\xi} = \xi - M\xi, \quad \tilde{\xi} = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \quad (6.27)$$

(при $0 < D\xi < \infty$). Очевидно, что

$$M \overset{\circ}{\xi} = M\tilde{\xi} = 0, \quad D \overset{\circ}{\xi} = D\xi, \quad D\tilde{\xi} = 1. \quad (6.28)$$

Случайная величина $\overset{\circ}{\xi}$ (иногда, как более удобное, используется обозначение ξ^0) называется *центрированной*, а случайная величина $\tilde{\xi}$ — *нормированной* по отношению к ξ .

В приложениях особое значение имеют неотрицательные целочисленные случайные величины, т. е. величины вида

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}.$$

Для всякой такой случайной величины ξ

$$\left\{ \begin{aligned} M\xi &= \sum_k k p_k, \\ M\xi^2 &= \sum_k k^2 p_k, \\ D\xi &= \sum_k (k - M\xi)^2 p_k = \\ &= \sum_k k^2 p_k - \left(\sum_k k p_k \right)^2. \end{aligned} \right. \quad (6.29)$$

Вычисление сумм в (6.29) часто упрощается с использованием *производящей функции* $\psi(z)$ комплексного аргумента z , определяемой как

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k. \quad (6.30)$$

Функция $\psi(z)$ является аналитической по крайней мере в области $|z| < 1$. Если она аналитична и в точке $z = 1$ и $D\xi < \infty$, то

$$M\xi = \psi'(1), \quad (6.31)$$

$$D\xi = \psi''(1) + \psi'(1) - (\psi'(1))^2. \quad (6.32)$$

6.1. Известно, что

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 & \cdot & 0,2 \end{pmatrix}$$

(с одной недостающей вероятностью). Построить график функции распределения случайной величины ξ ; вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Прежде всего отметим, что недостающая вероятность легко находится из условия нормированности вероятностей:

$$P(\xi = 1) = 1 - (0,1 + 0,3 + 0,2 + 0,2) = 0,2.$$

Далее, функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ представляет собой кусочно-постоянную функцию со скачками 0,1; 0,3; 0,2; 0,2; 0,2 в точках -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 соответственно (рис. 6.6).

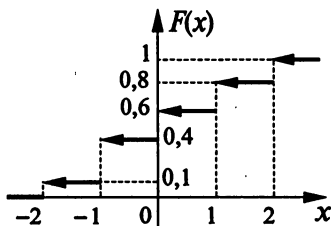


Рис. 6.6.

Для математического ожидания случайной величины имеем:

$$M\xi = (-2) \cdot 0,1 + (-1) \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,2 = 0,1.$$

Дисперсию $D\xi$ вычислим по формуле (6.23), предварительно отыскав $M(\xi^2)$ по формуле (6.13) при $r = 2$:

$$\begin{aligned} M(\xi^2) &= (-2)^2 \cdot 0,1 + (-1)^2 \cdot 0,3 + 0^2 \cdot 0,2 + \\ &\quad + 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,2 = 1,7; \end{aligned}$$

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = 1,7 - 0,1^2 = 1,69.$$

Наконец, среднее квадратическое отклонение величины ξ найдем по формуле (6.19):

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \sqrt{1,69} = 1,3.$$

Итак, $M\xi = 0,1$; $D\xi = 1,69$; $\sigma = 1,3$.

6.2. Известно, что

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & \cdot & 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

(с одной недостающей вероятностью). Постройте график функции распределения случайной величины ξ ; вычислите ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

6.3. Для случайной величины ξ из задачи 6.2 вычислите:

- а) вероятность того, что ξ принимает нечетное значение;
- б) $P(\xi \leq 0)$;
- в) $P(|\xi| \geq 2)$.

6.4. В условиях задачи 6.1 найдите закон распределения случайной величины $\eta = |\xi|$. Постройте график функции распределения величины η ; вычислите $M\eta$ и $D\eta$.

6.5. Монету бросают ξ раз — до тех пор, пока хотя бы одна из ее сторон не выпадет дважды (не обязательно подряд). Составьте ряд распределения случайной величины ξ ; постройте график функции распределения этой величины; вычислите $M\xi$ и $D\xi$.

6.6. Одним из этапов спортивного соревнования служит стрельба. При каждом выстреле, независимо от остальных выстрелов, спортсмен с вероятностью p попадает и с вероятностью $q = 1 - p$ не попадает в цель. Выстрелы подолжаются до тех пор, пока не накопится либо двух попаданий (в этом случае спортсмен допускается к следующему этапу соревнования), либо двух промахов (тогда спортсмен снимается с соревнования). Пусть ξ — число патронов, расходуемых спортсменом на данном этапе соревнования. Вычислите $M\xi$ и $D\xi$.

6.7. Постройте ряд распределения и вычислите математическое ожидание количества попарно различных цифр в записи числа, выбранного наугад из всех трехзначных чисел.

6.8. Монету бросают три раза. Результат каждого бросания записывают знаком плюс (+) или знаком минус (−) в зависимости от того, что выпало: герб или решка (соответственно). Пусть ξ — число выпавших гербов, η — число выпавших решек, ζ — число перемен знака в образовавшейся последовательности плюсов и минусов. Для каждой из этих величин:

- а) составьте ряд распределения;
- б) постройте график функции распределения;
- в) вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

6.9. В борьбе за первые три места в соревновании участвуют три спортклуба: первый представлен двумя спортсменами, второй — тремя спортсменами, третий — четырьмя спортсменами. В зачет каждому клубу идет лишь один результат — лучший у представителей этого спортклуба. Пусть ξ , η , ζ — места, кото-

рые займут первый, второй и третий спортклубы соответственно. Вычислите $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ в предположении, что все 9 участников соревнования имеют одинаковые индивидуальные шансы на успех.

6.10. Случайная величина ξ принимает три значения: $-1, 0, 1$. Составить ее ряд распределения, если $M\xi = 0$, $D\xi = 0,5$.

Решение. Обозначая искомые вероятности a, b и c , приходим к следующему закону распределения случайной величины ξ :

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

При этом (проверьте)

$$M\xi = -a + c = 0;$$

$$D\xi = (a + c) - (-a + c)^2 = 0,5.$$

К тому же

$$a + b + c = 1.$$

Итак, для искомых вероятностей a, b, c получаем:

$$\begin{cases} -a + c & = 0, \\ (a + c) - (-a + c)^2 & = 0,5, \\ a + b + c & = 1. \end{cases}$$

Отсюда $a = 0,25$; $b = 0,50$; $c = 0,25$.

Ответ:

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,50 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

6.11. Пусть (c некоторыми опущенными вероятностями)

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \cdot & 1/3 & \cdot & 1/6 \end{pmatrix}.$$

- 1) Вычислите $D\xi$, если известно, что $M\xi = 1$.
- 2) Вычислите $M\xi$, если известно, что $D\xi = 11/12$.

6.12. По заданной функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ 1/3 & \text{при } -2 < x \leq 3, \\ 5/6 & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5 \end{cases}$$

случайной величины ξ найти $M\xi$ и $D\xi$.

Решение. Данная функция $F(x)$, будучи кусочно-постоянной (рис. 6.7), в точках $-2, 3, 5$ имеет скачки, равные соответственно

$$\frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}, \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix},$$

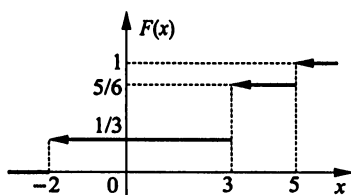


Рис. 6.7.

и, таким образом,

$$M\xi = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{5}{6} = \frac{5}{3},$$

$$M\xi^2 = \frac{4}{3} + \frac{9}{2} + \frac{25}{6} = 10,$$

$$D\xi = 10 - \frac{25}{9} = \frac{65}{9}.$$

О т в е т: $M\xi = 5/3$, $D\xi = 65/9$.

6.13. По заданной функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ 1/4 & \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 3/4 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

случайной величины ξ найдите $M\xi$ и $D\xi$.

6.14. Какой наименьшей и какой наибольшей может быть дисперсия $D\xi$ случайной величины ξ с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,3 & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ a & \text{при } 2 < x \leq 6, \\ 1 & \text{при } x > 6 \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра $a > 0,3$?

Равномерное распределение на конечном множестве

Так называется распределение вероятностей

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ 1/n & 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}.$$

Для случайной величины ξ с таким распределением

$$M\xi = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n),$$

что особенно наглядно представляет $M\xi$ как среднее значение случайной величины ξ .

В частности, при

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1/n & 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

получаем

$$M\xi = \frac{n+1}{2}. \quad (6.34)$$

6.15. 1) Сколько в среднем очков выпадает при подбрасывании игральной кости?

2) Какая в среднем сумма очков выпадает при подбрасывании: десяти игральными костями; n игральными костями?

6.16. В системе, состоящей из шести равнонадежных занумерованных (1, 2, 3, 4, 5, 6) приборов, отказал (вышел из строя) один какой-то прибор. Для его обнаружения и устранения неисправности приборы проверяются один за другим в порядке их нумерации. Чему равно среднее число приборов, с которыми придется работать, чтобы:

- а) устранить неисправность;
- б) выявить, какой именно прибор отказал?

Решение. Номер отказавшего прибора представляет собой случайную величину

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix},$$

и, таким образом,

$$M\xi = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

Тот же результат получается и по формуле (6.34) при $n = 6$.

Дробное значение $M\xi$ не должно смущать читателя: ведь речь идет не о номере прибора, а о среднем значении случайного номера.

Вторая часть задачи связана с рассмотрением случайной величины η , равной числу подвергаемых проверке приборов для выявления отказавшего прибора. Эта величина отлична от ξ . Если, например, проверено пять приборов и все они оказались исправными, то отказавшим является прибор с номером 6: специально проверять его нет нужды (другое дело, когда нужно устранить неисправность). Очевидно, что случайная величина η имеет следующее распределение вероятностей:

$$\eta \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$M\eta = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 2 \cdot 5) = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}.$$

6.17. В условиях задачи 6.16 для каждого из пунктов а) и б) вычислите вероятность того, что придется проверять не менее половины всех приборов.

6.18. На новогодней елке погасла гирлянда, состоящая из 15 лампочек. Для отыскания перегоревшей лампочки проверяются по очереди все лампочки гирлянды.

1) Сколько в среднем лампочек придется проверить, чтобы обнаружить перегоревшую лампочку?

2) Какова вероятность того, что для обнаружения перегоревшей лампочки придется проверить не менее половины всех лампочек?

6.19. Из колоды карт (52 листа) наугад без возвращения достают по одной карте до тех пор, пока не попадется дама пик.

1) Сколько в среднем карт придется извлечь из колоды?

2) Какова вероятность того, что доставать потребуется не более половины всех карт?

6.20. Выведите формулу для дисперсии равномерного распределения на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$.

Распределение Бернулли

Так называется распределение вероятностей

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}, \quad (6.35)$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Соответствующая функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ q, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

представлена графиком на рис. 6.8.

Случайную величину ξ с распределением (6.35) полезно интерпретировать как число наступлений события A в одном испытании, в котором это событие наступает с вероятностью p (и не наступает с вероятностью $q = 1 - p$).

Для такой случайной величины ξ

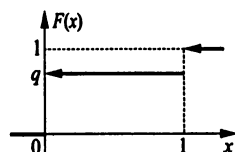


Рис. 6.8.

$$M\xi = p, \quad D\xi = pq. \quad (6.36)$$

6.21. Рабочий обслуживает четыре автоматические линии, действующие независимо друг от друга. Вероятности того, что в течение смены эти линии потребуют вмешательства рабочего, равны соответственно 0,30; 0,35; 0,40; 0,45. Найти математическое ожидание и дисперсию числа линий, которые потребуют вмешательства рабочего в течение смены.

Решение. Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — случайные величины, принимающие значения 1 и 0 в зависимости от того, потребует или не потребует вмешательства рабочего соответствующая автоматическая линия; тогда

$$\begin{aligned} \xi_1 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,30 & 0,70 \end{pmatrix}; & \xi_2 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}; \\ \xi_3 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,40 & 0,60 \end{pmatrix}; & \xi_4 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, по формулам (6.36)

$$\begin{aligned} M\xi_1 &= 0,30, & D\xi_1 &= 0,30 \cdot 0,70 = 0,2100; \\ M\xi_2 &= 0,35, & D\xi_2 &= 0,35 \cdot 0,65 = 0,2275; \\ M\xi_3 &= 0,40, & D\xi_3 &= 0,40 \cdot 0,60 = 0,2400; \\ M\xi_4 &= 0,45, & D\xi_4 &= 0,45 \cdot 0,55 = 0,2475. \end{aligned}$$

Общее число ξ линий, которые потребуют вмешательства рабочего, может быть представлено в виде суммы:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4.$$

Поэтому

$$M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + M\xi_3 + M\xi_4 = 0,30 + 0,35 + 0,40 + 0,45 = 1,50.$$

Поскольку величины $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ независимы,

$$\begin{aligned} D\xi &= D\xi_1 + D\xi_2 + D\xi_3 + D\xi_4 = \\ &= 0,2100 + 0,2275 + 0,2400 + 0,2475 = 0,9250. \end{aligned}$$

6.22. Трое студентов сдают экзамен по математике на отлично (независимо друг от друга) с вероятностями 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно. Пусть ξ — общее число полученных ими отличных оценок. Вычислите $M\xi$ и $D\xi$.

6.23. Из урны, содержащей 10 белых и 15 черных шаров, наугад одновременно извлекают восемь шаров. Сколько в среднем белых шаров будет среди них?

Решение. Разложим в цепочку наугад все 25 шаров и первые 8 из них будем считать «извлеченными» из урны шарами. (Случайность «извлечения» при этом сохранится за счет случайности разложения шаров в цепочку.) С k -м из первых восьми шаров свяжем случайную величину ξ_k , равную 1 или 0 в зависимости от того, каким является этот шар — белым или черным. Очевидно, что

$$P(\xi_k = 1) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}, \quad P(\xi_k = 0) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

(см. задачу 1.10), так что

$$\begin{aligned} \xi_k &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}, \\ M\xi_k &= \frac{2}{5}, \quad k = 1, 2, \dots, 8. \end{aligned}$$

При этом общее число ξ белых извлеченных шаров можно представить как

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_8.$$

Отсюда следует, что

$$M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_8 = 8 \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{5} = 3,2.$$

О т в е т: $M\xi = 3,2$.

6.24. Из урны, содержащей 10 белых и 15 черных шаров, пропали (высыпались) какие-то 8 шаров. Сколько в среднем черных шаров осталось в урне?

6.25. Написано n писем и к ним подписано n конвертов. Затем письма наугад вложены в конверты и отправлены по почте. Сколько в среднем писем попадет по назначению?

6.26. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 10 человек. Сколько в среднем остановок потребуется для их обслуживания?

Указание. Пусть ξ_k — случайная величина, равная 1 или 0 в зависимости от того, понадобится или не понадобится остановка на k -м этаже, $k = 2, 3, 4, \dots, 9$, а ξ — общее число остановок лифта по требованию данных пассажиров. Тогда $\xi = \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_9$.

6.27. Игральную кость бросают 6 раз. Вычислите математическое ожидание числа попарно различных выпавших цифр.

6.28. Из всех трехзначных чисел (от 100 до 999) наугад выбрали одно число. Вычислить математическое ожидание числа попарно различных цифр, встречающихся в записи этого числа.

Решение. Пусть ξ_k — случайная величина, равная 1 или 0 в зависимости от того, встречается или не встречается в записи выбранного числа цифра k ; $k = 0, 1, 2, \dots, 9$. Через ξ обозначим общее число попарно различных цифр в записи этого числа. Тогда

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_9.$$

При этом (объясните, почему)

$$\begin{aligned} \xi_0 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 & \left(\frac{9}{10}\right)^2 \end{pmatrix}, \\ \xi_k &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \frac{8}{9} \left(\frac{9}{10}\right)^2 & \frac{8}{9} \left(\frac{9}{10}\right)^2 \end{pmatrix}; \quad k = 1, 2, \dots, 9. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M\xi_0 &= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2, \\ M\xi_k &= 1 - \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2; \quad k = 1, 2, \dots, 9. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M\xi &= M\xi_0 + M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_9 = \\ &= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + 9 \left(1 - \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2\right) = \\ &= 10 - 9 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 2,71. \end{aligned}$$

О т в е т: $M\xi = 2,71$.

6.29. Из всех трехзначных чисел наугад выбрали одно число. Вычислите математическое ожидание числа попарно различных четных цифр, встречающихся в записи этого числа.

6.30. Из всех четырехзначных чисел наугад выбрали одно число. Пусть в его записи четная цифра встречается ξ раз. Вычислите $M\xi$.

6.31. В лифт 16-этажного дома на первом этаже вошли 15 человек. Вычислите математическое ожидание числа тех этажей (начиная со второго), на которых не выйдет ни один из этих пассажиров. Приведите соответствующую аппроксимацию, доведя ответ до числа.

6.32. Каждый из n шаров, независимо от остальных шаров, опускают наугад в одну из n урн. Пусть ξ — число тех урн, которые при этом окажутся пустыми. Вычислите $M\xi$ и оцените, какую долю от общего числа n урн составляют эти пустые урны.

6.33. Шары — m белых и n черных — располагаются в ряд в случайном порядке. Сколько в среднем белых шаров окажется:

- а) левее каждого из черных шаров;
- б) правее каждого из черных шаров?

6.34. В лыжной гонке участвуют 43 одинаковых по силе спортсмена; из них 18 человек представляют спортклуб A , 10 человек — спортклуб B и 15 человек — спортклуб C . Какое в среднем место займет:

- а) самый удачливый представитель спортклуба B ;
- б) самый неудачливый представитель спортклуба B ?

$Bi(n, p)$ — биномиальное распределение с параметрами n и p

Так называется распределение вероятностей

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

где

$$p_m = P(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}; \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Запись $\xi \sim Bi(n, p)$ означает, что ξ — случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами n и p . Такое же распределение имеет число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании. Поэтому

$$\xi \sim \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \quad (6.37)$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, причем ξ_k есть число успехов (1 или 0) в k -м испытании. Следовательно, при $1 \leq k \leq n$,

$$\xi_k \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}. \quad (6.38)$$

По этой причине распределение Бернулли часто обозначают $Bi(1, p)$.

Если $np - q$ — число нецелое, то наиболее вероятным значением величины $\xi \sim Bi(n, p)$ служит значение

$$m_0 = [np - q] + 1, \quad (6.39)$$

где $[x]$ — целая часть числа x ; если же $np - q$ — число целое, то в качестве наиболее вероятного значения выступает любое из двух значений:

$$m'_0 = np - q, \quad m''_0 = np - q + 1. \quad (6.40)$$

Производящей функцией распределения $Bi(n, p)$ служит функция

$$\psi(z) = (pz + q)^n. \quad (6.41)$$

Если $\xi \sim Bi(n, p)$, то

$$M\xi = np, \quad D\xi = npq. \quad (6.42)$$

Наконец, отметим, что при рассмотрении биномиального распределения вероятностей часто приходится обращаться к формуле бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m}. \quad (6.43)$$

6.35. Найти наиболее вероятное значение случайной величины ξ , если известно, что $\xi \sim Bi(n, p)$ и $M\xi = 1$, $D\xi = 0,75$.

Решение. По условию

$$np = 1, \quad npq = 0,75.$$

Следовательно,

$$q = 0,75; \quad p = 0,25; \quad n = 4.$$

Таким образом, речь идет о распределении $Bi(n, p)$ при $n = 4$, $p = 0,25$. Принимая во внимание, что

$$np - q = 1 - 0,75 = 0,25,$$

мы должны в качестве наиболее вероятного значения случайной величины ξ указать значение

$$m_0 = [np - q] + 1 = [0,25] + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Кстати, вероятность такого значения

$$P(\xi = 1) = C_4^1(0,25) \cdot (0,75)^3 \approx 0,4219$$

не так уж и велика.

6.36. Может ли случайная величина ξ иметь биномиальное распределение вероятностей, если:

а) $M\xi = 6$, $D\xi = 3$; б) $M\xi = 7$, $D\xi = 4$?

6.37. Сколько в среднем шестерок выпадает при подбрасывании шести игральные костей?

6.38. В лифт 12-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Сколько из них в среднем выйдет на 10-м этаже?

6.39. Пусть ξ — число единиц, а η — число шестерок, выпадающих при подбрасывании шести игральные костей. Вычислите математическое ожидание и дисперсию суммы $\xi + \eta$.

6.40. Вероятность приема самолетом радиосигнала при каждой передаче равна 0,7. Вычислите математическое ожидание и дисперсию числа сигналов, принятых при четырехкратной передаче. Каково наиболее вероятное значение числа принятых сигналов?

6.41. На стенде испытываются 10 приборов. Вероятность выдержать испытание для каждого такого прибора одна и та же — 0,82. Укажите:

а) среднее число приборов, которые выдержат испытание;

б) наиболее вероятное число приборов, которые не выдержат испытания.

6.42. Данным маршрутом автобуса пользуются 24 человека. Но каждый из них опаздывает на автобус с вероятностью 0,2. Определите:

- а) среднее число пассажиров в автобусе данного маршрута;
- б) наиболее вероятное число пассажиров в автобусе данного маршрута.

6.43. При каком значении параметра p случайная величина $\xi \sim Bi(n, p)$ имеет наибольшую дисперсию?

6.44. Пусть $\xi \sim Bi(100, p)$. При каких значениях $p \in (0, 1)$ конечная последовательность вероятностей

$$p_m = P(\xi = m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, 100$$

является монотонной? Могут ли в качестве равновероятных значений такой случайной величины ξ выступать два ее значения?

6.45. Назовите три наиболее вероятных значения случайной величины $\xi \sim Bi(9, 0,4)$.

6.46. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 6 человек. Найдите математическое ожидание числа остановок лифта, на которых выходят:

- а) ровно по одному человеку;
- б) не менее, чем по два человека.

6.47. Каждая партия между двумя партнерами с вероятностью $1/2$ заканчивается победой одного и с вероятностью $1/2$ — победой другого. За победу присуждается одно очко. Вычислите математическое ожидание числа партий, сыгранных до того момента, когда кто-нибудь из участников турнира наберет три очка.

6.48. Пусть ξ — число решек, η — число гербов, выпадающих при n бросаниях монеты, $\zeta = \max(\xi, \eta)$. Вычислите $M\zeta$ при:

- а) $n = 6$; б) $n = 7$.

6.49. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 6 человек. Известно, что первая остановка лифта состоялась на 5-м этаже. Сколько в среднем пассажиров вышло из лифта на этой остановке?

6.50. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины a^ξ , если известно, что $\xi \sim Bi(n, p)$.

Решение. Поскольку $M(a^\xi)$ есть значение производящей функции $\psi(z)$ при $z = a$,

$$M(a^\xi) = (pa + q)^n$$

(см. формулу (6.41), приведенную на с. 121).

Далее,

$$M[(a^\xi)^2] = M[(a^2)^\xi] = (pa^2 + q)^n$$

(значение производящей функции $\psi(z)$ при $z = a^2$).

Следовательно,

$$D(a^\xi) = (pa^2 + q)^n - (pa + q)^{2n}.$$

6.51. Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 2^\xi$, где ξ — число гербов, выпадающих при подбрасывании десяти монет.

$G(p)$ — геометрическое распределение с параметром p

Геометрическим называется распределение вероятностей

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

где для всякого $k = 1, 2, \dots$

$$p_k = P(\xi = k) = q^{k-1}p; \quad (6.44)$$

$0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Такое распределение имеет, например, число испытаний, проводимых по схеме Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании, — до наступления первого успешного испытания (включая это успешное испытание).

Геометрическое распределение вероятностей с параметром p мы условимся обозначать $G(p)$. Если $\xi \sim G(p)$, то

$$M\xi = \frac{1}{p}. \quad (6.45)$$

З а м е ч а н и е. Иногда в выражении «до первого успешного испытания» слово «до» понимают в буквальном смысле и последнее, успешное испытание в число рассматриваемых не включают. Тогда геометрически распределенной объявляется величина η , на 1 меньшая, чем введенная нами величина ξ . При таком соглашении формула (6.45) преобразуется в формулу $M\eta = 1/p - 1 = q/p$.

6.52. Докажите, что если $\xi \sim G(p)$, то $P(\xi = 2) \leq \frac{1}{4}$.

6.53. Вычислите $P(\xi = 6)$, если $\xi \sim G(p)$ и $P(\xi = 2) = \frac{2}{9}$.

6.54. Автоматическая линия при нормальной настройке выпускает бракованное изделие с вероятностью 0,001. Переналадка линии проводится после выпуска каждого бракованного изделия.

1) Чему равно среднее число изделий, выпускаемых между двумя последовательными переналадками линии?

2) Какова вероятность того, что между соседними переналадками линии выпускается ровно 1000 изделий?

Решение. Число ξ изделий, выпускаемых между последовательными переналадками линии, представляет собой случайную величину, распределенную по закону $G(p)$ при $p = 0,001$. Поэтому

$$M\xi = \frac{1}{0,001} = 1000;$$

$$\begin{aligned} P(\xi = 1000) &= 0,999^{999} \cdot 0,001 = 0,999^{1000} \cdot \frac{0,001}{0,999} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1}{999} \approx e^{-1} \cdot \frac{1}{999} \approx \frac{1}{2,7 \cdot 999} \approx 0,0004. \end{aligned}$$

6.55. Вероятность обнаружения малоразмерного объекта в заданном районе в отдельном полете равна $1/3$.

1) Сколько в среднем полетов придется совершить, прежде чем объект будет обнаружен?

2) Какова вероятность того, что для обнаружения объекта придется совершить не менее трех вылетов?

6.56. При одном выстреле стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,7. Ему разрешается стрелять до трех промахов.

1) Найти среднее число израсходованных стрелком патронов.

2) Определить вероятность того, что стрелок израсходует ровно восемь патронов.

Решение. 1) Каждый промах стрелка связывается в среднем с $1/0,3$ выстрелами. Поэтому до трех промахов этим стрелком будет израсходовано в среднем $3/0,3 = 10$ патронов.

2) Ровно восемь патронов стрелок израсходует (в условиях задачи) тогда и только тогда, когда при восьмом выстреле будет промах, а в первых семи выстрелах — 2 промаха и 5 попаданий. Вероятность такой комбинации событий равна

$$P = 0,3 \cdot (C_7^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^5) = C_7^2 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^5 \approx 0,095.$$

6.57. За какое в среднем минимальное число подбрасываний игральной кости шестерка выпадет ровно 5 раз? Какова вероятность того, что указанное минимальное число подбрасываний окажется равным 7?

6.58. Решите задачу 6.19.1 в предположении, что перед каждым выниманием карты из колоды ранее извлеченная карта возвращается обратно в колоду (выбор с возвращением).

6.59. Сколько в среднем раз понадобится подбрасывать игральную кость до тех пор, пока хотя бы по одному разу не выпадет каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Решение. С рассматриваемым подбрасыванием игральной кости можно связать шесть «успехов», если под «успехом» подразумевать выпадение цифры, которая в предыдущих подбрасываниях ни разу не выпадала.

Первый такой «успех» наступает в результате первого же подбрасывания игральной кости. Мы будем считать, что на него уходит $\xi_1 \equiv 1$ подбрасываний. Пусть, далее, ξ_2 — число подбрасываний игральной кости после первого «успеха» до второго «успеха». При каждом таком подбрасывании второй «успех» наступает с вероятностью $\frac{5}{6}$; поэтому $M\xi_2 = \frac{1}{5/6} = \frac{6}{5}$.

Через ξ_3 обозначим число подбрасываний игральной кости после второго «успеха» до третьего «успеха». Каждое такое подбрасывание приносит очередной «успех» с вероятностью $\frac{4}{6}$; по-

этому $M\xi_3 = \frac{1}{4/6} = \frac{6}{4}$. Аналогично рассматриваются случайные величины ξ_4, ξ_5, ξ_6 , представляющие собой число подбрасываний игральной кости после третьего «успеха» до четвертого «успеха»; после четвертого «успеха» до пятого «успеха»; после пятого «успеха» до шестого «успеха» соответственно. При этом, очевидно,

$$M\xi_4 = \frac{1}{3/6} = \frac{6}{3},$$

$$M\xi_5 = \frac{1}{2/6} = \frac{6}{2},$$

$$M\xi_6 = \frac{1}{1/6} = \frac{6}{1}.$$

Принимая во внимание, что требуемое в задаче общее число подбрасываний игральной кости ξ раз равно сумме рассмотренных величин,

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6,$$

получаем окончательно

$$\begin{aligned} M\xi &= M\xi_1 + M\xi_2 + M\xi_3 + M\xi_4 + M\xi_5 + M\xi_6 = \\ &= \frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = \\ &= 6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) \approx 14,7. \end{aligned}$$

Итак, $M\xi \approx 14,7$.

6.60. Сколько в среднем подбрасываний монеты придется произвести до тех пор, пока хотя бы по одному разу не выпадет и герб и решка?

6.61. Сколько в среднем подбрасываний игральной кости придется произвести до тех пор, пока хотя бы по одному разу не выпадет каждая из четных цифр 2, 4, 6?

6.62. Монету бросают до тех пор, пока не будет зафиксирована серия ГР (герб-решка). Сколько раз в среднем придется бросать монету?

Решение. Пусть до выпадения герба монету придется бросать ξ_1 раз, а после этого до выпадения решки — еще ξ_2 раз. Нетрудно понять, что искомое число ξ бросаний монеты до серии ГР можно представить в виде

$$\xi = \xi_1 + \xi_2.$$

Учитывая, что

$$M\xi_1 = \frac{1}{1/2} = 2, \quad M\xi_2 = \frac{1}{1/2} = 2,$$

получаем

$$M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 = 4.$$

Примечание. Для более глубокого понимания изложенного решения полезно данную задачу сопоставить с аналогичной (по формулировке) задачей о бросании монеты до серии ГГ. Решение этой, более сложной задачи мы отложим на некоторое время, предупредив читателя, что результат задачи 4.19 может навести на ложный след.

6.63. Сколько раз в среднем придется бросать игральную кость до выпадения хотя бы одной «единицы» и хотя бы одной «шестерки»?

6.64. В n корзин бросают шары. Каждый из них, независимо от других шаров, с одинаковыми вероятностями попадает в одну из данных корзин. Шары бросают до тех пор, пока не останется

ни одной пустой корзины. Сколько в среднем шаров при этом будет использовано? Оцените это число шаров для больших значений n .

6.65. Докажите, что если $\xi \sim G(p)$, то

$$P(\xi = n + k \mid \xi > n) = P(\xi = k).$$

Какую интерпретацию допускает данный результат?

Энтропия дискретного распределения

Энтропия $H(\xi)$ случайной величины

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

или соответствующего дискретного распределения, определяется как

$$H(\xi) = - \sum_k p_k \ln p_k. \quad (6.46)$$

Не исключая равенства нулю какой-нибудь из используемых здесь вероятностей, полагают, что соответствующее слагаемое в (6.46) равно нулю.

Энтропию $H(\xi)$ можно принять за меру степени неопределенности распределения случайной величины ξ , что наглядно подтверждается приводимыми ниже задачами.

При сопоставлении энтропий различных дискретных случайных величин часто используется неравенство

$$- \sum_k p'_k \ln p_k \geq - \sum_k p'_k \ln p'_k, \quad (6.47)$$

относящееся к любым распределениям вероятностей $\{p_k\}$ и $\{p'_k\}$, причем знак равенства в (6.47) достигается тогда и только тогда, когда эти распределения вероятностей совпадают.

В связи с (6.46) полезно также отметить, что функция

$$f(x) = -x \ln x$$

выпукла кверху при $0 < x < 1$ и потому

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n} \quad (6.48)$$

для всяких $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0; 1)$. А если среди этих чисел есть неравные числа, то нестрогое неравенство (6.48) преобразуется в строгое неравенство:

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) > \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n}. \quad (6.49)$$

6.66. Покажите, что

$$H(\xi) \geq 0$$

для всякой дискретной случайной величины ξ , причем знак равенства в приведенном соотношении достигается лишь в том случае, когда $P(\xi = C) = 1$ для некоторого вещественного C .

6.67. Вычислить энтропию случайной величины ξ , распределенной равномерно на множестве $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Решение. Речь идет о случайной величине

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ 1/n & 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}.$$

Простые вычисления дают

$$H(\xi) = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \ln n.$$

Этот результат хорошо согласуется с нашими интуитивными представлениями о степени неопределенности распределения: чем больше равновероятных значений принимает дискретная случайная величина ξ , тем неопределеннее ее поведение.

6.68. Доказать, что из всех распределений вероятностей на конечном множестве $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ наибольшую энтропию имеет равномерное распределение. (*Экстремальное свойство равномерного распределения на конечном множестве.*)

Доказательство. Пусть

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

причем какие-нибудь две из вероятностей $p_1, p_2, \dots, p_n$ не равны между собой. Тогда в силу (6.49)

$$\begin{aligned} H(\xi) &= - \sum_k p_k \ln p_k < \\ &< -n \cdot \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} \ln \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} = \\ &= -1 \cdot \ln \frac{1}{n} = \ln n. \end{aligned}$$

Остается лишь сослаться на результат задачи 6.67.

6.69. Вычислите энтропию $H(\xi)$ для $\xi \sim Bi(1, p)$ и постройте ее график как график функции аргумента p . При каком значении p достигается наибольшее значение этой функции?

6.70. Вычислите энтропию случайной величины $\xi \sim G(p)$.

6.71. Доказать, что из всех распределений вероятностей на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел с заданным математическим ожиданием наибольшую энтропию имеет геометрическое распределение. (*Экстремальное свойство геометрического распределения.*)

Доказательство. Пусть

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}, \quad \eta \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p'_1 & p'_2 & \dots & p'_n & \dots \end{pmatrix},$$

причем $p_k = q^{k-1}(1-q)$.

По условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} kp'_k.$$

С учетом того, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p'_k = 1,$$

а также неравенства (6.47), получаем:

$$\begin{aligned} H(\xi) &= - \sum_{k=1}^{\infty} p_k \ln p_k = - \sum_{k=1}^{\infty} p_k [(k-1) \ln q + \ln(1-q)] = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} p'_k [(k-1) \ln q + \ln(1-q)] = - \sum_{k=1}^{\infty} p'_k \ln p_k \geq \\ &\geq - \sum_{k=1}^{\infty} p'_k \ln p'_k = H(\eta). \end{aligned}$$

6.72. Как связаны между собой энтропии $H(\xi)$ и $H(\eta)$ дискретных случайных величин ξ и η , если $\eta = a\xi + b$, причем $a \neq 0$?

Разные задачи

6.73. Как выглядит график функции распределения постоянной величины $\xi = C$?

6.74. Постройте график функции распределения случайной величины ξ , распределенной равномерно на множестве $\{-1, 0, 1\}$.

6.75. Постройте график функции распределения случайной величины ξ , равной числу гербов, выпадающих при подбрасывании двух монет.

6.76. Пусть ξ — число успехов, а η — число неудач в трех испытаниях Бернулли с вероятностью успеха в отдельном испытании $p = 0,6$. Постройте график функции распределения случайной величины $\zeta = \xi - \eta$; вычислите $M\zeta$ и $D\zeta$.

6.77. По заданной функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -3, \\ 1/3 & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ 3/4 & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

случайной величины ξ вычислите $M\xi$ и $D\xi$.

6.78. По заданной функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -3, \\ 1/4 & \text{при } -3 < x \leq -1, \\ 1/2 & \text{при } -1 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

случайной величины ξ вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = |\xi|$.

6.79. Вычислите дисперсию числа очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости.

6.80. В группе из десяти человек — 2 отличника, 3 хороших, 4 средних и 1 слабый студент. Неудовлетворительную оценку на экзамене независимо друг от друга получают: отличник — с вероятностью 0, хороший студент — с вероятностью 0,05, средний студент — с вероятностью 0,50, слабый студент —

с вероятностью 0,90. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа неудовлетворительных оценок на экзамене в этой группе.

6.81. Из десяти ключей в связке только один подходит к данному замку.

1) Сколько в среднем придется перепробовать ключей прежде, чем замок будет открыт?

2) Какова вероятность того, что придется испытать ровно половину ключей из связки?

6.82. Пусть ξ — число неудач, предшествующих первому успеху в испытаниях, проводимых по схеме Бернулли с вероятностью p успеха в отдельном испытании. Вычислите $M\xi$.

6.83. Известно, что $\xi \sim Bi(n, p)$, причем $M\xi = 2$, $D\xi = 1$. Постройте график функции распределения величины ξ . В какой точке эта функция имеет наибольший скачок?

6.84. Пусть $\xi \sim Bi(n, p)$. Не находя функции распределения величины ξ , выясните, в какой точке эта функция имеет наибольший скачок и чему он равен, если известно, что:

а) $M\xi = 1$, $D\xi = 2/3$; б) $M\xi = 1,75$, $D\xi = 1,3125$.

6.85. На пути движения автомобиля — пять светофоров. Каждый из них, независимо от остальных светофоров, с вероятностью 0,5 запрещает движение. Пусть ξ — число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Найдите закон распределения случайной величины ξ и ее математическое ожидание.

6.86. Имеется три заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из одной заготовки равна 0,8. Заготовки используются до тех пор, пока не будет изготовлена годная деталь или не будут израсходованы все заготовки. Пусть η — число заготовок, оставшихся при этом неиспользованными. Найдите закон распределения случайной величины η и ее математическое ожидание.

6.87. В лифт 12-этажного дома на первом этаже вошли 10 человек. Вычислите среднее число тех из них, которые

а) выйдут на 7-м этаже;

б) не выйдут на 7-м этаже;

в) не выйдут ни на 7-м этаже, ни раньше.

6.88. В лифт 12-этажного дома на первом этаже вошли 10 человек. Известно, что кто-то из них нажал кнопку 7-го этажа.

Сколько в среднем пассажиров из числа данных 10 человек выйдет на этом этаже?

6.89. Докажите, что для всякой целочисленной случайной величины ξ и любого целого m :

а) $P(\xi = m) = P(\xi \geq m) - P(\xi \geq m + 1)$;

б) $P(\xi = m) = P(\xi \leq m) - P(\xi \leq m - 1)$.

6.90. Пусть ξ и η — наименьшая и, соответственно, наибольшая из цифр, выпадающих при подбрасывании четырех игральных костей. Вычислите вероятности:

а) $P(\xi = 2)$; б) $P(\eta = 4)$; в) $P(\xi = 3, \eta = 4)$.

6.91. Из множества $\{1, 2, \dots, 100\}$ наугад одновременно выбирают 10 чисел. Вычислите математическое ожидание суммы выбранных чисел.

6.92. Игральную кость подбрасывают до тех пор, пока не выпадет шестерка. Сколько в среднем единиц выпадет при этом?

6.93. Вероятность наступления события A в отдельном испытании равна 0,4. Пусть η — разность между числом наступлений и числом ненаступлений события A в n таких испытаниях. Укажите:

а) среднее значение случайной величины η и ее среднеквадратическое отклонение;

б) наиболее вероятное значение m_0 случайной величины η .

6.94. Докажите, что случайная величина ξ с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,421875 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,843750 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,984375 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

распределена по биномиальному закону; найдите его параметры; вычислите $M\xi$ и $D\xi$.

6.95. Случайная величина ξ распределена по биномиальному закону. Известно, что свои наименьшее и наибольшее значения она принимает с одинаковыми вероятностями и имеет единственное наиболее вероятное значение, равное 2. Вычислите $D\xi$.

6.96. Случайная величина ξ распределена по биномиальному закону. Частично ее ряд распределения представлен в

таблице

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \\ 0,2401 & 0,4116 & \dots \end{pmatrix}$$

Завершите построение этой таблицы.

6.97. Вероятность того, что случайная величина $\xi \sim Bi(n, p)$ принимает четное значение, равна

$$\frac{1}{2} [1 + (1 - 2p)^n].$$

Докажите это.

6.98. Проводят $n \geq 2$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании. Результат каждого испытания записывают знаком плюс или знаком минус в зависимости от того, что принесло это испытание — успех или неудачу соответственно. Пусть ζ — число перемен знака в образовавшейся последовательности плюсов и минусов. Вычислите $M\zeta$. При каком значении p эта величина принимает наибольшее значение?

6.99. Каждая из $n \geq 2$ партий, проводимых между шахматистами A и B , независимо от остальных партий, с вероятностью a заканчивается победой A , с вероятностью b — победой B и с вероятностью c — вничью, так что $a + b + c = 1$. Каждый шахматист, записывая результат сыгранных партий отмечает победу знаком плюс, поражение — знаком минус, ничью — нулем. Пусть ζ_1 — число перемен знака в записи шахматиста A , а ζ_2 — соответствующее число перемен знака в записи шахматиста B . Вычислите $M\zeta_1$ и $M\zeta_2$, полагая, как обычно, что счет перемен знака начинается после первой результативной партии и нуль не вносит изменения знака ни в какую последовательность плюсов и минусов. При каких значениях a, b, c найденные величины принимают наименьшие и при каких — наибольшие значения?

6.100. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение вероятностей с параметром p . Чему равна вероятность того, что ξ примет четное значение?

6.101. Постройте пример неотрицательной целочисленной случайной величины, математическое ожидание которой отличается от ее наиболее вероятного значения не меньше, чем на заданную положительную величину Δ .

6.102. Случайная величина ξ принимает значения $0, 1, 2, \dots$ с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии. Как связаны между собой $M\xi$ и $D\xi$?

6.103. В условиях задачи 6.9 найдите математическое ожидание места, которое в индивидуальном зачете займет самый удачливый представитель спортклуба, оказавшегося на третьем месте.

6.104. Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, наугад по схеме выбора без возвращения извлекают k шаров, $1 \leq k \leq m+n$. Пусть ξ — число белых среди извлеченных шаров. Найдите распределение случайной величины ξ (такое распределение называется *гипергеометрическим*) и $M\xi$. Рассмотрите случай, когда

$$m \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad \frac{m}{m+n} \rightarrow p > 0.$$

6.105. Задачу, аналогичную задаче 6.104, решите в предположении, что случайный выбор шаров осуществляется по схеме выбора с возвращением и сравните полученный результат с результатом задачи 6.104.

П р и м е ч а н и е. Сравнение результатов двух последних задач показывает, что для больших генеральных совокупностей выбор с возвращением и выбор без возвращения практически неразличимы.

6.106. В лифт $(m+1)$ -этажного дома на первом этаже вошли n человек. Пусть ξ — число тех из них, которые выходят на первой по их требованию остановке. Докажите, что

$$M\xi = \frac{n}{m} \frac{1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + m^{n-1}}{m^{n-1}}.$$

6.107. Случайная величина ξ принимает лишь три значения. Частично ее закон распределения представлен в таблице:

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot \\ \cdot & 1/4 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Заполните пустые клетки этой таблицы, если известно, что случайная величина ξ имеет тот же закон распределения вероятностей, что и случайная величина $1/\xi$. Вычислите $M\xi$ и $D\xi$.

6.108. Известно, что случайная величина ξ принимает лишь натуральные значения, причем:

$$P(\xi = n) = \frac{C}{n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Найдите: а) константу C ; б) $P(\xi \leq 10)$; в) $P(10 \leq \xi \leq 20)$.

6.109. Функция распределения $F(x)$ целочисленной случайной величины ξ удовлетворяет условиям:

$$F(-1) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x > 0)}} F(x) = F(0), \quad F(2) = 1.$$

Постройте ее график, если известно, что $M\xi = 1/3$.

6.110. Как связаны между собой энтропии дискретной случайной величины ξ и соответствующей нормированной величины

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}?$$

6.111. Верно ли, что для всяких дискретных случайных величин ξ и η из $D\xi \leq D\eta$ следует, что $H(\xi) \leq H(\eta)$?

6.112. При каком значении параметра p энтропия распределения $Bi(n, p)$ (n фиксировано) принимает наибольшее значение?

6.113. Постройте пример дискретного распределения вероятностей

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

для которого ряд

$$\sum_k x_k p_k$$

сходится, а $M\xi$ не существует.

6.114. Известно, что $\xi \sim Bi(3, 0, 2)$. Приведите ряд распределения соответствующей нормированной случайной величины

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}.$$

Непосредственными вычислениями убедитесь, что

$$M\tilde{\xi} = 0, \quad D\tilde{\xi} = 1.$$

§ 7. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Пуассоновская аппроксимация биномиального распределения

Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Вероятности

$$P(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n$$

при больших значениях n часто находят приближенно, используя надлежащую аппроксимацию биномиального распределения.

Теорема 7.1 (теорема Пуассона). Если $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ так, что $np \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то

$$C_n^m p^m q^{n-m} \rightarrow \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (7.1)$$

при любом фиксированном $m = 0, 1, 2, \dots$.

В схеме Бернулли эту теорему используют, когда число испытаний n достаточно велико, а вероятность успеха p в отдельном испытании достаточно мала; полагают, что в этих условиях

$$P(\mu_n = m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}, \quad (7.2)$$

$$P(m_1 \leq \mu_n \leq m_2) \approx \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}. \quad (7.3)$$

Ошибка данного приближения допускает следующую оценку:

$$\left| P(m_1 \leq \mu_n \leq m_2) - \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} \right| \leq np^2 = \frac{\lambda^2}{n}, \quad (7.4)$$

где $\lambda = np$, — для всяких m_1 и m_2 таких, что $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq n$.

Предельные вероятности в (7.1),

$$p_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.5)$$

неотрицательны и нормированы: при $\lambda > 0$

$$p_m \geq 0, \quad \sum_{m=0}^{\infty} p_m = 1.$$

Следовательно, с ними можно связать новое распределение вероятностей. Это распределение вероятностей называется *распределением Пуассона* (пуассоновским распределением) с параметром λ и обозначается $\Pi(\lambda)$. По этой причине аппроксимация (7.2) называется *пуассоновской аппроксимацией*.

Производящей функцией случайной величины $\eta \sim \Pi(\lambda)$ служит функция

$$\psi(z) = e^{-\lambda(1-z)}. \quad (7.6)$$

Отсюда легко выводится, что

$$M\eta = D\eta = \lambda. \quad (7.7)$$

В контексте теоремы Пуассона это — вполне ожидаемый результат.

Таблица распределения Пуассона приведена на с. 437.

7.1. Книга в 500 страниц содержит 400 опечаток. Предположим, что каждая из них независимо от остальных опечаток может с одинаковыми вероятностями оказаться на любой странице книги. Оценить вероятность того, что на 13-й странице будет не менее двух опечаток.

Решение. Вероятность того, что любая, отдельно взятая опечатка из числа $n = 400$ опечаток попадает на 13-ю страницу, равна $p = 1/500$, и мы имеем дело с распределением $Bi(n, p)$ при $n = 400$, $p = 0,002$. Поэтому точное значение искомой вероятности P можно записать в виде

$$\begin{aligned} P &= \sum_{m=2}^{400} C_{400}^m 0,002^m \cdot 0,998^{400-m} = \\ &= 1 - C_{400}^0 0,002^0 \cdot 0,998^{400} - C_{400}^1 0,002^1 \cdot 0,998^{399}. \end{aligned}$$

При столь малом значении p ($p = 0,002$) ошибка пуассоновской аппроксимации не превышает величины

$$\Delta = np^2 = 0,0016.$$

Поэтому ($\lambda \approx np = 0,8$)

$$P \approx 1 - e^{-0,8} - \frac{0,8^1}{1!} e^{-0,8} \approx 0,191,$$

так что $P \approx 0,19$ с точностью до 0,01.

7.2. Книга в 600 страниц содержит в среднем по одной опечатке на страницу. Оцените вероятность того, что на 13-й странице:

- а) нет ни одной опечатки;
- б) ровно две опечатки;
- в) не более двух опечаток.

7.3. Аппаратура, состоящая из 900 элементов, функционирует нормально до тех пор, пока число отказавших элементов не

превысит двух. Каждый элемент независимо от других элементов в течение времени T работает безотказно с вероятностью 0,998. С какой вероятностью система в целом проработает безотказно время T ?

7.4. В среднем 0,2% холодильников требуют ремонта в течение гарантийного срока. Оцените вероятность того, что из 500 холодильников ремонта (в течение гарантийного срока) потребуют:

- а) ровно два холодильника;
- б) хотя бы один холодильник.

7.5. Завод отправил на базу 2000 изделий. Вероятность того, что изделие (независимо от других изделий) в пути повреждается, равна 0,0008. Оцените вероятность того, что среди доставленных на базу изделий поврежденные изделия составляют не более 0,1%.

7.6. При выпечке булочек с изюмом случается (с вероятностью 0,003), что в булочку не попадает ни одной изюминки. Оцените вероятность того, что в партии из 1000 булочек:

- а) нет булочек без изюминок;
- б) имеется ровно три булочки без изюминок;
- в) имеется не менее трех булочек без изюминок.

7.7. Сколькo в среднем изюминок должна содержать булочка, чтобы в достаточно большой партии булочки без изюминок встречались с вероятностью, меньшей, чем 0,01?

7.8. В данном городе малышей поздравляют с Новым годом 365 Дедов-Морозов. Оцените вероятность того, что из них:

- а) ни один не родился 1 января;
- б) ровно трое отмечают свой день рождения 1 января;
- в) не менее трех отмечают свой день рождения 1 января?

7.9. Каждый из ста знаков сообщения, независимо от остальных знаков, искажается на линии связи с вероятностью 0,005. Оцените вероятность того, что полученное сообщение:

- а) не содержит ни одного искаженного знака;
- б) содержит не менее двух искаженных знаков?

7.10. Случайные величины ξ и η имеют биномиальное и пуассоновское распределение вероятностей (соответственно), причем $M\xi = M\eta$. Какая дисперсия больше: $D\xi$ или $D\eta$?

7.11. Число вызовов на телефонной станции за единицу времени можно рассматривать как случайную величину, распределенную по закону Пуассона с параметром $\lambda = 100$. Каково

наиболее вероятное значение этой величины и чему равна вероятность этого значения?

7.12. Число атак, которым может подвергнуться цель, — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $\lambda = 3$. Определите вероятность поражения цели в результате этих атак, если известно, что каждая атака независимо от других атак заканчивается поражением цели с вероятностью 0,4. Как изменится вероятность поражения цели, если предположить, что число атак не случайно и равно 3?

П р и м е ч а н и е. Может ли измениться результат сопоставления указанных двух вариантов, если случайное число атак будет иметь распределение, отличное от пуассоновского, но с тем же математическим ожиданием 3? Решение этого вопроса, возможное и сейчас, мы отложим на некоторое время.

7.13. Задачу, аналогичную задаче 7.12, решите в предположении, что число атак самолета — случайная величина, имеющая геометрическое распределение вероятностей с математическим ожиданием 3.

7.14. Известно, что $\xi \sim \Pi(\lambda)$ и $P(\xi = 0) = \frac{1}{2}$. Вычислите $P(\xi = 2)$.

7.15. Известно, что $\xi \sim \Pi(\lambda)$ и $P(\xi = 4) = P(\xi = 6)$. Чему равна вероятность $P(\xi = 5)$?

7.16. Для случайной величины $\xi \sim \Pi(\lambda)$ вычислите $M(a^\xi)$ и $D(a^\xi)$, где a — заданное число, отличное от нуля.

7.17. Пусть A и B — события, состоящие в том, что случайная величина $\xi \sim \Pi(\lambda)$ принимает четное значение и нечетное значение соответственно. Какая из вероятностей $P(A)$ и $P(B)$ больше и на сколько?

7.18. Какова вероятность того, что в условиях задачи 7.2 число опечаток на 13-й странице четно?

Пуассоновский поток событий

Здесь рассматривается математическая модель таких реальных процессов, как поток вызовов на телефонной станции, поток космических частиц, попадающих на определенный участок земной поверхности, выход из строя частей того или иного оборудования в процессе его использования, приземление самолетов на данную посадочную полосу и т. д. Наряду

с термином *событие* мы будем употреблять также термины *заявка*, *требование*, — как это делается в теории массового обслуживания.

Пусть $\xi(\Delta)$ — число заявок, поступающих в промежутке времени Δ . Примем следующие соглашения о потоке этих заявок.

1. *Стационарность потока*: для всякого конечного набора попарно непересекающихся промежутков времени $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ вероятность

$$P(\xi(\Delta_1) = k_1, \xi(\Delta_2) = k_2, \dots, \xi(\Delta_n) = k_n)$$

зависит от чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$ и длин указанных промежутков времени, но не зависит от их расположения на оси времени. В частности, распределение вероятностей случайной величины $\xi(T, T+t)$ — числа заявок, поступающих в промежутке времени $[T, T+t)$, — не зависит от T , а зависит лишь от длины $t > 0$ данного промежутка. Это оправдывает следующее обозначение:

$$P_n(t) = P(\xi(T, T+t) = n) = P(\xi(0, t) = n).$$

2. *Отсутствие последствия*: распределение вероятностей случайной величины $\xi(T, T+t)$ не зависит от того, как поступали заявки до момента времени T . Отсюда нетрудно вывести, что в случае попарно непересекающихся промежутков времени $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$

$$P(\xi(\Delta_1) = k_1, \xi(\Delta_2) = k_2, \dots, \xi(\Delta_n) = k_n) = \prod_{r=1}^n P(\xi(\Delta_r) = k_r). \quad (7.8)$$

3. *Ординарность потока*: практическая невозможность появления более чем одной заявки в один и тот же момент времени. Введем обозначение

$$P_{>1}(t) = P(\xi(0, t) > 1).$$

Тогда ординарность потока может быть выражена соотношением

$$P_{>1}(\Delta t) = o(\Delta t), \quad (7.9)$$

которое, в свою очередь, означает, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{>1}(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

4. *Поведение на бесконечно малом промежутке времени*: вероятность поступления одной заявки за достаточно малое время Δt практически пропорциональна Δt ; точнее,

$$P_1(\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t), \quad (7.10)$$

где $\lambda > 0$ — параметр, реальный смысл которого раскрывается ниже.

Оказывается, что в принятых условиях

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.11)$$

и, таким образом, число заявок $\xi(t)$, поступающих за время t , представляет собой случайную величину, распределенную по закону Пуассона. По этой причине рассматриваемый поток называется *пуассоновским потоком с параметром λ* .

Очевидно, что

$$M\xi(t) = \lambda t. \quad (7.12)$$

Среднее число заявок, поступающих за единицу времени, принято называть *интенсивностью потока*. Поэтому параметр λ в (7.10) представляет собой интенсивность рассматриваемого потока.

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что четвертое из принятых выше соглашений является следствием первых трех соглашений.

| **7.19.** Доказать формулу (7.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем со случая $n = 0$. Очевидно, что при $\Delta t > 0$

$$\begin{aligned} P_0(t + \Delta t) &= P(\xi(0, t + \Delta t) = 0) = \\ &= P(\xi(0, t) = 0, \xi(t, t + \Delta t) = 0) = \\ &= P(\xi(0, t) = 0) \cdot P(\xi(t, t + \Delta t) = 0) = \\ &= P(\xi(0, t) = 0) \cdot P(\xi(0, \Delta t) = 0) = \\ &= P_0(t) P_0(\Delta t) = P_0(t) [1 - P_1(\Delta t) - P_{>1}(\Delta t)] = \\ &= P_0(t) [1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)] = P_0(t) - \lambda P_0(t) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

что в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ приводит к дифференциальному уравнению

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t). \quad (*)$$

Считая, естественно, что $P_0(0) = 1$, получаем

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Далее, для всякого $n \geq 0$

$$P_{n+1}(t + \Delta t) = P(\xi(0, t + \Delta t) = n + 1) =$$

$$\begin{aligned}
&= P(\xi(0, t) = n + 1, \xi(t, t + \Delta t) = 0) + \\
&\quad + P(\xi(0, t) = n, \xi(t, t + \Delta t) = 1) + \\
&\quad + \sum_{m=2}^{n+1} P(\xi(0, t) = n + 1 - m, \xi(t, t + \Delta t) = m) = \\
&= P_{n+1}(t) [1 - P_1(\Delta t) - P_{>1}(\Delta t)] + P_n(t) P_1(\Delta t) + o(\Delta t) = \\
&= P_{n+1}(t) [1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)] + P_n(t) \lambda \Delta t + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Отсюда выводим:

$$\frac{P_{n+1}(t + \Delta t) - P_{n+1}(t)}{\Delta t} = -\lambda P_{n+1}(t) + \lambda P_n(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

или, в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$,

$$P'_{n+1}(t) = -\lambda P_{n+1}(t) + \lambda P_n(t). \quad (**)$$

По аналогии с дифференциальным уравнением (*) полученные дифференциальные уравнения (**) следует решать при начальных условиях $P_{n+1}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Единственное решение в данном случае дает формула (7.11).

З а м е ч а н и е. Не зная заранее решений дифференциальных уравнений (*) и (**) при начальных условиях $P_0(0) = 1$, $P_{n+1}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, мы могли бы прийти к (7.11) методом производящих функций. Пусть

$$\Psi(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n.$$

Из (*) и (**) нетрудно вывести, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} P'_{n+1}(t) z^{n+1} = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(t) z^{n+1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^{n+1};$$

$$\Psi'_t(t, z) - P'_0(t) = -\lambda [\Psi(t, z) - P_0(t)] + \lambda z \Psi(t, z);$$

$$\Psi'_t(t, z) = -\lambda(1 - z) \Psi(t, z). \quad (***)$$

Уравнение (***) при начальном условии $\Psi(0, z) = 1$ имеет единственное решение

$$\Psi(t, z) = e^{-\lambda(1-z)t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} z^n,$$

что и приводит к соотношению (7.11).

7.20. Будем считать, что поток заявок в справочное бюро является пуассоновским потоком событий с параметром λ ; каждая заявка, независимо от остальных заявок, получает отказ с вероятностью p . Найти закон распределения и среднее значение случайной величины ξ — числа заявок, поступающих за единицу времени и получающих отказ.

Решение.

Способ 1. Пусть η — общее число заявок, поступающих за единицу времени. Тогда по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(\xi = m) &= \sum_{k=m}^{\infty} P(\xi = m | \eta = k) P(\eta = k) = \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} C_k^m p^m q^{k-m} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{m!(k-m)!} \cdot \frac{1}{k!} (\lambda q)^{k-m} (\lambda p)^m e^{-\lambda} = \\ &= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(\lambda q)^{k-m}}{(k-m)!} = \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^r}{r!} = \\ &= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda} e^{\lambda q} = \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

Выходит, что $\xi \sim \Pi(\lambda p)$, и, стало быть,

$$M\xi = \lambda p.$$

Способ 2. Очевидно, что поток заявок, получающих отказ, является стационарным и ординарным потоком без последствия, а общая формула (7.10), приведенная на с. 141, преобразуется в данном случае следующим образом:

$$\begin{aligned} P_1(\Delta t) &= P(\xi(0, \Delta t) = 1) = \\ &= P(\xi(0, \Delta t) = 1, \eta(0, \Delta t) = 1) + \\ &\quad + P(\xi(0, \Delta t) = 1, \eta(0, \Delta t) > 1) = \\ &= P(\eta(0, \Delta t) = 1) \cdot P(\xi(0, \Delta t) = 1 | \eta(0, \Delta t) = 1) + o(\Delta t) = \\ &= (\lambda \Delta t + o(\Delta t)) p + o(\Delta t) = \lambda p \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Поэтому заявки, получающие в справочном бюро отказ, образуют пуассоновский поток заявок с параметром λp , и, таким образом, $\xi \sim \Pi(\lambda p)$, $M\xi = \lambda p$.

7.21. Для пуассоновского потока заявок с параметром λ найти функцию распределения времени между двумя последовательными заявками.

Решение. Пусть $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ — моменты поступления заявок. Очевидно, что случайные величины

$$\tau_1, \quad \tau_2 - \tau_1, \quad \tau_3 - \tau_2, \quad \dots, \quad \tau_{n+1} - \tau_n, \quad \dots$$

распределены одинаково. Их общая функция распределения $F(t)$ и является искомой функцией.

По смыслу рассматриваемой задачи требуемая функция распределения (при $t > 0$) может быть найдена следующим образом:

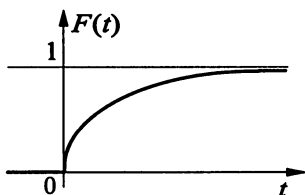


Рис. 7.1.

$$F(t) = P\{\tau_1 < t\} = 1 - P\{\tau_1 \geq t\} = 1 - P_0(t),$$

где $P_0(t)$ определяется формулой (7.11), приведенной на с. 141. Итак,

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$$

График такой функции распределения представлен на рис. 7.1.

Нормальная аппроксимация биномиального распределения

Здесь рассматривается еще одна аппроксимация биномиального распределения, ориентированная (в отличие от пуассоновской аппроксимации) на случай произвольной постоянной вероятности успеха p , $0 < p < 1$, в отдельном испытании.

Как известно (см., например, задачу 5.63) в схеме Бернулли при любом фиксированном $m = 0, 1, 2, \dots, n$ вероятность

$$P(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

есть величина бесконечно малая при $n \rightarrow \infty$. Чтобы составить представление о порядке этой малости, обратимся к рассмотрению величины

$$\tilde{\mu}_n = \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}},$$

нормированной по отношению к μ_n и принимающей значения

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (7.13)$$

Т е о р е м а 7.2 (локальная теорема Муавра-Лапласа). Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ и величина x_m определяется по формуле (7.13). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{npq} P(\mu_n = m) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_m^2/2} \rightarrow 1 \quad (7.14)$$

равномерно по всем m , для которых

$$|x_m| \leq C < \infty \quad (7.15)$$

при некотором $C > 0$.

В соответствии с этим для схемы Бернулли при достаточно большом числе испытаний n и любом m , удовлетворяющем условию (7.15),

$$P(\mu_n = m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad (7.16)$$

где

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (7.17)$$

Таблица значений функции $\phi(x)$ приведена на с. 438.

На практике гораздо больший интерес представляют вероятности вида $P(m_1 \leq \mu_n \leq m_2)$, или связанные с ними вероятности вида $P(a \leq \tilde{\mu}_n \leq b)$.

Т е о р е м а 7.3 (интегральная теорема Муавра-Лапласа). Для схемы Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, при $n \rightarrow \infty$

$$P\left(a \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \quad (7.18)$$

равномерно по $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Эту теорему используют, полагая, что при достаточно большом n и $a < b$

$$P\left(a \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a), \quad (7.19)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du. \quad (7.20)$$

Функции

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du,$$

используемые в приведенных теоремах и связанные соотношением

$$\Phi'(x) = \phi(x),$$

графически представлены на рис. 7.2.

Функция $\Phi(x)$ обладает всеми характеристическими свойствами функции распределения и определяет так называемое *стандартное нормальное распределение вероятностей*.

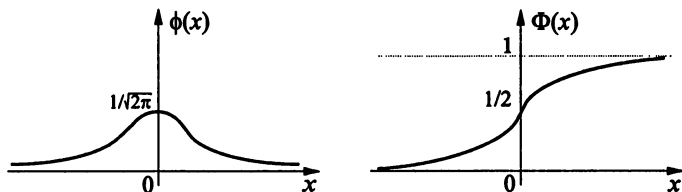


Рис. 7.2.

Из (7.19), принимая во внимание, что $\Phi(-\infty) = 0$, при достаточно большом n получаем

$$P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \approx \Phi(x). \quad (7.21)$$

Таким образом, интегральная теорема Муавра–Лапласа сводится к тому, что нормированное число успехов в n испытаниях Бернулли при больших значениях n имеет распределение, близкое к стандартному нормальному распределению вероятностей.

Основное для практических вычислений соотношение

$$P(m_1 \leq \mu_n \leq m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad (7.22)$$

(при достаточно большом n и $m_1 \leq m_2$) является простым следствием соотношения (7.19).

Многие результаты, связанные с нормальным распределением вероятностей, записываются проще, если вместо $\Phi(x)$ использовать *функцию Лапласа* (рис. 7.3),

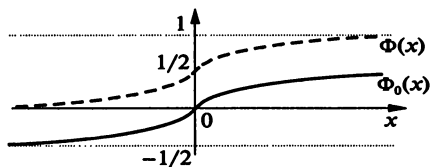


Рис. 7.3.

$$\Phi_0(x) = \Phi(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \quad (7.23)$$

более удобную — хотя бы потому, что она, в отличие от $\Phi(x)$, является нечетной; сравните:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad \Phi_0(-x) = -\Phi_0(x). \quad (7.24)$$

Таблица значений функции Лапласа приведена на с. 439.

Очевидно, что $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \Phi_0(\beta) - \Phi_0(\alpha)$ для любых α и β . Поэтому при $m_1 < m_2$ и любом m с учетом того, что $\Phi_0(+\infty) = -\Phi_0(-\infty) = \frac{1}{2}$,

$$P(m_1 \leq \mu_n \leq m_2) \approx \Phi_0\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right); \quad (7.25)$$

и, поскольку $\Phi_0(-\infty) = -\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} P(\mu_n \geq m) &\approx \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \\ P(\mu_n \leq m) &\approx \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Для небольших значений npq несколько более точны приближения

$$\begin{aligned} P(\mu_n \geq m) &\approx \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{m - np + 0,5}{\sqrt{npq}}\right), \\ P(\mu_n \leq m) &\approx \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{m - np + 0,5}{\sqrt{npq}}\right), \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$P(m_1 \leq \mu_n \leq m_2) \approx \Phi_0\left(\frac{m_2 - np + 0,5}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np - 0,5}{\sqrt{npq}}\right). \quad (7.28)$$

При решении некоторых из приведенных ниже задач используются следующие соотношения, легко выводимые из интегральной теоремы Муавра-Лапласа: для всяких $\lambda > 0$, $\Delta > 0$

$$P(|\mu_n - np| < \lambda\sqrt{npq}) \approx 2\Phi_0(\lambda), \quad (7.29)$$

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \Delta\right) \approx 2\Phi_0\left(\Delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (7.30)$$

Скорость сходимости в интегральной теореме Муавра-Лапласа описывается следующим неравенством Берри-Эссеена:

$$\sup_x \left| P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}. \quad (7.31)$$

Это неравенство, в частности, предостерегает, что при малых значениях p или q нормальная аппроксимация биномиального распределения может оказаться недостаточно точной (в этом случае естественно попытаться использовать пуассоновскую аппроксимацию).

7.22. Каждый избиратель, независимо от остальных избирателей, отдает свой голос за кандидата A с вероятностью 0,7 и за кандидата B — с вероятностью 0,3. Оценить вероятность того, что в результате голосования на избирательном участке (5000 избирателей) кандидат A опередит кандидата B :

- а) ровно на 1900 голосов;
- б) не менее, чем на 1900 голосов.

Решение. Пусть ξ — число голосов, поданных за кандидата A . Тогда $\xi \sim Bi(n = 5000, p = 0,7)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} p_1 &= P(\xi - (5000 - \xi) = 1900) = \\ &= P(\xi = 3450) = C_{5000}^{3450} 0,7^{3450} 0,3^{1550}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= P(\xi - (5000 - \xi) \geq 1900) = \\ &= P(\xi \geq 3450) = \sum_{m=3450}^{5000} C_{5000}^m 0,7^m 0,3^{5000-m}. \end{aligned}$$

а) По локальной теореме Муавра–Лапласа

$$\begin{aligned} p_1 &\approx \frac{1}{\sqrt{5000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} \cdot \phi\left(\frac{3450 - 5000 \cdot 0,7}{\sqrt{5000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}}\right) \approx \\ &\approx 0,0309 \phi(-1,54) = 0,0309 \phi(1,54) \approx 0,0038. \end{aligned}$$

б) По интегральной теореме Муавра–Лапласа

$$\begin{aligned} p_2 &= 1 - P(\xi < 3450) \approx 1 - \Phi\left(\frac{3450 - 5000 \cdot 0,7}{\sqrt{5000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}}\right) \approx \\ &\approx 1 - \Phi(-1,54) = \frac{1}{2} - \Phi_0(-1,54) = \frac{1}{2} + \Phi_0(1,54) \approx 0,9382. \end{aligned}$$

7.23. На выборах мэра города каждый из 1 000 000 избирателей, независимо от остальных избирателей, с вероятностью 0,6 отдает свой голос за кандидата A и с вероятностью 0,4 — за кандидата B . С какой вероятностью на выборах победит кандидат A ?

7.24. Каждый из 1 000 000 избирателей, независимо от остальных избирателей, отдает свой голос за кандидата A с вероятностью 0,51 и за кандидата B с вероятностью 0,49. Оцените вероятность того, что на выборах победит кандидат A .

7.25. На выборах мэра города каждый из миллиона избирателей, независимо от остальных избирателей, с вероятностью 0,45 отдает свой голос за кандидата A , с вероятностью 0,40 — за кандидата B , с вероятностью 0,15 — за кандидата C . Чтобы стать мэром по результатам первого тура голосования, нужно набрать не менее 50 % всех голосов плюс один голос. Какова вероятность того, что мэр будет избран уже в первом туре голосования?

7.26. В лыжной гонке на 50 км участвует 1000 человек. В среднем лишь 80 % участников выдерживают испытание до конца, а остальные сходят с дистанции. Оцените вероятность того, что в этой гонке к финишу придет:

- а) ровно 780 человек;
- б) не менее 780 человек.

7.27. Среди посетителей Дворца спорта дети составляют в среднем 30 %, взрослые — 70 %. Оцените вероятность того, что из 5000 зрителей, присутствующих во Дворце спорта, взрослые составляют:

- а) ровно 3550 человек;
- б) не менее 3550 человек.

7.28. Всхожесть некоторого сорта семян на данном земельном участке составляет в среднем 80 %. Оцените вероятность того, что прорастет не менее 85 % из 100 000 посеянных семян.

7.29. В страховом обществе застраховано 10 000 лиц одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти в течение года для каждого лица равна 0,006. Каждый застрахованный вносит 1 января страховой взнос в размере 120 руб., и в случае смерти его родственники получают от страхового общества 10 000 руб. Чему равна вероятность того, что страховое общество:

- а) потерпит убытки;
- б) получит прибыль не меньшую, чем 400 000 руб.; 600 000 руб.; 800 000 руб.?

7.30. В театре, вмещающем 1000 зрителей, два входа, каждый из которых имеет свой гардероб. Каким должно быть наименьшее число мест в каждом гардеробе, чтобы с вероятностью $P \geq 0,99$ все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Предполагается, что зрители приходят парами и каждая пара независимо от других

выбирает один из входов с равными вероятностями. Как изменятся результаты расчета, если предположить, что зрители приходят в театр не парами, а поодиночке?

7.31. Какое минимальное количество раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью не меньшей, чем 0,95, отклонение относительной частоты выпадения герба от вероятности его выпадения не превышало 0,01?

Решение. Пусть при подбрасывании монеты n раз число выпавших гербов равно μ_n . Тогда в соответствии с оценкой (7.30) искомое n найдется из условия

$$P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \leq 0,01\right) \approx 2\Phi_0\left(0,01 \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) \geq 0,95,$$

или (приближенно)

$$2\Phi_0(0,02\sqrt{n}) \geq 0,95.$$

Отсюда получаем (по-прежнему приближенно):

$$\Phi_0(0,02\sqrt{n}) \geq 0,475; \quad 0,02\sqrt{n} \geq 1,96; \quad n \geq 9604.$$

7.32. Оцените минимальное число подбрасываний игральной кости, для которого относительная частота выпадения пятерки с вероятностью не меньшей, чем P , отличается от вероятности ее выпадения не более, чем на 0,01, если:

а) $P = 0,95$; б) $P = 0,99$.

7.33. Полагая вероятность рождения мальчика равной 0,52, оцените пределы (с наименьшим размахом), в которых с вероятностью 0,95 будет заключено число мальчиков из тысячи новорожденных.

7.34. Задачу, аналогичную задаче 7.33, решите в предположении, что требуемая вероятность составляет не 0,95, а 0,99.

7.35. Оцените, в каких пределах с вероятностью P заключено число шестерок, выпадающих при подбрасывании 1000 игровых костей, если: а) $P = 0,95$; б) $P = 0,99$.

7.36. Из 1000 испытаний, проводимых по схеме Бернулли с вероятностью успеха $p = 0,4$, в 350 испытаниях зафиксирован успех. Сколько раз после этого нужно повторить испытания,

чтобы с вероятностью $P \geq 0,95$ относительная доля новых успехов отличалась от ее вероятности не больше, чем в первой тысяче испытаний?

Разные задачи

7.37. Вычислите $P(|\xi - M\xi| < \sqrt{D\xi})$, если:

а) $\xi \sim \Pi(4)$; б) $\xi \sim Bi(10, 0,2)$.

7.38. Пусть $\xi \sim Bi(500, 1/4)$. Оцените вероятности:

а) $P(\xi = 120)$; б) $P(110 \leq \xi \leq 125)$; в) $P(\xi < 120)$.

7.39. Пусть $\xi \sim Bi(500, 0,001)$. Оцените вероятности:

а) $P(\xi = 3)$; б) $P(\xi \geq 2)$; в) $P(\xi = 100)$.

7.40. Оцените вероятность $P(|\xi - M\xi| < \sqrt{D\xi})$, если:

а) $\xi \sim Bi(100, 0,5)$; б) $\xi \sim Bi(100, 0,01)$.

7.41. Оцените вероятность того, что из 292 женщин, работающих на данном предприятии:

а) ни одна не родилась 8 марта;

б) ровно трое отмечают свой день рождения 8 марта;

в) не менее, чем трое, отмечают свой день рождения 8 марта.

7.42. Знаки на линии связи искажаются независимо друг от друга. Вероятность искажения знака равна 0,003. Оцените вероятность того, что в сообщении из 800 знаков будет искажено:

а) ровно два знака;

б) не менее трех знаков?

7.43. Гроссмейстер дает сеанс одновременной игры на ста досках и каждую из ста партий, независимо от остальных партий, выигрывает с вероятностью 0,99, проигрывает с вероятностью 0,005 и сводит вничью с вероятностью 0,005. Оцените вероятность того, что гроссмейстер в этом сеансе наберет не менее 99 очков (за победу дается одно очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0 очков).

7.44. В большом городе в течение одного дневного часа поступает в среднем 2 вызова в диспетчерскую скорой помощи. Оцените вероятность того, что в течение трех дневных часов в диспетчерскую скорой помощи поступит:

а) ровно пять вызовов;

б) ровно шесть вызовов;

в) не менее пяти вызовов.

7.45. В водоем выпущено 100 меченых рыб. Вскоре после этого из водоема было выловлено 500 рыб; среди них оказалось 10 меченых. Оцените с вероятностью 0,95 общее количество рыб в водоеме.

7.46. Линия связи, имеющая 150 каналов, связывает пункт A с пунктом B , где этой линией пользуются 1300 абонентов, каждый в среднем по 6 минут в час. Оцените вероятность безотказного обслуживания абонентов в течение одного часа.

7.47. В условиях задачи 7.46 оцените минимальное дополнительное число каналов, которые обеспечили бы безотказное обслуживание абонентов в течение одного часа с вероятностью $P \geq 0,999$.

7.48. Известно, что $D\xi = 1$. Чему равна дисперсия $D(2^\xi)$, если случайная величина ξ имеет:

- а) биномиальное распределение со средним значением 2;
- б) пуассоновское распределение вероятностей?

7.49. На выборах каждый избиратель независимо от остальных избирателей отдает свой голос за кандидата A с вероятностью 0,8 в 1-м избирательном округе (1000 голосующих) и с вероятностью 0,7 во 2-м избирательном округе (1200 голосующих).

1) Получена информация о результатах голосования в одном из этих избирательных округов. Оцените вероятность того, что эта информация касается 1-го избирательного округа, если в соответствии с ней за кандидата A проголосовало:

- а) 800 человек; б) 820 человек; в) 840 человек.

2) Стало известно, что в одном из этих избирательных округов за кандидата A проголосовало 820 человек, а в другом — 810 человек. Оцените вероятность того, что эти данные относятся к 1-му и 2-му избирательным округам соответственно.

7.50. В каких точках функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ , распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda = 200$, имеет наибольший скачок? Чему он равен?

§ 8. Непрерывные случайные величины

Общие теоретические положения

Считается, что случайная величина ξ имеет *непрерывное распределение вероятностей*, если ее функция распределения

$$F(x) = P(\xi < x)$$

непрерывна на всей числовой прямой. Каждое свое значение такая случайная величина принимает с нулевой вероятностью:

$$P(\xi = c) = F(c + 0) - F(c) = 0.$$

В случае, когда непрерывная функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ представима в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad (8.1)$$

где $f(x) \geq 0$, говорят, что ξ имеет *абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности $f(x)$* .

Изменение функции $f(x)$ в любом конечном числе точек (и даже на любом бесконечном множестве лебеговой меры нуль) не изменяет значения интеграла в правой части (8.1). Поэтому плотность вероятности $f(x)$ определена с точностью до множества лебеговой меры нуль.

В точках непрерывности плотности вероятности

$$f(x) = F'(x). \quad (8.2)$$

Функция $f(x)$ может рассматриваться как плотность вероятности некоторой случайной величины тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим двум условиям:

$$f(x) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (8.3)$$

(неотрицательность и нормированность).

Для случайной величины ξ с плотностью вероятности $f(x)$ при $a < b$

$$\begin{aligned} P(a \leq \xi < b) &= P(a < \xi \leq b) = P(a \leq \xi \leq b) = P(a < \xi < b) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Таким образом, вероятность попадания случайной величины в промежуток с концами a и b можно интерпретировать геометрически как площадь под графиком плотности вероятности, которая приходится на этот промежуток (рис. 8.1).

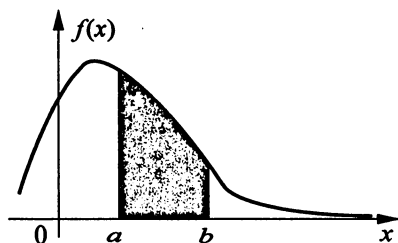


Рис. 8.1.

Если плотность вероятности $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то при $\Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta x > 0$)

$$P(x_0 - \Delta x < \xi < x_0 + \Delta x) = f(x_0) \cdot 2\Delta x + o(\Delta x), \quad (8.5)$$

или

$$f(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{P(x_0 - \Delta x < \xi < x_0 + \Delta x)}{2\Delta x}, \quad (8.6)$$

чем и оправдывается название *плотность вероятности*.

Моменты (в частности, математическое ожидание и дисперсия) случайной величины ξ с плотностью вероятности $f(x)$ находятся аналогично тому, как мы это делали в § 6 для дискретных случайных величин, но, естественно, суммы заменяются интегралами, а вероятности — плотностью вероятности. Так,

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (8.7)$$

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx, \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} D\xi &= M[(\xi - M\xi)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f(x) dx = \\ &= M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right)^2, \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$a_r = M\xi^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx, \quad (8.10)$$

$$\alpha_r = M[(\xi - a_1)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_1)^r f(x) dx. \quad (8.11)$$

Предполагается, что все приведенные здесь интегралы являются абсолютно сходящимися. Если какой-нибудь из них расходится или сходится, но не абсолютно, то говорят, что соответствующего математического ожидания не существует.

Формулы (6.16)–(6.28), приведенные на с. 109 и 110, носят общий характер и относятся не только к дискретным, но и к любым другим случайным величинам.

Плотности вероятности $f_{\xi}(x)$ и $f_{a\xi+b}(x)$ случайных величин ξ и $a\xi + b$ при $a \neq 0$ связаны соотношением

$$f_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{|a|} f_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right). \quad (8.12)$$

Абсолютно непрерывные распределения относятся к числу простейших непрерывных распределений. И хотя в дальнейшем мы ограничимся лишь ими, нельзя не упомянуть о существовании так называемых *сингулярных* распределений. Сингулярным называется всякое непрерывное распределение, для которого множество точек роста функции распределения имеет лебегову меру 0 (нуль). Представление о таких функциях студенты физико-математических специальностей имеют по *канторовой ступенчатой функции*, рассматриваемой в курсе функционального анализа. Производная этой функции почти всюду равна нулю и потому представление (8.1) невозможно: для сингулярного распределения плотность вероятности не определена.

Наконец, отметим, что обычно под *непрерывной случайной величиной* подразумевается случайная величина с абсолютно непрерывным распределением вероятностей.

8.1. 1) Верно ли, что если $P(A) = 0$, то A — невозможное событие?

2) Верно ли, что если $P(A) = 1$, то A — достоверное событие?

8.2. В круге радиуса r с центром в точке O наугад выбирается точка M . Найти функцию распределения, плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ , равной расстоянию между точками M и O .

Решение. При $0 < x < r$ вероятность

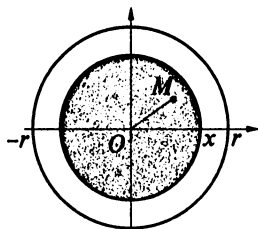


Рис. 8.2.

$P(\xi < x) = P(|OM| < x)$ (см. рис. 8.2) равна отношению площади круга радиуса x к площади круга радиуса r :

$$P(|OM| < x) = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \frac{x^2}{r^2}.$$

Это приводит к следующей функции распределения рассматриваемой случайной величины ξ :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{r^2}, & \text{если } 0 < x \leq r, \\ 1, & \text{если } x > r. \end{cases}$$

График этой функции распределения представлен на рис. 8.3, а. Соответствующая плотность вероятности $f(x)$ получается в результате дифференцирования функции распределения $F(x)$ во всех точках, кроме точки $x = r$, в которой $F(x)$ не дифференцируема, хотя и непрерывна. В подобных случаях значение $f(r)$ не существенно. Итак, считая, что

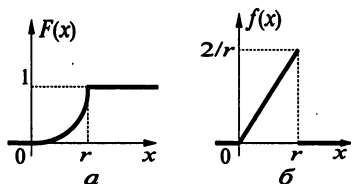


Рис. 8.3.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{r^2}, & \text{при } 0 < x < r, \\ 0, & \text{при } x \leq 0 \text{ и при } x > r \end{cases}$$

(рис. 8.3, б), мы можем доопределить эту функцию в точке $x = r$ произвольно, например, так: $f(r) = 0$, $f(r) = \frac{2}{r}$, $f(r) = \frac{100}{r}$ и т. п.

Дальнейшее решение задачи носит чисто технический характер. Имеем:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^r x \frac{2x}{r^2} dx = \frac{2}{3}r;$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^r x^2 \frac{2x}{r^2} dx = \frac{1}{2}r^2,$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{2}r^2 - \frac{4}{9}r^2 = \frac{1}{18}r^2.$$

8.3. Внутри сферы радиуса r наугад выбирается точка M . Найдите функцию распределения, плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ , равной расстоянию от точки M до сферы.

8.4. При каком значении C функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ 1 - \frac{C}{x}, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

служит функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины ξ ? Какой в этом случае будет плотность вероятности величины ξ и чему равно $M\xi$?

8.5. Существует ли значение C такое, что функция $f(x)$ служит плотностью вероятности? Если существует, то укажите его и вычислите соответствующие математическое ожидание и дисперсию:

$$1) f(x) = \begin{cases} C & \text{при } 0 < x < 5, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ и } x > 5; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} C(1 - |x|) & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} Ce^{-2x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0; \end{cases}$$

$$4) f(x) = Ce^{-|x|} \text{ при } -\infty < x < \infty;$$

$$5) f(x) = \begin{cases} Ce^{-x^2/2} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

8.6. При каком значении C функция

$$f(x) = \frac{C}{1 + x^2}$$

является плотностью вероятности некоторой случайной величины? Что можно сказать о математическом ожидании этой случайной величины?

8.7. Докажите, что если график функции $f(x)$ — плотности вероятности случайной величины ξ — симметричен относительно прямой $x = m$ и $M\xi$ существует, то $M\xi = m$.

8.8. Приведите пример случайной величины ξ , для которой график плотности вероятности симметричен относительно оси ординат, но условие $M\xi = 0$ не выполняется.

**$R(a, b)$ — равномерное распределение
в интервале (a, b)**

Так называется абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a < x < b, \\ 0 & \text{при } x < a \text{ и при } x > b. \end{cases} \quad (8.13)$$

Соответствующая функция распределения записывается в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (8.14)$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ приведены на рис. 8.4. Обратите внимание на то, что значения $f(a)$ и $f(b)$ на этом рисунке, так же, как и в (8.13), не отмечены явно. Можно считать, что

$$f(a) = f(b) = 0,$$

а можно положить

$$f(a) = f(b) = \frac{1}{b-a}$$

и даже как-нибудь иначе: ведь значения плотности вероятности $f(x)$ в любых двух точках никак не сказываются на функции распределения $F(x)$.

Неслучайно поэтому рассматриваемое распределение вероятностей называют также равномерным на отрезке $[a, b]$.

Запись $\xi \sim R(a, b)$ означает, что случайная величина ξ распределена равномерно в интервале (a, b) . Для такой величины

$$M\xi = \frac{a+b}{2}, \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (8.15)$$

Равномерное распределение широко используется в приложениях, особенно в связи с проблемами моделирования других распределений.

8.9. Для случайной величины $\xi \sim R(0, 4)$ вычислить:

- 1) $P(\xi < M\xi)$; 2) $P(\xi > \sqrt{D\xi})$; 3) $P(-5 \leq \xi \leq 5)$.

Решение. Для рассматриваемой случайной величины ξ

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{при } x \in (0, 4), \\ 0 & \text{при } x \notin (0, 4); \end{cases}$$

$$M\xi = \frac{a+b}{2} \Big|_{a=0, b=4} = 2;$$

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} \Big|_{a=0, b=4} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

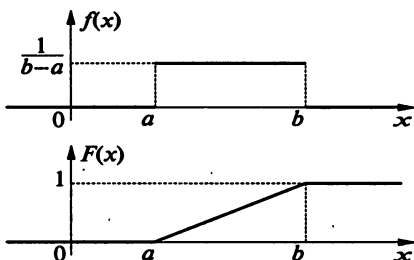


Рис. 8.4.

Отсюда находим:

$$1) P(\xi < M\xi) = P(\xi < 2) = \int_{-\infty}^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2};$$

$$2) P\left(\xi > \sqrt{D\xi}\right) = P\left(\xi > \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \\ = \int_{2/\sqrt{3}}^{\infty} f(x) dx = \int_{2/\sqrt{3}}^4 \frac{1}{4} dx = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$$3) P(-5 \leq \xi \leq 5) = \int_{-5}^5 f(x) dx = \int_0^4 \frac{1}{4} dx = 1.$$

8.10. Покажите, что если $\xi \sim R(a, b)$, то

$$P(\xi < M\xi) = P(\xi > M\xi) = \frac{1}{2}.$$

8.11. Известно, что случайная величина ξ имеет равномерное распределение в интервале (a, b) , причем $M\xi = D\xi = 3$. Найдите числа a и b .

8.12. Случайная величина ξ распределена равномерно в некотором интервале. Постройте графики ее функции распределения $F(x)$ и плотности вероятности $f(x)$, если

$$M\xi = 2, \quad D\xi = 0,75.$$

8.13. Зная о величине ξ лишь то, что $M\xi = 2$, $D\xi = 4/3$, студент высказал гипотезу: ξ имеет равномерное распределение вероятностей. Наблюдения над этой случайной величиной дали следующий результат:

$$0,9; \quad 3,5; \quad 4,4; \quad 2,6; \quad 1,3.$$

Согласуется ли высказанная гипотеза с этими наблюдениями?

8.14. Случайная величина ξ распределена равномерно в некотором интервале, причем

$$P(\xi < 1) = \frac{1}{2}, \quad P(\xi < 2) = \frac{2}{3}.$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и плотность вероятности $f(x)$ величины ξ ; построить их графики. Вычислить $M\xi$ и $D\xi$.

Решение. Если $\xi \sim R(a, b)$, то числа a и b могут быть получены как абсциссы точек пересечения прямой, проходящей через точки $(1, 1/2)$ и $(2, 2/3)$, с прямыми $y = 0$ и $y = 1$ соответственно (рис. 8.5). «Наклонная» часть графика функции $F(x)$ лежит на прямой

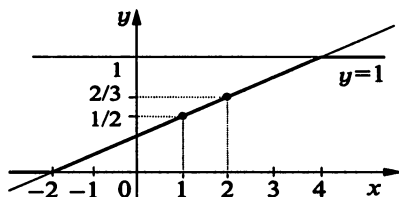


Рис. 8.5.

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}},$$

или

$$x = 6y - 2.$$

Полагая в этом уравнении $y = 0$, находим $a = -2$; аналогично, при $y = 1$ получаем $b = 4$.

Итак, $\xi \sim R(-2, 4)$. Следовательно, $M\xi = \frac{-2+4}{2} = 1$ (это, заметим, можно было бы заключить сразу же из условия $P(\xi < 1) = 1/2$), $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} = 3$. Графики функций

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{при } -2 < x < 4, \\ 0 & \text{при } x < -2 \text{ и при } x > 4. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{x+2}{6} & \text{при } -2 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

представлены на рис. 8.6.

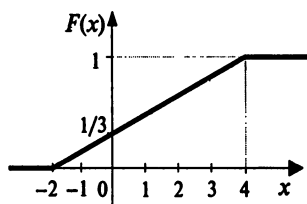
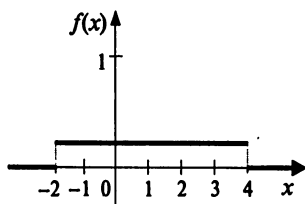


Рис. 8.6.

8.15. Какую наибольшую дисперсию может иметь случайная величина ξ , распределенная равномерно в некотором интервале, если ее функция распределения $F(x)$ удовлетворяет условию

$$F(1) = \frac{1}{3}, \quad F(4) = 1?$$

8.16. Случайная величина ξ распределена равномерно в некотором интервале, причем

$$P(\xi < 1) = \alpha, \quad P(\xi < 2) = \beta.$$

Вычислите вероятность $P(\xi < 3)$, если:

- 1) $\alpha = 1/4, \beta = 3/8$;
- 2) $\alpha = 1/5, \beta = 7/10$.

8.17. Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ , распределенной равномерно в некотором интервале, если известно, что:

- 1) $P(0 < \xi < 1) = 2/3, P(1 < \xi < 2) = 1/6$;
- 2) $P(0 < \xi < 1) = 1/7, P(1 < \xi < 2) = 1/5$;
- 3) $P(1 < \xi < 2) = 1/6, P(3 < \xi < 4) = 5/12$.

8.18. Случайная величина ξ распределена равномерно в некотором интервале, причем

$$P(0 < \xi < 1) = \frac{2}{3}, \quad P(1 < \xi < 2) = \frac{1}{3}.$$

- 1) Какое наименьшее значение может иметь $M\xi$?
- 2) Какое наибольшее значение может иметь $D\xi$?

8.19. Какую наименьшую и какую наибольшую дисперсию может иметь случайная величина ξ , распределенная равномерно в некотором интервале, если

$$P(0 < \xi < 1) = \frac{1}{3}, \quad P(2 < \xi < 3) = \frac{1}{4}?$$

8.20. Какой наименьшей и какой наибольшей может быть вероятность $P(1 < \xi < 2)$, если случайная величина ξ распределена равномерно в некотором интервале и

$$P(0 < \xi < 1) = \frac{1}{4}, \quad P(2 < \xi < 3) = \frac{1}{5}?$$

8.21. Доказать, что если $\xi \sim R(a, b)$, то при $\alpha > 0$
 $\eta = \alpha\xi + \beta \sim R(\alpha a + \beta, \alpha b + \beta)$.

В частности,

$$\eta = \frac{\xi - a}{b - a} \sim R(0, 1).$$

Решение. Из соотношения (8.12) (см. с. 156), учитывая, что

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } x \in (a, b), \\ 0 & \text{при } x \notin (a, b), \end{cases}$$

получаем:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\xi+\beta}(x) &= \frac{1}{|\alpha|} f_{\xi}\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f_{\xi}\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha(b-a)} & \text{при } a < \frac{x-\beta}{\alpha} < b, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha(b-a)} & \text{при } \alpha a + \beta < x < \alpha b + \beta, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

А это и означает, что $\eta = \alpha\xi + \beta \sim R(\alpha a + \beta, \alpha b + \beta)$.

Закончить решение задачи читатели могут самостоятельно.

8.22. Докажите, что если случайная величина ξ распределена равномерно в интервале (a, b) , то соответствующая нормированная случайная величина

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$$

распределена равномерно в интервале $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

8.23. Докажите, что если $\xi \sim R(0, 1)$, то и

$$\eta = 1 - \xi \sim R(0, 1).$$

Верно ли обратное утверждение?

8.24. Доказать, что если $\xi \sim R(-a, a)$, то

$$\eta = |\xi| \sim R(0, a).$$

Решение. Прежде всего заметим, что если $x \leq 0$, то

$$F_{\eta}(x) = P(\eta < x) = P(|\xi| < x) = 0.$$

При $x > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= P(\eta < x) = P(|\xi| < x) = \\ &= P(-x < \xi < x) = F_{\xi}(x) - F_{\xi}(-x). \end{aligned}$$

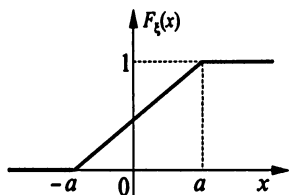


Рис. 8.7.

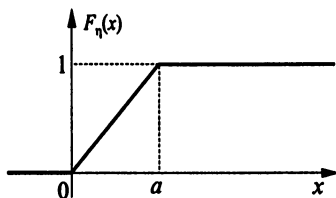


Рис. 8.8.

Принимая во внимание, что

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -a, \\ \frac{x+a}{2a} & \text{при } -a < x \leq a, \\ 1 & \text{при } x > a, \end{cases}$$

(рис. 8.7), получаем окончательно:

$$F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x/a & \text{при } 0 < x \leq a, \\ 1 & \text{при } x > a \end{cases}$$

(рис. 8.8). А это и есть функция распределения того закона, который мы обозначаем как $R(0, a)$.

8.25. Известно, что $\xi \sim R(a; b)$. При каком наименьшем значении λ

$$P(|\xi - M\xi| < \lambda \sqrt{D\xi}) = 1?$$

8.26. Пусть $\xi \sim R(-2, 4)$ и $\eta = |\xi|$. Сопоставьте графики плотностей вероятности $f_{\xi}(x)$ и $f_{\eta}(x)$, а также графики функций распределения $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(x)$ случайных величин ξ и η .

8.27. На стороне $AB = 1$ равностороннего треугольника ABC наугад выбирается точка M . Найти математическое ожидание и дисперсию площади треугольника AMC (рис. 8.9).

Решение. В треугольнике AMC длину отрезка AM можно рассматривать как случайную величину $\xi \sim R(0, 1)$ (еще одно истолкование выражения «точка M выбирается наугад на отрезке длины 1»). Учитывая, что

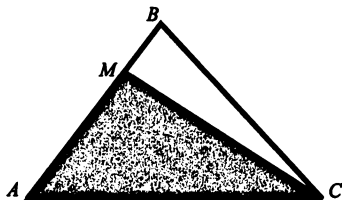


Рис. 8.9.

$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2}|AM| \cdot |AC| \cdot \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{4} \xi,$$

получаем:

$$M(S_{\triangle AMC}) = M\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\xi\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}M\xi = \frac{\sqrt{3}}{8};$$

$$D(S_{\triangle AMC}) = D\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\xi\right) = \frac{3}{16}D\xi = \frac{1}{64}.$$

8.28. Найдите математическое ожидание и дисперсию площади круга со случайным радиусом $\rho \sim R(3, 9)$.

8.29. Для случайной величины $\xi \sim R(-1, 5)$ вычислить $M((\xi - 1)(3 - \xi))$.

Решение. В условии равномерного распределения вероятностей случайной величины ξ подобные задачи проще всего решать по формуле (8.8) (см. с. 155). В данном случае имеем (проверьте):

$$M((\xi - 1)(3 - \xi)) =$$

$$= \int_{-1}^5 (x - 1)(3 - x) \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} \int_{-1}^5 (-x^2 + 4x - 3) dx = -2.$$

$E(\lambda)$ — экспоненциальное (показательное) распределение с параметром λ

Так (при $\lambda > 0$) называется абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (8.16)$$

Соответствующая функция распределения записывается в виде

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (8.17)$$

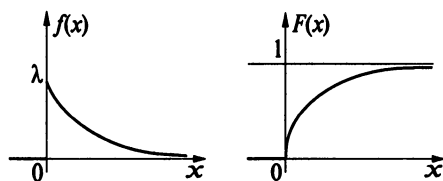


Рис. 8.10.

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ представлены на рис. 8.10.

Экспоненциальным распределением часто характеризуется срок службы той или иной технической системы до отказа (выхода из строя), что обуславливает широкое применение этого распределения в теории надежности.

Как мы уже знаем, в теории массового обслуживания данное распределение характеризует время между двумя последовательными событиями пуассоновского потока событий.

Запись $\xi \sim E(\lambda)$ означает, что случайная величина ξ распределена по экспоненциальному закону с параметром λ . Для такой случайной величины

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (8.18)$$

В соответствии с этим в математической статистике часто используется другая параметризация экспоненциального распределения. Так, вместо (8.16) пишут

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$; при этом $M\xi = \theta$.

8.30. На одном чертеже приведите графики плотностей вероятности $f_1(x)$ и $f_2(x)$ случайных величин $\xi_1 \sim E(1)$ и $\xi_2 \sim E(2)$, а на другом — графики соответствующих функций распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Пересекаются ли (при $x > 0$) графики функций:

- 1) $f_1(x)$ и $f_2(x)$; 2) $F_1(x)$ и $F_2(x)$?

8.31. Докажите, что если ξ_1 и ξ_2 — экспоненциально распределенные случайные величины и $M\xi_1 \neq M\xi_2$, то графики их плотностей вероятности $f_1(x)$ и $f_2(x)$ пересекаются в точке, абсцисса которой заключена между $M\xi_1$ и $M\xi_2$.

8.32. Докажите, что если $\xi \sim E(\lambda)$, то при $0 < a < b$

$$P(a < \xi < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

8.33. Докажите, что вероятности попадания случайной величины $\xi \sim E(\lambda)$ в интервалы $(0, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(n-1, n)$, ... образуют геометрическую прогрессию.

8.34. Докажите, что если $\xi \sim E(\lambda)$, то

$$P(1 < \xi < 2) \leq \frac{1}{4}.$$

8.35. Может ли экспоненциально распределенная случайная величина ξ удовлетворять условию

$$P(2 < \xi < 3) = \frac{4}{27}?$$

Если может, то чему тогда равно $M\xi$?

8.36. Какое событие для величины $\xi \sim E(\lambda)$ более вероятно: $\{\xi < M\xi\}$ или $\{\xi > M\xi\}$?

8.37. Для случайной величины $\xi \sim E(\lambda)$ вычислить

$$P(|\xi - M\xi| < 3\sqrt{D\xi}).$$

Решение:

$$\begin{aligned} P(|\xi - M\xi| < 3\sqrt{D\xi}) &= P\left(\left|\xi - \frac{1}{\lambda}\right| < \frac{3}{\lambda}\right) = \\ &= P\left(-\frac{3}{\lambda} < \xi - \frac{1}{\lambda} < \frac{3}{\lambda}\right) = P\left(-\frac{2}{\lambda} < \xi < \frac{4}{\lambda}\right) = \\ &= \int_{-2/\lambda}^{4/\lambda} f(x) dx = \int_0^{4/\lambda} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^{4/\lambda} = 1 - e^{-4} \approx 0,982. \end{aligned}$$

8.38. Найдите математическое ожидание $M\xi$ экспоненциально распределенной случайной величины ξ , если:

1) $P(|\xi - M\xi| < 1) = 6/7$;

2) $P(|\xi - M\xi| > 1) = 1/8$.

8.39. Полагая, что $\xi \sim E(\lambda)$ и $\eta = e^{-\xi}$, найдите $M\eta$ и $D\eta$.

8.40. Покажите, что если $\xi \sim E(\lambda)$, то $M\xi^n = \frac{n!}{\lambda^n}$ для всякого натурального n .

8.41. Известно, что $\xi \sim E(\lambda)$. При каком C величина $M|\xi - C|$ принимает наименьшее значение?

8.42. Доказать, что для случайной величины ξ , распределенной по экспоненциальному закону, и любых $t > 0$, $\tau > 0$

$$P(\xi > t + \tau \mid \xi > t) = P(\xi > \tau).$$

Как можно интерпретировать этот результат, полагая, например, что ξ — время безотказной работы электрической лампочки?

Решение. Прежде всего заметим, что при $x > 0$

$$P(\xi > x) = 1 - P(\xi < x) = e^{-\lambda x}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} P(\xi > t + \tau \mid \xi > t) &= \frac{P(\xi > t + \tau; \xi > t)}{P(\xi > t)} = \frac{P(\xi > t + \tau)}{P(\xi > t)} = \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \tau} = P(\xi > \tau). \end{aligned}$$

Полученный результат допускает следующую интерпретацию. Если лампочка по истечении времени t не вышла из строя ($\xi > t$), то в момент времени t ее можно рассматривать как новую: вероятность того, что она проработает безотказно еще в течение времени τ , — такая же, как и вероятность проработать безотказно время τ для новой лампочки.

Можно доказать, что из всех непрерывных случайных величин, отмеченным в условии задачи свойством (*отсутствие последствия*) обладают лишь экспоненциально распределенные величины. А с их дискретным аналогом читатели знакомы по задаче 6.65.

$N(\mu, \sigma^2)$ — нормальное (гауссовское) распределение с параметрами μ и σ

Стандартное нормальное распределение вероятностей было представлено в разделе 7 как аппроксимация биномиального распределения. По ходу изучения теории вероятностей мы столкнемся и с рядом других задач, важных как для теории, так и для практики, которые убедят нас в том, что нормальное распределение — это одно из важнейших распределений вероятностей.

Напомним: стандартное нормальное распределение вероятностей — это абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности $\phi(x)$ и функцией распределения $\Phi(x)$, определяемыми как

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du. \quad (8.19)$$

Графически эти функции представлены на рис. 8.11. Для всякой случайной величины ξ с указанным распределением

$$M\xi = 0, \quad D\xi = 1. \quad (8.20)$$

Случайная величина ξ с

$$M\xi = \mu, \quad D\xi = \sigma^2 \quad (\sigma > 0) \quad (8.21)$$

называется *нормально распределенной с параметрами μ и σ* , если соответствующая нормированная случайная величина

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} = \frac{\xi - \mu}{\sigma}$$

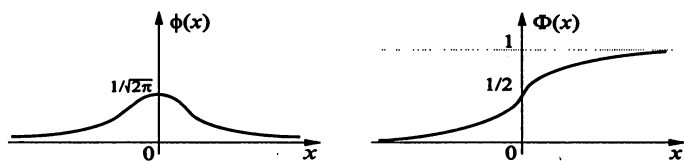


Рис. 8.11.

имеет стандартное нормальное распределение вероятностей. Учитывая, что

$$\xi = \mu + \sigma \tilde{\xi}$$

и используя формулу (8.12), приведенную на с. 156, нетрудно показать, что плотность вероятности $f(x)$ и функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ представляются как

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du. \quad (8.22)$$

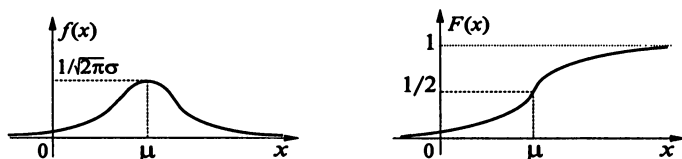


Рис. 8.12.

Графики этих функций представлены на рис. 8.12.

Влияние параметра μ на переход от рис. 8.11 к 8.12 не требует пояснений. Аналогичное влияние параметра σ на этих рисунках не столь заметно; оно нуждается в специальной иллюстрации. На рис. 8.13 представлены графики нормальной плотности вероятности при одном и том же значении μ , но разных значениях σ : $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

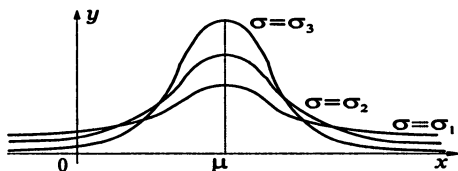


Рис. 8.13.

Рис. 8.14 дает представление о площадях под графиком нормальной плотности, приходящихся на промежутки $(-\infty, \mu - 3\sigma)$, $(\mu - 3\sigma, \mu - 2\sigma)$, $\dots$, $(\mu + 2\sigma, \mu + 3\sigma)$, $(\mu + 3\sigma, \infty)$. Эти площади равны вероятностям попадания случайной величины ξ в соответствующий промежуток. В частности,

$$P(|\xi - \mu| < 3\sigma) \approx 0,997.$$

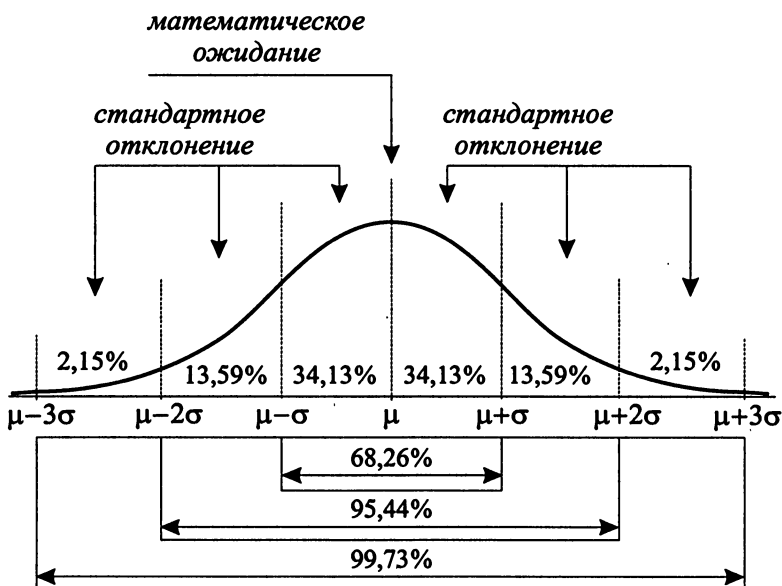


Рис. 8.14.

Этот факт иногда приводят в следующем виде.

Правило трех сигм. Нормально распределенная случайная величина с дисперсией σ^2 практически не отклоняется от своего среднего значения больше, чем на 3σ .

Нормальное распределение вероятностей однозначно определяется математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 . Это находит свое отражение в обозначении данного распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Стандартное нормальное распределение, представляющее собой частный случай нормального распределения при $\mu = 0$, $\sigma = 1$, обозначается, естественно, $\mathcal{N}(0, 1)$. Очевидно, что

$$(\tilde{\xi} \sim \mathcal{N}(0, 1)) \iff (\xi = \mu + \sigma \tilde{\xi} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)). \quad (8.23)$$

Функции распределения $F(x)$ и $\Phi(x)$, определяемые формулами (8.22) и (8.19), связаны соотношением

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right). \quad (8.24)$$

Поэтому для всякой случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ при $a < b$

$$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \quad (8.25)$$

Отсюда, например, легко выводится, что при $\lambda > 0$

$$P(|\xi - \mu| < \lambda\sigma) = 2\Phi(\lambda) - 1. \quad (8.26)$$

Как отмечалось в разделе 7, вычисления, связанные с нормальным распределением, чаще осуществляются не через функцию $\Phi(x)$, а через функцию Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \quad (8.27)$$

как более удобную, в частности, тем, что она является нечетной; сравните:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad \Phi_0(-x) = -\Phi_0(x). \quad (8.28)$$

Следует, однако, помнить, что функция $\Phi_0(x)$ (в отличие от функции $\Phi(x)$) не является функцией распределения.

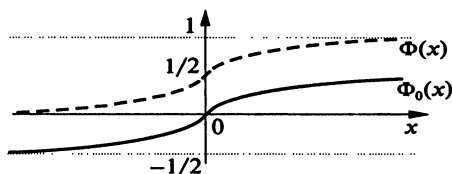


Рис. 8.15.

Очевидно, что

$$\Phi_0(x) = \Phi(x) - \frac{1}{2} \quad (8.29)$$

(рис. 8.15). Это приводит к следующим соотношениям для $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$P(a < \xi < b) = \Phi_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \quad a < b; \quad (8.30)$$

$$P(\xi < b) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right); \quad (8.31)$$

$$P(\xi > a) = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right); \quad (8.32)$$

$$P(|\xi - \mu| < \lambda\sigma) = 2\Phi_0(\lambda). \quad (8.33)$$

8.43. Докажите формулы (8.20).

8.44. Что для $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ больше: $P(\xi > M\xi)$ или $P(\xi < M\xi)$?

8.45. Докажите, что для всякого x
 $\Phi(2x) < \Phi(x) + 0,25$.

8.46. Вычислить вероятности попадания случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(1, 4)$ в промежутки:
 $(-3, 1)$; $(-\infty, -2)$; $(3, \infty)$.

Решение. По формулам (8.30)–(8.32), используя таблицу значений функции $\Phi_0(x)$, приведенную на с. 439, получаем:

$$\begin{aligned} P(-3 < \xi < 1) &= \Phi\left(\frac{1-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-3-1}{2}\right) = \\ &= \Phi_0(0) - \Phi_0(-2) = \Phi_0(0) + \Phi_0(2) \approx 0 + 0,477 = 0,477; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\xi < -2) &= \Phi\left(\frac{-2-1}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(-\frac{3}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,5 - 0,433 = 0,067; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\xi > 3) &= 1 - P(\xi < 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-1}{2}\right) = 1 - \Phi(1) = \\ &= \frac{1}{2} - \Phi_0(1) \approx 0,5 - 0,364 = 0,136. \end{aligned}$$

8.47. Для случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(2, 5)$, используя таблицу значений функции Лапласа, вычислите:

- а) $P(1 < \xi < 3)$; б) $P(\xi < 2)$; в) $P(\xi \leq 3)$;
 г) $P(\xi > 2,5)$; д) $P(|\xi| < 2)$; е) $P(|\xi| \geq 1)$.

8.48. Не пользуясь таблицами, решите, какая из вероятностей $P(|\xi| \leq 3)$ и $P(|\eta| \leq 3)$ больше, если:

- а) $\xi \sim \mathcal{N}(0, 2)$, $\eta \sim \mathcal{N}(0, 3)$;
 б) $\xi \sim \mathcal{N}(0, 2)$, $\eta \sim \mathcal{N}(1, 2)$?

8.49. Для величины $\xi \sim \mathcal{N}(-1, 1)$, используя соответствующие таблицы, найдите x из условия:

- а) $P(x < \xi < 1) = 0,8$;
 б) $P(0 < \xi < x) = 0,8$;
 в) $P(-1 - x < \xi < -1 + x) = 0,8$.

8.50. Известно, что $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Расположите в порядке возрастания вероятности попадания случайной величины ξ в интервалы: $(-2, 2)$, $(-1, 3)$, $(0, 4)$, $(-1, 5)$, $(2, 5)$.

Решение. Геометрически вполне очевидно, что если Δ_1 и Δ_2 — интервалы одинаковой длины, то большую из вероятностей $P(\xi \in \Delta_1)$ и $P(\xi \in \Delta_2)$ доставляет тот интервал, середина которого расположена ближе к точке 0. По этой причине

$$P(0 < \xi < 4) < P(-1 < \xi < 3) < \\ < P(-1,5 < \xi < 2,5) < P(-2 < \xi < 2).$$

8.51. Известно, что $\xi \sim \mathcal{N}(1, 4)$. Расположите в порядке возрастания вероятности

$$P(|\xi - 3| < 1), \quad P(|\xi - 2| < 1), \quad P(|\xi| < 1).$$

8.52. При каком значении параметра λ для случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ выполняется условие

$$P(|\xi - M\xi| < \lambda\sqrt{D\xi}) = P(|\xi - M\xi| > \lambda\sqrt{D\xi})?$$

8.53. Известно, что нормально распределенная случайная величина ξ удовлетворяет условию

$$P(|\xi - M\xi| < 1) = 0,3.$$

Вычислить

$$P(|\xi - M\xi| < 2).$$

Решение. Обозначим дисперсию величины ξ через σ^2 . Тогда, используя формулу (8.33), получим

$$P(|\xi - M\xi| < k) = P\left(|\xi - M\xi| < \frac{k}{\sigma}\sigma\right) = 2\Phi_0\left(\frac{k}{\sigma}\right).$$

Задача, таким образом, сводится к тому, чтобы найти $2\Phi_0\left(\frac{2}{\sigma}\right)$

при условии, что $2\Phi_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0,3$. Имеем:

$$\Phi_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0,15; \quad \frac{1}{\sigma} \approx 0,385; \quad \frac{2}{\sigma} \approx 0,77;$$

$$\Phi_0\left(\frac{2}{\sigma}\right) \approx 0,2794;$$

$$2\Phi_0\left(\frac{2}{\sigma}\right) \approx 0,56.$$

Итак,

$$P(|\xi - M\xi| < 2) \approx 0,56.$$

8.54. Нормально распределенная случайная величина ξ удовлетворяет условию $P(|\xi - M\xi| \leq 2) = 0,6$. Вычислите $P(|\xi - M\xi| > 3)$.

8.55. Для случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(1, 5)$ среди всех интервалов (a, b) , удовлетворяющих условию

$$P(a < \xi < b) = 0,95,$$

найти интервал наименьшей длины.

Решение. Геометрически вполне очевидно, что искомым интервалом служит интервал вида $(1-a, 1+a)$, симметричный относительно точки $M\xi = 1$. Для такого интервала

$$\begin{aligned} P(1-a < \xi < 1+a) &= \\ &= \Phi_0\left(\frac{1+a-1}{\sqrt{5}}\right) - \Phi_0\left(\frac{1-a-1}{\sqrt{5}}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right) = 0,95; \end{aligned}$$

$$\Phi_0\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right) = 0,475; \quad \frac{a}{\sqrt{5}} \approx 1,96; \quad a \approx 4,38.$$

Итак, искомым интервалом (приближенно) является интервал $(-3,38, 5,38)$.

8.56. Какую наименьшую длину может иметь интервал Δ , если

$$P(\xi \in \Delta) = 0,90,$$

причем $\xi \sim \mathcal{N}(2, 3)$?

8.57. При каком значении σ наименьшая длина интервала Δ , удовлетворяющего условию

$$P(\xi \in \Delta) = 0,95$$

для случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, будет равна 10?

8.58. Известно, что ξ — нормально распределенная случайная величина и $P(\xi < 1) = 0,7793$, $P(\xi < 2) = 0,8962$. Вычислите вероятность $P(\xi < 3)$.

8.59. Найдите математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины ξ , если

$$P(1 < \xi < 7) = P(7 < \xi < 13) = 0,18.$$

8.60. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(1, \sigma^2)$. При каком значении параметра $\sigma > 0$ вероятность $P(2 < \xi < 4)$ будет наибольшей?

8.61. Какое наибольшее значение может принимать вероятность $P(1 < \xi < 3)$, если известно, что ξ — нормально распределенная случайная величина, причем

$$P\{1 < \xi < 7\} = P\{3 < \xi < 9\}?$$

8.62. Для случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(-2, 9)$ вычислить $M((3 - \xi)(\xi + 5))$.

Решение. Поскольку $M\xi = -2$, $M\xi^2 = D\xi + (M\xi)^2 = 9 + 4 = 13$,

$$\begin{aligned} M((3 - \xi)(\xi + 5)) &= M(-\xi^2 - 2\xi + 15) = \\ &= -M\xi^2 - 2M\xi + 15 = -13 + 4 + 15 = 6. \end{aligned}$$

8.63. Доказать, что если $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то при $a \neq 0$

$$\eta = a\xi + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

В частности,

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Решение. По формуле (8.12), приведенной на с. 156,

$$f_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{|a|} f_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(|a|\sigma)} e^{-\frac{(x-a\mu-b)^2}{2(|a|\sigma)^2}}.$$

А это и есть плотность вероятности, соответствующая нормальному распределению $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

8.64. Пусть

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| > 1, \\ -x, & \text{если } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Докажите, что если $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то и $g(\xi) \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

8.65. Докажите, что если $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, то

$$M\xi^{2n} = (2n - 1)!! \sigma^{2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n - 1) \cdot \sigma^{2n}.$$

8.66. Докажите, что если $\xi \sim N(0, \sigma^2)$, то

$$M(|\xi|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma, \quad D(|\xi|) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\sigma^2.$$

8.67. Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании. Оцените (при больших значениях n) величину $M|\mu_n - np|$.

8.68. Известно, что ξ — стандартная нормальная случайная величина. При каком C математическое ожидание $M|\xi - C|$ принимает наименьшее значение. Чему равно это значение?

Функциональные преобразования непрерывных случайных величин

Пусть $g(x)$ — гладко обратимая функция, т. е. функция, для которой существует дифференцируемая обратная функция $g^{-1}(x)$; тогда плотности вероятности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(x)$ случайных величин ξ и $\eta = g(\xi)$ связаны соотношением

$$f_\eta(x) = f_\xi(g^{-1}(x)) \left| \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \right|. \quad (8.34)$$

Эта формула обобщает неоднократно использованную нами формулу

$$f_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

В случае, когда уравнение

$$x = g(y)$$

относительно y при заданном x имеет r решений $g_1^{-1}(x), g_2^{-1}(x), \dots, g_r^{-1}(x)$ и существуют производные

$$\frac{d}{dx} g_m^{-1}(x), \quad m = 1, 2, \dots, r,$$

плотность вероятности $f_\eta(x)$ может быть найдена по формуле

$$f_\eta(x) = \sum_{m=1}^r f_\xi(g_m^{-1}(x)) \left| \frac{d}{dx} g_m^{-1}(x) \right|. \quad (8.35)$$

8.69. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta = \sin \xi$ и построить ее график, если случайная величина ξ распределена равномерно в интервале:

- а) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; б) $(0, \pi)$.

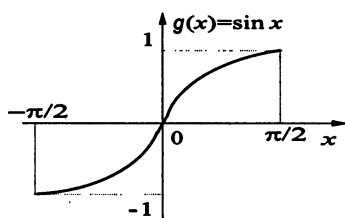


Рис. 8.16.

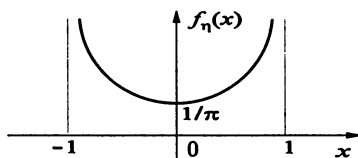


Рис. 8.17.

Решение (частично). а) Случайная величина ξ имеет следующую плотность вероятности:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 1/\pi, & \text{если } |x| < \pi/2, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Для $g(x) = \sin x$ имеем (в промежутке $|x| < \pi/2$; см. рис. 8.16):

$$g^{-1}(x) = \arcsin x, \quad \frac{d}{dx}g^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Поэтому случайная величина $\eta = \sin \xi$ имеет следующую плотность вероятности (см. (8.34)):

$$f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 8.17.

8.70. Найдите плотность вероятности случайной величины $\eta = 1/\xi$ и постройте ее график, если случайная величина ξ распределена равномерно в интервале:

а) (0,250; 0,375); б) (0; 0,5).

8.71. Докажите, что если $\xi \sim R(0, 1)$, то $\eta = -\ln \xi \sim E(1)$.

Логарифмически нормальное распределение

Так называется распределение вероятностей неотрицательной случайной величины ξ , логарифм которой имеет нормальное распределение. Если

$$\eta = \ln \xi \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (8.36)$$

то

$$\xi = e^{\eta}, \quad (8.37)$$

и для плотности вероятности $f(x)$ величины ξ имеем (при $x > 0$):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}. \quad (8.38)$$

Для всякого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{M}(\xi^n) = \mathbf{M}(e^{n\xi}) = e^{\frac{1}{2}n^2}. \quad (8.39)$$

Любопытно, что существуют распределения, отличные от (8.38), но имеющие те же моменты (8.39), что и величина ξ . Таким образом,

в общем случае моменты распределения вероятностей определяют это распределение неоднозначно.

Вместе с тем, справедливо следующее утверждение.

Теорема Карлемана. Пусть $a_n = \mathbf{M}\xi^n$, $n = 1, 2, \dots$.
Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt[n]{a_{2^n}}} = \infty, \quad (8.40)$$

то распределение вероятностей случайной величины ξ определяется ее моментами однозначно.

Условию (8.40) удовлетворяют, например, равномерное, экспоненциальное, нормальное распределения.

8.72. Выведите формулу (8.39).

8.73. Выведите формулу (8.38).

8.74. Пусть $f(x)$ определено формулой (8.38), $|c| \leq 1$ и

$$f_c(x) = f(x) \left(1 + c \sin(2\pi \ln x)\right).$$

Непосредственными вычислениями покажите, что:

1) функция $f_c(x)$ неотрицательна и нормирована, т. е. является плотностью вероятности;

2) распределения с плотностями $f(x)$ и $f_c(x)$ имеют равные соответствующие моменты.

8.75. Докажите, что нормальное распределение вероятностей удовлетворяет условию теоремы Карлемана.

8.76. Докажите, что если $\mathbf{P}(a < \xi < b) = 1$, то моменты случайной величины ξ определяют распределение этой величины однозначно.

8.77. Пусть ξ — случайная величина с плотностью вероятности $f(x)$, причем $M\xi^{2n-1}$ существует для всякого $n \in \mathbb{N}$.

1) Показать, что если $f(x)$ — четная функция, то $M\xi^{2n-1} = 0$.

2) Верно ли, что если $M\xi^{2n-1} = 0$ для всякого натурального n , то $f(x)$ — четная функция?

Решение (частично). 2) Вообще говоря, неверно. Пусть, например, ξ и η — случайные величины с неравными плотностями вероятности из задачи 8.74. Обозначим $f(x)$ и $g(x)$ — плотности вероятности случайных величин ξ и $-\eta$ соответственно. Тогда случайная величина ζ с плотностью вероятности $\frac{1}{2}[f(x) + g(x)]$ будет иметь распределение, не симметричное относительно нуля и обладающее свойством

$$M\zeta^{2n-1} = \frac{1}{2}[M\xi^{2n-1} - M\eta^{2n-1}] = 0.$$

Распределение Коши

Так называется абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}. \quad (8.41)$$

Соответствующая функция распределения записывается в виде

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x. \quad (8.42)$$

Для случайной величины с таким распределением не существует ни математического ожидания, ни, тем более, моментов высшего порядка.

8.78. При каком положительном значении λ достигается максимум вероятности $P(\lambda < \xi < 2\lambda)$, если ξ — случайная величина, распределенная по закону Коши?

8.79. Докажите, что если величина ξ имеет распределение Коши, то такое же распределение имеет и величина $\eta = 1/\xi$.

8.80. Докажите, что если $\xi \sim R(0, 1)$, то случайная величина $\eta = -\operatorname{ctg} \pi \xi$ имеет распределение Коши.

Энтропия абсолютно непрерывного распределения вероятностей

Энтропия $H(\xi)$ непрерывной случайной величины ξ (абсолютно непрерывного распределения) с плотностью вероятности $f(x)$ определяется — по аналогии с энтропией дискретной случайной величины — формулой

$$H(\xi) = -M \ln f(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) dx. \quad (8.43)$$

При этом считается, что в тех точках, в которых $f(x) = 0$, подынтегральная функция в (8.43) равна нулю.

Энтропия абсолютно непрерывного распределения (в отличие от энтропии дискретного распределения) не может рассматриваться как мера степени неопределенности этого распределения. Тем не менее, отдельные результаты, формулируемые с использованием этого понятия, существенно расширяют наши представления о некоторых абсолютно непрерывных распределениях вероятностей.

При сравнении энтропий случайных величин часто используется неравенство

$$-M_{\eta} \ln f_{\xi}(\eta) \geq -M_{\eta} \ln f_{\eta}(\eta) \quad (8.44)$$

или, в интегральной форме,

$$- \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(x) \ln f_{\xi}(x) dx \geq - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(x) \ln f_{\eta}(x) dx, \quad (8.45)$$

где $f_{\xi}(x)$ и $f_{\eta}(x)$ — плотности вероятности случайных величин ξ и η соответственно (сравните с (6.47), с. 128). Равенство в (8.44) и (8.45) достигается лишь тогда, когда ξ и η — одинаково распределенные случайные величины.

8.81. Вычислить энтропии следующих распределений:

- 1) $R(a, b)$; 2) $E(\lambda)$; 3) $N(\mu, \sigma^2)$.

Решение (частично).

- 3) Если $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, то

$$H(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{M}(\xi - \mu)^2 = \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) + \frac{1}{2} = \\
&= \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) + \ln \sqrt{e} = \ln \sqrt{2\pi e D},
\end{aligned}$$

где $D = \sigma^2$ — дисперсия случайной величины ξ .

Окончательный результат

$$\mathbf{H}(\xi) = \ln \sqrt{2\pi e D}$$

полезно запомнить.

8.82. Может ли быть отрицательной энтропия:

- а) дискретного распределения;
- б) абсолютно непрерывного распределения?

8.83. Опишите случаи, когда энтропия $\mathbf{H}(\xi)$ нормально распределенной случайной величины ξ :

- а) положительна; б) отрицательна; в) равна нулю.

8.84. Как связаны между собой энтропии случайных величин ξ и $\eta = a\xi + b$, если $a \neq 0$ и ξ имеет:

- а) дискретное распределение вероятностей;
- б) абсолютно непрерывное распределение вероятностей?

8.85. Доказать, что из всех абсолютно непрерывных распределений вероятностей на отрезке $[a, b]$ наибольшую энтропию имеет равномерное распределение. (*Экстремальное свойство равномерного распределения.*)

Доказательство. Пусть $f_\xi(x)$ — плотность вероятности случайной величины $\xi \sim R(a, b)$, а $f_\eta(x)$ — плотность вероятности любой случайной величины η такой, что $f_\eta(x) = 0$ при $x \notin [a, b]$.

Имеем:

$$\mathbf{H}(\xi) = \ln(b - a)$$

(см. задачу 8.81, 1). Последующие преобразования опираются на формулы (8.44) и (8.45):

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\xi) &= \ln(b - a) \cdot 1 = \ln(b - a) \cdot \int_a^b f_\eta(x) dx = \\
&= - \int_a^b f_\eta(x) \cdot \ln \frac{1}{b - a} dx = - \int_a^b f_\eta(x) \ln f_\xi(x) dx = \\
&= -\mathbf{M}_\eta \ln f_\xi(\eta) \geq -\mathbf{M}_\eta \ln f_\eta(\eta) = \mathbf{H}(\eta).
\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Полученный результат представляет собой распространение на абсолютно непрерывный случай результата задачи 6.68.

8.86. Доказать, что из всех абсолютно непрерывных распределений вероятностей на $\mathbb{R}$ с дисперсией σ^2 наибольшую энтропию имеют нормальные распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ — при любом μ . (Экстремальное свойство нормального распределения.)

Доказательство. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и η — произвольная случайная величина, имеющая абсолютно непрерывное распределение вероятностей с дисперсией $D\eta = \sigma^2$. Результат задачи 8.84 дает возможность ограничиться рассмотрением случая, когда $M\xi = M\eta = 0$.

Итак, будем считать, что

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad M\eta^2 = \sigma^2.$$

Из соотношений

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\eta}(x) dx$$

вытекает следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} H(\xi) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) \ln f_{\xi}(x) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) \left(\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(x) \left(\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(x) \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(x) \ln f_{\xi}(x) dx \geq \\ &\geq - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(x) \ln f_{\eta}(x) dx = H(\eta). \end{aligned}$$

8.87. Докажите, что из всех абсолютно непрерывных распределений вероятностей на $(0, \infty)$ с заданным математическим ожиданием наибольшую энтропию имеет экспоненциальное распределение вероятностей. (Экстремальное свойство экспоненциального распределения.)

Разные задачи

8.88. Докажите, что выпуклая линейная комбинация

$$f(x) = \sum_k a_k f_k(x), \quad a_k \geq 0, \quad \sum_k a_k = 1,$$

плотностей вероятности $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... представляет собой плотность вероятности. Верно ли аналогичное утверждение для функций распределения?

8.89. Как выглядит график функции распределения случайной величины ξ , если ее плотность вероятности является кусочно-постоянной функцией (рис. 8.18)?

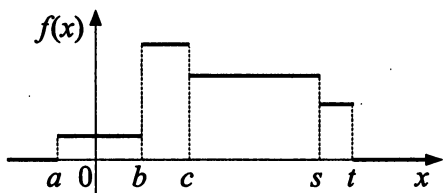


Рис. 8.18.

8.90. Плотность вероятности $f(x)$ случайной величины ξ непрерывна на всей числовой прямой. Верно ли, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0?$$

8.91. Известно, что $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Вычислите математическое ожидание и дисперсию длины окружности

$$x^2 + y^2 = \xi^2.$$

8.92. Вычислите математическое ожидание и дисперсию объема шара со случайным радиусом $\rho \sim R(2, 3)$.

8.93. Вычислите математическое ожидание и дисперсию объема правильного тетраэдра, сторона которого рассматривается как случайная величина, имеющая:

- распределение $E(1)$;
- распределение $R(0, 2)$.

8.94. Известно, что случайная величина ξ распределена равномерно в некотором интервале, $M\xi = 5$, $D\xi > 12$ и

$$P(|\xi - 10| \geq 2) = 3P(|\xi - 10| \leq 2).$$

Постройте график функции распределения величины ξ .

8.95. Какую наименьшую дисперсию может иметь случайная величина ξ , распределенная равномерно в некотором интервале, если

$$M\xi \geq 4, \quad P(\xi > 1) = \frac{5}{7}?$$

8.96. Вычислите $P(\xi > 2)$, если $\xi \sim E(\lambda)$ и $P(\xi > 1) = a$.

8.97. Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шарика $\mu = 5$ мм; фактический же диаметр можно рассматривать как нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием μ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0,05$ мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинального более, чем на 0,1 мм. Какой процент шариков в среднем отбраковывается?

8.98. В условиях задачи 8.97 предположим, что σ не задано, зато известно, что в среднем отбраковывается 6% шариков. Какова вероятность того, что диаметр наугад выбранного шарика будет заключен в пределах от 4,98 мм до 5,02 мм?

8.99. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — плотности вероятности, а $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения несовпадающих нормальных распределений $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ (либо $\mu_1 \neq \mu_2$, либо $\sigma_1 \neq \sigma_2$). Сколько общих точек имеют графики функций:

а) $f_1(x)$ и $f_2(x)$; б) $F_1(x)$ и $F_2(x)$?

8.100. Используя теоретико-вероятностные соображения, вычислите интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} e^{-x^2/3} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} e^{-x^2+4x-1} dx; \quad \text{в) } \int_{-1}^3 e^{-x^2-6x+5} dx.$$

8.101. Существует ли константа C , такая, что функция

$$f(x) = Ce^{-x^2+2x+2}$$

служит плотностью вероятности некоторой случайной величины ξ ? Если существует, укажите ее и найдите $M\xi$ и $D\xi$.

8.102. Докажите, что если $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\xi > x)}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}} = 1.$$

Иными словами, при $x \rightarrow \infty$

$$P(\xi > x) \sim \frac{1}{x} \phi(x),$$

где $\phi(x)$ — плотность вероятности стандартного нормального распределения.

8.103. Нормально распределенная случайная величина ξ удовлетворяет условию

$$M\xi = 0, \quad M|\xi| = 1.$$

Чему равна ее дисперсия?

8.104. Вычислите $M\sqrt{\xi}$, если $\xi \sim E(\lambda)$.

8.105. Модуль скорости молекулы рассматривается как случайная величина, распределенная по закону *Максвелла* с плотностью вероятности

$$f(x) = Cx^2 e^{-x^2}, \quad x > 0,$$

(C — нормирующая константа). Для модуля скорости и для кинетической энергии этой молекулы (масса молекулы равна m) вычислите средние значения и дисперсии.

8.106. Случайная точка M распределена равномерно на окружности $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ с центром в точке N . Как распределена абсцисса точки P , в которой прямая MN пересекает ось Ox ?

8.107. Пусть ξ — случайная величина с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln^2 x} & \text{при } x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup \left(e^2, \infty\right), \\ 0 & \text{при остальных значениях } x. \end{cases}$$

Докажите, что ξ не имеет ни моментов положительного порядка ($M\xi^k, k > 0$), ни моментов отрицательного порядка ($M\xi^{-k}, k > 0$).

8.108. Как связаны между собой энтропии величины ξ и соответствующей нормированной величины

$$\tilde{\xi} = (\xi - M\xi) / \sqrt{D\xi},$$

если ξ имеет абсолютно непрерывное распределение вероятностей? (Сравните с задачей 6.110.)

8.109. Известно, что пуассоновский поток заявок (см. § 7) в интервале $(0, t)$ принес $n \geq 1$ заявок. Пусть τ — время поступления какой-то, наугад выбранной заявки из числа этих n заявок. Докажите, что $\tau \sim R(0, t)$.

8.110. Докажите, что функция распределения $F(x)$, непрерывная в $\mathbb{R}$, равномерно непрерывна в $\mathbb{R}$.

8.111. Докажите, что случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение вероятностей тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}(\xi \in B) = 0$ для всякого борелевского множества B лебеговой меры нуль.

§ 9. Смешанные задачи на случайные величины

Определение математического ожидания

В предыдущих параграфах, рассматривая математическое ожидание той или иной случайной величины, мы основное внимание уделили вычислению этой характеристики, оставив в стороне вопрос о том, как она формально определяется.

Для случайной величины $\xi = \xi(\omega)$, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, математическое ожидание $M\xi$ по определению представляет собой *интеграл Лебега*

$$M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega), \quad (9.1)$$

разумеется, в предположении, что этот интеграл сходится. Если же приведенный интеграл расходится, то говорят, что математического ожидания случайной величины ξ не существует. Как известно, сходящийся интеграл Лебега сходится абсолютно. Поэтому в случае, когда сходится интеграл (9.1), сходящимся будет и интеграл

$$M|\xi| = \int_{\Omega} |\xi(\omega)| P(d\omega). \quad (9.2)$$

Иными словами, математические ожидания $M\xi$ и $M|\xi|$ либо оба существуют, либо оба не существуют; в последнем случае, очевидно, $M|\xi| = \infty$. Поэтому существование математического ожидания случайной величины ξ часто записывают в виде $M|\xi| < \infty$.

Определение математического ожидания интегралом Лебега позволяет совсем просто доказать *свойство линейности* математического ожидания: если $M|\xi| < \infty$, $M|\eta| < \infty$, то $M|a\xi + b\eta| < \infty$ для любых вещественных a и b , причем

$$M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta.$$

Студенты факультетов прикладной математики знакомы с понятием интеграла Лебега по курсу функционального анализа. Остальным студентам придется принять на веру, что сходящийся интеграл Лебега (9.1) может быть представлен в виде абсолютно сходящегося *интеграла Стильтьеса*

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x), \quad (9.3)$$

где $F(x) = P(\xi < x)$ — функция распределения случайной величины ξ , а этот интеграл, в свою очередь, преобразуется в абсолютно сходящийся ряд

$$M\xi = \sum_k x_k p_k \quad (9.4)$$

в случае дискретного распределения вероятностей величины ξ , т. е. при условии, что $\sum p_k = \sum P(\xi = x_k) = 1$, и в абсолютно сходящийся интеграл

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (9.5)$$

в случае абсолютно непрерывного распределения вероятностей случайной величины ξ , т. е. при условии, что $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$, $f(u) \geq 0$.

Очевидно, что в случае $M|\xi| < \infty$

$$|M\xi| \leq M|\xi|. \quad (9.6)$$

Если $P(|\xi| \leq \eta) = 1$ и математическое ожидание случайной величины η существует, то существует и математическое ожидание случайной величины ξ , причем

$$|M\xi| \leq M|\xi| \leq M\eta. \quad (9.7)$$

9.1. Докажите, что если $M\xi^2 < \infty$, $M\eta^2 < \infty$, то

$$M(\xi + \eta)^2 < \infty.$$

9.2. Доказать неравенство Коши–Буняковского:

$$M|\xi\eta| \leq \sqrt{M\xi^2 M\eta^2}$$

— в предположении, что $M\xi^2 < \infty$, $M\eta^2 < \infty$.

Решение. Существование $M|\xi\eta|$ обеспечивает неравенство

$$|\xi\eta| \leq \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

(с вероятностью 1). Далее, для любых вещественных a и b существует $M(a|\xi| + b|\eta|)^2$ (см. задачу 9.1), причем

$$\begin{aligned} M(a|\xi| + b|\eta|)^2 &\geq 0, \\ a^2 M\xi^2 + 2ab M|\xi\eta| + b^2 M\eta^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Главный определитель полученной неотрицательно определенной квадратичной формы относительно a и b должен быть

неотрицательным. Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \frac{M\xi^2}{M|\xi\eta|} \quad \frac{M|\xi\eta|}{M\eta^2} \right| &\geq 0, \\ M\xi^2 M\eta^2 - (M|\xi\eta|)^2 &\geq 0, \\ M(|\xi\eta|) &\leq \sqrt{M\xi^2 M\eta^2}. \end{aligned}$$

9.3. Пусть $P(\xi > 0) = 1$, $M\xi < \infty$. Используя неравенство Коши–Буняковского и соотношение $P\left(\sqrt{\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi}} = 1\right) = 1$, покажите, что

$$M \frac{1}{\xi} \geq \frac{1}{M\xi}.$$

Неравенства Чебышева

К неравенствам Чебышева относятся неравенства ($\varepsilon > 0$, $t > 0$)

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M|\xi|}{\varepsilon}, \quad (9.8)$$

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}, \quad (9.9)$$

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M|\xi|^t}{\varepsilon^t} \quad (9.10)$$

— в предположении, что $M|\xi| < \infty$, $D\xi < \infty$, $M|\xi|^t < \infty$ соответственно.

В книгах по теории вероятностей встречаются и другие названия этих неравенств. Так, неравенство (9.9) иногда приводится как *неравенство Чебышева–Бьенеме*, а неравенство (9.10) как *обобщенное неравенство Чебышева* или как *неравенство Маркова*.

При рассмотрении неравенств, связывающих математические ожидания с вероятностями, бывает полезно использовать понятие индикатора.

Индикатор случайного события A есть случайная величина, обозначаемая символом I_A и определяемая как

$$I_A = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{если } \omega \notin A. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$I_A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P(A) & 1 - P(A) \end{pmatrix}$$

и, в частности,

$$MI_A = P(A). \quad (9.11)$$

| 9.4. Доказать неравенства Чебышева (9.8)–(9.10).

Решение. Для всякого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} M|\xi| &\geq M\left(|\xi| I_{\{|\xi| \geq \varepsilon\}}\right) \geq M\left(\varepsilon I_{\{|\xi| \geq \varepsilon\}}\right) \geq \\ &\geq \varepsilon M I_{\{|\xi| \geq \varepsilon\}} = \varepsilon P(|\xi| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Это приводит к неравенству (9.8). Заменяя в нем ξ на $(\xi - M\xi)^2$, а ε на ε^2 , приходим к неравенству (9.9). Аналогично, замена в (9.8) $|\xi|$ на $|\xi|^t$ приводит к (9.10).

9.5. Доказать, что для всякой случайной величины ξ с конечной дисперсией

$$P(|\xi - M\xi| < 3\sqrt{D\xi}) \geq \frac{8}{9}.$$

Доказательство. Полагая в неравенстве (9.9) $\varepsilon = 3\sqrt{D\xi}$, получаем

$$P(|\xi - M\xi| \geq 3\sqrt{D\xi}) \leq \frac{D\xi}{(3\sqrt{D\xi})^2} = \frac{1}{9},$$

откуда и следует доказываемое неравенство.

9.6. Сравните оценку вероятности $P(|\xi - M\xi| < 3\sqrt{D\xi})$, полученную в задаче 9.5, с точным значением этой вероятности в случае, когда величина ξ имеет:

- 1) нормальное распределение;
- 2) экспоненциальное распределение;
- 3) равномерное распределение на отрезке.

9.7. Докажите следующие утверждения.

- 1) Если $M|\xi| = 0$, то $P(\xi = 0) = 1$.
- 2) Если $D\xi = 0$, то существует C , такое, что $P(\xi = C) = 1$.

9.8. Средний расход воды в населенном пункте составляет 50 000 литров в день. Оценить вероятность того, что в этом населенном пункте реальный дневной расход воды не превышает утроенного среднего расхода.

Решение. Пусть ξ — дневной расход воды. Тогда по неравенству (9.8)

$$P(\xi > 150\,000) \leq \frac{M\xi}{150\,000} = \frac{50\,000}{150\,000} = \frac{1}{3},$$

и потому

$$P(\xi \leq 150\,000) \geq \frac{2}{3}.$$

9.9. Число солнечных дней в году для данной местности можно рассматривать как случайную величину с математическим ожиданием 75. Оцените вероятность того, что в течение года в этой местности будет не более 200 солнечных дней.

9.10. Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании. Докажите, что для всякого $\alpha > 0$

$$P(|\mu_n - np| \geq \alpha \sqrt{npq}) \leq \frac{1}{\alpha^2}.$$

9.11. Пусть $\varepsilon > 0$, $0 < p < \frac{1}{2}$ и

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ p & 1-2p & p \end{pmatrix}.$$

Покажите, что

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

(в неравенстве Чебышева достигается равенство).

9.12. 1) Верно ли, что если $M|\xi| < \infty$, то при $c \rightarrow \infty$

$$M(\xi I_{\{|\xi| \geq c\}}) \rightarrow 0?$$

2) Верно ли, что если при $c \rightarrow \infty$

$$M(\xi I_{\{|\xi| \geq c\}}) \rightarrow 0,$$

то $M|\xi| < \infty$?

9.13. Доказать, что если $M|\xi| < \infty$, то при $P(A) \rightarrow 0$

$$M(|\xi| I_A) \rightarrow 0.$$

Решение. Прежде всего уточним приведенное утверждение: если $M|\xi| < \infty$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$,

такое, что $M(|\xi| I_A) < \varepsilon$, как только $P(A) < \delta$.

Для всякого $c > 0$

$$I_{\{|\xi| \geq c\}} + I_{\{|\xi| < c\}} = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M(|\xi| I_A) &= M(|\xi| I_A I_{\{|\xi| \geq c\}}) + M(|\xi| I_A I_{\{|\xi| < c\}}) \leq \\ &\leq M(|\xi| I_{\{|\xi| \geq c\}}) + cM(I_A) = \\ &= M(|\xi| I_{\{|\xi| \geq c\}}) + cP(A). \end{aligned}$$

Выбирая сначала c из условия $M(|\xi| I_{\{|\xi| \geq c\}}) < \frac{\varepsilon}{2}$, а затем $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$, мы добьемся того, что при $P(A) < \delta$ будет выполняться условие

$$M(|\xi| I_A) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

9.14. Докажите, что если $c > 0$, $\alpha > 0$ и $M|\xi|^{1+\alpha} < \infty$, то

$$M(|\xi| I_{\{|\xi| \geq c\}}) \leq \frac{M|\xi|^{1+\alpha}}{c^\alpha}.$$

Еще несколько важных неравенств

Если функция $g(x)$ не является линейной и каждая из величин $Mg(\xi)$ и $g(M\xi)$ определена, то решить какая из них больше, вообще говоря, непросто.

Неравенство Иенсена. Пусть $M|\xi| < \infty$, $M|g(\xi)| < \infty$ и $M\xi$ входит в область определения функции $g(x)$. Тогда:

а) если функция $g(x)$ выпукла книзу, то

$$Mg(\xi) \geq g(M\xi); \quad (9.12)$$

б) если функция $g(x)$ выпукла кверху, то

$$Mg(\xi) \leq g(M\xi). \quad (9.13)$$

Из неравенства Иенсена выводится немало других полезных неравенств.

Неравенство Ляпунова. Если $0 < s < t$ и $M|\xi|^t < \infty$, то

$$(M|\xi|^s)^{1/s} \leq (M|\xi|^t)^{1/t}, \quad (9.14)$$

и, в частности,

$$M|\xi| \leq (M|\xi|^2)^{1/2} \leq (M|\xi|^3)^{1/3} \leq \dots \quad (9.15)$$

Неравенство Гёльдера. Пусть $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Если $M|\xi|^p < \infty$, $M|\eta|^q < \infty$, то $M|\xi\eta| < \infty$ и

$$M|\xi\eta| \leq (M|\xi|^p)^{1/p} (M|\eta|^q)^{1/q}. \quad (9.16)$$

Неравенство Минковского. Если $M|\xi|^p < \infty$, $M|\eta|^p < \infty$, $1 \leq p < \infty$, то $M|\xi + \eta|^p < \infty$ и

$$(M|\xi + \eta|^p)^{1/p} \leq (M|\xi|^p)^{1/p} + (M|\eta|^p)^{1/p}. \quad (9.17)$$

9.15. Покажите, что неравенство Коши–Буняковского можно рассматривать как частный случай неравенства Гёльдера.

9.16. Неравенство

$$M\frac{1}{\xi} \geq \frac{1}{M\xi}$$

для случайной величины ξ , такой, что $P(\xi > 0) = 1$, $M\xi < \infty$ (см. задачу 9.3), докажите, используя неравенство Йенсена.

9.17. Число атак, которым может подвергнуться цель, — неотрицательная целочисленная величина ξ со средним значением $M\xi = n$, где n — натуральное число. Каждая атака, независимо от остальных атак, заканчивается поражением цели с вероятностью p . Докажите, что вероятность поражения цели в результате этих атак не превышает $1 - (1-p)^n$; указанная граница для вероятности поражения цели достигается в случае, когда $P(\xi = n) = 1$.

Примечание. Этот результат дает ответ на вопрос, поставленный в примечании к задаче 7.12.

Решение. Полагая $p_k = P(\xi = k)$ и используя сначала формулу полной вероятности, а затем неравенство Иенсена, для вероятности P поражения цели при случайном числе атак ξ находим:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k [1 - (1-p)^k] = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} p_k (1-p)^k = \\ &= 1 - M[(1-p)^\xi] \leq 1 - (1-p)^{M\xi} = 1 - (1-p)^n. \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация математического ожидания

Если математическое ожидание $M\xi$ случайной величины ξ с функцией распределения $F(x)$ существует, то

$$M\xi = - \int_{-\infty}^0 F(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx; \quad (9.18)$$

в частности, для неотрицательной случайной величины ξ

$$M\xi = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx. \quad (9.19)$$

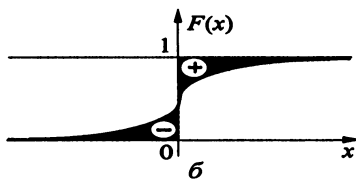
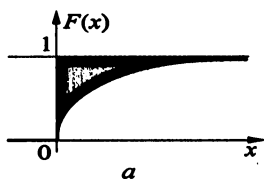


Рис. 9.1.

Это позволяет интерпретировать математическое ожидание как соответствующую площадь или разность площадей (для случая неотрицательной случайной величины ξ — рис. 9.1, а и для общего случая — рис. 9.1, б).

9.18. Доказать, что для неотрицательной целочисленной случайной величины ξ с конечным математическим ожиданием

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k).$$

(Этот результат полезно запомнить.)

Решение.

Способ 1. По условию ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} kP(\xi = k)$$

сходится абсолютно. Поэтому его члены можно перегруппировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} kp_k &= p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + \dots = \\ &= \left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots \right) + \\ &+ \left(p_2 + p_3 + p_4 + \dots \right) + \\ &+ \left(p_3 + p_4 + \dots \right) + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (p_k + p_{k+1} + \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k). \end{aligned}$$

Способ 2. В рассматриваемом случае общая формула (9.19) дает:

$$\begin{aligned} M\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} (1 - F(x)) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} (1 - (p_0 + p_1 + \dots + p_k)) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (1 - (p_0 + p_1 + \dots + p_k)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi \geq k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k). \end{aligned}$$

9.19. Для случайной величины $\xi \sim G(p)$ вычислите математическое ожидание, используя результат задачи 9.18.

9.20. Для случайной величины $\xi \sim E(\lambda)$ вычислите математическое ожидание, используя формулу (9.19).

9.21. 1) Вычислите математическое ожидание наименьшей из цифр, выпадающих при бросании шести игральных костей.

2) Вычислите математическое ожидание наименьшей из цифр, выпадающих при бросании n игральных костей; рассмотрите случай, когда $n \rightarrow \infty$.

9.22. 1) Вычислите математическое ожидание наибольшей из цифр, выпадающих при бросании шести игральных костей.

2) Вычислите математическое ожидание наибольшей из цифр, выпадающих при бросании n игральных костей; рассмотрите случай, когда $n \rightarrow \infty$.

9.23. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 10 человек. На каком этаже в среднем для высадки этих пассажиров лифт сделает:

- а) первую остановку;
- б) последнюю остановку?

9.24. Сколько раз в среднем придется бросать монету до тех пор, пока какой-нибудь своей стороной она не выпадет:

- а) дважды (не обязательно подряд);
- б) дважды подряд?

9.25. Сколько раз в среднем придется бросать игральную кость до тех пор, пока какая-нибудь ее грань не выпадет дважды (не обязательно подряд)?

9.26. В круг радиуса r вписан правильный n -угольник и внутри него наугад отмечена точка. Пусть ξ_n — наименьшее из расстояний от этой точки до сторон этого n -угольника. Вычислите $M\xi_n$. Найдите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n$ и сравните полученный результат с соответствующим результатом задачи 8.2.

9.27. Каждая партия между шахматистами A и B , независимо от остальных партий с вероятностью a заканчивается победой шахматиста A , с вероятностью b — победой шахматиста B и с вероятностью c — вничью, так что $a + b + c = 1$. Победа приносит одно очко, ничья — пол-очка, поражение — нуль очков. Турнир продолжается до тех пор, пока хотя бы один из участников не наберет двух очков. Вычислите $M\xi$ — среднее число сыгранных в турнире партий. При каких значениях параметров a , b и c величина $M\xi$ минимальна и при каких она максимальна?

9.28. Испытания Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании проводят до первого успеха, но не более, чем n раз. (Если все n испытаний принесли неудачу, испытания прекращаются.) Пусть ξ — число проведенных в данных условиях испытаний. Докажите, что

$$M\xi = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

где $q = 1 - p$.

9.29. Стрелок имеет 25 патронов. При каждом выстреле, независимо от остальных выстрелов, он попадает в мишень с вероятностью 0,96. Стрелку разрешено стрелять до первого промаха или пока он не израсходует все имеющиеся у него патроны. Сколько в среднем патронов израсходует стрелок?

Несколько примеров из теории надежности

Время безотказной работы того или иного объекта будем рассматривать как некоторую случайную величину ξ . Функция

$$R(t) = P(\xi > t) \quad (9.20)$$

аргумента $t \geq 0$ называется *функцией надежности* данного объекта. Средний срок T безотказной службы такого объекта,

$$T = M\xi,$$

в силу (9.7) и (9.6) выражается через функцию надежности $R(t)$ по формуле

$$T = \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (9.21)$$

В частности, для $\xi \sim E(\lambda)$

$$\begin{aligned} R(t) &= e^{-\lambda t}, \\ T &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

9.30. Техническое устройство состоит из n блоков и выходит из строя (отказывает) при выходе из строя хотя бы одного блока (*последовательное соединение* блоков; рис. 9.2, а). Блоки отказывают независимо друг от друга, причем время безотказной работы r -го блока, $r = 1, 2, \dots, n$, имеет экспоненциальное распределение $E(\lambda_r)$ с заданным параметром λ_r . Найти функцию надежности и средний срок безотказной работы данного технического устройства.

Решение. Пусть ξ_k — время безотказной работы k -го блока, $1 \leq k \leq n$, а ξ — время безотказной работы технического устройства в целом. Тогда, очевидно,

$$\xi = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

и для всякого $t > 0$

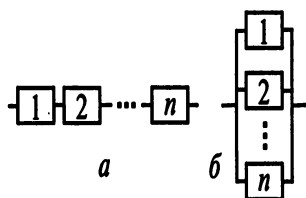
$$P(\xi > t) = P(\xi_1 > t, \xi_2 > t, \dots, \xi_n > t).$$

Независимость работы блоков друг от друга приводит к тому, что события $(\xi_1 > t)$, $(\xi_2 > t)$, ..., $(\xi_n > t)$ независимы. Отсюда

$$P(\xi > t) = P(\xi_1 > t) \cdot P(\xi_2 > t) \cdots P(\xi_n > t),$$

или, с учетом того, что $\xi_r \sim E(\lambda_r)$,

$$P(\xi > t) = e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdots e^{-\lambda_n t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)t}.$$



Таким образом, последовательное соединение нескольких «экспоненциальных» блоков приводит к «экспоненциальному» устройству, т. е. к устройству, время безотказной работы которого распределено по экспоненциальному закону распределения вероятностей (с параметром, равным сумме параметров отдельных блоков).

Рис. 9.2.

Следовательно,

$$T = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \cdots + \frac{1}{T_n}},$$

где $T_1, T_2, \dots, T_n$ — средние сроки безотказной службы отдельных блоков, а T — средний срок безотказной службы всего устройства. В частности, при $T_1 = T_2 = \cdots = T_n = T_0$

$$T = \frac{T_0}{n}. \quad (*)$$

9.31. Техническое устройство состоит из n блоков, работающих независимо друг от друга по схеме *параллельного соединения* (один основной и $n - 1$ резервных блоков — рис. 9.2, б): оно выходит из строя лишь в результате отказа каждого из n блоков. Полагая, что время безотказной работы любого отдельно взятого блока распределено по закону $E(\lambda)$, найти функцию надежности $R(t)$ и средний срок T безотказной работы данного технического устройства.

Решение. Если ξ — время безотказной работы устройства в целом, а ξ_k — время безотказной работы k -го блока, $1 \leq k \leq n$, то

$$\xi = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

и для всякого $t > 0$

$$\begin{aligned} R(t) &= P(\xi > t) = 1 - P(\xi < t) = \\ &= 1 - P(\xi_1 < t, \xi_2 < t, \dots, \xi_n < t) = \\ &= 1 - P(\xi_1 < t) \cdot P(\xi_2 < t) \cdots P(\xi_n < t) = \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n. \end{aligned}$$

Тогда по (9.21) имеем:

$$T = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-\lambda t})^n] dt.$$

Подстановка $1 - e^{-\lambda t} = x$ дает (проверьте):

$$T = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) dx.$$

Обозначая средний срок $1/\lambda$ безотказной работы отдельного блока через T_0 , получаем окончательно:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right). \quad (**)$$

Как показывает формула (**), безоглядное увеличение n может оказаться практически бесполезным: сумма

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

с увеличением n растет очень медленно, хотя и неограниченно. При достаточно большом n

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln n + C,$$

где $C = 0,5772\dots$ — так называемая *постоянная Эйлера*.

З а м е ч а н и е. Формула (**) допускает следующую интерпретацию, которую позднее мы доведем до уровня формального доказательства.

Представим величину ξ в виде

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n,$$

где η_{r+1} — время между r -м и $(r+1)$ -м по счету отказами блоков системы. Очевидно, что

$$\eta_1 = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

и потому $\eta_1 \sim E(n\lambda)$ (см. задачу 9.30). После того, как какой-то из n блоков отказал, оставшиеся $n-1$ блоков можно рассматривать как «новые» (характеристическое свойство экспоненциального распределения — см. задачу 8.42). Следовательно, $\eta_2 \sim E((n-1)\lambda)$. Аналогично устанавливается, что $\eta_r \sim E((n+1-r)\lambda)$ при $r = 3, 4, \dots, n$. Поэтому

$$M\eta_r = \frac{1}{(n+1-r)\lambda} \text{ для всякого } r = 1, 2, \dots, n \text{ и, стало быть,}$$

$$M\xi = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right).$$

9.32. Какое минимальное число резервных блоков нужно подключить параллельно к основному «экспоненциальному» блоку, чтобы средний срок безотказной работы устройства вырос не менее, чем в два раза?

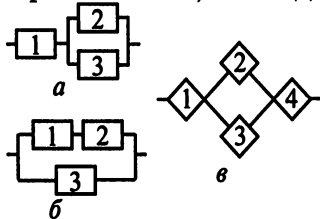


Рис. 9.3.

а также их средние сроки безотказной работы.

9.33. Каждый из указанных на рис. 9.3 экспоненциальных блоков имеет одну и ту же функцию надежности: $R(t) = e^{-\lambda t}$ со средним временем безотказной работы $T_0 = 1/\lambda$. Найдите соответствующие функции надежности для представленных на этих рисунках устройств,

9.34. Время ξ безотказной работы системы автоматического управления летательным аппаратом распределено по закону $E(\lambda)$. Система должна управлять аппаратом в течение времени T . Если она выходит из строя до истечения времени T , осуществляется мгновенный переход на ручное управление. Пусть η — время ручного управления летательным аппаратом, а $\zeta = \frac{1}{T}\eta$. Вычислите $M\zeta$ и покажите, что при $P_0 = e^{-\lambda T} \rightarrow 1$

$$\frac{M\zeta}{\frac{1}{2}(1 - P_0)} \rightarrow 1.$$

Примечание. Таким образом, для высоконадежной экспоненциальной системы автоматического управления летательным аппаратом относительная доля времени ручного управления в среднем составляет примерно половину «ненадежности» системы автоматического управления.

Примеры исследования разрывных распределений

Всякая функция распределения $F(x)$ однозначно представима в виде

$$F(x) = aF_1(x) + bF_2(x) + cF_3(x), \quad (9.23)$$

где a, b, c — неотрицательные числа, $a + b + c = 1$, а $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ — дискретная, абсолютно непрерывная и сингулярная функции распределения соответственно.

Вероятность попадания случайной величины ξ в любое борелевское множество B на прямой (это могут быть, например, точки, промежутки, их объединения, пересечения) выражается через функцию распределения $F(x)$ данной случайной величины следующим интегралом Стильтеса:

$$P(\xi \in B) = \int_B dF(x). \quad (9.24)$$

В этом смысле функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$ служит исчерпывающей характеристикой распределения вероятностей случайной величины ξ .

Моменты случайной величины в общем случае могут быть записаны в виде

$$M\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.25)$$

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) \quad (9.26)$$

и т. д., в предположении, что эти интегралы являются абсолютно сходящимися.

Далее нас будет интересовать случай, когда в представлении (9.23) $c = 0$, т. е. когда сингулярная составляющая отсутствует.

Предположим, что функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ дифференцируема на всей числовой прямой, исключая точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ (рис. 9.4). Скачки функции $F(x)$ в этих точках обозначим $a_1, a_2, \dots, a_n$ соответственно:

$$a_i = F(x_i + 0) - F(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При этом не исключается, что $a_k = 0$; в этом случае функция $F(x)$ является недифференцируемой, хотя и непрерывной в точке x_k .

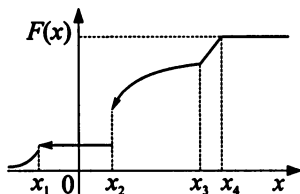


Рис. 9.4.

Пусть, теперь,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} F'(x), & \text{если } x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \\ 0, & \text{если } x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \end{cases}$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) dx = 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

(условие отсутствия сингулярной составляющей).

В этих предположениях случайной величине ξ можно приписать *обобщенную плотность вероятности*

$$f(x) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=1}^n a_k \delta(x - x_k), \quad (9.27)$$

где символом $\delta(x)$ обозначена δ -функция Дирака, характеризующаяся тем, что

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, \\ \infty & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad (9.28)$$

и для всякой функции $g(x)$, непрерывной в точке $x = c$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x - c) dx = g(c). \quad (9.29)$$

Обобщенная плотность вероятности может быть использована, например, при вычислении $Mg(\xi)$ — так же, как и обычная плотность вероятности:

$$\begin{aligned} Mg(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left[\tilde{f}(x) + \sum_{k=1}^n a_k \delta(x - x_k) \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\tilde{f}(x) dx + \sum_{k=1}^n a_k \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x - x_k) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\tilde{f}(x) dx + \sum_{k=1}^n a_k g(x_k) \end{aligned}$$

(в предположении, что функция $g(x)$ непрерывна в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$). В частности,

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\tilde{f}(x) dx + \sum_{k=1}^n a_k x_k, \quad (9.30)$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 \tilde{f}(x) dx + \sum_{k=1}^n a_k (x_k - M\xi)^2.$$

9.35. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ \frac{1}{5} + \frac{2}{5}(x-1), & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Решение. Что касается $M\xi$, то эта величина может быть вычислена достаточно легко — с помощью формулы (9.19): площадь фигуры, приведенной на рис. 9.5, равна $\frac{8}{5}$. Следовательно, $M\xi = \frac{8}{5}$.

Для вычисления $D\xi$ запишем обобщенную плотность вероятности случайной величины ξ :

$$f(x) = \tilde{f}(x) + \frac{1}{5}\delta(x-1) + \frac{2}{5}\delta(x-2),$$

где

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1 \text{ или } x \geq 2, \\ \frac{2}{5}, & \text{если } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} M\xi^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(\tilde{f}(x) + \frac{1}{5}\delta(x-1) + \frac{2}{5}\delta(x-2) \right) dx = \\ &= \int_1^2 x^2 \cdot \frac{2}{5} dx + \frac{1}{5} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(x-1) dx + \frac{2}{5} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(x-2) dx = \\ &= \frac{14}{15} + \frac{1}{5} + \frac{8}{5} = \frac{41}{15}, \end{aligned}$$

и потому

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{41}{15} - \frac{64}{25} = \frac{13}{75}.$$

9.36. Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -1, \\ \frac{1}{7} + \frac{2}{7}(x+1), & \text{если } -1 < x \leq 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

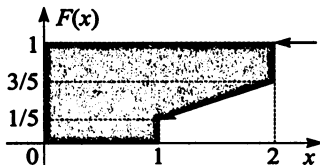


Рис. 9.5.

9.37. Для случайной величины ξ , приведенной в задаче 9.35, вычислите $M[\xi]$ и $D[\xi]$, где $[x]$ — целая часть числа x , а также $M\{\xi\}$ и $D\{\xi\}$, где $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x .

9.38. Случайная величина ξ имеет распределение Коши. Найти функцию распределения случайной величины

$$\eta = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |\xi| > 1. \end{cases}$$

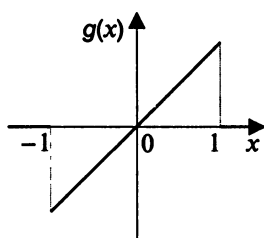


Рис. 9.6.

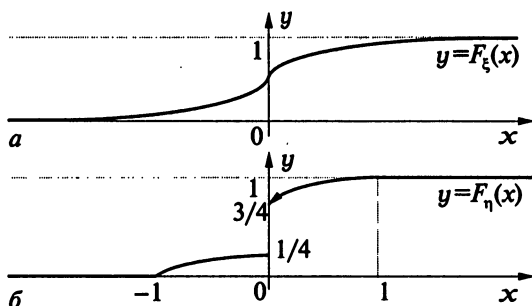


Рис. 9.7.

Решение. Преобразование $y = g(x)$, переводящее случайную величину ξ в величину η , представлено своим графиком на рис. 9.6. График функции распределения

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x.$$

заданной случайной величины ξ представлен на рис. 9.7, а.

Для отыскания функции распределения $F_{\eta}(x)$ случайной величины η прежде всего заметим (рис. 9.6), что все значения этой величины с вероятностью 1 заключены на отрезке $[-1, 1]$. Поэтому $F_{\eta}(x) = 0$ при $x \leq -1$ и $F_{\eta}(x) = 1$ при $x > 1$. Если $-1 < x \leq 0$, то

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= P(\eta < x) = \\ &= P(-1 < \xi < x) = F_{\xi}(x) - F_{\xi}(-1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

Наконец, при $0 < x \leq 1$ имеем:

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= P(\eta < x) = P((\xi < x) \cup (\xi > 1)) = \\ &= F_{\xi}(x) + (1 - F_{\xi}(1)) = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

Итак,

$$F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 9.7, б.

9.39. Известно, что $\xi \sim N(0, 1)$. Найдите функцию распределения случайной величины

$$\eta = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq 2, \\ 0, & \text{если } |\xi| > 2. \end{cases}$$

Постройте график найденной функции распределения.

Асимметрия и эксцесс распределения вероятностей

Пусть a_k и α_k — начальный и центральный моменты k -го порядка случайной величины ξ :

$$a_k = M\xi^k, \quad \alpha_k = M(\xi - M\xi)^k,$$

$k = 1, 2, \dots$. Легко доказывается, что

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^k C_k^m (-a_1)^m a_{k-m}. \quad (9.31)$$

В частности (проверьте),

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3, \\ \alpha_4 &= a_4 - 4a_1 a_3 + 6a_1^2 a_2 - 3a_1^4. \end{aligned}$$

Коэффициент асимметрии случайной величины ξ (соответствующего распределения вероятностей) с $D\xi \neq 0$, $M|\xi|^3 < \infty$ определяется как

$$\kappa_1 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2^{3/2}}. \quad (9.32)$$

Для симметричного распределения $\kappa_1 = 0$; в общем случае безразмерная величина κ_1 используется как некая (разумеется, далеко не исчерпывающая) характеристика несимметричности распределения.

Коэффициент эксцесса случайной величины ξ (соответствующего распределения вероятностей) с $D\xi \neq 0$, $M\xi^4 < \infty$ определяется как

$$\kappa_2 = \frac{\alpha_4}{\alpha_2^2} - 3. \quad (9.33)$$

Эту безразмерную величину используют как некую характеристику удельного веса больших отклонений случайной величины от ее среднего значения.

Для нормального распределения вероятностей

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0.$$

Поэтому характеристики κ_1 и κ_2 вместе дают определенное представление о степени отклонения рассматриваемого распределения вероятностей от нормального распределения.

9.40. Если $a \neq 0$, то случайные величины ξ и $a\xi + b$ (при условии, что $D\xi \neq 0$, $M\xi^4 < \infty$) имеют равные коэффициенты асимметрии и равные коэффициенты эксцесса. Докажите это.

9.41. Вычислите коэффициенты асимметрии и эксцесса для следующих распределений вероятностей:

а) $\Pi(\lambda)$; б) $R(a, b)$; в) $E(\lambda)$.

9.42. Пусть $\xi \sim Bi(n, p)$ и $\alpha_k(p) = M(\xi - M\xi)^k$, $k = 1, 2, \dots$. Доказать, что для всякого $k \geq 2$

$$\alpha_{k+1}(p) = pq \left(\frac{d}{dp} \alpha_k(p) + nk \alpha_{k-1}(p) \right),$$

где, как обычно, $q = 1 - p$.

Доказательство. Имеем (при $k \geq 2$):

$$\begin{aligned} \alpha_k(p) &= \sum_{m=0}^n (m - np)^k C_n^m p^m q^{n-m}; \\ \frac{d}{dp} \alpha_k(p) &= \sum_{m=0}^n \left(-nk(m - np)^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m}{p} - \frac{n-m}{q} \right) (m - np)^k C_n^m p^m q^{n-m} \right) = \\ &= -nk \alpha_{k-1}(p) + \sum_{m=0}^n \frac{m - np}{pq} (m - np)^k C_n^m p^m q^{n-m} = \\ &= -nk \alpha_{k-1}(p) + \frac{1}{pq} \alpha_{k+1}(p). \end{aligned}$$

Отсюда и получаем требуемое равенство.

9.43. Вычислить коэффициенты асимметрии и эксцесса для биномиального распределения вероятностей $Bi(n, p)$.

Решение. Как известно, для рассматриваемого распределения вероятностей $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = npq$. По рекуррентной фор-

муле, доказанной при решении предыдущей задачи,

$$\alpha_3 = pq[n(q-p) + 2n \cdot 0] = npq(q-p);$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= pq \left[(nq(q-p) - np(q-p) - 2npq) + 3n \cdot npq \right] = \\ &= npq(1 - 6pq) + 3(npq)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\kappa_1 = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_2^3}} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}; \quad \kappa_2 = \frac{\alpha_4}{\alpha_2^2} - 3 = \frac{1-6pq}{npq}.$$

З а м е ч а н и е. При $n \rightarrow \infty$ имеем: $\kappa_1 \rightarrow 0$, $\kappa_2 \rightarrow 0$. Это вполне ожидаемый результат для всякого $p \in (0, 1)$: вспомните интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Если $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $np \rightarrow \lambda > 0$, то

$$\kappa_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \kappa_2 \rightarrow \frac{1}{\lambda},$$

что хорошо согласуется с результатом задачи 9.41, а.

Моделирование случайных величин

Если функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ непрерывна на всей числовой прямой, то

$$\eta = F(\xi) \sim R(0; 1). \quad (9.34)$$

Обращение (9.34) — явное выражение ξ через η — связывается с обращением функции распределения $F(x)$, которое в элементарном смысле, вообще говоря, невыполнимо из-за возможных промежутков постоянства $F(x)$ (рис. 9.8). Но эта трудность устранивается следующим соглашением.

Под функцией $F^{-1}(x)$, обратной к функции распределения $F(x)$ случайной величины ξ , условимся подразумевать функцию (при $0 \leq x \leq 1$)

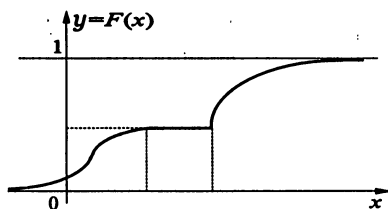


Рис. 9.8.

$$F^{-1}(x) = \sup_u \{u : F(u) < x\}, \quad (9.35)$$

независимо от того, имеет ли $F(x)$ промежутки постоянства; допускается также, что $F(x)$ — разрывная функция. При таком соглашении, оказывается, из $\eta \sim R(0, 1)$ следует

$$\xi = F^{-1}(\eta) \sim F(x). \quad (9.36)$$

Это соотношение означает, что случайная величина $F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$.

З а м е ч а н и е. Если $F(x)$ — строго возрастающая функция, то функция $F^{-1}(x)$, определяемая соотношением (9.35), совпадает с элементарной обратной к $F(x)$ функцией и может быть найдена как решение уравнения

$$x = F(y)$$

относительно y при фиксированном x .

Формулы (9.34) и (9.36), показывающие, как связаны между собой распределения $F(x)$ и $R(0, 1)$ (рис. 9.9), лежат в основе моделирования случайных величин. Подчеркнем лишь еще раз, что под $F(x)$ в (9.34) можно подразумевать только непрерывную, а в (9.36) — любую функцию распределения.

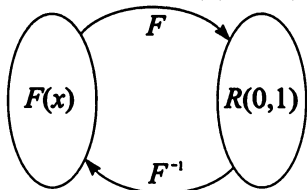


Рис. 9.9.

Суть моделирования случайной величины ξ с заданной функцией распределения $F(x)$ состоит в том, чтобы тем или иным способом получить нужное число N независимых наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_N$ над случайной величиной ξ .

Один из возможных путей решения этой задачи заключается в следующем. Располагая программой, позволяющей генерировать независимые наблюдения $y_1, y_2, \dots, y_N$ над случайной величиной $\eta \sim R(0, 1)$, или таблицей, содержащей $y_1, y_2, \dots, y_N$ (см. табл. 4 на с. 440), мы сможем получить требуемые независимые наблюдения $x_1, x_2, \dots, x_N$ над случайной величиной ξ с заданной функцией распределения $F(x)$, положив

$$x_k = F^{-1}(y_k), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (9.37)$$

Числа $x_1, x_2, \dots, x_N$ в (9.37) называются *псевдослучайными числами* с функцией распределения $F(x)$.

9.44. Известно, что $\xi \sim R(0, 1)$. Подобрать какую-нибудь функцию $g(x)$ так, чтобы случайная величина $\eta = g(\xi)$ имела экспоненциальное распределение вероятностей с параметром λ .

Р е ш е н и е. Функция распределения $F(x)$ искомой случайной величины $\eta \sim E(\lambda)$ записывается в виде

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Поэтому при $0 < x < 1$ обратную к ней функцию $F^{-1}(x)$ можно найти как решение уравнения

$$1 - e^{-\lambda y} = x$$

относительно y при фиксированном x . Имеем:

$$e^{-\lambda y} = 1 - x,$$

$$y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x).$$

Следовательно, в качестве искомого преобразования можно выбрать преобразование

$$g(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-x);$$

это дает

$$g(\xi) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\xi) \sim E(\lambda).$$

Импликация

$$(\xi \sim R(0, 1)) \iff ((1-\xi) \sim R(0, 1))$$

(задача 8.23), приводит к выводу о том, что в качестве искомой функции $g(x)$ может выступать любая из функций

$$g_1(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-x) \quad \text{и} \quad g_2(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln x.$$

9.45. Пусть $\eta \sim R(0, 1)$. Подберите какую-нибудь функцию $g(x)$ так, чтобы случайная величина $\xi = g(\eta)$ имела распределение Коши.

9.46. Какое простейшее функциональное преобразование $\xi = g(\eta)$ переводит случайную величину $\eta \sim R(0, 1)$ в случайную величину $\xi \sim R(-1, 1)$?

9.47. Для $\xi \sim E(\lambda)$ подберите какую-нибудь функцию $g(x)$ так, чтобы случайная величина $\eta = g(\xi)$ имела распределение Коши.

9.48. Приведите обобщение задачи 9.47 на случайные величины ξ и $\eta = g(\xi)$ с заданными функциями распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$ в предположении, что функция $F_\xi(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}$.

9.49. Как бы вы предложили получить независимые наблюдения $v_1, v_2, \dots, v_N$ над дискретной случайной величиной

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

по заданным независимым наблюдениям $u_1, u_2, \dots, u_N$ над случайной величиной $\eta \sim R(0, 1)$?

Разные задачи

9.50. Пусть $f(x)$ и $F(x)$ — какие-то (не обязательно соответствующие друг другу) плотность вероятности и функция распределения.

1) Будет ли плотностью вероятности функция

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 100, \\ f(x) & \text{при } x > 100 ? \end{cases}$$

2) Будет ли функцией распределения функция

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 100, \\ F(x) & \text{при } x > 100 \end{cases}$$

9.51. Существует ли константа C такая, что заданная функция $f(x)$ служит плотностью вероятности некоторой случайной величины ξ ? Если существует, укажите ее и постройте график соответствующей функции распределения $F(x)$ величины ξ :

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} Ce^{-x^2} & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} Ce^{-x^2+4x} & \text{при } |x| \leq 3, \\ 0 & \text{при } |x| > 3. \end{cases}$$

9.52. Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ с функцией распределения:

$$1) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{1}{7}(2x-1) & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ \frac{6}{7} & \text{при } 3 < x \leq 7, \\ 1 & \text{при } x > 7; \end{cases}$$

$$2) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{3} & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{12}(3x+1) & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

9.53. Докажите, что для всякой случайной величины ξ с конечной дисперсией и любого числа c

$$M(\xi - c)^2 \geq D\xi.$$

Когда в этом неравенстве достигается равенство?

9.54. Докажите, что если функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ непрерывна и $M|\xi| < \infty$, то математическое ожидание $M|\xi - c|$ принимает свое наименьшее значение в той точке c , которая удовлетворяет условию $F(c) = 1/2$ (такая точка называется *медианой* распределения).

Примечание. В связи с рассмотрением данной задачи полезно вернуться к задачам 8.41 и 8.68.

9.55. Докажите, что если ξ — случайная величина, имеющая начальный момент порядка $2n - 1$, то существует и притом единственное число c , такое, что $M(\xi - c)^{2n-1} = 0$.

9.56. Докажите, что если функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ случайных величин ξ_1 и ξ_2 с $M|\xi_1| < \infty$, $M|\xi_2| < \infty$ удовлетворяют условию $F_1(x) \leq F_2(x)$ для всякого $x \in \mathbb{R}$, то $M\xi_1 \geq M\xi_2$.

9.57. В лифт $(m+1)$ -этажного дома на первом этаже вошли n человек. Предполагая, что каждый из них, независимо от остальных, выходит с одинаковыми вероятностями на любом этаже и при подъеме лифта других пассажиров не будет, вычислите математические ожидания следующих случайных величин:

ξ — число остановок, которые сделает лифт, поднимаясь;
 η — число этажей, которые лифт «проскочит», поднимаясь;
 ζ — число этажей, до которых лифт вообще не дойдет.

9.58. Докажите, что если $P(a \leq \xi \leq b) = 1$, то

$$a \leq M\xi \leq b, \quad D\xi \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

9.59. Пусть

$$\eta = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq n, \\ 0, & \text{если } |\xi| > n. \end{cases}$$

1) Докажите, что $D\eta \leq n^2$.

2) Докажите, что если $M|\xi| = A < \infty$, то $D\eta \leq An$.

9.60. Приведите пример дискретной случайной величины ξ и непрерывной случайной величины η , удовлетворяющих условию

$$M\xi = M\eta = 0, \quad M|\xi| = M|\eta| = 1.$$

9.61. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Какое распределение вероятностей на множестве $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ имеет:

а) наибольшую энтропию; б) наибольшую дисперсию?

9.62. Случайная величина ξ принимает $k \geq 2$ неотрицательных значений. Докажите, что каждая из величин

$$\frac{M\xi^{n+1}}{M\xi^n} \quad \text{и} \quad \sqrt{M\xi^n}$$

при $n \rightarrow \infty$ стремится к наибольшему из этих k значений.

9.63. Докажите, что если $M\xi^2 = M\xi^3 = M\xi^4$, то случайная величина ξ может принимать лишь два значения: 0 и 1.

9.64. Докажите, что если функция распределения $F(x)$ непрерывна, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dF(x) = \frac{1}{2}.$$

9.65. Докажите, что функция распределения любой случайной величины имеет не более чем счетное множество точек разрыва.

9.66. Распределение вероятностей случайной величины ξ называется симметричным относительно точки m , если

$$P(\xi < m - x) = P(\xi > m + x)$$

для всякого $x \in \mathbb{R}$ (сравните с задачей 8.7).

1) Запишите это условие в терминах функции распределения случайной величины ξ .

2) Докажите, что если $M\xi$ существует, то $M\xi = m$.

9.67. Докажите, что если математическое ожидание случайной величины ξ существует, то ее функция распределения $F(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x (1 - F(x)) = 0.$$

Верно ли обратное утверждение?

9.68. Пусть $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ — функции распределения. Будет ли функцией распределения функция:

а) $F(x) = \min(F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$;

б) $F(x) = \max(F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$?

9.69. Докажите, что если $M|\xi| < \infty$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| \geq n) \leq M|\xi| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| \geq n).$$

9.70. Докажите, что если $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(x)$ — функции распределения случайных величин ξ и η соответственно, то для всяких $x \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$

$$F_{\xi}(x - \delta) - P(|\xi - \eta| \geq \delta) \leq F_{\eta}(x) \leq F_{\xi}(x + \delta) + P(|\xi - \eta| \geq \delta).$$

Часть III

Многомерные распределения вероятностей

§ 10. Дискретные двумерные распределения вероятностей

Общие понятия, связанные с двумерными случайными векторами

Предположим, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ заданы случайные величины ξ и η , рассматриваемые совместно — как компоненты вектора

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\xi, \eta)^T.$$

Функция распределения $F(x, y)$ такого случайного вектора, или совместная функция распределения случайных величин ξ и η , определяется как

$$F(x, y) = \mathbf{P}(\xi < x, \eta < y). \quad (10.1)$$

Понятно, что

$$0 \leq F(x, y) \leq 1. \quad (10.2)$$

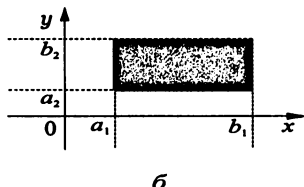
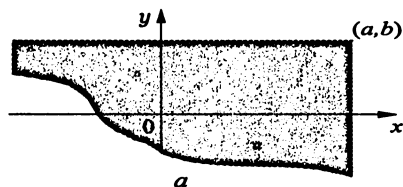


Рис. 10.1.

В соответствии с (10.1) $F(a, b)$ представляет собой вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в квадрант, отмеченный на рис. 10.1, а.

Вероятность попадания точки (ξ, η) в прямоугольник, приведенный на

рис. 10.1, б, выражается через $F(x, y)$ по формуле

$$P(a_1 \leq \xi < b_1, a_2 \leq \eta < b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2). \quad (10.3)$$

Эту вероятность удобно записывать в виде

$$P(a_1 \leq \xi < b_1, a_2 \leq \eta < b_2) = \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} F(x, y). \quad (10.4)$$

Сначала берется приращение функции $F(x, y)$ по переменной x в пределах от $x = a_1$ до $x = b_1$ — при фиксированном y ; это дает

$$\Delta_{a_1}^{b_1} F(x, y) = F(b_1, y) - F(a_1, y).$$

Затем берется приращение полученной функции от y по этой переменной в пределах от $y = a_2$ до $y = b_2$,

$$\Delta_{a_2}^{b_2} (F(b_1, y) - F(a_1, y)) = (F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2)) - (F(b_1, a_2) - F(a_1, a_2)).$$

Это и приводит к (10.3).

Далее перечисляются основные свойства функции распределения $F(x, y)$.

1. *Монотонное неубывание по совокупности переменных x, y :*
для всяких $a_1 < b_1, a_2 < b_2$

$$\Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} F(x, y) \geq 0.$$

2. *Непрерывность слева по каждой из переменных x, y :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x < a)}} F(x, y) = F(a, y), \\ \lim_{\substack{y \rightarrow b \\ (y < b)}} F(x, y) = F(x, b). \end{array} \right.$$

3. *Поведение на бесконечности:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = F(-\infty, y) = 0, \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = F(x, -\infty) = 0, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = F(-\infty, -\infty) = 0, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = F(\infty, \infty) = 1. \end{array} \right.$$

Эти свойства являются *характеристическими* для функции распределения в том смысле, что всякая функция $F(x, y)$, обладающая ими, может рассматриваться как функция распределения некоторого двумерного случайного вектора.

Частные функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$ величин ξ и η (соответственно) выражаются через совместную функцию распределения $F(x, y)$ этих величин по формулам

$$\begin{cases} F_1(x) = P(\xi < x) = F(x, \infty), \\ F_2(y) = P(\eta < y) = F(\infty, y). \end{cases} \quad (10.5)$$

Математическое ожидание случайного вектора $(\xi, \eta)^T$ — это вектор $(M\xi, M\eta)^T$, составленный из математических ожиданий величин ξ и η .

Ковариация $\text{cov}(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η определяется как

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M \xi \eta = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) \quad (10.6)$$

в предположении, что все указанные математические ожидания существуют (для этого достаточно, чтобы величины ξ и η имели конечные дисперсии). При этом

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M\xi\eta - M\xi \cdot M\eta. \quad (10.7)$$

Очевидно, что

$$\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi, \quad (10.8)$$

а формула (10.7) при $\eta \equiv \xi$ принимает вид известного свойства дисперсии

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Очевидно также, что

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi).$$

Симметрическая матрица

$$K = \begin{pmatrix} \text{cov}(\xi, \xi) & \text{cov}(\xi, \eta) \\ \text{cov}(\eta, \xi) & \text{cov}(\eta, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D\xi & \text{cov}(\xi, \eta) \\ \text{cov}(\xi, \eta) & D\eta \end{pmatrix} \quad (10.9)$$

называется *ковариационной матрицей* (а также *матрицей ковариаций*, *корреляционной матрицей*) случайного вектора $(\xi, \eta)^T$.

Случайные величины ξ и η называются *некоррелированными*, если

$$\text{cov}(\xi, \eta) = 0. \quad (10.10)$$

Условие (10.10) в силу (10.7) выполняется тогда и только тогда, когда

$$M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta. \quad (10.11)$$

Для случайных величин ξ и η с конечными дисперсиями

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta). \quad (10.12)$$

Приведем и более общую формулу:

$$D(a\xi + b\eta + c) = a^2 D\xi + b^2 D\eta + 2ab \text{cov}(\xi, \eta). \quad (10.13)$$

Если ξ и η — некоррелированные величины, то

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta, \quad D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta, \quad (10.14)$$

$$D(a\xi + b\eta + c) = a^2 D\xi + b^2 D\eta. \quad (10.15)$$

Случайные величины ξ и η с конечными моментами 2-го порядка удовлетворяют неравенству Коши–Буняковского

$$|M(\xi\eta)| \leq \sqrt{M\xi^2 M\eta^2}. \quad (10.16)$$

В частности,

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{D\xi D\eta}, \quad (10.17)$$

причем как в (10.16), так и в (10.17) равенство достигается тогда и только тогда, когда ξ и η связаны линейной зависимостью:

$$P(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0) = 1$$

для некоторых чисел α , β и γ .

Коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η определяется формулой

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} \quad (10.18)$$

(в предположении, что $0 < D\xi < \infty$, $0 < D\eta < \infty$).

В практических задачах ξ и η связываются с различными физическими величинами, имеющими те или иные наименования. Этим определяется и наименование числовых характеристик данных величин. Если, например, ξ измеряется в метрах (м), а η — в секундах (с), то $M\xi$, $D\xi$, $M\eta$, $D\eta$ и $\text{cov}(\xi, \eta)$ имеют наименования м, м², с, с² и мс соответственно. Важной особенностью коэффициента корреляции является то, что это — б е з р а з м е р н а я величина.

Простым следствием неравенства (10.17) служит неравенство

$$|\rho(\xi, \eta)| \leq 1. \quad (10.19)$$

Равенство в (10.19) достигается тогда и только тогда, когда $\eta = a\xi + b$, где $a \neq 0$. При этом

$$\rho(\xi, a\xi + b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a > 0, \\ -1, & \text{если } a < 0. \end{cases} \quad (10.20)$$

В частности,

$$\rho(\xi, \xi) = 1.$$

Матрица

$$R = \begin{pmatrix} \rho(\xi, \xi) & \rho(\xi, \eta) \\ \rho(\eta, \xi) & \rho(\eta, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.21)$$

где буквой ρ (для простоты) обозначен коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η , называется *нормированной корреляционной матрицей* случайного вектора $(\xi, \eta)^T$.

Случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если

$$P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1)P(\eta \in B_2) \quad (10.22)$$

для всяких множеств B_1 и B_2 на прямой, для которых определены вероятности в правой части приведенного равенства.

В терминах совместной и частных функций распределения необходимое и достаточное условие независимости величин ξ и η записывается как

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y), \quad (10.23)$$

или, с учетом (10.5),

$$F(x, y) = F(x, \infty)F(\infty, y).$$

Если ξ и η — независимые случайные величины, то для любых кусочно-непрерывных функций $g(x)$ и $h(x)$ величины $g(\xi)$ и $h(\eta)$ также независимы.

Если величины ξ и η с конечными дисперсиями независимы, то они и некоррелированы; для них

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= 0, & \rho(\xi, \eta) &= 0; \\ M\xi\eta &= M\xi \cdot M\eta \end{aligned} \quad (10.24)$$

(соотношение $\rho(\xi, \eta) = 0$ предполагает также, что $D\xi \cdot D\eta \neq 0$).

Из некоррелированности величин ξ и η , вообще говоря, не следует их независимость: существуют величины некоррелированные, но зависимые.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — произвольное вероятностное пространство, η и A — связанные с ним случайная величина и случайное событие, причем $P(A) > 0$. Тогда *условное распределение случайной величины η относительно случайного события A* представляет собой распределение с функцией распределения

$$F_A(y) = P(\eta < y | A) = \frac{P(\eta < y; A)}{P(A)}. \quad (10.25)$$

Моменты, соответствующие распределению (10.25), называются *условными моментами*. Так,

$$\begin{aligned} M(\eta | A) &= \int_{-\infty}^{\infty} y dF_A(y), \\ D(\eta | A) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - M(\eta | A) \right)^2 dF_A(y) \end{aligned} \quad (10.26)$$

— это *условное математическое ожидание* и *условная дисперсия случайной величины η относительно события A* .

Если $M|\eta| < \infty$ и $H_1, H_2, \dots$ — полная группа попарно несовместных гипотез, причем $P(H_k) > 0$, $k = 1, 2, \dots$, то

$$M\eta = \sum_k M(\eta | H_k) P(H_k). \quad (10.27)$$

Эту формулу мы назовем *простейшей формулой полного математического ожидания*.

Дискретные распределения вероятностей в $\mathbb{R}^2$

Распределение случайного вектора $(\xi, \eta)^T$ со значениями $(x_i, y_j)^T$, $i, j = 1, 2, \dots$, полностью определяется вероятностями

$$p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j) \geq 0 \quad (10.28)$$

при условии, что

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1. \quad (10.29)$$

(Неотрицательность и нормированность вероятности.)

Это распределение часто приводится в виде таблицы

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n	$\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1n}	$\dots$
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2n}	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	$\dots$	p_{mn}	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$

Функция распределения данного случайного вектора выражается через вероятности p_{ij} следующим образом:

$$F(x, y) = \sum_{(i,j): \begin{cases} x_i < x \\ y_j < y \end{cases}} p_{ij}. \quad (10.30)$$

Формулы

$$\begin{cases} p_{i\bullet} = P(\xi = x_i) = \sum_j p_{ij}, \\ p_{\bullet j} = P(\eta = y_j) = \sum_i p_{ij} \end{cases} \quad (10.31)$$

определяют частные распределения величин ξ и η .

Для функции $g(x, y)$ математическое ожидание $Mg(\xi, \eta)$ случайной величины $g(\xi, \eta)$ может быть вычислено как

$$Mg(\xi, \eta) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{ij} \quad (10.32)$$

(если, конечно, оно существует). Например,

$$M\xi = \sum_{i,j} x_i p_{ij}, \quad M\eta = \sum_{i,j} y_j p_{ij}; \quad (10.33)$$

это, разумеется, дает тот же результат, что и формулы

$$M\xi = \sum_i x_i p_{i\bullet}, \quad M\eta = \sum_j y_j p_{\bullet j}. \quad (10.34)$$

Приведем также формулу

$$M\xi\eta = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}. \quad (10.35)$$

Из нее, в частности, следует (см. (10.7)), что

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} - \left(\sum_{i,j} x_i p_{ij} \right) \left(\sum_{i,j} y_j p_{ij} \right). \quad (10.36)$$

Все рассматриваемые здесь ряды считаются абсолютно сходящимися.

Дискретные случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда для любых i и j

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j), \quad (10.37)$$

или, в используемых здесь обозначениях,

$$p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}. \quad (10.38)$$

Условное распределение случайной величины η при условии, что $\xi = x_i$, определяется вероятностями

$$\begin{aligned} p_{2|1}(j|i) &= P(\eta = y_j | \xi = x_i) = \\ &= \begin{cases} \frac{P(\eta = y_j, \xi = x_i)}{P(\xi = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, & \text{если } p_{i\bullet} \neq 0, \\ 0, & \text{если } p_{i\bullet} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.39)$$

При этом для всякого фиксированного i

$$\sum_j p_{2|1}(j|i) = 1, \quad (10.40)$$

так что условные вероятности $p_{2|1}(j|i)$ определяют некоторое новое распределение вероятностей. Соответствующие моменты этого распределения определяют условные моменты случайной величины η при условии $\xi = x_i$.

В частности, условное математическое ожидание $M(\eta | \xi = x_i)$ и условная дисперсия $D(\eta | \xi = x_i)$ случайной величины η при условии $\xi = x_i$ определяются как

$$M(\eta | \xi = x_i) = \sum_j y_j p_{2|1}(j|i), \quad (10.41)$$

$$D(\eta | \xi = x_i) = \sum_j \left(y_j - M(\eta | \xi = x_i) \right)^2 p_{2|1}(j|i). \quad (10.42)$$

Функция

$$y = H(x) = M(\eta | \xi = x), \quad (10.43)$$

заданная на множестве $\{x_1, x_2, \dots\}$ значений случайной величины ξ , называется *регрессией величины η на ξ* . Само соотношение (10.43) рассматривается как *уравнение регрессии η на ξ* .

Случайная величина $H(\xi)$ обозначается $M(\eta | \xi)$ и называется *условным математическим ожиданием случайной величины η относительно случайной величины ξ* . Подчеркнем, что условное математическое ожидание

$$H(\xi) = M(\eta | \xi) \quad (10.44)$$

представляет собой случайную величину, в отличие от условного математического ожидания $H(x) = M(\eta|\xi = x)$, представляющего собой неслучайную функцию аргумента x . Оказывается, что

$$M(M(\eta|\xi)) = M\eta. \quad (10.45)$$

Это так называемая *формула полного математического ожидания*. Ее частным случаем (при $H_k = \{\xi = x_k\}$) служит упомянутая выше формула (10.27).

При $M\xi^2 < \infty$, $M\eta^2 < \infty$

$$M(\eta - h(\xi))^2 \geq M(\eta - M(\eta|\xi))^2 \quad (10.46)$$

для всякой функции $h(x)$, для которой левая часть данного неравенства определена. В этом смысле случайную величину $\hat{\eta} = M(\eta|\xi)$ рассматривают как наилучшую в среднем квадратическом оценку величины η по величине ξ .

Формулы (10.41)–(10.46) претерпевают естественное изменение, когда величины ξ и η меняются местами. В частности,

$$\begin{aligned} M(M(\xi|\eta)) &= M\xi, \\ M(\xi - g(\eta))^2 &\geq M(\xi - M(\xi|\eta))^2, \end{aligned}$$

Условные математические ожидания обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} M(T(\xi)|\xi) &= T(\xi), \\ M(T(\xi)\eta|\xi) &= T(\xi) M(\eta|\xi), \\ M(a_1\eta_1 + a_2\eta_2|\xi) &= a_1 M(\eta_1|\xi) + a_2 M(\eta_2|\xi). \end{aligned} \quad (10.47)$$

— с вероятностью 1 для всяких случайных величин ξ , η и для всякой функции $T(x)$, для которых определены правые части приведенных равенств.

Если дискретные случайные величины ξ и η независимы, то условное распределение одной из них относительно другой величины совпадает с безусловным распределением первой величины: в этом случае для всяких допустимых i и j

$$p_{2|1}(j|i) = p_{\bullet j} \quad (10.48)$$

и, в частности (с вероятностью 1),

$$M(\eta|\xi) = M\eta. \quad (10.49)$$

Общий план исследования двумерного распределения вероятностей. При решении задач этого и следующего разделов исследование двумерного распределения вероятностей мы будем связывать с решением следующих задач.

1. По заданному совместному распределению вероятностей случайных величин ξ и η найти частные распределения этих величин, их математические ожидания и дисперсии.
2. Решить, какими являются величины ξ и η — зависимыми или независимыми.
3. Составить ковариационную и нормированную корреляционную матрицы случайного вектора $(\xi, \eta)^T$. Выяснить, какими являются случайные величины ξ и η — коррелированными или некоррелированными.
4. Описать регрессии $H(x)$ и $G(y)$ величины η на ξ и величины ξ на η (соответственно):

$$H(x) = M(\eta | \xi = x), \quad G(y) = M(\xi | \eta = y).$$

5. Построить наилучшие в среднем квадратическом оценки

$$\hat{\eta} = H(\xi) \quad \text{и} \quad \hat{\xi} = G(\eta)$$

величины η по величине ξ и величины ξ по величине η .

6. Проверить на данной задаче формулу полного математического ожидания, т. е. непосредственными вычислениями убедиться, что

$$M(M(\eta|\xi)) = M\eta, \quad M(M(\xi|\eta)) = M\xi.$$

10.1. По плану, представленному выше, исследовать распределение случайных величин ξ и η , заданное таблицей

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	1/6	1/12	7/24
1	1/8	1/3	0

Решение.

1) Простые вычисления дают:

$$P(\xi = -1) = p_{1\bullet} = \sum_j p_{1j} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{7}{24} = \frac{13}{24};$$

$$P(\xi = 1) = p_{2\bullet} = 1 - P(\xi = -1) = \frac{11}{24}.$$

Таким образом, случайная величина ξ имеет следующее распределение вероятностей:

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 13/24 & 11/24 \end{pmatrix}.$$

Отсюда (проверьте)

$$M\xi = -\frac{1}{12}, \quad D\xi = \frac{143}{144}.$$

Далее,

$$P(\eta = -1) = p_{\bullet 1} = \sum_i p_{i1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24};$$

$$P(\eta = 0) = p_{\bullet 2} = \sum_i p_{i2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12};$$

$$P(\eta = 1) = p_{\bullet 3} = \sum_i p_{i3} = \frac{7}{24} + 0 = \frac{7}{24}.$$

Следовательно,

$$\eta \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7/24 & 10/24 & 7/24 \end{pmatrix},$$

и потому (проверьте)

$$M\eta = 0, \quad D\eta = \frac{7}{12}.$$

2) Поскольку $p_{11} \neq p_{1\bullet}p_{\bullet 1}$ ($\frac{1}{6} \neq \frac{13}{24} \cdot \frac{7}{24}$), величины ξ и η зависимы (в случае независимых величин должно было бы выполняться условие $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$ для всех i и j).

3) Значение $\text{cov}(\xi, \eta)$ найдем по формулам (10.7), (10.35):

$$\begin{aligned} M(\xi\eta) &= (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot 0 \cdot \frac{1}{12} + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{7}{24} + \\ &+ 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 1 \cdot 0 = -\frac{1}{4}; \end{aligned}$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{12}\right) \cdot 0 = -\frac{1}{4}.$$

Итак, вектор $(\xi, \eta)^T$ имеет следующую ковариационную матрицу:

$$K = \begin{pmatrix} 143/144 & -1/4 \\ -1/4 & 7/12 \end{pmatrix} = \frac{1}{144} \begin{pmatrix} 143 & -36 \\ -36 & 84 \end{pmatrix}.$$

Коэффициент корреляции ρ рассматриваемых величин ξ и η вычисляется согласно (10.18):

$$\rho = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{-\frac{36}{144}}{\sqrt{\frac{143}{144} \cdot \frac{84}{144}}} = -\frac{36}{\sqrt{143 \cdot 84}} = -\frac{18}{\sqrt{3 \cdot 003}}.$$

Поэтому нормированная корреляционная матрица R случайного вектора $(\xi, \eta)^T$, в соответствии с (10.21), равна

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{18}{\sqrt{3} \cdot 003} \\ -\frac{18}{\sqrt{3} \cdot 003} & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\text{cov}(\xi, \eta) \neq 0$ (или $\rho \neq 0$), величины ξ и η являются коррелированными и, тем более, зависимыми, что выше было установлено другим способом.

4) Функция $H(x) = M(\eta | \xi = x)$ определена в двух точках: $x = -1$ и $x = 1$. Найдем условное распределение величины η при условии, что $\xi = -1$. Имеем (см. формулу (10.39)):

$$P(\eta = -1 | \xi = -1) = \frac{P(\xi = -1, \eta = -1)}{P(\xi = -1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{24}} = \frac{4}{13};$$

аналогично (проверьте),

$$P(\eta = 0 | \xi = -1) = \frac{2}{13}; \quad P(\eta = 1 | \xi = -1) = \frac{7}{13}.$$

Следовательно, при $\xi = -1$ случайная величина η имеет следующее условное распределение вероятностей:

$$L(\eta | \xi = -1) \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4/13 & 2/13 & 7/13 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$H(-1) = M(\eta | \xi = -1) = \frac{3}{13}.$$

Дальнейшие выкладки вполне аналогичны предыдущим и приводятся без комментариев:

$$P(\eta = -1 | \xi = 1) = \frac{P(\xi = 1, \eta = -1)}{P(\xi = 1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{11}{24}} = \frac{3}{11};$$

$$P(\eta = 0 | \xi = 1) = \frac{8}{11}; \quad P(\eta = 1 | \xi = 1) = 0;$$

$$L(\eta | \xi = 1) \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3/11 & 8/11 \end{pmatrix};$$

$$H(1) = M(\eta | \xi = 1) = -3/11.$$

Таким образом, функцию $H(x) = M(\eta | \xi = x)$, представляющую собой регрессию случайной величины η на ξ , можно задать таблицей

x	-1	1
$H(x)$	$3/13$	$-3/11$

Функцию $G(y) = M(\xi | \eta = y)$, представляющую собой регрессию случайной величины ξ на η , читателям предлагается найти самостоятельно. Мы приведем лишь ответ к этой задаче в виде таблицы

y	-1	0	1
$G(y)$	$-1/7$	$3/5$	-1

5) Наилучшей в среднем квадратическом оценкой случайной величины η по случайной величине ξ служит

$$\hat{\eta} = H(\xi) = \begin{cases} 3/13, & \text{если } \xi = -1, \\ -3/11, & \text{если } \xi = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\hat{\eta} \sim \begin{pmatrix} 3/13 & -3/11 \\ 13/24 & 11/24 \end{pmatrix}, \quad (*)$$

поскольку $P(\xi = -1) = 13/24$, $P(\xi = 1) = 11/24$.

Аналогично, наилучшей в среднем квадратическом оценкой случайной величины ξ по случайной величине η служит

$$\hat{\xi} = G(\eta) = \begin{cases} -1/7, & \text{если } \eta = -1, \\ 3/5, & \text{если } \eta = 0, \\ -1, & \text{если } \eta = 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\hat{\xi} \sim \begin{pmatrix} -1/7 & 3/5 & -1 \\ 7/24 & 10/24 & 7/24 \end{pmatrix}. \quad (**)$$

6) В соответствии с (*) и (**) имеем:

$$M\hat{\eta} = \frac{3}{13} \cdot \frac{13}{24} - \frac{3}{11} \cdot \frac{11}{24} = 0 = M\eta;$$

$$M\hat{\xi} = -\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{24} + \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{24} - 1 \cdot \frac{7}{24} = -\frac{1}{12} = M\xi.$$

Задача решена полностью.

10.2. По плану, приведенному на с. 221, исследуйте двумерное дискретное распределение вероятностей, заданное табл. 1.

10.3. По плану, приведенному на с. 221, исследуйте двумерное дискретное распределение вероятностей, заданное табл. 2.

Таблица 1

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	$2/15$	$1/15$	$1/5$
1	$1/5$	$3/10$	$1/10$

Таблица 2

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	$3/10$	$1/10$	$1/5$
1	$1/5$	$1/15$	$2/15$

10.4. Составьте закон распределения вероятностей (таблицу по образцу приведенных выше таблиц) случайного вектора $(\xi, \eta)^T$, где ξ и η — соответственно число гербов и число решек, выпадающих при подбрасывании двух монет.

10.5. Составьте закон распределения вероятностей (таблицу по образцу приведенных выше таблиц) случайного вектора $(\xi, \eta)^T$, где ξ и η — соответственно число единиц и число шестерок, выпадающих при подбрасывании двух игральных костей.

10.6. Монету бросают три раза, отмечая результат каждого бросания знаком плюс или знаком минус в зависимости от того, что выпало — герб или решка соответственно. Пусть ξ — число выпавших гербов, а η — число перемен знака в образовавшейся последовательности плюсов и минусов. Исследуйте случайный вектор $(\xi, \eta)^T$ по плану, приведенному на с. 221.

Таблица 3

$\xi \backslash \eta$	-1	1
0	$1/6$	$1/6$
1	$1/6$	$1/2$

Таблица 4

$\xi \backslash \eta$	1	2
0	$1/4$	$1/3$
1	$1/6$	$1/4$

10.7. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано табл. 3. Вычислите $M((\xi + \eta)^2 | \xi = 1)$.

10.8. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано табл. 4. Вычислите $M(\xi\eta \mid \eta = 2)$.

Таблица 5

$\xi \setminus \eta$	7	13
0	$1/2$	$1/6$
1	$1/6$	$1/6$

Таблица 6

$\xi \setminus \eta$	1	3
1	$1/3$	$1/4$
7	$1/6$	$1/4$

10.9. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано табл. 5. Найдите функцию распределения случайной величины $\hat{\eta}$, представляющей собой наилучшую в среднем квадратическом оценку случайной величины η по случайной величине ξ . Постройте график найденной функции распределения.

10.10. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано табл. 6. Найдите функцию распределения случайной величины $\hat{\xi}$, представляющей собой наилучшую в среднем квадратическом оценку случайной величины ξ по случайной величине η . Постройте график найденной функции распределения.

10.11. Проводят $n \geq 2$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании. Результат каждого испытания записывают знаком плюс или знаком минус в зависимости от того, что принесло это испытание — успех или неудачу соответственно. Пусть ξ — число плюсов, η — число минусов, ζ — число перемен знака в образовавшейся последовательности плюсов и минусов.

1) Не находя явных выражений для ковариаций $\text{cov}(\xi, \zeta)$ и $\text{cov}(\eta, \zeta)$, докажите, что при $p = 1/2$ случайные величины ξ и ζ , так же как и случайные величины η и ζ , являются некоррелированными (но, очевидно, зависимыми).

2) Докажите, что

$$\text{cov}(\xi, \zeta) = -\text{cov}(\eta, \zeta) = 2p(1-p)(1-2p)(n-1);$$

это, в частности, подтверждает результат предыдущего пункта.

Формула полного математического ожидания

Приведенные выше формулы (10.27) и (10.45) дополним следующим важным результатом, касающимся суммы случайного числа случайных величин.

Если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $M|\xi_i| < \infty$, а ν — не зависящая от них неотрицательная целочисленная случайная величина с $M\nu < \infty$, то

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu) = M\xi_1 M\nu. \quad (10.50)$$

10.12. В некотором городе каждый день с вероятностью 0,6 ясно и с вероятностью 0,4 пасмурно (независимо от погоды в другие дни). Какое в среднем минимальное число дней нужно прожить в этом городе, чтобы увидеть его и в ясный, и в пасмурный день?

Решение. Пусть ν — минимальное число дней, которое нужно пробыть в городе, чтобы увидеть его и в ясный, и в пасмурный день. Рассмотрим гипотезы H_1 и H_2 о том, что в первый день пребывания в городе будет ясно или пасмурно соответственно.

После ясного дня придется ждать пасмурного дня, на что уйдет случайное число дней, распределенное по геометрическому закону с параметром $p = 0,4$; аналогичная ситуация возникает после пасмурного дня. Следовательно,

$$P(H_1) = 0,6, \quad M(\nu|H_1) = 1 + \frac{1}{0,4};$$

$$P(H_2) = 0,4, \quad M(\nu|H_2) = 1 + \frac{1}{0,6};$$

$$M\nu = \left(1 + \frac{1}{0,4}\right) 0,6 + \left(1 + \frac{1}{0,6}\right) 0,4 = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}.$$

10.13. Задачу 10.12 решите в предположении, что каждый день в городе с вероятностью p ясно и с вероятностью $q = 1 - p$ пасмурно. Докажите, что

$$M\nu \geq 3.$$

При каком значении p в этом неравенстве достигается равенство?

10.14. Пусть ν — минимальное число подбрасываний монеты, при котором хотя бы один раз выпадает герб и хотя бы один раз — решка. Найдите $M\nu$.

10.15. Из урны, содержащей $m \geq 1$ белых и $n \geq 1$ черных шаров, наугад извлекают шары до тех пор, пока среди них не

найдется хотя бы одного белого шара и хотя бы одного черного шара. Сколько в среднем шаров будет извлечено из урны, если шары извлекаются по схеме:

а) с возвращением; б) без возвращения?

10.16. Сколько раз в среднем придется бросать монету до выпадения серии: а) ГР; б) ГГ?

Решение. Пусть ξ — число бросаний монеты до появления серии ГР, а η — число бросаний монеты до появления серии ГГ. Величина $M\xi$ уже была найдена нами при рассмотрении задачи 6.62: $M\xi = 4$. Для нахождения $M\eta$ введем в рассмотрение следующую полную группу попарно несовместных гипотез, касающихся двух первых бросаний монеты:

$$H_1 = \{P\}, \quad H_2 = \{ГР\}, \quad H_3 = \{ГГ\}.$$

Если $M\eta = x$, то

$$M(\eta|H_1) = 1 + x, \quad M(\eta|H_2) = 2 + x, \quad M(\eta|H_3) = 2.$$

Учитывая, что $P(H_1) = 1/2$, $P(H_2) = P(H_3) = 1/4$, получаем

$$x = \frac{1}{2}(1 + x) + \frac{1}{4}(2 + x) + \frac{1}{4} \cdot 2,$$

откуда

$$x = M\eta = 6.$$

Как мы видим, $M\eta > M\xi$. На первый взгляд этот результат может показаться неожиданным, особенно, если учесть, что $P(\eta > \xi) = P(\xi > \eta)$ (см. задачу 4.19).

10.17. Сколько раз в среднем придется бросать игральную кость до выпадения серии: а) 66; б) 666?

10.18. Игральную кость подбрасывают до тех пор, пока не выпадет шестерка. Пусть S — сумма всех выпавших при этом очков. Найти MS .

Решение. Мы приведем два способа решения этой задачи, каждый из которых по-своему интересен.

Способ 1. Пусть ξ — число очков, выпавших при первом подбрасывании игральной кости. Тогда

$$M(S|\xi = k) = \begin{cases} k + MS, & \text{если } k = 1, 2, 3, 4, 5, \\ 6, & \text{если } k = 6. \end{cases}$$

Полагая, что $MS = x$ и $H_k = \{\xi = k\}$, $k = 1, 2, \dots, 6$, получаем

$$\begin{aligned} x &= (1+x) \cdot \frac{1}{6} + (2+x) \cdot \frac{1}{6} + (3+x) \cdot \frac{1}{6} + \\ &\quad + (4+x) \cdot \frac{1}{6} + (5+x) \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}, \\ x &= \frac{1}{6}(5x + 21), \quad x = 21. \end{aligned}$$

С п о с о б 2. Имеем:

$$S = S_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{\nu-1} + \xi_\nu,$$

где ν — номер того подбрасывания кости, при котором впервые выпадает шестерка.

Поскольку каждая из величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu-1}$ имеет равномерное распределение на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, а $\nu \sim G(p)$ при $p = 1/6$,

$$\begin{aligned} MS &= M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{\nu-1}) + M\xi_\nu = \\ &= M\xi_1 \cdot M(\nu - 1) + 6 = \frac{1+5}{2} \cdot (6-1) + 6 = 21. \end{aligned}$$

10.19. Игральную кость подбрасывают до тех пор, пока не выпадет грань — k очков ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Пусть S — сумма выпавших при этом очков. При каком значении k величина MS минимальна и при каком максимальна?

10.20. Игральную кость подбрасывают до тех пор, пока не выпадет четное число очков. Чему равно среднее значение суммы всех выпавших очков?

10.21. В лифт 12-этажного дома на первом этаже вошли 12 человек, в том числе высокий блондин. Сколько из них в среднем останется в лифте после того, как этот высокий блондин выйдет из него?

10.22. Каждую партию, независимо от остальных партий, игрок A с вероятностью $1/2$ выигрывает у игрока B и с вероятностью $1/2$ проигрывает ему. При этом всякий раз проигравший выплачивает победителю 1 руб. Игрок A решил играть до тех пор, пока его суммарный выигрыш не станет равным 1 руб. Сколько в среднем партий ему потребуется сыграть для этого?

10.23. Вычислить коэффициент корреляции между числом выпадений единицы и числом выпадений шестерки при $n \geq 1$ подбрасываниях игральной кости.

Решение. Пусть при n подбрасываниях игральной кости единица и шестерка выпадают ξ и η раз соответственно. Каждая из этих величин имеет распределение $Bi(n, p)$ при $p = 1/6$ и потому

$$M\xi = M\eta = \frac{n}{6}; \quad D\xi = D\eta = npq = \frac{5}{36}n.$$

Далее, по формуле полного математического ожидания

$$M(\xi\eta) = M(M(\xi\eta|\xi)).$$

Но $M(\xi\eta|\xi) = \xi M(\eta|\xi)$ — см. (10.47) на с. 220 — и если единица выпала ξ раз, то на долю оставшихся пяти цифр 2, 3, 4, 5, 6 приходится $n - \xi$ подбрасываний игральной кости, так что

$$M(\eta|\xi) = \frac{n - \xi}{5}.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} M\xi\eta &= M\left(\xi \frac{n - \xi}{5}\right) = \\ &= \frac{n}{5}M\xi - \frac{1}{5}M(\xi^2) = \frac{n}{5}M\xi - \frac{1}{5}[D\xi + (M\xi)^2] = \\ &= \frac{n^2}{30} - \frac{1}{5}\left[\frac{5}{36}n + \frac{n^2}{36}\right] = \frac{1}{36}n^2 - \frac{1}{36}n; \end{aligned}$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta = -\frac{1}{36}n;$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{-\frac{1}{36}n}{\sqrt{\frac{5}{36}n}} = -\frac{1}{5}.$$

10.24. На отрезок $[0, n]$ наугад бросают m точек. Предполагая, что $n \geq 2$, $m \geq 1$, вычислите коэффициент корреляции между числом ξ точек, попавших на отрезок $[0, 1]$, и числом η точек, попавших на отрезок $[n - 1, n]$.

10.25. В лифт $(m+1)$ -этажного дома на первом этаже вошли n человек. Вычислите коэффициент корреляции между числом ξ пассажиров, выходящих на i -м этаже, и числом η пассажиров, выходящих на j -м этаже ($2 \leq i < j \leq m + 1$; $n \geq 1$).

10.26. Пусть ξ и η — соответственно число гербов и число решек, выпадающих при бросании ста монет. Найдите:

- коэффициент корреляции случайных величин ξ и η ;
- ковариацию этих величин.

10.27. Вычислите ковариацию числа выпадений четной цифры и числа выпадений нечетной цифры при шести бросаниях игральной кости.

10.28. Вычислите коэффициент корреляции случайных величин ξ и η , где ξ — число шестерок, а η — число четных цифр, выпадающих при бросании n игральных костей.

10.29. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 10 человек. Пусть ξ — число тех из них, которые выходят на пятом этаже, а η — число тех из них, которые выходят на следующих этажах. Вычислите ковариацию случайных величин ξ и η .

10.30. Проводится $n \geq 1$ опытов по полиномиальной схеме с исходами $A_1, A_2, \dots, A_k$, вероятности которых в каждом опыте равны $p_1, p_2, \dots, p_k$ соответственно; $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$. Пусть ξ_i — число опытов с исходом A_i и ρ_{ij} — коэффициент корреляции случайных величин ξ_i и ξ_j ; $i, j = 1, 2, \dots, k$. Докажите, что при $i \neq j$

$$\rho_{ij} = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1 - p_i)(1 - p_j)}}.$$

Используя эту формулу, решите заново задачи 10.29 и 10.28.

Энтропия и информация

Пусть $(\xi, \eta)^T$ — дискретный случайный вектор со значениями $(x_i, y_j)^T$ и

$$p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j); \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Энтропия $H(\xi, \eta)$ такого вектора (распределения) определяется как

$$H(\xi, \eta) = - \sum_{i,j} p_{ij} \ln p_{ij}. \quad (10.51)$$

Для независимых случайных величин ξ и η

$$H(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta). \quad (10.52)$$

Обобщение этой формулы на зависимые величины ξ и η требует рассмотрения условной энтропии.

Условная энтропия $H(\eta | \xi = x_i)$ случайной величины η при условии, что $\xi = x_i$, рассматривается как энтропия условного распределения вероятностей

$$p_{2|1}(j|i) = P(\eta = y_j | \xi = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

и, стало быть, вычисляется по формуле

$$H(\eta | \xi = x_i) = - \sum_j \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \ln \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}. \quad (10.53)$$

Средняя условная энтропия $H(\eta|\xi)$ случайной величины η относительно случайной величины ξ получается посредством усреднения условной энтропии (10.53) по распределению случайной величины ξ :

$$H(\eta|\xi) = \sum_j H(\eta|\xi = x_j) p_{j\bullet} = - \sum_{i,j} p_{ij} \ln \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}. \quad (10.54)$$

Из (10.54) следует, что

$$H(\eta|\xi) = H(\xi, \eta) - H(\xi),$$

или

$$H(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta|\xi). \quad (10.55)$$

В случае независимых случайных величин ξ и η формула (10.55) преобразуется в формулу (10.52).

Количество информации $I_\xi(\eta)$ о величине η , содержащейся в величине ξ , определяется как

$$I_\xi(\eta) = H(\eta) - H(\eta|\xi) \quad (10.56)$$

(изменение меры неопределенности величины η в результате наблюдений величины ξ) и через безусловные энтропии выражается по формуле

$$I_\xi(\eta) = H(\xi) + H(\eta) - H(\xi, \eta). \quad (10.57)$$

Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$I_\xi(\eta) = I_\eta(\xi) = 0; \quad (10.58)$$

в общем же случае

$$I_\xi(\eta) = I_\eta(\xi) \geq 0. \quad (10.59)$$

К тому же

$$I_\xi(\eta) \leq I_\eta(\eta) = H(\eta), \quad (10.60)$$

что вполне согласуется с интуитивными представлениями об «информации».

10.31. Вычислите энтропию двумерного дискретного распределения вероятностей, представленного табл. 1 на с. 225. Какая из величин ξ и η имеет большую энтропию? Определите $I_\xi(\eta)$ и $I_\eta(\xi)$.

10.32. Какое распределение вероятностей на множестве $\{(x_i, y_j); 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ имеет наибольшую энтропию?

10.33. Для двумерного распределения вероятностей, представленного табл. 2 на с. 225, выясните, что больше: $H(\eta|\xi)$ или $H(\xi|\eta)$?

10.34. Пусть ξ и η — соответственно число гербов и число решек, выпадающих при подбрасывании двух монет. Какое количество информации о величине η содержится в величине ξ ?

10.35. Пусть ξ и η — соответственно число единиц и число двоек, выпадающих при подбрасывании двух игральных костей.

Какое количество информации несет в себе случайная величина ξ о случайной величине η ?

10.36. Докажите, что для всякого дискретного случайного вектора $(\xi, \eta)^T$

$$H(\xi, \eta) \leq H(\xi) + H(\eta).$$

Разные задачи

10.37. Совместное распределение дискретных случайных величин ξ и η задается приведенной таблицей.

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3
0	0,128	0,096	0,024	0,002
1	0,256	0,192	0,048	0,004
2	0,128	0,096	0,024	0,002

1) Докажите, что каждая из случайных величин ξ и η имеет биномиальное распределение вероятностей и найдите параметры этого распределения.

2) Постройте графики функций распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$ случайных величин ξ и η соответственно.

3) Какая из случайных величин ξ и η имеет большую дисперсию; энтропию?

4) Найдите: $P(\xi = \eta)$; $P(\xi > \eta)$; $P(\xi + 2\eta \geq 2 | \xi + \eta \leq 2)$.

10.38. Случайные величины ξ и η имеют следующее совместное распределение вероятностей:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	1/3	1/6	0

1) Вычислите условные дисперсии $D(\eta | \xi = 1)$ и $D(\xi | \eta = 0)$.

2) Найдите закон распределения:

а) величины $\xi + \eta$;

б) величины $\xi\eta$;

в) вектора $(\xi\eta, \xi + \eta)^T$.

10.39. Предположим, что n населенных пунктов расположены вдоль дороги на расстоянии 1 км друг от друга. Эти пункты обслуживает одна машина медицинской помощи. Каждый очередной вызов с равной вероятностью возникает в любом из n населенных пунктов и сообщается непосредственно на машину, которая ждет его в том пункте, где находился предыдущий больной. Чему равна средняя длина пробега машины за один рейс?

10.40. Вероятность попадания стрелком в мишень при отдельном выстреле равна 0,8. Стрелку разрешается стрелять до тех пор, пока не будет зафиксировано хотя бы одно попадание и хотя бы один промах. Сколько в среднем патронов израсходует стрелок?

10.41. Сто шаров — 80 белых и 20 черных — наугад располагают в цепочку. Вычислите коэффициент корреляции числа белых и числа черных шаров среди первых 30-ти шаров образовавшейся цепочки.

10.42. Грани белой игральной кости помечены цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 наугад, а грани черной игральной кости — так, что сумма очков любых двух противоположных граней равна 7 (1+6, 2+5, 3+4). Для каждой из этих игральных костей, подброшенной один раз, вычислите коэффициент корреляции числа выпавших очков и числа очков противоположной грани.

10.43. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 10 человек; из них ξ человек выходят на предпоследнем этаже и η человек — на последнем этаже. Чему равен коэффициент корреляции случайных величин ξ и η ?

10.44. Случайная величина ζ распределена равномерно на множестве $\{-1, 0, 1\}$. Исследуйте на независимость и некоррелированность случайные величины

$$\xi = 1 - \zeta^{1000} \quad \text{и} \quad \eta = 1 - \zeta^{1001}.$$

10.45. Докажите тождество

$$\text{cov}(a\xi + b, c\eta + d) = ac \text{cov}(\xi, \eta),$$

где a, b, c, d — произвольные числа.

10.46. Докажите, что если величины ξ и η не коррелированы и каждая из них принимает не более двух значений, то эти величины независимы.

10.47. Вычислите среднее минимальное число подбрасываний игрального тетраэдра (см. задачу 3.61), при котором хотя бы по одному разу выпадает белый, черный и оранжевый цвет.

10.48. Независимые случайные величины ξ и η распределены по закону Пуассона с параметрами λ и μ соответственно. Докажите, что

$$P(\eta = m | \xi + \eta = n) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n,$$

где $p = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1 - q$.

10.49. Каждая из независимых случайных величин ξ и η имеет геометрическое распределение с параметром p . Докажите, что

$$P(\xi = k | \xi + \eta = n) = \frac{1}{n-1}, \quad n > k \geq 1.$$

10.50. Независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют геометрическое распределение вероятностей с параметрами p_1 и p_2 соответственно. Как распределена случайная величина

$$\xi = \min(\xi_1, \xi_2)?$$

10.51. Пусть ξ и η — независимые неотрицательные целочисленные случайные величины, причем $M\xi < \infty$. Докажите, что

$$M \min(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) P(\eta \geq n).$$

10.52. Подбрасывается игральная кость. Если выпадает цифра ζ , то затем ζ раз подбрасывается монета. Пусть при этом герб выпадает ξ раз, а решка — η раз. Вычислите коэффициент корреляции случайных величин ξ и η .

10.53. Пусть ζ — случайное число изделий, каждое из которых с вероятностью p является бракованным. Выразите коэффициент корреляции числа ξ бракованных и числа η небракованных изделий через p и числовые характеристики величины ζ , полагая, что $D\zeta < \infty$.

10.54. В условиях задачи 10.53 докажите, что случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда случайная величина ζ имеет пуассоновское распределение вероятностей.

§ 11. Непрерывные двумерные распределения вероятностей

Общие понятия, связанные с двумерным абсолютно непрерывным распределением вероятностей

Абсолютно непрерывным двумерным распределением вероятностей называется распределение случайного вектора $(\xi, \eta)^T$, функция распределения которого $F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$ представима в виде

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv, \quad (11.1)$$

где $f(u, v) \geq 0$. Подынтегральная функция $f(x, y)$ при этом называется *плотностью вероятности* рассматриваемого распределения, или *совместной плотностью вероятности* рассматриваемых случайных величин ξ и η . Равенство (11.1) определяет эту функцию однозначно с точностью до множества лебеговой меры нуль в плоскости Oxy .

Функция $f(x, y)$ является плотностью вероятности тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям

$$f(x, y) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 \quad (11.2)$$

(*неотрицательность и нормированность*).

В частности, *равномерным распределением* на некоторой геометрической фигуре M площади $S > 0$ называется распределение с плотностью вероятности

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S}, & \text{если } (x, y) \in M, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin M. \end{cases} \quad (11.3)$$

Функция (11.3), как легко видеть, удовлетворяет условиям (11.2).

В точках непрерывности функции $f(x, y)$ имеем:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y). \quad (11.4)$$

Если $f(x, y)$ — совместная плотность вероятности величин ξ и η , то

$$P((\xi, \eta) \in B) = \iint_B f(x, y) dx dy \quad (11.5)$$

для всякого множества B на плоскости, для которого указанная вероятность определена. В этом смысле совместная плотность вероятности случайных величин ξ и η служит исчерпывающей характеристикой распределения вероятностей данных случайных величин.

Частные плотности вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ величин ξ и η выражаются через их совместную плотность вероятности $f(x, y)$ по формулам

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \quad (11.6)$$

— по аналогии с дискретным случаем (см. (10.31), с. 218). Естественно также, что

$$Mg(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy. \quad (11.7)$$

В частности,

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy, \quad M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy; \quad (11.8)$$

это, разумеется, дает тот же результат, что и формулы

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x) dx, \quad M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y) dy.$$

Наконец, специально отметим, что

$$M\xi\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy; \quad (11.9)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Предполагается, что приведенные выше интегралы сходятся абсолютно.

Случайные величины ξ и η с совместной плотностью вероятности $f(x, y)$ независимы тогда и только тогда, когда

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad (11.11)$$

(см. (10.23) и (11.4)); при этом частные плотности вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ определяются соотношениями (11.6).

Условная функция распределения

$$F_{2|1}(y|x) = P(\eta < y | \xi = x) \quad (11.12)$$

и связанная с нею соотношением

$$F_{2|1}(y|x) = \int_{-\infty}^y f_{2|1}(v|x) dv \quad (11.13)$$

условная плотность вероятности $f_{2|1}(y|x)$ случайной величины η при условии, что $\xi = x$, определяются следующим соглашением:

$$f_{2|1}(y|x) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_1(x)}, & \text{если } f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy > 0, \\ 0, & \text{если } f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = 0. \end{cases} \quad (11.14)$$

Функции $F_{2|1}(y|x)$ и $f_{2|1}(y|x)$ в (11.12)–(11.14) рассматриваются как функции аргумента y ; переменная x выступает в них в качестве параметра. При этом

$$P(\eta \in B | \xi = x) = \int_B f_{2|1}(y|x) dy. \quad (11.15)$$

Условное математическое ожидание $M(\eta | \xi = x)$ случайной величины η при условии, что $\xi = x$, определяется как

$$H(x) = M(\eta | \xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{2|1}(y|x) dy. \quad (11.16)$$

Функция $H(x)$ называется также *функцией регрессии η на ξ* .

Случайная величина $\hat{\eta} = H(\xi)$ чаще всего записывается в виде

$$\hat{\eta} = M(\eta | \xi) \quad (11.17)$$

и называется *условным математическим ожиданием случайной величины η относительно случайной величины ξ* . И здесь (сопоставьте с дискретным случаем) действует формула полного математического ожидания

$$M(M(\eta | \xi)) = M\eta. \quad (11.18)$$

При $M\xi^2 < \infty$, $M\eta^2 < \infty$ случайная величина $\hat{\eta}$ является наилучшей в среднем квадратическом оценкой случайной величины η по случайной величине ξ — в том смысле, что

$$M(\eta - h(\xi))^2 \geq M(\eta - \hat{\eta})^2$$

для всякой функции $h(x)$, для которой левая часть приведенного неравенства определена.

Соотношения (11.12)–(11.18) претерпевают естественные изменения, если величины ξ и η меняются местами. Так,

$$F_{1|2}(x|y) = P(\xi < x | \eta = y) = \int_{-\infty}^x f_{1|2}(u|y) du \quad (11.19)$$

есть условная функция распределения величины ξ при условии $\eta = y$, а

$$f_{1|2}(x|y) = \begin{cases} \frac{f(x, y)}{f_2(y)}, & \text{если } f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx > 0, \\ 0, & \text{если } f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = 0, \end{cases} \quad (11.20)$$

есть условная плотность вероятности величины ξ при условии, что $\eta = y$.

Функция

$$G(y) = M(\xi | \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{1|2}(x|y) dx \quad (11.21)$$

представляет собой функцию регрессии ξ на η — условное математическое ожидание случайной величины ξ при условии, что $\eta = y$. Случайная величина

$$\hat{\xi} = G(\eta) = M(\xi | \eta), \quad (11.22)$$

определяющая условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно случайной величины η , связана с $M\xi$ соотношением

$$M(M(\xi | \eta)) = M\xi. \quad (11.23)$$

При $M\xi^2 < \infty$, $M\eta^2 < \infty$ случайная величина $\hat{\xi}$ является наилучшей в среднем квадратическом оценкой величины ξ по величине η :

$$M(\xi - g(\eta))^2 \geq M(\xi - \hat{\xi})^2$$

для всякой функции $g(\eta)$, для которой левая часть данного неравенства определена.

Свойства (10.47) условного математического ожидания, рассмотренные в § 10 для дискретных распределений, распространяются и на абсолютно непрерывные распределения вероятностей.

Наконец, приведем формулу умножения плотностей — простое следствие формул (11.14) и (11.20):

$$f(x, y) = f_{1|2}(x|y) \cdot f_2(y) = f_{2|1}(y|x) \cdot f_1(x). \quad (11.24)$$

В случае независимых случайных величин ξ и η

$$f_{1|2}(x|y) = f_1(x), \quad f_{2|1}(y|x) = f_2(y). \quad (11.25)$$

При этом

$$M(\eta|\xi) = M\eta, \quad M(\xi|\eta) = M\xi \quad (11.26)$$

(с вероятностью 1).

Примеры исследования двумерных непрерывных распределений вероятностей

11.1. По плану, представленному на с. 221, исследуйте двумерный случайный вектор $(\xi, \eta)^T$, распределенный равномерно в квадрате $|x| + |y| \leq 1$ (рис. 11.1).

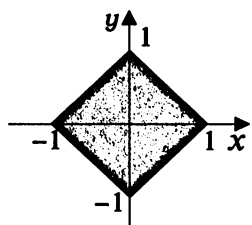


Рис. 11.1.

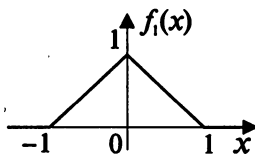


Рис. 11.2.

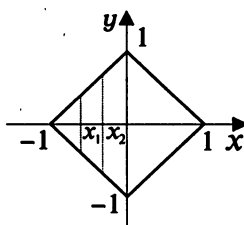


Рис. 11.3.

Решение. Прежде всего отметим, что в соответствии с общей формулой (11.3), приведенной на с. 236, совместная плотность вероятности $f(x, y)$ данных случайных величин ξ и η записывается в виде

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } |x| + |y| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |x| + |y| > 1 \end{cases}$$

(площадь рассматриваемого квадрата $S = 2$).

1) Частная плотность вероятности $f_1(x)$ случайной величины ξ , в соответствии с (11.6), может быть вычислена как

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Очевидно, что $f_1(x) = 0$, если $|x| > 1$; если же $|x| \leq 1$, то

$$f_1(x) = \int_{|x|-1}^{1-|x|} \frac{1}{2} dy = 1 - |x|.$$

Итак,

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 11.2. Простые вычисления, с учетом четности функции $f_1(x)$, дают (проверьте):

$$M\xi = \int_{-1}^1 x(1 - |x|) dx = 0,$$

$$M\xi^2 = \int_{-1}^1 x^2(1 - |x|) dx = \frac{1}{6},$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{6}.$$

Распределение случайной величины η отыскивается аналогично. Впрочем, соображения симметрии и без формальных вычислений подсказывают, что

$$f_2(y) = \begin{cases} 1 - |y|, & \text{если } |y| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |y| > 1; \end{cases}$$

$$M\eta = 0, \quad D\eta = \frac{1}{6}.$$

2) Условие независимости $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ в данном случае не выполняется:

$$\frac{1}{2} \neq (1 - |x|) \cdot (1 - |y|).$$

На это явно настраивает и рис. 11.3. Фиксируя ξ на разных отрицательных (для определенности) уровнях x_1 и x_2 , мы сразу же обнаруживаем, что в первом случае величина η изменяется в одних пределах, а во втором случае — в других пределах.

Итак, рассматриваемые случайные величины ξ и η зависимы.

3) Имеем:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta = M(\xi\eta) = \iint_{|x|+|y|\leq 1} xy \cdot \frac{1}{2} dx dy = 0$$

(нулевое значение получается уже при интегрировании по x : интегрировать придется нечетную функцию в симметричных относительно точки 0 пределах).

Далее,

$$\rho = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = 0.$$

Это приводит к следующей ковариационной матрице K и нормированной корреляционной матрице R вектора $(\xi, \eta)^T$:

$$K = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как видно, величины ξ и η являются некоррелированными.

Эта задача дает содержательный пример *некоррелированных зависимых* случайных величин.

4) Условная плотность вероятности $f_{2|1}(y|x)$ случайной величины η при условии, что $\xi = x$, в соответствии с (11.14), записывается следующим образом (для $|x| < 1$):

$$f_{2|1}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-|x|)} & \text{при } |y| \leq 1 - |x|, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Напомним, что величине x здесь отводится роль параметра; в качестве аргумента функции выступает величина y . Но дробь

$$\frac{1}{2(1-|x|)}$$

не зависит от y , и, таким образом, при $|x| < 1$ функцию $f_{2|1}(y|x)$ можно рассматривать как плотность равномерного распределения в интервале

$$\left(-(1-|x|), (1-|x|) \right).$$

Это мы и будем иметь в виду, записывая, что

$$L(\eta|\xi = x) \equiv R\left(-(1-|x|), (1-|x|) \right).$$

Отсюда вытекает, что

$$H(x) = M(\eta|\xi = x) = 0;$$

заодно приведем и значение условной дисперсии

$$D(\eta|\xi = x) = \frac{[2(1-|x|)]^2}{12} = \frac{(1-|x|)^2}{3}.$$

Аналогично получаем

$$G(y) = M(\xi|\eta = y) = 0, \quad D(\xi|\eta = y) = \frac{(1-|y|)^2}{3}.$$

5) В качестве наилучших в среднем квадратическом оценок величин ξ и η — одной по наблюдениям над другой — получаем соответственно

$$\hat{\xi} = G(\eta) = 0, \quad \hat{\eta} = H(\xi) = 0$$

(с вероятностью 1).

6) Очевидно,

$$M\hat{\xi} = 0 = M\xi, \quad M\hat{\eta} = 0 = M\eta,$$

что иллюстрирует формулу полного математического ожидания на рассматриваемом примере.

11.2. По плану, представленному на с. 221, исследуйте двумерный случайный вектор $(\xi, \eta)^T$, распределенный равномерно внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

11.3. Случайные величины ξ и η имеют равномерное совместное распределение в треугольнике с вершинами в точках $(-5, 0)$, $(5, 0)$ и $(0, 4)$. Вычислите:

- 1) $M(\eta|\xi = 2)$, $D(\eta|\xi = 2)$;
- 2) $M(\xi|\eta = 2)$, $D(\xi|\eta = 2)$.

11.4. Случайный вектор $(\xi, \eta)^T$ распределен равномерно в полукруге $x^2 + y^2 \leq 25$, $x \geq 0$. Вычислите:

- 1) $M(\eta|\xi = 3)$, $D(\eta|\xi = 3)$;
- 2) $M(\xi|\eta = 4)$, $D(\xi|\eta = 4)$.

11.5. По плану, представленному на с. 221, исследуйте двумерный случайный вектор $(\xi, \eta)^T$ с функцией распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\mu y} + e^{-\lambda x - \mu y} & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

11.6. Плотность вероятности случайного вектора $(\xi, \eta)^T$ такова:

$$f(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}.$$

1) Найдите коэффициент a и частные плотности вероятности случайных величин ξ и η .

2) Исследуйте случайные величины ξ и η на некоррелированность и на независимость.

11.7. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\eta = \xi^2$. Исследуйте величины ξ и η на независимость и некоррелированность.

11.8. Для случайного вектора $(\xi, \eta)^T$ с ковариационной матрицей

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

вычислите:

- 1) $D(\xi + \eta)$; 2) $D(\xi - \eta)$; 3) $D(-\xi - 2\eta)$;
- 4) $D(2\xi + 3\eta)$; 5) $D(3\xi - \eta + 2)$; 6) $D(2\xi - 3)$.

11.9. Докажите, что если $D\xi < \infty$, $D\eta < \infty$, то

$$\left(\sqrt{D\xi} - \sqrt{D\eta}\right)^2 \leq D(\xi + \eta) \leq \left(\sqrt{D\xi} + \sqrt{D\eta}\right)^2.$$

11.10. Докажите, что если $\rho(\xi, \eta)$ — коэффициент корреляции случайных величин ξ и η и $ac \neq 0$, то для любых b и d

$$\rho(a\xi + b, c\eta + d) = \begin{cases} \rho(\xi, \eta) & \text{при } ac > 0; \\ -\rho(\xi, \eta) & \text{при } ac < 0. \end{cases}$$

11.11. Пусть $\zeta \sim E(\lambda)$. Вычислите коэффициент корреляции случайных величин ξ и η , если:

1) $\xi = 2\zeta + 3$, $\eta = 3\zeta - 1$;	2) $\xi = 2 + \zeta$, $\eta = 5 - \zeta$;
3) $\xi = \zeta + 1$, $\eta = \zeta^2 - 1$;	4) $\xi = \zeta^2$, $\eta = \zeta^2 - \zeta$;

11.12. Пусть $\zeta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Вычислите коэффициент корреляции случайных величин ξ и η , если:

- 1) $\xi = \zeta$, $\eta = \zeta^2$;
- 2) $\xi = \zeta$, $\eta = \zeta^3$;
- 3) $\xi = 3\zeta^2 - 2$, $\eta = 2\zeta^2 + 3$.

Вероятность попадания случайной точки в заданную область

11.13. Случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены по закону $R(0, 1)$. Найти вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + 2\xi x + \eta = 0$ вещественны.

Решение. Поскольку случайные величины ξ и η независи-

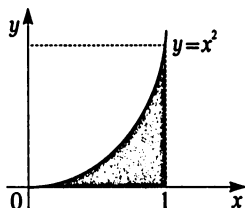


Рис. 11.4.

мы, их совместная плотность вероятности $f(x, y)$ равна произведению их частных плотностей вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Принимая во внимание, что каждая из величин ξ и η распределена равномерно в интервале $(0, 1)$, получаем

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Уравнение $x^2 + 2\xi x + \eta = 0$ имеет вещественные корни тогда

и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен, т. е.

$$4\xi^2 - 4\eta \geq 0, \quad \xi^2 \geq \eta.$$

В соответствии с формулой (11.5) (см. с. 236)

$$P(\xi^2 \geq \eta) = \iint_{x^2 \geq y} f(x, y) dx dy = \iint_{1 \geq x^2 \geq y \geq 0} dx dy.$$

Как мы видим, задача сводится к нахождению площади S фигуры, отмеченной на рис. 11.4. Имеем:

$$P(\xi^2 \geq \eta) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

11.14. Диаметр вала и диаметр отверстия — независимые случайные величины, распределенные равномерно в интервалах $(4,95; 5,15)$ и $(5,0; 5,2)$ соответственно. Определите вероятность того, что вал войдет в отверстие.

11.15. Пусть ξ и η — независимые стандартные нормальные величины. Найти вероятность попадания точки (ξ, η) в прямоугольник с центром в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$.

Решение. Совсем просто рассматривается случай, когда стороны данного прямоугольника Π параллельны осям координат (рис. 11.5). В этом случае в силу независимости случайных величин ξ и η

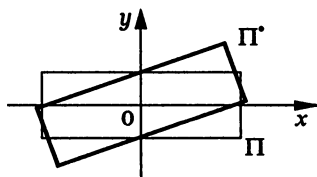


Рис. 11.5.

$$\begin{aligned} P((\xi, \eta) \in \Pi) &= P(-a < \xi < a, -b < \eta < b) = \\ &= P(-a < \xi < a)P(-b < \eta < b) = \\ &= 2\Phi_0(a) \cdot 2\Phi_0(b) = 4\Phi_0(a)\Phi_0(b). \end{aligned}$$

В общем случае имеем:

$$P((\xi, \eta) \in \Pi^*) = \iint_{\Pi^*} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy.$$

При повороте на некоторый угол φ вокруг начала координат (ортогональное преобразование!) прямоугольник Π^* переходит в прямоугольник Π . По общим правилам перехода к новым переменным интегрирования u и v , с учетом свойств ортогонального преобразования имеем:

$$u^2 + v^2 = x^2 + y^2, \quad |J| = 1$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} P((\xi, \eta) \in \Pi^*) &= \iint_{\Pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} |J| du dv = \\ &= \iint_{\Pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} du dv = P((\xi, \eta) \in \Pi) = \\ &= 4\Phi_0(a)\Phi_0(b). \end{aligned}$$

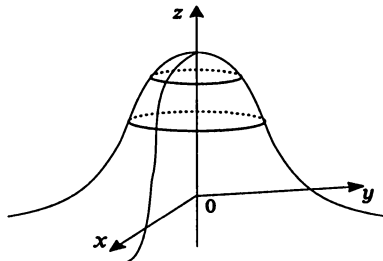


Рис. 11.6.

Полученный результат геометрически вполне очевиден. График функции

$$z = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

(совместной плотности вероятности величин ξ и η) представляет собой поверхность вращения с осью вращения Oz (рис. 11.6); лежащие в плоскости Oxy прямоугольники Π и Π^* имеют соответственно равные стороны и каждый из них симметричен относительно начала координат. Поэтому объемы под рассматриваемым «колокольчиком», приходящиеся на прямоугольники Π и Π^* , равны. А эти объемы совпадают с рассматриваемыми вероятностями $P((\xi, \eta) \in \Pi)$ и $P((\xi, \eta) \in \Pi^*)$.

11.16. Известно, что ξ и η — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины. Найдите вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в квадрат:

- 1) $|x| \leq 1, |y| \leq 1$; 2) $|x| + |y| \leq 1$.

11.17. Доказать, что если ξ и η — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины, то

$$\xi^2 + \eta^2 \sim E\left(\frac{1}{2}\right).$$

Решение. Совместная плотность вероятности $f(x, y)$ независимых случайных величин ξ и η равна произведению их частных плотностей вероятности:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

Поэтому при $z > 0$

$$P(\xi^2 + \eta^2 < z) = \iint_{x^2+y^2 < z} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy.$$

Такие интегралы проще всего вычисляются с помощью полярных координат. Полагая

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

находим

$$P(\xi^2 + \eta^2 < z) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr = 1 - e^{-\frac{1}{2}z}.$$

Полученная функция служит функцией распределения экспоненциального закона $E(\lambda)$ при $\lambda = 1/2$.

11.18. Известно, что ξ и η — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевыми средними значениями и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно. Вычислите вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в область, ограниченную эллипсом

$$\frac{x^2}{(k\sigma_1)^2} + \frac{y^2}{(k\sigma_2)^2} = 1.$$

11.19. Известно, что ξ и η — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины. Найдите математическое ожидание и дисперсию длины $\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ вектора $(\xi, \eta)^T$.

Функциональные преобразования случайных векторов

Предположим, что случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ имеет плотность вероятности $f_\xi(x_1, x_2)$. Пусть, кроме того,

$$y_1 = g_1(x_1, x_2), \quad y_2 = g_2(x_1, x_2) \quad (11.27)$$

— заданные функции, преобразующие вектор ξ в вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$:

$$\begin{cases} \eta_1 = g_1(\xi_1, \xi_2), \\ \eta_2 = g_2(\xi_1, \xi_2). \end{cases} \quad (11.28)$$

Будем также считать, что функции (11.27) гладко обратимы, т. е. из (11.27) следует, что

$$\begin{cases} x_1 = h_1(y_1, y_2), \\ x_2 = h_2(y_1, y_2), \end{cases} \quad (11.29)$$

причем существуют частные производные функций h_1 и h_2 , образующие якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}. \quad (11.30)$$

При этих соглашениях плотность вероятности $f_\eta(y_1, y_2)$ случайного вектора η выражается через плотность вероятности $f_\xi(x_1, x_2)$ случайного вектора ξ по формуле

$$f_\eta(y_1, y_2) = f_\xi(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) \cdot |J|. \quad (11.31)$$

Вводя обозначения $y = (y_1, y_2)$, $h = (h_1, h_2)$, формулу (11.31) можно записать в виде

$$f_\eta(y) = f_\xi(h(y)) \cdot |J|. \quad (11.32)$$

Это двумерный аналог формулы (8.34), приведенной на с. 176.

В случае линейного преобразования

$$\eta = A\xi + b$$

($\eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + b_1$, $\eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + b_2$), с невырожденной матрицей $A = \|a_{ij}\|$ формула (11.32) принимает следующий вид:

$$f_\eta(y) = \frac{1}{|\det A|} f_\xi(A^{-1}(y - b)). \quad (11.33)$$

11.20. Каждая из независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 распределена равномерно в интервале $(0, 1)$. Найти закон распределения случайной величины:

$$1) \eta = \xi_1 \xi_2; \quad 2) \eta = \xi_1 / \xi_2.$$

Решение (частично). 1) Наряду с функцией $g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$, непосредственно связанной с этой задачей, введем в рассмотрение (искусственно) еще какую-нибудь, по возможности простую функцию тех же переменных x_1 и x_2 , например, $g_2(x_1, x_2) = x_2$, чтобы можно было использовать описанную выше теорию. Имеем:

$$\begin{cases} \eta_1 = g_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2, \\ \eta_2 = g_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2, \\ y_2 = g_2(x_1, x_2) = x_2 \end{cases}$$

и, стало быть,

$$\begin{cases} x_1 = h_1(y_1, y_2) = \frac{y_1}{y_2}, \\ x_2 = h_2(y_1, y_2) = y_2; \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{y_2} & -\frac{y_1}{y_2^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y_2}.$$

Основная формула (11.31), с учетом того, что

$$f_{\xi}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

дает

$$f_{\eta}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{|y_2|}, & \text{если } 0 \leq \frac{y_1}{y_2} \leq 1, \quad 0 \leq y_2 \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

или

$$f_{\eta}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{y_2}, & \text{если } 0 < y_1 \leq y_2 \leq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

После этого искомая плотность вероятности $f_{\eta_1}(y_1)$ случайной величины $\eta_1 = \xi_1 \xi_2$ может быть найдена по формуле

$$f_{\eta_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(y_1, y_2) dy_2 = \int_{y_1}^1 \frac{1}{y_2} dy_2 = -\ln y_1$$

для $0 < y_1 \leq 1$. При $y_1 \leq 0$ и $y_1 > 1$, очевидно, $f_{\eta_1}(y_1) = 0$.

О т в е т может быть записан в таком виде:

$$f_{\xi_1 \xi_2}(x) = \begin{cases} -\ln x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

График этой плотности вероятности представлен на рис. 11.7.

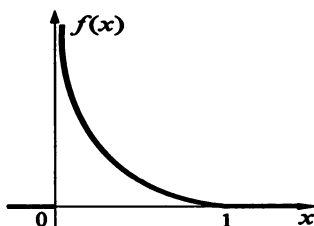


Рис. 11.7.

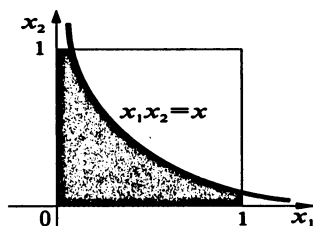


Рис. 11.8.

Приведенное решение демонстрирует общие положения, заложенные в формуле (11.31). Задачу можно было бы решить и другим, возможно, более легким путем. Сначала найдем функцию распределения $F(x)$ случайной величины $\eta = \xi_1 \xi_2$:

$$F(x) = P(\eta < x) = P(\xi_1 \xi_2 < x) = \iint_{x_1 x_2 < x} f_{\xi}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Очевидно, что $P(0 \leq \xi_1 \xi_2 \leq 1) = 1$; поэтому $F(x) = 0$ при $x \leq 0$ и $F(x) = 1$ при $x > 1$. Если же $0 < x \leq 1$, то

$$F(x) = \iint_{0 < x_1 x_2 < x} dx_1 dx_2.$$

Такой интеграл представляет собой площадь фигуры, отмеченной на рис. 11.8, и равен (проверьте)

$$F(x) = 1 - \int_x^1 \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) dx_1 = x(1 - \ln x).$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x(1 - \ln x) & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Отсюда, посредством дифференцирования, легко находится плотность вероятности $f(x)$ случайной величины $\eta = \xi_1 \xi_2$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} -\ln x, & \text{если } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{если } x \notin (0, 1). \end{cases}$$

11.21. Каждая из независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 имеет экспоненциальное распределение с параметром λ . Найти закон распределения случайной величины:

$$1) \eta = \frac{\xi_1}{\xi_2}; \quad 2) \eta = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}.$$

Решение (частично). 1) Пусть

$$\begin{cases} y_1 = \frac{x_1}{x_2}, \\ y_2 = x_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 y_2, \\ x_2 = y_2. \end{cases}$$

Тогда

$$J = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y_2.$$

Если теперь

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{\xi_1}{\xi_2}, \\ \eta_2 = \xi_2, \end{cases}$$

то плотность вероятности $f_\eta(y_1, y_2)$ выражается через плотность вероятности

$$f_\xi(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}, & \text{если } x_1 > 0, \ x_2 > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

по формуле (11.31):

$$f_\eta(y_1, y_2) = \begin{cases} \lambda^2 y_2 e^{-\lambda(y_1 y_2 + y_2)}, & \text{если } y_1 y_2 > 0, \ y_2 > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, при $y_1 > 0$

$$\begin{aligned} f_{\eta_1}(y_1) &= \int_0^\infty f_\eta(y_1, y_2) dy_2 = \\ &= \int_0^\infty \lambda^2 y_2 e^{-\lambda(y_1+1)y_2} dy_2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2(y_1+1)^2} = \frac{1}{(y_1+1)^2}. \end{aligned}$$

О т в е т к задаче можно записать в виде

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Читателям предлагается самостоятельно решить эту задачу другим способом — по аналогии с предыдущей задачей.

11.22. Каждая из независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 имеет стандартное нормальное распределение вероятностей. Найти распределение частного $\eta = \xi_1/\xi_2$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$f_\xi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}.$$

Полагая $\eta_1 = \xi_1/\xi_2$, $\eta_2 = \xi_2$, по аналогии с приведенным выше решением задачи 11.21, получаем

$$f_\eta(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} |y_2| e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 y_2^2 + y_2^2)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_{\eta_1}(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(y_1, y_2) dy_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |y_2| e^{-\frac{1}{2}(1+y_1^2)y_2^2} dy_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} y_2 e^{-\frac{1}{2}(1+y_1^2)y_2^2} dy_2 = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y_1^2} e^{-\frac{1}{2}(1+y_1^2)y_2^2} d\left(\frac{1}{2}(1+y_1^2)y_2^2\right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y_1^2}. \end{aligned}$$

О т в е т к задаче может быть записан в виде

$$f_{\xi_1/\xi_2}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

З а м е ч а н и е. Как показано выше, частное $\eta = \xi_1/\xi_2$ двух независимых стандартных нормальных величин имеет распределение Коши. Отметим, что такое же распределение, очевидно, имеет и частное $\eta' = \xi_2/\xi_1$. А это означает, что если случайная величина η распределена по закону Коши, то по закону Коши распределена и случайная величина $\eta' = 1/\eta$ (еще одно решение задачи 8.79, приведенной на с. 179).

11.23. Как в условиях задачи 11.22 распределена случайная величина: 1) $\eta = |\xi_1|/\xi_2$; 2) $\eta = \xi_1/|\xi_2|$?

11.24. Как распределено частное ξ/η , если:

1) $\xi \sim \mathcal{N}(0, 4)$, $\eta \sim \mathcal{N}(0, 4)$;

2) $\xi \sim \mathcal{N}(0, 4)$, $\eta \sim \mathcal{N}(0, 9)$?

11.25. Случайный вектор $(\xi_1, \xi_2)^T$ распределен равномерно в круге $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$. Как распределена величина $\eta = \xi_1/\xi_2$?

11.26. Координаты вектора $(\xi, \eta)^T$ — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины. Найдите совместное распределение полярных координат данного вектора и их частные распределения.

11.27. Плотность вероятности вектора $(\xi_1, \xi_2)^T$ такова:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{C}{(1+x+y)^3}, & \text{если } x > 0, \quad y > 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

11.28. Пусть ξ_1 и ξ_2 — одинаково распределенные по закону $E(\lambda)$ случайные величины. Докажите, что если они независимы, то независимы и случайные величины:

$$1) \eta_1 = \xi_1 + \xi_2 \text{ и } \eta_2 = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}; \quad 2) \eta_1 = \xi_1 + \xi_2 \text{ и } \eta_2 = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

11.29. Докажите, что если каждая из независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 распределена равномерно в интервале $(0, 1)$, то случайные величины

$$\eta_1 = \rho \cos \varphi \quad \text{и} \quad \eta_2 = \rho \sin \varphi,$$

где $\rho = \sqrt{-2 \ln \xi_1}$, $\varphi = 2\pi \xi_2$, независимы и имеют одно и то же распределение — $\mathcal{N}(0, 1)$.

Примечание. Результат, представленный в этой задаче, может быть использован при моделировании нормального распределения вероятностей.

11.30. Известно, что ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, каждая из которых имеет стандартное нормальное распределение вероятностей. Найдите плотность вероятности случайной величины

$$\eta = \frac{2\xi_1\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Суммирование независимых случайных величин

Если ξ и η — независимые случайные величины с плотностями вероятности $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, то плотность вероятности $f(x)$ суммы $\xi + \eta$ может быть найдена как *свертка*

$$f = f_1 * f_2$$

плотностей $f_1(x)$ и $f_2(x)$, которая определяется следующим образом:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(x-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(v) f_1(x-v) dv. \quad (11.34)$$

В случае, когда слагаемые ξ и η принимают лишь неотрицательные значения, формула (11.34) принимает вид

$$f(x) = \int_0^x f_1(u) f_2(x-u) du = \int_0^x f_2(v) f_1(x-v) dv. \quad (11.35)$$

Следует отметить, что вычисления по формулам (11.34) и (11.35) могут оказаться слишком громоздкими (как, например, в случае нормально распределенных величин ξ и η) или связанными с другими, принципиальными, трудностями интегрирования (как, например, в случае, когда величины ξ и η распределены по закону Коши). В дальнейшем будут приведены другие, более удобные методы исследования сумм независимых случайных величин. А пока мы ограничимся рассмотрением тех задач, которые легко решаются с помощью приведенных формул.

11.31. Найти плотность вероятности суммы $\xi + \eta$, если известно, что случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены по закону $R(0, 1)$.

Решение. Прежде всего запишем плотности вероятности слагаемых ξ и η :

$$f_{\xi}(x) = f_{\eta}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

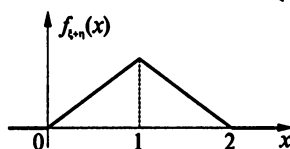


Рис. 11.9.

Далее, очевидно, что сумма $\xi + \eta$ случайных величин ξ и η принимает лишь значения из промежутка $(0, 2)$. Для всякого такого значения x имеем:

$$\begin{aligned} f_{\xi+\eta}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(u) f_{\eta}(x-u) du = \\ &= \int_{\substack{0 < u < 1 \\ 0 < x-u < 1}} du = \int_{\substack{0 < u < 1 \\ x-1 < u < x}} du = \\ &= \int_{\max(0, x-1) < u < \min(1, x)} du = \min(1, x) - \max(0, x-1). \end{aligned}$$

Рассматривая отдельно случаи $0 < x < 1$ и $1 < x < 2$, получаем:

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ и при } x > 2. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 11.9.

11.32. Найдите плотность вероятности суммы $\xi + \eta$, если известно, что случайные величины ξ и η независимы, причем:

- 1) $\xi \sim R(0, 1)$, $\eta \sim R(1, 2)$; 2) $\xi \sim R(-1, 0)$, $\eta \sim R(0, 1)$;
- 3) $\xi \sim R(0, 2)$, $\eta \sim R(0, 2)$; 4) $\xi \sim R(0, 1)$, $\eta \sim R(2, 5)$.

11.33. Как распределена сумма $\xi + \eta$, если ξ и η — независимые одинаково распределенные по закону $E(\lambda)$ случайные величины?

11.34. Деталь обрабатывается последовательно на n станках. Времена обработки $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ — независимые одинаково распределенные по закону $E(\lambda)$ случайные величины. Найти плотность вероятности суммарного времени обработки детали $\tau(n) = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$, а также $M\tau(n)$ и $D\tau(n)$.

Решение. Если

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

— плотность вероятности каждой из величин $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, а $f_n(x)$ — плотность вероятности суммы $\tau(n)$, то

$$f_2 = f * f,$$

$$f_3 = f_2 * f,$$

...

$$f_n = f_{n-1} * f.$$

Используя результат задачи 11.33,

$$f_2(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x},$$

находим (при $x > 0$):

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \int_0^x \lambda^2 u e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(x-u)} du = \\ &= \lambda^3 e^{-\lambda x} \int_0^x u du = \frac{\lambda^3 x^2}{2} e^{-\lambda x} = \lambda \frac{(\lambda x)^2}{2} e^{-\lambda x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \int_0^x \frac{\lambda^3}{2} u^2 e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(x-u)} du = \\ &= \frac{\lambda^4}{2} e^{-\lambda x} \int_0^x u^2 du = \frac{\lambda^4}{2} e^{-\lambda x} \frac{x^3}{3} = \lambda \frac{(\lambda x)^3}{3!} e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Индукцией по n нетрудно доказать, что

$$f_n(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}.$$

Распределение с плотностью вероятности $f_n(x)$ называется *распределением Эрланга*; оно находит много важных применений в теории массового обслуживания. Математическое ожидание и дисперсия распределения Эрланга проще всего находятся из представления

$$\tau(n) = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n.$$

С учетом того, что слагаемые независимы и $M\tau_k = \frac{1}{\lambda}$, $D\tau_k = \frac{1}{\lambda^2}$, сразу же получаем:

$$M\tau(n) = \frac{n}{\lambda}, \quad D\tau(n) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

11.35. В условиях задачи 11.34 найдите

$$M\tau(n)^m = M(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n)^m,$$

где m — натуральное число.

11.36. Найдите плотность вероятности разности $\zeta = \xi - \eta$, если известно, что случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены по закону: 1) $R(0, 1)$; 2) $E(\lambda)$.

11.37. Как распределена сумма $\xi + \eta$, если ξ и η — независимые случайные величины и $\xi \sim E(\lambda)$, а $\eta \sim \Pi(\lambda)$?

Мультипликативное свойство математического ожидания

Как уже отмечалось, если случайные величины ξ и η независимы и $M|\xi| < \infty$, $M|\eta| < \infty$, то

$$M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta. \quad (*)$$

Это — так называемое *мультипликативное свойство математического ожидания*.

11.38. Известно, что ξ и η — независимые стандартные нормальные величины. Вычислите математическое ожидание и дисперсию площади треугольника, образованного в декартовой прямоугольной системе координат Oxy осями координат и прямой

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} = 1.$$

Решение (частично). Площадь рассматриваемого треугольника $S = \frac{1}{2}|\xi||\eta|$ и, следовательно,

$$MS = \frac{1}{2}M|\xi|M|\eta|.$$

Вспомня, что $M|\xi| = \sqrt{2/\pi}$ (задача 8.66), получаем

$$MS = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^2 = \frac{1}{\pi}.$$

11.39. Вычислите математическое ожидание и дисперсию объема прямого кругового цилиндра, радиус основания ξ и высота η которого рассматриваются как независимые случайные величины, причем $\xi \sim E(\lambda)$, $\eta \sim R(a, b)$ (для некоторых положительных значений параметров a , b и λ).

11.40. Вычислите математическое ожидание и дисперсию площади эллипса

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\eta^2} \leq 1,$$

в предположении, что ξ и η независимые случайные величины, причем:

- 1) $\xi \sim R(0, 2)$, $\eta \sim E\left(\frac{1}{3}\right)$;
- 2) $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$;
- 3) $\xi \sim R(-1, 1)$, $\eta \sim R(-1, 3)$.

11.41. Правомерны ли приводимые ниже рассуждения?

1) Дорога от дома до института (1 км) занимает у меня в среднем 12 мин; следовательно, я хожу со средней скоростью 5 км/ч.

2) Я хожу со средней скоростью 5 км/ч и в ходьбе провожу ежедневно в среднем 3 ч; следовательно, в среднем я ежедневно прохожу 15 км.

11.42. Докажите, что для всяких независимых случайных величин ξ и η с конечными дисперсиями

$$D(\xi\eta) = D\xi \cdot D\eta + D\xi \cdot (M\eta)^2 + D\eta \cdot (M\xi)^2,$$

и, в частности,

$$D(\xi\eta) \geq D\xi \cdot D\eta.$$

Примечание. Эта задача приводит к выводу о том, что если ξ и η — независимые центрированные случайные величины с конечными дисперсиями, то

$$D(\xi\eta) = D\xi D\eta.$$

Полученный результат естественно назвать *мультипликативным свойством дисперсии*.

Энтропия и информация

Энтропия $H(\xi, \eta)$ случайного вектора $(\xi; \eta)^T$ с плотностью вероятности $f(x, y)$ определяется как

$$H(\xi, \eta) = - \iint_{R^2} f(x, y) \ln f(x, y) dx dy. \quad (11.36)$$

Для независимых случайных величин ξ и η

$$H(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta). \quad (11.37)$$

Условная энтропия $H(\eta|\xi = x)$ случайной величины η при условии, что $\xi = x$, рассматривается как энтропия условного распределения вероятностей с плотностью

$$f_{2|1}(y|x) = \begin{cases} \frac{f(x, y)}{f_1(x)}, & \text{если } f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy > 0, \\ 0, & \text{если } f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = 0, \end{cases}$$

и, стало быть,

$$H(\eta|\xi = x) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_{2|1}(y|x) \ln f_{2|1}(y|x) dy. \quad (11.38)$$

Средняя условная энтропия $H(\eta|\xi)$ случайной величины η относительно случайной величины ξ получается посредством усреднения условной энтропии (11.38) по распределению величины ξ :

$$H(\eta|\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\eta|\xi = x) f_1(x) dx = - \iint_{R^2} f(x, y) \ln f(x, y) dx dy. \quad (11.39)$$

Из (11.39) следует, что

$$\begin{aligned} H(\eta|\xi) &= H(\xi, \eta) - H(\xi), \\ H(\xi, \eta) &= H(\xi) + H(\eta|\xi). \end{aligned} \quad (11.40)$$

В случае независимых случайных величин ξ и η формула (11.40) преобразуется в формулу (11.37).

Количество информации $I_\xi(\eta)$ о величине η , содержащейся в величине ξ , определяется как

$$I_\xi(\eta) = H(\eta) - H(\eta|\xi). \quad (11.41)$$

Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$I_\xi(\eta) = I_\eta(\xi) = 0; \quad (11.42)$$

в общем же случае

$$I_\xi(\eta) = I_\eta(\xi) \geq 0. \quad (11.43)$$

11.43. Какое абсолютно непрерывное распределение вероятностей в круге $x^2 + y^2 \leq r^2$ обладает наибольшей энтропией?

11.44. Случайный вектор $(\xi, \eta)^T$ распределен равномерно в квадрате $|x| + |y| \leq 1$. Вычислите количество информации об одной из случайных величин ξ и η , содержащейся в другой случайной величине.

11.45. Верно ли, что для всякого случайного вектора $(\xi, \eta)^T$ с абсолютно непрерывным распределением вероятностей:

$$1) H(\xi, \eta) \geq 0; \quad 2) I_{\xi}(\eta) \geq 0?$$

11.46. Верно ли, что для всякого случайного вектора $(\xi, \eta)^T$ с абсолютно непрерывным распределением вероятностей

$$H(\xi, \eta) \leq H(\xi) + H(\eta)?$$

(Сопоставьте с результатом задачи 10.36.)

11.47. Докажите, что среди всех случайных векторов $(\xi, \eta)^T$, имеющих дискретное или абсолютно непрерывное распределение вероятностей и заданные энтропии $H(\xi)$ и $H(\eta)$ наибольшей энтропией $H(\xi, \eta)$ обладают векторы с независимыми составляющими ξ и η .

11.48. Пусть ξ и η — случайные величины, $g(x)$ — функция, причем каждая пара — (ξ, η) и $(g(\xi), \eta)$ — имеет абсолютно непрерывное распределение вероятностей. Какая случайная величина — ξ или $g(\xi)$ — несет в себе большее количество информации о случайной величине η ?

Разные задачи

11.49. Известно, что ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, причем $\xi_1 \sim R(0, 1)$, $\xi_2 \sim Bi(n, p)$, где $n = 10\,000$, $p = 1/2$. Пусть

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + 2\xi_2, \\ \eta_2 = \xi_1 - 4\xi_2. \end{cases}$$

Найдите ковариационную и нормированную корреляционную матрицы вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$. Какие интуитивные соображения можно привести в пользу результата вычисления коэффициента корреляции величин η_1 и η_2 ?

11.50. Докажите, что если ξ_1 и ξ_2 — одинаково распределенные случайные величины с конечными моментами второго порядка, то величины $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$ являются некоррелированными.

11.51. Докажите, что если случайные величины ξ и η одинаково распределены, имеют конечные дисперсии и ρ — их коэффициент корреляции, то ξ и $\eta - \rho\xi$ — некоррелированные случайные величины.

11.52. Исследуйте на независимость и некоррелированность случайные величины $\xi = \sin \zeta$ и $\eta = \cos \zeta$, если известно, что $\zeta \sim R(0, 2\pi)$.

11.53. Случайные величины ξ и η имеют абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности

$$f(x, y) = Ce^{-\frac{1}{2}(x^2+1)(y^2+1)}$$

(C — нормирующая константа). Найдите условные вероятности:

$$1) P(|\eta| < 1 | \xi = 0,75); \quad 2) P(|\xi| > 1 | \eta = 1).$$

11.54. Докажите, что если случайные величины ξ и η имеют абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности $f(x, y)$, то частное ξ/η имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности

$$f(z) = - \int_{-\infty}^0 t f(zt, t) dt + \int_0^{\infty} t f(zt, t) dt.$$

В частности, для независимых случайных величин ξ и η с плотностями вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ соответственно

$$f(z) = - \int_{-\infty}^0 t f_1(zt) f_2(t) dt + \int_0^{\infty} t f_1(zt) f_2(t) dt.$$

11.55. Докажите, что если случайные величины ξ и η имеют абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности $f(x, y)$, то произведение $\xi\eta$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности

$$f(z) = - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t} f\left(\frac{z}{t}, t\right) dt + \int_0^{\infty} \frac{1}{t} f\left(\frac{z}{t}, t\right) dt.$$

В частности, для независимых случайных величин ξ и η с плотностями вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ соответственно

$$f(z) = - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t} f_1\left(\frac{z}{t}\right) f_2(t) dt + \int_0^{\infty} \frac{1}{t} f_1\left(\frac{z}{t}\right) f_2(t) dt.$$

11.56. Ошибка измерений некоторой величины при одном методе равна 2ξ , где $M\xi = 0$, $D\xi = 5$; при другом методе измерений ошибка есть сумма $\eta + \xi$ двух независимых случайных величин η и ξ , причем

$$M\eta = M\xi = 0, \quad D\eta = D\xi = 5.$$

Какой метод измерений предпочтительнее?

11.57. Докажите, что если величины ξ и η являются некоррелированными, то некоррелированными будут и величины

$$\xi' = \alpha\xi + \beta; \quad \eta' = \gamma\eta + \delta$$

для всяких действительных чисел α, β, γ и δ .

11.58. Докажите, что если

$$P(\xi > 0) = P(\eta > 0) = \frac{3}{4}, \quad P(\xi + \eta > 0) = \frac{1}{2},$$

то ξ и η — зависимые случайные величины.

11.59. Пусть A — случайное событие, а ξ — случайная величина, рассматриваемые над одним вероятностным пространством. Используя формулу полного математического ожидания, докажите, что

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|\xi = x) dF(x),$$

где $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ .

11.60. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, каждая из которых имеет равномерное распределение вероятностей на отрезке $[0, 1]$, а $f(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию $0 \leq f(x) \leq 1$ при $x \in [0, 1]$. Докажите, что

$$P(f(\xi) > \eta) = \int_0^1 f(x) dx.$$

11.61. Докажите, что если хотя бы одна из независимых случайных величин ξ и η имеет непрерывное (абсолютно непрерывное) распределение вероятностей, то и сумма $\xi + \eta$ имеет непрерывное (абсолютно непрерывное) распределение вероятностей.

11.62. Известно, что ξ и η — независимые случайные величины, причем по крайней мере одна из них имеет непрерывную

функцию распределения. Найдите вероятность $P(\xi = \eta)$. Изменится ли результат, если предположить, что каждая из величин ξ и η имеет дискретное распределение вероятностей?

11.63. Две точки независимо друг от друга наугад брошены в интервал $(0, 1)$. Вычислите математическое ожидание расстояния между ними.

11.64. Каждая из случайных величин ξ и η распределена равномерно в интервале $(0, 1)$. Докажите, что при любом характере зависимости между ними

$$M|\xi - \eta| \leq \frac{1}{2}.$$

11.65. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые одинаково распределенные по закону $R(0, 1)$ случайные величины и

$$\eta_1 = \min(\xi_1, \xi_2), \quad \eta_2 = \max(\xi_1, \xi_2).$$

1) Докажите, что

$$M \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{M\eta_1}{M\eta_2} = \frac{1}{2}.$$

2) Вычислите $\text{cov}(\eta_1, \eta_2)$.

3) Найдите наилучшую в среднем квадратическом оценку $\hat{\eta}_2$ величины η_2 по величине η_1 .

11.66. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые одинаково распределенные по закону $E(\lambda)$ случайные величины и

$$\eta_1 = \min(\xi_1, \xi_2), \quad \eta_2 = \max(\xi_1, \xi_2).$$

1) Вычислите $\text{cov}(\eta_1, \eta_2)$.

2) Найдите наилучшую в среднем квадратическом оценку $\hat{\eta}_2$ величины η_2 по величине η_1 .

11.67. Покажите, что функция

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x + y > 0, \\ 0, & \text{если } x + y \leq 0 \end{cases}$$

не является функцией распределения ни для какого случайного вектора.

11.68. Для всякой ли функции распределения $F(x, y)$ функция

$$F^*(x, y) = \begin{cases} F(x, y), & \text{если } x + y > 0, \\ 0, & \text{если } x + y \leq 0 \end{cases}$$

является функцией распределения?

11.69. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — одномерные функции распределения и

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) \left[1 + \alpha (1 - F_1(x))(1 - F_2(y)) \right],$$

где $|\alpha| \leq 1$. Докажите, что $F(x, y)$ — двумерная функция распределения с частными функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$.

11.70. 1) Верно ли, что если ξ и η — независимые случайные величины и $M|\eta| < \infty$, то

$$M(\eta|\xi) = M\eta?$$

2) Верно ли, что если $M(\eta|\xi) = M\eta$, то ξ и η — независимые случайные величины?

11.71. Докажите тождество

$$D\eta = M(D(\eta|\xi)) + D(M(\eta|\xi)).$$

П р и м е ч а н и е. Символом $D(\eta|\xi)$ обозначена случайная величина $Z(\xi)$, где $Z(x) = D(\eta|\xi = x)$.

11.72. Пусть $\eta = g(\xi)$, причем ξ и η — случайные величины с конечными дисперсиями. Докажите, что для возрастающей функции $g(x)$ выполняется неравенство $\text{cov}(\xi, \eta) \geq 0$, а для убывающей — неравенство $\text{cov}(\xi, \eta) \leq 0$.

11.73. Известно, что $P(\xi = x, \eta = y) = 0$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Можно ли на основании этого заключить, что совместная функция распределения $F(x, y)$ величин ξ и η непрерывна во всякой точке (x, y) ?

11.74. На плоскости для всякого борелевского множества B лебеговой меры нуль выполняется условие $P((\xi, \eta) \in B) = 0$. Можно ли на основании этого заключить, что совместное распределение величин ξ и η является абсолютно непрерывным? (См. также задачу 8.111.)

§ 12. Распределения вероятностей в $\mathbb{R}^n$

Общие понятия

Предположим, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ при $n \geq 2$ заданы случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, рассматриваемые совместно — как компоненты вектор-столбца

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T.$$

Функция распределения $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такого случайного вектора, или совместная функция распределения величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, определяется как

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n). \quad (12.1)$$

Естественно, что

$$0 \leq F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1.$$

В полной аналогии с двумерным случаем (см. с. 214)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(a_1 \leq \xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2, \dots, a_n \leq \xi_n < b_n) = \\ = \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} F(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (12.2)$$

Приводимые ниже три свойства служат характеристическими свойствами n -мерной функции распределения.

1. *Монотонное неубывание по совокупности переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$:* для всяких $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n$

$$\Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0.$$

2. *Непрерывность слева по каждой из переменных:* при $1 \leq r \leq n$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x_r \rightarrow a_r \\ x_r < a_r}} F(x_1, \dots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = \\ = F(x_1, \dots, x_{r-1}, a_r, x_{r+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

3. *Поведение на бесконечности:* при $1 \leq r \leq n$

$$\begin{aligned} \lim_{x_r \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = \\ = F(x_1, \dots, x_{r-1}, -\infty, x_{r+1}, \dots, x_n) = 0; \\ \lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty \\ x_2 \rightarrow +\infty \\ \dots \\ x_n \rightarrow +\infty}} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1. \end{aligned}$$

Частные функции распределения $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ соответственно связаны с совместной функцией распределения $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ соотношением

$$\begin{aligned} F_r(x_r) &= P(\xi_r < x_r) = \\ &= F(+\infty, \dots, +\infty, x_r, +\infty, \dots, +\infty) = \\ &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Bigg|_{\substack{x_k = +\infty \\ \text{при } k \neq r}} \quad (12.3) \end{aligned}$$

$r = 1, 2, \dots, n$; под знаком функции F значения всех аргументов, и с к л ю ч а я x_r , полагаются равными $+\infty$.

Аналогично, при $1 \leq r < s \leq n$, находится совместная функция распределения величин ξ_r и ξ_s :

$$\begin{aligned} F_{rs}(x_r, x_s) &= P(\xi_r < x_r, \xi_s < x_s) = \\ &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Bigg|_{\substack{x_k = +\infty \\ \text{при } k \neq r \text{ и } k \neq s}} \quad (12.4) \end{aligned}$$

под знаком функции F значения всех аргументов, и с к л ю ч а я x_r и x_s , полагаются равными $+\infty$.

Вообще, пусть

$$\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)^T$$

есть $(n + m)$ -мерный случайный вектор, допускающий разбиение на подвекторы

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \quad \text{и} \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)^T.$$

Предположим, далее, что

$$\begin{aligned} F_\xi(x) &= F_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n), & F_\eta(y) &= F_\eta(y_1, y_2, \dots, y_m), \\ F(x, y) &= F(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{aligned}$$

— функции распределения случайных векторов ξ , η и ζ соответственно. Тогда

$$\begin{cases} F_\xi(x) = F(x; +\infty) = F(x_1, x_2, \dots, x_n, +\infty, +\infty, \dots, +\infty), \\ F_\eta(y) = F(+\infty; y) = F(+\infty, +\infty, \dots, +\infty, y_1, y_2, \dots, y_m). \end{cases} \quad (12.5)$$

Случай, когда подвекторы ξ и η составлены из любых, не обязательно последовательных координат вектора ζ , легко сводится к описанному случаю.

Математическое ожидание случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ определяется как вектор, составленный из математических ожиданий входящих в него случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$:

$$M \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\xi_1 \\ M\xi_2 \\ \dots \\ M\xi_n \end{pmatrix}. \quad (12.6)$$

Математическое ожидание матрицы $X = \|\eta_{ij}\|$, со случайными элементами η_{ij} , — это матрица, составленная из математических ожиданий $M\eta_{ij}$ соответствующих элементов матрицы X :

$$MX = M\|\eta_{ij}\| = \|M\eta_{ij}\|. \quad (12.7)$$

Если A и B — неслучайные матрицы, X — случайная матрица, b — неслучайный вектор-столбец (соответствующих размеров), то

$$M(A\xi + b) = A \cdot M\xi + b, \quad (12.8)$$

$$M(AXB + b) = A \cdot MX \cdot B + b. \quad (12.9)$$

Ковариационная матрица K случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ — это матрица, составленная из попарных ковариаций случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$:

$$K = \|\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\|. \quad (12.10)$$

Формально эту матрицу можно определить и как математическое ожидание случайной матрицы $\overset{\circ}{\xi}\overset{\circ}{\xi}^T$:

$$K = M\left(\overset{\circ}{\xi}\overset{\circ}{\xi}^T\right) = M\left[(\xi - M\xi)(\xi - M\xi)^T\right]. \quad (12.11)$$

Ковариационная матрица K n -мерного случайного вектора ξ является квадратной, симметрической ($K = K^T$) и неотрицательно определенной матрицей n -го порядка. Последнее означает, что для всякого неслучайного n -мерного вектор-столбца $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$$\sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j \geq 0,$$

или, в матричной форме,

$$x^T K x \geq 0. \quad (12.12)$$

Если в этих неравенствах равенство достигается лишь на нулевом векторе x , то матрица K называется положительно определенной.

Вещественная симметрическая матрица $K = \|k_{ij}\|$ n -го порядка является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны:

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & k_{rr} \end{vmatrix} > 0 \quad (12.13)$$

при $1 \leq r \leq n$ (критерий Сильвестра).

Ковариационная матрица K , будучи неотрицательно определенной, не является положительно определенной в том и только в том случае, когда величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ связаны линейной зависимостью:

$$P(a_0 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n = 0) = 1$$

для некоторых $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Вещественная квадратная матрица K может рассматриваться как ковариационная матрица некоторого случайного вектора тогда и только тогда, когда она является симметрической и неотрицательно определенной.

Из (12.9)–(12.11) нетрудно вывести, что ковариационные матрицы K_ξ и K_η случайных векторов ξ и $\eta = A\xi + b$ связаны соотношением

$$K_\eta = AK_\xi A^T. \quad (12.14)$$

В частности, если

$$\eta = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n + b,$$

то в роли матрицы A выступает матрица

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

порядка $1 \times n$, и равенство (12.14) дает

$$D(a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n + b) = a^T K_\xi a = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) a_i a_j, \quad (12.15)$$

где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$. Формула (12.15) показывает, что дисперсия неоднородной линейной комбинации случайных величин равна значению квадратичной формы $x^T K x$ с матрицей K на векторе $x = a$, составленном из коэффициентов линейной комбинации при случайных слагаемых.

Из (12.15), в частности, получаем

$$D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i,j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i<j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j). \quad (12.16)$$

В случае *попарно некоррелированных* случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$D\left(\sum_i \xi_i\right) = \sum_i D\xi_i, \quad (12.17)$$

$$D\left(\sum_i a_i \xi_i\right) = \sum_i a_i^2 D\xi_i. \quad (12.18)$$

Нормированная корреляционная матрица $R = \|\rho_{ij}\|$ всякого случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ — это матрица, составленная из коэффициентов корреляции компонентов данного вектора:

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(\xi_i, \xi_j)}{\sqrt{D\xi_i D\xi_j}}$$

(разумеется, при условии, что $0 < D\xi_1 \cdot D\xi_2 \cdot \dots \cdot D\xi_n < \infty$).

Если компоненты вектора ξ попарно некоррелированы, то ковариационная матрица K этого вектора является диагональной матрицей, а нормированная корреляционная матрица R — единичной матрицей.

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называются *независимыми* (независимыми в совокупности), если

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2) \cdots P(\xi_n \in B_n) \quad (12.19)$$

для любых множеств $B_1, B_2, \dots, B_n$ на прямой, для которых определены все вероятности в правой части этой формулы.

В терминах совместной функции распределения $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ данных величин и их частных функций распределения $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$ *необходимое и достаточное условие независимости* записывается в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \cdots F_n(x_n). \quad (12.20)$$

Независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ с конечными дисперсиями являются попарно некоррелированными: $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$. Обратное неверно: из попарной некоррелированности величин нельзя, вообще говоря, заключить, что они независимы (даже попарно).

12.1. Заданы математическое ожидание μ и ковариационная матрица K случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 35 \end{pmatrix}.$$

Вычислите математическое ожидание и дисперсию величины:

1) $\eta = \xi_1 - \xi_3$;	4) $\eta = \xi_1 - 3\xi_2 + 2\xi_3$;
2) $\eta = \xi_2 - \xi_3$;	5) $\eta = -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3$;
3) $\eta = 2\xi_1 - \xi_2 + 3\xi_3$;	6) $\eta = -2\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3$.

12.2. Ковариационная матрица

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & \lambda \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$$

случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ содержит параметр λ . При каком значении этого параметра:

а) дисперсия случайной величины $\eta = 2\xi_1 - \xi_2 + 5\xi_3$ принимает наибольшее значение;

б) дисперсия случайной величины $\zeta = \lambda\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3$ принимает наименьшее значение?

12.3. Известно, что $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{100}$ — независимые одинаково распределенные по экспоненциальному закону с параметром λ случайные величины. Вычислите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$, если

$$1) \eta_1 = \sum_{k=1}^{100} \xi_k, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^{30} \xi_k; \quad 2) \eta_1 = \sum_{k=20}^{50} \xi_k, \quad \eta_2 = \sum_{k=10}^{100} \xi_k.$$

12.4. 1) Существуют ли коррелированные случайные величины ξ и η такие, что

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta?$$

2) Существуют ли попарно коррелированные случайные величины ξ, η и ζ такие, что

$$D(\xi + \eta + \zeta) = D\xi + D\eta + D\zeta?$$

12.5. Написано n писем и к ним подписано n конвертов. Затем письма наугад вложены в конверты и отосланы по почте. Найти $D\xi$, где ξ — количество писем, попавших по назначению.

Решение. Занумеруем все письма и введем в рассмотрение случайные величины $\xi_k, k = 1, 2, \dots, n$, считая, что $\xi_k = 1$, если k -е письмо попадет по назначению, и $\xi_k = 0$ в противном случае. Тогда

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \quad (*)$$

где, очевидно,

$$\xi_k \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $M\xi_k = \frac{1}{n}$, и из (*) получаем

$$M\xi = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Однако дисперсия суммы (*), возможно, не равна сумме дисперсий слагаемых, поскольку слагаемые эти зависимы: если, например, $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{n-1} = 1$, то для ξ_n остается лишь одно значение $\xi_n = 1$.

Придется обратиться к общей формуле:

$$D\xi = D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \sum_{k=1}^n D\xi_k + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

Имеем:

$$D\xi_k = \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = M\xi_i \xi_j - M\xi_i \cdot M\xi_j = M\xi_i \xi_j - \frac{1}{n^2}.$$

Для вычисления $M\xi_i \xi_j$ используем простейшую формулу полного математического ожидания (см. (10.27) на с. 217):

$$\begin{aligned} M\xi_i \xi_j &= M(\xi_i \xi_j | \xi_j = 0) \cdot P(\xi_j = 0) + \\ &\quad + M(\xi_i \xi_j | \xi_j = 1) \cdot P(\xi_j = 1) = \\ &= M(\xi_i | \xi_j = 1) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) &= \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}; \\ \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) &= \sum_{i < j} \frac{1}{n^2(n-1)} = C_n^2 \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{1}{2n}; \\ D\xi &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Независимость $D\xi$ от n можно отнести к столь же неожиданным результатам, что и полученное ранее соотношение $M\xi = 1$.

12.6. Вычислите дисперсию числа попарно различных цифр, выпадающих при бросании шести игральных костей.

12.7. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 7 человек. Пусть ξ — число остановок лифта, которые придется сделать для их обслуживания. Вычислите $D\xi$.

12.8. Из ста первых натуральных чисел наугад по схеме без возвращения выбирают 10 чисел. Вычислите математическое ожидание и дисперсию суммы S выбранных чисел.

12.9. В условиях задачи 10.11 докажите следующие утверждения.

- 1) Если $p = 1/2$, то $\zeta \sim Bi(n-1, 1/2)$.
- 2) Для всякого $p \in (0, 1)$

$$D\zeta = 2pq(1-2pq)(n-1) + 2p^2q^2(1-4pq)(n-2),$$

где $q = 1 - p$.

3) При $p \neq 1/2$ распределение вероятностей случайной величины ζ отлично от биномиального.

12.10. На отрезок $[0, n]$ наугад бросают 100 точек. Обозначим $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — количество точек, попадающих при этом на отрезки $[0, 1], [1, 2], [2, 3], \dots, [n-1, n]$ соответственно. Вычислите нормированную корреляционную матрицу R вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$.

12.11. Известно, что коэффициент корреляции любых двух величин из числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ равен ρ . Доказать, что

$$\rho \geq -\frac{1}{n-1}.$$

Решение. Нормированная корреляционная матрица

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \dots & \rho \\ & & & \dots & \\ \rho & \rho & \rho & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ является неотрицательно определенной. Поэтому для всякого вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$$x^T R x = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\rho \sum_{i < j} x_i x_j \geq 0.$$

При $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ это дает

$$n + n(n-1)\rho \geq 0, \quad \rho \geq -\frac{1}{n-1}.$$

Абсолютно непрерывное распределение вероятностей в $\mathbb{R}^n$

Так называется распределение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$, функция распределения $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ которого представима в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{u_n=-\infty}^{x_n} \dots \int_{u_2=-\infty}^{x_2} \int_{u_1=-\infty}^{x_1} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n, \quad (12.21)$$

где $f(u_1, u_2, \dots, u_n) \geq 0$. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при этом называется *плотностью вероятности* случайного вектора ξ , или *совместной плотностью вероятности* случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может выступать в роли плотности вероятности тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0; \quad \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 1 \quad (12.22)$$

(неотрицательность и нормированность).

В точках непрерывности плотности вероятности

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Формула

$$P((\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in B) = \int \cdots \int_B f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (12.23)$$

дает возможность вычислить приведенную вероятность для всякого множества $B \subset \mathbb{R}^n$, для которого эта вероятность определена. В этом смысле плотность вероятности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ служит исчерпывающей характеристикой распределения вероятностей случайного вектора ξ .

Плотности вероятности $f_\xi(x) = f_\xi(x_1, \dots, x_n)$ и $f_\eta(y) = f_\eta(y_1, \dots, y_m)$ подвекторов $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$ вектора $\zeta = (\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m)^T$ выражаются через их совместную плотность вероятности

$$f(x, y) = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

по формулам

$$f_\xi(x) = f_\xi(x_1, \dots, x_n) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) dy_1 dy_2 \cdots dy_m, \quad (12.24)$$

$$f_\eta(y) = f_\eta(y_1, \dots, y_m) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

В частности, для всякого r , $1 \leq r \leq n$, плотность вероятности $f_r(x_r)$ случайной величины ξ_r может быть найдена как

$$f_r(x_r) = \int \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_{r-1} dx_{r+1} \cdots dx_n \quad (12.25)$$

(интегрирование в $(n-1)$ -мерном интеграле ведется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ по всем переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, и с к л ю ч а я x_r).

Аналогично, при $1 \leq r < s \leq n$, совместная плотность вероятности $f_{rs}(x_r, x_s)$ случайных величин ξ_r и ξ_s получается как

$$f_{rs}(x_r, x_s) = \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{r-1} dx_{r+1} \cdots dx_{s-1} dx_{s+1} \cdots dx_n \quad (12.26)$$

(интегрирование в $(n-2)$ -мерном интеграле ведется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ по всем переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, и с к л ю ч а я x_r и x_s).

При вычислении различных математических ожиданий, связанных со случайным вектором ξ , часто используется следующая общая формула:

$$Mg(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \quad (12.27)$$

В частности, для всякого $r, 1 \leq r \leq n$,

$$M\xi_r = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} x_r f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Это, естественно, дает тот же результат, что и формула

$$M\xi_r = \int_{-\infty}^{\infty} x f_r(x) dx,$$

где $f_r(x)$ находится согласно формуле (12.25). Далее,

$$\text{cov}(\xi_r, \xi_s) = M\xi_r \xi_s - M\xi_r M\xi_s = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{rs}(x, y) dxdy - M\xi_r M\xi_s, \quad (12.28)$$

где $f_{rs}(x, y)$ находится в соответствии с (12.26).

Все приведенные выше интегралы считаются абсолютно сходящимися.

Если ξ есть n -мерный случайный вектор с плотностью вероятности

$$f_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi}(x),$$

A — невырожденная матрица n -го порядка и b — произвольный n -мерный вектор-столбец, то случайный вектор $\eta = A\xi + b$ имеет плотность вероятности

$$f_{\eta}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\eta}(x) = \frac{1}{|\det A|} f_{\xi}(A^{-1}(x - b)). \quad (12.29)$$

В терминах плотностей вероятности *необходимое и достаточное условие независимости* случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ записывается как

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \cdots f_n(x_n); \quad (12.30)$$

левая часть этого равенства представляет собой совместную плотность вероятности рассматриваемых величин, а правая часть — произведение их частных плотностей вероятности, найденных по формуле (12.25).

Важной составляющей теории многомерных распределений служат условные распределения вероятностей одних случайных величин относительно других случайных величин. Рассмотрение этого вопроса мы отложим до § 14, где условные распределения будут использоваться особенно эффективно.

12.12. Доказать, что если совместная плотность вероятности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ представима в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1(x_1)g_2(x_2) \cdots g_n(x_n),$$

где $g_i(x_i) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то функции $g_1(x_1)$, $g_2(x_2)$, $\dots$, $g_n(x_n)$ с точностью до нормирующих множителей служат частными плотностями вероятности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ соответственно, причем величины эти являются независимыми.

Решение. Из условия задачи вытекает, что

$$\begin{aligned} 1 &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} g_k(x_k) dx_k = \prod_{k=1}^n J_k. \end{aligned}$$

Но в таком случае

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \left(\frac{1}{J_1} g_1(x_1) \right) \left(\frac{1}{J_2} g_2(x_2) \right) \cdots \left(\frac{1}{J_n} g_n(x_n) \right) = \\ &= h_1(x_1) h_2(x_2) \cdots h_n(x_n). \end{aligned}$$

Для всякого r , $1 \leq r \leq n$, функция

$$h_r(x_r) = \frac{1}{J_r} g_r(x_r)$$

является неотрицательной и нормированной, т. е. — плотностью вероятности некоторой случайной величины. Остается заметить, что в качестве таковой может выступать величина ξ_r . В самом деле, ее плотность вероятности

$$\begin{aligned} f_r(x_r) &= \int \cdots \int_{-\infty < x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n < \infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \\ &= h_r(x_r) \prod_{k \neq r} \int_{-\infty}^{\infty} h_k(x_k) dx_k = h_r(x_r). \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n) = \\ &= \left(\frac{g_1(x_1)}{\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1) dx_1} \right) \left(\frac{g_2(x_2)}{\int_{-\infty}^{\infty} g_2(x_2) dx_2} \right) \times \dots \\ &\quad \dots \times \left(\frac{g_n(x_n)}{\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x_n) dx_n} \right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

12.13. Случайный вектор $(\xi, \eta, \zeta)^T$ распределен равномерно в кубе $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$. Как распределена каждая его координата? Зависимы ли величины ξ , η и ζ ?

12.14. Случайные величины ξ , η и ζ имеют следующую совместную плотность вероятности:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} A(1 - xyz), & \text{если } |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите коэффициент A . Покажите, что случайные величины ξ , η и ζ независимы попарно, но зависимы в совокупности.

12.15. Случайные величины ξ , η и ζ имеют следующую совместную плотность вероятности:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1/8 - Axyz, & \text{если } |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите коэффициент A . Исследуйте случайные величины ξ , η и ζ на независимость.

12.16. Постройте пример $n \geq 3$ зависимых случайных величин таких, что всякие $n-1$ из них являются независимыми.

12.17. Для n -мерного случайного вектора ξ заданы распределения всех его $(n-1)$ -мерных подвекторов. Можно ли по этим данным однозначно восстановить распределение всего случайного вектора ξ ?

12.18. Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots$ — последовательные моменты времени поступления заявок на обслуживание. Докажите, что эти

моменты времени образуют пуассоновский поток с параметром λ (см. § 7) в том и только в том случае, если случайные величины

$$\tau_1, \quad \tau_2 - \tau_1, \quad \tau_3 - \tau_2, \quad \dots, \quad \tau_{n+1} - \tau_n, \quad \dots$$

независимы и одинаково распределены по экспоненциальному закону с параметром λ .

З а м е ч а н и е. Отмеченный факт можно использовать при моделировании пуассоновских потоков.

12.19. Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots$ — пуассоновский поток событий с параметром λ . Как распределена случайная величина τ_k ?

12.20. Я прихожу на автобусную остановку ровно в 12 ч дня. Считая, что моменты прибытия автобусов на эту остановку образуют пуассоновский поток с параметром λ , вычислите среднее время ожидания мною автобуса.

Мультипликативное свойство математического ожидания

Мультипликативное свойство математического ожидания состоит в том, что если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, и каждое из математических ожиданий $M\xi_1, M\xi_2, \dots, M\xi_n$ существует, то

$$M(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n) = M\xi_1 M\xi_2 \cdots M\xi_n. \quad (12.31)$$

12.21. Известно, что $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем

$$P(\xi_k = -1) = p, \quad P(\xi_k = 1) = 1 - p.$$

Как распределено произведение

$$\eta = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n?$$

Р е ш е н и е. Случайная величина η принимает лишь два значения: -1 и 1 . Задача заключается в том, чтобы найти соответствующие им вероятности x и $1 - x$:

$$\eta \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ x & 1 - x \end{pmatrix}.$$

С одной стороны,

$$M\eta = (-1) \cdot x + 1 \cdot (1 - x) = 1 - 2x.$$

С другой стороны (по мультипликативному свойству математического ожидания),

$$M\eta = M(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n) = \prod_{k=1}^n M\xi_k = \prod_{k=1}^n (1 - 2p) = (1 - 2p)^n.$$

Следовательно,

$$(1 - 2p)^n = 1 - 2x, \quad x = \frac{1}{2} \left(1 - (1 - 2p)^n \right).$$

Таким образом,

$$\eta \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2} & \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

12.22. Найдите математическое ожидание и дисперсию произведения цифр, выпадающих при подбрасывании трех игральных костей.

12.23. Известно, что $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины и $M\xi_1 = M\xi_2 = \dots = M\xi_n = 0$. Докажите, что если $M|\xi_k|^3 < \infty$ при $k = 1, 2, \dots, n$, то

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)^3 = M\xi_1^3 + M\xi_2^3 + \dots + M\xi_n^3.$$

12.24. Докажите, что если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины с конечными дисперсиями, то

$$D(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n) \geq D\xi_1 D\xi_2 \cdots D\xi_n.$$

Если к тому же $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — центрированные случайные величины, то

$$D(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n) = D\xi_1 D\xi_2 \cdots D\xi_n$$

(мультипликативное свойство дисперсии).

12.25. Вычислите математическое ожидание и дисперсию объема V параллелепипеда, построенного на векторах $\{\xi, 1, \eta\}$, $\{0, \eta, 0\}$ и $\{0, 1, \zeta\}$, если известно, что ξ, η и ζ — независимые стандартные нормальные величины.

Вариационный ряд

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — произвольные случайные величины. Каждая из них служит некоторой функцией, заданной на множестве Ω элементарных исходов:

$$\xi_k = \xi_k(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Определим случайные величины $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(n)}$, положив

$$\xi_{(k)} = \xi_{(k)}(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $\xi_{(k)}(\omega)$ при каждом $\omega \in \Omega$ есть k -е по величине значение из n значений: $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$. В частности,

$$\xi_{(1)} = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad \xi_{(n)} = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Очевидно, что (с вероятностью 1)

$$\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}. \quad (12.32)$$

Конечная последовательность $\{\xi_{(k)}\}$ называется *вариационным рядом* конечной последовательности $\{\xi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Особый интерес для нас будет представлять вариационный ряд последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Если $f(x)$ — плотность вероятности каждой из таких случайных величин, то совместная плотность вероятности $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ случайных величин $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(n)}$ может быть записана в виде

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} n! f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n), & \text{если } x_1 < x_2 < \dots < x_n, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (12.33)$$

12.26. 1) Найдите $f^{**}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — плотность вероятности случайного вектора $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$, где

$$\eta_1 = \xi_{(1)}, \quad \eta_2 = \xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \quad \eta_3 = \xi_{(3)} - \xi_{(2)}, \quad \dots, \quad \eta_n = \xi_{(n)} - \xi_{(n-1)},$$

для случая, когда случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены по закону $R(0, 1)$.

2) Вычислите объем n -мерной области, определяемой системой неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1. \end{cases}$$

12.27. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и одинаково распределены по закону $R(0, 1)$. Вычислите вероятность

$$P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n < 1).$$

12.28. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и одинаково распределены по закону $R(0, 1)$. Пусть ν — наименьшее из значений n , для которых $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \geq 1$. Вычислите $M\nu$.

12.29. Пусть $f(x)$ и $F(x)$ — плотность вероятности и функция распределения каждой из независимых величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, ξ_n и

$$\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$$

— соответствующий вариационный ряд. Через $f_k(x)$ обозначим плотность вероятности случайной величины $\xi_{(k)}$, а через $f_{rs}(x, y)$ — совместную плотность вероятности случайных величин $\xi_{(r)}$ и $\xi_{(s)}$ при $1 \leq k \leq n$, $1 \leq r < s \leq n$. Покажите, что:

$$1) f_1(x) = n(1 - F(x))^{n-1}f(x);$$

$$2) f_n(x) = nF^{n-1}(x)f(x);$$

$$3) f_k(x) = nC_{n-1}^{k-1}F^{k-1}(x)(1 - F(x))^{n-k}f(x);$$

$$4) f_{rs}(x, y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} F^{r-1}(x) \times$$

$$\times [F(y) - F(x)]^{s-r-1} [1 - F(y)]^{n-s} f(x)f(y), \quad x \leq y.$$

12.30. Докажите, что если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные по закону $R(0, 1)$ случайные величины и $1 \leq r \leq s \leq n$, то

$$1) M\xi_{(r)} = \frac{r}{n+1};$$

$$2) M \frac{\xi_{(r)}}{\xi_{(s)}} = \frac{M\xi_{(r)}}{M\xi_{(s)}} = \frac{r}{s}.$$

12.31. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные по закону $E(\lambda)$ случайные величины,

$$\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$$

— соответствующий вариационный ряд,

$$\eta_1 = \xi_{(1)}, \quad \eta_2 = \xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \quad \dots, \quad \eta_n = \xi_{(n)} - \xi_{(n-1)}.$$

Доказать, что величины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ независимы, причем

$$\eta_k \sim E((n - k + 1)\lambda); \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Обозначим через $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $f^{**}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — плотности вероятности случайных векторов $(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(n)})^T$ и $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$ соответственно. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} f^{**}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= f^*(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n). \end{aligned}$$

С учетом формулы (12.33) получаем:

$$\begin{aligned} f^{**}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= n! \lambda^n e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda(x_1 + x_2)} \dots e^{-\lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} = \\ &= \prod_{k=1}^n [(n - k + 1)\lambda e^{-\lambda(n - k + 1)x_k}], \end{aligned}$$

а это и решает поставленную задачу.

З а м е ч а н и е. Приведенные рассуждения формально обосновывают те элементарные догадки, которые были приведены в замечании к решению задачи 9.31 (см. с. 199, 200).

Линейное преобразование случайного вектора к вектору с попарно некоррелированными составляющими

Если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ — случайный вектор с ковариационной матрицей K и A — произвольная квадратная матрица n -го порядка, то ковариационной матрицей случайного вектора

$$\eta = A\xi$$

служит матрица

$$K_{\eta} = AKA^T.$$

При этом в качестве A можно выбрать невырожденную матрицу, такую, что K_{η} будет диагональной матрицей, т. е. составляющие $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ случайного вектора η окажутся попарно некоррелированными.

Выбор указанной матрицы A осуществляется неоднозначно. В качестве нее могут быть предложены треугольная и ортогональная матрицы. Еще на одной возможности мы остановимся подробнее; в основе ее лежит следующая *спектральная теорема* (теорема о спектральном представлении вещественной симметрической матрицы).

Если K — вещественная симметрическая матрица, то все ее собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ вещественны, а соответствующие им собственные векторы $h_1, h_2, \dots, h_n$ могут быть выбраны так, что будут образовывать ортогональную нормированную систему векторов; при этом будет выполняться соотношение

$$K = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i h_i^T. \quad (12.34)$$

Верно и обратное утверждение: для всякой ортонормированной системы n -компонентных вещественных вектор-столбцов $h_1, h_2, \dots, h_n$ и любых вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ формула (12.34) определяет вещественную симметрическую матрицу K , для которой $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ служат собственными значениями, а $h_1, h_2, \dots, h_n$ — соответствующими собственными векторами.

Если K — неотрицательно определенная матрица, то ее собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ неотрицательны. В этом случае можно говорить о матрице

$$K^{1/2} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{1/2} h_i h_i^T. \quad (12.35)$$

Эта вещественная симметрическая неотрицательно определенная матрица удовлетворяет условию

$$(K^{1/2})^2 = K, \quad (12.36)$$

и, таким образом, представляет собой *корень квадратный из матрицы* K .

Если ковариационная матрица K является положительно определенной, то $\det K > 0$ и, стало быть, $\det K^{1/2} > 0$. В этом случае $K^{1/2}$ — обратимая матрица; для нее существует обратная матрица, обозначаемая $K^{-1/2}$:

$$K^{-1/2} = (K^{1/2})^{-1}.$$

Если случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ имеет математическое ожидание $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$ и положительно определенную ковариационную матрицу K , то случайный вектор

$$\tilde{\xi} = K^{-1/2}(\xi - \mu) \quad (12.37)$$

имеет в качестве математического ожидания нулевой вектор, а в качестве ковариационной матрицы — единичную матрицу I .

Преобразование (12.37) естественно рассматривать как векторный аналог соотношения

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - \mu}{\sigma},$$

определяющего нормированную случайную величину $\tilde{\xi}$ для величины ξ с $M\xi = \mu$, $D\xi = \sigma^2 > 0$. В соответствии с этим случайный вектор $\tilde{\xi}$ в (12.37) мы условимся рассматривать как *нормированный вектор* ξ .

12.32. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

перевести в вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$ с некоррелированными составляющими η_1 и η_2 линейным преобразованием:

- 1) с треугольной матрицей A : $\eta = A\xi$;
- 2) с ортогональной матрицей H : $\eta = H\xi$;
- 3) с матрицей $K^{-1/2}$: $\eta = K^{-1/2}\xi$.

Решение. 1) Квадратичную форму $x^T K x$ приведем к каноническому виду с помощью треугольного преобразования (путем выделения полных квадратов):

$$\begin{aligned} x^T K x &= 2x_1^2 + 4x_1 x_2 + 5x_2^2 = \\ &= 2(x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2 = \\ &= 2y_1^2 + 3y_2^2 = y^T B y, \end{aligned}$$

где $y = Cx$ и

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из соотношений $x^T K x = y^T B y$ и $y = Cx$ следует, что

$$x^T K x = x^T C^T B C x,$$

$$K = C^T B C,$$

$$(C^T)^{-1} K C^{-1} = B.$$

Поэтому в качестве искомой матрицы A можно выбрать

$$A = (C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, искомым преобразованием служит преобразование

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

При этом ковариационной матрицей K_η случайного вектора η служит матрица B .

Совсем простая проверка полученного решения сводится к проверке равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Находим собственные значения матрицы K :

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6.$$

Соответствующие собственные векторы записываются в виде (проверьте):

$$a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (ab \neq 0).$$

В качестве ортонормированной системы собственных векторов может быть указана система

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

а в качестве искомой ортогональной матрицы — матрица

$$H = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

строки которой представляют собой транспонированные вектор-столбцы приведенной ортонормированной системы собственных векторов матрицы K .

Итак, искомое ортогональное преобразование записывается как

$$\eta = H\xi;$$

ковариационная матрица вектора η представляет собой диагональную матрицу, образующие которой совпадают с соответствующими собственными значениями матрицы K :

$$K_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Проверка полученного результата сводится к установлению того, что H — ортогональная матрица и

$$HK_\xi H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

или

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3) Для вычисления $K^{-1/2}$ все подготовлено:

$$\begin{aligned} K^{-1/2} &= 1 \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ & \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+4\sqrt{6} & 2-2\sqrt{6} \\ 2-2\sqrt{6} & 4+\sqrt{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проверка полученного результата

$$\eta = K^{-1/2} \xi$$

сводится к установлению того, что $K^{-1/2}$ — положительно определенная матрица и

$$[(K^{-1/2})^{-1}]^2 = K,$$

что мы предлагаем читателям сделать самостоятельно.

12.33. Задачу, аналогичную задаче 12.32, решите для случая, когда

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & -4 \\ -2 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

12.34. Приведите доказательство следующих свойств ковариационной матрицы.

1) Ковариационная матрица всякого случайного вектора является симметрической неотрицательно определенной матрицей.

2) Для всякой вещественной симметрической неотрицательно определенной матрицы существует случайный вектор, для которого эта матрица служит ковариационной матрицей.

3) Ковариационная матрица K случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ является вырожденной (т. е., будучи неотрицательно определенной, не относится к положительно определенным матрицам) тогда и только тогда, когда величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ связаны линейной зависимостью:

$$P(a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n = 0) = 1$$

для некоторых $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. При этом коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ могут быть выбраны как произвольное ненулевое решение системы уравнений

$$Ka = 0,$$

где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$.

12.35. Укажите в явном виде линейную зависимость между составляющими случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ по заданным математическому ожиданию μ и вырожденной ковариационной матрице K этого вектора:

$$1) \mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2) \mu = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

12.36. Пусть ковариационной матрицей случайного вектора ξ служит матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Подберите хотя бы одну матрицу A так, чтобы ковариационной матрицей вектора $\eta = A\xi$ была матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Разные задачи

12.37. Случайные величины ξ, η, ζ независимы и имеют одно и то же абсолютно непрерывное распределение вероятностей. Вычислите вероятность того, что

$$\min(\xi, \eta) > \max(\eta, \zeta).$$

12.38. Каждая из независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеет геометрическое распределение вероятностей с параметром p . Найдите распределение случайной величины

$$\eta = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

12.39. В n телефонах-автоматах ведутся разговоры. Длительность разговора, измеряемая в секундах, имеет геометрическое распределение вероятностей с математическим ожиданием

μ . Найдите среднее время ожидания до первого освобождения телефона-автомата.

12.40. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые и одинаково распределенные по закону $R(0, 1)$ случайные величины, $n \geq 2$ и

$$\eta' = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad \eta'' = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Вычислите $M(\eta'' - \eta')$ — среднее значение «размаха» конечной последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

12.41. Из всех трехзначных чисел наугад выбирается одно число; пусть это будет число

$$\overline{\xi_1 \xi_2 \xi_3} = 100\xi_1 + 10\xi_2 + \xi_3.$$

Зависимы ли случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 ?

12.42. Пусть $\xi \sim R(0, 1)$. Рассмотрим двоичное представление случайной величины ξ : с вероятностью 1

$$\xi = \frac{\xi_1}{2} + \frac{\xi_2}{2^2} + \frac{\xi_3}{2^3} + \dots + \frac{\xi_n}{2^n} + \dots,$$

где каждая из величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ принимает лишь два значения 0 и 1. Докажите, что эти величины независимы и

$$P(\xi_k = 0) = P(\xi_k = 1) = \frac{1}{2}$$

для всякого $k = 1, 2, \dots$.

12.43. Из n чисел $1, 2, \dots, n$ наугад выбирают одновременно m чисел ($m \leq n$). Найдите MS и DS , где S — сумма выбранных чисел.

12.44. Для всяких случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ с конечными дисперсиями

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \leq \left(\sqrt{D\xi_1} + \sqrt{D\xi_2} + \dots + \sqrt{D\xi_n} \right)^2.$$

Докажите это. Когда в этом неравенстве достигается равенство?

12.45. Докажите, что для всяких случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ с невырожденной ковариационной матрицей существует случайная величина ξ_{n+1} , такая, что $D\xi_{n+1} < \infty$ и

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n + \xi_{n+1}) = D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n + D\xi_{n+1}.$$

12.46. Смешанным моментом k -го порядка случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ называется математическое ожидание

$$M\left(\xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n}\right),$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$, причем $k_1, k_2, \dots, k_n$ — неотрицательные целые числа. Сколько моментов k -го порядка имеет n -мерный случайный вектор?

12.47. Известно, что A и B — ковариационные матрицы одного порядка. Будет ли ковариационной матрицей:

- а) их сумма $A + B$;
- б) их произведение AB ?

12.48. Докажите, что если $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ — симметрические неотрицательно определенные (т. е. ковариационные) матрицы порядка n , то и $C = \|c_{ij}\|$, где $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$, — симметрическая неотрицательно определенная (т. е. ковариационная) матрица.

12.49. Будет ли ковариационной матрица

$$A^{(m)} = \|a_{ij}^m\|$$

(m — натуральное число), если $A = \|a_{ij}\|$ — ковариационная матрица?

12.50. Известно, что для вещественной симметрической матрицы $A = \|a_{ij}\|$ n -го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ & & \dots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \geq 0; \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Можно ли отсюда заключить, что A — ковариационная матрица некоторого случайного вектора?

§ 13. Характеристические функции

Определение и простейшие свойства

Дальнейшее изучение случайных величин ставит нас перед необходимостью ввести в рассмотрение комплексные случайные величины, т. е. величины вида $\xi + i\eta$, где ξ и η — вещественные случайные величины, а i — мнимая единица, $i^2 = -1$. Естественно считать, что если математические ожидания величин ξ и η существуют, то существует и математическое ожидание величины $\xi + i\eta$, причем

$$M(\xi + i\eta) = M\xi + iM\eta.$$

Всякая вещественная случайная величина ξ имеет *характеристическую функцию* $\varphi(t)$, определяемую при $t \in \mathbb{R}$ как

$$\varphi(t) = M(e^{it\xi}). \quad (13.1)$$

Поскольку

$$e^{it\xi} = \cos t\xi + i \sin t\xi,$$

характеристическая функция является комплекснозначной функцией вещественной переменной t :

$$\varphi(t) = M(\cos t\xi) + i M(\sin t\xi). \quad (13.2)$$

Таблица характеристических функций типичных дискретных и абсолютно непрерывных распределений приведена на с. 290, 291.

В случае, когда ξ имеет дискретное распределение вероятностей,

$$p_k = P(\xi = x_k), \quad \sum_k p_k = 1,$$

равенство (13.1) дает:

$$\varphi(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}. \quad (13.3)$$

В частности, для целочисленной случайной величины ξ , т. е. величины, принимающей значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{itk}. \quad (13.4)$$

При этом справедлива следующая формула обращения:

$$p_n = P(\xi = n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn} \varphi(t) dt. \quad (13.5)$$

В случае, когда ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности $f(x)$,

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx. \quad (13.6)$$

При условии, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty,$$

формула (13.6) допускает следующее обращение:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt. \quad (13.7)$$

В общем случае

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad (13.8)$$

где $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ . При этом для всяких точек непрерывности x' и x'' функции $F(x)$

$$F(x'') - F(x') = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx''} - e^{-itx'}}{-it} \varphi(t) dt, \quad (13.9)$$

так что характеристическая функция служит исчерпывающей характеристикой распределения вероятностей случайной величины.

В этом пункте будут использованы следующие свойства характеристической функции.

1. Характеристическая функция $\varphi(t)$ ограничена на всей числовой прямой:

$$|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1. \quad (13.10)$$

2. Характеристическая функция $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на всей числовой прямой.

3. Характеристическая функция $\varphi(t)$, принимающая лишь вещественные значения, четна. В общем же случае

$$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}. \quad (13.11)$$

4. Характеристические функции $\varphi_{\xi}(t)$ и $\varphi_{a\xi+b}(t)$ случайных величин ξ и $a\xi + b$ связаны соотношением

$$\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{ibt} \varphi_{\xi}(at). \quad (13.12)$$

Название	Распределение	Характеристическая функция
Вырожденное распределение	$P(\xi = C) = 1$	$\varphi(t) = e^{itC}$
	$P(\xi = 0) = 1$	$\varphi(t) \equiv 1$
Равномерное распределение на множестве $\{-1; 1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\varphi(t) = \cos t$
Биномиальное распределение	$P(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ ($n \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq n$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$)	$\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n$
Распределение Пуассона	$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ ($\lambda > 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$)	$\varphi(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}$
Геометрическое распределение	$P(\xi = m) = q^{m-1}p$ ($m \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$)	$\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

Название	Распределение	Характеристическая функция
Равномерное распределение на отрезке $[-a; a]$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{при } x \leq a, \\ 0 & \text{при } x > a \end{cases}$ $(a > 0)$	$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin at}{at} & \text{при } t \neq 0, \\ 1 & \text{при } t = 0 \end{cases}$
Экспоненциальное распределение	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ $(\lambda > 0)$	$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$
Нормальное распределение	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$	$\varphi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
Распределение Коши	$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$ $(\alpha > 0)$	$\varphi(t) = e^{-\alpha t }$
Распределение Лапласа	$f(x) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda x }$ $(\lambda > 0)$	$\varphi(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}$

13.1. Доказать, что характеристическая функция целочисленной случайной величины есть функция периодическая.

Доказательство. Если

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{itn} p_n,$$

то для всякого $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t).$$

З а м е ч а н и е. Несколько позже мы обратимся к рассмотрению утверждения, обратного доказанному утверждению.

13.2. Докажите, что характеристическая функция $\varphi(t)$ вещественна тогда и только тогда, когда она четна: $\varphi(-t) = \varphi(t)$.

13.3. Доказать, что характеристическая функция случайной величины ξ вещественна тогда и только тогда, когда распределение вероятностей величины ξ симметрично относительно нуля, т. е.

$$P(\xi > x) = P(\xi < -x) \quad (*)$$

для всякого $x > 0$.

Как это условие записывается в терминах функции распределения $F(x)$ величины ξ ?

Р е ш е н и е. Равенство $(*)$ равносильно равенству

$$P(\xi > x) = P(-\xi > x),$$

которое означает, что случайные величины ξ и $-\xi$ распределены одинаково. И то же самое выражает условие $\varphi(-t) = \varphi(t)$ вещественности функции $\varphi(t)$ (задача 13.2), поскольку $\varphi(t)$ и $\varphi(-t)$ — характеристические функции случайных величин ξ и $-\xi$ соответственно. Тем самым первая часть задачи решена.

Далее, из равенства $(*)$ следует, что

$$\begin{aligned} 1 - P(\xi \leq x) &= P(\xi < -x), \\ 1 - P(\xi < x) - P(\xi = x) &= P(\xi < -x), \\ 1 - F(x) - (F(x+0) - F(x)) &= F(-x), \end{aligned}$$

откуда окончательно получаем

$$F(x+0) + F(-x) = 1. \quad (**)$$

Это и есть условие вещественности характеристической функции в терминах соответствующей функции распределения.

В случае непрерывного распределения соотношение $(**)$ принимает вид

$$F(x) + F(-x) = 1.$$

13.4. Существует ли характеристическая функция $\varphi(t)$, такая, что при $t \neq 0$ все ее значения — мнимые?

13.5. Докажите, что если $\varphi(t)$ — характеристическая функция, то $\operatorname{Re} \varphi(t)$ — функция четная, а $\operatorname{Im} \varphi(t)$ — функция нечетная.

13.6. Покажите, что ни одна из данных функций не относится к характеристическим функциям:

а) $\varphi(t) = 1 - \sin t$;

б) $\varphi(t) = \cos t - \sin t$;

в) $\varphi(t) = e^{i|t|}$.

13.7. Докажите, что если хотя бы один из коэффициентов $b_1, b_2, \dots, b_n$ отличен от нуля, то функция

$$\sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

не относится к характеристическим функциям.

13.8. Доказать, что функция $\varphi(t) = \cos(t^2)$ не является характеристической функцией.

Доказательство. Достаточно заметить, что данная функция не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией.

13.9. Является ли функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{при } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |t| > 1 \end{cases}$$

характеристической функцией?

Решение. Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty.$$

Поэтому ответ к задаче определяется тем, является ли неотрицательной и нормированной функция

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-itx} (1 - |t|) dt = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ \frac{1}{2\pi}, & \text{если } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(интегрирование проведите самостоятельно).

Условие $f(x) \geq 0$, как мы видим, выполняется, а

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

вследствие того, что

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

и $\varphi(0) = 1$.

Итак, функция $\varphi(t)$ является характеристической функцией случайной величины с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ \frac{1}{2\pi}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

В дальнейшем мы приведем еще один способ решения этой задачи.

13.10. Известно, что $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Вычислить

$$M(\cos \xi).$$

Решение. Нетрудно видеть, что (в общем случае)

$$M(\cos \xi) = \operatorname{Re} \varphi(1),$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ . Для данной задачи $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. Следовательно,

$$M(\cos \xi) = e^{-t^2/2} \Big|_{t=1} = e^{-1/2} \approx 0,606.$$

13.11. Для $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ вычислите:

$$1) M(\sin^2 \xi); \quad 2) M(\cos^2 \xi); \quad 3) M(\sin^2 2\xi).$$

13.12. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ . Докажите, что существует случайная величина η , характеристическая функция которой равна $e^{-it} \varphi(t)$. Как связаны между собой математические ожидания и дисперсии величин ξ и η ?

Дифференцирование характеристических функций

Т е о р е м а 13.1. Если $M|\xi|^n < \infty$, то характеристическая функция $\varphi(t)$ случайной величины ξ дифференцируема в нуле n раз и

$$M\xi^n = \frac{1}{i^n} \varphi^{(n)}(0). \quad (13.13)$$

При четном n эта теорема допускает следующее обращение.

Т е о р е м а 13.2. Если характеристическая функция $\varphi(t)$ случайной величины ξ дифференцируема в нуле $2m$ раз, то

$$M\xi^{2m} < \infty.$$

В этом случае (по теореме 13.1)

$$M\xi^{2m} = (-1)^m \varphi^{(2m)}(0). \quad (13.14)$$

При нечетном n из существования $\varphi^{(n)}(0)$, вообще говоря, не следует существование $M\xi^n$.

Т е о р е м а 13.3. Пусть $M|\xi|^n < \infty$ для всякого $n \in \mathbb{N}$ и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (M|\xi|^n)^{1/n} = \frac{1}{R} < \infty. \quad (13.15)$$

Тогда при $|t| < R$

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} M\xi^n. \quad (13.16)$$

Попутно заметим, что (13.15) выражает достаточное условие единственности распределения, обладающего теми же моментами, что и величина ξ (так называемая *проблема моментов*; см. с. 178).

Наконец, приведем еще одну теорему, которая бывает полезна при решении задач типа «доказать, что функция $\varphi(t)$ не является характеристической функцией».

Т е о р е м а 13.4. Если характеристическая функция случайной величины дифференцируема в нуле, то она дифференцируема на всем множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел.

13.13. Доказать, что функция $\varphi(t) = |\cos t|$ не является характеристической функцией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Данная функция дифференцируема

в нуле, но не дифференцируема, например, в точке $t = \frac{\pi}{2}$.

Для характеристических функций такого быть не может (теорема 13.4).

13.14. Верно ли, что если $\varphi(t)$ — характеристическая функция, то функция $|\varphi(t)|$ не является характеристической функцией?

13.15. Является ли функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{при } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |t| > 1 \end{cases}$$

характеристической функцией?

13.16. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ с характеристической функцией

$$\varphi(t) = \frac{\cos t}{1 + t^2}.$$

Решение. Имеем (проверьте):

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -\frac{1}{(1+t^2)^2} ((1+t^2)^2 \sin t + 2t \cos t); \\ \varphi''(t) &= -\frac{4t}{(1+t^2)^3} [(1+t^2)^2 \sin t + 2t \cos t] - \\ &\quad - \frac{1}{(1+t^2)^2} [(1+t^2)^2 \cos t + 2 \cos t]. \end{aligned}$$

По теоремам 13.2 и 13.1

$$\begin{aligned} M\xi &= \frac{1}{i} \varphi'(0) = 0, \\ M\xi^2 &= \frac{1}{i^2} \varphi''(0) = 3, \\ D\xi &= M\xi^2 - (M\xi)^2 = 3. \end{aligned}$$

Приведенное решение иллюстрирует формулы (13.13) и (13.14). В дальнейшем мы вновь обратимся к рассмотренной задаче и приведем другое решение, более короткое и интересное.

13.17. Доказать, что функция $\varphi(t) = e^{-t^4}$ не является характеристической функцией.

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -4t^3 e^{-t^4}; \\ \varphi''(t) &= 16t^6 e^{-t^4} - 12t^2 e^{-t^4}; \\ \varphi''(0) &= 0.\end{aligned}$$

Допустив, что $\varphi(t) = e^{-t^4}$ — характеристическая функция некоторой случайной величины ξ , мы должны были бы признать, что $M\xi^2 = 0$. Но такое возможно лишь в случае, когда $P(\xi = 0) = 1$, и, стало быть, $\varphi(t) \equiv 1$. Полученное противоречие и решает задачу.

13.18. Методом, использованным при решении предыдущей задачи, докажите, что ни одна из функций

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t^4}, \quad \varphi(t) = \cos(t^2)$$

не является характеристической функцией.

Метод характеристических функций

Обычно так называют метод исследования сумм независимых случайных величин, в котором основную роль играет *мультипликативное свойство характеристических функций*.

Т е о р е м а 13.5. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ равна произведению их характеристических функций:

$$\varphi_{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) \cdots \varphi_{\xi_n}(t). \quad (13.17)$$

Напомним, что исследование неотрицательных целочисленных случайных величин удобно проводить в терминах производящих функций. Пусть

$$p_n = P(\xi = n), \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$$

Тогда функции

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{int}, \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad (13.18)$$

представляют собой соответственно характеристическую и производящую функции случайной величины ξ ; очевидно,

$$\varphi(t) = \psi(e^{it}). \quad (13.19)$$

Мультипликативное свойство характеристических функций в этом случае равносильно *мультипликативному свойству производящих функций*.

Т е о р е м а 13.6. Производящая функция суммы независимых неотрицательных целочисленных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ равна произведению их производящих функций:

$$\psi_{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}(z) = \psi_{\xi_1}(z) \psi_{\xi_2}(z) \cdots \psi_{\xi_n}(z). \quad (13.20)$$

13.19. Доказать, что при любом натуральном n функция

$$\varphi_n(t) = \cos^n t$$

является характеристической функцией. Для $n = 1, 2, 3$ построить график соответствующей функции распределения.

Р е ш е н и е для $n = 2$. Функция $\varphi_2(t) = \cos^2 t$ служит квадратом характеристической функции случайной величины

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Следовательно, ее можно рассматривать как характеристическую функцию суммы двух независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение (*). Нетрудно убедиться в том, что такая сумма распределена по закону

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}. \quad (**)$$

Другой способ:

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{e^{-it} + e^{it}}{2}; \\ \cos^2 t &= \frac{1}{4} e^{-2it} + \frac{1}{2} e^{0it} + \frac{1}{4} e^{2it}. \end{aligned}$$

А это и означает, что характеристическую функцию $\cos^2 t$ имеет дискретное распределение (**). График соответствующей функции распределения $F(x)$ представлен на рис. 13.1.

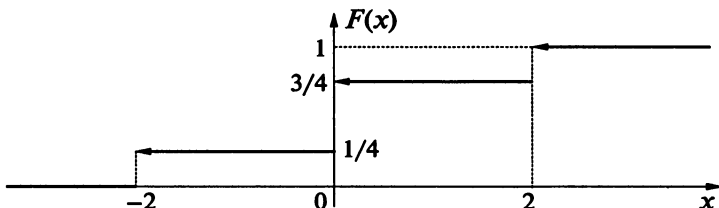


Рис. 13.1.

13.20. Доказать, что при любом натуральном n функция

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin^n t}{t^n}, & \text{если } t \neq 0, \\ 1, & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

является характеристической функцией некоторого абсолютно непрерывного распределения вероятностей; для $n = 1, 2, 3$ указать соответствующие плотности вероятности и построить их графики.

Решение. Для доказательства того, что $\varphi_n(t)$ — характеристическая функция, достаточно заметить, что эта функция представляет собой n -ю степень характеристической функции равномерного распределения на отрезке $[-1, 1]$.

Если $f_n(x)$ — плотность вероятности, соответствующая характеристической функции $\varphi_n(t)$, то

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_1(x-u) du = \\ &= \int_{\substack{-1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq x-u \leq 1}} \frac{1}{4} du = \begin{cases} 1/2 + 1/4 x, & \text{если } -2 \leq x \leq 0, \\ 1/2 - 1/4 x, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{если } |x| > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается (проверьте самостоятельно), что

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \\ &= \int_{-1 \leq x-u \leq 1} \frac{1}{2} f_2(u) du = \begin{cases} \frac{1}{16} (x+3)^2, & \text{если } -3 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{8} (3-x^2), & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{16} (3-x)^2, & \text{если } 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{если } |x| > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ представлены на рис. 13.2.

С ростом n получаются кривые, все более похожие на график нормальной плотности вероятности. В дальнейшем это наблюдение получит теоретическое подтверждение.

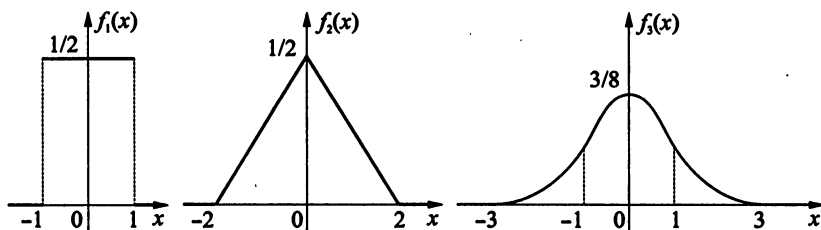


Рис. 13.2.

13.21. Докажите, что при натуральном n и $\lambda > 0$ функция

$$\varphi_n(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^n$$

является характеристической функцией некоторого абсолютно непрерывного распределения вероятностей, и укажите соответствующую плотность вероятности.

13.22. Методом характеристических функций найдите закон распределения вероятностей случайной величины $\zeta = \xi - \eta$, где ξ и η — независимые случайные величины, каждая из которых имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром λ .

13.23. Докажите, что если $\varphi(t)$ — характеристическая функция, то характеристической является и функция $|\varphi(t)|^2$.

13.24. Доказать, что сумма независимых нормально распределенных случайных величин имеет нормальное распределение вероятностей.

Доказательство. Если $\xi_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, 2, \dots, n$, то $\varphi_{\xi_k}(t) = \exp\left(i\mu_k t - \frac{1}{2}\sigma_k^2 t^2\right)$. Поэтому в случае, когда величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы,

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}(t) &= \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) \cdots \varphi_{\xi_n}(t) = \\ &= \exp\left\{i(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)t - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)t^2\right\}. \end{aligned}$$

А это означает, что

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2).$$

З а м е ч а н и е. Верно и обратное утверждение: если сумма независимых случайных величин имеет нормальное распределение вероятностей, то каждое слагаемое имеет характеристическую функцию вида $\exp \left\{ i \mu t - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right\}$ (случай $\sigma = 0$, естественно, не исключается).

13.25. Как распределена случайная величина

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n),$$

если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ случайные величины?

13.26. Как распределена случайная величина

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n),$$

если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \quad (\alpha > 0)$$

(закон Коши с параметром α)?

13.27. Могут ли характеристические функции $\varphi_\xi(t)$, $\varphi_\eta(t)$ и $\varphi_{\xi+\eta}(t)$ удовлетворять условию

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) \equiv \varphi_\xi(t) \varphi_\eta(t) \quad (*)$$

в случае, когда ξ и η — зависимые случайные величины?

Р е ш е н и е. Могут. Приведем пример: пусть η совпадает с ξ , причем ξ имеет распределение Коши с параметром $\alpha > 0$. Тогда

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) = e^{-\alpha|t|};$$

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{2\xi}(t) = \varphi_\xi(2t) = e^{-2\alpha|t|};$$

$$\varphi_\xi(t) \varphi_\eta(t) = e^{-2\alpha|t|} = \varphi_{\xi+\eta}(t).$$

Таким образом, условие независимости величин ξ и η является достаточным, но не необходимым для выполнения условия (*).

13.28. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины с характеристической функцией

$$\varphi(t) = \frac{\cos t}{1 + t^2}.$$

Решение. Эту задачу мы уже решали, используя производные функции $\varphi(t)$ в нуле. Здесь будет приведено еще одно решение. Если ξ — случайная величина с данной характеристической функцией, то

$$\xi \sim \xi_1 + (\xi_2 - \xi_3),$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины, причем

$$\xi_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

а ξ_2 и ξ_3 имеют экспоненциальное распределение с параметром 1 (задача 13.22). Отсюда

$$M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 - M\xi_3 = 0 + 1 - 1 = 0;$$

$$D\xi = D\xi_1 + D\xi_2 + D\xi_3 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

13.29. Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ с характеристической функцией:

$$а) \varphi(t) = e^{-t^2} \cos^{10} t; \quad б) \frac{4e^{it} \cos t}{4 + t^2}.$$

13.30. Какое распределение вероятностей имеет сумма $\xi + \eta$ независимых случайных величин ξ и η , если одна из них распределена равномерно на отрезке $[-1, 1]$, а другая — равномерно на двухэлементном множестве $\{-1, 1\}$?

13.31. Методом производящих функций доказать, что композиция пуассоновских распределений $\Pi(\lambda_1), \Pi(\lambda_2), \dots, \Pi(\lambda_n)$ есть пуассоновское распределение $\Pi(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$.

Примечание. Композицией нескольких распределений вероятностей называется распределение вероятностей суммы независимых случайных величин с данными распределениями вероятностей.

Доказательство. Для пуассоновского распределения с параметром λ

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = e^{-\lambda(1-z)}.$$

Следовательно, для независимых случайных величин

$$\xi_1 \sim \Pi(\lambda_1), \xi_2 \sim \Pi(\lambda_2), \dots, \xi_n \sim \Pi(\lambda_n)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}(z) &= \psi_{\xi_1}(z) \psi_{\xi_2}(z) \dots \psi_{\xi_n}(z) = \\ &= e^{-\lambda_1(1-z)} e^{-\lambda_2(1-z)} \dots e^{-\lambda_n(1-z)} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)(1-z)}. \end{aligned}$$

Полученная производящая функция соответствует распределению $\Pi(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$.

З а м е ч а н и е. Верно и утверждение, обратное доказанному: если сумма независимых случайных величин имеет пуассоновское распределение вероятностей, то пуассоновское распределение вероятностей имеет и каждое из слагаемых.

13.32. При каких условиях композиция биномиальных распределений $Bi(n_1, p_1)$ и $Bi(n_2, p_2)$ представляет собой биномиальное распределение $Bi(n, p)$?

13.33. Каждая из независимых случайных величин ξ и η принимает значения лишь из множества $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ и сумма $\xi + \eta$ имеет биномиальное распределение вероятностей. Как могут быть распределены слагаемые ξ и η ?

Конструирование характеристических функций

Вопрос о том, является ли данная функция характеристической функцией, намного сложнее аналогичных вопросов, касающихся функции распределения или плотности вероятности. Об этом свидетельствует и следующая общая теорема.

Т е о р е м а 13.7 (Теорема Бохнера–Хинчина). Функция $\varphi(t)$ ($t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \in \mathbb{C}$), непрерывная на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 1$, является характеристической функцией тогда и только тогда, когда она является неотрицательно определенной функцией. Последнее означает, что

$$\sum_{r,s=1}^n \varphi(t_r - t_s) z_r \bar{z}_s \geq 0 \quad (13.21)$$

для всяких $n \in \mathbb{N}$; $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$; $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Проверка выполнимости условия (13.21) в общем случае весьма не проста. Ниже приводятся несколько достаточных условий, позволяющих конструировать разнообразные характеристические функции из заданных характеристических функций.

Теорема 13.8. Произведение $\varphi_1(t)\varphi_2(t)\cdots\varphi_n(t)$ характеристических функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ служит характеристической функцией. В частности, если $\varphi(t)$ — характеристическая функция, то $\varphi^n(t)$ — также характеристическая функция при любом $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 13.9. Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ — характеристические функции, $a_1, a_2, \dots$ — числа, такие, что

$$a_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

Тогда функция

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t)$$

является характеристической функцией.

Иными словами, выпуклая линейная комбинация характеристических функций есть характеристическая функция.

Теорема 13.10 (Теорема Поля). Пусть вещественная функция $\varphi(t)$ непрерывна, четна, выпукла книзу при $t \geq 0$ и, кроме того, удовлетворяет условиям $\varphi(t) \geq 0$, $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда $\varphi(t)$ — характеристическая функция.

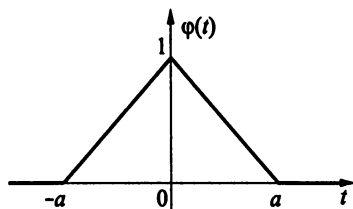


Рис. 13.3.

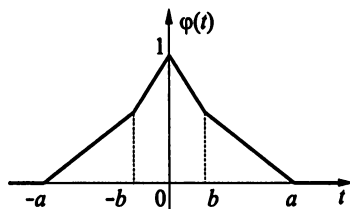


Рис. 13.4.

В частности, характеристической функцией является каждая из функций, графически изображенных на рис. 13.3 и рис. 13.4.

13.34. Покажите, что каждая из данных функций является характеристической функцией:

$$1) \varphi(t) = \frac{1}{4}(1 + 3 \cos t); \quad 2) \varphi(t) = \frac{12 + 2t^2}{12 + 3t^2}.$$

13.35. Пусть $0 \leq a \leq 1$. Постройте пример характеристической функции $\varphi(t)$, такой, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = a$.

13.36. Доказать, что функции

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t), \quad \varphi_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t},$$

где $a_n, \lambda_n, \omega_n, (n = 1, 2, \dots)$ — вещественные числа, причем $a_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, являются характеристическими функциями.

Доказательство. Функция $\cos(\omega_n t)$ является характеристической функцией распределения

$$\begin{pmatrix} -\omega_n & \omega_n \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

если $\omega_n \neq 0$, и вырожденного распределения $P(\xi = 0) = 1$ при $\omega_n = 0$.

Функция $e^{i\lambda_n t}$ есть характеристическая функция вырожденного распределения: $P(\xi = \lambda_n) = 1$. Таким образом, каждая из функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ служит выпуклой линейной комбинацией характеристических функций, а потому, по теореме 13.9, — характеристической функцией.

13.37. Пусть $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ — попарно различные неотрицательные числа и хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ отрицательно. Докажите, что функция

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(\omega_k t)$$

не может быть характеристической функцией.

13.38. Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ — попарно различными характеристические функции, $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ и хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ отрицательно. Может ли функция

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t)$$

при этом быть характеристической функцией?

13.39. Доказать, что если $\varphi(t)$ — характеристическая функция, то характеристической является и каждая из функций:

$$1) e^{\varphi(t)-1}; \quad 2) \frac{\varphi(t)}{2 - \varphi(t)}.$$

Доказательство (частично):

1) Очевидные преобразования

$$e^{\varphi(t)-1} = e^{-1} e^{\varphi(t)} = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n(t)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} e^{-1} \right) \varphi^n(t)$$

приводят данную функцию к выпуклой линейной комбинации характеристических функций.

13.40. Постройте пример двух характеристических функций, которые не являются тождественно равными, но совпадают при $|t| \leq a$, где a — заданное положительное число.

13.41. Существуют ли производящие функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, не являющиеся тождественно равными, но совпадающие при $|z| \leq a$, где a — заданное положительное число?

13.42. Пусть $\varphi(t) = 0$ при $|t| > a$ (a — заданное положительное число), $\varphi^*(t)$ — периодическая с периодом $2a$ функция, совпадающая с $\varphi(t)$ при $|t| \leq a$. Доказать, что если $\varphi(t)$ — характеристическая функция, то и $\varphi^*(t)$ — характеристическая функция.

В соответствии с этим характеристической функцией является каждая из функций, графически представленных на рис. 13.5 и 13.6 (сравните с рис. 13.3 и рис. 13.4).

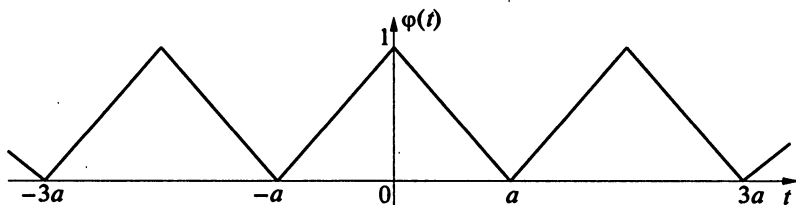


Рис. 13.5.

Доказательство приводится для вещественной функции $\varphi(t)$. Общий случай ($\varphi(t)$ — комплекснозначная функция) читателям предлагается рассмотреть самостоятельно.

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty,$$

$\varphi(t)$ — характеристическая функция некоторого абсолютно

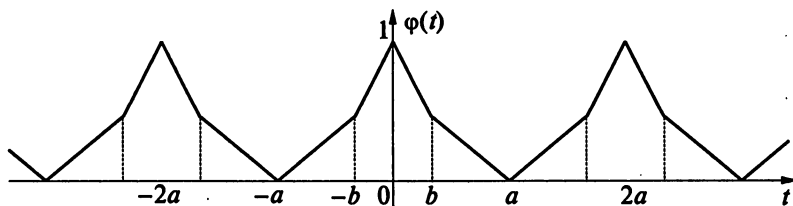


Рис. 13.6.

непрерывного распределения с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt.$$

Периодическая функция $\varphi^*(t)$, будучи четной, раскладывается в ряд Фурье по косинусам

$$\varphi^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{a} t, \quad (*)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \varphi^*(t) \cos \frac{n\pi}{a} t dt.$$

При этом

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \varphi^*(0) = \varphi(0) = 1.$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что $a_n \geq 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots$: ведь тогда в силу разложения (*) функция $\varphi^*(t)$ будет выпуклой линейной комбинацией характеристических функций вида $\cos \frac{n\pi}{a} t$. Имеем:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \varphi^*(t) \cos \frac{n\pi}{a} t dt = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \varphi(t) \cos \frac{n\pi}{a} t dt = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cos \frac{n\pi}{a} t dt = \frac{1}{2a} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{n\pi}{a} t} \varphi(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{2a} \operatorname{Re} \left(2\pi f \left(-\frac{n\pi}{a} \right) \right) = \frac{\pi}{a} f \left(-\frac{n\pi}{a} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Некоторые специальные свойства характеристических функций

13.43. Доказать, что если характеристическая функция $\varphi(t)$ случайной величины ξ удовлетворяет условию $|\varphi(T)| = 1$ для некоторого $T \neq 0$, то случайная величина ξ является *решетчатой* с шагом $h = \frac{2\pi}{T}$; это означает, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\xi = a + nh) = 1,$$

где a — некоторая константа.

Доказательство. Поскольку $|\varphi(T)| = 1$, найдется вещественное число a такое, что $\varphi(T) = e^{iT a}$, или

$$e^{iT a} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iT x} dF(x),$$

где $F(x) = P(\xi < x)$. Отсюда находим

$$\begin{aligned} 1 &= e^{-iT a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iT x} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iT(x-a)} dF(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos T(x-a) dF(x). \end{aligned}$$

Вместе с тем,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x).$$

Поэтому точки роста функции распределения $F(x)$ находятся среди тех точек, в которых $\cos T(x-a) = 1$, т. е. среди точек

$$x = a + \frac{2n\pi}{T} = a + nh, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\xi = a + nh) = 1,$$

что и требовалось доказать.

13.44. Докажите, что если характеристическая функция случайной величины ξ является периодической функцией, то ξ имеет решетчатое распределение вероятностей (сопоставьте с задачей 13.1).

13.45. Докажите, что характеристическая функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условию $\varphi(T) = 1$ при $T \neq 0$, является периодической с периодом T :

$$\varphi(t + T) = \varphi(t).$$

13.46. Доказать, что если характеристическая функция $\varphi(t)$ случайной величины ξ удовлетворяет условию $|\varphi(t)| \equiv 1$, то $\varphi(t) = e^{itC}$, т. е. ξ имеет вырожденное распределение вероятностей:

$$P(\xi = C) = 1$$

для некоторого C .

Доказательство. В соответствии с задачей 13.43

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left(\xi = a + n \frac{2\pi}{T}\right) = 1,$$

для всякого $T \neq 0$ и, стало быть,

$$\varphi(t) = \sum p_n e^{it(a + n \frac{2\pi}{T})},$$

откуда, в частности,

$$\varphi(T) = \sum p_n e^{iT a} = e^{iT a} \sum p_n = e^{iT a}.$$

Остается отметить, что полученное равенство $\varphi(T) = e^{iT a}$ верно и при $T = 0$:

$$\varphi(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n = 1 = e^{i \cdot 0 \cdot a}.$$

Итак, для всякого $t \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(t) = e^{it a}.$$

В роли константы C , указанной в условии задачи, выступает a .

13.47. Докажите, что характеристическая функция $\varphi(t)$ абсолютно непрерывного распределения вероятностей удовлетворяет условиям:

$$1) |\varphi(t)| < 1 \quad \text{при} \quad t \neq 0; \quad 2) \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0.$$

Характеристические функции случайных векторов

Для всякого вещественного случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ определена функция

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = M e^{i(t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + \dots + t_n \xi_n)}, \quad (13.22)$$

называемая его характеристической функцией.

При $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T$ и $\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ определение (13.22) допускает следующую «матричную» запись:

$$\varphi(t) = M e^{it^T \xi}. \quad (13.23)$$

Чтобы найти характеристическую функцию подвектора, в который не попадают лишь составляющие $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_r}$ исходного случайного вектора ξ , достаточно в характеристической функции $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ вектора ξ положить $t_{i_1} = t_{i_2} = \dots = t_{i_r} = 0$. Например, если $\varphi(t_1, t_2)$ — характеристическая функция случайного вектора $(\xi_1, \xi_2)^T$, а $\varphi_1(t_1)$ и $\varphi_2(t_2)$ — характеристические функции величин ξ_1 и ξ_2 соответственно, то

$$\varphi_1(t_1) = \varphi(t_1, 0), \quad \varphi_2(t_2) = \varphi(0, t_2). \quad (13.24)$$

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы (в совокупности) тогда и только тогда, когда их совместная характеристическая функция равна произведению их частных характеристических функций:

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) \dots \varphi_n(t_n), \quad (13.25)$$

или

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \varphi(t_1, 0, \dots, 0) \varphi(0, t_2, \dots, 0) \dots \varphi(0, 0, \dots, t_n). \quad (13.26)$$

Если $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$, то

$$M \left(\xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n} \right) = \frac{1}{i^k} \frac{\partial^k \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \dots \partial t_n^{k_n}} \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_n=0} \quad (13.27)$$

в предположении, что указанное математическое ожидание существует.

Если $\eta = A\xi + b$, где A — произвольная $m \times n$ -матрица, b — произвольный m -компонентный столбец $\varphi_\eta(\tau) = \varphi_\eta(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$ и $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)^T$, то

$$\varphi_\eta(\tau) = e^{i\tau^T b} \varphi_\xi(A^T \tau). \quad (13.28)$$

13.48. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины и $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_2 - \xi_3$, $\eta_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$. Найдите:

- 1) $\varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ — характеристическую функцию вектора $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$;
- 2) $\varphi_{13}(\tau_1, \tau_3)$ — характеристическую функцию вектора $(\eta_1, \eta_3)^T$;
- 3) $\varphi_1(\tau_1)$ — характеристическую функцию величины η_1 ;
- 4) $M(\eta_1^2 \eta_2 \eta_3)$.

Разные задачи

13.49. При каких вещественных a , b и ω функция

$$\varphi(t) = a \cos \omega t + i b \sin \omega t$$

является характеристической функцией?

13.50. Докажите, что если $g(x)$ — ограниченная кусочно-непрерывная функция, то для любой случайной величины ξ характеристическая функция величины $\eta = g(\xi)$ дифференцируема в нуле.

13.51. Пусть ξ — случайная величина с вещественной характеристической функцией $\varphi(t)$ и $D\xi = \sigma^2$. Докажите, что

$$\varphi(t) \geq 1 - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2.$$

13.52. Докажите, что если $\varphi(t)$ — характеристическая функция, то:

- 1) $\operatorname{Re} \varphi(t)$ — характеристическая функция;
- 2) функция $\operatorname{Im} \varphi(t)$ не относится к характеристическим функциям.

13.53. При заданном $a > 0$ постройте пример характеристической функции $\varphi(t)$, такой, что $\varphi(t) = 0$ при $|t| > a$ и $\varphi(t) \notin \mathbb{R}$ при $0 < |t| \leq a$.

13.54. Вычислите интеграл (при $a > 0$, $b > 0$)

$$I_{a,b}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + u^2} \frac{1}{b^2 + (x - u)^2} du.$$

13.55. Вычислите интегралы ($n, m \in \mathbb{N}$):

$$1) \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi} \cos^n \varphi d\varphi; \quad 2) \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi} \cos^m \varphi d\varphi.$$

13.56. Существуют ли зависимые случайные величины ξ и η , плотности вероятности которых $f_\xi(x)$ и $f_\eta(x)$ связаны с плотностью вероятности $f_{\xi+\eta}(x)$ суммы $\xi + \eta$ соотношением

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u) f_\eta(x-u) du,$$

как это имеет место для независимых ξ и η ?

13.57. Являются ли характеристическими функции:

$$1) \varphi(t) = \frac{1}{1 + \sin^2 t}; \quad 2) \varphi(t) = e^{-\sin^2 t}?$$

13.58. Докажите, что при $0 < \alpha \leq 1$ функция

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 + |t|^\alpha}$$

является характеристической функцией.

13.59. Докажите, что если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — произвольные функции распределения, а $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — соответствующие им характеристические функции, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(z) dF_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(z) dF_1(z).$$

13.60. Может ли характеристическая функция абсолютно непрерывного распределения вероятностей быть периодической?

13.61. Докажите, что если $\varphi(t)$ — характеристическая функция и $\varphi(t) = 1$ при $|t| < a$ для некоторого $a > 0$, то $\varphi(t) = 1$ при любом вещественном t .

13.62. Докажите, что если $\varphi(t)$ — характеристическая функция и $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$ при $|t| < a$ для некоторого $a > 0$, то $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$ при любом вещественном t .

13.63. Постройте пример характеристической функции, которая обращается в нуль лишь на непустом конечном множестве точек.

13.64. Докажите, что функция

$$\varphi(t) = e^{i \sin t}$$

не относится к характеристическим функциям.

13.65. Докажите, что ни одна из функций, представленных графически на рис. 13.7 и 13.8, не является характеристической функцией.

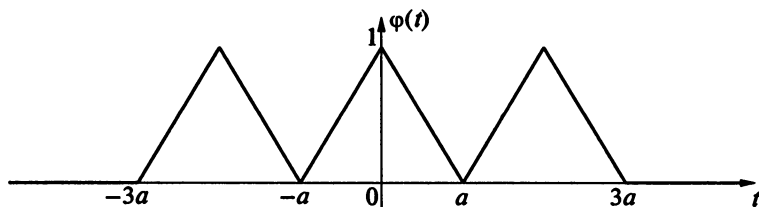


Рис. 13.7.

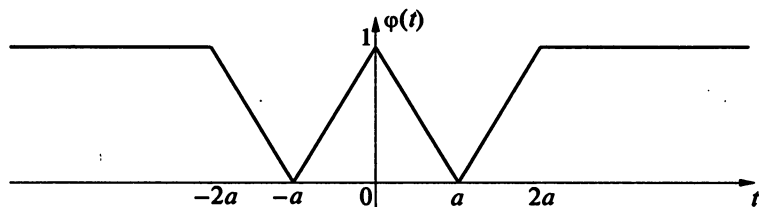


Рис. 13.8.

13.66. Докажите, что если характеристическая функция $\varphi(t)$ случайной величины ξ удовлетворяет условию $|\varphi(t_1)| = |\varphi(t_2)| = 1$ при иррациональном отношении $\frac{t_2}{t_1} = \alpha$, то существует константа C , такая, что $P(\xi = C) = 1$.

13.67. Докажите, что если $\varphi(t)$ — характеристическая функция, то характеристической служит и функция

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du & \text{при } t \neq 0, \\ 1 & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

13.68. 1) Известно, что ξ, η, ζ — независимые случайные величины, $\xi + \eta$ и $\xi + \zeta$ — одинаково распределенные величины.

Докажите, что если $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то величины η и ζ одинаково распределены.

2) Постройте пример независимых случайных величин ξ , η и ζ , таких, что суммы $\xi + \eta$ и $\xi + \zeta$ распределены одинаково, а величины η и ζ — не одинаково.

13.69. Докажите, что интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(x-u)^2 + 1} du = e^{-x^2/2}$$

относительно неизвестной функции $f(x)$ не имеет решений в классе неотрицательных функций.

13.70. Покажите, что характеристическая функция целочисленной случайной величины ξ с распределением

$$P(\xi = 2k) = P(\xi = -2k) = \frac{C}{k^2 \ln k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

(C — нормирующая константа) дифференцируема в нуле, но $M\xi$ не существует.

13.71. Докажите, что характеристическая функция

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} e^{it \cdot 5^k} \right)$$

(функция Вейерштрасса) ни в какой точке не дифференцируема.

§ 14. Многомерное нормальное распределение вероятностей

Определение и простейшие свойства нормального распределения вероятностей в $\mathbb{R}^n$

Случайный вектор $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n)^T$ условимся называть *стандартным нормальным вектором*, если его составляющие $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n$ являются независимыми стандартными нормальными величинами.

Плотность вероятности $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такого случайного вектора равна произведению плотностей

$$\tilde{f}_k(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

его компонент:

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n \tilde{f}_k(x_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \right),$$

или, в матричных обозначениях,

$$\tilde{f}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2}x^T x \right). \quad (14.1)$$

Аналогично, для характеристической функции $\tilde{\varphi}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ случайного вектора $\tilde{\xi}$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \prod_{k=1}^n \tilde{\varphi}_k(t_k) = \\ &= \prod_{k=1}^n \exp \left(-\frac{1}{2}t_k^2 \right) = \exp \left(-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2) \right), \end{aligned}$$

или, в матричных обозначениях,

$$\tilde{\varphi}(t) = \exp \left(-\frac{1}{2}t^T t \right). \quad (14.2)$$

Математическим ожиданием стандартного нормального случайного вектора $\tilde{\xi}$ служит нулевой вектор, а ковариационной матрицей — единичная матрица:

$$\mu_{\tilde{\xi}} = 0, \quad K_{\tilde{\xi}} = I.$$

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ с произвольным математическим ожиданием $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$ и положительно определенной ковариационной матрицей $K = \|k_{ij}\|$ называется *нормальным* (нормально распределенным) вектором, если соответствующий нормированный случайный вектор

$$\tilde{\xi} = K^{-1/2}(\xi - \mu) \quad (14.3)$$

является стандартным нормальным вектором.

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ — соответственно плотность вероятности и характеристическая функция такого случайного вектора. Из соотношения

$$\xi = K^{1/2}\tilde{\xi} + \mu,$$

в соответствии с общими правилами преобразования плотности вероятности и характеристической функции, находим (см. (12.29) и (13.28))

$$f(x) = \tilde{f}\left(K^{-1/2}(x - \mu)\right) \left|\det K^{-1/2}\right|,$$

$$\varphi(t) = e^{it^T \mu} \tilde{\varphi}\left((K^{1/2})^T t\right).$$

Отсюда, с учетом (14.1) и (14.2), получаем

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^n \det K}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T K^{-1}(x - \mu)\right), \quad (14.4)$$

$$\varphi(t) = \exp\left(it^T \mu - \frac{1}{2}t^T K t\right). \quad (14.5)$$

Формула (14.4) иногда приводится в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{\det C}{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T C(x - \mu)\right), \quad (14.6)$$

где

$$C = K^{-1}. \quad (14.7)$$

Соотношения (14.4)–(14.7) часто кладутся в основу определения многомерного распределения вероятностей: считается, что нормальное распределение вероятностей в $\mathbb{R}^n$ — это (по определению) такое распределение, для которого плотность вероятности имеет вид (14.6), или характеристическая функция имеет вид (14.5), где $\mu \in \mathbb{R}^n$, а C и K — положительно определенные матрицы.

Запись $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, K)$ означает, что ξ — нормально распределенный случайный вектор с математическим ожиданием μ и ковариационной матрицей K . Очевидно, что

$$(\xi \sim \mathcal{N}(\mu, K)) \iff (\tilde{\xi} = K^{-1/2}(\xi - \mu) \sim \mathcal{N}(0, I)). \quad (14.8)$$

Если A — произвольная $m \times n$ -матрица с линейно независимыми строками, а b — произвольный m -мерный вектор-столбец, то наряду с нормально распределенным n -мерным случайным вектором ξ нормально распределенным будет и m -мерный случайный вектор $A\xi + b$; подробнее:

$$(\xi \sim \mathcal{N}(\mu, K)) \Rightarrow (A\xi + b) \sim \mathcal{N}(A\mu + b, AKA^T). \quad (14.9)$$

В частности, нормально распределенной будет любая составляющая ξ_r вектора ξ ; любой его подвектор $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_r})^T$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$; любая (неоднородная, вообще говоря) линейная комбинация

$$a_0 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n$$

при условии, что $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$.

Пусть нормально распределенный $(n + m)$ -мерный случайный вектор

$$\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)^T = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

разбит на подвекторы $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)^T$, так что

$$M\zeta = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix},$$

где $\mu = M\xi$, $\nu = M\eta$. Ковариационную матрицу K вектора ζ разобьем на блоки

$$K = \left(\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array} \right),$$

где K_{11} и K_{22} представляют собой $n \times n$ - и $m \times m$ -матрицы соответственно. Тогда, очевидно,

$$\xi \sim \mathcal{N}(\mu, K_{11}), \quad \eta \sim \mathcal{N}(\nu, K_{22}). \quad (14.10)$$

Следует подчеркнуть, что если вектор ζ задан своей плотностью вероятности, т. е. вектором $M\zeta$ и матрицей

$$C = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array} \right),$$

разбитой на блоки по аналогии с K , то, вообще говоря, $C_{11} \neq K_{11}^{-1}$, $C_{22} \neq K_{22}^{-1}$. Справедливы следующие соотношения:

$$K_{11}^{-1} = C_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{21},$$

$$K_{22}^{-1} = C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12}.$$

В соответствии с этим мы будем писать

$$L(\xi) \equiv \mathcal{N}(\mu, K_{11}) \equiv \mathcal{N}\left(\mu, (C_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{21})^{-1}\right);$$

$$L(\eta) \equiv \mathcal{N}(\nu, K_{22}) \equiv \mathcal{N}\left(\nu, (C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12})^{-1}\right).$$

Для всяких случайных величин (векторов), имеющих нормальное совместное распределение вероятностей, попарная некоррелированность равносильна совокупной независимости.

Энтропия произвольного n -мерного случайного вектора ξ с плотностью вероятности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определяется как

$$H(\xi) = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Для случайного вектора $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, K)$

$$H(\xi) = \ln \sqrt{(2\pi e)^n \det K}. \quad (14.11)$$

Это наибольшая энтропия, какую только может иметь абсолютно непрерывное распределение вероятностей в $\mathbb{R}^n$ с ковариационной матрицей K . (Экстремальное свойство многомерного нормального распределения вероятностей.)

14.1. Известно, что $(\xi, \eta, \zeta)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, где

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Вычислить энтропию данного случайного вектора.
- 2) Какая из случайных величин ξ, η, ζ имеет наименьшую и какая — наибольшую энтропию?
- 3) Какой из всех двумерных подвекторов данного случайного вектора имеет наибольшую и какой — наименьшую энтропию?
- 4) Найти плотность вероятности $f(x, y, z)$ данного случайного вектора, а также частные плотности вероятности

$$f_1(x), f_2(y), f_3(z), f_{13}(x, z).$$

- 5) Вычислить вероятности:

$$\text{а) } P(2\xi - 3\eta - \zeta < 9); \quad \text{б) } P(|2\eta - 5\zeta| < 16).$$

Р е ш е н и е.

- 1) По формуле (14.11)

$$H(\xi, \eta, \zeta) = \ln \sqrt{(2\pi e)^3 \det K} = \ln \sqrt{(2\pi e)^3}.$$

2) Каждая из величин ξ, η, ζ имеет нормальное распределение вероятностей; потому ее энтропия H выражается через

соответствующую дисперсию D по формуле $H = \ln \sqrt{2\pi e D}$.
Учитывая, что

$$D\xi = 2, \quad D\eta = 6, \quad D\zeta = 1$$

(диагональные элементы заданной матрицы K), получаем:

$$H(\zeta) < H(\xi) < H(\eta).$$

Таким образом, наименьшую энтропию имеет величина ζ , наибольшую — величина η .

3) Каждый из подвекторов $(\xi, \eta)^T$, $(\xi, \zeta)^T$, $(\eta, \zeta)^T$ случайного вектора $(\xi, \eta, \zeta)^T$ имеет нормальное распределение вероятностей; потому его энтропия выражается через соответствующую ковариационную матрицу по формуле (14.11).

Учитывая, что

$$\det K_{\xi\eta} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\det K_{\xi\zeta} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\det K_{\eta\zeta} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

получаем:

$$H(\xi, \zeta) < H(\xi, \eta) < H(\eta, \zeta).$$

Итак, из всех двумерных подвекторов заданного случайного вектора $(\xi, \eta, \zeta)^T$ наименьшую энтропию имеет подвектор $(\xi, \zeta)^T$, а наибольшую — подвектор $(\eta, \zeta)^T$.

4) Поскольку $\xi \sim \mathcal{N}(1, 2)$, $\eta \sim \mathcal{N}(0, 6)$, $\zeta \sim \mathcal{N}(-2, 1)$, плотности вероятности этих случайных величин равны соответственно:

$$f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-1)^2}{4} \right\},$$

$$f_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{3\pi}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{12} \right\},$$

$$f_3(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(z+2)^2}{2} \right\}.$$

Принимая во внимание, что

$$\mu_{\xi\zeta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad K_{\xi\zeta} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_{\xi\zeta}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

находим, используя формулу (14.4),

$$f_{13}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{1}{2} \left[(x-1)^2 + 2(x-1)(z+2) + 2(z+2)^2 \right] \right).$$

Плотность вероятности $f(x, y, z)$ случайного вектора $(\xi, \eta, \zeta)^T$ читателям предлагается найти самостоятельно.

5) Случайная величина $2\xi - 3\eta - \zeta$ имеет нормальное распределение вероятностей, причем

$$\begin{aligned} M(2\xi - 3\eta - \zeta) &= 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - (-2) = 4; \\ D(2\xi - 3\eta - \zeta) &= 4D\xi + 9D\eta + D\zeta - 12\text{cov}(\xi, \eta) - \\ &\quad - 4\text{cov}(\xi, \zeta) + 6\text{cov}(\eta, \zeta) = \\ &= 4 \cdot 2 + 9 \cdot 6 + 1 - 12 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1) = 25. \end{aligned}$$

Итак, $2\xi - 3\eta - \zeta \sim \mathcal{N}(4, 25)$. Следовательно,

$$P(2\xi - 3\eta - \zeta < 9) = \Phi \left(\frac{9-4}{\sqrt{25}} \right) = \Phi(1) = \frac{1}{2} + \Phi_0(1) \approx 0,8413.$$

Аналогично устанавливается (сделайте это самостоятельно), что $2\eta - 5\zeta \sim \mathcal{N}(10, 69)$. Отсюда

$$\begin{aligned} P(|2\eta - 5\zeta| < 16) &= P(-16 < 2\eta - 5\zeta < 16) = \\ &= \Phi \left(\frac{16-10}{\sqrt{69}} \right) - \Phi \left(\frac{-16-10}{\sqrt{69}} \right) \approx \\ &\approx \Phi_0(0,72) + \Phi_0(3,13) \approx 0,765. \end{aligned}$$

14.2. В условиях задачи 14.1 найдите плотность вероятности и характеристическую функцию случайной величины:

а) $2\xi - 3\eta - \zeta$; б) $2\eta - 5\zeta - 7$.

14.3. Известно, что $(\xi, \eta, \zeta)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, где

$$\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -3 \\ 5 & -3 & 15 \end{pmatrix}.$$

1) Какой из всех подвекторов вектора $(\xi, \eta, \zeta)^T$ имеет наименьшую и какой — наибольшую энтропию?

2) Вычислите вероятности:

а) $P(|\eta| \geq 1)$;

$$б) P(|\eta - 3\zeta + 1| \geq 13);$$

$$в) P(2\xi - \eta - 3\zeta < 10).$$

3) Найдите совместную плотность вероятности и совместную характеристическую функцию величин ξ и ζ .

14.4. Плотность вероятности $f(x_1, x_2, x_3)$ случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ записывается в виде:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a \exp \left\{ -0,5(x_1+3)^2 - (x_2-2)^2 - 3(x_3+1)^2 + (x_1+3)(x_2-2) + 2(x_1+3)(x_3+1) - 3(x_2-2)(x_3+1) \right\}.$$

1) Найти нормирующую константу a , математическое ожидание μ , ковариационную матрицу K и нормированную корреляционную матрицу R вектора ξ .

2) Пусть

$$\eta_1 = \xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 + 4, \quad \eta_2 = 3\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + 1.$$

Энтропия какой из величин η_1 и η_2 больше и на сколько?

3) Вычислить вероятности:

$$а) P(0 < \xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 < 8);$$

$$б) P(-10 < 3\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 < 2).$$

Решение. Прежде всего убедимся, что предлагаемая функция $f(x_1, x_2, x_3)$ при надлежащем выборе константы a действительно представляет собой плотность вероятности некоторого распределения. С этой целью выделим множитель $-1/2$ в показателе экспоненты,

$$f(x_1, x_2, x_3) = a \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(x_1+3)^2 + 2(x_2-2)^2 + 6(x_3+1)^2 - 2(x_1+3)(x_2-2) - 4(x_1+3)(x_3+1) + 6(x_2-2)(x_3+1) \right] \right\},$$

и рассмотрим соответствующую симметрическую матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Все главные миноры этой матрицы положительны:

$$1 > 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Следовательно, $\mathbf{C}$ — положительно определенная матрица (критерий Сильвестра), а $f(x_1, x_2, x_3)$ — плотность вероятности трехмерного нормального распределения (при соответствующем выборе константы a).

1) Нормирующая константа a находится как (см. (14.6))

$$a = \sqrt{\frac{\det \mathbf{C}}{(2\pi)^3}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}.$$

Далее имеем (проверьте):

$$\mu = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ковариационная матрица $\mathbf{K} = \|k_{ij}\|$ и нормированная корреляционная матрица $\mathbf{R} = \|\rho_{ij}\|$ случайного вектора ξ связаны между собой так, что

$$\rho_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{k_{ii}k_{jj}}}.$$

Поэтому

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

2) По матрице $\mathbf{K}$ вычисляем дисперсии величин η_1 и η_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\eta_1 &= \mathbf{D}(\xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 + 4) = \\ &= \mathbf{D}(\xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3) = \\ &= \mathbf{D}\xi_1 + 4\mathbf{D}\xi_2 + 9\mathbf{D}\xi_3 + 4\text{cov}(\xi_1, \xi_2) - 6\text{cov}(\xi_1, \xi_3) - 12\text{cov}(\xi_2, \xi_3) = \\ &= 3 + 8 + 9 + 0 - 6 + 12 = 26; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\eta_2 &= \mathbf{D}(3\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + 1) = \\ &= \mathbf{D}(3\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3) = \\ &= 9\mathbf{D}\xi_1 + 4\mathbf{D}\xi_2 + \mathbf{D}\xi_3 + 12\text{cov}(\xi_1, \xi_2) - 6\text{cov}(\xi_1, \xi_3) - 4\text{cov}(\xi_2, \xi_3) = \\ &= 27 + 8 + 1 + 0 - 6 + 4 = 34. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{H}(\eta_2) > \mathbf{H}(\eta_1)$, причем

$$\mathbf{H}(\eta_2) - \mathbf{H}(\eta_1) = \ln \sqrt{2\pi e \cdot 34} - \ln \sqrt{2\pi e \cdot 26} = \ln \sqrt{\frac{34}{26}} = \ln \sqrt{\frac{17}{13}}.$$

3) Поскольку

$$\xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 \sim \mathcal{N}(4, 26),$$

для искомой вероятности получаем

$$\begin{aligned} P(0 < \xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 < 8) = \\ = \Phi_0\left(\frac{8-4}{\sqrt{26}}\right) - \Phi_0\left(\frac{0-4}{\sqrt{26}}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{4}{\sqrt{26}}\right) \approx 0,56. \end{aligned}$$

Закончить решение читатели могут самостоятельно.

14.5. Совместная плотность вероятности $f(x_1, x_2, x_3)$ случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ записывается в виде

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = a \exp \left\{ -2(x_1 + 1)^2 - 3(x_2 - 1)^2 - 9x_3^2 + \right. \\ \left. + 4(x_1 + 1)(x_2 - 1) + 2(x_2 - 1)x_3 \right\}. \end{aligned}$$

1) Найдите нормирующую константу a , математическое ожидание μ , ковариационную матрицу K и нормированную корреляционную матрицу R данного случайного вектора ξ .

2) При каком значении λ

$$P(2\xi_1 - \xi_2 - 3\xi_3 < \lambda) = \frac{1}{4}?$$

3) Пусть $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$, где

$$\begin{cases} \eta_1 = 2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + 5, \\ \eta_2 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 1, \\ \eta_3 = \xi_3. \end{cases}$$

Энтропия какого из векторов ξ и η больше и на сколько?

14.6. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$ — нормально распределенный случайный вектор с нулевым математическим ожиданием, $M\xi_1 = M\xi_2 = M\xi_3 = M\xi_4 = 0$, и ковариационной матрицей $K = \|k_{rs}\|$. Доказать, что

$$M(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = k_{12}k_{34} + k_{13}k_{24} + k_{14}k_{23}. \quad (*)$$

Доказательство. Случайный вектор ξ имеет характеристическую функцию $\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, t_3, t_4)$, записываемую в виде

$$\varphi(t) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^4 k_{rs} t_r t_s \right).$$

Поэтому соотношение (*) может быть получено по формуле

$$M(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = \frac{1}{i^4} \frac{\partial^4}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3 \partial t_4} \varphi(t) \Big|_{t=0}.$$

Возможен и другой подход к решению задачи — разложение функции φ в ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^4 k_{rs} t_r t_s \right]^n$$

и нахождение коэффициента при $t_1 t_2 t_3 t_4$. Определенные технические трудности, возникающие при этом, читателям предлагается преодолеть самостоятельно.

14.7. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n-1}, \xi_{2n})^T \sim \mathcal{N}(0, K)$, где $K = \|k_{ij}\|$. Докажите, что

$$M(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{2n-1} \xi_{2n}) = \sum k_{\alpha_1 \alpha_2} k_{\alpha_3 \alpha_4} \cdots k_{\alpha_{2n-1} \alpha_{2n}}.$$

Суммирование здесь проводится по тем перестановкам

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} \rangle$$

чисел $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$, для которых

$$\alpha_1 < \alpha_2, \quad \alpha_3 < \alpha_4, \quad \dots, \quad \alpha_{2n-1} < \alpha_{2n}.$$

14.8. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$, $K = \|k_{ij}\|$.

Докажите, что

$$M(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n) = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n + \\ + \sum k_{\alpha_1 \alpha_2} k_{\alpha_3 \alpha_4} \cdots k_{\alpha_{2r-1} \alpha_{2r}} \mu_{\alpha_{2r+1}} \cdots \mu_{\alpha_n}.$$

Суммирование здесь проводится по всем r и тем перестановкам $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ чисел $1, 2, \dots, n$, для которых

$$2r \leq n, \quad \alpha_1 < \alpha_2, \dots, \alpha_{2r-1} < \alpha_{2r}, \quad \alpha_{2r+1} < \alpha_{2r+2} < \dots < \alpha_n.$$

14.9. Доказать, что случайный вектор ξ является нормально распределенным тогда и только тогда, когда нормально распределена любая нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n$ составляющих $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ данного вектора.

З а м е ч а н и е. Эта задача дает еще одну важную характеризацию многомерного нормального распределения вероятностей. Любопытно, что многомерное распределение в данном случае полностью определяется одномерными распределениями, рассматриваемыми, правда, в бесконечном множестве.

Р е ш е н и е.

1) Если нормально распределен вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$, то нормально распределена и всякая случайная величина вида $\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n$, при условии, что хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ отличен от нуля.

2) Как известно,

$$M(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n) = \lambda^T \mu,$$

$$D(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n) = \lambda^T K \lambda,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$, μ — математическое ожидание и K — ковариационная матрица случайного вектора ξ . По условию

$$\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n = \lambda^T \xi \sim \mathcal{N}(\lambda^T \mu, \lambda^T K \lambda).$$

Следовательно, характеристическая функция $\varphi(t)$ случайной величины $\lambda^T \xi$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= M e^{i(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n)t} = \\ &= \exp \left(i \lambda^T \mu t - \frac{1}{2} \lambda^T K \lambda t^2 \right). \end{aligned}$$

В частности,

$$M e^{i(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n)} = \exp \left(i \lambda^T \mu - \frac{1}{2} \lambda^T K \lambda \right).$$

Хотя это соотношение получено нами для произвольно-го ненулевого вектора λ , оно верно и при $\lambda = 0$. Но в таком случае характеристическая функция $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ случайного вектора ξ имеет вид (14.5), т. е. соответствует распределению $\mathcal{N}(\mu, K)$.

Двумерное нормальное распределение вероятностей

Распределение двумерного нормального случайного вектора $\zeta = (\xi, \eta)^T$ полностью определяется математическими ожиданиями $M\xi = \mu$, $M\eta = \nu$, дисперсиями $D\xi = \sigma_1^2$, $D\eta = \sigma_2^2$ и коэффициентом корреляции ρ величин ξ и η .

Представляя ковариационную матрицу K случайного вектора ζ в виде

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

находим

$$C = K^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому плотность вероятности $f(x, y)$ случайного вектора ζ (в соответствии с общей формулой (14.6)) записывается как

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu)(y-\nu)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\nu)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}. \quad (14.12)$$

Условные плотности вероятности $f_{2|1}(y|x)$ и $f_{1|2}(x|y)$ одной из величин ξ и η при фиксированной другой величине могут быть найдены по общим формулам

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}, \quad f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}.$$

Эти распределения относятся к классу нормальных распределений. Поэтому они полностью определяются соответствующими условными математическими ожиданиями и условными дисперсиями. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} M(\eta | \xi = x) = \nu + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu), \\ D(\eta | \xi = x) = \sigma_2^2 (1 - \rho^2), \end{cases} \quad (14.13)$$

и, аналогично,

$$\begin{cases} M(\xi | \eta = y) = \mu + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \nu), \\ D(\xi | \eta = y) = \sigma_1^2 (1 - \rho^2). \end{cases} \quad (14.14)$$

В соответствии с этим мы будем писать

$$\begin{cases} L(\eta | \xi = x) \equiv \mathcal{N} \left(\nu + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu), \sigma_2^2 (1 - \rho^2) \right), \\ L(\xi | \eta = y) \equiv \mathcal{N} \left(\mu + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \nu), \sigma_1^2 (1 - \rho^2) \right). \end{cases} \quad (14.15)$$

Простейшая (линейная) зависимость от x и y условных математических ожиданий $M(\eta | \xi = x)$ и $M(\xi | \eta = y)$ делает эти характеристики особенно привлекательными для приложений. Заслуживает быть специально отмеченным и то обстоятельство, что рассматриваемые условные дисперсии

$D(\xi | \eta = y)$ и $D(\eta | \xi = x)$ вовсе не зависят от x и y , но и не совпадают с безусловными дисперсиями $D\xi$ и $D\eta$. Можно сказать, что на условной дисперсии любой из величин ξ и η при фиксированной другой величине никак не сказывается тот уровень, на котором фиксируется другая величина, но сказывается сам факт такого фиксирования.

14.10. Известно, что $(\xi, \eta)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, где

$$\mu = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить условные вероятности:

1) $P(\eta < 3 \xi = 0)$;	4) $P(\eta > 3 \xi = -3)$;
2) $P(\eta < 0 \xi = 1)$;	5) $P(\eta + 4 < 2 \xi = 2)$;
3) $P(\eta > 0 \xi = -1)$;	6) $P(\eta < 10 \xi = 5)$.

Решение (частично). В рассматриваемом случае

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 2, \quad \rho = -\frac{1}{2},$$

и, в соответствии с (14.15),

$$\begin{aligned} L(\eta | \xi = x) &\equiv \\ &\equiv \mathcal{N}\left(1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x + 3), 4\left(1 - \frac{1}{4}\right)\right) \equiv \mathcal{N}(-x - 2, 3). \quad (*) \end{aligned}$$

1) Поскольку

$$L(\eta | \xi = 0) \equiv \mathcal{N}(-2, 3),$$

для искомой условной вероятности получаем:

$$P(\eta < 3 | \xi = 0) = \Phi\left(\frac{3+2}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,5 + \Phi_0(2,89) \approx 0,9980.$$

3) Из соотношения (*) находим:

$$L(\eta | \xi = -1) \equiv \mathcal{N}(-1, 3).$$

Следовательно,

$$P(\eta > 0 | \xi = -1) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,2890.$$

5) Из соотношения (*) заключаем, что

$$L(\eta | \xi = 2) \equiv \mathcal{N}(-4, 3).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P(|\eta + 4| < 2 | \xi = 2) &= P\left(|\eta + 4| < \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} | \xi = 2\right) = \\ &= 2 \Phi_0\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 2 \Phi_0(1, 15) \approx 0,7498. \end{aligned}$$

14.11. В условиях задачи 14.10 найдите условные вероятности:

- 1) $P(\xi < -1 | \eta = 0)$; 4) $P(\xi + 2\eta < 0 | \eta = 1)$;
- 2) $P(\xi < 0 | \eta = 1)$; 5) $P(|\xi| > 2 | \eta = 2)$;
- 3) $P(\xi > -2 | \eta = -3)$; 6) $P(|\xi - 1| < 1 | \eta = -15)$.

14.12. Пусть ξ и η — случайные величины, имеющие нормальное совместное распределение вероятностей. Рассмотрим следующую систему уравнений относительно x и y :

$$\begin{cases} M(\eta | \xi = x) = M\eta, \\ M(\xi | \eta = y) = M\xi. \end{cases}$$

- 1) Всегда ли данная система уравнений совместна?
- 2) Может ли данная система уравнений иметь бесконечно много решений?

14.13. Известно, что $(\xi, \eta, \zeta)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, где

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите условные вероятности:

- 1) $P(|\zeta| > 1 | \xi = 1)$; 2) $P(|\zeta + 3| < 1 | \eta = 6)$.

14.14. Случайные величины ξ , η и ζ имеют совместную плотность вероятности

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a \exp \left\{ -0,5(x+2)^2 - 3,5(y-3)^2 - 2,5(z+1)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2(x+2)(y-3) + (x+2)(z+1) + 5(y-3)(z+1) \right\} \end{aligned}$$

(a — нормирующая константа). Вычислите условные вероятности:

$$1) P(-5 < \zeta < -3 | \xi = 7); \quad 2) P(-5 < \zeta < -3 | \eta = 1).$$

14.15. Известно, что $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{100}$ — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины. Пусть

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{40}, \quad \eta_2 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}.$$

Найти плотность вероятности вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$.

Решение. **Способ 1.** Если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{100})^T$, то $\eta = A\xi$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(в первой строке 40 единиц и 60 нулей, во второй строке — 100 единиц). Следовательно,

$$M\eta = A \cdot M\xi = A \cdot 0 = 0,$$

$$K_\eta = AK_\xi A^T = AIA^T = AA^T = \begin{pmatrix} 40 & 40 \\ 40 & 100 \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$C_\eta = K_\eta^{-1} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

и, стало быть, плотность вероятности случайного вектора η записывается в виде

$$f_{\eta_1 \eta_2}(x, y) = \frac{1}{40\sqrt{6}\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{240} [5x^2 - 4xy + 2y^2] \right\}.$$

Способ 2. Имеем

$$f_{\eta_1 \eta_2}(x, y) = f_{\eta_1}(x) f_{\eta_2 | \eta_1}(y | x).$$

Каждая из плотностей вероятности $f_{\eta_1}(x)$ и $f_{\eta_2 | \eta_1}(y | x)$ относится к классу нормальных плотностей вероятности и потому однозначно определяется своими математическим ожиданием и дисперсией. Простые расчеты дают

$$M\eta_1 = M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{40}) = 0;$$

$$D\eta_1 = D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{40}) = D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_{40} = 40.$$

Следовательно,

$$f_{\eta_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{80}\pi} \exp \left(-\frac{1}{80} x^2 \right).$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
 M(\eta_2 | \eta_1 = x) &= \\
 &= M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100} | \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{40} = x) = \\
 &= M(x + \xi_{41} + \xi_{42} + \dots + \xi_{100} | \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{40} = x) = \\
 &= M(x + \xi_{41} + \xi_{42} + \dots + \xi_{100}) = x; \\
 D(\eta_2 | \eta_1 = x) &= D(x + \xi_{41} + \xi_{42} + \dots + \xi_{100} | \eta_1 = x) = \\
 &= D(x + \xi_{41} + \xi_{42} + \dots + \xi_{100}) = \\
 &= D(\xi_{41} + \xi_{42} + \dots + \xi_{100}) = 60.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$f_{\eta_2 | \eta_1}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{120\pi}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{120}\right).$$

Окончательно получаем

$$f_{\eta_1 \eta_2}(x, y) = \frac{1}{40\sqrt{6}\pi} \exp\left\{-\frac{1}{240} [3x^2 + 2(y-x)^2]\right\}.$$

14.16. Двумя способами, описанными при решении задачи 14.15, найдите совместную плотность вероятности случайных величин

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{30}, \quad \eta_2 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{50},$$

если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{50}$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет распределение:

$$1) \mathcal{N}(0, 4); \quad 2) \mathcal{N}(1, 4).$$

14.17. Для независимых одинаково распределенных по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайных величин ξ и η , используя результаты задач 11.16 и 11.17, найдите вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в область:

$$\begin{array}{ll}
 1) & 1 \leq |x| + |y|; & 4) & 1 \leq x^2 + y^2; \\
 2) & |x| + |y| \leq 2; & 5) & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2; \\
 3) & 1 \leq |x| + |y| \leq 2; & 6) & 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.
 \end{array}$$

14.18. Для независимых одинаково распределенных по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайных величин ξ и η найдите вероятность попадания случайной точки (ξ, η) :

$$1) \text{ в круг, вписанный в квадрат } |x| + |y| \leq 2;$$

- 2) в круг, описанный около квадрата $|x| + |y| \leq 2$;
 3) в кольцо, образованное вписанной и описанной около квадрата $|x| + |y| \leq 2$ окружностями.

14.19. Для независимых одинаково распределенных по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайных величин ξ и η найдите вероятности:

- 1) $P(\xi_1 < 3\xi_2)$; 2) $P(|\xi_1| < \sqrt{3}|\xi_2|)$; 3) $P(|\xi_1| > \sqrt{3}\xi_2)$.

14.20. Докажите, что если случайные величины ξ и η имеют нормальное совместное распределение вероятностей и $M\xi = M\eta$, $D\xi = D\eta$, то случайные величины $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$ независимы (сопоставьте с задачей 11.50).

14.21. Случайные величины ξ и η имеют нормальное совместное распределение вероятностей с математическими ожиданиями $M\xi = M\eta = 0$, дисперсиями $D\xi = D\eta = 1$ и коэффициентом корреляции ρ . Докажите, что случайные величины ξ и $\eta - \rho\xi$ независимы (сопоставьте с задачей 11.51).

14.22. Случайные величины ξ и η имеют нормальное совместное распределение вероятностей с $M\xi = M\eta = 0$, $D\xi = D\eta = 1$; коэффициент корреляции данных величин равен ρ . Вычислить

$$M(\xi^3 \eta^3).$$

Решение. Приводимые ниже выкладки существенно используют результат задачи 14.21, а также то, что если $\zeta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, то

$$M\zeta^{2n-1} = 0, \quad M\zeta^{2n} = (2n-1)!! \sigma^{2n}$$

(задача 8.65). Имеем:

$$\begin{aligned} M(\xi^3 \eta^3) &= M\left[\xi^3 \left((\eta - \rho\xi) + \rho\xi\right)^3\right] = \\ &= M\xi^3 \cdot M(\eta - \rho\xi)^3 + 3\rho M\xi^4 \cdot M(\eta - \rho\xi)^2 + \\ &\quad + 3\rho^2 M\xi^5 \cdot M(\eta - \rho\xi) + \rho^3 M\xi^6 = \\ &= 3\rho M\xi^4 \cdot M(\eta - \rho\xi)^2 + \rho^3 M\xi^6 = 9\rho M(\eta - \rho\xi)^2 + 15\rho^3. \end{aligned}$$

Нетрудно вывести, что $\eta - \rho\xi \sim \mathcal{N}(0, 1 - \rho^2)$. Следовательно,

$$M(\xi^3 \eta^3) = 9\rho(1 - \rho^2) + 15\rho^3 = 6\rho^3 + 9\rho.$$

14.23. Случайные величины ξ и η имеют нормальное совместное распределение вероятностей с $M\xi = M\eta = 0$, $D\xi = D\eta = 1$; коэффициент корреляции данных величин равен ρ . Вычислите:

$$1) M(\xi^4 \eta^2); \quad 2) M(\xi^4 \eta^3); \quad 3) M(\xi^5 \eta^3).$$

14.24. Случайные величины ξ и η имеют нормальное совместное распределение вероятностей с математическими ожиданиями $M\xi = M\eta = 0$, дисперсиями $D\xi = D\eta = 1$ и коэффициентом корреляции ρ . Как распределено частное $\zeta = \frac{\eta}{\xi}$?

14.25. Пусть $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ — плотности вероятности нормальных распределений

$$\mathcal{N}\left(\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$\mathcal{N}\left(\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}\right)$$

(при $0 < |\rho| < 1$), так что

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2]\right\},$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[x_1^2 + 2\rho x_1 x_2 + x_2^2]\right\}.$$

Доказать, что функция

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2)]$$

представляет собой плотность вероятности некоторого случайного вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$, такого, что η_1 и η_2 — некоррелированные нормально распределенные случайные величины, совместное распределение которых отличается от нормального.

Решение. Поскольку каждая из функций $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ неотрицательна и нормирована, неотрицательной и

нормированной будет и функция $f(x_1, x_2)$:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2)] \geq 0;$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\iint_{\mathbf{R}^2} f_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \iint_{\mathbf{R}^2} f_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} (1 + 1) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $f(x_1, x_2)$ — плотность некоторого распределения вероятностей. Это распределение отлично от нормального: сумма двух экспонент от разных квадратичных форм не может быть тождественно равной одной экспоненте от квадратичной формы.

Вместе с тем,

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \int_{\mathbf{R}} f(x_1, x_2) dx_2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{\mathbf{R}} f_1(x_1, x_2) dx_2 + \int_{\mathbf{R}} f_2(x_1, x_2) dx_2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2}; \end{aligned}$$

аналогично,

$$f_2(x_2) = \int_{\mathbf{R}} f(x_1, x_2) dx_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_2^2/2}.$$

Заметим также, что составляющие вектора $(\xi, \eta)^T$ с плотностью вероятности $f(x_1, x_2)$ являются некоррелированными:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= \iint_{\mathbf{R}^2} x_1 x_2 \frac{1}{2} [f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2)] dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{1}{2} (\rho - \rho) = 0. \end{aligned}$$

14.26. Докажите, что если ξ и η — независимые стандартные нормальные величины, то

$$\mathbf{M}(\xi | \xi + \eta) = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \mathbf{M}(\xi | \xi \eta) = 0.$$

Количество информации об одной случайной величине, содержащейся в другой случайной величине

Пусть $f(x, y)$ — совместная плотность вероятности случайных величин ξ и η (не обязательно нормально распределенных), $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — их частные плотности вероятности, $f_{2|1}(y|x)$ — условная плотность вероятности случайной величины η при условии $\xi = x$, так что

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

(в предположении $f_1(x) \neq 0$). Энтропия $H(\eta|\xi = x)$, соответствующая указанному условному распределению вероятностей,

$$H(\eta|\xi = x) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_{2|1}(y|x) \ln f_{2|1}(y|x) dy, \quad (14.16)$$

называется *условной энтропией величины η при условии $\xi = x$* .

Усреднение этой энтропии по распределению случайной величины ξ приводит к *средней условной энтропии случайной величины η относительно ξ* ; она обозначается $H(\eta|\xi)$:

$$H(\eta|\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\eta|\xi = x) f_1(x) dx. \quad (14.17)$$

Разность

$$I_{\xi}(\eta) = H(\eta) - H(\eta|\xi) \quad (14.18)$$

показывает, насколько изменяется неопределенность случайной величины η в результате наблюдений над величиной ξ , и поэтому называется *количеством информации о величине η , содержащейся в величине ξ* .

Легко устанавливается, что

$$I_{\xi}(\eta) = I_{\eta}(\xi) \geq 0. \quad (14.19)$$

Еще раз подчеркнем, что формулы (14.16)–(14.19) относятся к произвольным случайным величинам ξ и η , имеющим абсолютно непрерывное совместное распределение вероятностей. Но приводим мы их в связи с рассмотрением нормального распределения, так как именно в этом случае данные соотношения оказываются наиболее обозримыми и важными для приложений.

В частности, для случайных величин ξ и η , имеющих нормальное совместное распределение вероятностей,

$$I_{\xi}(\eta) = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}}, \quad (14.20)$$

где ρ — коэффициент корреляции данных величин. Формула (14.20) показывает, что чем больше (по модулю) ρ , тем большее количество информации содержит любая из величин ξ и η о другой величине. При $\rho = 0$ величины ξ и η независимы; в этом случае

$$I_{\xi}(\eta) = I_{\eta}(\xi) = 0,$$

и, таким образом, ни одна из данных величин не несет в себе никакой информации о другой величине.

Аналогично двумерному случаю вводится понятие количества информации $I_{\xi}(\eta)$ о векторе η , содержащейся в векторе ξ и доказывается формула

$$I_{\xi}(\eta) = \ln \sqrt{\frac{\det K_{\eta}}{\det K_{\eta|\xi}}} = \ln \sqrt{\frac{\det K_{22}}{\det (K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12})}}.$$

14.27. Известно, что $(\xi, \eta, \zeta)^T$ — нормально распределенный случайный вектор с ковариационной матрицей K . Какая из величин ξ и η содержит большее количество информации о величине ζ , если:

$$1) K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}; \quad 2) K = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}?$$

Решение (частично). 1) Пусть $\rho_{\xi\zeta}$ и $\rho_{\eta\zeta}$ — коэффициенты корреляции пары (ξ, ζ) и пары (η, ζ) соответственно. Тогда

$$\rho_{\xi\zeta} = \frac{-2}{\sqrt{1 \cdot 7}} = -\frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \rho_{\eta\zeta} = \frac{-1}{\sqrt{5 \cdot 7}} = -\frac{1}{\sqrt{35}}.$$

Как мы видим, $\rho_{\xi\zeta}^2 > \rho_{\eta\zeta}^2$, и, стало быть,

$$I_{\xi}(\zeta) > I_{\eta}(\zeta).$$

14.28. Какая из величин ξ и η содержит большее количество информации о величине ζ , если совместное распределение случайных величин ξ, η, ζ имеет плотность вероятности

$$f(x, y, z) = a \exp \left\{ -5(x-2)^2 - y^2 - 3(z+1)^2 + 4(x-2)y - 2(x-2)(z+1) + 2y(z+1) \right\},$$

где a — нормирующая константа?

14.29. Случайный вектор $(\xi, \eta, \zeta)^T$ имеет нормальное распределение вероятностей с параметрами

$$\mu = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вычислите количество информации о величине ζ , содержащейся в каждой из величин ξ и η , а также в векторе $(\xi, \eta)^T$.

Теорема о нормальной корреляции в $\mathbb{R}^2$

Если случайные величины ξ и η имеют нормальное совместное распределение вероятностей с параметрами

$$M\xi = \mu_1, \quad M\eta = \mu_2, \quad D\xi = \sigma_1^2, \quad D\eta = \sigma_2^2, \quad \rho(\xi, \eta) = \rho,$$

то наилучшая (в среднем квадратическом) оценка $\hat{\eta}$ величины η по величине ξ записывается в виде

$$\hat{\eta} = M(\eta|\xi) = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\xi - \mu_1). \quad (14.21)$$

При этом

$$M(\hat{\eta} - \eta)^2 = \sigma_2^2(1 - \rho^2). \quad (14.22)$$

Формулы (14.21) и (14.22) выражают так называемую *теорему о нормальной корреляции* в $\mathbb{R}^2$.

Аналогичные формулы описывают наилучшую оценку $\hat{\xi}$ величины ξ по величине η :

$$\hat{\xi} = M(\xi|\eta) = \mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\eta - \mu_2); \quad (14.23)$$

$$M(\hat{\xi} - \xi)^2 = \sigma_1^2(1 - \rho^2). \quad (14.24)$$

14.30. Известно, что $(\xi, \eta)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, где

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите $\hat{\xi}$ — наилучшую в среднем квадратическом оценку величины ξ по величине η и $\hat{\eta}$ — наилучшую в среднем квадратическом оценку величины η по величине ξ , а также соответствующие им ошибки $M(\hat{\xi} - \xi)^2$ и $M(\hat{\eta} - \eta)^2$.

14.31. Случайные величины ξ и η имеют следующую совместную плотность вероятности

$$f(x, y) = a \exp \left\{ -\frac{1}{54} [18x^2 - 6x(y+1) + 2(y+1)^2] \right\},$$

где a — нормирующая константа. Найдите $\hat{\xi}$ — наилучшую в среднем квадратическом оценку величины ξ по величине η и $\hat{\eta}$ — наилучшую в среднем квадратическом оценку величины η по величине ξ , а также соответствующие им ошибки $\mathbf{M}(\hat{\xi} - \xi)^2$ и $\mathbf{M}(\hat{\eta} - \eta)^2$.

14.32. Случайный вектор $(\xi, \eta, \zeta)^T$ имеет нормальное распределение вероятностей с параметрами

$$\mu = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти наилучшие в среднем квадратическом оценки $\hat{\zeta}(\xi)$ и $\hat{\zeta}(\eta)$ случайной величины ζ по ξ и по η ; вычислить соответствующие им ошибки

$$\Delta_{\xi} = \mathbf{M} [\hat{\zeta}(\xi) - \zeta]^2 \quad \text{и} \quad \Delta_{\eta} = \mathbf{M} [\hat{\zeta}(\eta) - \zeta]^2.$$

Решение. Используемые ниже параметры снабжены соответствующими индексами. По теореме о нормальной корреляции

$$\hat{\zeta}(\xi) = \mu_{\zeta} + \rho_{\xi\zeta} \frac{\sigma_{\zeta}}{\sigma_{\xi}} (\xi - \mu_{\xi}) = 3 + \frac{-2}{\sqrt{1 \cdot 7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{1}} (\xi + 2) = -1 - 2\xi;$$

$$\Delta_{\xi} = \mathbf{M} [\hat{\zeta}(\xi) - \zeta]^2 = \sigma_{\zeta}^2 (1 - \rho_{\xi\zeta}^2) = 7 \left(1 - \frac{4}{7} \right) = 3.$$

Аналогично,

$$\hat{\zeta}(\eta) = \mu_{\zeta} + \rho_{\eta\zeta} \frac{\sigma_{\zeta}}{\sigma_{\eta}} (\eta - \mu_{\eta}) = 3 + \frac{-1}{\sqrt{5 \cdot 7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} (\eta - 1) = \frac{1}{5} (16 - \eta);$$

$$\Delta_{\eta} = \mathbf{M} [\hat{\zeta}(\eta) - \zeta]^2 = \sigma_{\zeta}^2 (1 - \rho_{\eta\zeta}^2) = 7 \left(1 - \frac{1}{35} \right) = \frac{34}{5}.$$

З а м е ч а н и е. Как мы видим, $\Delta_{\xi} < \Delta_{\eta}$. Это становится еще более осознанным, если вспомнить, что $I_{\xi}(\zeta) > I_{\eta}(\zeta)$ (см. решение задачи 14.27).

Предположим, что для оценивания ненаблюдаемой случайной величины ζ мы можем воспользоваться наблюдениями над любой одной из величин ξ и η . Тогда предпочтение следует отдать величине ξ , которая несет в себе большее количество информации о случайной величине ζ , чем величина η .

14.33. Задачу, аналогичную задаче 14.32, решите для случая, когда

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

14.34. Случайные величины ξ , η , ζ имеют следующую совместную плотность вероятности (см. задачу 14.28):

$$f(x, y, z) = a \exp \left(-5(x-2)^2 - y^2 - 3(z+1)^2 + 4(x-2)y - 2(x-2)(z+1) + 2y(z+1) \right),$$

a — нормирующая константа. Какая из наилучших в среднем квадратическом оценок $\hat{\zeta}(\xi)$ и $\hat{\zeta}(\eta)$ величины ζ по ξ и по η предпочтительней и в каком смысле?

14.35. Пусть $\zeta = (\xi, \eta)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$ и $\hat{\zeta} = (\hat{\xi}, \hat{\eta})^T$, где $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ — наилучшие в среднем квадратическом оценки величины ξ по η и величины η по ξ соответственно.

1) Найдите распределение случайного вектора $\hat{\zeta}$.

2) Какой из случайных векторов ζ и $\hat{\zeta}$ имеет меньшую энтропию?

Теорема о нормальной корреляции в $\mathbb{R}^n$

Для нормального случайного вектора

$$\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)^T$$

в обозначениях, приведенных на с. 317,

$$\begin{aligned} L(\eta|\xi = x) &\equiv \mathcal{N}(\nu + K_{21}K_{11}^{-1}(x - \mu); K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}) \equiv \\ &\equiv \mathcal{N}(\nu - C_{22}^{-1}C_{21}(x - \mu); C_{22}^{-1}). \end{aligned}$$

Соответственно этому наилучшая в среднем квадратическом оценка $\hat{\eta}$ случайного вектора η по вектору ξ и связанная с ней матрица ошибок Δ_η могут быть записаны в виде

$$\hat{\eta} = M(\eta|\xi) = \nu + K_{21} K_{11}^{-1} (\xi - \mu),$$

$$\Delta_\eta = M\left((\hat{\eta} - \eta)(\hat{\eta} - \eta)^T\right) = K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}$$

или, в терминах матрицы C ,

$$\hat{\eta} = \nu - C_{22}^{-1} C_{21} (\xi - \mu),$$

$$\Delta_\eta = C_{22}^{-1}.$$

Эти соотношения и выражают *теорему о нормальной корреляции в $\mathbb{R}^n$* .

14.36. В условиях задачи 14.29 найдите наилучшие в среднем квадратическом оценки $\hat{\zeta}(\xi)$, $\hat{\zeta}(\eta)$, $\hat{\zeta}(\xi, \eta)$ случайной величины ζ по величине ξ , величине η и вектору $(\xi, \eta)^T$, а также ошибки этих оценок.

14.37. В условиях задачи 14.33 найдите наилучшую в среднем квадратическом оценку $\hat{\zeta}(\xi, \eta)$ случайной величины ζ по случайному вектору $(\xi, \eta)^T$ и ошибку этой оценки.

Линейное преобразование нормально распределенного случайного вектора к вектору с независимыми составляющими

Как отмечалось в § 12, всякий случайный вектор ξ с ковариационной матрицей K можно невырожденным линейным преобразованием

$$\eta = A\xi \quad (\det A \neq 0)$$

привести к вектору η с попарно некоррелированными составляющими. В случае, когда вектор ξ распределен нормально, нормально распределенным будет и вектор η , а потому его попарно некоррелированные составляющие окажутся независимыми в совокупности.

Наряду с преобразованием $\eta = A\xi$ мы будем рассматривать и преобразование $\eta = A(\xi - \mu)$, где $\mu = M\xi$; это обеспечивает выполнение условия $M\eta = 0$, не сказываясь никак на независимости.

Приведем несколько способов решения задачи.

С п о с о б 1. Преобразование

$$\eta = K^{-1/2}(\xi - \mu),$$

или, в терминах матрицы $C = K^{-1}$,

$$\eta = C^{1/2}(\xi - \mu)$$

переводит случайный вектор $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, K)$ в случайный вектор $\eta \sim \mathcal{N}(0, I)$.

С п о с о б 2. (Ортогональное преобразование.) Пусть $h_1, h_2, \dots, h_n$ — ортонормированная система собственных векторов ковариационной матрицы K , а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения. Составим ортогональную матрицу

$$H = \begin{pmatrix} — & h_1^T & — \\ — & h_2^T & — \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ — & h_n^T & — \end{pmatrix},$$

строки которой представляют собой транспонированные собственные вектор-столбцы $h_1, h_2, \dots, h_n$. Тогда если $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, то

$$\eta = H\xi \sim \mathcal{N}(H\mu, \Lambda),$$

где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ — диагональная матрица с образующими $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Случай, когда распределение вектора ξ задано не матрицей K , а матрицей $C = K^{-1}$, рассматривается аналогично. Пусть $g_1, g_2, \dots, g_n$ — ортогональная нормированная система векторов матрицы C , а $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ — соответствующие собственные значения этой матрицы. (С точностью до нумерации числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ совпадают с числами $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$, а в качестве $g_1, g_2, \dots, g_n$ могут быть выбраны $h_1, h_2, \dots, h_n$.)

Тогда задача решается преобразованием

$$\eta = G\xi,$$

где

$$G = \begin{pmatrix} — & g_1^T & — \\ — & g_2^T & — \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ — & g_n^T & — \end{pmatrix},$$

причем $M\eta = G\mu$, а ковариационной матрицей вектора η служит диагональная матрица $\text{diag}(1/\mu_1, 1/\mu_2, \dots, 1/\mu_n)$.

С п о с о б 3. (Треугольное преобразование.) Предположим, что квадратичная форма $x^T K x$ треугольным преобразованием $y = Ax$ приводится к каноническому виду $y^T U y$ с диагональной матрицей U . В этом случае

$$\eta = (A^{-1})^T (\xi - \mu) \sim \mathcal{N}(0, U).$$

Если задана не матрица K , а матрица $C = K^{-1}$, то следует рассмотреть квадратичную форму $x^T C x$. Пусть треугольное преобразование $y = Bx$ приводит эту квадратичную форму к каноническому виду $y^T V y$ с диагональной матрицей V . Тогда

$$\eta = B(\xi - \mu) \sim \mathcal{N}(0, V^{-1}).$$

14.38. Каждым из описанных выше трех способов привести случайный вектор $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, K)$ с

$$\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$$

к вектору с независимыми составляющими.

Решение. Способ 1. Найдем собственные значения и соответствующие собственные векторы матрицы K . Имеем:

$$\begin{vmatrix} 8 - \lambda & -6 \\ -6 & 17 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0;$$

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 20.$$

Для координат x_1, x_2 собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 5$, получаем

$$3x_1 - 6x_2 = 0.$$

Следовательно, искомыми собственными векторами служат векторы вида

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Аналогично (проверьте), собственному значению $\lambda_2 = 20$ соответствуют собственные векторы вида

$$b \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$$

Таким образом, матрица K имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 20$; в качестве соответствующей ортонормированной системы собственных векторов может быть указана система

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Но в таком случае

$$\begin{aligned} K^{-1/2} &= \lambda_1^{-1/2} h_1 h_1^T + \lambda_2^{-1/2} h_2 h_2^T = \\ &= \frac{1}{5\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5\sqrt{20}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак, искомое преобразование вектора ξ можно записать в виде

$$\eta = K^{-1/2}(\xi - \mu) = \frac{1}{10\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 + 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

или, покомпонентно,

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{10\sqrt{5}}(9\xi_1 + 2\xi_2 + 9), \\ \eta_2 = \frac{1}{10\sqrt{5}}(2\xi_1 + 6\xi_2 + 2). \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. Полученный результат допускает элементарную проверку. Достаточно установить, что матрица

$$\left[\frac{1}{10\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

является положительно определенной и квадрат ее равен заданной ковариационной матрице K .

С п о с о б 2. Искомой ортогональной матрицей может быть выбрана матрица

$$H = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что случайный вектор

$$\eta = H\xi$$

или, покомпонентно,

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\xi_1 + \xi_2), \\ \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\xi_1 + 2\xi_2) \end{cases}$$

в качестве математического ожидания имеет вектор

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а в качестве ковариационной матрицы — диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix};$$

ее образующими являются собственные значения ковариационной матрицы вектора ξ .

С п о с о б 3. Квадратичную форму $x^T K x$ приводим к каноническому виду путем выделения полных квадратов:

$$\begin{aligned} x^T K x &= 8x_1^2 - 12x_1x_2 + 17x_2^2 = \\ &= 8 \left(x_1^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 \right) + 17x_2^2 = \\ &= 8 \left[\left(x_1 - \frac{3}{4}x_2 \right)^2 - \frac{9}{16}x_2^2 \right] + 17x_2^2 = \\ &= 8 \left(x_1 - \frac{3}{4}x_2 \right)^2 + \frac{25}{2}x_2^2 = \\ &= 8y_1^2 + \frac{25}{2}y_2^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{3}{4}x_2, \\ y_2 = x_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомое преобразование записывается в виде

$$\eta = (A^{-1})^T (\xi - \mu),$$

или, по координатам,

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + 1, \\ \eta_2 = \frac{3}{4}\xi_1 + \xi_2 + \frac{3}{4}. \end{cases}$$

При этом в качестве математического ожидания вектора η выступает нулевой вектор, а в качестве ковариационной матрицы — диагональная матрица

$$U = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 25/2 \end{pmatrix},$$

образующие которой служат коэффициентами полученного выше канонического представления квадратической формы $x^T K x$.

З а м е ч а н и е. Проверку полученного решения читателям предлагается осмыслить и выполнить самостоятельно. Рекомендуем также обратить внимание на то, что в качестве искомой треугольной матрицы в данном случае получилась нижняя треугольная матрица $(A^{-1})^T$. А нельзя ли было получить верхнюю треугольную матрицу?

14.39. Задачу, аналогичную задаче 14.38, решить для случая, когда математическое ожидание вектора ξ равно нулевому вектору и

$$\begin{aligned} 1) \quad K &= \begin{pmatrix} 2,5 & 1,5 \\ 1,5 & 2,5 \end{pmatrix}; & 2) \quad K &= \begin{pmatrix} 51 & 7 \\ 7 & 99 \end{pmatrix}; \\ 3) \quad K &= \begin{pmatrix} 20,8 & -8,4 \\ -8,4 & 8,2 \end{pmatrix}; & 4) \quad K &= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 26 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

14.40. Задачу, аналогичную задаче 14.38, решите для случая, когда

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 12 & 22 & 22 \\ 22 & 45 & 44 \\ 22 & 44 & 45 \end{pmatrix}.$$

14.41. Задачу, аналогичную задаче 14.38, решите для случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ с плотностью вероятности

$$f(x_1, x_2) = a \exp \left\{ -x_1^2 + 2x_1(x_2 - 1) - 2,5(x_2 - 1)^2 \right\}.$$

14.42. Найдите какое-нибудь линейное преобразование, переводящее случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$ в нормально распределенный случайный вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ с независимыми составляющими η_1, η_2, η_3 , если

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & 19 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Какой при этом будет ковариационная матрица вектора η ?

14.43. В условиях задачи 14.42, найдите какую-нибудь матрицу S порядка 3×2 , преобразующую вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ в нормально распределенный случайный вектор $S\xi = \eta = (\eta_1, \eta_2)^T$ с независимыми составляющими η_1 и η_2 . Какой при этом будет ковариационная матрица вектора η ?

Линейное преобразование одного многомерного нормального распределения вероятностей в другое

Здесь рассматриваются некоторые неоднородные линейные преобразования, переводящие n -мерное нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu_1, K_1)$ в n -мерное нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu_2, K_2)$.

С п о с о б 1. Если $\xi \sim \mathcal{N}(\mu_1, K_1)$, то

$$\eta = K_2^{1/2} K_1^{-1/2} (\xi - \mu_1) + \mu_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, K_2). \quad (14.25)$$

С п о с о б 2. Пусть, в рассматриваемых условиях,

$$\begin{cases} x^T K_1 x = y^T y & \text{при } y = A_1 x, \\ x^T K_2 x = y^T y & \text{при } y = A_2 x. \end{cases}$$

Тогда, если $\xi \sim \mathcal{N}(\mu_1, K_1)$, то

$$\eta = (A_1^{-1} A_2)^T (\xi - \mu_1) + \mu_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, K_2). \quad (14.26)$$

Приведенные результаты могут быть выражены и в терминах матриц $C_i = K_i^{-1}$, ($i = 1, 2$). Так, если $\xi \sim \mathcal{N}(\mu_1, C_1^{-1})$, то

$$\eta = C_2^{-1/2} C_1^{1/2} (\xi - \mu_1) + \mu_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, C_2^{-1}). \quad (14.27)$$

Аналогично, если

$$\begin{cases} x^T C_1 x = y^T y & \text{при } y = B_1 x, \\ x^T C_2 x = y^T y & \text{при } y = B_2 x \end{cases}$$

и $\xi \sim \mathcal{N}(\mu_1, C_1^{-1})$, то

$$\eta = B_2^{-1} B_1 (\xi - \mu_1) + \mu_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, C_2^{-1}). \quad (14.28)$$

14.44. Подберите преобразование, переводящее случайный вектор $\xi \sim \mathcal{N}(\mu_1, K_1)$ в случайный вектор $\eta \sim \mathcal{N}(\mu_2, K_2)$, если

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 13 \end{pmatrix};$$

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.45. Подберите преобразование, переводящее случайный вектор $\xi \sim \mathcal{N}(\mu_1, K_1)$ в случайный вектор $\eta \sim \mathcal{N}(\mu_2, K_2)$, если

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

14.46. Подберите преобразование, переводящее случайный вектор $\xi \sim \mathcal{N}(\mu_1, K_1)$ в случайный вектор $\eta \sim \mathcal{N}(\mu_2, K_2)$, если

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

14.47. Найдите какое-нибудь преобразование, переводящее случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ с плотностью вероятности

$$f_\xi(x_1, x_2, x_3) = \alpha \exp \left\{ -0,5x_1^2 - 2,5(x_2 + 1)^2 - 2,5(x_3 - 2)^2 - \right. \\ \left. - 2x_1(x_2 + 1) + (x_2 + 1)(x_3 - 2) \right\}$$

в случайный вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ с плотностью вероятности

$$f_\eta(x_1, x_2, x_3) = \beta \exp \left\{ -2(x_1 + 3)^2 - 0,5x_2^2 - \right. \\ \left. - 2,5(x_3 - 2)^2 + 2(x_1 + 3)(x_3 - 2) \right\},$$

где α и β — нормирующие константы.

14.48. Для трехмерного случайного вектора ξ из задачи 14.47 выберите матрицу A и вектор-столбец b так, чтобы вектор $\eta = A\xi + b$ был двумерным и имел следующую плотность вероятности:

$$f_\eta(x_1, x_2) = \gamma \exp \left\{ -0,5(x_1 - 1)^2 - 5(x_2 + 2)^2 + \right. \\ \left. + 1,5(x_1 - 1)(x_2 + 2) \right\},$$

где γ — нормирующая константа.

Моделирование многомерного нормального распределения вероятностей

Здесь мы будем исходить из того, что тем или иным способом (например, с помощью ЭВМ или используя таблицы) можно получить любое число независимых наблюдений над стандартной нормальной случайной величиной,

а стало быть и любое число N независимых наблюдений

$$\begin{aligned} u_1 &= (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n})^T, \\ &\dots \\ u_N &= (u_{N1}, u_{N2}, \dots, u_{Nn})^T \end{aligned}$$

над n -мерным случайным вектором $\tilde{\xi} \sim \mathcal{N}(0, I)$. (Таблица псевдослучайных чисел, распределенных по закону $\mathcal{N}(0, 1)$, приведена на с. 441.) Задача состоит в том, чтобы по ним получить N независимых наблюдений

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n})^T, \\ &\dots \\ v_N &= (v_{N1}, v_{N2}, \dots, v_{Nn})^T \end{aligned}$$

над n -мерным случайным вектором $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, K)$.

Задача о преобразовании одного нормального распределения в другое в общей постановке рассматривалась в предыдущем пункте. Тем не менее, ввиду особой важности для приложений, мы приведем два способа решения интересующей нас задачи.

С п о с о б 1. Если невырожденная матрица A такова, что

$$x^T K x = y^T y \quad \text{при} \quad y = Ax,$$

и $\tilde{\xi} \sim \mathcal{N}(0, I)$, то

$$\xi = A^T \tilde{\xi} + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, K).$$

Это приводит к следующей возможности получения искомых наблюдений $v_1, v_2, \dots, v_N$ по наблюдениям $u_1, u_2, \dots, u_N$:

$$v_k = A^T u_k + \mu, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

С п о с о б 2. Если $\tilde{\xi} \sim \mathcal{N}(0, I)$, то

$$\xi = K^{1/2} \tilde{\xi} + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, K).$$

Таким образом искомые наблюдения $v_1, v_2, \dots, v_N$ могут быть получены по наблюдениям $u_1, u_2, \dots, u_N$ как

$$v_k = K^{1/2} u_k + \mu, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

14.49. Двумя описанными выше способами выберите преобразования, переводящие стандартный нормально распределенный случайный вектор $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)^T$ в случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, если

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

14.50. Двумя описанными выше способами подберите преобразования, переводящие стандартный нормально распределенный случайный вектор $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)^T$ в случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, если

$$\mu = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 153 & -96 \\ -96 & 97 \end{pmatrix}.$$

14.51. Двумя описанными выше способами подберите преобразования, переводящие стандартный нормально распределенный случайный вектор $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)^T$ в случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ с плотностью вероятности

$$f_{\xi}(x_1, x_2) = \alpha \exp \left\{ -\frac{1}{104} [40(x_1 - 2)^2 + 36(x_1 - 2)x_2 + 25x_2^2] \right\},$$

где α — нормирующая константа.

14.52. Двумя описанными выше способами подберите преобразования, переводящие стандартный нормально распределенный случайный вектор $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3)^T$ в случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, если

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5 & 1,5 \\ 0 & 1,5 & 2,5 \end{pmatrix}.$$

Линейные и квадратичные формы от нормальных случайных величин

Здесь рассматриваются некоторые распределения вероятностей, играющие важную роль в математической статистике.

Символом χ_n^2 обозначается так называемое *распределение «хи-квадрат» с n степенями свободы*; это — распределение суммы квадратов

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2,$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины. Если $\eta \sim \chi_n^2$, то

$$M\eta = n, \quad D\eta = 2n. \quad (14.29)$$

Плотность вероятности $f_n(x)$ и характеристическая функция $\varphi_n(t)$ такой случайной величины записываются в виде

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad (x > 0), \quad (14.30)$$

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{(1 - 2it)^{n/2}}, \quad (14.31)$$

где

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

— гамма-функция Эйлера.

При четном n распределение χ_n^2 совпадает с распределением Эрланга (см. с. 255); при $n = 2$ его можно рассматривать как экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1/2$.

Распределение χ_n^2 является асимптотически нормальным (подробнее об этом речь пойдет в § 15):

$$\chi_n^2 \rightarrow \mathcal{N}(n, 2n).$$

Символом t_n обозначается *распределение Стьюдента с n степенями свободы*; это — распределение величины

$$\frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)}},$$

где $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины.

Плотность вероятности $f_n(x)$ такой случайной величины записывается в виде

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (14.32)$$

При $n = 1$ распределение t_n совпадает с распределением Коши.

Распределение Стьюдента, как и распределение хи-квадрат, является асимптотически нормальным. При $n > 50$ оно практически не отличается от нормального распределения.

Типичная статистическая ситуация, связанная с использованием распределения хи-квадрат и распределения Стьюдента, приведена в задаче 14.58.

14.53. Доказать, что если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, то

$$(\xi - \mu)^T K^{-1} (\xi - \mu) \sim \chi_n^2.$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} (\xi - \mu)^T K^{-1}(\xi - \mu) &= ((\xi - \mu)^T K^{-1/2}) (K^{-1/2}(\xi - \mu)) = \\ &= (K^{-1/2}(\xi - \mu))^T (K^{-1/2}(\xi - \mu)). \end{aligned}$$

Остается напомнить, что

$$K^{-1/2}(\xi - \mu) \sim \mathcal{N}(0, I).$$

14.54. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \sim \mathcal{N}(0, I)$ и A — симметрическая идемпотентная матрица, т. е. $A^T = A$, $A^2 = A$. Доказать, что если ранг матрицы A равен r , то

$$\xi^T A \xi \sim \chi_r^2.$$

Доказательство. Поскольку все ненулевые собственные значения идемпотентной матрицы A равны 1,

$$A = \sum_{i=1}^r h_i h_i^T,$$

где $h_1, h_2, \dots, h_r$ — попарно ортогональные нормированные собственные векторы матрицы A , соответствующие ее собственному значению 1. Следовательно,

$$\xi^T A \xi = \sum_{i=1}^r (h_i^T \xi)^T (h_i^T \xi).$$

Если

$$H = \begin{pmatrix} - & h_1^T & - \\ - & h_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & h_r^T & - \end{pmatrix},$$

то

$$H\xi \sim \mathcal{N}(0, H I H^T) = \mathcal{N}(0, I).$$

Отсюда и получаем, что $\xi^T A \xi \sim \chi_r^2$.

14.55. Пусть

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \sim \mathcal{N}(0, I) \quad \text{и} \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)^T = A\xi,$$

где A — некоторая матрица порядка $m \times n$. Докажите, что случайные величины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ независимы тогда и только тогда, когда строки матрицы A попарно ортогональны.

14.56. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \sim \mathcal{N}(0, I)$, A — симметрическая матрица n -го порядка, B — матрица порядка $m \times n$. Доказать, что если $BA = 0$, то случайная величина $\xi^T A \xi$ и случайный вектор $B\xi$ независимы.

Доказательство. Пусть $h_1, h_2, \dots, h_r$ — ортонормированная система собственных векторов матрицы A , соответствующая всем ее ненулевым собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, так что

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i h_i h_i^T.$$

Тогда

$$\xi^T A \xi = \sum_{i=1}^r \lambda_i (h_i^T \xi)^T (h_i^T \xi).$$

Как и в задаче 14.54, будем считать, что H — матрица, строки которой совпадают с $h_1^T, h_2^T, \dots, h_r^T$. Вычислим взаимную ковариационную матрицу случайных векторов $B\xi$ и $H\xi$:

$$M(B\xi(H\xi)^T) = M(B\xi\xi^T H^T) = BM(\xi\xi^T)H^T = BH^T.$$

Столбцами матрицы BH^T служат векторы $Bh_1, Bh_2, \dots, Bh_r$. При этом для всякого $1 \leq i \leq r$

$$Bh_i = B \left(\frac{1}{\lambda_i} Ah_i \right) = \frac{1}{\lambda_i} (BA)h_i = 0.$$

Таким образом, векторы $B\xi$ и $H\xi$, имеющие, очевидно, нормальное совместное распределение вероятностей, некоррелированы, а значит и независимы. Поэтому независимы $\xi^T A \xi$ и $B\xi$.

14.57. Докажите, что если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \sim \mathcal{N}(0, I)$ и симметрические матрицы n -го порядка A и B удовлетворяют условию $AB = 0$, то квадратичные формы $\xi^T A \xi$ и $\xi^T B \xi$ независимы.

14.58. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ случайные величины,

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2.$$

Доказать, что:

$$1) \bar{\xi} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2;$$

2) $\bar{\xi}$ и S^2 независимы;

$$3) \sqrt{n-1} \frac{\bar{\xi} - \mu}{S} \sim t_{n-1}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\eta_i = \frac{1}{\sigma}(\xi_i - \mu) \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

причем, как нетрудно вычислить,

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta_i + \mu) = \bar{\eta} + \mu,$$

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta})^2 = \eta^T (I - B)^T (I - B) \eta,$$

где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$, а B — квадратная матрица n -го порядка, все элементы которой равны $1/n$.

Очевидно, что B — симметрическая идемпотентная матрица; следовательно,

$$\begin{aligned} (I - B)^T (I - B) &= (I - B)^2 = \\ &= I - 2B + B^2 = I - B. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \eta^T (I - B) \eta,$$

причем $I - B$ — идемпотентная матрица.

В таком случае (задача 14.54)

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_r^2,$$

где $r = \text{tr}(I - B) = n - 1$ — след матрицы $I - B$. А тот факт, что

$$\bar{\xi} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

был рассмотрен еще в § 13 (задача 13.25).

Тем самым решен первый вопрос задачи.

Для доказательства независимости величин $\bar{\xi}$ и S^2 достаточно установить, что независимы величины $\bar{\eta}$ и $\frac{nS^2}{\sigma^2}$; для этого, в

свою очередь, достаточно проверить, выполняется ли условие (задача 14.56)

$$\frac{1}{n} (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1) (I - B) = 0,$$

или

$$\frac{1}{n} (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1) \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Третий, заключительный вопрос задачи мы предлагаем решить читателям самостоятельно.

14.59. (Многомерное экспоненциальное (показательное) распределение вероятностей.) Как известно, если ξ и η — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины, то случайная величина $\zeta = \xi^2 + \eta^2$ имеет экспоненциальное (показательное) распределение с параметром $\lambda = 1/2$. Этот факт может быть положен в основу построения следующей модели многомерного экспоненциального распределения вероятностей.

Назовем n -мерным экспоненциальным (показательным) распределением вероятностей распределение случайного вектора

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T = (\xi_1^2 + \eta_1^2, \xi_2^2 + \eta_2^2, \dots, \xi_n^2 + \eta_n^2)^T,$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$ — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, K)$ случайные векторы.

1) Покажите, что всякий подвектор экспоненциально распределенного вектора ξ является экспоненциально распределенным.

2) Выразите ковариационную матрицу $K' = \|k'_{ij}\|$ случайного вектора ζ через ковариационную матрицу $K = \|k_{ij}\|$ соответствующих образующих ξ и η .

3) Докажите, что для экспоненциального распределения случайного вектора $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T$ попарная некоррелированность его составляющих $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ равносильна их совокупной независимости.

4) Непосредственными вычислениями установите, что условное математическое ожидание одной из составляющих двумерного показательного распределения случайного вектора относительно другой составляющей линейно по этой составляющей, если обе составляющие являются одинаково распределенными.

5) Докажите, что если описанные выше векторы ξ и η распределены по закону $\mathcal{N}(0, K = C^{-1})$, где $C = \|c_{ij}\|$, то характеристическая функция $\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ соответствующего экспоненциально распределенного случайного вектора ζ записывается в виде

$$\varphi(t) = \frac{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{11} - 2it_1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - 2it_2 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - 2it_n \end{vmatrix}}.$$

14.60. Какую модель многомерного распределения Коши можно предложить, используя идею задачи 14.59?

Вырожденное нормальное распределение вероятностей

Пусть $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n)^T$ — стандартный нормально распределенный случайный вектор, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$, K — произвольная неотрицательно определенная матрица n -го порядка и

$$\xi = \mu + K^{1/2} \tilde{\xi}.$$

Математическим ожиданием вектора ξ служит вектор μ , а ковариационной матрицей — матрица K . Характеристическая функция $\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ этого вектора записывается в виде

$$\varphi(t) = \exp \left(i t^T \mu - \frac{1}{2} t^T K t \right) \quad (14.33)$$

независимо от того, является или не является матрица K положительно определенной (вырождена или невырождена неотрицательно определенная матрица K).

В случае, когда неотрицательно определенная матрица K не является положительно определенной (т. е. удовлетворяет условию $\det K = 0$), говорят, что характеристическая функция (14.33) задает *вырожденное нормальное распределение* вероятностей с математическим ожиданием μ и ковариационной матрицей K .

Как и любое другое распределение вероятностей с вырожденной ковариационной матрицей, вырожденное нормальное распределение случайного вектора ξ характеризуется тем, что

$$P(\lambda_0 + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n = 0) = 1 \quad (14.34)$$

для некоторых вещественных $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Эти коэффициенты могут быть найдены из условий

$$\begin{aligned} M(\lambda_0 + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n) &= 0; \\ K\lambda &= 0, \end{aligned}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$.

14.61. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют вырожденное нормальное совместное распределение вероятностей с $M\xi_1 = M\xi_2 = M\xi_3 = 0$ и ковариационной матрицей K ; укажите линейную зависимость между величинами ξ_1, ξ_2, ξ_3 , если

$$1) K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad 2) K = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.62. Докажите, что если вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ имеет вырожденное нормальное распределение вероятностей с ковариационной матрицей K ранга r , $0 < r < n$, то существует r -мерный подвектор ξ' вектора ξ , имеющий невырожденное нормальное распределение и

$$\xi = A(\xi' - M\xi') + M\xi,$$

где A — некоторая матрица порядка $n \times r$.

14.63. Пусть $\mu \in \mathbb{R}^n$, а K — симметрическая квадратная матрица n -го порядка. Докажите, что если функция

$$\varphi(t) = \exp \left(i t^T \mu - \frac{1}{2} t^T K t \right)$$

является характеристической функцией некоторого n -мерного случайного вектора, то K — неотрицательно определенная матрица.

14.64. В задаче 14.6 утверждается, что если $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — случайные величины, имеющие невырожденное нормальное совместное распределение вероятностей с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационной матрицей $K = \|k_{ij}\|$, то

$$M(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = k_{12} k_{34} + k_{13} k_{24} + k_{14} k_{23}. \quad (*)$$

1) Покажите, что этот результат распространяется и на случай, когда случайные величины $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ имеют вырожденное нормальное распределение вероятностей.

2) Используя равенство (*), докажите, что

$$M(\xi_1^2 \xi_2 \xi_3) = k_{11} k_{23} + 2k_{12} k_{13},$$

$$M(\xi_1^2 \xi_2^2) = k_{11} k_{22} + 2k_{12}^2,$$

$$M(\xi_1^3 \xi_2) = 3k_{11} k_{12}$$

независимо от того, каким — невырожденным нормальным или вырожденным нормальным — является распределение вероятностей случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $K = \|k_{ij}\|$.

Разные задачи

14.65. Вычислите интегралы:

$$1) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp \{-3x^2 - 4x(y-7) - 2(y-7)^2\} dx dy;$$

$$2) \iiint_{\mathbb{R}^3} \exp \left\{ -\frac{1}{4} [(x+1)^2 + 10y^2 + 30(z-2)^2 - 6(x+1)y + 4(x+1)(z-2) - 2y(z-2)] \right\} dx dy dz.$$

14.66. Для нормально распределенного случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ заданы плотности вероятности всех его двумерных подвекторов:

$$f_{12}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(x_1 - 2)^2 + 2(x_1 - 2)(x_2 + 3) + 2(x_2 + 3)^2] \right\},$$

$$f_{13}(x_1, x_3) = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{12} [5(x_1 - 2)^2 + 4(x_1 - 2)x_3 + 2x_3^2] \right\},$$

$$f_{23}(x_2, x_3) = \frac{1}{2\sqrt{5}\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{10} [5(x_2 + 3)^2 + x_3^2] \right\}.$$

Найдите плотность вероятности $f(x_1, x_2, x_3)$ данного случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$, установив попутно, что условия задачи непротиворечивы.

14.67. Однозначно ли восстанавливается плотность вероятности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ по заданным плотностям вероятности всех его $(n-1)$ -мерных подвекторов:

- а) в общем случае;
- б) в случае, когда ξ — нормально распределенный случайный вектор?

14.68. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — плотность n -мерного нормального распределения вероятностей и

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \beta x_1 x_2 \cdots x_n & \text{при } x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1, \\ 0 & \text{при } x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 1. \end{cases}$$

Докажите, что константу β можно выбрать так, что функция

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

будет плотностью вероятности некоторого n -мерного случайного вектора ξ , распределение которого отлично от нормального, хотя все его $(n-1)$ -мерные подвекторы имеют нормальное распределение вероятностей.

14.69. Как связаны между собой энтропии нормального случайного вектора ξ и вектора $\eta = Q\xi$, если Q — ортогональная матрица?

14.70. Для независимых случайных величин $\xi \sim \mathcal{N}(0, 9)$ и $\eta \sim \mathcal{N}(0, 4)$ найдите вероятности:

- 1) $P(\xi < \eta)$; 2) $P(2|\xi| < 3\sqrt{3}|\eta|)$; 3) $P(2|\xi| > 3\sqrt{3}\eta)$.

14.71. Для случайных величин ξ и η , имеющих нормальное совместное распределение вероятностей с математическими

ожиданиями $M\xi = M\eta = 0$, дисперсиями $D\xi = D\eta = 1$ и коэффициентом корреляции $\rho = 0,8$, вычислите вероятности:

$$1) P(\xi_1 < 2\xi_2); \quad 2) P(|\xi_1| < 2|\xi_2|); \quad 3) P(|\xi_1| > \pi|\xi_2|).$$

14.72. Случайные величины ξ и η имеют нормальное совместное распределение вероятностей с математическими ожиданиями $M\xi = M\eta = 0$, дисперсиями $D\xi = D\eta = 1$ и коэффициентом корреляции ρ . Вычислите

$$M|\xi^2 - \eta^2|.$$

14.73. Верно ли, что если условное математическое ожидание $M(\eta|\xi = x)$ есть линейная функция аргумента x , то случайный вектор $(\xi, \eta)^T$ распределен нормально?

14.74. Предположим, что случайные величины ξ и η с совместным распределением, отличным от нормального, имеют математические ожидания μ и ν , дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 соответственно и коэффициент корреляции ρ . Доказать, что если условное математическое ожидание $M(\eta|\xi = x)$ представляет собой линейную функцию аргумента x , то

$$M(\eta|\xi = x) = \nu + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu),$$

как и в случае нормального совместного распределения данных величин.

14.75. (Линейная аппроксимация одной случайной величины другой случайной величиной.) Докажите, что если $M\xi = \mu$, $M\eta = \nu$, $D\xi = \sigma_1^2$, $D\eta = \sigma_2^2$ и коэффициент корреляции величин ξ и η равен ρ , то для всяких $a, b \in \mathbb{R}$

$$M(\eta - a\xi - b)^2 \geq M \left[\eta - \left(\nu + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\xi - \mu) \right) \right]^2.$$

14.76. Как распределена случайная величина

$$\eta = \frac{\xi_1 + \xi_2 \xi_3}{\sqrt{1 + \xi_3^2}},$$

если ξ_1, ξ_2 и ξ_3 — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины?

14.77. Условное распределение вероятностей любой из случайных величин ξ и η при фиксированной другой величине является нормальным распределением. Верно ли, что величины ξ и η имеют нормальное совместное распределение вероятностей?

14.78. Докажите, что если случайные величины ξ и η имеют нормальное совместное распределение вероятностей $M\xi = M\eta = 0$, $D\xi = D\eta = 1$, $\text{cov}(\xi, \eta) = \rho$, то при четной сумме $m + n$ математическое ожидание $M(\xi^m \eta^n)$ представляет собой многочлен относительно ρ степени $k = \min(m, n)$.

14.79. Докажите, что если ξ и η — независимые стандартные нормальные величины, то для всякого натурального n

$$M(\xi + i\eta)^n = 0$$

(i — мнимая единица: $i^2 = -1$).

14.80. Известно, что $(\xi, \eta, \zeta)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, где

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

При каких значениях x и y

$$M(\zeta | \xi = x, \eta = y) = M\zeta?$$

14.81. В условиях задачи 14.80 найдите x , y и z из системы уравнений

$$\begin{cases} M(\zeta | \xi = x, \eta = y) = M\zeta, \\ M(\eta | \xi = x, \zeta = z) = M\eta, \\ M(\xi | \eta = y, \zeta = z) = M\xi. \end{cases}$$

14.82. Докажите, что приведенная в задаче 14.81 система трех уравнений относительно неизвестных x, y и z совместна для любого нормально распределенного случайного вектора $(\xi, \eta, \zeta)^T$. Всегда ли она имеет единственное решение?

14.83. Известно, что случайные величины ξ, η и ζ имеют нормальное совместное распределение вероятностей, причем η и ζ независимы. Верно ли, что с вероятностью 1:

$$1) M(\zeta | \eta) = M(\zeta); \quad 2) M(\zeta | \xi, \eta) = M(\zeta | \xi)?$$

14.84. Случайный вектор $(\xi, \eta, \zeta)^T$ имеет нормальное распределение вероятностей с ковариационной матрицей

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислите количество информации о величине ζ , содержащейся: в случайной величине ξ ; в случайной величине η ; в случайном векторе $(\xi, \eta)^T$.

14.85. Известно, что $(\xi, \eta, \zeta)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, где

$$\mu = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислите условные вероятности:

- 1) $P(|\zeta| < 2 | \xi = -2, \eta = -3)$; 4) $P(|\eta| > 6 | \xi = 0, \zeta = 1/2)$;
- 2) $P(-2 < \zeta < 0 | \xi = 100)$; 5) $P(\eta + 11 < 0 | \xi = 3)$;
- 3) $P(\zeta > 3 | \eta = 3)$; 6) $P(-4 < \eta < 2 | \zeta = 2)$.

14.86. Известно, что $(\xi, \eta, \zeta)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K)$, где

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислите

$$M((\xi - 2\eta) | \zeta = 2) \quad \text{и} \quad D((\xi - 2\eta) | \zeta = 2).$$

14.87. Известно, что $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{100}$ — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(1, 1)$ случайные величины. Пусть

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}, \quad \eta_2 = \xi_{31} + \xi_{32} + \dots + \xi_{100}.$$

Найдите плотность вероятности вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$.

14.88. Докажите, что если случайные величины ξ и η имеют нормальное совместное распределение вероятностей, $M\xi = M\eta = 0$, $D\xi = D\eta = 1$, $\text{cov}(\xi, \eta) = \rho$, то случайная величина

$$\zeta = \xi^2 - 2\rho\xi\eta + \eta^2$$

распределена по экспоненциальному закону. Чему равен параметр этого экспоненциального распределения?

14.89. Известно, что ξ и η — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины. Вычислите

$$M \min(\xi, \eta) \quad \text{и} \quad M \max(\xi, \eta).$$

14.90. Известно, что ξ, η, ζ — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины. Вычислите средний «размах» данной тройки случайных величин, т. е.

$$M[\max(\xi, \eta, \zeta) - \min(\xi, \eta, \zeta)].$$

14.91. Известно, что случайные величины ξ и η имеют нормальное совместное распределение вероятностей, причем

$$M\xi = M\eta = 0, \quad D\xi = D\eta = 1, \quad \text{cov}(\xi, \eta) = \rho.$$

Вычислите

$$M \min(\xi, \eta) \quad \text{и} \quad M \max(\xi, \eta).$$

14.92. Докажите, что если $M\xi = M\eta = 0$, $D\xi = D\eta = 1$ и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η равен ρ , то

$$M \max(\xi^2, \eta^2) \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2};$$

в случае нормального совместного распределения величин ξ и η

$$M \max(\xi^2, \eta^2) = 1 + \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \rho^2}.$$

14.93. Пусть каждый из n -мерных случайных векторов ξ и η имеет нормальное распределение вероятностей, причем хотя бы один из них — невырожденное нормальное распределение. Докажите, что существует линейное преобразование, приводящее каждый из данных двух векторов в n -мерный случайный вектор с независимыми составляющими.

Проиллюстрируйте это на примере нормально распределенных случайных векторов ξ и η с ковариационными матрицами

$$K_\xi = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad K_\eta = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

14.94. *Полиномами Эрмита* называются полиномы

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть ξ и η — случайные величины, имеющие нормальное совместное распределение вероятностей с параметрами

$$M\xi = M\eta = 0, \quad D\xi = D\eta = 1, \quad \text{cov}(\xi, \eta) = \rho.$$

Докажите, что ковариационной матрицей случайного вектора

$$\zeta = \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} H_n(\xi), \quad \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n(\eta) \right)^T$$

служит матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho^n \\ \rho^n & 1 \end{pmatrix}.$$

14.95. Пусть

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \sim \mathcal{N}(\mu, K);$$

$$\xi^* = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \sim \mathcal{N}(\mu^*; K^*),$$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T, \quad \mu^* = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T;$$

$$K = \|k_{ij}\|_{i,j=1}^n, \quad K^* = \|k_{ij}\|_{i,j=0}^n;$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Докажите, что:

$$1) \mathbf{M} \left(e^{\lambda^T \xi} \right) = e^{\lambda^T \mu + \frac{1}{2} \lambda^T K \lambda};$$

$$2) \mathbf{M} \left(e^{\lambda^T \xi} \prod_{i=1}^n \xi_i \right) = \mathbf{M} \left(e^{\lambda^T \xi} \right) \mathbf{M} \left(\prod_{i=1}^n \eta_i \right),$$

$$\text{где } \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T \sim \mathcal{N} \left(\mu - \frac{1}{2} K \lambda, K \right);$$

$$3) \mathbf{M} \left(e^{\xi_0} \prod_{i=1}^n \xi_i \right) = \mathbf{M} \left(e^{\xi_0} \right) \mathbf{M} \left(\prod_{i=1}^n \zeta_i \right),$$

где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T$ — нормально распределенный случайный вектор с ковариационной матрицей K (как и вектор ξ) и математическими ожиданиями

$$\mathbf{M} \zeta_i = \mu_i + k_{0i}.$$

14.96. Докажите, что если ξ и η — независимые одинаково распределенные по закону $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины, то

$$\mathbf{M} (\xi^2 + i \xi \eta)^n = n!$$

Часть IV

Предельные теоремы теории вероятностей

§ 15. Виды вероятностной сходимости

Сходимость по вероятности и сходимость почти наверное (с вероятностью 1)

О п р е д е л е н и е 15.1. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится к случайной величине ξ *по вероятности* (записывается: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$), если для всякого $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) = 0. \quad (15.1)$$

Условие (15.1) равносильно условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| < \epsilon) = 1. \quad (15.2)$$

Очевидно, всякая подпоследовательность $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots$ последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$, сходящейся по вероятности к ξ , сходится по вероятности к ξ .

О п р е д е л е н и е 15.2. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится к случайной величине ξ *почти наверное*, или *с вероятностью 1* (записывается: $\xi_n \xrightarrow{пн} \xi$), если

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right) = 1. \quad (15.3)$$

Соотношение (15.3) равносильно соотношению

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \neq \xi(\omega)\right) = 0. \quad (15.4)$$

Ниже перечисляются и некоторые другие соотношения, равносильные соотношению (15.3) и отличающиеся от него тем, что в соответствующих терминах раскрывают понятие предела и используют свойство непрерыв-

ности вероятности:

$$P\left(\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \left(|\xi_m - \xi| < \frac{1}{r}\right)\right) = 1; \quad (15.5)$$

для всякого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} (|\xi_m - \xi| < \varepsilon)\right) = 1, \quad (15.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} (|\xi_m - \xi| < \varepsilon)\right) = 1, \quad (15.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{m \geq n} |\xi_m - \xi| < \varepsilon\right) = 1. \quad (15.8)$$

Каждое из соотношений (15.5)–(15.8) порождает двойственное соотношение:

$$P\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left(|\xi_m - \xi| \geq \frac{1}{r}\right)\right) = 0; \quad (15.9)$$

для всякого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} (|\xi_m - \xi| \geq \varepsilon)\right) = 0, \quad (15.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} (|\xi_m - \xi| \geq \varepsilon)\right) = 0, \quad (15.11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{m \geq n} |\xi_m - \xi| \geq \varepsilon\right) = 0. \quad (15.12)$$

Очевидно, всякая подпоследовательность $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots$ последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$, сходящейся почти наверное к ξ , сходится почти наверное к ξ .

Сравнение соотношений (15.1) и (15.11) или (15.2) и (15.7) приводит к следующей импликации:

$$(\xi_n \xrightarrow{pn} \xi) \implies (\xi_n \xrightarrow{p} \xi). \quad (15.13)$$

Т е о р е м а 15.1. Из сходимости последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ почти наверное к случайной величине ξ следует сходимость данной последовательности по вероятности к этой случайной величине.

Импликация (15.13) необратима: из $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, вообще говоря, не следует, что $\xi_n \xrightarrow{pn} \xi$.

Приведенные выше соотношения показывают, что исследование на

сходимость последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ к ξ связывается с рассмотрением последовательности случайных событий

$$|\xi_1 - \xi| \geq \varepsilon, |\xi_2 - \xi| \geq \varepsilon, \dots, |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon, \dots \quad (15.14)$$

Взаимно противоположные события

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} (|\xi_m - \xi| \geq \varepsilon) \quad \text{и} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} (|\xi_m - \xi| < \varepsilon),$$

как нетрудно понять, означают, что произойдет бесконечное и, соответственно, конечное множество событий из числа всех событий последовательности (15.14). Таким образом, $\xi_n \xrightarrow{ПВ} \xi$ тогда и только тогда, когда бесконечно много событий из числа событий (15.14) происходит с вероятностью 0 (см. соотношение (15.10)).

Л е м м а 15.1 (лемма Бореля-Кантелли). Пусть $A_1, A_2, \dots$ — последовательность случайных событий и

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,$$

так что A — случайное событие, состоящее в том, что произойдет бесконечно много событий из числа $A_1, A_2, \dots$.

1) Если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, то $P(A) = 0$.

2) Если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ и случайные события $A_1, A_2, \dots$ независимы, то $P(A) = 1$.

При построении примеров и контрпримеров на сходимость часто используются приводимые ниже теоремы — простые следствия леммы Бореля-Кантелли.

Т е о р е м а 15.2. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) < \infty, \quad (15.15)$$

для всякого $\varepsilon > 0$, то

$$\xi_n \xrightarrow{ПВ} \xi.$$

Т е о р е м а 15.3. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - C| \geq \varepsilon_0) = \infty, \quad (15.16)$$

то последовательность $\{\xi_n\}$ не сходится почти наверное к постоянной величине C .

Простым следствием теорем 15.2 и 15.3 служит следующая теорема.

Т е о р е м а 15.4. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимых случайных величин сходится почти наверное к постоянной величине C тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - C| \geq \varepsilon) < \infty.$$

О п р е д е л е н и е 15.3. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ называется:

- 1) *фундаментальной по вероятности*, если для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi_m| \geq \varepsilon) = 0;$$

- 2) *фундаментальной почти наверное*, если

$$P\left(\lim_{n, m \rightarrow \infty} |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \neq 0\right) = 0.$$

Т е о р е м а 15.5. Для того, чтобы последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходилась к случайной величине ξ по вероятности (почти наверное), необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной по вероятности (почти наверное).

15.1. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ и $\xi_n \xrightarrow{P} \xi'$, то

$$P(\xi \neq \xi') = 0$$

(единственность предела по вероятности).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что

$$\{\xi \neq \xi'\} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \left\{|\xi - \xi'| \geq \frac{1}{r}\right\}.$$

Далее, имеем (для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$)

$$\begin{aligned} P(|\xi - \xi'| \geq \varepsilon) &= P(|(\xi_n - \xi') + (\xi - \xi_n)| \geq \varepsilon) \leq \\ &\leq P\left(\left(|\xi_n - \xi'| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \leq \\ &\leq P\left(|\xi_n - \xi'| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Переход в этой цепочке неравенств к пределу при $n \rightarrow \infty$ дает

$$P(|\xi - \xi'| \geq \varepsilon) = 0.$$

Отсюда, в свою очередь, получаем

$$\begin{aligned} P(\xi \neq \xi') &= P\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} \left(|\xi - \xi'| \geq \frac{1}{r}\right)\right) \leq \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} P\left(|\xi - \xi'| \geq \frac{1}{r}\right) = 0. \end{aligned}$$

15.2. Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{пн} \xi$ и $\xi_n \xrightarrow{пн} \xi'$, то

$$P(\xi \neq \xi') = 0$$

(единственность предела почти наверное).

15.3. Докажите, что если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — (неслучайные) числовые последовательности и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, а ξ — произвольная случайная величина, то

$$a_n \xi + b_n \xrightarrow{пн} a\xi + b.$$

15.4. Пусть ξ — произвольная случайная величина и

$$\xi_n = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq n; \\ 0, & \text{если } |\xi| > n. \end{cases}$$

Докажите, что

$$\xi_n \xrightarrow{пн} \xi.$$

15.5. Пусть $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ — кусочно непрерывные функции и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Докажите, что для всякой случайной величины ξ

$$f_n(\xi) \xrightarrow{пн} f(\xi).$$

15.6. Известно, что $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$. Докажите, что

$$2\xi_n - 3\eta_n \xrightarrow{P} 2\xi - 3\eta.$$

Доказательство. Для всякого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P(|(2\xi_n - 3\eta_n) - (2\xi - 3\eta)| \geq \varepsilon) &= \\ &= P(|(2\xi_n - 2\xi) - (3\eta_n - 3\eta)| \geq \varepsilon) \leq \\ &\leq P\left(\left(2|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(3|\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \leq \\ &\leq P\left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) + P\left(|\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{6}\right). \end{aligned}$$

Предельный переход при $n \rightarrow \infty$ дает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|(2\xi_n - 3\eta_n) - (2\xi - 3\eta)| \geq \varepsilon) = 0.$$

А это и означает, что $2\xi_n - 3\eta_n \xrightarrow{P} 2\xi - 3\eta$.

15.7. Известно, что $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$. Докажите, что $2\xi_n - 3\eta_n \xrightarrow{P} 2\xi - 3\eta$.

15.8. Известно, что $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$.

1) Докажите, что для любых действительных чисел a , b и c

$$a\xi_n + b\eta_n + c \xrightarrow{P} a\xi + b\eta + c.$$

2) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение относительно сходимости почти наверное.

15.9. Докажите, что если $\xi_n - \eta_n \xrightarrow{P} 0$ и $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то $\eta_n \xrightarrow{P} \xi$.

15.10. Известно, что $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

1) Докажите, что

$$|\xi_n| \xrightarrow{P} |\xi|.$$

2) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение относительно сходимости почти наверное.

15.11. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует $A > 0$, такое, что при любом натуральном n

$$P(|\xi_n| \geq A) < \varepsilon.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} P(|\xi_n| \geq A) &= P(|(\xi_n - \xi) + \xi| \geq A) \leq \\ &\leq P\left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{A}{2}\right) + P\left(|\xi| \geq \frac{A}{2}\right). \end{aligned}$$

Сначала по заданному $\varepsilon > 0$ выберем A_0 так, чтобы выполнялось условие $P\left(|\xi| \geq \frac{A_0}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, а затем найдем n_0 такое, что при $n > n_0$

$$P\left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{A_0}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В результате получим для всех $n > n_0$

$$P\left(|\xi_n| \geq A_0\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Если это соотношение верно и при $1 \leq n \leq n_0$, то в качестве искомого A можно выбрать A_0 . В противном случае выберем A_i ($1 \leq i \leq n_0$) из условий

$$P\left(|\xi_i| \geq A_i\right) < \varepsilon,$$

а затем положим

$$A = \max(A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n_0}).$$

15.12. Верно ли, что если $\xi_n \xrightarrow{pn} \xi$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует $A > 0$ такое, что $P\left(|\xi_n| \geq A\right) < \varepsilon$ при любом n ?

15.13. Покажите, что если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует $A > 0$ такое, что

$$P\left(\left(|\xi_n| \geq A\right) \cup \left(|\xi| \geq A\right)\right) < \varepsilon.$$

15.14. Приведите пример последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, таких, что для всякого $\varepsilon > 0$, всякого натурального n и некоторого $A > 0$

$$P\left(|\xi_n| \geq A\right) < \varepsilon,$$

но ξ_n не сходится по вероятности ни к какой случайной величине.

15.15. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$, то

$$\xi_n \eta_n \xrightarrow{P} \xi \eta.$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} P(|\xi_n \eta_n - \xi \eta| \geq \varepsilon) &= \\ &= P(|(\xi_n \eta_n - \xi_n \eta) + (\xi_n \eta - \xi \eta)| \geq \varepsilon) \leq \\ &\leq P(|\xi_n| |\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|\eta| |\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}). \end{aligned}$$

Покажем, что каждая из полученных двух вероятностей является бесконечно малой при $n \rightarrow \infty$. С этой целью по заданному $\varepsilon > 0$ выберем $A > 0$ так, чтобы для всякого натурального n выполнялись соотношения (см. задачу 15.13)

$$P(|\xi_n| \geq A) < \varepsilon, \quad P(|\eta| \geq A) < \varepsilon.$$

Это дает:

$$\begin{aligned} P(|\xi_n| |\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}) &= \\ &= P(|\xi_n| |\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}; |\xi_n| \geq A) + \\ &\quad + P(|\xi_n| |\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}; |\xi_n| < A) \leq \\ &\leq P(|\xi_n| \geq A) + P(|\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2A}) \leq \\ &\leq \varepsilon + P(|\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2A}). \end{aligned}$$

Аналогично выводим, что

$$P(|\eta| |\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \leq \varepsilon + P(|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2A}).$$

Дальнейшее — очевидно.

15.16. Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{пн} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{пн} \eta$, то

$$\xi_n \eta_n \xrightarrow{пн} \xi \eta.$$

15.17. Докажите, что если $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{P} 0$, то $\xi_n^2 \xrightarrow{P} \xi^2$.

15.18. Докажите, что

$$(\xi_n \xrightarrow{P} a \neq 0) \implies \left(\frac{1}{\xi_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{a} \right)$$

(a — действительное число).

15.19. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ такова, что для всякого $n = 1, 2, \dots$

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} n^\alpha & 0 \\ 1/n^\beta & 1 - 1/n^\beta \end{pmatrix},$$

где α и β — заданные положительные числа. Доказать, что

$$\xi_n \xrightarrow{P} 0,$$

а при $\beta > 1$

$$\xi_n \xrightarrow{P} 0.$$

Показать также, что если величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и $0 < \beta \leq 1$, то

$$\xi_n \not\xrightarrow{P} 0.$$

Решение. При достаточно большом n для любых заданных положительных чисел $\varepsilon, \alpha, \beta$

$$P(|\xi_n| \geq \varepsilon) = P(\xi_n = n^\alpha) = \frac{1}{n^\beta} \rightarrow 0,$$

и, таким образом, $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ (несмотря на то, что отдельные значения величины ξ_n с ростом n оказываются сколь угодно большими). Если, к тому же, $\beta > 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geq \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta} < \infty.$$

Следовательно, по теореме 15.2 (см. с. 365) $\xi_n \xrightarrow{P} 0$.

При $0 < \beta \leq 1$ указанный ряд расходится. Поэтому при дополнительном предположении о независимости величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ рассматриваемая последовательность (в данном случае по теореме 15.3) не будет сходиться почти наверное (к нулю).

З а м е ч а н и е. Этот пример показывает, что импликация

$$(\xi_n \xrightarrow{P} \xi) \Rightarrow (\xi_n \xrightarrow{P} \xi)$$

необратима; из $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, вообще говоря, не следует, что $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

15.20. Покажите, что для всякой (неслучайной) бесконечно малой a_n , удовлетворяющей условию $a_n \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}$, существует последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$, сходящаяся почти наверное к некоторой случайной величине ξ и удовлетворяющая условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon)}{|a_n|} = C(\varepsilon) > 0.$$

(Иными словами, в случае $\xi_n \xrightarrow{pn} \xi$ вероятность $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon)$ при $n \rightarrow \infty$ может стремиться к нулю как угодно медленно — сравните это с теоремой 15.2, приведенной на с. 365).

15.21. Приведите пример, когда $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, причем:

- 1) $M\xi$ существует, а $M\xi_n$ не существует;
- 2) $M\xi_n$ существует, а $M\xi$ не существует;
- 3) не существует ни $M\xi_n$, ни $M\xi$;
- 4) существует $M\xi_n$, но не существует $\lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n$;
- 5) существуют $M\xi_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n$, $M\xi$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n \neq M\xi$.

15.22. Верно ли, что если $\xi_n \xrightarrow{P} 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} D\xi_n = 0$?

15.23. Известно, что $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} D\xi_n = \sigma^2 < \infty$. Каким может быть σ^2 ?

15.24. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины и для всякого $n = 1, 2, \dots$

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{P} 0$, но

$$\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \not\xrightarrow{P} 0.$$

Примечание. Приведенное утверждение интересно тем, что для (неслучайной) числовой последовательности $x_1, x_2, \dots$ из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = x.$$

Решение. То, что $\xi_n \xrightarrow{P} 0$, очевидно. Далее, введем следующие обозначения:

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n;$$

$$H_{kn} = \{\xi_k \neq 0, \xi_{k+1} = \xi_{k+2} = \dots = \xi_n = 0\}, \quad 1 \leq k < n,$$

$$H_{nn} = \{\xi_n \neq 0\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} < 1\right) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} < 1 \mid H_{kn}\right) \mathbf{P}(H_{kn}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\left(\frac{2^k}{n} \leq \frac{S_n}{n} < 1 \mid H_{kn}\right) \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\left(\frac{2^k}{n} < 1\right) \frac{1}{n} \leq \frac{\log_2 n}{n}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} < 1\right) = 0.$$

Следовательно, $\frac{S}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$; в противном случае для всякого $\varepsilon > 0$ должно было бы выполняться соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} < \varepsilon\right) = 1.$$

15.25. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ и $g(x)$ — непрерывная функция, то $g(\xi_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\xi)$.

Доказательство. Сначала по заданному $\varepsilon > 0$ выберем $A > 0$, такое, что при любом n

$$\mathbf{P}\left((|\xi_n| \geq A) \cup (|\xi| \geq A)\right) < \varepsilon$$

(см. задачу 15.13). Функция $g(x)$, будучи непрерывной на всей числовой прямой, является равномерно непрерывной на отрезке $[-A, A]$. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что если $x', x'' \in [-A, A]$ и $|x'' - x'| < \delta$, то $|g(x'') - g(x')| < \varepsilon$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(|g(\xi_n) - g(\xi)| \geq \varepsilon\right) &= \\ &= \mathbf{P}\left(\left(|g(\xi_n) - g(\xi)| \geq \varepsilon\right) \cap \left(|\xi_n| < A, |\xi| < A\right)\right) + \\ &+ \mathbf{P}\left(\left(|g(\xi_n) - g(\xi)| \geq \varepsilon\right) \cap \overline{\left(|\xi_n| < A, |\xi| < A\right)}\right) \leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(|\xi_n - \xi| \geq \delta\right) + \mathbf{P}\left((|\xi_n| \geq A) \cup (|\xi| \geq A)\right) \leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(|\xi_n - \xi| \geq \delta\right) + \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда и следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left(|g(\xi_n) - g(\xi)| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0,$$

или

$$g(\xi_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\xi).$$

15.26. Верно ли, что если $\xi_n \xrightarrow{nn} \xi$ и $g(x)$ — непрерывная функция, то $g(\xi_n) \xrightarrow{nn} g(\xi)$?

15.27. Известно, что $\xi_n \xrightarrow{P} C$ и $g(x)$ — функция, непрерывная в точке $x = C$. Докажите, что $g(\xi_n) \xrightarrow{P} g(C)$.

15.28. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные по закону $R(0, 1)$ случайные величины и

$$\xi'_n = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad \xi''_n = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

для $n = 1, 2, \dots$. Докажите, что

$$\xi'_n \xrightarrow{P} 0, \quad \xi''_n \xrightarrow{P} 1.$$

15.29. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и $P(\xi_1 < x) = F(x)$. Предположим, что для некоторых чисел a и b и всякого $\varepsilon > 0$

$$F(a) = 0, \quad F(a + \varepsilon) > 0;$$

$$F(b) = 1, \quad F(b - \varepsilon) < 1.$$

Докажите, что

$$\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \xrightarrow{P} a, \quad \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \xrightarrow{P} b.$$

15.30. Докажите, что если $M|\xi| < \infty$, то с вероятностью 1 произойдет лишь конечное множество событий вида $|\xi| \geq n$, где n — натуральное число.

15.31. Докажите, что если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — одинаково распределенные случайные величины, то

$$\frac{\xi_n}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

15.32. Докажите, что если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — одинаково распределенные случайные величины и $M|\xi_1| < \infty$, то

$$\frac{\xi_n}{n} \xrightarrow{nn} 0.$$

15.33. 1) Пусть $\xi_n = \xi$, где ξ — случайная величина, имеющая распределение Коши. Верно ли, что $\frac{\xi_n}{n} \xrightarrow{nn} 0$?

2) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные по закону Коши случайные величины. Верно ли, что $\frac{\xi_n}{n} \xrightarrow{nn} 0$?

15.34. Докажите, что последовательность независимых случайных величин может сходиться по вероятности лишь к постоянной величине.

Сходимость в среднем

О п р е д е л е н и е 15.4. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится к случайной величине ξ в среднем порядка $t > 0$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M|\xi_n - \xi|^t = 0. \quad (15.17)$$

Обратите внимание на то, что существования моментов $M|\xi_n|^t$ и $M|\xi|^t$ в этом соглашении не требуется.

Очевидно, что всякая бесконечная подпоследовательность последовательности, сходящейся в среднем к случайной величине ξ , сходится в среднем к ξ .

Неравенство Чебышева

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M|\xi|^t}{\varepsilon^t}, \quad (15.18)$$

$\varepsilon > 0, t > 0, M|\xi|^t < \infty$, приводит к следующему выводу.

Т е о р е м а 15.6. Из сходимости последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ в среднем порядка $t > 0$ к случайной величине ξ следует сходимость данной последовательности по вероятности к этой случайной величине.

Обратное утверждение неверно: существуют последовательности, сходящиеся по вероятности, но не сходящиеся в среднем.

Как в приложениях, так и в теории, особенно часто используется сходимость в среднем порядка 2. Такая сходимость называется сходимостью в среднем квадратическом и обозначается

$$\xi_n \xrightarrow{\text{СК}} \xi.$$

О п р е д е л е н и е 15.5. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ называется фундаментальной в среднем квадратическом, если $M(\xi_n - \xi_m)^2 \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Т е о р е м а 15.7. Для того, чтобы последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходилась в среднем квадратическом, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной в среднем квадратическом.

15.35. Докажите единственность предела последовательности случайных величин в среднем порядка $t > 0$.

15.36. Доказать, что если $M\xi^2 < \infty$, а $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — (неслучайные) числовые последовательности, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b,$$

то

$$a_n \xi + b_n \xrightarrow{\text{СК}} a\xi + b.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}\left((a_n\xi + b_n) - (a\xi + b)\right)^2 = \\ &= \mathbf{M}\left((a_n - a)\xi + (b_n - b)\right)^2 \leq 2\left(\mathbf{M}\left((a_n - a)\xi\right)^2 + (b_n - b)^2\right) = \\ &= 2\left((a_n - a)^2\mathbf{M}\xi^2 + 2(b_n - b)^2\right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}\left((a_n\xi + b_n) - (a\xi + b)\right)^2 = 0,$$

что и требовалось доказать.

15.37. Докажите следующие утверждения:

1) если $\xi_n \xrightarrow{\text{СК}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\text{СК}} \eta$, то для всяких $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a\xi_n + b\eta_n + c \xrightarrow{\text{СК}} a\xi + b\eta + c;$$

2) если $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $c_n \rightarrow c$, $\xi_n \xrightarrow{\text{СК}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\text{СК}} \eta$, то

$$a_n\xi_n + b_n\eta_n + c_n \xrightarrow{\text{СК}} a\xi + b\eta + c.$$

15.38. Верно ли, что если $\xi_n - \eta_n \xrightarrow{\text{СК}} 0$ и $\xi_n \xrightarrow{\text{СК}} \xi$, то $\eta_n \xrightarrow{\text{СК}} \xi$?

15.39. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{СК}} \xi$. Докажите, что:

1) если $\mathbf{M}\xi_n^2 < \infty$ для всех n , начиная с некоторого, то $\mathbf{M}\xi^2 < \infty$, причем $\mathbf{M}\xi_n^2 \rightarrow \mathbf{M}\xi^2$ при $n \rightarrow \infty$.

2) если $\mathbf{M}\xi^2 < \infty$, то $\mathbf{M}\xi_n^2 < \infty$ для всех n , начиная с некоторого, причем $\mathbf{M}\xi_n^2 \rightarrow \mathbf{M}\xi^2$ при $n \rightarrow \infty$.

15.40. Постройте пример, показывающий, что из соотношения $\mathbf{M}\xi_n^2 \rightarrow \mathbf{M}\xi^2 < \infty$ не следует, вообще говоря, что $\xi_n \xrightarrow{\text{СК}} \xi$.

15.41. Приведите пример, когда:

1) $\xi_n \xrightarrow{\text{ПН}} \xi$, но $\xi_n \not\xrightarrow{\text{СК}} \xi$;

2) $\xi_n \xrightarrow{\text{СК}} \xi$, но $\xi_n \not\xrightarrow{\text{ПН}} \xi$.

15.42. Приведите пример, показывающий, что импликация

$$\left(\xi_n \xrightarrow{\text{СК}} \xi\right) \Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{\text{Р}} \xi\right)$$

необратима.

15.43. Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{\text{ПН}} \xi$ и $\xi_n \xrightarrow{\text{СК}} \eta$, то $\mathbf{P}(\xi = \eta) = 1$.

15.44. Докажите, что если $0 < s < t$ и $\xi_n \rightarrow \xi$ в среднем порядка t , то $\xi_n \rightarrow \xi$ в среднем порядка s .

15.45. Пусть $M\xi_n = \mu_n$, $D\xi_n = \sigma_n^2$. Докажите, что если

$$\mu_n \rightarrow \mu, \quad \sigma_n^2 \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, то

$$\xi_n \xrightarrow{\text{ск}} \mu.$$

15.46. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ называется *равномерно ограниченной*, если существует $C > 0$, такое, что для всякого $n = 1, 2, \dots$

$$P(|\xi_n| \leq C) = 1.$$

Доказать, что если равномерно ограниченная последовательность случайных величин сходится по вероятности, то она сходится и в среднем квадратическом.

Доказательство. Прежде всего отметим, что если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ и $P(|\xi_n| \leq C) = 1$, то и $P(|\xi| \leq C) = 1$. Этот результат мы предлагаем читателям получить самостоятельно.

Далее, если I_H — индикатор случайного события H , то для всякого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} M(\xi_n - \xi)^2 &= \\ &= M\left((\xi_n - \xi)^2 I_{\{|\xi_n - \xi| \geq \delta\}}\right) + M\left((\xi_n - \xi)^2 I_{\{|\xi_n - \xi| < \delta\}}\right) \leq \\ &\leq 4C^2 P(|\xi_n - \xi| \geq \delta) + \delta^2 P(|\xi_n - \xi| < \delta) \leq \\ &\leq 4C^2 P(|\xi_n - \xi| \geq \delta) + \delta^2. \end{aligned}$$

Отсюда и получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\xi_n - \xi)^2 = 0.$$

15.47. Верно ли, что если равномерно ограниченная последовательность случайных величин сходится по вероятности, то она сходится и почти наверное?

15.48. Докажите, что если $g(x)$ — непрерывная ограниченная функция, то из $\xi_n \xrightarrow{\text{ск}} \xi$ следует, что $g(\xi_n) \xrightarrow{\text{ск}} g(\xi)$.

Можно ли в этом утверждении хотя бы одно из условий, накладываемых на функцию $g(x)$ — непрерывность и ограниченность — опустить?

Сходимость по распределению (слабая сходимость)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность случайных величин и

$$F_n(x) = P(\xi_n < x), \quad \varphi_n(t) = M e^{it\xi_n}.$$

Предположим, далее, что ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$ и характеристической функцией $\varphi(t)$:

$$F(x) = P(\xi < x), \quad \varphi(t) = M e^{it\xi}.$$

О п р е д е л е н и е 15.6. Последовательность $F_1(x), F_2(x), \dots$ функций распределения сходится в основном к функции распределения $F(x)$ (записывается: $F_n(x) \Rightarrow F(x)$), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

в каждой точке непрерывности предельной функции $F(x)$.

О п р е д е л е н и е 15.7. Последовательность $F_1(x), F_2(x), \dots$ функций распределения сходится слабо к функции распределения $F(x)$ (записывается: $F_n(x) \xrightarrow{w} F(x)$), если для всякой непрерывной ограниченной функции $g(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x),$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M g(\xi_n) = M g(\xi).$$

Т е о р е м а 15.8. Следующие три соотношения равносильны:

$$F_n(x) \Rightarrow F(x); \quad (15.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t); \quad (15.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M g(\xi_n) = M g(\xi) \quad (15.21)$$

для всякой непрерывной ограниченной функции $g(x)$.

О п р е д е л е н и е 15.8. В каждом из случаев, описываемых соотношениями (15.19)–(15.21), говорят, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится по распределению к случайной величине ξ , и пишут

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi.$$

По существу этот вид вероятностной сходимости касается не самих случайных величин, а их распределений вероятностей. Поэтому, говоря о такой сходимости последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ к случайной величине ξ , мы уже не обязаны (как это было в предыдущих пунктах) все указанные случайные величины рассматривать над одним и тем же вероятностным пространством.

Очевидно, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow{d} \xi'$, где ξ' — любая случайная величина, имеющая такое же распределение вероятностей, как и величина ξ .

В связи с (15.19) приведем следующий результат.

Т е о р е м а 15.9. Если $F_n(x) \Rightarrow F(x)$ и предельная функция распределения $F(x)$ непрерывна, то сходимость $F_n(x)$ к $F(x)$ равномерна по x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |F_n(x) - F(x)| = 0. \quad (15.22)$$

В связи с (15.20) полезно отметить следующее.

Т е о р е м а 15.10. Если последовательность характеристических функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ сходится к характеристической функции $\varphi(t)$ при любом вещественном t , то эта сходимость является равномерной на всяком конечном отрезке $[a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \leq t \leq b} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| = 0.$$

При решении некоторых задач используется следующий результат.

Т е о р е м а 15.11. Предел $\varphi(t)$ последовательности характеристических функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ является характеристической функцией тогда и только тогда, когда этот предел непрерывен в точке $t = 0$.

На с. 380 приведен обзор импликаций, связанных с разными видами вероятностной сходимости.

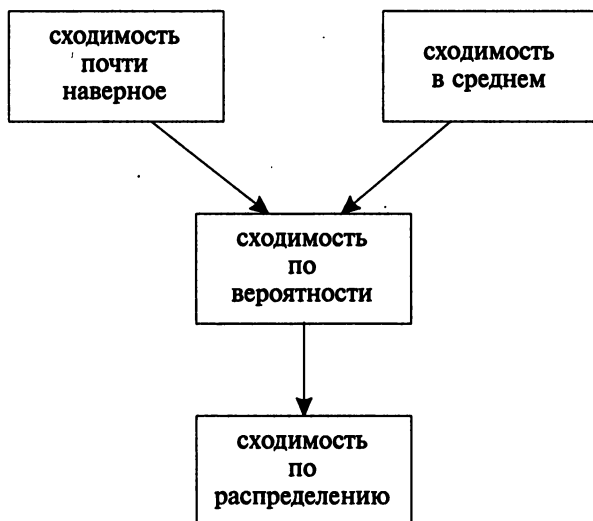
15.49. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — случайные величины, $a, a_1, a_2, \dots$, а также $b, b_1, b_2, \dots$ — вещественные числа. Доказать, что:

- 1) если $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$, то $a_n \xi + b_n \xrightarrow{d} a \xi + b$;
- 2) если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $a \xi_n + b \xrightarrow{d} a \xi + b$.

Р е ш е н и е (частично).

2) По известным свойствам характеристических функций

$$\varphi_{a\xi_n + b}(t) = e^{ibt} \varphi_{\xi_n}(at).$$



По условию же

$$\varphi_{\xi_n}(at) \longrightarrow \varphi_{\xi}(at).$$

Итак,

$$\varphi_{a\xi_n+b}(t) \longrightarrow e^{ibt} \varphi_{\xi}(at) = \varphi_{a\xi+b}(t),$$

а это и означает, что $a\xi_n + b \xrightarrow{d} a\xi + b$.

15.50. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $h(x)$ — непрерывная функция, то $h(\xi_n) \xrightarrow{d} h(\xi)$.

Доказательство элементарно: в случае $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ соотношение

$$Mg(h(\xi_n)) \longrightarrow Mg(h(\xi))$$

при $n \rightarrow \infty$ выполняется для всякой непрерывной ограниченной функции $g(x)$, поскольку функция $g(h(x))$ также является непрерывной ограниченной функцией.

15.51. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует $A > 0$ такое, что при любом натуральном n

$$P(|\xi_n| \geq A) < \varepsilon,$$

как и в случае, когда $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ (см. задачу 15.11).

Доказательство. Из $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ следует, что $|\xi_n| \xrightarrow{d} |\xi|$.
Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины $|\xi|$,
то для всякой точки x непрерывности этой функции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n| < x) = P(|\xi| < x),$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n| \geq x) = P(|\xi| \geq x).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Сначала выберем $A' > 0$ — точку непрерывности функции $F(x)$ — так, чтобы выполнялось условие

$$P(|\xi| \geq A') < \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем — номер n_0 так, чтобы было

$$|P(|\xi_n| \geq A') - P(|\xi| \geq A')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для всякого $n > n_0$ будет выполняться соотношение

$$P(|\xi_n| \geq A') < \varepsilon.$$

Наконец, выберем $A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_{n_0} > 0$ — точки непрерывности функции $F(x)$ — из условий

$$P(|\xi_k| \geq A_k) < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n_0.$$

Выбирая теперь $A = \max(A', A_1, A_2, \dots, A_{n_0})$, мы и добьемся того, чтобы соотношение

$$P(|\xi_n| \geq A) < \varepsilon$$

было верно для всякого натурального n .

15.52. Доказать импликацию

$$(\xi_n \xrightarrow{p} \xi) \implies (\xi_n \xrightarrow{d} \xi)$$

(Из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению).

Доказательство мы проведем тремя способами — по числу критериев (15.19)–(15.21) слабой сходимости.

Способ 1. Для всяких случайных величин ξ и η , заданных на одном вероятностном пространстве, и $\delta > 0$

$$F_\xi(x - \delta) - P(|\eta - \xi| \geq \delta) \leq F_\eta(x) \leq F_\xi(x + \delta) + P(|\eta - \xi| \geq \delta),$$

где $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$ — функции распределения случайных величин ξ и η соответственно (см. задачу 9.70).

Используем приведенное соотношение в случае, когда $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, полагая что $F_\xi(x) = F(x)$, $\eta = \xi_n$, и, стало быть, $F_\eta(x) = P(\xi_n < x) = F_n(x)$:

$$F(x - \delta) - P(|\xi_n - \xi| \geq \delta) \leq F_n(x) \leq F(x + \delta) + P(|\xi_n - \xi| \geq \delta).$$

Понятно, что при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_n(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \delta) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \delta) = 0.$$

Следовательно,

$$F(x - \delta) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x + \delta).$$

Поскольку $\delta > 0$ произвольно, для каждой точки x непрерывности функции $F(x)$ должно выполняться соотношение

$$F(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x).$$

Это и приводит к тому, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x).$$

Способ 2. Имея в виду критерий (15.20), выполним следующие преобразования (при $\delta > 0$):

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| &= \left| M(e^{it\xi_n} - e^{it\xi}) \right| = \\ &= \left| M e^{it\xi} (e^{it(\xi_n - \xi)} - 1) \right| \leq M \left| e^{it(\xi_n - \xi)} - 1 \right| = \\ &= M \left(\left| e^{it(\xi_n - \xi)} - 1 \right| I_{\{|\xi_n - \xi| < \delta\}} \right) + \\ &\quad + M \left(\left| e^{it(\xi_n - \xi)} - 1 \right| I_{\{|\xi_n - \xi| \geq \delta\}} \right) = \\ &= M_1 + M_2. \end{aligned}$$

Первое из слагаемых M_1 и M_2 мы оценим, используя неравенство $|e^{i\varphi} - 1| \leq |\varphi|$ при $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$M_1 \leq |t| \delta P(|\xi_n - \xi| < \delta) \leq |t| \delta.$$

Второе слагаемое может быть оценено следующим образом:

$$M_2 \leq 2P(|\xi_n - \xi| \geq \delta).$$

Итак,

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq |t|\delta + 2P(|\xi_n - \xi| \geq \delta),$$

что и приводит к (15.20), т. к. $\delta > 0$ произвольно, а $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

С п о с о б 3. Пусть $g(x)$ — непрерывная ограниченная функция. По заданному $\varepsilon > 0$ сначала выберем $A > 0$, такое, что $P((|\xi_n| > A) \cup (|\xi| > A)) < \varepsilon$ для всякого n , а затем $\delta > 0$ из условия равномерной непрерывности функции $g(x)$ на отрезке $[-A, A]$ (см. решение задачи 15.25). Далее положим:

$$H_1 = \{|\xi_n| \leq A, |\xi| \leq A, |\xi_n - \xi| < \delta\};$$

$$H_2 = \{|\xi_n| \leq A, |\xi| \leq A, |\xi_n - \xi| \geq \delta\};$$

$$H_3 = \{(|\xi_n| > A) \cup (|\xi| > A)\}.$$

Тогда, считая, что $|g(x)| \leq M$, найдем (I_H — индикатор события H):

$$\begin{aligned} |Mg(\xi_n) - Mg(\xi)| &\leq \\ &\leq M|g(\xi_n) - g(\xi)| = \sum_{k=1}^3 M(|g(\xi_n) - g(\xi)| I_{H_k}) \leq \\ &\leq \varepsilon P(H_1) + 2MP(H_2) + 2MP(H_3) \leq \\ &\leq \varepsilon + 2MP(|\xi_n - \xi| \geq \delta) + 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда и вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Mg(\xi_n) = Mg(\xi).$$

15.53. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\xi_n = (-1)^n \xi$. Покажите, что

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi, \quad \text{но} \quad \xi_n \not\xrightarrow{P} \xi.$$

(Таким образом, импликация $(\xi_n \xrightarrow{P} \xi) \implies (\xi_n \xrightarrow{d} \xi)$ необратима.)

15.54. Доказать, что если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$, а также постоянная величина C заданы на одном вероятностном пространстве, то

$$(\xi_n \xrightarrow{P} C) \iff (\xi_n \xrightarrow{d} C).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация

$$(\xi_n \xrightarrow{P} C) \implies (\xi_n \xrightarrow{d} C)$$

— это частный случай импликации

$$(\xi_n \xrightarrow{P} \xi) \implies (\xi_n \xrightarrow{d} \xi),$$

рассмотренной в задаче 15.52. Остается доказать, что если

$\xi_n \xrightarrow{d} C$, то (в условиях задачи) $\xi_n \xrightarrow{P} C$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P(|\xi_n - C| < \varepsilon) &= P(C - \varepsilon < \xi_n < C + \varepsilon) = \\ &= P(C - \varepsilon \leq \xi_n < C + \varepsilon) - P(\xi_n = C - \varepsilon) = \\ &= (F_n(C + \varepsilon) - F_n(C - \varepsilon)) - (F_n(C - \varepsilon + 0) - F_n(C - \varepsilon)) = \\ &= F_n(C + \varepsilon) - F_n(C - \varepsilon + 0). \end{aligned}$$

По условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < C, \\ 1 & \text{при } x > C. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - C| < \varepsilon) = 1 - 0 = 1.$$

А это и означает, что $\xi_n \xrightarrow{P} C$.

15.55. Покажите на примерах, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и хотя бы одно из условий — непрерывность и ограниченность — для функции $g(x)$ не выполняется, то соотношение

$$Mg(\xi_n) \rightarrow Mg(\xi)$$

может не выполняться.

15.56. Верно ли, что:

- 1) если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то $\xi_n - \xi \xrightarrow{P} 0$;
- 2) если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $\xi_n - \xi \xrightarrow{d} 0$;
- 3) если $\xi_n \xrightarrow{d} C$, то $\xi_n - C \xrightarrow{d} 0$?

15.57. Покажите, что из $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$ не следует, вообще говоря, ни одно из соотношений: $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + \eta$, $\xi_n \eta_n \xrightarrow{d} \xi \eta$.

15.58. Верно ли, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $\xi_n^k \xrightarrow{d} \xi^k$ при любом натуральном k ?

15.59. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{d} C$, то

- 1) $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + C$;
- 2) $\xi_n \eta_n \xrightarrow{d} C\xi$

(сравните с задачей 15.57).

Доказательство. 1) Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & \left| M e^{it(\xi_n + \eta_n)} - M e^{it(\xi + C)} \right| = \\ & = \left| \left(M e^{it(\xi_n + \eta_n)} - M e^{it(\xi_n + C)} \right) + \left(M e^{it(\xi_n + C)} - M e^{it(\xi + C)} \right) \right| \leq \\ & \leq M \left| e^{it(\eta_n - C)} - 1 \right| + \left| M e^{it\xi_n} - M e^{it\xi} \right|. \end{aligned}$$

Выражение $\left| M e^{it\xi_n} - M e^{it\xi} \right|$ представляет собой модуль разности характеристических функций случайных величин ξ_n и ξ и при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю при любом t , так как (по условию) $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

Далее, при любом $\delta > 0$

$$\begin{aligned} M \left| e^{it(\eta_n - C)} - 1 \right| &= \\ &= M \left| \left(e^{it(\eta_n - C)} - 1 \right) I_{\{|\eta_n - C| < \delta\}} \right| + \\ &+ M \left| \left(e^{it(\eta_n - C)} - 1 \right) I_{\{|\eta_n - C| \geq \delta\}} \right| \leq \\ &\leq M \left(|t| |\eta_n - C| I_{\{|\eta_n - C| < \delta\}} \right) + 2M I_{\{|\eta_n - C| \geq \delta\}} \leq \\ &\leq \delta |t| + 2P(|\eta_n - C| \geq \delta). \end{aligned}$$

Из $\eta_n \xrightarrow{d} C$ следует, что $\eta_n \xrightarrow{P} C$ (задача 15.54), т. е.

$$P(|\eta_n - C| \geq \delta) \rightarrow 0$$

для всякого $\delta > 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Все это приводит к заключению о том, что для всякого $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M e^{it(\xi_n + \eta_n)} = M e^{it(\xi + C)}.$$

Иными словами, последовательность характеристических функций величин $\xi_n + \eta_n$ сходится к характеристической функции величины $\xi + C$. Но в таком случае

$$\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + C.$$

2) Прежде всего рассмотрим случай, когда $C = 0$. Для всяких $\delta > 0$ и $A > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} P(|\xi_n \eta_n| \geq \delta) &= \\ &= P(|\xi_n \eta_n| \geq \delta, |\xi_n| \geq A) + P(|\xi_n \eta_n| \geq \delta, |\xi_n| < A) \leq \\ &\leq P(|\xi_n| \geq A) + P(|\eta_n| \geq \frac{\delta}{A}). \end{aligned}$$

При заданном $\varepsilon > 0$ сначала выберем $A > 0$ так, чтобы выполнялось условие $P(|\xi_n| \geq A) < \frac{\varepsilon}{2}$ (задача 15.51), а затем — номер n_0 , такой, что при $n > n_0$

$$P\left(|\eta_n| \geq \frac{\delta}{A}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

(ведь $\eta_n \xrightarrow{d} 0$, и, стало быть, $\eta_n \xrightarrow{P} 0$). В результате получим

$$P(|\xi_n \eta_n| \geq \delta) < \varepsilon$$

для всякого $n > n_0$. Но в таком случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n \eta_n| \geq \delta) = 0,$$

или $\xi_n \eta_n \xrightarrow{P} 0$, а значит и $\xi_n \eta_n \xrightarrow{d} 0$.

При произвольном C имеем:

$$C\xi_n \xrightarrow{d} C\xi, \quad \xi_n(\eta_n - C) \xrightarrow{d} 0.$$

Отсюда, по доказанному выше,

$$\xi_n \eta_n = C\xi_n + \xi_n(\eta_n - C) \xrightarrow{d} C\xi + 0 = C\xi.$$

15.60. Пусть при $n = 1, 2, \dots$

$$F_n(x) = P(\xi_n < x), \quad G_n(x) = P(\eta_n < x), \quad F(x) = P(\xi < x).$$

Верно ли, что если $\xi_n - \eta_n \xrightarrow{d} 0$ и $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, то $G_n(x) \Rightarrow F(x)$?

15.61. Докажите, что если $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $a_n \xi_n + b_n \xrightarrow{d} a\xi + b$.

15.62. Верно ли, что последовательность независимых случайных величин может сходиться по распределению лишь к постоянной величине? Сравните с задачей 15.34.

15.63. Докажите, что если последовательность экспоненциально распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится по распределению к случайной величине ξ , то $M\xi_n \rightarrow M\xi$ при $n \rightarrow \infty$. Каким при этом может быть распределение предельной величины ξ ?

15.64. Докажите, что последовательность нормальных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ может сходиться по распределению

лишь к нормальной случайной величине ξ (возможно, вырожденной). При этом

$$M\xi_n \rightarrow M\xi, \quad D\xi_n \rightarrow D\xi$$

при $n \rightarrow \infty$.

15.65. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет экспоненциальное распределение вероятностей с параметром λ , и

$$\eta_n = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Докажите, что последовательность $\eta_1, \eta_2, \dots$ сходится почти наверное и в среднем квадратическом.

15.66. Пусть $\xi_n \sim R\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ и $F_n(x) = P(\xi_n < x)$ для всякого $n = 1, 2, \dots$

1) Покажите, что для всякого $x \in \mathbb{R}$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F^*(x),$$

и постройте график функции $F^*(x)$. Является ли эта функция функцией распределения?

2) Сходится ли последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$:

а) по распределению; б) по вероятности?

15.67. Пусть $F_1, F_2, \dots$ — последовательность функций распределения и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F^*(x),$$

где $F^*(x)$ — непрерывная функция. Означает ли это, что $F^*(x)$ — функция распределения?

15.68. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \cos(n\pi x), & \text{если } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1]; \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

1) Покажите, что $f_n(x)$ — плотность вероятности.

2) Сходится ли последовательность $f_1, f_2, \dots$?

3) Сходится ли в основном последовательность соответствующих функций распределения $F_1, F_2, \dots$?

15.69. 1) Существует ли последовательность характеристических функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, расходящаяся в каждой точке $t \in \mathbb{R}$?

2) Приведите пример последовательности характеристических функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, расходящейся при любом $t \neq 0$.

3) Приведите пример последовательности характеристических функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, сходящейся на всей числовой оси, но не к характеристической функции.

15.70. Доказать, что если $\varphi(t)$ — характеристическая функция, то характеристической будет и функция

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du & \text{при } t \neq 0, \\ 1 & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Решение. Эту задачу мы уже приводили в § 13 (см. задачу 13.67), где предполагалось ее решение с помощью теоремы Бохнера–Хинчина. Ниже представлено еще одно решение задачи.

Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi^*(t) &= \frac{1}{t} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{kt}{n}\right) \frac{t}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{kt}{n}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, при любом $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t),$$

где

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{kt}{n}\right).$$

Остается заметить, что $\varphi_n(t)$ — характеристическая функция (она служит выпуклой линейной комбинацией характеристических функций $\varphi\left(\frac{t}{n}\right), \varphi\left(\frac{2t}{n}\right), \dots, \varphi\left(\frac{nt}{n}\right)$), а предельная функция $\varphi^*(t)$ непрерывна в нуле.

15.71. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — целочисленные случайные величины. Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n = k) = P(\xi = k)$$

для всякого целого k .

Доказательство. Прежде всего заметим, что последовательность целочисленных случайных величин может сходиться по распределению только к целочисленной случайной величине (объясните, почему).

Пусть, $g(x)$ — функция, представленная своим графиком на рис. 15.1. Это непрерывная ограниченная функция, и потому, если

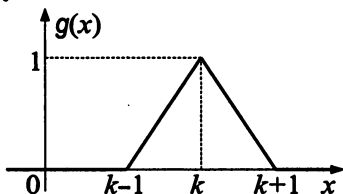


Рис. 15.1.

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $Mg(\xi_n) \rightarrow Mg(\xi)$. Но

$$Mg(\xi_n) = \int g(x) dF_n(x) = P(\xi_n = k);$$

$$Mg(\xi) = \int g(x) dF(x) = P(\xi = k).$$

Тем самым доказано, что $P(\xi_n = k) \rightarrow P(\xi = k)$.

Обратно, предположим, что при $n \rightarrow \infty$ для целого k

$$P(\xi_n = k) \rightarrow P(\xi = k).$$

Тогда для всякой непрерывной ограниченной функции $h(x)$

$$Mh(\xi_n) = \sum h(k)P(\xi_n = k) \rightarrow \sum h(k)P(\xi = k) = Mh(\xi).$$

Законность предельного перехода под знаком суммы читателям предлагается обосновать самостоятельно.

15.72. Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $P(\xi = a) = 0$, то

$$I_{\{\xi_n < a\}} \xrightarrow{d} I_{\{\xi < a\}}.$$

15.73. Докажите, что $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} dF_n(x) = 0,$$

где $F_n(x) = P(\xi_n < x)$.

15.74. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq \xi_n < b) = P(a \leq \xi < b),$$

если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $P(\xi = a) = P(\xi = b) = 0$.

15.75. Последовательность случайных векторов

$$\xi_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nm})^T, \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходится по распределению к случайному вектору

$$\xi_0 = (\xi_{01}, \xi_{02}, \dots, \xi_{0m})^T,$$

если для всякой непрерывной ограниченной в $\mathbb{R}^m$ функции $g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}g(\xi_n) = \mathbf{M}g(\xi_0),$$

или, более развернуто,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}g(\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nm}) = \mathbf{M}g(\xi_{01}, \xi_{02}, \dots, \xi_{0m}).$$

В этом случае пишут: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi_0$. Равносильна ли такая сходимость покоординатной сходимости: $\xi_{nk} \xrightarrow{d} \xi_{0k}$, $k = 1, 2, \dots, m$?

15.76. Докажите, что в условиях предыдущей задачи $\xi_n \xrightarrow{d} \xi_0$ тогда и только тогда, когда для любых действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \xi_{nk} \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^m \lambda_k \xi_{0k}.$$

Асимптотически нормальные случайные величины

О п р е д е л е н и е 15.9. Случайная величина ξ_n (точнее, последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$) называется *асимптотически нормальной* с параметрами (a_n, b_n^2) , где a_n произвольно, а $b_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\xi_n - a_n}{b_n} < x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad (15.23)$$

или

$$\eta_n = \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (15.24)$$

То же самое часто записывают в виде

$$\xi_n \longrightarrow \mathcal{N}(a_n, b_n^2). \quad (15.25)$$

В общем случае величины a_n и b_n^2 в соотношениях (15.23)–(15.25) не следует связывать с $M\xi_n$ и $D\xi_n$. Эти соотношения могут выполняться даже тогда, когда $M\xi_n$ не существует.

Содержательные примеры асимптотически нормальных случайных величин будут приведены в следующем параграфе (см. также с. 349). Для приложений особый интерес представляет случай, когда в (15.25) $a_n = a$ — константа и $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

15.77. Всякая ли последовательность нормально распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ является асимптотически нормальной?

15.78. Докажите, что если случайная величина ξ_n асимптотически нормальна с параметрами $\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, то $\xi_n \xrightarrow{P} a$.

15.79. Докажите, что если случайная величина ξ_n асимптотически нормальна с параметрами $\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ и $a \neq 0$, то случайная величина ξ_n^2 асимптотически нормальна с параметрами $\left(a^2, \frac{4a^2\sigma^2}{n}\right)$.

15.80. Пусть ξ_n — асимптотически нормальная случайная величина с параметрами (a, b_n^2) ; $b_n > 0$, $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; $H(x)$ — функция, непрерывная на $\mathbb{R}$ и дифференцируемая в точке $x = a$, причем $H'(a) \neq 0$. Доказать, что случайная величина $H(\xi_n)$ асимптотически нормальна с параметрами $(H(a), b_n^2(H'(a))^2)$.

Доказательство. В обозначениях формулы (15.24), полагая $a_n = a$, выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{H(\xi_n) - H(a)}{b_n H'(a)} &= \frac{H(a + b_n \eta_n) - H(a)}{b_n \eta_n} \cdot \frac{1}{H'(a)} \eta_n = \\ &= \frac{1}{H'(a)} \eta_n h(b_n \eta_n), \end{aligned}$$

где

$$h(x) = \begin{cases} \frac{H(a+x) - H(a)}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ H'(a), & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Из $b_n \rightarrow 0$ и $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$ следует, что $b_n \eta_n \xrightarrow{d} 0$ (задача 15.59), а поскольку $h(x)$ — непрерывная функция, $h(b_n \eta_n) \xrightarrow{d} h(0) =$

$= H'(a)$. Следовательно (задачи 15.49 и 15.59),

$$\frac{H(\xi_n) - H(a)}{b_n H'(a)} \xrightarrow{d} \frac{1}{H'(a)} \cdot \eta \cdot H'(a) = \eta.$$

Отсюда, в силу симметричности распределения $\mathcal{N}(0, 1)$,

$$\frac{H(\xi_n) - H(a)}{b_n |H'(a)|} \xrightarrow{d} \eta,$$

так что возможное $H'(a) < 0$ не сказывается на окончательном результате.

Примечание. Полученный результат играет важную роль в математической статистике.

15.81. Доказать, что сумма $\xi_n + \eta_n$ независимых асимптотически нормальных случайных величин ξ_n и η_n является асимптотически нормальной случайной величиной (сопоставьте с задачей 13.24).

Доказательство. По условию

$$\xi_n \longrightarrow \mathcal{N}(a_n; B_n^2), \quad \eta_n \longrightarrow \mathcal{N}(c_n; D_n^2)$$

для некоторых $a_n, B_n > 0, c_n, D_n > 0$, и потому при $n \rightarrow \infty$

$$Me^{it \frac{\xi_n - a_n}{B_n}} = \varphi_n(t) \longrightarrow e^{-t^2/2},$$

$$Me^{it \frac{\eta_n - c_n}{D_n}} = \psi_n(t) \longrightarrow e^{-t^2/2}.$$

Покажем, что в таком случае

$$\xi_n + \eta_n \longrightarrow \mathcal{N}(a_n + c_n; B_n^2 + D_n^2),$$

или

$$Me^{it \frac{(\xi_n + \eta_n) - (a_n + c_n)}{\sqrt{B_n^2 + D_n^2}}} = \rho_n(t) \longrightarrow e^{-t^2/2}.$$

Прежде всего заметим, что

$$\rho_n(t) = \varphi_n(\alpha_n t) \cdot \psi_n(\beta_n t),$$

где

$$\alpha_n = \frac{B_n}{\sqrt{B_n^2 + D_n^2}}, \quad \beta_n = \frac{D_n}{\sqrt{B_n^2 + D_n^2}}.$$

Поскольку $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 1$,

$$e^{-t^2/2} = e^{-(\alpha_n t)^2/2} \cdot e^{-(\beta_n t)^2/2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \rho_n(t) - e^{-t^2/2} \right| &= \\ &= \left| \varphi_n(\alpha_n t) \psi_n(\beta_n t) - e^{-(\alpha_n t)^2/2} \cdot e^{-(\beta_n t)^2/2} \right| \leq \\ &\leq \left| \varphi_n(\alpha_n t) \psi_n(\beta_n t) - e^{-(\alpha_n t)^2/2} \psi_n(\beta_n t) \right| + \\ &\quad + \left| e^{-(\alpha_n t)^2/2} \psi_n(\beta_n t) - e^{-(\alpha_n t)^2/2} \cdot e^{-(\beta_n t)^2/2} \right| \leq \\ &\leq \left| \varphi_n(\alpha_n t) - e^{-(\alpha_n t)^2/2} \right| + \left| \psi_n(\beta_n t) - e^{-(\beta_n t)^2/2} \right|. \end{aligned}$$

Отсюда для всякого $A > 0$ получаем:

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq A} \left| \rho_n(t) - e^{-t^2/2} \right| &\leq \\ &\leq \sup_{|t| \leq A} \left| \varphi_n(\alpha_n t) - e^{-(\alpha_n t)^2/2} \right| + \sup_{|t| \leq A} \left| \psi_n(\beta_n t) - e^{-(\beta_n t)^2/2} \right| \leq \\ &\leq \sup_{|t| \leq A} \left| \varphi_n(t) - e^{-t^2/2} \right| + \sup_{|t| \leq A} \left| \psi_n(t) - e^{-t^2/2} \right|. \end{aligned}$$

Остается заметить, что каждый из последних двух супремумов стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (теорема 15.10, с. 379).

Переход к пределу под знаком математического ожидания

Здесь приведены некоторые результаты относительно сходимости $M\xi_n \rightarrow M\xi$ в случае, когда $\xi_n \rightarrow \xi$ (в том или ином смысле).

Т е о р е м а 15.12 (теорема о мажорируемой сходимости).

Пусть $\eta, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — случайные величины, такие, что $P(|\xi_n| \leq \eta) = 1, n = 1, 2, \dots, M\eta < \infty$ и $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$. Тогда $M|\xi| < \infty$ и

$$M\xi_n \longrightarrow M\xi, \quad (15.26)$$

$$M|\xi_n - \xi| \longrightarrow 0 \quad (15.27)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Условия этой теоремы достаточно жестки и во многих задачах на сходимость не выполняются. Приводимое ниже определение открывает путь к решению таких задач при более слабых ограничениях.

О п р е д е л е н и е 15.10. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ называется *равномерно интегрируемой*, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n M(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq c\}}) = 0. \quad (15.28)$$

Для всякой случайной величины ξ с $M|\xi| < \infty$

$$M(|\xi| I_{\{|\xi| \geq c\}}) \rightarrow 0 \quad (15.29)$$

при $c \rightarrow \infty$. Поэтому условие (15.28) и называется условием равномерной интегрируемости последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$.

Т е о р е м а 15.13. Если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ равномерно интегрируема, то $M\xi_n \rightarrow M\xi$ при $n \rightarrow \infty$.

Т е о р е м а 15.14. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — неотрицательные случайные величины с конечными математическими ожиданиями и $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. Для того, чтобы выполнялось условие

$$M\xi_n \rightarrow M\xi < \infty$$

при $n \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ была равномерно интегрируемой.

15.82. Доказать, что если $P(|\xi_n| \leq \eta) = 1$ при $n = 1, 2, \dots$, и $M\eta < \infty$, то последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ равномерно интегрируема (и, таким образом, ограничения, наложенные на величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ в теореме о мажорируемой сходимости, являются более жесткими, чем условие равномерной интегрируемости).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\begin{aligned} M(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq c\}}) &\leq M(\eta I_{\{|\xi_n| \geq c\}}) \leq \\ &\leq M(\eta I_{\{\eta \geq c\}}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $c \rightarrow \infty$ (см. (15.29)).

15.83. Является ли равномерно интегрируемой последовательность $\xi, \xi, \dots, \xi, \dots$, если $M|\xi| < \infty$?

15.84. Является ли равномерно интегрируемой последовательность одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, если $M|\xi_1| < \infty$?

15.85. Является ли равномерно интегрируемой равномерно ограниченная последовательность случайных величин (см. задачу 15.46)?

15.86. Пусть

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} & \frac{1}{n\sqrt{n}} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Покажите, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ является равномерно интегрируемой.

15.87. Пусть

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Покажите, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ не является равномерно интегрируемой.

15.88. Докажите, что если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ равномерно интегрируема, то

$$\sup_n M|\xi_n| < \infty.$$

Верно ли обратное утверждение?

15.89. Доказать, что если для некоторого $\alpha > 0$

$$\sup_n M|\xi_n|^{1+\alpha} < \infty,$$

то последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ равномерно интегрируема.

Доказательство. Если $M|\xi|^{1+\alpha} < \infty$ для некоторого $\alpha > 0$, то для всякого $c > 0$

$$M(|\xi| I_{\{|\xi| \geq c\}}) \leq \frac{M|\xi|^{1+\alpha}}{c^\alpha},$$

(см. задачу 9.14). Таким образом,

$$\sup_n M(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq c\}}) \leq \frac{\sup_n M|\xi_n|^{1+\alpha}}{c^\alpha} \rightarrow 0$$

при $c \rightarrow \infty$.

15.90. Докажите, что последовательность центрированных нормально распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ равномерно интегрируема тогда и только тогда, когда

$$\sup_n D\xi_n < \infty.$$

15.91. Может ли равномерно интегрируемая последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ удовлетворять условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D\xi_n = \infty?$$

15.92. Пусть $f(x)$ — неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

Докажите, что если для последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ выполняется соотношение

$$\sup_n Mf(|\xi_n|) < \infty,$$

то эта последовательность является равномерно интегрируемой.

15.93. Докажите, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ равномерно интегрируема тогда и только тогда, когда $\sup_n M|\xi_n| < \infty$ и

$$\sup_n M(|\xi_n| I_A) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad P(A) \rightarrow 0.$$

15.94. Докажите, что если каждая из последовательностей случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots$ равномерно интегрируема, то равномерно интегрируема и каждая из последовательностей случайных величин $\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \dots, \lambda\xi_n, \dots$ и $\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n, \dots$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

15.95. Докажите, что если

$$\xi_n \geq 0, \quad \xi_n \xrightarrow{P} \xi, \quad M\xi_n \rightarrow M\xi < \infty,$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$M|\xi_n - \xi| \rightarrow 0.$$

15.96. Пусть $M|\xi_n| < \infty$ для $n = 1, 2, \dots$ и $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M|\xi_n - \xi| = 0$$

тогда и только тогда, когда $\xi_1, \xi_2, \dots$ — равномерно интегрируемая последовательность случайных величин.

15.97. Докажите, что если при любом натуральном n

$$P(|\xi_n| \leq \eta_n) = 1$$

и последовательность случайных величин $\eta_1, \eta_2, \dots$ равномерно интегрируема, то равномерно интегрируема и последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$.

15.98. Докажите, что если каждая из последовательностей случайных величин $\xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_n^2, \dots$ и $\eta_1^2, \eta_2^2, \dots, \eta_n^2, \dots$ равномерно интегрируема, то равномерно интегрируема и последовательность случайных величин $\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \dots, \xi_n\eta_n, \dots$.

15.99. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ и $M\xi_n^2 \rightarrow M\xi^2 < \infty$, то

$$\xi_n \xrightarrow{СК} \xi.$$

Доказательство. Прежде всего напомним, что ни одно из условий $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ и $M\xi_n^2 \rightarrow M\xi^2 < \infty$, вообще говоря, не обеспечивает сходимости $\xi_n \xrightarrow{СК} \xi$. Однако совместно эти два условия приводят к указанной сходимости.

Если $\xi_n^2 \xrightarrow{P} \xi^2$ и $M\xi_n^2 \rightarrow M\xi^2 < \infty$, то последовательность случайных величин $\{\xi_n^2\}$ равномерно интегрируема (теорема 15.14). Равномерно интегрируема и постоянная последовательность $\{\xi^2\}$. Следовательно, равномерно интегрируема последовательность $\{\xi\xi_n\}$ (задача 15.98).

Но $\xi\xi_n \xrightarrow{P} \xi^2$. Поэтому по теореме 15.13

$$M(\xi\xi_n) \rightarrow M\xi^2.$$

Остается заметить, что при $n \rightarrow \infty$

$$M(\xi_n - \xi)^2 = M\xi_n^2 - 2M(\xi\xi_n) + M\xi^2 \rightarrow M\xi^2 - 2M\xi^2 + M\xi^2 = 0.$$

15.100. Докажите, что для последовательности независимых экспоненциально распределенных случайных величин сходимость в среднем квадратическом равносильна сходимости почти наверное.

15.101. 1) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — нормально распределенные случайные величины. Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{пн} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow{ск} \xi$.

2) Пусть $\xi_2, \xi_3, \dots$ — независимые стандартные нормальные величины. Покажите, что последовательность

$$\eta_n = \frac{\xi_n}{\sqrt{2 \ln n}}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

сходится в среднем квадратическом, но не сходится почти наверное.

Примечание. Таким образом, в классе последовательностей нормально распределенных случайных величин сходимость почти наверное выступает как сходимость более сильная, чем сходимость в среднем квадратическом.

15.102. Докажите, что если последовательность случайных величин

$$|\xi_1|^s, |\xi_2|^s, \dots, |\xi_n|^s, \dots$$

равномерно интегрируема, то при $0 < r < s$ равномерно интегрируема и последовательность случайных величин

$$|\xi_1|^r, |\xi_2|^r, \dots, |\xi_n|^r, \dots$$

15.103. Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и

$$\sup_n M|\xi_n|^s < \infty \quad (s > 0),$$

то для всякого r , такого, что $0 < r < s$,

$$M|\xi_n|^r \rightarrow M|\xi|^r$$

при $n \rightarrow \infty$.

15.104. Докажите, что если при любом натуральном n

$$P(\xi_{n+1} \geq \xi_n) = 1, \quad P(\xi_n \leq \eta) = 1, \quad M|\eta| < \infty,$$

то последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится почти наверное к некоторой случайной величине ξ , причем $M\xi_n \rightarrow M\xi \leq M\eta$.

Разные задачи

15.105. Предположим, что $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ — плотности вероятности, а $F(x), F_1(x), F_2(x), \dots$ — соответствующие им функции распределения.

1) Верно ли, что если $f_n(x) \rightarrow f(x)$, то $F_n(x) \Rightarrow F(x)$?

2) Верно ли, что если $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, то $f_n(x) \rightarrow f(x)$?

15.106. 1) Из всякой ли последовательности случайных величин, сходящейся по вероятности (в среднем квадратическом), можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти наверное?

2) Из всякой ли последовательности случайных величин, сходящейся по вероятности (почти наверное), можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в среднем квадратическом?

3) Из всякой ли последовательности случайных величин, сходящейся по распределению, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся по вероятности?

15.107. Предположим, что $\eta_n = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$, где $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины, удовлетворяющие условию

$$M|\xi_1| = M|\xi_2| = \dots = M|\xi_n| = \dots < 1.$$

Докажите, что $\eta_n \xrightarrow{pn} 0$.

15.108. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины, каждая из которых распределена по экспоненциальному закону с параметром λ и для всякого $n = 1, 2, \dots$

$$\eta_n = n \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Исследуйте последовательность $\eta_1, \eta_2, \dots$ на сходимость по распределению и по вероятности.

15.109. Последовательность $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ характеристических функций сходится к функции $\varphi(t)$, такой, что $\varphi(t) \equiv 1$ в некоторой окрестности точки $t = 0$. Можно ли на основании этого заключить, что

$$\xi_n \xrightarrow{p} 0?$$

15.110. Последовательность $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ характеристических функций сходится к функции $\varphi(t)$, такой, что $\varphi(t) \equiv e^{-t^2/2}$ в некоторой окрестности точки $t = 0$. Верно ли, что

данная последовательность распределений сходится к нормальному распределению вероятностей?

15.111. Докажите, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(\xi_n - \xi)^2 < \infty,$$

то $\xi_n \rightarrow \xi$ и в среднем квадратическом и почти наверное.

15.112. Приведите пример последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ с абсолютно непрерывными распределениями вероятностей, сходящейся почти наверное к случайной величине ξ с заданным дискретным (например, пуассоновским) распределением вероятностей.

15.113. Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и заданные на нем случайные величины $\eta, \eta_1, \eta_2, \dots$, такие, что

$$P(\eta < x) = P(\xi < x), \quad P(\eta_n < x) = P(\xi_n < x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

причем $\eta_n \xrightarrow{pn} \eta$.

15.114. Решите заново задачу 15.51, используя результаты задач 15.11 и 15.113.

15.115. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ будем называть *дискретным*, если множество элементарных исходов Ω конечно или счетно, а класс $\mathcal{A}$ случайных событий состоит из всех подмножеств множества Ω . Докажите, что для такого пространства сходимость почти наверное и сходимость по вероятности равносильны.

15.116. Докажите, что для дискретного вероятностного пространства (см. задачу 15.115) из сходимости в среднем квадратическом следует сходимость почти наверное.

15.117. 1) Докажите, что если $x_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$ и $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \rightarrow x.$$

2) Постройте пример последовательности неотрицательных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, такой, что $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, но

$$\sqrt[n]{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n} \not\xrightarrow{P} \xi.$$

3) Верно ли, что если $\xi_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$ и $\xi_n \xrightarrow{pn} \xi$, то

$$\sqrt[n]{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n} \xrightarrow{pn} \xi?$$

15.118. 1) Докажите, что если $x_1, x_2, \dots$ — (неслучайная) числовая последовательность и $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\max \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \dots, \frac{x_n}{n} \right) \rightarrow 0.$$

2) Верно ли, что если $\xi_n \xrightarrow{p} 0$, то

$$\max \left(\frac{\xi_1}{n}, \frac{\xi_2}{n}, \dots, \frac{\xi_n}{n} \right) \xrightarrow{p} 0?$$

3) Верно ли, что если $\xi_n \xrightarrow{pn} 0$, то

$$\max \left(\frac{\xi_1}{n}, \frac{\xi_2}{n}, \dots, \frac{\xi_n}{n} \right) \xrightarrow{pn} 0?$$

15.119. Плотность вероятности $f(x)$ случайной величины ξ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и равна нулю вне этого отрезка. Найдите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{n\xi\} < x),$$

где $\{z\}$ — дробная часть числа z .

15.120. Случайная величина ξ имеет непрерывную плотность вероятности $f(x)$. Найдите предельное распределение вероятностей случайной величины $\text{tg}(n\xi)$ при $n \rightarrow \infty$.

§ 16. Основные предельные теоремы

Закон больших чисел

О п р е д е л е н и е 16.1. Говорят, что для последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ выполняется закон больших чисел (ЗБЧ), если $M|\xi_n| < \infty$ при $n = 1, 2, \dots$ и

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) \xrightarrow{P} 0. \quad (16.1)$$

Формально соотношение (16.1) означает, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) \right| \geq \varepsilon \right) = 0. \quad (16.2)$$

А попросту говоря, в пределе при $n \rightarrow \infty$ среднее арифметическое центрированных случайных величин $\overset{\circ}{\xi}_1, \overset{\circ}{\xi}_2, \dots, \overset{\circ}{\xi}_n$ (при определенных условиях) как бы перестает быть случайным: его сколь угодно малое отклонение от нуля происходит лишь с бесконечно малой вероятностью.

Наряду с соотношением (16.2) мы будем также писать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} (S_n - MS_n) \right| \geq \varepsilon \right) = 0, \quad (16.3)$$

считая, что $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$.

В случае, когда $\xi_1, \xi_2, \dots$ — одинаково распределенные случайные величины и $M\xi_1 = a$, соотношение (16.1) равносильно соотношению

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a. \quad (16.4)$$

Т е о р е м а 16.1 (теорема Бернулли). Если μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании, то

$$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

Эта теорема выражает простейшую форму ЗБЧ: $\mu_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, где $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины и для всякого $k = 1, 2, \dots$

$$P(\xi_k = 1) = p, \quad P(\xi_k = 0) = 1 - p.$$

Более общей является следующая теорема.

Т е о р е м а 16.2 (теорема Хинчина). Для последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимых одинаково распределенных случайных величин с $M|\xi_1| < \infty$ ЗБЧ выполняется.

Далее приводится закон больших чисел для попарно некоррелированных (вообще говоря, зависимых) случайных величин.

Т е о р е м а 16.3 (теорема Чебышева). Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ удовлетворяют двум условиям:

- 1) $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$
(попарная некоррелированность случайных величин);
- 2) для некоторого $C > 0$ и всякого $n = 1, 2, \dots$

$$D\xi_n \leq C$$

(равномерная ограниченность дисперсий).

Тогда для последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ выполняется ЗБЧ.

16.1. Пусть ξ — случайная величина с невырожденным распределением вероятностей и $M|\xi| < \infty$. Выполняется ли ЗБЧ для последовательности:

- 1) $\xi, \xi, \xi, \dots$ ($\xi_n = \xi$);
- 2) $-\xi, \xi, -\xi, \xi, \dots$ ($\xi_n = (-1)^n \xi$)?

16.2. Доказать, что если последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, то к ней применим ЗБЧ.

Доказательство. В данных условиях, используя неравенство Чебышева и элементарные свойства дисперсии, получаем

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) \right| \geq \varepsilon \right) &\leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} D \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) \right) = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} D \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2} D \sum_{k=1}^n \xi_k = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ для всякого $\varepsilon > 0$.

16.3. Докажите, что если последовательность попарно некоррелированных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ удовлетворяет

условию

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D\xi_k \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, то к ней применим ЗБЧ.

16.4. Приведите доказательство теоремы Чебышева.

16.5. Выведите теорему Бернулли:

1) из теоремы Чебышева;

2) из теоремы Хинчина.

16.6. Докажите, что если последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ удовлетворяет условию

$$\frac{D\xi_n}{n} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, то к ней применим ЗБЧ.

16.7. Выполняется ли ЗБЧ для последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, если

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n} \\ 1/2n & 1 - 1/n & 1/2n \end{pmatrix}$$

для всякого $n = 1, 2, \dots$.

16.8. Выполняется ли ЗБЧ для последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, если

$P(\xi_n = -2^n) = P(\xi_n = 2^n) = 2^{-(2n+1)}$, $P(\xi_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$
для всякого $n = 1, 2, \dots$.

16.9. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность попарно некоррелированных случайных величин, причем для всякого $n = 1, 2, \dots$

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ 2^{-n} & 1 - 2^{-n+1} & 2^{-n} \end{pmatrix}.$$

Применим ли к данной последовательности ЗБЧ?

16.10. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, причем для всякого $n = 1, 2, \dots$

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} -a_n & a_n \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

где

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{если } n \text{ — точный квадрат,} \\ 2^{-n} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Применим ли к данной последовательности ЗБЧ?

16.11. Доказать, что к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, таких, что для всякого $n = 1, 2, \dots$

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{n} & \sqrt{n} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

ЗБЧ не применим.

Доказательство. Предположим, что ЗБЧ для данной последовательности выполняется. Тогда

$$\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \xrightarrow{P} 0$$

или, в терминах характеристических функций,

$$\cos\left(\frac{\sqrt{1}}{n}t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}t\right) \dots \cos\left(\frac{\sqrt{n}}{n}t\right) \rightarrow 1 \quad (*)$$

при $n \rightarrow \infty$. Покажем, однако, что соотношение $(*)$ неверно.

Как известно, при $t \rightarrow 0$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad e^{-t^2} = 1 - t^2 + o(t^2).$$

Поэтому существует $c > 0$, такое, что в некоторой окрестности нуля

$$\cos t \leq e^{-ct^2}.$$

В этой окрестности

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\sqrt{1}}{n}t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}t\right) \dots \cos\left(\frac{\sqrt{n}}{n}t\right) &\leq \\ &\leq e^{-ct^2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}\right)} = e^{-ct^2 \frac{n+1}{n}} \rightarrow e^{-ct^2/2} \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, что и опровергает соотношение $(*)$.

16.12. Докажите, что к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, таких, что для всякого $n = 1, 2, \dots$

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} -n^\alpha & n^\alpha \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

ЗБЧ применим тогда и только тогда, когда $\alpha < \frac{1}{2}$.

16.13. Доказать, что если для каждой из последовательностей $\xi_1, \xi_2, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots$ ЗБЧ выполняется, то он выполняется и для перемежающейся последовательности $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$.

Доказательство. Очевидно, можно ограничиться рассмотрением случая, когда $M\xi_n = M\eta_n = 0$. Пусть $\zeta_{2n-1} = \xi_n$, $\zeta_{2n} = \eta_n$. Положим

$$S_n = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n,$$

$$S'_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n,$$

$$S''_n = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n.$$

Тогда

$$\frac{S_{2n}}{2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{S'_n}{n} + \frac{S''_n}{n} \right) \xrightarrow{P} \frac{1}{2}(0 + 0) = 0;$$

$$\frac{S_{2n+1}}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \frac{S'_{n+1}}{n+1} + \frac{n}{2n+1} \frac{S''_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0,$$

что и требовалось доказать.

16.14. Проводятся испытания Бернулли с постоянной вероятностью успеха. Пусть для всякого $n = 1, 2, \dots$

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n\text{-е и } (n+1)\text{-е испытания оказались} \\ & \text{успешными,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Применим ли ЗБЧ к последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$?

16.15. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые стандартные нормальные величины. Применим ли закон больших чисел к последовательности $\eta_1, \eta_2, \dots$, если для всякого $n = 1, 2, \dots$:

$$1) \eta_n = \xi_n \xi_{n+1}; \quad 2) \eta_n = \cos \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}?$$

Метод урезания

Так называется предложенный А. А. Марковым метод доказательства предельных теорем, основанный на представлении случайной величины ξ_k , $k \leq n$, в виде

$$\xi_k = \xi'_k + \xi''_k,$$

где

$$\xi'_k = \begin{cases} \xi_k, & \text{если } |\xi_k| < c_n, \\ 0, & \text{если } |\xi_k| \geq c_n \end{cases}$$

со специально подобранным c_n , таким, что $c_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

16.16. Доказать, что всякая равномерно интегрируемая последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ подчинена ЗБЧ.

Решение. Пусть δ — произвольное положительное число.

При заданном n для всякого $1 \leq k \leq n$ положим

$$\xi'_k = \begin{cases} \xi_k, & \text{если } |\xi_k| < \delta n, \\ 0, & \text{если } |\xi_k| \geq \delta n, \end{cases}$$

$$\xi''_k = \xi_k - \xi'_k.$$

Нам предстоит доказать, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) \xrightarrow{P} 0.$$

Пусть $\sup_n M|\xi_n| = A < \infty$ (см. задачу 15.88). Для всякого $\varepsilon > 0$ выберем n_0 так, чтобы при $n \geq n_0$ выполнялось условие

$$\sup_k M(|\xi_k| I_{\{|\xi_k| \geq \delta n\}}) \leq \min(\varepsilon, \delta^2).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k)\right| \geq 3\varepsilon\right) &\leq \\ &\leq P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi'_k - M\xi'_k)\right| + \frac{1}{n} \left|\sum_{k=1}^n M\xi''_k\right| + \frac{1}{n} \left|\sum_{k=1}^n \xi''_k\right| \geq 3\varepsilon\right). \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left|\sum_{k=1}^n M\xi''_k\right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M|\xi''_k| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(|\xi_k| I_{\{|\xi_k| \geq \delta n\}}) \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} M(|\xi_k| I_{\{|\xi_k| \geq \delta n\}}) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k)\right| \geq 3\varepsilon\right) &\leq \\ &\leq P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi'_k - M\xi'_k)\right| \geq \varepsilon\right) + P\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\xi''_k| \geq \varepsilon\right). \end{aligned}$$

Первую из полученных двух вероятностей оценим, используя неравенство Чебышева и учитывая, что величины $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ независимы и имеют конечные дисперсии

$$D\xi'_k \leq A\delta n$$

(см. задачу 9.59); имеем:

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi'_k - M\xi'_k)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{k=1}^n D\xi'_k < \frac{A}{\varepsilon^2} \delta.$$

Далее, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\xi_k''| \geq \varepsilon \right) &\leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P} (|\xi_k''| \geq \varepsilon) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P} (|\xi_k| \geq \delta n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{M} \left(I_{\{|\xi_k| \geq \delta n\}} \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mathbf{M} \left(\frac{|\xi_k|}{\delta n} I_{\{|\xi_k| \geq \delta n\}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{M} (|\xi_k| I_{\{|\xi_k| \geq \delta n\}}) \leq \delta. \end{aligned}$$

В результате для всех $n \geq n_0$ получаем

$$\mathbf{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - \mathbf{M}\xi_k) \right| \geq 3\varepsilon \right) \leq \left(\frac{A}{\varepsilon^2} + 1 \right) \delta.$$

А это, в силу того, что $\delta > 0$ произвольно, и означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - \mathbf{M}\xi_k) \right| \geq 3\varepsilon \right) = 0.$$

16.17. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $F(-x) + F(x) = 1$, где $F(x) = \mathbf{P}(\xi_1 < x)$. Докажите, что если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - F(x)) = 0, \quad (*)$$

то

$$\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Примечание. Если $\mathbf{M}|\xi_1| < \infty$, условие (*) выполняется, но оно может выполняться и в случае, когда $\mathbf{M}|\xi| = \infty$.

16.18. Используя результат задачи 16.17, постройте пример последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, не имеющих математического ожидания, но удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

16.19. Приведите пример последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, удовлетворяющей условию

$$\mathbf{M}|\xi_1|^t < \infty$$

при любом $0 < t < 1$ и такой, что среднее арифметическое

$$\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)$$

не сходится по вероятности ни к какой константе.

Усиленный закон больших чисел

О п р е д е л е н и е 16.2. Говорят, что для последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ выполняется *усиленный закон больших чисел* (УЗБЧ), если $M|\xi_n| < \infty$ при $n = 1, 2, \dots$ и

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) \xrightarrow{пн} 0. \quad (16.5)$$

Соотношение (16.5) означает, что

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) = 0 \right) = 1. \quad (16.6)$$

В случае, когда $\xi_1, \xi_2, \dots$ — одинаково распределенные случайные величины и $M\xi_1 = a$, соотношение (16.5) равносильно соотношению

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{пн} a. \quad (16.7)$$

Приводимые далее теоремы 16.4–16.6 принадлежат А. Н. Колмогорову.

Т е о р е м а 16.4. Если последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < \infty, \quad (16.8)$$

то для нее выполняется УЗБЧ.

Т е о р е м а 16.5. Для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ с $M|\xi_1| < \infty$ выполняется УЗБЧ.

Эта теорема Колмогорова обобщает теорему Хинчина на случай сходимости почти наверное и допускает (в отличие от теоремы Хинчина; см. задачу 16.18) следующее обращение.

Т е о р е м а 16.6. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и

$$\frac{1}{n} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \xrightarrow{пн} C.$$

Тогда $M|\xi_1| < \infty$ (и $M\xi = C$ — по ЗБЧ).

Таким образом, в случае независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ условие $M|\xi_1| < \infty$ является необходимым и достаточным для выполнимости УЗБЧ.

16.20. Верно ли, что если μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании, то

$$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{пн} p?$$

16.21. Выполняется ли УЗБЧ в условиях задач 16.7–16.10?

Решение (частично):

В условиях задачи 16.10

$$D\xi_n = a_n^2 = \begin{cases} n, & \text{если } n - \text{точный квадрат,} \\ 2^{-2n} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-2n}}{n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2)^2} < \infty,$$

и потому для рассматриваемой последовательности случайных величин УЗБЧ выполняется.

16.22. Докажите, что для последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, таких, что $P(\xi_n = n^\alpha) = P(\xi_n = -n^\alpha) = 1/2$, $n = 1, 2, \dots$, УЗБЧ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется ЗБЧ.

Доказательство. При $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ЗБЧ к рассматриваемой последовательности неприменим (см. задачу 16.12); тем более это относится к УЗБЧ. Если же $\alpha < \frac{1}{2}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(1-\alpha)}} < \infty$$

и, таким образом, применим УЗБЧ, а, стало быть, и ЗБЧ.

16.23. Пусть $\xi \sim R(0, 1)$ и

$$\xi = \frac{\xi_1}{2} + \frac{\xi_2}{2^2} + \frac{\xi_3}{2^3} + \dots + \frac{\xi_n}{2^n} + \dots$$

— двоичное представление ξ (величины ξ_n при $n = 1, 2, \dots$ принимают лишь значения 0 и 1), ν_n — число единиц среди $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Докажите, что

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{pn} \frac{1}{2}.$$

16.24. Постройте пример последовательности случайных величин, для которой ЗБЧ выполняется, а УЗБЧ не выполняется.

16.25. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $M\xi_1 = a$, $D\xi_1 = \sigma^2$. Докажите, что

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \xrightarrow{ск} a.$$

Центральная предельная теорема

В этом пункте наиболее ярко раскрывается та исключительная роль, которую в теории вероятностей играет нормальное распределение вероятностей.

О п р е д е л е н и е 16.3. Говорят, что для последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ выполняется *центральная предельная теорема* (ЦПТ), если

$$\frac{(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) - M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)}{\sqrt{D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)}} = \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} \quad (16.9)$$

сходится по распределению к стандартной нормальной величине, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} < x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du. \quad (16.10)$$

Сходимость в (16.10), если только она вообще имеет место, равномерна на всей числовой прямой.

Соотношение (16.10) показывает, что сумма $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ асимптотически нормальна с параметрами (MS_n, DS_n) .

Т е о р е м а 16.7 (простейшая предельная теорема). Для всякой последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной отличной от нуля дисперсией выполняется ЦПТ.

При $M\xi_n = \mu$, $D\xi_n = \sigma^2$, $n = 1, 2, \dots$, соотношение (16.10) принимает вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du. \quad (16.11)$$

Частным случаем простейшей предельной теоремы служит интегральная теорема Муавра–Лапласа (см. § 7).

Т е о р е м а 16.8 (ЦПТ в условии Линдберга). Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины,

$$F_n(x) = P(\xi_n < x), \quad \mu_n = M\xi_n, \quad \sigma_n^2 = D\xi_n > 0,$$

$$B_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда, если для всякого $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x - \mu_k| > \tau B_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) = 0, \quad (16.12)$$

то для последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ выполняется ЦПТ.

Из условия Линдеберга (16.12) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^2} \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2 = 0, \quad (16.13)$$

т. е. в сумме $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ относительный вклад каждого слагаемого по дисперсии бесконечно мал. В частности,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n^2}{B_n^2} = 0. \quad (16.14)$$

Условие Линдеберга является достаточным (но, вообще говоря, не необходимым) условием выполнения ЦПТ для последовательности независимых случайных величин с конечными дисперсиями. Если же для такой последовательности выполняется условие (16.14) и $B_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то условие Линдеберга (16.12) оказывается и необходимым для выполнения ЦПТ.

Из ЦПТ в условии Линдеберга выводятся многие другие варианты ЦПТ, в частности, простейшая предельная теорема, а также следующая теорема.

Теорема 16.9 (теорема Ляпунова). Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины,

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n D\xi_k, \quad C_n^3 = \sum_{k=1}^n M|\xi_k - M\xi_k|^3,$$

$n = 1, 2, \dots$. Тогда, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n} = 0, \quad (16.15)$$

то для последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ выполняется ЦПТ.

Условия этой теоремы можно несколько ослабить, положив при $\delta > 0$

$$C_n^{2+\delta} = \sum_{k=1}^n M|\xi_k - M\xi_k|^{2+\delta}.$$

Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ удовлетворяют ЦПТ, то при $a < b$ и достаточно больших значениях n

$$P(a \leq S_n \leq b) \approx \Phi_0\left(\frac{b - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right) - \Phi_0\left(\frac{a - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right).$$

В частности, для последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\xi_1 = \mu$, $D\xi_1 = \sigma^2 > 0$, имеем

$$P(a \leq S_n \leq b) \approx \Phi_0\left(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi_0\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right). \quad (16.16)$$

Для независимых одинаково распределенных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ с

$$M\xi_1 = \mu, \quad D\xi_1 = \sigma^2, \quad M|\xi_1|^3 < \infty$$

выполняется неравенство Берри-Эссеена:

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \left| P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq C \frac{M|\xi_1 - M\xi_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

где C — абсолютная константа,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq C < 0,8.$$

Напомним, что для интегральной теоремы Муавра–Лапласа соответствующая оценка записывалась в виде

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \left| P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}.$$

16.26. В предположении, что один шаг пешехода распределен равномерно в пределах от 70 см до 80 см и размеры шагов независимы, оценить вероятность того, что за 10 000 шагов пройденный пешеходом путь составит $7,5 \text{ км} \pm 50 \text{ м}$.

Решение. Пусть ξ_n — величина n -го шага пешехода, $n = 1, 2, \dots, 10\,000$. Тогда путь S , который пешеход пройдет за 10 000 шагов, выразится как

$$S = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{10\,000}.$$

Принимая во внимание, что $\xi_n \sim R(70, 80)$ и, стало быть,

$$\mu = M\xi_n = 75, \quad \sigma^2 = D\xi_n = \frac{25}{3},$$

получаем по формуле (16.16):

$$P(745\,000 \leq S \leq 755\,000) \approx$$

$$\approx \Phi_0 \left(\frac{755\,000 - 750\,000}{100 \cdot \sqrt{\frac{25}{3}}} \right) - \Phi_0 \left(\frac{745\,000 - 750\,000}{100 \cdot \sqrt{\frac{25}{3}}} \right) \approx$$

$$\approx 2\Phi_0(17,3) \approx 1.$$

Таким образом, событие, состоящее в том, что пройденный за 10 000 шагов путь составит $7,5 \text{ км} \pm 50 \text{ м}$, можно рассматривать как практически достоверное.

16.27. При составлении статистического отчета надо сложить 10 000 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-3} . Считая, что ошибки округления независимы и распределены равномерно в интервале $(-0,5 \cdot 10^{-3}; 0,5 \cdot 10^{-3})$, оцените наименьший по длине промежуток, в котором с вероятностью 0,95 будет заключена суммарная ошибка.

16.28. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $M\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$; $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. При каком значении σ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1 \right) = \frac{1}{3}?$$

Решение. Значение $\sigma = 0$, очевидно, не решает данной задачи, и мы вправе считать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{S_n}{\sigma \sqrt{n}} > \frac{1}{\sigma} \right).$$

По простейшей предельной теореме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{1}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Искомое значение σ теперь находим по таблице значений функции Лапласа $\Phi_0(x)$ (см. с. 439) из уравнения

$$\frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{3}.$$

Имеем

$$\Phi_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{\sigma} \approx 0,433, \quad \sigma \approx 2,31.$$

16.29. Известно, что $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные по закону $R(-c, c)$ случайные величины, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. При каком значении c

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < 2\right) = \frac{3}{4}?$$

16.30. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и одинаково распределены по закону $R(0, 1)$. Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n < e^{-n}).$$

16.31. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной положительной дисперсией. Какие значения могут принимать пределы $(x, a, b \in \mathbb{R})$:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n < x)$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \leq b)$?

16.32. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ при любом натуральном n имеют нормальное совместное распределение вероятностей. Нужно ли на последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ налагать какие-нибудь дополнительные ограничения (например, условие Линдеберга), чтобы для нее выполнялась ЦПТ?

16.33. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с дисперсиями $D\xi_1 = 1, D\xi_k = 2^{k-2}, k = 2, 3, \dots$. Покажите, что для этой последовательности условие Линдеберга не выполнено, а ЦПТ выполняется.

16.34. Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании. Сопоставить оценки вероятности $P(|\mu_n - np| \geq \alpha \sqrt{npq})$, получаемые по интегральной теореме Муавра–Лапласа и по неравенству Чебышева.

Решение. По неравенству Чебышева (см. задачу 9.10)

$$P(|\mu_n - np| \geq \alpha \sqrt{npq}) \leq \frac{1}{\alpha^2}. \quad (*)$$

Теорема Муавра–Лапласа в данном случае дает

$$P(|\mu_n - np| \geq \alpha \sqrt{npq}) \approx 2(1 - \Phi(\alpha)).$$

При малых значениях α оценка $(*)$ бесполезна. При больших значениях α (см. задачу 8.102)

$$1 - \Phi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2},$$

поэтому

$$P(|\mu_n - np| \geq \alpha \sqrt{npq}) \approx \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\alpha^2/2}. \quad (**)$$

Эта оценка существенно отличается от оценки $(*)$.

16.35. Каждую минуту, независимо от других моментов времени, в бункер, вмещающий не более, чем $N = 150$ деталей, поступает случайное число деталей, распределенное по пуассоновскому закону с параметром $\lambda = 2$. Через каждый час все находящиеся в бункере детали перегружаются в тележку и отправляются на дальнейшую обработку. В начальный момент времени бункер пуст. Оцените вероятность того, что за время $T = 100$ ч не произойдет ни одного переполнения бункера.

16.36. Докажите, что если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин и

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} -n^\alpha & n^\alpha \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то при $\alpha > -1/2$ к этой последовательности применима ЦПТ.

16.37. Докажите, что к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, таких, что

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{n^\alpha} & \frac{1}{n^\alpha} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

при $\alpha > 1$ ЦПТ неприменима.

16.38. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $M\xi_1 = \mu$, $D\xi_1 = \sigma^2 > 0$; $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$. В этом случае (по простейшей предельной теореме)

$$\eta_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \xi \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Доказать, что последовательность $\{\eta_n\}$ не сходится ни в среднем квадратическом, ни почти наверное, ни по вероятности.

З а м е ч а н и е. Этот результат показывает, что нецелесообразно ставить вопрос об «усиленной» ЦПТ (по образу УЗБЧ).

Р е ш е н и е. Предположим, что $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$. Тогда $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

$$M\eta_n \rightarrow M\eta, \quad D\eta_n \rightarrow D\eta,$$

и, стало быть, сходимость $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$ выполняется в условиях, когда

$$M\eta_n^2 \rightarrow M\eta^2.$$

Но в таком случае

$$\eta_n \xrightarrow{ск} \eta$$

(см. задачу 15.99). Поэтому последовательность $\{\eta_n\}$ фундаментальна в среднем квадратическом: для всякого $\varepsilon > 0$ и любых достаточно больших n и m

$$M(\eta_{n+m} - \eta_n)^2 < \varepsilon.$$

В данном случае это равносильно условию

$$D(\eta_{n+m} - \eta_n) < \varepsilon. \quad (*)$$

Однако, вводя обозначения

$$\zeta_n = \frac{\xi_n - \mu}{\sigma}, \quad S'_n = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n,$$

простыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} \eta_{n+m} - \eta_n &= \frac{1}{\sqrt{n+m}} S'_{n+m} - \frac{1}{\sqrt{n}} S'_n = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+m}} (\zeta_{n+1} + \zeta_{n+2} + \dots + \zeta_{n+m}) + \left(\frac{1}{\sqrt{n+m}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) S'_n. \end{aligned}$$

Случайные величины $S'_n, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \dots, \zeta_{n+m}$ независимы и

$$D(\zeta_{n+1}) = D(\zeta_{n+2}) = \dots = D(\zeta_{n+m}) = 1,$$

$$DS'_n = n.$$

Поэтому

$$D(\eta_{n+m} - \eta_n) = \frac{1}{n+m} m + \left(\frac{1}{\sqrt{n+m}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 n \geq \frac{m}{n+m}.$$

В частности, при $m = n$

$$D(\eta_{n+m} - \eta_n) \geq \frac{1}{2},$$

что противоречит условию (*).

16.39. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots$ — независимые последовательности случайных величин*. Верно ли, что если их сумма $\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots$ асимптотически нормальна, то асимптотически нормальна и каждая из данных последовательностей? (Сопоставьте это с замечанием к задаче 13.24.)

Решение. Вообще говоря, неверно. Предположим, что величины

$$\begin{aligned} &\zeta_{10}, \zeta_{11}; \\ &\zeta_{20}, \zeta_{21}, \zeta_{22}; \\ &\zeta_{30}, \zeta_{31}, \zeta_{32}, \zeta_{33}; \\ &\dots \\ &\zeta_{n0}, \zeta_{n1}, \zeta_{n2}, \dots, \zeta_{nn}; \\ &\dots \end{aligned}$$

независимы и одинаково распределены, например, по закону Пуассона (существенно лишь, что выбранное распределение отлично от нормального и имеет конечный момент 2-го порядка). Пусть, далее, для всякого натурального n

$$T_n = \zeta_{n0}, \quad U_n = \zeta_{n1} + \zeta_{n2} + \dots + \zeta_{nn}.$$

Очевидно, что ни одна из последовательностей

$$T_1, U_2, T_3, U_4, \dots, T_{2n-1}, U_{2n}, \dots$$

и

$$U_1, T_2, U_3, T_4, \dots, U_{2n-1}, T_{2n}, \dots$$

не является асимптотически нормальной, в то время как последовательность

$$T_1 + U_1, T_2 + U_2, \dots, T_n + U_n, \dots$$

асимптотически нормальна (по центральной предельной теореме).

Вычисление интегралов методом статистических испытаний (методом Монте-Карло)

Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на отрезке $[0, 1]$, то интеграл

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

можно рассматривать как математическое ожидание

$$I = Mf(\xi),$$

*Это означает, что для всяких натуральных r и s при $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, $j_1 < j_2 < \dots < j_s$ случайные векторы $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_r})$ и $(\eta_{j_1}, \eta_{j_2}, \dots, \eta_{j_s})$ независимы.

где ξ — случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, по УЗБЧ

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \xrightarrow{ПН} I,$$

в предположении, что величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимы и одинаково распределены по закону $R(0, 1)$. Поэтому при достаточно большом n

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k). \quad (16.17)$$

В случае $|f(x)| \leq C$ при $0 \leq x \leq 1$ ЦПТ приводит к следующей приближенной, но вполне естественной оценке:

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) - I \right| < \Delta \right) \geq 2\Phi_0 \left(\Delta \frac{\sqrt{n}}{C} \right). \quad (16.18)$$

Эффективность описанного метода численного интегрирования возрастает при переходе от обыкновенных к кратным интегралам и становится достаточно высокой при рассмотрении интегралов большой размерности.

Отметим также, что численное интегрирование далеко не исчерпывает всех тех задач, которые решаются методом статистических испытаний.

16.40. Оценить вероятность того, что при $|f(x)| \leq 1$ абсолютная погрешность вычисления интеграла

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

по формуле (16.17) при $n = 10\,000$ не превосходит 0,01.

Решение. На основании (16.18) при $C = 1$, $n = 10\,000$, $\Delta = 0,01$, получаем

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{1}{10\,000} \sum_{k=1}^{10\,000} f(\xi_k) - I \right| < 0,01 \right) &\geq 2\Phi_0 \left(0,01 \cdot \frac{100}{1} \right) = \\ &= 2\Phi_0(1) \approx 0,6826. \end{aligned}$$

16.41. Оцените наименьшее n , при котором вычисление интеграла

$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad |f(x)| \leq 1$$

по формуле (16.17) с вероятностью $P \geq 0,95$ приводит к ошибке, не превышающей 0,01.

16.42. Функция $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ непрерывна и удовлетворяет условию $|f(x)| \leq 1$. Предполагая, что $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$ —

независимые одинаково распределенные по закону $R(0, 1)$ случайные величины, положим (см. задачу 11.60)

$$\zeta_n = \begin{cases} 1, & \text{если } f(\xi_n) > \eta_n, \\ 0, & \text{если } f(\xi_n) \leq \eta_n. \end{cases}$$

Докажите, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \zeta_k \xrightarrow{pn} I.$$

С помощью ЦПТ оцените вероятность

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \zeta_k - I \right| < \Delta \right)$$

и сравните полученный результат с оценкой (16.18).

Задачи из классического анализа

16.43. Со всякой функцией $f(x)$, непрерывной на отрезке $[0, 1]$, связаны *многочлены Бернштейна*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказать, что при $n \rightarrow \infty$

$$B_n(x) \rightarrow f(x)$$

равномерно по $x \in [0, 1]$.

Следствием этого результата является известная из классического анализа *теорема Вейерштрасса* о приближении непрерывной функции многочленами; при этом нужные многочлены указываются в явном виде.

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$P(\xi_1 = 1) = x, \quad P(\xi_1 = 0) = 1 - x.$$

Если $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, то

$$B_n(x) = M f\left(\frac{S_n}{n}\right).$$

По ЗБЧ

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} x.$$

Далее, имеем

$$|B_n(x) - f(x)| \leq M \left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right|.$$

Функция $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ ограничена, $|f(x)| \leq M$, и равномерно непрерывна. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если $x', x'' \in [0, 1]$ и $|x' - x''| < \delta$, то $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Это позволяет продолжить начатую цепочку неравенств следующим образом:

$$\begin{aligned} M \left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| &= \\ &= M \left[\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| I_{\left\{ \left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \delta \right\}} \right] + \\ &+ M \left[\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| I_{\left\{ \left| \frac{S_n}{n} - x \right| < \delta \right\}} \right] \leq \\ &\leq 2M \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \delta \right\} + \varepsilon \leq \\ &\leq 2M \frac{pq}{n\delta^2} + \varepsilon < \frac{M}{2n\delta^2} + \varepsilon. \end{aligned}$$

(I_A — индикатор события A . При оценивании вероятности $\mathbf{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \delta \right)$ использовано неравенство Чебышева; учтено также, что $pq \leq \frac{1}{4}$.)

Полученное неравенство

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \frac{M}{2n\delta^2} + \varepsilon$$

и решает поставленную задачу.

16.44. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

Разные задачи

16.45. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $M\xi_1 = a$, $D\xi_1 = \sigma^2 > 0$,

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Докажите, что последовательность $\eta_1, \eta_2, \dots$ сходится по вероятности, и найдите ее предел.

16.46. Вычислите (в зависимости от $x > 0$ и $\alpha > 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{1}{n^\alpha} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \right| < x \right),$$

если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, $0 < \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1 < \infty$.

16.47. Случайная величина η_n имеет χ^2 -распределение с n степенями свободы (см. с. 348). Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} (\eta_n < n - 2\sqrt{n}).$$

16.48. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и распределены по пуассоновскому закону каждая:

$$\xi_n \sim \Pi(\lambda_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Докажите, что если $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{S_n - \mathbf{M}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}$$

сходится по распределению. Какие распределения вероятностей могут в данном случае выступать в качестве предельного распределения?

16.49. Покажите, что для последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{M}\xi_n = 0, \quad \mathbf{D}\xi_n = 2n - 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

не могут выполняться одновременно и ЗБЧ и ЦПТ.

16.50. Для числа успехов μ_n в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \mathbf{M} \max(\mu_n, n - \mu_n).$$

16.51. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины и для всякого $n = 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(t) = \mathbf{M}e^{it\xi_n} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{n}, & \text{если } |t| \leq n, \\ 0, & \text{если } |t| > n. \end{cases}$$

Докажите, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \xrightarrow{P} 0.$$

16.52. 1) Верно ли, что если ЗБЧ выполняется для последовательности независимых случайных величин, то он выполняется и для всякой бесконечной подпоследовательности данной последовательности?

2) Верно ли, что если ЦПТ выполняется для последовательности независимых случайных величин, то она выполняется и для всякой бесконечной подпоследовательности данной последовательности?

16.53. Приведите пример последовательности независимых случайных величин, для которой:

- 1) ЦПТ выполняется, а ЗБЧ не выполняется;
- 2) ЗБЧ выполняется, а ЦПТ не выполняется.

16.54. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность случайных величин с равномерно ограниченными дисперсиями ($D\xi_n \leq C$) и $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) \rightarrow 0$ равномерно при $|i - j| \rightarrow \infty$. Докажите, что к такой последовательности применим ЗБЧ (теорема Бернштейна — ЗБЧ для слабо коррелированных случайных величин).

16.55. Докажите, что если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных нормированных случайных величин, то

$$\max \left(\frac{|\xi_1|}{n}, \frac{|\xi_2|}{n}, \dots, \frac{|\xi_n|}{n} \right) \xrightarrow{P} 0.$$

16.56. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин с $M\xi_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$

1) Применим ли к данной последовательности случайных величин УЗБЧ, если $\xi_n \xrightarrow{P} 0$?

2) Применим ли к данной последовательности случайных величин ЗБЧ, если $\xi_n \xrightarrow{P} 0$?

16.57. Докажите, что если последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ удовлетворяет условию

$$\sup_n M|\xi_n|^{1+\alpha} < \infty$$

для некоторого $\alpha > 0$, то к этой последовательности применим ЗБЧ.

Элементы комбинаторики

1°. **Комбинаторная терминология.** Комбинаторика связана с подсчетом числа комбинаций, которые можно составить из данных элементов, соблюдая те или иные условия.

Простейшими комбинациями служат сочетания, размещения и перестановки.*

Сочетанием из n элементов по m при $1 \leq m \leq n$ называется всякая комбинация, объединяющая m каких-нибудь элементов из числа данных n элементов. Две такие комбинации считаются различными, если какой-нибудь из данных n элементов входит в одну из них, но не входит в другую комбинацию.

Говорят также, что сочетания отличаются друг от друга своим составом.

Число сочетаний из n элементов по m мы будем обозначать символом C_n^m (читается: цэ из эн по эм); распространено также обозначение $\binom{n}{m}$. Легко видеть, что

$$C_n^1 = n, \quad C_n^n = 1$$

(выбрать один элемент из n данных элементов можно n способами, а n элементов из n — всего лишь одним способом).

Наряду с приведенным выше определением сочетания полезно обратиться к теоретико-множественному толкованию этого понятия.

Множество, состоящее из n элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, условимся называть n -множеством. Аналогично определяется m -подмножество n -множества при $m \leq n$. Тогда сочетания можно определить следующим образом.

Сочетания из n элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ по m — это m -подмножества данного n -множества.

В теории множеств к подмножествам всякого множества относится и пустое множество $\emptyset$. В связи с этим

* В дальнейшем для обозначения числа таких комбинаций мы будем использовать буквы C, A, P — первые буквы французских слов *combinaison* (сочетание), *arrangement* (размещение), *permutation* (перестановка).

к сочетаниям из n элементов причисляется и пустая комбинация — сочетание из n по $m = 0$ (при этом не исключается, что и $n = 0$); по определению

$$C_n^0 = 1; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пример. Трехэлементное множество $\{a, b, c\}$ имеет:

пустое подмножество $\emptyset$;

три одноэлементных подмножества

$$\{a\}, \{b\}, \{c\};$$

три двухэлементных подмножества

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\};$$

одно трехэлементное подмножество

$$\{a, b, c\}.$$

Таким образом,

$$C_3^0 = 1, \quad C_3^1 = 3, \quad C_3^2 = 3, \quad C_3^3 = 1.$$

Если важно не только то, какие m элементов из данных n элементов объединяются в комбинацию, но и порядок их следования в этой комбинации, то говорят о размещении из n элементов по m .

Размещением из n элементов по m при $1 \leq m \leq n$ называется всякая комбинация, объединяющая в определенном порядке m каких-нибудь элементов из числа данных n элементов. Две такие комбинации считаются различными, если они отличаются либо своим составом, либо порядком следования входящих в них элементов, либо и тем и другим.

Число размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m (читается: а из эн по эм) или символом $(n)_m$.

На языке теории множеств размещения из n элементов по m — это упорядоченные m -подмножества, составленные из элементов данного n -множества. Пустая комбинация рассматривается как упорядоченная комбинация и объявляется размещением из данных n элементов по $m = 0$. В соответствии с этим считают, что

$$A_n^0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пример. Трехэлементное множество $\{a, b, c\}$ порождает:

пустое подмножество $\emptyset$;

три (упорядоченных) одноэлементных подмножества

$$(a), (b), (c);$$

шесть упорядоченных двухэлементных подмножеств

$(a, b), (a, c), (b, c),$

$(b, a), (c, a), (c, b);$

шесть упорядоченных трехэлементных подмножеств

$(a, b, c), (b, a, c), (c, a, b),$

$(a, c, b), (b, c, a), (c, b, a).$

Следовательно,

$$A_3^0 = 1, \quad A_3^1 = 3, \quad A_3^2 = 6, \quad A_3^3 = 6.$$

Для записи обычных множеств мы используем фигурные скобки, а для записи упорядоченных множеств — круглые скобки. Так, $\{a, b, c\}$ и $\{b, a, c\}$ — одно и то же, но по-разному записанное множество (сочетание), в то время как (a, b, c) и (b, a, c) — разные упорядоченные множества (размещения).

Размещение из n элементов по n элементов называется *перестановкой* из данных n элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n (читается: пэ из эн); в частности, $P_3 = 6$.

Общие формулы для нахождения C_n^m, A_n^m, P_n будут приведены несколько позже.

Среди элементарных комбинаторных задач встречаются и такие, решение которых требует рассмотрения комбинаций с повторяющимися элементами. Так, говоря о трехзначных числах, мы должны учитывать числа 111, 999, 277, 883 и т. д. Если в буфете продаются пирожные четырех сортов, а нам нужно купить семь пирожных, то ограничиться выбором разных пирожных не удастся, и перебор всех возможных комбинаций будет достаточно долгим. Подробное рассмотрение таких задач выходит за рамки данного пособия, хотя в общих чертах оно будет намечено нами.

В теории вероятностей, наряду с приведенной выше терминологией, используется и специфическая терминология. Исходные n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ рассматриваются как *генеральная совокупность*. Из нее осуществляется *выбор*, результатом которого служит *выборка объема r*

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}.$$

Если каждый элемент генеральной совокупности может входить в эту выборку не более одного раза, то говорят о *выборе без возвращения*. Если для каждого элемента генеральной

совокупности допускается многократное использование в выборке, то говорят о *выборке с возвращением*.

Различают *упорядоченные* и *неупорядоченные выборки*, — в зависимости от того, как сравниваются эти выборки — с учетом или без учета порядка их составляющих. Так, выбор без возвращения из генеральной совокупности $a_1, a_2, \dots, a_n$ связан с A_n^r упорядоченными выборками объема r и с C_n^r неупорядоченными выборками объема r .

2°. Два основных принципа комбинаторики. Представим себе, что из города A в город B можно добраться либо одним из m авиарейсов, либо одним из n поездов, либо одним из k теплоходов. Очевидно, что из A в B можно попасть $m + n + k$ способами.

Это иллюстрирует следующее общее положение.

Комбинаторный принцип сложения. Предположим, что та или иная задача решается любым из k методов, причем первый метод можно применить n_1 способами, второй метод — n_2 способами, ..., k -й метод — n_k способами. Тогда рассматриваемая задача решается $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами.

Вообразим, далее, что из пункта A в пункт C можно добраться лишь через пункт B , причем A и B связаны m путями, а B и C — n путями. Тогда, очевидно, A и C связаны mn различными путями. При этом два пути из A в C считаются разными, если они различаются хотя бы на одном из участков AB и BC .

Рассмотренный пример допускает следующее обобщение.

Комбинаторный принцип умножения. Предположим, что та или иная задача решается за k последовательных этапов, причем число способов решения задачи на каждом следующем этапе не зависит от того, какими именно возможными способами она решалась на всех предыдущих этапах, и составляет n_1 способов на первом этапе, n_2 способов на втором этапе, ..., n_k способов на k -м этапе. Два решения считаются разными, если они получены по-разному хотя бы на одном из этапов. В этих условиях задачу можно решить $n_1 n_2 \dots n_k$ способами.

3°. Основные комбинаторные формулы. Комбинаторные принципы сложения и умножения позволяют решать практически все элементарные задачи комбинаторики. В частности,

легко выводятся следующие формулы:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1), \quad (\text{П.1})$$

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!, \quad (\text{П.2})$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)}{m!} \quad (\text{П.3})$$

для любых натуральных n и m , таких, что $1 \leq m \leq n$. Для каждого натурального k величина $k!$ (читается: ка факториал) представляет собой произведение всех целых чисел от 1 до k :

$$k! = 1 \cdot 2 \cdots k.$$

Доказательство. Начнем с формулы (П.1). Составить размещение из n элементов по m элементов можно за m этапов. На первом этапе выбирается первый элемент (n способами — по числу всех имеющихся элементов); выбрав этот элемент, мы оставим неиспользованными $n-1$ элементов. На втором этапе выбирается второй элемент размещения ($n-1$ способами по числу имеющихся в нашем распоряжении элементов); в результате остаются неиспользованными $n-2$ элемента. На третьем этапе выбирается третий элемент размещения (сделать это можно $n-2$ способами) и т. д., пока не наберем m элементов. По комбинаторному принципу умножения все m этапов могут быть осуществлены $n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)$ способами. Но именно в этом и заключается формула (П.1).

Формула (П.2) получается как простое следствие формулы (П.1) при $m = n$.

Наконец, формула (П.3) легко выводится из формул (П.1) и (П.2), если заметить, что каждое сочетание из n элементов по m порождает $m!$ размещений из n по m (они получаются как перестановки из m элементов); поэтому $A_n^m = m! C_n^m$. Это и приводит к формуле (П.3).

В дополнение к (П.1)–(П.3) приведем следующие формулы:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad (\text{П.4})$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad (\text{П.5})$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \quad (\text{П.6})$$

Формула (П.4) получается путем умножения и деления правой части равенства (П.1) на $(n - m)! = (n - m)(n - m - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Действительно,

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)}{(n-m)(n-m-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \\ \times (n-m)(n-m-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Отсюда, в свою очередь, легко выводится формула (П.5):

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

А из (П.5) следует (П.6); достаточно в формуле (П.5) заменить m на $n - m$:

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^m.$$

Следует специально отметить, что формула (П.6) допускает очень простую интерпретацию. Выбирая m элементов из имеющихся n элементов, мы оставляем неиспользованными $n - m$ элементов. Совокупность выбранных и совокупность оставшихся элементов однозначно определяют друг друга. Поэтому из имеющихся n элементов m элементов выбираются тем же числом способов, что и $n - m$ элементов. (Например, составить футбольную команду в 11 человек из имеющихся 20 человек — это то же самое, что отобрать 9 человек, сказав им, что они не попали в команду.)

Будем считать, что

$$P_0 = 0! = 1 \quad (\text{П.7})$$

и, как уже отмечалось,

$$A_n^0 = C_n^0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{П.8})$$

При таком соглашении формулы (П.4)–(П.6) можно рассматривать для любых значений n и m , таких, что $0 \leq m \leq n$.

4°. Бином Ньютона. Формула бинома Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m = \\ = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n, \quad (\text{П.9})$$

несмотря на некоторую громоздкость, доказывается вполне элементарно. Будем последовательно перемножать выражения, каждое из которых равно $(a + b)$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb;$$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (aa + ab + ba + bb)(a + b) =$$

$$= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb$$

и т. д. Для $(a + b)^n$ получились бы слагаемые вида $a^{n-m}b^m$, где m может быть любым от 0 до n , причем слагаемых $a^{n-m}b^m$ оказалось бы C_n^m — ровно столько, сколько существует «слов», составленных из $(n - m)$ «букв» a и m «букв» b (составить такое «слово» — это, с комбинаторной точки зрения, то же самое, что выбрать m мест из n для «буквы» b , отведя оставшиеся $(n - m)$ мест под «букву» a). Это и обосновывает тождество (П.9).

З а м е ч а н и е. Формула бинома Ньютона допускает следующее обобщение:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_r = n} C_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_r^{n_r}, \quad (\text{П.10})$$

где

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}, \quad (\text{П.11})$$

а суммирование в (П.10) происходит по всем неотрицательным целым $n_1, n_2, \dots, n_r$, таким, что $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$. Число $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_r}$ показывает, сколько n -буквенных «слов» можно составить, используя n_1 раз «букву» a_1 , n_2 раз «букву» a_2 , ... , n_r раз «букву» a_r (в предположении, что $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$).

5°. Простейшие свойства биномиальных коэффициентов. Коэффициенты

$$1 = C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n = 1$$

в формуле бинома Ньютона называются *биномиальными коэффициентами*. Их иногда располагают в виде так называемого *треугольника Паскаля*:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & C_0^0 & & & \\ & & & C_1^0 & C_1^1 & & & \\ & & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & \\ & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & & \\ C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & & & \\ C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 & & \\ C_6^0 & C_6^1 & C_6^2 & C_6^3 & C_6^4 & C_6^5 & C_6^6 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

или, более определенно,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Треугольник Паскаля наводит на следующие свойства биномиальных коэффициентов.

1. Члены всякой строки треугольника Паскаля сначала возрастают (до середины строки), а затем — убывают.

Например,

$$\begin{array}{ll}
 1 < 4 < 6, & 6 > 4 > 1 \quad (\text{четвертая строка}); \\
 1 < 5 < 10, & 10 > 5 > 1 \quad (\text{пятая строка}).
 \end{array}$$

2. Всякая строка треугольника Паскаля симметрична относительно своей середины (или: члены всякой строки треугольника Паскаля, равноудаленные от ее краев, равны между собой).

Формально это свойство записывается в виде упоминавшегося нами равенства

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

3. Сумма членов n -й строки треугольника Паскаля равна 2^n :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n. \quad (\text{П.12})$$

Это можно рассматривать как следствие формулы бинома Ньютона (П.9) при $a = b = 1$. Важно, однако, разобраться в теоретико-множественной интерпретации данного свойства.

Число C_n^m равно количеству m -элементных подмножеств

n -элементного множества. Поэтому левую часть равенства (П.12) можно рассматривать как число всех подмножеств n -элементного множества (включая пустое подмножество и само n -элементное множество).

| Всякое n -элементное множество имеет 2^n подмножеств.

Действительно, составить подмножество данного множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — это все равно, что для каждого его элемента определить, попадет он в это подмножество или не попадет (два варианта). Следовательно, по комбинаторному принципу умножения, задача решается $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ способами.

4. Всякое непустое множество имеет столько подмножеств с четным числом элементов, сколько и подмножеств с нечетным числом элементов; иными словами, при $n \geq 1$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots \quad (\text{П.13})$$

С помощью (П.12) равенство (П.13) можно конкретизировать:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}. \quad (\text{П.14})$$

Соотношение (П.13) получается применением формулы бинома Ньютона (П.9) к левой части тождества $(1 - 1)^n = 0$.

Приведем еще одно, чисто комбинаторное доказательство.

С каждым подмножеством X данного непустого множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ свяжем подмножество Y , определяемое следующим образом:

$$Y = \begin{cases} X \setminus \{a_1\}, & \text{если } a_1 \in X; \\ X \cup \{a_1\}, & \text{если } a_1 \notin X. \end{cases}$$

Иными словами, Y получается из X путем исключения или, наоборот, путем добавления к нему элемента a_1 в зависимости от того, содержит X элемент a_1 или не содержит.

Все подмножества множества A можно таким образом разбить на пары подмножеств (X, Y) , причем в каждой такой паре одно из подмножеств содержит четное, а другое — нечетное число элементов. Следовательно, подмножеств с четным числом элементов, столько же, сколько и подмножеств с нечетным числом элементов.

5. Крайние члены треугольника Паскаля равны 1. Каждый же из остальных членов равен сумме двух смежных с ним членов, стоящих в предыдущей строке.

Например (см. строку с номером $n = 4$),

$$4 = 1 + 3, \quad 6 = 3 + 3, \quad 4 = 3 + 1.$$

В общем случае (при $1 \leq m \leq n$)

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}. \quad (\text{П.15})$$

Последняя формула, между прочим, интересна и тем, что несет в себе правило построения каждой последующей строки треугольника Паскаля по предыдущей строке.

Доказать равенство (П.15) можно непосредственными вычислениями с помощью формулы (П.5). Однако гораздо интересней обратиться к ее комбинаторной трактовке: тех сочетаний из элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ по m , которые не содержат a_{n+1} , будет, очевидно, C_n^m ; тех же сочетаний, которые содержат a_{n+1} , будет C_n^{m-1} .

6°. Примеры решения комбинаторных задач.

Задача 1. Сколько пятизначных чисел можно записать цифрами 0, 1, 2, 3, 4 без повторений?

Решение. Первую цифру можно выбрать четырьмя способами (нуль в качестве первой цифры не используется); оставшиеся незанятыми четыре цифры можно затем расположить в любом порядке. Это определяет следующее количество рассматриваемых пятизначных чисел:

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96.$$

Этот результат может быть получен и несколько иными рассуждениями. Существует $5!$ перестановок из пяти цифр 0, 1, 2, 3, 4. Те из них, которые начинаются цифрой 0 (а их будет, очевидно, $4!$), нужно исключить из рассмотрения. В итоге получаем:

$$5! - 4! = 120 - 24 = 96.$$

Задача 2. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых используются лишь цифры 0, 1, 2, 3, 4 (возможно, с повторениями)?

Решение. Первая цифра может быть выбрана четырьмя способами, а каждая из последующих цифр — пятью способами, независимо от того, как выбраны предыдущие цифры. Следовательно, всего рассматриваемых чисел будет (по комбинаторному принципу умножения)

$$4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500.$$

Задача 3. Сколько существует пятизначных чисел, записываемых цифрами 0, 1, 2, 3, 4 без повторений, таких, что их центральная цифра является четной (0, 2 или 4)?

Решение. Цифру 0 в качестве третьей, центральной цифры имеют $4!$ рассматриваемых чисел — по числу способов, которыми можно заполнить первое, второе, четвертое и пятое места цифрами 1, 2, 3, 4.

Цифру 2 на третьем месте имеют $3 \cdot 3!$ рассматриваемых чисел: первое место может быть занято тремя способами (1, 2, 3), а оставшиеся три места — второе, четвертое и пятое — распределяются между оставшимися тремя цифрами.

Цифру 4 — так же, как и цифру 2 — имеют $3 \cdot 3!$ рассматриваемых чисел.

Далее, поскольку нас интересует хотя бы один из указанных трех случаев, используем комбинаторный принцип сложения. Всего рассматриваемых чисел существует:

$$4! + 3 \cdot 3! + 3 \cdot 3! = 60.$$

Задача 4. Сколько существует трехзначных чисел без повторяющихся цифр?

Решение. Из 10 имеющихся цифр 0, 1, 2, ..., 9 можно составить следующее число размещений по 3:

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Из них нужно исключить те размещения, которые начинаются цифрой 0; их будет, очевидно,

$$A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72.$$

Следовательно, искомых трехзначных чисел будет

$$A_{10}^3 - A_9^2 = 720 - 72 = 648.$$

Задача 5. Семь девушек водят хоровод. Сколькими способами они могут встать в круг?

Решение. Взаимное расположение любых семи точек A ,

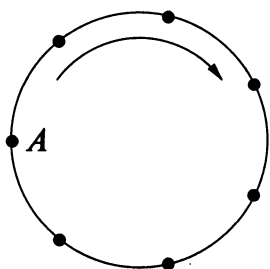


Рис. П.1.

B, C, D, E, F, G на окружности однозначно определяется расположением по часовой стрелке шести точек B, C, D, E, F, G относительно точки A (рис. П.1). А таких расположений будет $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Таким образом, семь девушек могут встать в круг 720 способами.

Задача 6. Сколько ожерелий можно составить из семи различных бусинок?

Решение. Ожерелье можно перевернуть. Нетрудно видеть, что рисунки П.2, а и П.2, б иллюстрируют два разных варианта решения предыдущей задачи, но лишь один вариант решения настоящей задачи. Поэтому, из семи различных бусинок

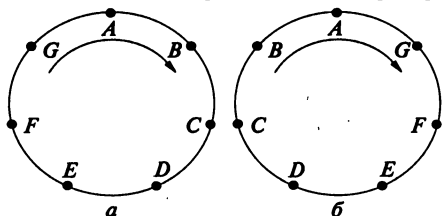


Рис. П.2.

можно составить $6! : 2 = 720 : 2 = 360$ ожерелий.

Задача 7. Сколькими кратчайшими путями вдоль прямоугольной сетки с образующими вида $x = k$ и $y = \ell$ (k и ℓ — неотрицательные целые числа; см. рис. П.3) можно попасть из точки $O(0, 0)$ в точку $Q(m, n)$? Сколько из этих путей проходят через точку $R(r, s)$?

Решение. Всякий кратчайший путь из O в Q складывается из $m + n$ «шагов»: m «шагов» совершается в направлении оси Ox , а оставшиеся n «шагов» — в направлении оси Oy . Очевидно, что всего таких путей будет столько, сколько существует способов выбрать m предметов

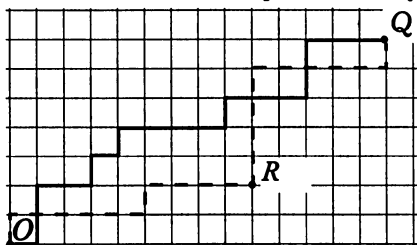


Рис. П.3.

из $m + n$ предметов, т. е. C_{m+n}^m .

Путь из O в Q через R состоит из двух участков: OR и RQ . Из O в R (по только что доказанному) можно попасть C_{r+s}^{r+s} путями, а из R в Q — $C_{(m+n)-(r+s)}^{m-r}$ путями. Таким образом,

существует

$$C_{r+s}^r \cdot C_{(m+n)-(r+s)}^{m-r}$$

путей, ведущих из O в Q через точку R .

В частности, из $O(0, 0)$ в $Q(6, 4)$ можно попасть следующим числом путей:

$$C_{10}^6 = C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Среди них через точку $R(3, 2)$ проходит следующее число путей:

$$C_5^3 \cdot C_5^2 = C_5^3 \cdot C_5^2 = \left(\frac{5 \cdot 4}{2}\right)^2 = 100.$$

Задача 8. В урне $m + n$ занумерованных (от 1 до $m + n$) шаров: m белых и n черных. Сколькими способами из нее можно извлечь $r + s \leq m + n$ шаров так, чтобы из них $r \leq m$ оказались белыми, а $s \leq n$ — черными?

Решение. Выбор нужных нам шаров из имеющихся $m + n$ шаров осуществляется в два этапа. На первом этапе выбираются r белых шаров (это можно сделать, очевидно, C_m^r способами), а на втором этапе — s черных шаров (это можно сделать C_n^s способами). По комбинаторному принципу умножения извлечь r белых и s черных шаров из рассматриваемой урны можно следующим числом способов: $C_m^r \cdot C_n^s$.

Задача 9. Сколькими способами из колоды карт (36 листов) можно выбрать 4 карты так, чтобы среди них было ровно 2 дамы, причем одна — дама пик?

Решение. Вся колоду карт

разобьем на три части: к первой части отнесем даму пик, ко второй части — дамы бубей, червей и треф, к третьей части — остальные 32 карты. Наша задача состоит теперь в том (см. рис. П.4), чтобы из первой части выбрать одну карту (это можно сделать единственным способом), из второй части выбрать также одну карту (это можно сделать тремя способами), из третьей части выбрать две карты (это можно сделать C_{32}^2 способами).

По комбинаторному принципу умножения всего для рассматриваемого выбора четырех карт существует

$$1 \cdot 3 \cdot C_{32}^2 = \frac{3 \cdot 32 \cdot 31}{2} = 1488$$

способов.

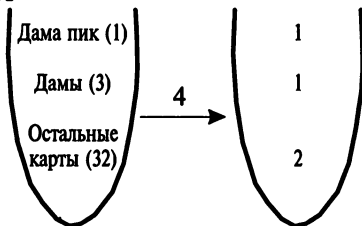


Рис. П.4.

Задача 10. Сколькими способами можно разместить семь одинаковых шаров в четырех занумерованных урнах? (Сколько неотрицательных целочисленных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$? См. также задачу о пирожных в п. 1.^о)

Решение. Будем использовать вертикальные черточки для изображения стенок, отделяющих урны друг от друга и звездочки — для изображения шаров. Тогда возможны, например, такие варианты:

$$| \quad | \quad | \quad * * * * * \quad | \quad * \quad | \quad (x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 1);$$

$$| \quad * \quad | \quad * * \quad | \quad | \quad * * * * \quad | \quad (x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 4)$$

и т. д. Допустимые варианты можно связать с комбинациями из пяти черточек и семи звездочек; эти элементы могут расставляться произвольно, кроме крайних черточек, которые должны оставаться неподвижными. Иными словами, в нашем распоряжении — произвольные расположения в ряд трех черточек и семи звездочек.

Всего существует $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ таких расположений (из 10 мест нужно выбрать три места для черточек, отводя оставшиеся 7 мест под звездочки).

Итак, семь одинаковых шаров можно разместить в четырех занумерованных (попарно различных) урнах 120 способами (другая интерпретация: уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ имеет 120 неотрицательных целочисленных решений; или: купить пирожные в ситуации, описанной в п. 1^о, можно 120 способами).

З а м е ч а н и е. Общий случай: уравнение

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$$

при целом $r \geq 0$ имеет C_{n+r-1}^r неотрицательных целочисленных решений. Другая интерпретация: r неразличимых шаров можно разместить в n занумерованных урнах C_{n+r-1}^r способами.

Таблица распределения Пуассона

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$\lambda \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,1	0,9048	0905	0045	0002						
0,2	8187	1637	0164	0011	0001					
0,3	7408	2222	0333	0033	0003					
0,4	6703	2681	0536	0072	0007	0001				
0,5	6065	3033	0758	0126	0016	0002				
0,6	5488	3293	0988	0198	0030	0004				
0,7	4966	3476	1217	0284	0050	0007	0001			
0,8	4493	3595	1438	0383	0077	0012	0002			
0,9	4066	3659	1647	0494	0111	0020	0003			
1,0	3679	3679	1839	0613	0153	0031	0005	0001		
1,1	3329	3662	2014	0738	0203	0045	0008	0001		
1,2	3012	3614	2169	0867	0260	0062	0012	0002		
1,3	2725	3543	2303	0998	0324	0084	0018	0003	0001	
1,4	2466	3452	2417	1128	0395	0111	0026	0005	0001	
1,5	2231	3347	2510	1255	0471	0141	0035	0008	0001	
1,6	2019	3230	2584	1378	0551	0176	0047	0011	0002	
1,7	1827	3106	2640	1496	0636	0216	0061	0015	0003	0001
1,8	1653	2975	2678	1607	0723	0260	0078	0020	0005	0001
1,9	1496	2842	2700	1710	0812	0309	0098	0027	0006	0001
2,0	1353	2707	2707	1804	0902	0361	0120	0034	0009	0002
2,1	1225	2572	2700	1890	0992	0417	0146	0044	0011	0003
2,2	1108	2438	2681	1966	1082	0476	0174	0055	0015	0004
2,3	1003	2306	2652	2033	1169	0538	0206	0068	0019	0005
2,4	0907	2177	2613	2090	1254	0602	0241	0083	0025	0007
2,5	0821	2052	2565	2138	1336	0668	0278	0099	0031	0009
2,6	0743	1931	2510	2176	1414	0735	0319	0118	0038	0011
2,7	0672	1815	2450	2205	1488	0804	0362	0139	0047	0014
2,8	0608	1703	2384	2225	1557	0872	0407	0163	0057	0018
2,9	0550	1596	2314	2237	1622	0940	0455	0188	0068	0022
3,0	0498	1494	2240	2240	1680	1008	0504	0216	0081	0027
3,1	0450	1397	2165	2237	1733	1075	0555	0246	0095	0033
3,2	0408	1304	2087	2226	1781	1140	0608	0278	0111	0040
3,3	0369	1217	2008	2209	1823	1203	0662	0312	0129	0047
3,4	0334	1135	1929	2186	1858	1264	0716	0348	0148	0056
3,5	0302	1057	1850	2158	1888	1322	0771	0385	0169	0066
3,6	0273	0984	1771	2125	1912	1377	0826	0425	0191	0076
3,7	0247	0915	1692	2087	1931	1429	0881	0466	0215	0089
3,8	0224	0850	1615	2046	1944	1477	0936	0508	0241	0102
3,9	0202	0789	1539	2001	1951	1522	0989	0551	0269	0116
4,0	0183	0733	1465	1954	1954	1563	1042	0595	0298	0132
5,0	0067	0337	0842	1404	1755	1755	1462	0640	0328	0150
6,0	0025	0149	0446	0892	1339	1606	1606	0636	0360	0168
7,0	0009	0064	0223	0521	0912	1277	1490	0732	0393	0188
8,0	0003	0027	0107	0286	0573	0916	1221	0778	0428	0209
9,0	0001	0011	0050	0150	0337	0607	0911	0824	0463	0232

Таблица значений функции $\phi(x)$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3905	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0135	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0001	0001	0001	0001	0001	0001				

Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0909	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2356	2389	2421	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2793	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3728	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3906	3925	3943	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4684	4656	4664	4671	4678	4686	4692	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4924	4927	4929	4930	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4958	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	4986	3,5	49981		4,0	499968				
3,1	4990	3,6	49985							
3,2	4993	3,7	49989		4,5	499997				
3,3	4995	3,8	49993							
3,4	4997	3,9	49995		5,0	4999997				

Таблица 4

Псевдослучайные числа с равномерным распределением в интервале (0, 1)

Числа, приведенные здесь, можно рассматривать как реализации (наблюдения) независимых случайных величин, имеющих распределение $R(0, 1)$.

0,4224	9874	6309	5451	3620	7864	6975	2500	0827	8822
0,8584	1172	8452	7304	6319	0544	1931	2839	1433	6737
0,8677	0357	1950	8751	4922	5994	9899	6179	9160	9646
0,5917	8104	1145	0261	5955	1021	2963	8359	9039	8700
0,8146	6651	8821	1805	7433	1144	1177	1111	8338	3475
0,7459	0002	1602	2098	4321	1357	2667	8036	2245	5584
0,7032	8736	5953	2613	1664	9998	0191	4698	1229	2381
0,5051	1467	0195	7585	8685	0682	8334	6183	1498	7143
0,2573	5637	0306	5828	4866	5113	6087	9902	3534	2958
0,6370	8773	6429	5805	2507	2865	5092	6567	6133	9163
0,4112	9456	0952	1206	2331	9670	8465	6443	1788	8886
0,0072	9048	5112	4247	2700	7407	3552	5641	8755	3714
0,7759	3066	8840	2604	0832	2998	2426	6525	4843	3705
0,8526	1684	6776	0341	9873	3590	3125	0118	9719	3458
0,1802	3131	0218	0408	1261	3889	3657	9969	4162	2420
0,7268	7267	7392	8169	4122	7183	4695	0100	4520	1805
0,5548	3047	1031	9314	1916	5926	7438	9397	1013	0360
0,9021	5050	1891	7892	2864	1476	8927	9459	9752	3995
0,7183	8507	5452	2197	9316	3327	6305	3349	6407	2362
0,1049	8256	3411	9341	0800	0207	7255	2009	4962	6950
0,3104	6316	9857	1169	4256	8892	5626	0073	3270	8832
0,4112	4776	2749	8351	9382	6712	9842	5028	7553	3997
0,4863	1788	2722	5417	8597	2971	6817	5896	1799	8961
0,0495	4026	2790	4002	1180	2575	2540	7520	5070	5309
0,5515	4871	4619	3163	1008	2767	7880	2429	8812	9074
0,5095	2795	0804	4480	1123	3735	3800	0634	7407	0575
0,9291	7522	0402	7272	8326	4656	1397	6879	7537	8084
0,9574	6498	4827	1138	9219	2312	8397	3293	5342	5858
0,0752	7708	1747	9203	7465	0742	8675	0591	3713	3000
0,7912	1114	7356	9392	0880	9503	9411	7257	6594	3294
0,5479	6923	7991	2599	8173	6166	9761	4595	8402	9789
0,7398	3883	7241	7057	7925	4834	8718	6941	4716	0604
0,6998	5929	0775	4448	1464	5887	2683	0980	0131	2315
0,5252	9134	5785	9920	5037	9700	8607	3204	3623	7285
0,7915	5462	6116	4300	4628	9304	5877	6887	5086	7517
0,7185	6953	3969	6282	0643	7295	2201	2222	3672	3598
0,2452	4258	9724	3856	7999	2109	6510	6177	3317	4783
0,5886	4934	1181	7618	1287	7908	1319	9479	8227	1692
0,3481	7289	2295	6158	2046	8491	6664	7335	5856	8086
0,1582	3847	3330	4307	1483	0566	7387	0363	1925	1073

Таблица 5

Псевдослучайные числа со стандартным нормальным распределением

Числа, приведенные здесь, можно рассматривать как реализации (наблюдения) независимых случайных величин, имеющих распределение $N(0, 1)$.

1,205	-0,237	-0,475	0,989	0,311	0,920	0,512	0,626	-0,705	0,655
0,645	-0,134	-0,893	-0,823	0,307	-0,472	-0,557	0,821	0,358	1,886
0,253	-1,029	0,880	0,315	0,157	2,080	-0,981	-1,635	1,644	0,964
3,609	0,111	-0,184	0,911	1,348	0,406	0,155	-0,688	1,374	-1,736
1,011	1,344	-0,231	-0,662	0,209	-1,317	-3,234	-0,130	-0,474	-0,019
-1,124	-0,034	-0,365	0,300	0,555	-2,265	0,923	0,481	0,273	-0,122
0,249	0,299	0,306	-0,410	-1,369	-0,696	0,354	0,877	1,421	-4,194
-0,570	-0,549	-0,362	-0,006	-0,567	0,345	-0,037	-0,733	-0,841	1,191
-2,059	2,101	0,218	-0,359	-0,516	-0,078	-0,107	0,657	-0,707	-0,197
-0,472	-0,877	-0,497	-0,144	1,094	0,412	-0,990	0,107	-0,816	0,356
1,795	-1,271	0,674	-1,413	-1,716	-0,550	1,663	0,012	-0,303	0,052
2,132	0,014	0,139	0,904	-1,213	0,307	-0,273	1,434	-0,635	-0,960
0,536	-0,725	-0,116	0,176	0,708	-2,735	-1,184	-0,630	0,801	-0,353
-0,251	-1,463	0,112	2,338	-0,758	0,410	-0,686	1,416	1,158	-1,603
0,209	0,777	-1,090	0,038	-1,221	0,363	0,398	1,659	-0,946	0,814
-0,387	-1,098	-0,883	-0,850	1,511	0,590	0,748	-0,833	-1,028	-0,308
-2,050	-0,198	0,668	-0,661	0,499	-1,002	0,386	-0,038	-0,689	-1,049
0,933	1,009	1,348	0,211	-0,678	0,179	0,866	0,798	1,395	-1,282
-1,486	-1,227	-1,129	0,607	0,769	0,089	-0,370	0,962	-0,590	1,822
0,117	1,743	1,421	0,644	-1,364	-0,588	1,054	-0,339	-0,311	1,015
-1,310	1,134	0,508	-1,100	-0,974	0,838	0,678	-1,034	1,438	-2,192
1,280	0,374	-0,237	1,317	-2,317	0,620	0,523	-1,971	0,601	-0,716
-0,601	-0,582	0,802	-0,882	-0,282	1,149	-0,903	-0,210	1,378	-0,381
0,182	-0,931	-0,257	0,185	-0,141	-1,209	-0,988	-0,169	2,155	-1,234
-0,027	-1,702	0,381	1,140	-0,744	0,109	-1,591	1,229	-0,910	-0,553
-0,410	-0,056	-0,641	0,521	-1,892	0,283	1,485	0,543	-0,033	0,268
1,050	-0,519	-0,501	-0,878	-3,219	1,629	-0,753	-1,155	0,132	0,875
0,727	-0,210	1,711	-0,005	-1,256	-0,721	-0,568	0,009	-0,428	-0,033
-1,130	-0,539	-0,105	-0,760	-1,188	-0,608	-0,618	1,255	-2,390	0,340
-0,413	0,680	1,791	-0,515	-1,079	-0,291	-1,112	1,355	-0,255	-1,611
-0,449	0,072	-0,253	-1,064	-0,717	-0,092	-0,939	0,149	0,894	0,590
0,322	1,087	-1,311	0,592	-0,458	0,680	0,013	-1,543	0,419	-1,162
-0,002	-0,735	1,154	-0,178	-1,331	-0,651	0,134	-0,008	-0,131	2,520
-0,056	-0,500	-0,138	-0,764	-0,176	0,392	1,090	1,874	0,621	0,457
-1,377	-1,074	-0,510	-0,488	-0,380	-0,807	-0,739	-0,978	1,344	-0,015
1,105	-0,756	0,029	-0,404	-0,789	-0,318	-0,565	-0,215	-0,842	-0,285
-0,619	0,639	-1,794	-0,978	1,989	0,803	-2,036	1,810	-1,067	-0,594
-1,839	1,042	-0,036	-1,426	0,597	-0,940	0,265	1,736	-1,201	1,288
0,835	-0,430	-0,515	1,205	-0,363	-0,066	-1,612	-1,521	-0,154	-0,224
0,100	0,182	0,751	0,224	1,066	-1,805	-0,366	0,871	-0,133	0,598

Ответы и указания

§ 1. Классическая схема теории вероятностей

- 1.2. а) 0,9; б) 0,1; в) 1. 1.4. а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{3}{8}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{7}{8}$; д) 1. 1.6. $\frac{3}{4}$.
1.8. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 0. 1.9. а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{1}{7}$. 1.11. $\frac{2}{5}$. 1.12. $\frac{1}{20}$. 1.13. $\frac{5}{6}$.
1.14. Вероятность получить счастливый билет для одного студента равна $28/30$, а для другого — $27/30$ — независимо от того, в какой последовательности они будут брать билеты.
1.15. $\frac{3}{32}$. У к а з а н и е. Рассмотрим следующую задачу. $32 = 2^5$ шара, из которых только один белый, располагают в ряд в случайном порядке. Чему равна вероятность того, что белый шар окажется на каком-то из первых трех мест? 1.16. 0,6. 1.18. $\frac{4}{5}$. 1.19. $\frac{11}{12}$. У к а з а н и е: число делится и на 4 и на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 12. 1.21. $\frac{1}{4}$.
1.23. Обе вероятности равны $\frac{2}{3}$. 1.25. а) $\frac{1}{720}$; б) $\frac{1}{120}$; в) $\frac{3}{10}$. 1.26. $\frac{1}{3420}$.
1.27. $\frac{7}{9}$. 1.28. $\frac{99}{323}$. 1.30. а) 0,1; б) 0,18. 1.31. 0,3024. 1.32. $\frac{151}{256}$.
1.34. Наше мнение: приз следует поделить в отношении 7:1 — в соответствии с вероятностями $\frac{7}{8}$ и $\frac{1}{8}$ выигрыша спортсменов в случае, если бы турнир продолжался до победного конца.
1.36. а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{3}{14}$. 1.37. $\frac{1}{7}$. 1.39. а) $1 - \frac{C_{48}^4}{C_{52}^4} \approx 0,28$; б) $1 - \frac{C_{26}^4}{C_{52}^4} \approx 0,94$.
1.40. а) $\frac{3}{10}$; б) $\frac{11}{12}$. 1.41. $\frac{9}{14}$. 1.42. $\frac{5}{7}$. 1.44. а) $\frac{1}{C_{100}^{70}}$; 0,7; б) 0,7; $\frac{1}{C_{100}^{70}}$;
в) $\frac{C_{81}^{68}}{C_{100}^{70}}$; г) $\frac{23}{77}$. 1.47. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{5}{12}$; д) $\frac{7}{12}$; е) $\frac{1}{4}$.
1.49. $\frac{C_{90}^3 C_{10}^2}{C_{100}^5} \approx 0,07$. 1.50. а) $\frac{49}{99}$; б) $\frac{377}{1650}$; в) $\frac{23}{66}$. 1.51. 11.
1.52. а) $\frac{16}{5525}$; б) $\frac{256}{425}$; в) $\frac{36}{5525}$. 1.54. $\frac{1}{83160}$. 1.56. а) $\frac{4}{21}$; б) $\frac{5}{21}$; в) $\frac{3}{7}$.
1.57. $\frac{5}{28}$. 1.60. $\frac{135}{323}$. 1.61. $\frac{C_{86}^{12} C_{13}^2}{C_{100}^{15}}$. 1.63. $\frac{C_{100}^{50} C_{900}^{450}}{C_{1000}^{500}} \approx \frac{1}{3\sqrt{5}\pi} \approx 0,08$.
1.64. а) $\frac{r!}{n^r}$; $\frac{1}{C_{n+r-1}^r}$; $\frac{1}{C_n^r}$; б) $\frac{A_n^r}{n^r}$; $\frac{C_n^r}{C_{n+r-1}^r}$; 1. 1.66. $\frac{1}{2}$. 1.67. $\frac{1}{3}$.
1.68. $\frac{5}{12}$. 1.71. $\frac{1}{14}$. 1.72. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$. 1.73. а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{1}{2}$. 1.74. $\frac{1}{12}$.
1.75. $\frac{1}{3}$. 1.76. а) 0,75; б) $\frac{1}{12\pi}(8\pi + 3\sqrt{3})$; в) $1 - \frac{2}{\pi}$. 1.79. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$.
1.80. $\frac{1}{4}$. 1.81. $\frac{2}{3}$. 1.82. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{n}{m} \right] = \frac{1}{m}$, где $[x]$ — целая часть числа x .
1.83. а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{1}{3}$. 1.84. а) 9; б) 10.
1.85. Более вероятно, что числа 1 и $2n$ окажутся в разных группах.

$$1.86. \frac{1}{(2n-1)!!} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}.$$

1.87. Вероятность того, что семь катастроф распределились по одной на каждый день недели, равна $\frac{7!}{7^7} \approx 0,006$.

1.88. 0,81. 1.89. Нет, не прав. 1.90. $\frac{1}{100}$.

$$1.91. 1) \frac{C_{r+s}^r C_{(m+n)-(r+s)}^{m-r}}{C_{m+n}^m}; 2) S = 2. 1.92. \frac{17}{33}. 1.93. \frac{3}{4}. 1.94. \frac{5}{6}.$$

$$1.95. \frac{105}{286}. 1.96. \frac{4}{9}. 1.97. \frac{3^5}{C_{15}^5} = \frac{81}{1001}. 1.98. \frac{2^{10}}{C_{20}^{10}} \approx 0,005.$$

$$1.99. а) \frac{11}{12}; б) \frac{1}{6}; в) \frac{1}{12}. 1.100. \frac{C_9^4}{90\,000} = 0,0014. 1.101. \frac{511}{1023}.$$

$$1.102. а) \frac{1}{10}; б) \frac{2}{5}. 1.103. а) \frac{5}{21}; б) \frac{8}{21}. 1.104. \frac{11}{45}.$$

$$1.105. 1) \frac{2}{5}; 2) \frac{1}{10}. 1.106. а) \frac{1}{120}; б) \frac{3}{10}; в) \frac{1}{6}. 1.107. \frac{n-m}{n+m}.$$

§ 2. Аксиоматика теории вероятностей

2.1. а) $A \cup B$; б) $A \cup B \cup C$; в) $A \setminus B$; г) AB . 2.2. а) $A \cup B \cup C$; б) $\overline{ABC}$; в) $\overline{AB}\overline{C}$; г) ABC ; д) $\overline{AB}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$; е) $\overline{ABC}$.

2.3. а) Если $\omega \in \overline{A \cup B}$, то $\omega \notin A \cup B$ и потому $\omega \notin A$, $\omega \notin B$, или $\omega \in \overline{A}$, $\omega \in \overline{B}$; следовательно, $\omega \in \overline{A \cap B}$. Обратно, если $\omega \in \overline{A \cap B}$, то $\omega \in \overline{A}$, $\omega \in \overline{B}$, или $\omega \notin A$, $\omega \notin B$, откуда $\omega \notin A \cup B$, т. е. $\omega \in \overline{A \cup B}$. Итак,

$$(\omega \in \overline{A \cup B}) \iff (\omega \in \overline{A \cap B}).$$

А это и означает, что $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$.

б) Формула является простым следствием формулы пункта а).

2.4. У к а з а н и е: $A \cap B = \overline{\overline{A \cup B}}$. 2.5. Можно. 2.6. Можно.

2.7. Вообще говоря, нет.

2.8. а) Нет, не может; б) да, может. 2.10. 2^k , где $1 \leq k \leq n$.

2.11. Из 16 подмножеств. 2.12. Вообще говоря, нет.

§ 3. Формулы сложения и умножения вероятностей

$$3.2. \frac{176}{969}. 3.3. \frac{41}{44}. 3.4. \text{Более вероятно, что студент сдаст экзамен.}$$

$$3.6. а) \frac{1}{3}; б) \frac{1}{6}. 3.7. \frac{11}{30}. 3.8. а) 0; б) \frac{15}{28}.$$

$$3.9. P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(AB). 3.10. \frac{1}{4}. 3.11. а) \frac{1}{14}; б) \frac{17}{28}; в) \frac{15}{28}.$$

$$3.12. а) \frac{8}{21}; б) \frac{2}{7}. 3.14. а) \frac{103}{280}; б) \frac{53}{144}; в) \frac{11}{60}. 3.15. \frac{1}{18}. 3.16. \approx 0,368.$$

$$3.19. p = \frac{1}{2}. 3.20. \frac{31}{32}. 3.21. 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^6 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,665.$$

$$3.22. 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^5 - \left(\frac{7}{8}\right)^5 \approx 0,487.$$

3.23. а) $1 - \left(\frac{7}{8}\right)^5 \approx 0,487$; б) $\left(\frac{7}{8}\right)^5 \approx 0,513$;

в) $\left(\frac{7}{8}\right)^5 - \left(\frac{6}{8}\right)^5 \approx 0,276$; г) $1 + \left(\frac{6}{8}\right)^5 - 2\left(\frac{7}{8}\right)^5 \approx 0,211$.

3.25. 3.26. 1) Указание: $0 \leq P(A_n + B_n) \leq P(A_n) + P(B_n)$.

2) Указание: $P(A_n) + P(B_n) - 1 \leq P(A_n B_n) \leq 1$.

3.27. Указание: $P(B) \leq P(A + B) \leq P(A) + P(B)$,

$P(A) + P(B) - 1 \leq P(AB) \leq P(B)$. 3.33. $\frac{1}{132}$. 3.35. 0,16. 3.37. $\frac{1}{30}$.

3.38. $\frac{1}{3}$. 3.39. $\frac{5}{9}$. 3.41. $\frac{2}{91}$. 3.42. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$. 3.43. а) $\frac{3}{11}$; б) $\frac{3}{4}$.

3.44. 1) Да, при $P(A) = 0$ или $P(A) = 1$; 2) если $P(A) = 0$, то $P(AB) = 0 = P(A)P(B)$; если $P(A) = 1$, то $P(AB) = P(B) = P(A)P(B)$.

3.45. а) Могут; б) могут. 3.47. $0,95^3 \cdot 0,8^4 \approx 0,3512$.

3.50. а) 0,128; б) 0,64; в) 0,488. 3.51. а) 0,21; б) 0,027. 3.52. 0,7599.

3.54. а) 0,976; б) 0,664. 3.55. 0,952. 3.56. 0,058906. 3.58. 6.

3.62. События A, B, C независимы попарно, но зависимы в совокупности.

3.64. Зависимы. 3.66. 0,788. 3.67. 2. 3.68. 0,145. 3.70. $\frac{1}{22}$.

3.72. $\frac{6}{11}, \frac{5}{11}$. 3.73. $\frac{13}{25}, \frac{12}{25}$; будет. 3.74. $\frac{n}{2n-1}, \frac{n-1}{2n-1}$; каждая из этих вероятностей стремится к $\frac{1}{2}$ при $n \rightarrow \infty$.

3.75. а) $p + (1-p)^2p + (1-p)^4p$; б) $(1-p)p + (1-p)^3p + (1-p)^5p$;

в) $(1-p)^6$; г) $(1-p)^5$. 3.76. 0,6. 3.77. а) $\frac{37}{60}$; б) $\frac{1}{15}$; в) $\frac{19}{60}$; г) $\frac{1}{10}$; д) 0; е) $\frac{1}{15}$.

3.79. $\frac{1}{81}$. 3.80. $\frac{25}{27}$. 3.81. $\frac{19}{32}$. 3.82. $\frac{5}{512}$. 3.83. а) $\frac{1}{16}$; б) $\frac{7}{128}$.

3.84. а) $\frac{5}{64}$; б) $\frac{9}{128}$. 3.85. 1) $p^3(p^3 - 3p^2 + 3)$; 2) $1; p^4 - 2p^3 + 1$.

3.86. а) q^3 ; б) pq^3 ; в) pq^3 ; г) pq^3 ; д) $pq^3 - pq^6$; $q = 1 - p$.

3.88. Большей надежностью обладает схема, представленная на рис. 3.5, а.

3.89. По одному блоку каждого типа. 3.90. 1) $(1-q)(1-q^2)(1-q^3)$;

2) $q^k[1 - (1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^{-1}$, $k = 1, 2, 3$.

3.91. 1) $1 - (1-p)(1-p^2)(1-p^3)$;

2) $p^k[1 - (1-p)(1-p^2)(1-p^3)]^{-1}$, $k = 1, 2, 3$; $p^3[1 - (1-p)(1-p^2)(1-p^3)]^{-1}$.

3.92. 1) $2p^5 - 5p^4 + 2p^3 + 2p^2$; 2) $(p^3 - 3p^2 + 2p + 1)(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2)^{-1}$;

$p(2 - p)^2(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2)^{-1}$;

3) элемент 3, с вероятностью $(1-p)(1+p)^2(1+2p+p^2-2p^3)^{-1}$.

3.93. Допустив, например, что $P(A_1 A_2) > 0$, мы получили бы

$$\sum_{k=1}^n P(A_k) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \leq P(A_1 + A_2) + P(A_3 + \dots + A_n) \leq \\ \leq (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)) + (P(A_3) + \dots + P(A_n)) < \\ < P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n),$$

т. е. $\sum_{k=1}^n P(A_k) < \sum_{k=1}^n P(A_k)$.

3.94. Если число белых шаров в корзине равно числу черных шаров, то приведенные в задаче события равновероятны; в противном случае более вероятно первое событие.

- 3.95. а) 0,3439; б) 0,4168; в) $\frac{11231}{90000} \approx 0,125$; г) $1 - \frac{8^5}{90000} \approx 0,636$.
- 3.96. а) $p^4 + q^4$; б) $p^4q + q^4p$; в) $1 - p^5 - q^5$. 3.97. а) 0,00004; б) 0,01099.
- 3.98. а) $\frac{1}{3}$ б) 1; в) $\frac{20}{87}$. 3.99. а) 0,997; б) 0,85; в) $\frac{17}{997} \approx 0,0171$.
- 3.100. а) $\frac{9}{64}$; б) $\frac{9}{16}$; в) $\frac{37}{64}$.
- 3.101. а) Вообще говоря, нет; б) да; в) вообще говоря, нет.
- 3.102. $\frac{19}{27}$. 3.103. а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{10}{21}$; г) $\frac{1}{7}$; д) $\frac{2}{3}$. 3.104. 0,72.
- 3.105. У к а з а н и е: $0 \leq 1 - x \leq e^{-x}$ при $0 \leq x \leq 1$.
- 3.106. а) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0,056$; б) $\left(\frac{7}{8}\right)^{10} - \left(\frac{6}{8}\right)^{10} \approx 0,207$;
в) $1 + \left(\frac{6}{8}\right)^{10} - 2\left(\frac{7}{8}\right)^{10} \approx 0,530$; г) $1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{10} - \left(\frac{7}{8}\right)^{10} \approx 0,737$;
д) $1 - \left(\frac{1}{8}\right)^9 \approx 1$. 3.107. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0,088$;
б) $\left(\frac{5}{6}\right)^6 - \left(\frac{4}{6}\right)^6 \approx 0,247$; в) $1 + \left(\frac{4}{6}\right)^6 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,418$.
- 3.108. а) $\frac{28}{165}$; б) $\frac{56}{495}$; в) $\frac{2}{99}$.
- 3.109. Вероятность того, что все 10 штрафов приходятся на два каких-то дня недели, равна $C_7^2 \left(\frac{2}{7}\right)^{10}$, т. е. практически — нулю.
- 3.110. $p_1Q^{-1}, (1-p_1)p_2Q^{-1}, (1-p_1)(1-p_2)p_3Q^{-1}$,
где $Q = p_1 + (1-p_1)p_2 + (1-p_1)(1-p_2)p_3$. 3.111. «отец-мать-отец».
- 3.112. 1) $2pq$; $p = 1/2$. 2) а) Зависимы при $p \neq 1/2$ и независимы при $p = 1/2$; б) независимы; в) зависимы при $p \neq 1/2$ и независимы при $p = 1/2$.
- 3.113. а) Независимы; б) зависимы. 3.114. Вообще говоря, неверно.
- 3.115. У к а з а н и е: положите, например, $C = \Omega$, если $P(A) = P(B) = 0$; $C = A$, если $P(A) \neq 0$; $C = B$, если $P(A) = 0, P(B) \neq 0$.
- 3.116. Нет, не обладает. 3.117. У к а з а н и е: умножьте почленно данное равенство на $P(C)$ и используйте формулу умножения вероятностей.
- 3.118. У к а з а н и е: используйте свойство непрерывности вероятности.
- 3.119. $0 \leq p \leq 1/2$.

§ 4. Формула полной вероятности; формула Байеса

- 4.3. 1) 0,0007; 2) $\frac{1996}{9993} \approx 0,2$. 4.4. 1) 0,915; 2) $\frac{18}{61}$. 4.5. 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{3}{4}$.
- 4.6. 1) $\frac{13}{40}$; 2) $\frac{45}{91}$. 4.8. 1) 0,13; 2) $\frac{1}{13}$. 4.9. 1) 0,375; 2) 0,6.
- 4.10. 1) 0,004075; 2) $\approx 0,1129$; $\approx 0,2663$; $\approx 0,6208$. 4.11. $\approx 0,9979$.
- 4.14. 2) 0,76. 4.17. 1) $\frac{7}{12}$; 2) $\frac{4}{7}$; 3) $\frac{27}{49}$. 4.18. $\frac{13}{30}$. 4.21. 0,6.
- 4.22. а) $\approx 0,171$; б) $\approx 0,720$. 4.24. $\frac{3}{7}$. 4.25. $\frac{2}{5}$. 4.26. $\frac{10}{19}$.
- 4.27. $1 - (1 - p_1(1 - p_0) - p_2p_0)^n$. 4.28. $\frac{p}{8 - 7p}$.

4.29. $\frac{k}{2+k}$; $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2+k} = 1$, $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{2+k} = 0$, что вполне согласуется с интуитивными представлениями о рассматриваемой априорной вероятности.

4.30. $\frac{20}{21}$. 4.31. $\frac{1}{3}$. 4.32. $\frac{57}{59}$.

4.33. $P(1111|3213) = \frac{3}{13}$, $P(2222|3213) = \frac{2}{13}$, $P(3333|3213) = \frac{8}{13}$.

4.34. а) $p_1 = 0,0282$; б) $p_2 = 0,0428$.

4.35. а) $0,027 \leq p_1 \leq 0,033$; б) $0,041 \leq p_2 \leq 0,047$.

4.36. $0,928 \leq p \leq 0,934$. 4.37. События A и B зависимы при $p_1 \neq p_2$ и независимы при $p_1 = p_2$. 4.38. $\frac{113}{150}$. 4.39. $\frac{m}{m+n}$. 4.40. $1 - \frac{a}{b}$.

§ 5. Схема Бернулли; полиномиальная схема

5.2. $\frac{5}{32}$. 5.3. $\approx 0,078$. 5.4. а) $\approx 0,513$; б) $\approx 0,366$; в) $\approx 0,015$.

5.5. Более вероятно достижение ровно двух успехов. 5.7. 5.

5.8. Вероятность выпадения 10 гербов равна вероятности выпадения 9 гербов.

5.9. $P_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{1}{2} \left(1 - C_n^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n} \right), & \text{если } n \text{ четно;} \end{cases} \quad P_5 = \frac{1}{2}, P_6 = \frac{11}{32}.$

5.11. $1 - (1 - p_0)^3 - 3p_0p_2(1 - p_0)^2$. 5.13. $\approx 0,32$.

5.14. а) $\approx 0,02$; б) $\approx 0,0002$. 5.16. $1 - q^6 - 6pq^5 - p^6$; $q = 1 - p$.

5.17. $0,784$. 5.18. $\approx 0,905$. 5.20. а) $\approx 0,201$; б) $\approx 0,302$.

5.21. а) $\approx 0,698$; б) $\approx 0,249$; в) $\approx 0,302$; г) ≈ 0 .

5.24. а) 18; б) 18 и 17. 5.26. $C_5^2 \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \right)^3 \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \right)^2 \approx 0,2432$.

Наиболее вероятное число точек, не попадающих внутрь треугольника, равно 3. 5.27. а) 4 лампы первого типа и 1 лампа второго типа; б) $0,63985$.

5.28. а) $3p^2 - 2p^3$; б) $(3p^2 - 2p^3)(2p' - 1) + (1 - p')$.

5.29. Система, представленная на рис. 5.3, в. 5.31. 1, $p, 1/2$.

5.32. $\frac{9}{14}$. 5.33. а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{1-p}{1-p^5}$. 5.35. $C_7^2 \left(\frac{1}{6} \right)^3 \left(\frac{5}{6} \right)^5 \approx 0,039$.

5.36. а) $\frac{63}{256}$; б) $\frac{63}{256}$; в) $\frac{3}{32}$. Примечание: больше (точнее, не меньше) вероятность того счета, который ближе к ничейному: по условию противники равносильны.

5.37. Наименее вероятный исход $n : 0$; наиболее вероятные исходы $n : (n-1)$ и $n : (n-2)$ — они имеют одинаковую вероятность.

5.38. а) $\approx 0,201$; б) $\approx 0,217$. 5.39. а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{56}$. 5.41. $\frac{12!}{2^6 \cdot 6^{12}} \approx 0,003$.

5.42. а) $\left(\frac{1}{2} \right)^{10} \approx 0,0010$; б) $C_{10}^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \approx 0,0439$; в) $C_{10}^5 \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \approx 0,2461$;

г) $(0,6)^{10} \approx 0,0060$; д) $\frac{10!}{10^{10}} \approx 0,0004$; е) $\frac{10!}{4!3!3!} 0,4^4 0,3^6 \approx 0,0781$.

5.43. а) $\frac{5}{64}$; б) $\frac{5}{64}$; в) $\frac{161}{1024}$; г) $\frac{193}{512}$. 5.44. $\frac{15}{16\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)^4 \approx 0,005$.

- 5.46. $\approx 0,074$. 5.47. $\approx 0,015$. 5.48. 0,27216. 5.50. 1) (0, 1, 2); указание: результат задачи 5.49 значительно сокращает число тех вариантов, которые приходится рассматривать. 2) $0 + 0 + 2 \neq 3$. 5.51. 1; 2. 5.52. $\approx 0,015$. 5.53. $\approx 0,033$. 5.54. 0,580096. 5.55. С большей вероятностью выиграет игрок, бросающий 6 игральных костей. 5.56. Более вероятно, что монету придется бросать 9 раз. 5.57. а) 0,59049; б) 0,08146; в) 0,00856. 5.58. а) 0,890625; б) 0,34464; в) 0,14634; г) 0,526995; д) 0,25956. 5.59. а) $\left(\frac{3}{4}\right)^n$; б) $C_n^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$; в) $2 \left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. 5.60. $\frac{195}{512}$. 5.61. $\frac{141}{3^6} \approx 0,1934$. 5.62. 100.

§ 6. Дискретные случайные величины

- 6.2. $M\xi = -0,4$; $D\xi = 1,44$; $\sigma = 1,2$. 6.3. а) 0,4; б) 0,8; в) 0,3. 6.4. $\eta \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$; $M\eta = 1,1$; $D\eta = 0,49$. 6.5. $\xi \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$; $M\xi = 2,5$; $D\xi = 0,25$. 6.6. $M\xi = 3 - (p^2 + q^2)$; $D\xi = (p^2 + q^2) - (p^2 + q^2)^2$. 6.7. $\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,01 & 0,27 & 0,72 \end{pmatrix}$; $M\xi = 2,71$. 6.8. $\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$; $M\xi = \frac{3}{2}$; $D\xi = \frac{3}{4}$; $\sigma_\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\eta \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$; $M\eta = \frac{3}{2}$; $D\eta = \frac{3}{4}$; $\sigma_\eta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\zeta \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$; $M\zeta = 1$; $D\zeta = \frac{1}{2}$; $\sigma_\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 6.9. $M\xi = \frac{34}{15}$, $M\eta = \frac{69}{35}$, $M\zeta = \frac{37}{21}$. 6.11. 1) $\frac{7}{6}$; 2) $\frac{3}{2}$. 6.13. $M\xi = \frac{3}{2}$, $D\xi = \frac{9}{4}$. 6.14. $\max_a D\xi = 7,6$ (при $a = 0,35$); $\min D\xi = 0,84$ (при $a = 1$). 6.15. 1) $\frac{7}{2}$; 2) 35; $\frac{7n}{2}$. 6.17. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{3}$. 6.18. 1) $\frac{119}{15}$; 2) $\frac{8}{15}$. 6.19. 1) $\frac{53}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. 6.20. $D\xi = \frac{n^2 - 1}{12}$. 6.22. $M\xi = 2,4$; $D\xi = 0,46$. 6.24. 10,2. 6.25. 1. 6.26. $8 \left[1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{10} \right] \approx 5,895$. 6.27. $6 \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \right] \approx 4$. 6.29. 1,31. 6.30. $\frac{35}{18}$. 6.31. $15 \left(\frac{14}{15}\right)^{15} \approx \frac{15}{e} \approx 5,5$. 6.32. $M\xi = n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx ne^{-1}$; примерно $\frac{1}{3}$, а точнее, $\frac{1}{e}$ всех урн окажутся пустыми. 6.33. а) $\frac{m}{n+1}$; б) $\frac{m}{n+1}$. 6.34. а) 4-е место; б) 40-е место. 6.36. а) Может, $Bi(12, 1/2)$; б) нет, не может. 6.37. 1. 6.38. $\frac{5}{11}$. 6.39. 2; $\frac{4}{3}$. 6.40. 2,8; 0,84; 3.

6.41. а) 8,2; б) 1. 6.42. а) 19,2; б) 19 и 20. 6.43. $p = 1/2$. 6.44. При $p \leq 1/101$, а также при $p \geq 100/101$. Равновероятными значениями при этом могут быть 0 и 1 (если $p = 1/101$), а также 99 и 100 (если $p = 100/101$).

6.45. 3, 4, 5. 6.46. а) $6 \left(\frac{7}{8}\right)^5 \approx 3,077$; б) $8 \left[1 - \left(\frac{7}{8}\right)^6 - \frac{6}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^5\right] \approx 1,332$.

6.47. $33/8$. 6.48. а) $63/16$; б) $147/32$. 6.49. $\frac{6}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^6\right]^{-1}$.

6.51. $M\eta = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$, $D\eta = \left(\frac{5}{2}\right)^{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^{20}$.

6.52. У к а з а н и е: $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. 6.53. $\frac{2^5}{3^6}$ или $\frac{2}{3^6}$. 6.55. 1) 3; 2) $\frac{4}{9}$.

6.57. 30; $\approx 0,0013$. 6.58. 52. 6.60. 3. 6.61. 11. 6.63. 9.

6.64. $n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \sim n \ln n$ при $n \rightarrow \infty$.

6.65. Интерпретация. Представим себе, что реле используется в моменты времени $t = 1, 2, 3, \dots$ и срабатывает безотказно случайное число раз $\xi \sim G(p)$. Тогда, если к моменту времени n реле не вышло из строя, то в этот момент времени его можно рассматривать как новое: на вероятность того, что оно проработает безотказно еще какое-то время k , никак не скажется то, что оно уже успешно проработало время n .

6.69. $H(\xi) = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p) \leq H(\eta)$, где $\eta \sim Bi(1, 1/2)$.

6.70. $H(p) = -\frac{1}{p} [p \ln p + (1-p) \ln(1-p)]$. 6.72. $H(\xi) = H(\eta)$.

6.76. $M\zeta = 0,6$; $D\zeta = 2,88$. 6.77. $M\xi = -0,5$; $D\xi = 3,75$.

6.78. $M\eta = 2,5$; $D\eta = 0,75$. 6.79. $\frac{35}{12}$. 6.80. 3,05; 1,2325.

6.81. 1) 5,5; 2) 0,1. 6.82. $\frac{q}{p}$. 6.83. $\xi \sim Bi\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

6.84. У к а з а н и е: а) $n = 3$, $p = \frac{1}{3}$; б) $n = 7$, $p = \frac{1}{4}$.

6.85. $\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/32 \end{pmatrix}$; $M\xi = 31/32$.

6.86. $\eta \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,04 & 0,16 & 0,8 \end{pmatrix}$; $M\eta = 1,76$.

6.87. а) $\frac{10}{11}$; б) $\frac{100}{11}$; в) $\frac{50}{11}$. 6.88. $\frac{10}{11} \left[1 - \left(\frac{10}{11}\right)^{10}\right]^{-1} \approx 1,48$.

6.90. а) $\frac{41}{144}$; б) $\frac{175}{1296}$; в) $\frac{7}{648}$. 6.91. 505. 6.92. 1.

6.93. а) -20 ; $4\sqrt{6}$; б) $m_0 = -20$.

6.94. $\xi \sim Bi(3; 0,25)$; $M\xi = 0,75$; $D\xi = 0,5625$. 6.95. 1.

6.96. $\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,2401 & 0,4116 & 0,2646 & 0,0756 & 0,0081 \end{pmatrix}$.

6.97. Искомая вероятность равна $\frac{1}{2}[\psi(1) + \psi(-1)]$, где $\psi(z)$ — производящая функция распределения $Bi(n, p)$. 6.98. $M\zeta = 2p(1-p)(n-1)$; $p = 1/2$.

$$6.99. M\zeta_1 = M\zeta_2 = \frac{2ab(n-1-cn+c^n)}{(1-c)^2} \text{ при } c \neq 1 \text{ и } M\zeta_1 = M\zeta_2 = 0$$

при $c = 1$; максимум будет при $a = b = 1/2$, $c = 0$.

$$6.100. \frac{1-p}{2-p}. 6.101. \text{ Например, } \xi \sim G(p), \text{ где } 0 < p \leq \min\left(1, \frac{1}{\Delta}\right).$$

$$6.102. D\xi = (M\xi)^2 + M\xi. 6.103. \frac{802}{189} \approx 4,24.$$

$$6.104. P(\xi = r) = \frac{C_m^r C_n^{k-r}}{C_{m+n}^k}; r = 0, 1, 2, \dots, m;$$

$$M\xi = k \frac{m}{m+n}; P(\xi = r) \sim C_k^r p^r (1-p)^{k-r}.$$

$$6.107. \xi \sim \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}; M\xi = 9/8; D\xi = 19/64.$$

$$6.108. \text{ а) } 1; \text{ б) } \frac{10}{11}; \text{ в) } \frac{11}{210}.$$

$$6.109. \text{ У к а з а н и е: покажите, что } \xi \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

$$6.110. H(\xi) = H(\tilde{\xi}). 6.111. \text{ Нет, неверно. } 6.112. p = \frac{1}{2}.$$

6.113. Нужно подобрать $x_1, x_2, \dots$ и $p_1, p_2, \dots$ так, чтобы выполнялись соотношения $p_k \geq 0$, $\sum_n p_k = 1$ и ряд $\sum_k x_k p_k$ сходиллся, но не абсолютно.

Достаточно, например, положить

$$p_n = C/n^2, \quad x_n = (-1)^n n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где C — нормирующая константа: $C \cdot \sum_n \frac{1}{n^2} = 1$.

$$6.114. \tilde{\xi} \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/3 & 7\sqrt{3}/6 & 2\sqrt{3} \\ 64/125 & 48/125 & 12/125 & 1/125 \end{pmatrix}.$$

§ 7. Предельные теоремы в схеме Бернулли

$$7.2. \text{ а) } \approx 0,36; \text{ б) } \approx 0,18; \text{ в) } \approx 0,92. 7.3. \approx 0,73. 7.4. \text{ а) } \approx 0,184; \text{ б) } \approx 0,632.$$

$$7.5. \approx 0,78. 7.6. \text{ а) } \approx 0,05; \text{ б) } \approx 0,22; \text{ в) } \approx 0,58.$$

$$7.7. \text{ Среднее число изюминок в булочке должно быть равно } k \geq 2 \ln 10 \approx 4,6052. 7.8. \text{ а) } 0,36; \text{ б) } 0,06; \text{ в) } 0,08.$$

$$7.9. \text{ а) } \approx 0,61; \text{ б) } \approx 0,09. 7.10. D\xi < D\eta.$$

$$7.11. 99 \text{ и } 100; \approx 0,04 \text{ (используйте формулу Стирлинга).}$$

$$7.12. \approx 0,699; 0,784. 7.13. 2/3. 7.14. \approx 0,12. 7.15. \approx 0,16.$$

$$7.16. e^{-\lambda(1-a)}; e^{-\lambda(1-a^2)} - e^{-2\lambda(1-a)}. 7.17. P(A) - P(B) = e^{-2\lambda}.$$

$$7.18. \approx \frac{1}{2}(1 + e^{-2}) \approx 0,5677. 7.23. \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{500}{\sqrt{6}}\right) \approx 1.$$

$$7.24. \frac{1}{2} + \Phi_0(20) \approx 1. 7.25. \approx 0.$$

$$7.26. \text{ а) } \frac{1}{4\sqrt{10}}\phi\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) \approx 0,009; \text{ б) } \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) \approx 0,9430.$$

$$7.27. \text{ а) } \frac{1}{\sqrt{1050}}\phi\left(\frac{50}{\sqrt{1050}}\right) \approx 0,0038; \text{ б) } \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{50}{\sqrt{1050}}\right) \approx 0,0618.$$

- 7.28. $\frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{125}{\sqrt{10}}\right) \approx 0$. 7.29. а) $\frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{300}{\sqrt{1491}}\right) \approx 0$;
 б) $\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{100}{\sqrt{1491}}\right) \approx 0,9952$; $\frac{1}{2} + \Phi_0(0) = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{100}{\sqrt{1491}}\right) \approx 0,0048$.
 7.30. Около 560 мест у каждого входа; около 540 мест у каждого входа.
 7.32. а) Около 5340 раз; б) около 9200 раз.
 7.33. От 490 до 550 мальчиков. 7.34. От 480 до 560 мальчиков.
 7.35. а) От 143 до 189 шестерок; б) от 136 до 196 шестерок.
 7.36. Около 370 раз. 7.37. а) $\approx 0,5472$; б) $\approx 0,7717$.
 7.38. а) $\approx 0,036$; б) $\approx 0,939$; в) $\approx 0,303$. 7.39. а) $\approx 0,013$; б) $\approx 0,090$; в) ≈ 0 .
 7.40. а) $\approx 2\Phi_0(1) \approx 0,6826$; б) $\approx e^{-1} \approx 0,37$. 7.41. а) 0,45; б) 0,04; в) 0,05.
 7.42. а) 0,26; б) 0,57. 7.43. 0,786. 7.44. а) 0,16; б) 0,16; в) 0,71.
 7.45. От 2746 до 9176. 7.46. 0,9679. 7.47. 14 каналов.
 7.48. а) $2,5^4 - 1,5^8 \approx 13,43$; б) $e^3 - e^2 \approx 12,70$.
 7.49. 1) а) 0,97; б) 0,56; в) 0,01; 2) 0,13. 7.50. $F(199) = F(200) \approx 0,028$.

§ 8. Непрерывные случайные величины

$$8.3. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - \frac{(r-x)^3}{r^3} & \text{при } 0 < x \leq r, \\ 1 & \text{при } x > r; \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3(r-x)^2}{r^3} & \text{при } x \in (0; r), \\ 0 & \text{при } x \notin (0; r); \end{cases} \quad M\xi = r/4; \quad D\xi = 3r^2/80.$$

$$8.4. C = 1; f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{при } x > 1, \\ 0 & \text{при } x < 1; \end{cases}$$

математического ожидания такого распределения не существует.

$$8.5. 1) C = \frac{1}{5}, M\xi = \frac{5}{2}, D\xi = \frac{25}{12}; 2) C = 1, M\xi = 0, D\xi = \frac{1}{6};$$

$$3) C = 2, M\xi = \frac{1}{2}, D\xi = \frac{1}{4}; 4) C = \frac{1}{2}, M\xi = 0, D\xi = 2;$$

$$5) C = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, M\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, D\xi = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

$$8.6. C = \frac{1}{\pi}; \text{ математического ожидания не существует.}$$

8.8. У к а з а н и е: см., например, задачу 8.6. 8.11. $a = 0, b = 6$.

8.12. У к а з а н и е: $\xi \sim R(0, 5; 3, 5)$. 8.13. Нет, не согласуется.

$$8.15. \frac{27}{16}. 8.16. 1) \frac{1}{2}; 2) 1. 8.17. 1) \frac{1}{2}, \frac{3}{16}; 2) \frac{39}{14}, \frac{25}{12}; 3) \frac{14}{5}, \frac{12}{25}.$$

$$8.18. 1) \frac{3}{4}; 2) \frac{3}{16}. 8.19. \frac{12}{25}, \frac{3}{4}. 8.20. \frac{1}{4}, \frac{11}{20}. 8.25. \lambda = \sqrt{3}. 8.28. 39\pi; 439, 5\pi^2.$$

$$8.35. \text{ Может; } M\xi = \left(\ln \frac{3}{2}\right)^{-1}. 8.36. \{\xi < M\xi\}.$$

$$8.38. 1) \left(\ln \left(\frac{3}{7}e + \sqrt{\frac{9e^2}{49} + 1}\right)\right)^{-1} \approx 1,007; 2) (\ln 8 - 1)^{-1} \approx 0,926.$$

$$8.39. M\eta = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, D\eta = \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)}. 8.41. C = \frac{1}{\lambda} \ln 2.$$

8.47. а) $\approx 0,345$; б) $0,5$; в) $\approx 0,672$; г) $\approx 0,411$; д) $\approx 0,963$; е) $\approx 0,763$.

8.49. а) $x \approx -1,92$; б) такого x не существует; в) $x \approx 1,28$.

8.51. $P(|\xi - 3| < 1) < P(|\xi - 2| < 1) = P(|\xi| < 1)$. 8.52. $\lambda \approx 0,675$.

8.54. $\approx 0,21$. 8.56. $|\Delta| \approx 5,7$. 8.57. $\sigma \approx 2,55$. 8.58. $\approx 0,9599$.

8.59. $M\xi = 7$, $D\xi \approx 163$. 8.60. $\sigma = \frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$. 8.61. $\sigma = \frac{6}{\sqrt{\ln 2}}$.

8.67. $\sqrt{\frac{2}{\pi}npq}$. 8.68. $C = 0$; $M|\xi| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

8.70. а) $f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^2}, & \text{если } x \in \left(\frac{8}{3}, 4\right), \\ 0, & \text{если } x \notin \left(\frac{8}{3}, 4\right); \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}, & \text{если } x \in (2, \infty), \\ 0, & \text{если } x \notin (2, \infty). \end{cases}$

8.78. $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 8.82. а) Нет, не может; б) да, может.

8.83. а) $\sigma^2 > \frac{1}{2\pi e}$; б) $\sigma^2 < \frac{1}{2\pi e}$; в) $\sigma^2 = \frac{1}{2\pi e}$.

8.84. а) $H(\xi) = H(\eta)$; б) $H(\eta) = H(\xi) + \ln|a|$. 8.90. Вообще говоря, неверно.

8.91. $2\sqrt{2\pi}$; $4\pi^2 - 8\pi$. 8.92. $\frac{65}{3}\pi$; $\frac{1123}{21}\pi^2$. 8.93. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{19}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; $\frac{1}{14}$.

8.94. У к а з а н и е: $\xi \sim R(-3, 13)$. 8.95. $\frac{49}{3}$.

8.96. a^2 . 8.97. $\approx 4,56\%$. 8.98. $\approx 0,29$.

8.99. а) 1, если $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$; 2, если $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$; б) 0, если $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$; 1, если $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

8.100. а) $\frac{\sqrt{3\pi}}{2} \approx 1,535$; б) $e^3\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2} - \Phi_0(2\sqrt{2})\right) \approx 0,085$;

в) $e^{14}\sqrt{\pi} [\Phi_0(6\sqrt{2}) - \Phi_0(2\sqrt{2})] \approx 4902$. 8.101. Существует: $C = (e^3\sqrt{\pi})^{-1}$;

$M\xi = 1$, $D\xi = \frac{1}{2}$. 8.103. $D\xi = \frac{\pi}{2}$. 8.104. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$. 8.105. $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}$; $\frac{3m}{4}$, $\frac{3}{8}m^2$.

8.106. По закону Коши. 8.108. $H(\tilde{\xi}) = H(\xi) - \ln\sqrt{D\xi}$.

§ 9. Смешанные задачи на случайные величины

9.1. У к а з а н и е: $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$. 9.6. Точные значения вероятности:

1) $2\Phi_0(3) \approx 0,997$; 2) $1 - e^{-4} \approx 0,9817$; 3) 1. 9.9. $P \geq \frac{5}{8}$.

9.12. 1) Верно. 2) Вообще говоря, неверно.

9.14. $M|\xi|^{1+\alpha} \geq M(|\xi|^{1+\alpha} I_{\{|\xi| \geq c\}}) \geq c^\alpha M(|\xi| I_{\{|\xi| \geq c\}})$.

9.16. У к а з а н и е: функция $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x > 0$ выпукла книзу.

9.21. 1) $\frac{1}{6^6} (1 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6) \approx 1,44$;

2) $\frac{1}{6^n} (1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

9.22. 1) $7 - \frac{1}{6^6} (1 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6) \approx 5,56$;

2) $7 - \frac{1}{6^n} (1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n) \rightarrow 6$ при $n \rightarrow \infty$.

9.23. а) $1 + \frac{1}{8^{10}} (1 + 2^{10} + \dots + 8^{10}) \approx 2,33$;

б) $10 - \frac{1}{8^{10}} (1 + 2^{10} + \dots + 8^{10}) \approx 8,67$. 9.24. а) 2,5; б) 3. 9.25. $3\frac{251}{324}$.

9.26. $M\xi_n = \frac{2}{3}\pi r \frac{\cos^3 \frac{\pi}{n}}{n \sin \frac{\pi}{n}} \rightarrow \frac{1}{3}r$ (при $n \rightarrow \infty$).

9.27. $M\xi = 3 - a^2 - b^2 + c^3 + 6abc$; наименьшее значение $M\xi$ достигается при $a = 1$ или при $b = 1$, наибольшее значение — при $c = 1$.

9.29. $\frac{1 - 0,96^{25}}{1 - 0,96} \approx 9$. 9.32. 3. 9.33. 1) $R(t) = 2e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t}$, $T = \frac{2}{3}T_0$;

2) $R(t) = e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t}$, $T = \frac{7}{6}T_0$; 3) $R(t) = 2e^{-3\lambda t} - e^{-4\lambda t}$, $T = \frac{5}{12}T_0$.

9.34. $M\zeta = 1 - \frac{1}{\lambda T} (1 - e^{-\lambda T})$. 9.36. $M\xi = -\frac{2}{7}$, $D\xi = \frac{23}{147}$.

9.37. $M[\xi] = \frac{7}{5}$, $D[\xi] = \frac{6}{25}$; $M\{\xi\} = \frac{1}{5}$, $D\{\xi\} = \frac{7}{75}$.

9.39. $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -2, \\ \Phi_0(2) + \Phi_0(x), & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ 1 - \Phi_0(2) + \Phi_0(x), & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

9.41. а) $\kappa_1 = 1/\sqrt{\lambda}$, $\kappa_2 = 1/\lambda$; б) $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = -1, 2$; в) $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 6$.

9.45. $\xi = -\operatorname{ctg}(\pi\eta)$. 9.46. $\xi = 2\eta - 1$. 9.47. $g(x) = \operatorname{ctg}(\pi e^{-\lambda x})$.

9.48. $g(x) = F_\eta^{-1}(F_\xi(x))$. 9.50. 1) Вообще говоря, нет; 2) да.

9.51. 1) Существует: $C = (2\sqrt{\pi}\Phi_0(\sqrt{2}))^{-1} \approx 0,67$;

2) Существует: $C = (\sqrt{\pi}e^4(\Phi_0(\sqrt{2}) + \Phi_0(5\sqrt{2})))^{-1} \approx 0,01$.

9.52. а) $M\xi = \frac{19}{7}$, $D\xi = \frac{520}{147}$; б) $M\xi = \frac{29}{24}$, $D\xi = \frac{455}{576}$.

9.55. У к а з а н и е: $M(\xi - c)^{2n-1}$ есть многочлен степени $2n - 1$ относительно c . 9.56. У к а з а н и е: используйте формулу

$$M\xi = - \int_{-\infty}^0 F(x) dx + \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx.$$

9.57.

$$M\xi = m \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m} \right)^n \right],$$

$$M\eta = m \left(1 - \frac{1}{m} \right)^n - \frac{1}{m^n} [1 + 2^n + 3^n + \dots + (m-1)^n],$$

$$M\zeta = \frac{1}{m^n} [1 + 2^n + 3^n + \dots + (m-1)^n].$$

9.58. У к а з а н и е: $D\xi \leq \left(\xi - \frac{a+b}{2} \right)^2$. 9.61. а) Равномерное

распределение: $P(\xi = x_1) = P(\xi = x_2) = \dots = P(\xi = x_n) = \frac{1}{n}$;

б) распределение: $P(\xi = x_1) = P(\xi = x_n) = \frac{1}{2}$; $P(\xi = x_k) = 0$,

$k = 2, 3, \dots, n-1$. 9.64. У к а з а н и е: если ξ — случайная величина с непрерывной функцией распределения $F(x)$, то $F(\xi) \sim R(0, 1)$.

9.68. а) Будет; б) будет. 9.69. У к а з а н и е:

$$M|\xi| = \int_0^{\infty} P(|\xi| > x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} P(|\xi| > x) dx.$$

9.70. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} P(\xi < x - \delta) \leq P(|\xi - \eta| \geq \delta) + P(\eta < x), \\ P(\eta < x) \leq P(\xi < x + \delta) + P(|\xi - \eta| \geq \delta). \end{cases}$$

Первое неравенство этой системы получается из второго заменой ξ на η , η на ξ , x на $x - \delta$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением одного второго неравенства приведенной системы. Имеем:

$$\begin{aligned} \{\eta < x\} &= \{\eta < x, \xi < x + \delta\} \cup \{\eta < x, \xi \geq x + \delta\} \subset \\ &\subset \{\xi < x + \delta\} \cup \{|\xi - \eta| \geq \delta\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P(\eta < x) \leq P(\xi < x + \delta) + P(|\xi - \eta| \geq \delta).$$

§ 10. Дискретные двумерные распределения вероятностей

10.2. 1) $\xi \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, $M\xi = 1/5$, $D\xi = 24/25$;

$\eta \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 10/30 & 11/30 & 9/30 \end{pmatrix}$, $M\eta = -1/30$, $D\eta = 569/900$.

2) ξ и η — зависимые случайные величины.

3) $K = \begin{pmatrix} 24/25 & -4/25 \\ -4/25 & 569/900 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{24/569} \\ -\sqrt{24/569} & 1 \end{pmatrix}$;

ξ и η — коррелированные случайные величины.

4)

x	-1	1	y	-1	0	1
$H(x) = M(\eta \xi = x)$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$G(y) = M(\xi \eta = y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{1}{3}$

5) $\hat{\eta} = H(\xi) \sim \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$; $\hat{\xi} = G(\eta) \sim \begin{pmatrix} 1/5 & 7/11 & -1/3 \\ 10/30 & 11/30 & 9/30 \end{pmatrix}$.

6) $M\hat{\eta} = -1/30 = M\eta$, $M\hat{\xi} = 1/5 = M\xi$.

10.3. 1) $\xi \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$, $M\xi = -1/5$, $D\xi = 24/25$;

$\eta \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3/6 & 1/6 & 2/6 \end{pmatrix}$, $M\eta = -1/6$, $D\eta = 29/36$.

2) ξ и η — независимые (и потому некоррелированные) величины.

3) $K = \begin{pmatrix} 24/25 & 0 \\ 0 & 29/36 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4)

x	-1	1	y	-1	0	1
$H(x) = M(\eta \xi = x)$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$G(y) = M(\xi \eta = y)$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$

$$5) P(\hat{\eta} = H(\xi) = -1/6) = 1, \quad P(\hat{\xi} = G(\eta) = -1/5) = 1.$$

$$6) M\hat{\eta} = -1/6 = M\eta, \quad M\hat{\xi} = -1/5 = M\xi.$$

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	$\xi \backslash \eta$	0	1	2
10.4.	0	0	0	10.5.	0	4/9	2/9
	1	0	1/2		1	2/9	1/18
	2	1/4	0		2	1/36	0
			0			0	0

$$10.6. 1) \xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}, \quad M\xi = 3/2, \quad D\xi = 3/4;$$

$$\eta \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad M\eta = 1, \quad D\eta = 1/2.$$

2) ξ и η — зависимые случайные величины.

$$3) K = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

ξ и η — некоррелированные, хотя и зависимые, величины.

x	0	1	2	3	y	0	1	2
$H(x) = M(\eta \xi = x)$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$G(y) = M(\xi \eta = y)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

$$5) \hat{\eta} = H(\xi) \sim \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & 4/3 & 0 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}; \quad P(\hat{\xi} = G(\eta) = 3/2) = 1.$$

$$6) M\hat{\eta} = 1 = M\eta, \quad M\hat{\xi} = 3/2 = M\xi. \quad 10.7. 3. \quad 10.8. 6/7.$$

$$10.9. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 8,5, \\ 2/3 & \text{при } 8,5 < x \leq 10, \\ 1 & \text{при } x > 10. \end{cases}$$

$$10.10. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ 1/2 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

10.11. 1) Очевидно, что $\text{cov}(\xi, \zeta) + \text{cov}(\eta, \zeta) = \text{cov}(\xi + \eta, \zeta) = \text{cov}(n, \zeta) = 0$. Поэтому, если $\text{cov}(\xi, \zeta) = f(p)$, то $\text{cov}(\eta, \zeta) = f(1 - p)$ и

$$f(p) + f(1 - p) = 0$$

для всякого $p \in (0, 1)$. При $p = 1/2$ это дает $f(1/2) = 0$.

2) Укажем и е: $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{n-1}$, где ξ_k равно 1, если k -й опыт приносит успех, и 0, если неудачу, а ζ_k равно 1, если k -й и $k+1$ -й знаки в последовательности плюсов и минусов не совпадают, и 0 в противном случае. 10.14. 3. 10.15. а) $1 + \frac{m}{n}$; б) $1 + \frac{m}{n+1} + \frac{n}{m+1}$ (см. задачу

6.33). 10.17. а) 42; б) 258. 10.19. $MS = 21$ для всех $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

10.20. 7. 10.21. 5. 10.22. Если ν — рассматриваемое число партий, то $M\nu = \infty$. 10.24. $-\frac{1}{n-1}$. 10.25. $-\frac{1}{m-1}$. 10.26. а) -1; б) -25. 10.27. $-\frac{3}{2}$.

$$10.28. \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad 10.29. -\frac{1}{\sqrt{7}}. \quad 10.31. H(\xi, \eta) = \ln 5 + \frac{4}{15} \ln 2 - \frac{1}{10} \ln 3 \approx 0,68.$$

10.32. Равномерное распределение: $p_{ij} = \frac{1}{mn}$; $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

$$10.33. H(\eta|\xi) > H(\xi|\eta). \quad 10.34. I_\xi(\eta) = H(\eta) = \frac{3}{2} \ln 2 \approx 1,04.$$

$$10.35. I_{\xi}(\eta) = \frac{83}{18} \ln 2 + 2 \ln 3 - \frac{10}{3} \ln 5 \approx 0,03.$$

$$10.37. 1) \xi \sim Bi(2; 0,5), \eta \sim Bi(3; 0,2); 3) \xi, \eta; 4) 0,344; 0,48; 55/103 \approx 0,534.$$

$$10.38. 1) D(\eta|\xi=1) = 2/9, D(\xi|\eta=0) = 8/9.$$

$$2) а) \xi + \eta \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/8 & 1/12 & 5/8 & 1/6 \end{pmatrix}; б) \xi\eta \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5/8 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix};$$

$\xi\eta \backslash \xi + \eta$	-2	-1	0	1
-1	0	0	5/8	0
0	0	1/12	0	1/6
1	1/8	0	0	0

$$10.39. \frac{n^2 - 1}{3n}. 10.40. 5,25.$$

$$10.41. -1. 10.42. -\frac{1}{5}; -1. 10.43. -\frac{1}{7}. 10.44. \xi \text{ и } \eta - \text{некоррелированные, но зависимые случайные величины. } 10.46. \text{ У к а з а н и е. Без ограничения общности можно считать, что величины } \xi \text{ и } \eta \text{ принимают лишь значения } 0 \text{ и } 1 \text{ (см. задачу 10.45). } 10.47. 3. 10.50. \xi \sim G(p), \text{ где } p = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2).$$

$$10.51. \text{ У к а з а н и е: } M \min(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\min(\xi, \eta) \geq k). 10.52. -\frac{1}{11}.$$

$$10.53. \rho = \frac{pq(\sigma^2 - \mu)}{\sqrt{(p^2\sigma^2 + pq\mu)(q^2\sigma^2 + pq\mu)}}, \text{ где } \mu = M\zeta, \sigma^2 = D\zeta.$$

§ 11. Непрерывные двумерные распределения вероятностей

$$11.2. 1) f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}, & \text{если } |x| \leq a, \\ 0, & \text{если } |x| > a; \end{cases} \quad M\xi = 0, \quad D\xi = a^2/4;$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi b^2} \sqrt{b^2 - y^2}, & \text{если } |y| \leq b, \\ 0, & \text{если } |y| > b; \end{cases} \quad M\eta = 0, \quad D\eta = b^2/4.$$

$$2) \xi \text{ и } \eta - \text{зависимые случайные величины.}$$

$$3) K = 1/4 \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\xi \text{ и } \eta - \text{некоррелированные случайные величины.}$$

$$4) H(x) = M(\eta|\xi=x) = 0, \quad G(y) = M(\xi|\eta=y) = 0.$$

$$5) P(\hat{\eta} = H(\xi) = 0) = 1, \quad P(\hat{\xi} = G(\eta) = 0) = 1.$$

$$6) M\hat{\eta} = 0 = M\eta, \quad M\hat{\xi} = 0 = M\xi.$$

$$11.3. 1) \frac{6}{5}; \frac{12}{25}; 2) 0; \frac{25}{12}. 11.4. 1) 0; \frac{16}{3}; 2) \frac{3}{2}; \frac{3}{4}.$$

$$11.5. 1) F_1(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0; \end{cases} \quad M\xi = 1/\lambda, \quad D\xi = 1/\lambda^2;$$

$$F_2(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu y}, & \text{если } y > 0, \\ 0, & \text{если } y \leq 0; \end{cases} \quad M\eta = 1/\mu, \quad D\eta = 1/\mu^2.$$

$$2) \xi \text{ и } \eta - \text{независимые (и потому некоррелированные) величины.}$$

$$3) K = \begin{pmatrix} 1/\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1/\mu^2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4) H(x) = M(\eta|\xi=x) = 1/\mu, \quad G(y) = M(\xi|\eta=y) = 1/\lambda.$$

$$5) P(\hat{\eta} = H(\xi) = 1/\mu) = 1, \quad P(\hat{\xi} = G(\eta) = 1/\lambda) = 1.$$

$$6) M\hat{\eta} = 1/\mu = M\eta, \quad M\hat{\xi} = 1/\lambda = M\xi.$$

11.6. 1) $a = \frac{1}{\pi^2}$; $f_1(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$, $f_2(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}$; 2) ξ и η — независимые случайные величины; о корреляции в данном случае говорить не имеет смысла, поскольку ковариация величин ξ и η не определена.

11.7. $M\xi = 0$, $M\eta = 1$, $\text{cov}(\xi, \eta) = M\xi^3 = 0$ и, таким образом, величины ξ и η некоррелированы, хотя и, очевидно, зависимы.

11.8. 1) 2; 2) 14; 3) 14; 4) 28; 5) 42; 6) 8.

11.11. 1) 1; 2) -1 ; 3) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{10-2\lambda}{\sqrt{5(\lambda^2-8\lambda+20)}}$. 11.12. 1) 0; 2) $\frac{3}{\sqrt{15}}$; 3) 1.

11.14. 0,71875. 11.16. 1) $2\Phi_0(1) \approx 0,6826$; 2) $2\Phi_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,520$.

11.18. $1 - e^{-\frac{1}{2}k^2}$. 11.19. $M\zeta = \sqrt{\pi/2}$; $D\zeta = 2 - \pi/2$.

11.23. В обоих случаях по закону Коши. 11.24. 1) По закону Коши;

2) по закону Коши с плотностью $f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{\alpha^2 + x^2}$ при $\alpha = 3/2$.

11.25. По закону Коши. 11.26. $f_{R,\varphi}(x, y) = \frac{1}{2\pi} x e^{-\frac{1}{2}x^2}$; $x > 0$, $0 \leq y \leq 2\pi$;

$f_R(x) = x e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x > 0$; $f_\varphi(y) = \frac{1}{2\pi}$, $0 \leq y \leq 2\pi$.

11.27. $f(x) = \frac{2x}{(1+x)^3}$, $x > 0$. 11.30. $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

У к а з а н и е: используйте результат задачи 11.26 или результат задачи 11.22.

11.32. 1) $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \in (1, 2), \\ 3-x, & \text{если } x \in (2, 3), \\ 0, & \text{если } x \notin (1, 3); \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \in (-1, 0), \\ 1-x, & \text{если } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{если } |x| \geq 1; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x, & \text{если } x \in (0, 2), \\ 1 - \frac{1}{4}x, & \text{если } x \in (2, 4), \\ 0, & \text{если } x \notin (0, 4); \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-2), & \text{если } x \in (2, 3), \\ \frac{1}{3}, & \text{если } x \in (3, 5), \\ \frac{1}{3}(6-x), & \text{если } x \in (5, 6), \\ 0, & \text{если } x \notin (2, 6). \end{cases}$

11.33. $f_{\xi+\eta}(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$, $x > 0$. 11.35. $\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{\lambda^m}$.

$$11.36. 1) f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases} \quad 2) f(x) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|x|}.$$

11.37. Случайная величина $\xi + \eta$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности

$$f_{\xi+\eta}(x) = p_0 f(x) + p_1 f(x-1) + p_2 f(x-2) + \dots + p_n f(x-n) + \dots,$$

где $p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, если $x > 0$, и $f(x) = 0$, если $x < 0$.

$$11.39. \frac{\pi}{\lambda^2}(a+b); \frac{\pi^2}{\lambda^4}(23a^2 + 23b^2 + 22ab). \quad 11.40. 1) 3\pi, 27\pi^2; 2) 2, \pi^2 - 4;$$

$$3) \frac{5}{8}\pi, \frac{223}{576}\pi^2. \quad 11.43. \text{Равномерное распределение.} \quad 11.44. 1 - \ln 2.$$

11.45. 1) Нет, неверно; 2) верно. 11.46. Верно. 11.47. См. задачу 11.46.

$$11.48. \xi. \quad 11.49. K = \begin{pmatrix} 10\,000 \frac{1}{12} & -19\,999 \frac{11}{12} \\ -19\,999 \frac{11}{12} & 39\,999 \frac{11}{12} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -0,9999\dots \\ -0,9999\dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Близость коэффициента корреляции к -1 объясняется тем, что практически $\eta_1 = \xi_1 + 2\xi_2 = 2\xi_2$, $\eta_2 = \xi_1 - 4\xi_2 = -4\xi_2$ и поэтому $\eta_2 = -2\eta_1$.

11.52. ξ и η — некоррелированные зависимые величины.

11.53. 1) $2\Phi_0(1, 25) \approx 0,788$; 2) $1 - 2\Phi_0(\sqrt{2}) \approx 0,157$.

11.54. Указания: начните с того, что

$$P\left(\frac{\xi}{\eta} < z\right) = \iint_{\frac{x}{y} < z} f(x, y) dx dy.$$

11.55. Указания: начните с того, что

$$P(\xi\eta < z) = \iint_{xy < z} f(x, y) dx dy.$$

11.56. Второй метод.

11.57. Указания: $\text{cov}(\alpha\xi + \beta, \gamma\eta + \delta) = \alpha\gamma \text{cov}(\xi, \eta)$.

11.58. $P(\xi > 0, \eta > 0) \leq P(\xi + \eta > 0) = 1/2$; $P(\xi > 0)P(\eta > 0) = 9/16 > 1/2$.

11.59. Указания: $P(A) = M I_A$, где I_A — индикатор события A .

11.60. Указания: используйте результат задачи 11.59.

11.61. Указания: используйте результат задачи 11.59 и 8.111.

11.62. 0; вообще говоря, изменится. 11.63. $\frac{1}{3}$.

11.64. Указания: $|a - b| \leq \left|a - \frac{1}{2}\right| + \left|b - \frac{1}{2}\right|$.

$$11.65. 1) M\eta_1 = \int_0^1 P(\xi_1 > x)P(\xi_2 > x) dx = \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$M\eta_2 = M(\xi_1 + \xi_2 - \eta_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$M\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) = M\left(\frac{1}{\eta_2} M(\eta_1|\eta_2)\right) = M\left(\frac{1}{\eta_2} \cdot \frac{\eta_2}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$2) \text{cov}(\eta_1, \eta_2) = M(\eta_1\eta_2) - M\eta_1 M\eta_2 = M(\xi_1\xi_2) - M\eta_1 M\eta_2 =$$

$$= M\xi_1 M\xi_2 - M\eta_1 M\eta_2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}. \quad 3) \hat{\eta}_2 = \frac{1}{2}(\eta_1 + 1).$$

$$11.66. 1) \frac{1}{4\lambda^2}; 2) \hat{\eta}_2 = \eta_1 + \frac{1}{\lambda}.$$

11.67. Не выполняется условие $\Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} F(x, y) \geq 0$

(например, при $a_1 = -1$, $b_1 = 1$; $a_2 = 0$, $b_2 = 2$).

11.68. Нет, не для всякой. 11.69. У к а з а н и е: проверьте выполнимость характеристических свойств функции распределения (см. с. 214).

11.70. 1) Верно; 2) нет, неверно. 11.72. У к а з а н и е. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ , $g(x)$ — возрастающая функция, $M\xi = a$, $Mg(\xi) = b$ и x_0 — точка, такая, что $g(x) - b \leq 0$ при $x < x_0$ и $g(x) - b \geq 0$ при $x > x_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, g(\xi)) &= M((\xi - a)(g(\xi) - b)) = \\ &= M((\xi - x_0)(g(\xi) - b)) + (x_0 - a)M(g(\xi) - b) = M((\xi - x_0)(g(\xi) - b)) \geq 0, \end{aligned}$$

поскольку выражение под знаком математического ожидания неотрицательно с вероятностью 1 — по определению точки x_0 .

§ 12. Распределения вероятностей в $\mathbb{R}^n$

12.1. 1) $-1, 42$; 2) $-4, 30$; 3) $6, 314$; 4) $11, 126$; 5) $4, 33$; 6) $-10, 66$.

12.2. 1) $\lambda = -1 - \sqrt{2}$; 2) $\lambda = -1 + \sqrt{2}$.

12.3. 1) $M\eta = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 100 & \\ & 30 \end{pmatrix}$, $K_\eta = \frac{1}{\lambda^2} \begin{pmatrix} 100 & 30 \\ 30 & 30 \end{pmatrix}$;

2) $M\eta = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 31 & \\ & 91 \end{pmatrix}$, $K_\eta = \frac{1}{\lambda^2} \begin{pmatrix} 31 & 31 \\ 31 & 91 \end{pmatrix}$.

12.4. 1) Нет, не существуют; 2) да, существуют.

12.6. $30 \left(\frac{4}{6}\right)^6 + 6 \left(\frac{5}{6}\right)^6 - 36 \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \approx 0,605$.

12.7. $56 \left(\frac{6}{8}\right)^7 + 8 \left(\frac{7}{8}\right)^7 - 64 \left(\frac{7}{8}\right)^{14} \approx 0,747$.

12.8. $MS = 505$, $DS = 7575$. 12.9. 1) У к а з а н и е: $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{n-1}$, где слагаемые независимы и одинаково распределены по закону $Bi(1, 1/2)$.

2) У к а з а н и е: $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{n-1}$, причем $\zeta_k \sim Bi(1, 2pq)$ и $\text{cov}(\zeta_k, \zeta_{k+r}) = 0$, если $r > 1$. 3) Допустив, что $\zeta \sim Bi(m, p')$, мы должны были бы иметь $M\zeta = mp'$, $D\zeta = mp'(1 - p')$; но это не так.

12.10. $R = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{pmatrix}$, где $\rho = -\frac{1}{n-1}$.

12.13. ξ , η и ζ — независимые и одинаково распределенные по закону $R(-1, 1)$ случайные величины.

12.14. $A = \frac{1}{8}$. 12.15. A — любое число, удовлетворяющее условию

$|A| \leq \frac{1}{8}$; случайные величины ξ , η , ζ независимы попарно, но зависимы в

совокупности, если $0 < |A| \leq \frac{1}{8}$, и независимы в совокупности, если $A = 0$.

12.16. У к а з а н и е: рассмотрите n -мерные аналоги задач 12.14 и 12.15.

12.17. Вообще говоря, нельзя. 12.19. По закону Эрланга (см. задачу 11.34)

с плотностью вероятности $f_k(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}$, $t > 0$. 12.20. $\frac{1}{\lambda}$.

$$12.22. 42. 12.25. MV = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, DV = 1 - \frac{8}{\pi^3}.$$

$$12.26. 1) f^{**}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} n!, & \text{если } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad 2) \frac{1}{n!}.$$

$$12.27. \frac{1}{n!}. 12.28. M\nu = e = 2,71828\dots$$

$$12.33. 1) A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

$$2) H = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, K_\eta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix};$$

$$3) K^{-1/2} = \frac{1}{162\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 17 & -2 & 2 \\ -2 & 14 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$12.35. 1) P(2\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 5) = 1; 2) P(2\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 = -9) = 1.$$

$$12.36. \text{Например, } A = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. 12.37. \frac{1}{6}.$$

$$12.38. \text{Геометрическое распределение с параметром } p' = 1 - (1 - p)^n.$$

$$12.39. \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^n\right)^{-1}. 12.40. 1 - \frac{2}{n+1}. 12.41. \text{Нет, независимы.}$$

$$12.42. \text{У к а з а н и е: если } x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, k, \\ \text{то } P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_k = x_k) =$$

$$= P\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_k}{2^k} \leq \xi < \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_k}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k}.$$

$$12.43. MS = \frac{m(n+1)}{2}; DS = \frac{m(n+1)(n-m)}{12}.$$

$$12.44. D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) \leq \sum_{i,j=1}^n \sqrt{D\xi_i D\xi_j} = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{D\xi_k}\right)^2.$$

$$\text{Равенство достигается тогда и только тогда, когда для всех } i, j = 1, 2, \dots, n \\ \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sqrt{D\xi_i D\xi_j},$$

или когда $\overset{\circ}{\xi}_i$ и $\overset{\circ}{\xi}_j$ связаны линейной зависимостью с неотрицательным коэффициентом пропорциональности. В этом случае среди величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ можно выделить одну, скажем, ξ_1 , так, что будет выполняться соотношение

$$P\left(\overset{\circ}{\xi}_2 = a_2 \overset{\circ}{\xi}_1, \dots, \overset{\circ}{\xi}_n = a_n \overset{\circ}{\xi}_1\right) = 1$$

для некоторых неотрицательных чисел $a_2, \dots, a_n$.

$$12.46. C_{n+k-1}^k. 12.47. \text{а) Будет; б) вообще говоря, не будет.}$$

12.48. Если A и B — ковариационные матрицы независимых случайных векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$ соответственно, причем $M\xi = M\eta = 0$, то C — ковариационная матрица случайного вектора $\zeta = (\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \dots, \xi_n\eta_n)^T$. 12.49. Да, будет. 12.50. Вообще говоря, нет.

§ 13. Характеристические функции

13.2. Условия $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$ и $\overline{\varphi(t)} = \varphi(t)$ выполняются тогда и только тогда, когда $\varphi(-t) = \varphi(t)$.

13.4. Существует; например, характеристическая функция экспоненциального распределения.

13.5. У к а з а н и е. $\operatorname{Re} \varphi(t) = M \cos t\xi$, $\operatorname{Im} \varphi(t) = M \sin t\xi$.

13.6. У к а з а н и е. а) $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$; б) $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; в) $\varphi(-t) = \varphi(t)$, но $\varphi(-t) \neq \overline{\varphi(t)}$, например, при $t = \frac{\pi}{2}$.

13.7. Данная функция не является четной.

13.11. 1) $\frac{1}{2}(1 - e^{-2})$; 2) $\frac{1}{2}(1 + e^{-2})$; 3) $\frac{1}{2}(1 - e^{-8})$.

13.12. $\eta = \xi - 1$; $M\eta = M\xi - 1$, $D\eta = D\xi$, — при условии, что $D\xi < \infty$.

13.14. Вообще говоря, неверно. 13.15. Нет, не является.

13.21. $f_n(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ (распределение Эрланга).

13.22. $f_\zeta(x) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|x|}$ (распределение Лапласа).

13.23. У к а з а н и е: $|\varphi(t)|^2 = \varphi(t)\overline{\varphi(t)} = \varphi(t)\varphi(-t)$.

13.25. $\bar{\xi} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. 13.26. По закону Коши с параметром α .

13.29. а) 0; 12; б) 1; 1,5. 13.30. $R(-2, 2)$. 13.32. $p_1 = p_2 = p$.

13.33. $\xi \sim Bi(n_1, p)$, $\eta \sim Bi(n_2, p)$, $1 \leq n_1 \leq n$, $1 \leq n_2 \leq n$.

13.34. 1) $\varphi(t) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \cos t$; 2) $\varphi(t) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{4+t^2}$.

13.35. Например, $\varphi(t) = a \cdot 1 + (1-a) \cdot e^{-|t|}$.

13.37. Пусть, например, $a_1 < 0$. Если бы функция $\varphi(t)$ была характеристической, то соответствующая ей функция распределения $F(x)$ не была бы возрастающей в окрестностях точек $-\omega_1$ и ω_1 .

13.38. Может, например, $2\varphi(t) - \varphi(t) = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — характеристическая функция. Другой пример: $2 \cdot \frac{\cos 2t + \cos t}{2} - \cos 2t = \cos t$. Аналогичные примеры можно строить и с помощью теоремы Поля.

13.40. У к а з а н и е: используйте теорему Поля.

13.41. Нет, не существуют.

13.48. 1) $\varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(2\tau_1^2 + 2\tau_2^2 + 3\tau_3^2 + 2\tau_1\tau_2 + 4\tau_1\tau_3) \right\}$;

2) $\varphi_{13}(\tau_1, \tau_3) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(2\tau_1^2 + 3\tau_3^2 + 4\tau_1\tau_3) \right\}$; 3) $\varphi_1(\tau_1) = \exp(-\tau_1^2)$; 4) 4.

13.49. $\omega = 0$, $a = 1$; $\omega \neq 0$, $|b| \leq a = 1$. 13.50. У к а з а н и е: $M|g(\xi)| < \infty$.

13.51. У к а з а н и е: $\cos tx \geq 1 - \frac{(tx)^2}{2}$. 13.52. 1) $\operatorname{Re} \varphi(t) = \frac{1}{2}(\varphi(t) + \overline{\varphi(t)})$; 2) $\operatorname{Im} \varphi(t)$ — нечетная вещественная функция.

13.53. Например, $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$, где $\varphi_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$, $\lambda > 0$;

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a}, & \text{если } |t| \leq a, \\ 0, & \text{если } |t| > a, \end{cases} \quad a > 0.$$

13.54. $\frac{\pi(a+b)}{ab} \frac{1}{(a+b)^2 + x^2}$. 13.55. 1) $\frac{\pi}{2^{n-1}}$; 2) $C_m^{\frac{1}{2}(m+n)} \frac{\pi}{2^{m-1}}$, если сумма $m+n$ четна и $n \leq m$; 0 в остальных случаях.

13.56. См. задачу 13.27. 13.57. 1) Является; 2) является.

13.58. У к а з а н и е: функция $\varphi(t)$ выпукла книзу при $t > 0$.

13.59. П р и м е ч а н и е: полезно обратить внимание на то, что каждый из данных интегралов равен $Me^{i\xi\eta}$, где ξ и η — независимые случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно.

13.60. Нет, не может.

13.61. У к а з а н и е: используйте теорему Карлемана.

13.62. У к а з а н и е: используйте теорему Карлемана.

13.63. У к а з а н и е. Требуемую функцию можно подобрать, например, в классе функций вида $\varphi(t) = a + (1-a)e^{-t^2} \cos t$, где $0 < a < 1$.

13.64. У к а з а н и е: $|\varphi(t)| \equiv 1$. 13.66. У к а з а н и е: из

$$\sum_n P\left(\xi = a + \frac{2\pi}{t_1}n\right) = \sum_n P\left(\xi = b + \frac{2\pi}{\alpha t_1}m\right) = 1$$

следует, что если ξ имеет невырожденное распределение вероятностей, то для некоторых целых n_1, m_1, n_2, m_2

$$a + \frac{2\pi}{t_1}n_1 = b + \frac{2\pi}{\alpha t_1}m_1, \quad a + \frac{2\pi}{t_1}n_2 = b + \frac{2\pi}{\alpha t_1}m_2,$$

откуда $\frac{m_1 - m_2}{n_1 - n_2} = \alpha$, что противоречит предположению о том, что α — иррациональное число. 13.67. У к а з а н и е: по теореме о среднем $\varphi^*(t) = \varphi(\tau_t)$, где τ_t — некоторая точка, промежуточная между точками 0 и t ; далее используйте теорему Бохнера-Хинчина.

§ 14. Многомерное нормальное распределение вероятностей

14.2. а) $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-4)^2}{50}\right\}$; $\varphi(t) = \exp\left(4it - \frac{25}{2}t^2\right)$;

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{138\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-3)^2}{138}\right\}$; $\varphi(t) = \exp\left(3it - \frac{69}{2}t^2\right)$.

14.3. 1) $\xi; (\xi, \eta, \zeta)^T$. 2) а) $1 + \Phi_0\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \Phi_0\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right) \approx 0,770$;

б) $1 - \Phi_0\left(\frac{10}{\sqrt{159}}\right) - \Phi_0\left(\frac{16}{\sqrt{159}}\right) \approx 0,316$; в) $\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{14}{\sqrt{103}}\right) \approx 0,916$.

3) $f_{13}(x, z) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{20}[3(x+1)^2 - 2(x+1)z + z^2]\right\}$,

$\varphi_{13}(t_1, t_3) = \exp\left\{-it_1 - \frac{5}{2}(t_1^2 - 2t_1t_3 + 3t_3^2)\right\}$.

14.5. 1) $a = \frac{4}{\pi\sqrt{\pi}}$; $\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $K = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 13 & 9 & 1 \\ 9 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$R = \begin{pmatrix} 1 & 3/\sqrt{13} & 1/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} & 1 & 1/3 \\ 1/\sqrt{13} & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$. 2) $\lambda = -3 - \sqrt{\frac{7}{4}}\Phi_0^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx -3,893$.

3) $H(\eta) - H(\xi) = \ln 3$.

14.11. 1) $\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{7}{2\sqrt{3}}\right) \approx 0,9783$; 2) $\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,9998$; 3) 0,5;

4) $\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,8759$; 5) $1 + \Phi_0\left(\frac{5}{2\sqrt{3}}\right) - \Phi_0\left(\frac{21}{2\sqrt{3}}\right) \approx 0,925$;

6) $2\Phi_0\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,752$. 14.12. 1) Всегда. 2) Может.

14.13. 1) $1 + \Phi_0(\sqrt{2}) - \Phi_0(3\sqrt{2}) \approx 0,920$; 2) $2\Phi_0\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) \approx 0,726$.

14.14. 1) $\Phi_0\left(\frac{7}{\sqrt{70}}\right) + \Phi_0\left(\frac{13}{\sqrt{70}}\right) \approx 0,738$; 2) $\Phi_0(5) - \Phi_0(1) \approx 0,159$.

14.16. 1) $f(x, y) = \frac{1}{80\sqrt{6}\pi} \exp\left\{-\frac{1}{480}[5x^2 - 6xy + 3y^2]\right\}$;

2) $f(x, y) = \frac{1}{80\sqrt{6}\pi} \exp\left\{-\frac{1}{480}[5(x-30)^2 - 6(x-30)(y-50) + 3(y-50)^2]\right\}$.

14.17. 1) $1 - 4\Phi_0^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0,729$; 2) $4\Phi_0^2(\sqrt{2}) \approx 0,710$;

3) $4\Phi_0^2(\sqrt{2}) - 4\Phi_0^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0,439$; 4) $e^{-1/2} \approx 0,6065$;

5) $1 - e^{-2} \approx 0,8647$; 6) $e^{-1/2} - e^{-2} \approx 0,471$.

14.18. 1) $1 - e^{-1} \approx 0,6321$; 2) $1 - e^{-2} \approx 0,8647$; 3) $e^{-1} - e^{-2} \approx 0,233$;

14.19. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$. 14.23. 1) $12\rho^2 + 3$; 2) 0; 3) $60\rho^3 + 45\rho$.

14.24. По закону Коши с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} \frac{1}{(1-\rho^2) + (x-\rho)^2}.$$

14.27. 2) $I_\xi(\zeta) > I_\eta(\zeta)$. 14.28. $I_\xi(\zeta) < I_\eta(\zeta)$.

14.29. $I_\xi(\zeta) = \ln \sqrt{\frac{7}{3}}$, $I_\eta(\zeta) = \ln \sqrt{\frac{35}{34}}$, $I_{\xi, \eta}(\zeta) = \ln \sqrt{\frac{28}{3}}$.

14.30. $\hat{\xi} = -\frac{1}{4}(\eta + 5)$, $\mathbf{M}(\hat{\xi} - \xi)^2 = \frac{3}{4}$; $\hat{\eta} = -5 - \xi$, $\mathbf{M}(\hat{\eta} - \eta)^2 = 3$.

14.31. $\hat{\xi} = \frac{1}{6}(\eta + 1)$, $\mathbf{M}(\hat{\xi} - \xi)^2 = \frac{81}{2}$; $\hat{\eta} = -1 - \frac{3}{2}\xi$, $\mathbf{M}(\hat{\eta} - \eta)^2 = \frac{729}{2}$.

14.33. $\hat{\zeta}(\xi) = -1 + \frac{1}{5}\xi$, $\Delta_\xi = \frac{14}{5}$; $\hat{\zeta}(\eta) = 1 - \eta$, $\Delta_\eta = 2$.

14.34. Предпочтительнее оценка $\hat{\zeta}(\eta)$, поскольку

$$\mathbf{M}[\hat{\zeta}(\eta) - \zeta]^2 < \mathbf{M}[\hat{\zeta}(\xi) - \zeta]^2.$$

14.35. 1) $\hat{\zeta} \sim \mathcal{N}(\mu, \rho^2 \mathbf{K})$; 2) $\hat{\zeta}$. 14.36. $\hat{\zeta}(\xi) = 3 - 2(\xi + 2)$, $\Delta_\xi = 3$;

$\hat{\zeta}(\eta) = 3 - \frac{1}{5}(\eta - 1)$, $\Delta_\eta = \frac{34}{5}$; $\hat{\zeta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(11\xi + 3\eta - 9)$, $\Delta_{\xi\eta} = \frac{3}{4}$.

14.37. $\hat{\zeta}(\xi, \eta) = -\xi - 3\eta + 5$, $\Delta_{\xi\eta} = 1$.

14.39.

$$1) \mathbf{K}^{-1/2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; (\mathbf{A}^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/5 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 8/5 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad K^{-1/2} = \frac{1}{500} \begin{pmatrix} 49\sqrt{2}+1 & 7-7\sqrt{2} \\ 7-7\sqrt{2} & 49+\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad H = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}; \quad (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7/51 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 51 & 0 \\ 0 & 5000/51 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad K^{-1/2} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 22 \end{pmatrix}; \quad H = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}; \quad (A^{-1})^T = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 21 & 52 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 20,8 & 0 \\ 0 & 20,8 \end{pmatrix};$$

$$4) \quad K^{-1/2} = \frac{1}{234} \begin{pmatrix} 225+\sqrt{3} & 45-5\sqrt{3} \\ 45-5\sqrt{3} & 9+25\sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad H = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}; \quad (A^{-1})^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

$$14.40. \quad K^{-1/2} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}; \quad H = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}; \quad (A^{-1})^T = \frac{1}{84} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ -11 & 6 & 0 \\ -33 & -66 & 84 \end{pmatrix},$$

$$U = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{pmatrix}.$$

$$14.41. \quad K^{-1/2} = C^{1/2} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4+\sqrt{6} & 2-2\sqrt{6} \\ 2-2\sqrt{6} & 1+4\sqrt{6} \end{pmatrix}; \quad G = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$K_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_\eta = V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$14.42. \quad \text{Например, } \eta = A(\xi - \mu) \sim \mathcal{N}(0, K_\eta),$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_\eta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$14.43. \quad \text{Например, } \eta = S\xi \sim \mathcal{N}(S\mu, K_\eta),$$

$$\text{где } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_\eta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$14.44. \quad \text{Например, } \eta = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \xi + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$14.45. \quad \text{Например, } \eta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xi - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$14.46. \quad \text{Например, } \eta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 11 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

14.47. Например, $\eta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

14.48. Например,

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{31}} \left[\begin{pmatrix} \sqrt{31} & 2\sqrt{31}+3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 3\sqrt{31}+9 \\ -2\sqrt{31}+6 \end{pmatrix} \right].$$

14.49. $\xi = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \tilde{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$;

$$\xi = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4+\sqrt{6} & -2+2\sqrt{6} \\ -2+2\sqrt{6} & 1+4\sqrt{6} \end{pmatrix} \tilde{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

14.50. $\xi = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 51 & 0 \\ -32 & 25 \end{pmatrix} \tilde{\xi} + \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\xi = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 57 & -24 \\ -24 & 43 \end{pmatrix} \tilde{\xi} + \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

14.51. $\xi = \frac{1}{5\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -18 & 26 \end{pmatrix} \tilde{\xi} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\xi = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 22 \end{pmatrix} \tilde{\xi} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

14.52. $\xi = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tilde{\xi} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 1,5 \end{pmatrix} \tilde{\xi} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

14.61. 1) $3\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$; 2) $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0$. 14.65. 1) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; 2) $8\pi\sqrt{\pi}$.

14.66. $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[5(x_1 - 2)^2 + 6(x_2 + 3)^2 + x_3^2 + 10(x_1 - 2)(x_2 + 3) + 4(x_1 - 2)x_3 + 4(x_2 + 3)x_3 \right] \right\}$.

14.69. $H(\xi) = H(\eta)$. 14.70. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$.

14.71. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{4}{5}$; 3) $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{6\pi}{5(\pi^2 - 1)}$. 14.72. $\frac{4}{\pi} \sqrt{1 - \rho^2}$.

14.76. По закону $\mathcal{N}(0, 1)$. 14.77. У к а з а н и е: см. задачу 11.53.

14.80. При $3x + y = 5$. 14.81. $x = 1, y = 2, z = 3$.

14.83. 1) Верно; 2) вообще говоря, неверно.

14.84. $I_\xi(\zeta) = \ln \sqrt{\frac{5}{4}}$; $I_\eta(\zeta) = \ln \sqrt{\frac{35}{34}}$; $I_{\xi\eta}(\zeta) = \ln \sqrt{5}$.

14.85. $2\Phi_0(2) \approx 0,9544$; 2) $2\Phi_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,436$;

3) $\frac{1}{2} - \Phi_0\left(3\sqrt{\frac{5}{14}}\right) \approx 0,0366$; 4) $1 - \Phi_0(12\sqrt{6}) \approx \frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$;

6) $2\Phi_0\left(3\sqrt{\frac{3}{14}}\right) \approx 0,8348$. 14.86. 2; $\frac{38}{3}$.

У к а з а н и е: предварительно покажите, что

$$(\zeta, \xi - 2\eta) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}\right).$$

14.87. $f_\eta(x, y) = \frac{1}{20\sqrt{21}\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{420} \left[7(x - 100)^2 - 14(x - 100)(y - 70) + 10(y - 70)^2 \right] \right\}$.

14.88. $\zeta \sim E(\lambda)$, где $\lambda = \frac{1}{2(1-\rho^2)}$. 14.89. $-\frac{1}{\sqrt{\pi}}; \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

У к а з а н и е: $\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$, $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$.

14.90. $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$. 14.91. $-\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}; \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$.

14.93. Если $\zeta' = A\xi$, $\zeta'' = A\eta$, то при $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ имеем:

$K_{\zeta'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $K_{\zeta''} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

14.95. У к а з а н и е: если $\det C \neq 0$ и $C^T = C$, то

$$(x - \mu)^T C (x - \mu) + \lambda^T x = (x - \nu)^T C (x - \nu) + \left(\lambda^T \mu - \frac{1}{4} \lambda^T C^{-1} \lambda \right),$$

где $\nu = \mu - \frac{1}{2} C^{-1} \lambda$.

§ 15. Виды вероятностной сходимости

15.9. У к а з а н и е: $\eta_n = \xi_n - (\xi_n - \eta_n)$.

15.10. 1) У к а з а н и е: $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

15.17. Из условия $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{P} 0$ следует, что $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. Далее воспользуйтесь результатом задачи 15.15.

15.18. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если $|x - a| < \delta$,

то $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon$. Следовательно,

$$P\left(\left|\frac{1}{\xi_n} - \frac{1}{a}\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{1}{\xi_n} - \frac{1}{a}\right| \geq \varepsilon, |\xi_n - a| \geq \delta\right) \leq P(|\xi_n - a| \geq \delta) \rightarrow 0.$$

15.20. У к а з а н и е: рассмотрите последовательность $\xi_n = \xi + a_n \eta$, где

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

15.21. 1) $\xi_n = \frac{\xi}{n}$, где ξ имеет распределение Коши;

2) $\xi_n = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq n, \\ 0, & \text{если } |\xi| > n, \end{cases}$ где ξ имеет распределение Коши;

3) $\xi_n = \frac{n}{n+1} \xi$, где ξ имеет распределение Коши; 4) см. пункт 2;

5) $\xi_n \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{6\sqrt{n}} & 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{3\sqrt{n}} \end{pmatrix}$.

15.22. Вообще говоря, неверно. 15.23. σ^2 может быть любым неотрицательным числом. 15.26. Верно. 15.27. Доказательство аналогично доказательству утверждения задачи 15.18. 15.28. Если $0 < x < 1$, то при $n \rightarrow \infty$

$F_1(x) = P(\xi'_n < x) = 1 - P(\xi'_n \geq x) = 1 - (1 - x)^n \rightarrow 1$,

$F_2(x) = P(\xi''_n < x) = x^n \rightarrow 0$.

15.29. Если $a < x < b$, то при $n \rightarrow \infty$

$F_1(x) = P(\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < x) = 1 - (1 - F(x))^n \rightarrow 1$,

$F_2(x) = P(\max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < x) = F^n(x) \rightarrow 0$.

15.30. Если $M|\xi| < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| \geq n) < \infty$ (см. задачу 9.69) и потому,

по лемме Бореля–Кантелли, с вероятностью 1 произойдет лишь конечное множество событий вида $|\xi| \geq n$.

15.31. Пусть $\varepsilon > 0$ и $F(x) = P(\xi_n < x)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = P(|\xi_n| \geq n\varepsilon) = \int_{|x| \geq n\varepsilon} dF(x) \rightarrow 0.$$

15.32. См. решение задачи 15.30. 15.33. 1) Верно; 2) неверно.

15.34. Пусть $\varphi_n(t) = Me^{it\xi_n}$ и последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ . Тогда $\xi_{n+1} - \xi_n \xrightarrow{P} 0$ и потому $\varphi_{n+1}(t)\overline{\varphi_n(t)} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Если $\varphi(t) = Me^{it\xi}$, то

$$\varphi(t)\overline{\varphi(t)} = |\varphi(t)|^2 \equiv 1, \quad |\varphi(t)| \equiv 1.$$

Это возможно лишь в случае, когда $\varphi(t) = e^{itC}$ (см. задачу 13.46).

15.38. Верно.

15.39. У к а з а н и е: используйте неравенства $\xi^2 \leq 2[(\xi - \eta)^2 + \eta^2]$,

$(\sqrt{M\xi^2} - \sqrt{M\eta^2})^2 \leq M(\xi - \eta)^2$. 15.40. Пусть, например, $P(\xi = 1) = 1$, а

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Тогда $M\xi_n^2 = M\xi^2$, но $\xi_n \not\xrightarrow{CK} \xi$.

15.41. У к а з а н и е: рассмотрите случайные величины

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} -n^\alpha & 0 & n^\alpha \\ \frac{1}{n^\beta} & 1 - \frac{2}{n^\beta} & \frac{1}{n^\beta} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

15.42. См. решение задачи 15.41. 15.44. У к а з а н и е: используйте неравенство Ляпунова

$$(M|\xi_n - \xi|^s)^{1/s} \leq (M|\xi_n - \xi|^t)^{1/t}.$$

15.45. $M(\xi_n - \mu)^2 = M((\xi_n - \mu_n) + (\mu_n - \mu))^2 \leq$
 $\leq 2[M(\xi_n - \mu_n)^2 + (\mu_n - \mu)^2] = 2[\sigma_n^2 + (\mu_n - \mu)^2] \rightarrow 0.$

15.47. Вообще говоря, неверно.

15.48. Если $|g(x)| \leq C$, то для всякого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} M(g(\xi_n) - g(\xi))^2 &= M\left((g(\xi_n) - g(\xi))^2 I_{\{|g(\xi_n) - g(\xi)| < \delta\}}\right) + \\ &+ M\left((g(\xi_n) - g(\xi))^2 I_{\{|g(\xi_n) - g(\xi)| \geq \delta\}}\right) \leq \\ &\leq \delta^2 + 4C^2 P(|g(\xi_n) - g(\xi)| \geq \delta). \end{aligned}$$

При достаточно большом n полученное выражение может быть сколь угодно малым, поскольку δ произвольно, а $g(\xi_n) \xrightarrow{P} g(\xi)$. Ни одно из ограничений, наложенных на функцию $g(x)$, — непрерывность и ограниченность — опустить нельзя; подтверждающие это примеры подберите самостоятельно.

15.56. 1) Верно; 2) вообще говоря, неверно; 3) верно. 15.58. Верно.

15.60. Верно. 15.62. Нет, неверно. 15.63. Предельное распределение либо экспоненциальное, либо вырожденное, сосредоточенное в точке 0.

15.67. Вообще говоря, не означает. 15.68. 2) Нет, не сходится.

3) Да, сходится в основном к функции распределения $R(0, 1)$.

15.72. По определению индикатора случайного события

$$I_{\{\xi_n < a\}} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - P(\xi_n < a) & P(\xi_n < a) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - F_n(a) & F_n(a) \end{pmatrix}$$

и, аналогично,

$$I_{\{\xi < a\}} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - F(a) & F(a) \end{pmatrix}.$$

По условию задачи $F_n(a) \rightarrow F(a)$ при $n \rightarrow \infty$. Остается использовать результат задачи 15.71.

15.73. Пусть $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $\eta_n = g(\xi_n)$. Если $\xi_n \xrightarrow{P} 0$, то, поскольку $g(x)$ — непрерывная ограниченная функция,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} dF_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} M g(\xi_n) = M g(0) = 0.$$

Обратно, если $M \eta_n = M g(\xi_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то для всякого $\varepsilon > 0$

$$P(\eta_n \geq \varepsilon) \leq \frac{M g(\xi_n)}{\varepsilon} \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\eta_n \xrightarrow{P} 0$. В таком случае

$$\xi_n^2 = \frac{\eta_n}{1 - \eta_n} \xrightarrow{P} 0, \quad \xi_n \xrightarrow{P} 0.$$

15.77. Да, всякая.

$$\begin{aligned} 15.78. P(|\xi_n - a| < \varepsilon) &= P\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{\xi_n - a}{\sigma} < \frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}\right) \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

15.79. По условию $\frac{\xi_n - a}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow{d} \tilde{\xi} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\xi_n^2 - a^2}{2|a|\sigma}\sqrt{n} &= \frac{(\xi_n - a)^2}{2|a|\sigma}\sqrt{n} + \frac{\xi_n - a}{\sigma}\sqrt{n} = \\ &= \frac{1}{2|a|}(\xi_n - a)\frac{\xi_n - a}{\sigma}\sqrt{n} + \frac{\xi_n - a}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow{d} 0 \cdot \tilde{\xi} + \tilde{\xi} = \tilde{\xi}. \end{aligned}$$

15.83. Да, является. 15.84. Да, является. 15.85. Да, является.

15.86. У к а з а н и е: $\sup_n M\left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq c\}}\right) = \frac{1}{\sqrt{c}}$ для всякого фиксированного $c \geq 1$; можно также использовать теорему 15.14.

15.87. У к а з а н и е: $\sup_n M\left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq c\}}\right) = 1$; можно также использовать теорему 15.14.

15.88. Для всякого фиксированного $c > 0$

$$\begin{aligned} \sup_n \mathbf{M}|\xi_n| &\leq \sup_n \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq c\}} \right) + \sup_n \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| < c\}} \right) < \\ &< \sup_n \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq c\}} \right) + c. \end{aligned}$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно; см. задачу 15.87.

15.90. У к а з а н и е: $\mathbf{M}|\xi_n| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_n$.

15.91. Может; см. задачу 15.86.

15.92. У к а з а н и е. Для любого фиксированного $A > 0$ существует $c \geq 0$, такое, что $f(x) \geq Ax$ при $x \geq c$ и, стало быть,

$$\mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq c\}} \right) \leq \frac{1}{A} \mathbf{M} \left(f(|\xi_n|) I_{\{|\xi_n| \geq c\}} \right) \leq \frac{1}{A} \mathbf{M} f(|\xi_n|).$$

15.93. Пусть $\sup_n \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq c\}} \right) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$. Тогда выполняется условие $\sup_n \mathbf{M}|\xi_n| < \infty$ (задача 15.88) и

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(|\xi_n| I_A) &= \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_A I_{\{|\xi_n| \geq c\}} \right) + \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_A I_{\{|\xi_n| < c\}} \right) \leq \\ &\leq \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq c\}} \right) + c\mathbf{P}(A), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\sup_n \mathbf{M}|\xi_n| < \infty$ и $\sup_n \mathbf{M}(|\xi_n| I_A) \rightarrow 0$ при $\mathbf{P}(A) \rightarrow 0$.

Обратно, пусть $\sup_n \mathbf{M}|\xi_n| < \infty$ и $\sup_n \mathbf{M}(|\xi_n| I_A) \rightarrow 0$ при $\mathbf{P}(A) \rightarrow 0$ тогда по неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}(|\xi_n| \geq c) \leq \frac{1}{c} \mathbf{M}|\xi_n|$$

и, стало быть,

$$\sup_n \mathbf{P}(|\xi_n| \geq c) \leq \frac{1}{c} \sup_n \mathbf{M}|\xi_n| \rightarrow 0$$

при $c \rightarrow \infty$. Следовательно, при достаточно большом c для всякого $\varepsilon > 0$

$$\sup_n \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq c\}} \right) < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\xi_1, \xi_2, \dots$ — равномерно интегрируемая последовательность случайных величин.

15.94. У к а з а н и е. Решение получается как простое следствие результата задачи 15.93. Возможно и другое, более элементарное решение. При $\lambda \neq 0$

$$\mathbf{M} \left(|\lambda \xi_n| I_{\{|\lambda \xi_n| \geq c\}} \right) = |\lambda| \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq \frac{c}{|\lambda|}\}} \right).$$

Далее, для всякого $a > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left(|\xi_n + \eta_n| I_{\{|\xi_n + \eta_n| \geq c\}} \right) &\leq \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n + \eta_n| \geq c\}} \right) + \mathbf{M} \left(|\eta_n| I_{\{|\xi_n + \eta_n| \geq c\}} \right) = \\ &= \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n + \eta_n| \geq c\}} I_{\{|\xi_n| < a\}} \right) + \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n + \eta_n| \geq c\}} I_{\{|\xi_n| \geq a\}} \right) + \\ &+ \mathbf{M} \left(|\eta_n| I_{\{|\xi_n + \eta_n| \geq c\}} I_{\{|\eta_n| < a\}} \right) + \mathbf{M} \left(|\eta_n| I_{\{|\xi_n + \eta_n| \geq c\}} I_{\{|\eta_n| \geq a\}} \right) \leq \\ &\leq aP(|\xi_n + \eta_n| \geq c) + \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq a\}} \right) + \\ &+ aP(|\xi_n + \eta_n| \geq c) + \mathbf{M} \left(|\eta_n| I_{\{|\eta_n| \geq a\}} \right). \end{aligned}$$

15.97. У к а з а н и е: $\mathbf{M} \left(|\eta_n| I_{\{|\eta_n| \geq c\}} \right) \leq \mathbf{M} \left(|\xi_n| I_{\{|\xi_n| \geq c\}} \right)$.

15.98. У к а з а н и е: $P \left(|\xi\eta| \leq \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \right) = 1$.

15.101. 1) В условиях задачи $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\mathbf{M}\xi_n \rightarrow \mathbf{M}\xi$, $\mathbf{D}\xi_n \rightarrow \mathbf{D}\xi$ (задача 15.64). Следовательно, $\xi_n \xrightarrow{\text{СК}} \xi$ (задача 15.99).

2) У к а з а н и е:

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(|\eta_n| \geq 1) = \sum_{n=2}^{\infty} P \left(|\xi_n| \geq \sqrt{2 \ln n} \right);$$

далее, при $n \rightarrow \infty$ (см. задачу 8.102)

$$P \left(|\xi_n| \geq \sqrt{2 \ln n} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2} \Big|_{x=\sqrt{2 \ln n}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n\sqrt{2 \ln n}}.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=2}^{\infty} P(|\eta_n| \geq 1)$ расходится.

15.105. 1) Верно. 2) Вообще говоря, неверно.

15.106. 1) Да, из всякой. 2) Нет, не из всякой. 3) Нет, не из всякой.

15.107. Для всякого $\varepsilon > 0$ $P(\eta_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{M}\eta_n}{\varepsilon} \leq \frac{a^n}{\varepsilon}$, где $a = \mathbf{M}|\xi_1| < 1$.

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} P(\eta_n \geq \varepsilon) < \infty$.

15.108. Последовательность $\eta_1, \eta_2, \dots$ сходится по распределению, но не сходится по вероятности. 15.109. Да, можно. 15.110. Да, верно.

15.111. Из условия задачи следует, что $\mathbf{M}(\xi_n - \xi)^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\sum P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq \sum \frac{\mathbf{M}(\xi_n - \xi)^2}{\varepsilon} < \infty.$$

15.112. Пусть, например, $\xi_n = \eta + \frac{\zeta}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, где η и ζ — независимые случайные величины, причем $\eta \sim \Pi(\lambda)$, а ζ имеет произвольное абсолютно непрерывное распределение вероятностей.

15.113. Пусть $\zeta \sim R(0, 1)$, $F(x)$ и $F_n(x)$ — функции распределения случайных величин ξ и ξ_n соответственно, $n = 1, 2, \dots$. Тогда достаточно положить $\eta = F^{-1}(\zeta)$, $\eta_n = F_n^{-1}(\zeta)$.

15.117. У к а з а н и е: см. задачу 15.24. 15.119. Искомый пределом служит функция распределения случайной величины $\eta \sim R(0, 1)$.

15.120. Распределение Коши.

§ 16. Основные предельные теоремы

16.5. У к а з а н и е: $\mu_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем

$$\xi_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}.$$

16.6. У к а з а н и е: если $\frac{D\xi_n}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{D\xi_k}{k} \rightarrow 0$, причем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{D\xi_k}{k} \geq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D\xi_k.$$

16.7. Выполняется. 16.8. Выполняется.

16.9. Применим. 16.10. Применим.

16.15. 1) Применим; 2) применим. 16.18. В качестве общего распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ можно выбрать, например, симметричное (относительно нуля) распределение вероятностей с $F(x) = P(\xi_1 < x)$ такой, что $1 - F(x) \sim \frac{1}{x \ln x}$ при $x \rightarrow \infty$. 16.20. Верно. 16.23. У к а з а н и е:

$\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $M\xi_1 = \frac{1}{2}$ (см. задачу 12.42).

16.25. У к а з а н и е: $M\bar{\xi} = a$, $D\bar{\xi} = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

16.27. $(-0,057; 0,057)$. 16.29. $c \approx 5, 13$. 16.30. $1/2$.

16.31. 1) 0, $1/2$, 1; 2) 0.

16.33. У к а з а н и е: проверьте выполнимость условия (16.14) (с. 412).

16.35. 0,74. 16.36. У к а з а н и е: используйте теорему Ляпунова.

16.37. У к а з а н и е: для всякого $n = 1, 2, \dots$ с вероятностью 1

$$\left| \frac{S_n}{\sqrt{DS_n}} \right| \leq \left| \frac{S_n}{\sqrt{D\xi_1}} \right| \leq \sum \frac{1}{n^\alpha} \leq C(\alpha).$$

16.41. $196^2 = 38416$. 16.42. $P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \zeta_k - I \right| < \Delta \right) \geq 2\Phi_0(2\Delta\sqrt{n})$.

16.44. $\frac{1}{2}$. 16.45. $\frac{a}{a^2 + \sigma^2}$. 16.46. 0, если $\alpha < 1/2$; 1, если $\alpha > 1/2$; $2\Phi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$.

16.47. $\approx 0,08$. 16.49. У к а з а н и е: $\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{S_n}{n}$.

16.50. $\max(p, 1-p)$.

16.51. У к а з а н и е: характеристическая функция величины

$\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)$, для $|x| \leq n$ равная $\left(1 - \frac{|t|}{n}\right) \left(1 - \frac{|t|}{2n}\right) \dots \left(1 - \frac{|t|}{n \cdot n}\right)$, при $n \rightarrow \infty$ стремится к $\varphi(t) \equiv 1$.

16.52. 1) Вообще говоря, неверно; 2) вообще говоря, неверно.

16.56. 1) Применим; 2) вообще говоря, не применим.

16.57. У к а з а н и е: см. задачи 16.16 и 15.89.

Предметный указатель

δ -функция Дирака 202

σ -алгебра 39, 2.5, 2.6, 2.8, 2.10, 2.14, 104

Абсолютно непрерывное распределение в R 154–156, 180, 8.111, 201, 11.61, 289, 13.47, 15.112

— в R^2 236–239, 15.112

— в R^n 271–273, 288

Аддитивность дисперсии 109

— математического ожидания 109

— меры, функции 39, 3.93

Аксиома непрерывности 39

Аксиомы теории вероятностей 37, 39, 2.4

Алгебра множеств (событий) 38, 2.9, 2.11, 2.14

Асимметрия 205

Асимптотическая нормальность 349, 390, 391, 15.77–15.81, 16.39

Бином Ньютона 90, 121, 428

Биномиальное распределение —
см. Распределение биномиальное

Биномиальные коэффициенты 429

Борелевское множество 201

Вариационный ряд 278, 12.29

Вероятностное пространство 40, 104, 187

— дискретное 41, 15.115, 15.116

— конечное 40

— счетное 40

Вероятность 9, 39, 42

— апостериорная 75

— априорная 75

— геометрическая 30

— классическая 9

— условная 28, 52

Выбор 425

— без возвращения 6.105, 425

— с возвращением 6.105, 426

Выборка 425

— неупорядоченная 426

— упорядоченная 426

Выпуклая линейная комбинация плотностей вероятности 8.88

— функций распределения 8.88

— характеристических функций 304, 13.34–13.39, 13.57

— функция 128, 304

Вырожденное распределение 6.66, 6.73, 290, 13.46, 13.61

— нормальное распределение 355, 14.62–14.64

Гамма-функция Эйлера 349

Гауссовское распределение —

см. Распределение нормальное

Геометрические вероятности 30, 1.77, 31, 1.78, 2.13

Геометрическое распределение —
см. Распределение геометрическое

Гипергеометрическое распределение —

см. Распределение гипергеометрическое

Двумерное распределение 213, 218, 236

— дискретное 218

— непрерывное 236

— нормальное —

см. Распределение нормальное в R^2

Дискретное распределение 107, 6.1, 6.2, 6.11–6.13, 6.56, 6.101, 201, 9.49, 288, 15.112

Дисперсия 109, 117, 121, 6.111, 138, 155, 159, 166, 168, 169, 9.7, 202, 9.53, 9.58, 9.59, 9.61, 215, 216, 11.9, 11.42, 11.71, 267, 12.4, 12.44, 12.45, 325, 15.22, 15.23

Дополнение множества 37

Достоверное событие 10, 38, 8.1

Задача Бюффона 31

— о встрече 30

Закон больших чисел 402, 16.1–16.3, 16.6, 16.11–16.13, 16.16, 16.49, 16.52–16.54, 16.57

Игра в орлянку 4.40

Игральный тетраэдр 3.61

- Импликация 57, 364, 379, 381
 Индикатор 189, 15.72
 Интеграл Лебега 187
 – Стильеса 187, 201
 Интегральная теорема Муавра–Лапласа 146, 207, 411, 412, 16.34
 Интенсивность потока 142
 Испытания 9
 – Бернулли 90, 146–148
 Исход опыта 9
 – благоприятствующий событию 9, 28

 Канторова ступенчатая функция 156
 Квадратичная форма 340, 343, 348
 Классическая схема 9, 40, 46, 55
 Ковариационная матрица 215, 266, 267, 281, 12.34, 12.47–12.50, 315–318
 Ковариация 215, 216, 219, 10.45, 237, 11.72, 273
 Количество информации 232, 258, 11.45, 11.48, 334, 335
 Комбинаторика 423
 Комбинаторный принцип сложения 24, 46, 426, 433
 – – умножения 13, 17, 22, 55, 11.53, 426, 427, 431, 433, 435
 Композиция 13.31, 13.56
 Конечная аддитивность 42, 2.15
 Корень квадратный из ковариационной матрицы 281, 339
 Корреляционная матрица – см. Ковариационная матрица
 Коэффициент асимметрии 205, 9.40
 – корреляции 216, 10.23–10.30, 10.52, 10.53, 11.10, 11.49, 267, 12.11, 325, 335
 – эксцесса 205, 9.40
 Критерий Сильвестра 266

 Лебегова мера 154, 156, 8.111, 236
 Лемма Борелля–Кантелли 365
 Линейная аппроксимация 14.75
 – зависимость 216
 – оценка случайной величины 14.75
 Линейное преобразование случайного вектора 248, 267, 273, 280, 310, 316, 317, 339–340, 344, 345
 – – случайной величины 6.72, 156, 8.21, 169, 8.63, 8.84, 9.40, 216, 289
 Линейность математического ожидания 109, 187, 266
 Локальная теорема Муавра–Лапласа 146

 Математическое ожидание 108, 6.1, 6.2, 6.11–6.13, 115–117, 121, 124, 6.104, 6.113, 138, 155, 8.7, 8.8, 159, 166, 168–170, 187, 188, 9.7, 9.12–9.14, 192–194, 9.18, 201, 202, 9.54–9.56, 9.58, 9.66, 9.67, 9.69, 215, 218, 10.51, 237, 11.41, 273, 288, 13.10, 13.11, 295, 13.70, 325, 15.30, 15.32
 – – случайного вектора 215, 218, 237, 265
 – – случайной матрицы 266
 Матрица диагональная 268, 340
 – единичная 268, 281
 – идемпотентная 14.54, 14.58
 – ковариационная 215, 266, 267, 281
 – неотрицательно определенная 266, 281
 – нормированная корреляционная 267
 – ортогональная 281, 282, 14.69
 – положительно определенная 266, 281
 – симметрическая 215, 266, 281
 – треугольная 281, 282, 343
 Медиана 9.54
 Мера 30, 39
 – конечно аддитивная 39, 2.15
 – счетно аддитивная 40, 2.15
 Метод Монте–Карло 417, 418, 16.42
 – производящих функций 143, 298, 13.31–13.33
 – статистических испытаний 31, 417, 418, 16.42
 – урезания 406, 16.16, 16.17
 – характеристических функций 297, 13.19–13.30, 13.54, 13.69
 Многомерное распределение 264–268, 14.67
 Многочлены Бернштейна 419
 Множество элементарных исходов 9, 37

- Моделирование случайных векторов 346, 347, 14.59, 14.60
– – величин 207, 208, 11.29
– – потоков событий 12.18
Моменты 108, 155, 178, 8.74–8.77, 8.107, 9.5, 201, 205, 9.55, 9.56, 9.58, 9.59, 9.61, 13.16, 14.79
– абсолютные 108
– начальные 108, 201, 205
– смешанные 12.46, 310
– условные 217
– центральные 108, 205
Монотонное неубывание функции распределения 105
– – – – по совокупности аргументов 214, 264
Мультипликативное свойство дисперсии 257, 277
– – математического ожидания 256, 276, 277
– – производящих функций 297, 298
– – характеристических функций 297
Надежность 67–70, 5.28, 5.29, 197, 9.33, 9.34
Наиболее вероятное значение 91, 5.23, 5.49, 121, 6.101
Наилучшая в среднем квадратическом оценка 220, 238, 239, 11.1, 11.65, 11.66, 336, 14.34, 14.35, 339, 14.76, 14.77
Невозможное событие 10, 38, 8.1
Независимость и некоррелированность 3.39, 3.40, 217, 10.46, 10.44, 11.1, 11.7, 268, 318, 14.20, 14.21, 14.59
Независимые случайные векторы 268, 14.56
– – величины 109, 216, 217, 219, 220, 232, 237, 239, 11.7, 253, 258, 11.47, 11.70, 268, 273, 12.16, 278, 12.41, 310, 318, 14.55, 14.58, 14.57
– – события 2.12, 55, 56, 3.48, 3.44–3.46, 3.60–3.63, 3.65, 3.114–3.116, 3.118, 4.37, 13.27
– – величины 12.17
Некоррелированные случайные величины 124, 215, 216, 11.50, 11.51, 11.57, 318
Неотрицательно определенная матрица 266, 281
– – функция 303
Неотрицательность вероятности 39, 52, 107, 137, 218
– дисперсии 109
– плотности вероятности 154, 236, 272
– условной вероятности 52
Непрерывное распределение 154, 156, 236, 11.61
Непрерывность вероятности 43
– функции распределения (слева) 105, 214, 264
Неравенство Берри–Эссеена 148, 412
– Гёльдера 193
– Иенсена 192, 9.17, 9.16
– Коши–Буняковского 188, 189, 216
– Ляпунова 193
– Маркова 189
– Минковского 193
– Чебышева 189, 9.11, 375, 16.33, 420
– Чебышева–Бьенеме 189, 9.5, 9.10, 9.11
Несовместные события 10, 38, 39, 3.1, 3.29, 3.45
Нормальная аппроксимация 145–148
Нормальное распределение – см. Распределение нормальное
Нормированная корреляционная матрица 216, 267, 321
Нормированность вероятности 107, 137, 218
– плотности вероятности 154, 236, 272
– условной вероятности 52
Нормированный случайный вектор 282
Обобщенная плотность вероятности 202
Обобщенное неравенство Чебышева 189
Обратная функция 207, 208
Объединение множеств (событий) 37–38

- Ординарность потока 141
 Ортогональная матрица 281, 282
 Ортогональная нормированная система векторов 281
 Ортогональное преобразование 245, 340
 Отсутствие последствия 6.65, 141, 168
 Параллельное соединение 67, 9.31
 Параметризация 166
 Пересечение множеств (событий) 9, 37–38
 Перестановки 13, 423, 425, 427
 Плотность вероятности 8.7, 8.8, 154–159, 165, 168, 176–177, 179, 8.88, 8.90, 9.50, 289
 – – многомерная 236, 237, 271–273, 12.12, 315, 316, 318, 326, 14.67
 – – обобщенная 202
 – – условная 326
 Полиномиальная схема 99, 5.49, 10.30
 – формула 99
 Полиномы Эрмита 14.94
 Полная группа попарно несовместных событий 9, 75, 217
 Положительно определенная матрица 266, 281, 316
 – – функция 303
 Попарно некоррелированные случайные величины 267, 268, 281, 318, 403
 – несовместные события 40, 42–45, 5.45
 Последовательное соединение 67, 9.30, 198
 Постоянная Эйлера 199
 Правило трех сигм 170
 Проблема моментов 178, 295, 13.61, 13.62
 Произведение множеств (событий) 9, 37–38
 Производящая функция 110, 121, 138, 143, 297, 13.41
 Простейшая предельная теорема 411
 – формула полного математического ожидания 217, 10.12, 10.14, 10.16, 10.18
 Противоположное событие 10, 38, 3.48, 3.53
 Псевдослучайные числа 208
 – – с нормальным распределением 441
 – – с равномерным распределением 440
 Пуассоновская аппроксимация 137, 138
 Пуассоновский поток 140–142, 7.20, 7.21, 7.44, 8.109, 12.18, 12.19
 Пуассоновское распределение – см. Распределение Пуассона
 Равновозможные исходы 9, 11, 12, 30
 Равномерная ограниченность дисперсий 403
 Равномерно интегрируемая последовательность 393, 394, 15.82–15.85, 15.88–15.98, 15.102, 15.103, 16.16, 16.57
 – ограниченная последовательность 15.46, 15.47
 Равномерное распределение – см. Распределение равномерное
 Равные множества 36
 Разбиение множества 2.9
 Размах выборки 21, 12.40
 Размещения 16, 423, 424, 427
 Разность множеств (событий) 37
 Распределение Бернулли 117, 6.21, 6.23, 6.26, 6.25, 8.67
 – Коши 179, 8.79, 8.80, 8.106, 9.38, 9.45, 9.47, 11.22, 11.25, 291, 13.26, 13.27, 14.24, 349, 14.60, 15.33, 15.120
 – Лапласа 11.36, 291, 13.22
 – Максвелла 8.105
 – Пуассона 138, 7.11, 7.17, 7.44, 7.50, 9.41, 10.48, 10.54, 290, 13.31, 16.35, 16.48, 437
 – Стюдента 349, 14.58
 – Эрланга 255, 11.34, 12.19, 13.21, 349
 – биномиальное 121, 6.43, 6.69, 6.94–6.97, 6.104, 6.112, 145, 9.10, 9.42, 9.43, 10.48, 290, 13.32, 13.33, 16.50

- геометрическое 124, 6.55, 6.59, 6.62–6.65, 6.70, 6.71, 6.100, 9.28, 10.49, 10.50, 12.38, 12.39, 290
- гипергеометрическое 6.104
- логарифмически нормальное 177
- нормальное в R 147, 168–171, 8.44, 8.55, 8.63–8.68, 8.75, 8.81, 8.83, 8.86, 8.102, 8.99, 9.6, 9.38, 206, 11.29, 291, 13.24, 13.25, 13.62, 13.69, 14.17–14.19, 14.55, 14.58, 14.57, 15.11, 15.64, 15.90, 15.101, 438, 439
- нормальное в R^2 325–327, 14.20–14.25, 334, 335, 14.73, 14.74, 14.77, 14.88
- нормальное в R^n 315–318, 14.6, 14.9, 335, 338, 344–347, 14.53–14.56, 14.67–14.69, 14.76, 14.80–14.82
- показательное –
см. Распределение экспоненциальное
- равномерное в интервале 158, 159, 8.10, 8.21–8.25, 8.71, 178, 8.80, 8.81, 8.85, 8.109, 9.6, 9.41, 207, 208, 9.44–9.46, 9.64, 11.20, 11.29, 11.31, 11.63–11.65, 12.26–12.28, 12.30, 12.40, 12.42, 291, 13.20, 13.30, 15.119, 418, 16.42
- равномерное на конечном множестве 115, 6.20, 6.67, 6.68, 9.61, 10.50, 11.43, 290, 13.19, 13.30, 15.28
- равномерное на фигуре 236, 11.1, 11.13, 11.14, 11.25, 11.43, 12.13
- стандартное нормальное 147, 168–170, 8.68, 8.102, 11.15, 11.17, 11.22, 11.29, 14.79, 15.101, 438
- хи-квадрат (χ^2) 348, 349, 14.53, 14.54, 14.58, 14.88, 16.47
- экспоненциальное 7.21, 165, 166, 8.30–8.33, 8.36, 8.37, 8.40, 8.41, 8.42, 8.71, 178, 8.81, 8.87, 9.6, 197, 9.30, 9.31, 9.34, 9.41, 9.44, 9.47, 11.17, 11.21, 11.33, 11.34, 11.66, 12.18, 12.31, 291, 13.21, 13.22, 349, 14.59, 14.88, 15.63, 15.65, 15.100, 15.108
- Регрессия 219, 238
- Решетчатая случайная величина 13.43, 13.44
- Ряд распределения 107, 6.10
- Свертка 253, 13.56, 13.69
- Серия событий 4.19, 4.26, 6.62, 10.16, 10.17
- Симметрическая разность 3.9, 3.10, 3.28
- Симметричное распределение 8.7, 8.8, 9.66, 13.3
- Симметрия 27, 8.77, 205, 9.66
- Сингулярное распределение 156, 201
- Скачок функции распределения 106, 201
- Случайная величина 104
 - дискретная 107, 6.56, 6.101
 - комплексная 288, 14.79, 14.96
 - непрерывная 156
 - нормированная 110, 6.110, 145–148, 168, 8.108
 - постоянная 6.73, 290, 13.46, 13.61
 - решетчатая 13.43
 - целочисленная 110, 6.89, 6.101, 9.18, 288, 13.1, 15.71
 - центрированная 110, 11.42, 12.24
- Случайное событие 9, 37, 2.7
 - достоверное 10, 38
 - невозможное 10, 38
 - противоположное 10, 38, 3.53
- Случайные числа 99
- Случайный вектор 264
- Собственное значение 281, 340, 14.54, 14.56
- Собственный вектор 281, 340, 14.54, 14.56
- Совместная плотность вероятности 271–273
 - функция распределения 264
- Сочетания 19, 1.38, 1.45, 1.46, 1.48, 1.58, 1.62, 1.91, 1.107, 423, 427
- Спектральная теорема 281, 14.54, 14.56
- Среднее значение случайной величины –
см. Математическое ожидание

- Среднеквадратическое отклонение 109, 6.1, 6.2, 170
- Стандартное отклонение – см. Среднеквадратическое отклонение
- Стандартный нормальный вектор 315
- Статистика Бозе–Эйнштейна 26, 27
- Максвелла–Больцмана 26, 27
- Ферми–Дирака 26, 27
- Стационарность потока 141
- Сумма множеств (событий) 9, 10, 37, 3.27
- Схема Бернулли 90, 5.6, 5.12, 5.19, 5.62, 5.63, 137, 9.10, 9.28
- голосования 5.28, 5.29
- параллельного соединения 67
- полиномиальная 99, 5.45
- последовательного соединения 67
- Сходимость в основном 378, 379, 15.66–15.68
- в среднем квадратическом 375, 15.36–15.46, 15.48, 15.99, 15.106, 15.111, 15.113, 15.116, 16.25
- в среднем порядка $t > 0$ 375, 15.44
- дисперсий 15.22, 15.23
- математических ожиданий 15.21, 15.39, 15.55, 15.75, 393, 394, 15.95, 15.96, 15.103, 15.104
- плотностей вероятности 15.68, 15.105
- по вероятности 363, 364, 15.1, 15.8–15.11, 15.13–15.15, 15.17–15.19, 15.21–15.25, 15.27, 15.32, 15.34, 375, 15.42, 15.46, 15.52–15.54, 15.56, 15.73, 15.99, 15.106, 15.109, 15.115, 16.38
- по распределению 378, 379, 15.49–15.62, 15.74–15.76, 394, 15.103, 15.106, 15.113
- почти наверное 363–366, 15.2–15.5, 15.8, 15.10, 15.12, 15.16, 15.19, 15.20, 15.26, 15.32, 15.33, 15.41, 15.47, 15.104, 15.106, 15.107, 15.112, 15.113, 15.115, 15.116
- с вероятностью 1 – см. Сходимость почти наверное
- слабая – см. Сходимость по распределению
- функций распределения 378, 379, 15.66–15.68, 15.105
- характеристических функций 378, 379, 15.69, 15.70, 15.109, 15.110
- Счетная аддитивность 40, 2.15, 52
- Счетное объединение (сумма) 39, 40
- Счетное пересечение (произведение) 39, 40
- Теорема Бернулли 402
- Бернштейна 16.54
- Бохнера–Хинчина 303, 13.67
- Вейерштрасса 419
- Карлемана 178
- Колмогорова 409
- Ляпунова 412
- Муавра–Лапласа интегральная – см. Интегральная теорема Муавра–Лапласа
- Муавра–Лапласа локальная – см. Локальная теорема Муавра–Лапласа
- Пойа 304, 13.40, 13.58
- Пуассона 137
- Хинчина 402, 409
- Чебышева 403
- о мажорируемой сходимости 393, 15.82
- о нормальной корреляции 336, 339
- Треугольник Паскаля 429–432
- Треугольное преобразование 340
- Упорядоченное множество 424, 425
- Уравнение регрессии 219
- Усиленный закон больших чисел 409, 16.20, 16.22–16.24, 16.39
- Условие Линдберга 411, 412, 16.32, 16.33
- Условная вероятность 28, 52, 53, 3.101, 219, 14.10
- дисперсия 217, 219, 326, 327
- плотность вероятности 238, 11.53, 326

- функция распределения 217, 238
- энтропия -
см. Энтропия условная
- Условное математическое ожидание случайной величины относительно другой случайной величины 219, 238
- случайного события 217
- при фиксированной другой случайной величине 220, 238, 326, 14.12, 14.74, 14.81, 14.82
- Формула Байеса 75, 4.1, 4.2, 4.12-4.14, 4.16
- Бернулли 90
- Стирлинга 19, 26
- бинома Ньютона 90, 121, 428, 431
- полного математического ожидания 220, 227, 238, 11.59, 11.60
- полной вероятности 75, 4.1, 4.2, 4.20, 9.17
- сложения вероятностей 45, 3.13
- умножения вероятностей 52
- умножения плотностей 239
- Формулы двойственности 37, 41, 45, 49
- обращения (характеристических функций) 288, 289, 13.55
- Фундаментальность в среднем квадратическом 375, 16.38
- по вероятности 366
- почти наверное (с вероятностью 1) 366
- Функциональные преобразования случайных векторов 247
- величин 176
- Функция Вейерштрасса 13.71
- Лапласа 147, 148, 171, 439
- надежности 197
- распределения 104, 107, 154, 157, 8.4-8.6, 159, 165, 170, 179, 8.110, 201, 207, 208, 9.48, 9.50, 9.54, 9.65, 9.67, 9.68, 9.70, 289, 15.67
- распределения двумерная 213, 214, 218, 236, 11.67-11.69
- распределения многомерная 264, 265
- распределения подвектора 265
- распределения частная 215
- регрессии 238
- Характеристическая функция 288-291, 13.1-13.12, 295, 13.13-13.18, 13.23, 13.27, 13.35, 13.38, 13.40, 13.42-13.47, 13.51, 13.52, 13.67, 13.69
- - многомерная 310, 315, 316, 14.59
- Характеристические свойства функции распределения 105, 147, 214, 264
- Центральная предельная теорема 411, 16.32-16.34, 16.36-16.39, 16.52, 16.53
- Частная плотность вероятности 237, 272, 318
- функция распределения 215, 265
- Частные распределения 218
- Экспоненциальное распределение -
см. Распределение экспоненциальное
- Экстремальное свойство геометрического распределения 6.71
- - нормального распределения 8.86, 318
- - равномерного дискретного распределения 6.68
- - равномерного непрерывного распределения 8.85
- - экспоненциального распределения 8.87
- Экссесс 205
- Элементарный исход 9, 37
- - благоприятствующий событию 9, 28
- Энтропия 128, 6.66-6.72, 6.110, 6.111, 180, 8.82, 8.84, 8.108, 9.61, 231, 10.36, 258, 11.45-11.47, 318
- средняя условная 232, 258, 334
- условная 231, 258, 334

Литература

1. *Болдин М. В., Кочетков Е. С.* Практикум по теории вероятностей и математической статистике. М.: МАИ, 1993.
2. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1986.
3. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей. Задачи и упражнения. М.: Наука, 1969.
4. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. 5-е изд. М.: Высшая школа, 1977.
5. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. 5-е изд. М.: Наука, 1974.
6. *Емельянов Г. В., Скитович В. П.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике. М.: ЛГУ, 1967.
7. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1980.
8. *Климов Г. П., Кузьмин А. Д.* Вероятность, процессы, статистика. Задачи с решениями. М.: МГУ, 1985.
9. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1985.
10. *Кочетков Е. С.* Метод наименьших квадратов. М.: МАИ, 1993.
11. *Кочетков Е. С., Осокин А. В.* Случайные события. М.: МАИ, 2000.
12. *Кочетков Е. С., Осокин А. В.* Случайные величины. М.: МАИ, 2000.
13. *Кочетков Е. С., Смерчинская С. О., Осокин А. В.* Пределные теоремы теории вероятностей. М.: МАИ, 1999.
14. *Кочетков Е. С., Смерчинская С. О., Соколов В. В.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Форум-Инфра-М, 2003.

15. *Мешалкин Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: МГУ, 1963.
16. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. М.: Наука, 1986.
17. *Пугачев В. С.* Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1968.
18. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982.
19. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
20. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ. 3-е изд. М.: Мир, 1984, т. 1, 2.
21. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982.
22. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.

Кочетков Евгений Семенович
Смерчинская Светлана Олеговна

Теория вероятностей в задачах и упражнениях

Учебное пособие

Редактор *А. А. Макаров*
Корректор *В. Г. Овсянникова*
Компьютерная верстка *С. О. Смерчинской*
Оформление серии *П. Родькина*

Сдано в набор 10.06.2007. Подписано в печать 01.08.2007.
Формат 60×90/16. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 30. Уч.-изд. л. 29,7.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Тираж 2000 экз.
Заказ N 8155.

Издательский Дом «ФОРУМ»
101000, Москва — Центр, Колпачный пер., д. 9а
Тел./факс: (495) 625-32-07, 625-52-43
E-mail: mail@forum-books.ru

По вопросам приобретения книг обращайтесь:
Отдел продаж издательства «Форум»: 101831, Москва, Колпачный пер., д. 9а,
тел.: (495) 625-5243; e-mail: natali.forum@mail.ru
Отдел продаж «ИНФРА-М»: 127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в,
тел.: (495) 363-4260; факс: (495) 363-9212; e-mail: books@infra.ru
Центр комплектования библиотек: 119019, Москва, ул. Моховая, д. 16
(кор. К, Российская государственная библиотека), тел.: (495) 202-9315
Магазин «Виблиосфера» (розничная продажа): 109147, Москва, ул. Марксистская, д. 9
тел.: (495) 670-5218, (495) 670-5219

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО ордена «Знак Почета»
«Смоленская областная типография им. В. И. Смирнова».
214000, г. Смоленск, проспект им. Ю. Гагарина, 2.