MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

Prof. univ. dr. **Constantin Năstăsescu**
Membru coresp. al Academiei Române

Prof. univ. dr. **Constantin Niţă**

Prof. univ. dr. **Ion Chiţescu**

Prof. gr. I **Dan Mihalca**

Prof. univ. dr. **Monica Dumitrescu**

Matematică

Trunchi comun

Manual pentru clasa a X - a

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, R.A.
BUCUREŞTI, 2005

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.
Manualul este aprobat prin Ordinul Ministrului Educației și Cercetării nr. 3787 din 05.04.2005, în urma licitației organizate de către Ministerul Educației și Cercetării, este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordinul ministrului Educației și Cercetării nr. 4598 din 31.08.2004 și este distribuit **gratuit** elevilor.

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:						
Anul	**Numele elevului care a primit manualul**	**Clasa**	**Școala**	**Anul școlar**	**Starea manualului***	
					la primire	**la returnare**
1.						
2.						
3.						
4.						

* Starea manualului se va înscrie folosind termenii: nou, bun, îngrijit, nesatisfăcător, deteriorat.
Cadrele didactice vor controla dacă numele elevului este scris corect.
Elevii nu trebuie să facă nici un fel de însemnări pe manual.

Descrierea CIP A Bibliotecii Naționale a României
Matematică : clasa a X-a : trunchi comun / Constantin Năstăsescu, Constantin Niță, Ion Chițescu, ... - București : Editura Didactică și Pedagogică, 2005
ISBN 973-30-1148-7

I. Năstăsescu, Constantin
II. Niță, Constantin
III. Chițescu, Ion

51(075.35)

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.
Str. Spiru Haret nr. 12, sector 1, cod 010176, București
Tel.: 021.315.38.20
Tel./Fax: 021.312.28.85; 021.315.73.98
e-mail: edp@b.astral.ro
web: www.edituradp.ro

Referenți: prof. univ. dr. **C. Vraciu**
prof. univ. dr. **S. Ianuș**

Redactor: **Lucian Călianu**
Ilustrații: **Aurica Georgescu**
Coperta: **Elena Drăgulelei Dumitru**
Tehnoredactor: **Cristina Kimm**

Comenzile pentru această lucrare se primesc:
- prin poștă: pe adresa editurii
- prin e-mail: edpcom@b.astral.ro; comenzi@edituradp.ro
- prin tel./fax: (021)313.34.70 (marketing); (021)315.73.98 (comercial)
- prin tel.: (021) 315.38.20 (int. 119, 123, 165, 185)
- la librăria EDP: str. Spiru Haret, nr. 12, sector 1, București, tel. (021) 315.38.20 (int. 142)

Număr de plan: 50069/2005. Format: 16/70×100
Bun de tipar: iulie 2005. Coli de tipar: 10

Tiparul executat la: C.N.I. „CORESI" S.A.

1 FUNCȚII

1. Recapitulare și completări

1.1. În clasa a IX-a s-a definit noțiunea de funcție și s-au evidențiat câteva aspecte teoretice legate de acest concept. Vom reaminti unele dintre cunoștințele învățate și apoi vom da o serie de noțiuni și rezultate noi.

Definiția funcției

Fie A și B două mulțimi. Prin funcție definită pe mulțimea A, cu valori în mulțimea B se înțelege orice lege (procedeu sau convenție etc.) f, prin care oricărui element $a \in A$ i se asociază un unic element, notat $f(a)$, din B.

Definiția funcției presupune de fapt existența a *trei elemente*:

– o mulțime A, pe care este definită funcția și care se numește *domeniul de definiție al funcției*;

– o mulțime B, în care ia valori funcția și care se numește *domeniul valorilor funcției* sau *codomeniul funcției*;

– o lege (procedeu, convenție etc.) f.

Funcția f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B se notează prin:

$$f : A \to B \text{ sau } A \xrightarrow{f} B.$$

Uneori cuvântul „funcție" se înlocuiește prin „aplicație".

O funcție $f : A \to B$ pentru care atât domeniul de definiției A cât și domeniul valorilor B sunt submulțimi ale mulțimii $\mathbb{R}$ a numerelor reale se numește *funcție numerică*.

Graficul unei funcții

Fie $f: A \to B$ o funcție. Prin *graficul* acestei funcții înțelegem submulțimea G_f a produsului cartezian $A \times B$ formată din toate perechile $(a, f(a))$, cu $a \in A$.

Deci: $G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$.

Fie $f : A \to B$ o funcție numerică și G_f graficul său. Fie xOy un sistem de axe perpendiculare din plan. Mulțimea punctelor din planul de coordonate x și y unde (x, y) este un element oarecare al mulțimii G_f se numește *reprezentarea geometrică a graficului funcției f*.

Pentru simplificarea limbajului, această reprezentare geometrică se numește, simplu, *graficul funcției f*.

Imaginea unei funcții

Dacă $f : A \to B$ este o funcție oarecare se numește *imaginea funcției f* și se notează prin $f(A)$ sau $\text{Im}f$ submulțimea lui B definită astfel:

$$\text{Im}f = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in B \mid \exists\, x \in A \text{ astfel încât } y = f(x)\}$$

Funcţii pare, funcţii impare

O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *simetrică* faţă de origine dacă oricare ar fi $x \in A$, atunci şi $-x \in A$.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime simetrică faţă de origine şi o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$.

Funcţia f se numeşte *pară* dacă $f(-x) = f(x)$ oricare ar fi $x \in A$.

Funcţia f se numeşte *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$ oricare ar fi $x \in A$.

După cum ştim din clasa a IX-a, graficul unei funcţii pare este simetric faţă de axa Oy. Dacă f este o funcţie impară şi $0 \in A$, atunci $f(0) = 0$, iar graficul său este simetric faţă de origine.

Funcţii numerice monotone

Fie $f : A \to B$ o funcţie numerică şi $I \subset A$ o submulţime nevidă a lui A. Spunem că *f este crescătoare pe mulţimea I* dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, astfel încât $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Funcţia f se numeşte *descrescătoare pe mulţimea I* dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$ astfel încât $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Spunem că f este *strict crescătoare* (respectiv *strict descrescătoare*) *pe mulţimea I* dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, astfel încât $x_1 < x_2$, să rezulte $f(x_1) < f(x_2)$ (respectiv $f(x_1) > f(x_2)$).

O funcţie numerică $f : A \to B$ crescătoare sau descrescătoare (respectiv strict crescătoare sau strict descrescătoare) pe mulţimea I se numeşte *monotonă* (respectiv *strict montonă*) pe mulţimea I.

Dacă $I = A$ vom spune simplu că funcţia $f : A \to B$ este *monotonă* (respectiv *strict montonă*).

Observaţie. Noţiunile amintite mai înainte sunt utile în studiul claselor de funcţii prezentate în acest manual.

1.2. Compunerea funcţiilor

Fie funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$. Observăm că domeniul de definiţie al funcţiei g coincide cu codomeniul funcţiei f. Această situaţie particulară ne permite să facem următoarele consideraţii. Fie $x \in A$; atunci elementul $f(a)$, găsindu-se în B, putem vorbi de imaginea sa prin g, adică elementul $g(f(a))$ din C. Observăm că astfel putem asocia oricărui element $a \in A$ un element unic din mulţimea C, anume elementul $g(f(a))$. În felul acesta am definit o funcţie h al cărei domeniu de definiţie este cel al funcţiei f, iar codomeniul este cel al funcţiei g. Deci $h : A \to C$ unde $h(a) = g(f(a))$ pentru orice $a \in A$. De obicei funcţia h astfel definită se notează $g \circ f$ şi se numeşte *compunerea funcţiei g cu funcţia f* (în figura 1 este reprezentat modul de definire al funcţiei $g \circ f$).

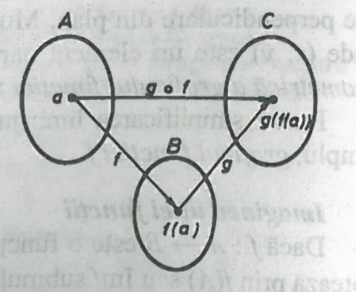


Fig. 1

Exemple

1. Considerăm funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ definite respectiv prin diagramele din figura 2.

În acest caz avem $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = t$; $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(6) = t$; $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(1) = q$; $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(4) = m$.

Funcţia $g \circ f : A \to C$ poate fi reprezentată prin diagrama din figura 3.

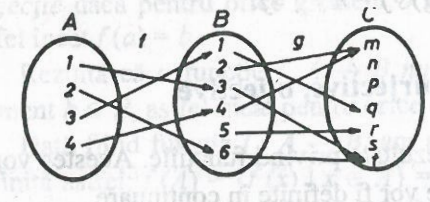


Fig. 2

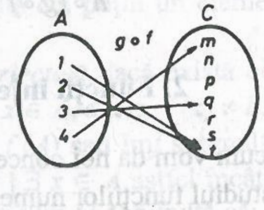


Fig. 3

2) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţiile definite respectiv prin formulele:

$$f(x) = x^2 - 1; \quad g(x) = 1 + x^2.$$

Funcţia $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are sens. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = 1 + (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 2.$$

Deci funcţia compusă $g \circ f$ este dată de formula:

$$(g \circ f)(x) = x^4 - 2x^2 + 2.$$

Se observă că are sens să vorbim şi de compunerea lui f şi g. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + x^2) = (1 + x^2)^2 - 1 = x^4 + 2x^2.$$

Deci funcţia $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de formula:

$$(f \circ g)(x) = x^4 + 2x^2.$$

Observaţii. 1. Dacă $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ sunt două funcţii, are sens să vorbim de compunerea funcţiei g cu funcţia f numai atunci când $B = C$.

2. Dacă $f : A \to B$ şi $g : B \to A$ sunt două funcţii, are sens $g \circ f : A \to A$ şi $f \circ g : B \to B$. Aşa cum rezultă şi din exemplul 2), în general $g \circ f \neq f \circ g$ (compunerea funcţiilor nu este *comutativă*).

Teorema 1. Fie $f : A \to B$, $g : B \to C$ şi $h : C \to D$ trei funcţii. Atunci fiecare din funcţiile $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$ are sens şi există egalitatea: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Demonstraţie. Codomeniul funcţiei $g \circ f$ este mulţimea C. Cum domeniul de definiţie al lui h este tot C, atunci are sens compunerea $h \circ (g \circ f)$. Analog, domeniul de definiţie al funcţiei $h \circ g$ este B, iar codomeniul lui f fiind tot B are sens compunerea $(h \circ g) \circ f$. Funcţiile $h \circ (g \circ f)$ şi $(h \circ g) \circ f$ au acelaşi domeniu de definiţie (mulţimea A) şi acelaşi codomeniu (mulţimea D).

Pentru a arata egalitatea $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ rămâne să dovedim că pentru orice $x \in A$ avem $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$.

Într-adevăr $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$, iar $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$.

Comparând, obținem egalitatea cerută.

Observație. Proprietatea demonstrată în teorema de mai sus se numește *asociativitatea compunerii funcțiilor.*

Această proprietate ne permite să folosim scrierea

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f.$$

2. Funcții injective, surjective, bijective

2.1. Acum vom da noi concepte și rezultate privind funcțiile. Acestea vor fi folosite în studiul funcțiilor numerice care vor fi definite în continuare.

Definiție. Fie $f : A \to B$ o funcție. Vom spune că f este o funcție *injectivă* sau că este o *injecție*, dacă pentru oricare două elemente x și y ale lui A, $x \neq y$, avem $f(x) \neq f(y)$.

Faptul că funcția f este injectivă se mai exprimă și astfel: dacă x și y sunt elemente oarecare din A cu proprietatea $f(x) = f(y)$, atunci rezultă că $x = y$.

Din definiție rezultă că o funcție $f : A \to B$ *nu este injectivă* dacă există cel puțin două elemente x și y din A, $x \neq y$, astfel încât $f(x) = f(y)$.

Exemple

1. Funcția $f : A \to B$, asociată diagramei din figura 4 este o funcție injectivă.

2. Funcția $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definită prin formula $g(x) = x^2$, este injectivă.

Într-adevăr, să presupunem că $g(x) = g(y)$ unde $x, y \in \mathbb{N}$. Atunci $x^2 = y^2$, de unde $(x - y)(x + y) = 0$.

Din această egalitate rezultă că $x - y = 0$ sau $x + y = 0$. Din prima egalitate avem că $x = y$. Dacă are loc egalitatea $x + y = 0$, cum x și y sunt numere naturale, obținem că $x = y = 0$. Oricum, din egalitatea $g(x) = g(y)$ rezultă că $x = y$ și deci g este o funcție injectivă.

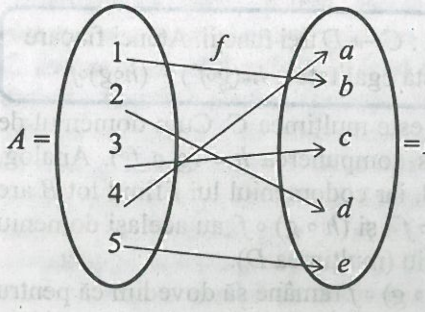


Fig. 4

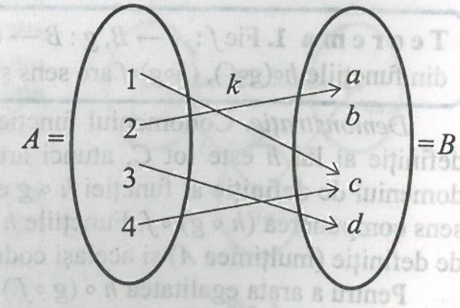


Fig. 5

3. Funcția $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $h(x) = x^2$ nu este o funcție injectivă deoarece $h(-2) = h(2) = 4$.

4. Funcția $k : A \to B$ asociată diagramei din figura 5 nu este injectivă, deoarece $k(1) = k(4) = c$.

Definiție. O funcție $f : A \to B$ este o funcție *surjectivă* sau, simplu, este o *surjecție* dacă pentru orice element $b \in B$ există cel puțin un element $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$.

Rezultă că o funcție $f : A \to B$ *nu este surjectivă* dacă există cel puțin un element $b \in B$, astfel încât pentru orice element $x \in A$, avem $f(x) \neq b$.

Dată fiind funcția $f : A \to B$, am notat cu $f(A)$ sau Imf submulțimea lui B definită astfel: $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in B \mid \exists\, x \in A$ astfel încât $y = f(x)\}$; $f(A)$ se numește *imaginea* funcției f. Din definiția lui $f(A)$ rezultă că:

f este surjectivă dacă și numai dacă $f(A) = B$.

Exemple

1. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin relația $f(x) = ax$ $(a \neq 0)$ este surjectivă. Într-adevăr, fie $y \in \mathbb{R}$. Atunci $x = \dfrac{y}{a} \in \mathbb{R}$ și avem $f\left(\dfrac{y}{a}\right) = a\dfrac{y}{a} = y$.

2. Funcția $g : A \to B$, asociată diagramei din figura 6 este, de asemenea, surjectivă.

$g(1) = a$, $g(2) = g(3) = b$, $g(4) = c$, $g(5) = a$.

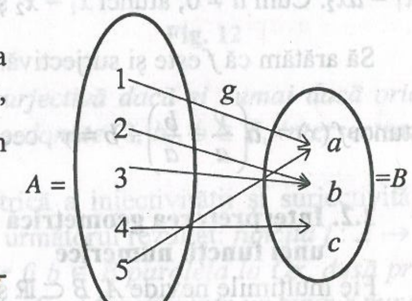


Fig. 6

3. Funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin formula $h(x) = x^2$ nu este surjectivă. Într-adevăr, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $h(x) = x^2 \neq -1$. Deci -1 nu este imaginea nici unui element, prin h, din domeniul de definiție.

4. Funcția $k : A \to B$ asociată diagramei din figura 7 nu este surjectivă. Într-adevăr, se vede că elementul $2 \in B$ nu este imaginea prin k a nici unui element din A.

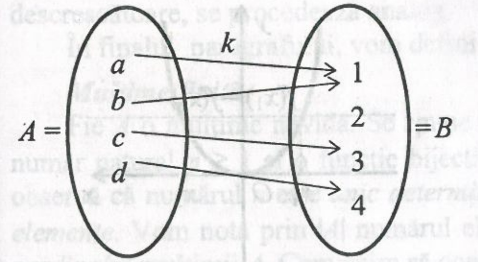


Fig. 7

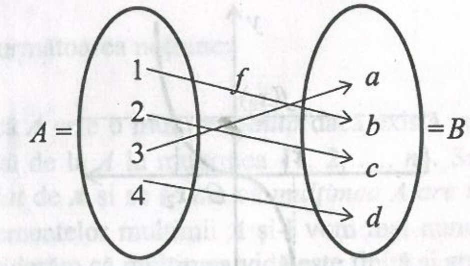


Fig. 8

Definiție. O funcție $f : A \to B$ care este simultan injectivă și surjectivă se numește *funcție bijectivă* sau, simplu, *bijecție*.

Exemple

1. Funcţia $f : A \to B$, asociată diagramei din figura 8, este bijectivă:

$$f(1) = b, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = d.$$

2. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Definim funcţia $g : A \to A$ prin formula $g(x) = x^2$. Funcţia g este bijectivă. Într-adevăr, trebuie să arătăm că g este injectivă şi surjectivă.

Funcţia g este injectivă. Fie $x, y \in A$ astfel încât $g(x) = g(y)$. Atunci $x^2 = y^2$, de unde $(x - y)(x + y) = 0$ şi deci $x - y = 0$ sau $x + y = 0$. Dacă $x - y = 0$, avem $x = y$; dacă $x + y = 0$, avem $x = -y$ şi cum x, y sunt numere reale pozitive, trebuie ca $x = y = 0$. Oricum, din egalitatea $g(x) = g(y)$ rezultă $x = y$.

Funcţia g este surjectivă. Fie $y \in A$. Cum $y \geq 0$, atunci are sens $\sqrt{y}$. Cum $\sqrt{y} \geq 0$, atunci $\sqrt{y} \in A$. Se vede că $g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ şi deci g este surjectivă.

3. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a \neq 0$ este bijectivă. Într-adevăr, dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $ax_1 + b = ax_2 + b$, de unde obţinem $ax_1 = ax_2$. Cum $a \neq 0$, atunci $x_1 = x_2$ şi deci f este injectivă.

Să arătăm că f este şi surjectivă. Fie $y \in \mathbb{R}$. Are sens numărul real $x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$.

Atunci $f(x) = a\left(\frac{y}{a} - \frac{b}{a}\right) + b = y$, ceea ce arată că f este şi surjectivă.

2.2. Interpretarea geometrică a injectivităţii şi surjectivităţii unei funcţii numerice

Fie mulţimile nevide $A, B \subset \mathbb{R}$ şi funcţia $f : A \to B$.

Dacă f este injectivă rezultă, conform definiţiei, că pentru orice $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $x_1 \neq x_2$ are loc relaţia $f(x_1) \neq f(x_2)$, adică orice două puncte de abscise distincte de pe graficul funcţiei au ordonate distincte. Aceasta înseamnă că dacă o paralelă la axa Ox intersectează graficul funcţiei, atunci îl intersectează într-un singur punct; cu alte cuvinte, dacă f este injectivă, orice paralelă la axa Ox intersectează graficul funcţiei f în cel mult un punct (fig. 9).

Dacă există o paralelă la axa Ox care intersectează graficul funcţiei f în două sau mai multe puncte, funcţia f nu este injectivă (fig.10).

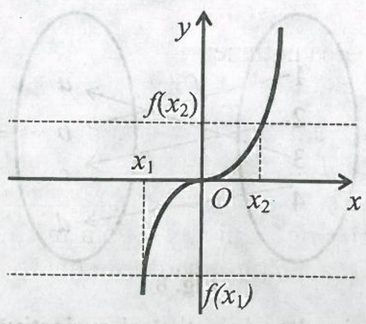


Fig. 9

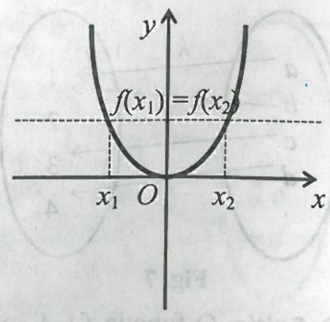


Fig. 10

În concluzie, *funcţia f este injectivă dacă şi numai dacă orice paralelă la axa Ox intersectează graficul funcţiei în cel mult un punct.*

Dacă f este surjectivă rezultă, conform definiţiei, că pentru orice $b \in B$ există (cel puţin un) $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$, adică orice paralelă la axa Ox dusă prin punctul de coordonate $(0, b)$, $b \in B$, intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct (fig. 11). Dacă există $b \in B$ astfel încât paralela la axa Ox, dusă prin punctul de coordonate $(0, b)$ nu intersectează graficul funcţiei f, funcţia nu este surjectivă (fig. 12).

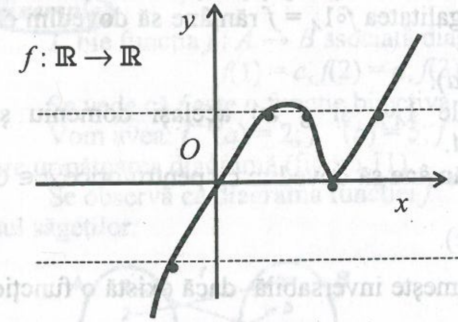


Fig. 11

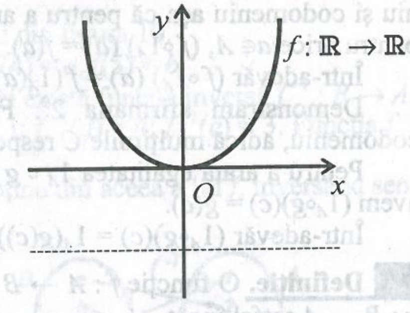


Fig. 12

În concluzie, *funcţia $f : A \to B$ este surjectivă dacă şi numai dacă orice paralelă la axa Ox, dusă prin punctul de coordonate $(0, b)$, $b \in B$, intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct.*

Ţinând seama de interpretarea geometrică a injectivităţii şi surjectivităţii unei funcţii, pentru o funcţie bijectivă avem următorul rezultat: *funcţia $f : A \to B$ este bijectivă dacă şi numai dacă oricare ar fi $b \in B$ paralela la Ox, dusă prin punctul de coordonate $(0, b)$, intersectează graficul funcţiei într-un singur punct.*

Avem următorul rezultat:

T e o r e m a 2. Dacă $f : A \to B$ este funcţie numerică (adică A şi B sunt submulţimi ale lui $\mathbb{R}$) strict monotonă, atunci f este funcţie injectivă.

Demonstraţie. Într-adevăr, să presupunem că f este strict crescătoare şi fie $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $x_1 \neq x_2$. Atunci avem $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Dacă presupunem că $x_1 < x_2$, rezultă $f(x_1) < f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$. Analog, dacă $x_1 > x_2$, rezultă $f(x_1) > f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$ şi deci f este injectivă. Dacă f este strict descrescătoare, se procedează analog.

În finalul paragrafului, vom defini următoarea noţiune:

Mulţime finită

Fie A o mulţime nevidă. Se spune că A este o mulţime *finită* dacă există un număr natural $n \geq 1$ şi o funcţie bijectivă de la A la mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Se observă că numărul n este *unic determinat* de A şi se spune că *mulţimea A are n elemente.* Vom nota prin $|A|$ numărul elementelor mulţimii A şi-l vom mai numi *cardinalul* mulţimii A. Convenim să considerăm că mulţimea vidă este finită şi are 0 (zero) elemente, adică $|\varnothing| = 0$.

3. Funcţii inversabile. Inversa unei funcţii

Fie A o mulţime oarecare. Vom nota cu $1_A : A \to A$ funcţia definită astfel: $1_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$. 1_A se numeşte *funcţia identică a mulţimii A*.

T e o r e m a 3. Fie A o mulţime şi 1_A funcţia sa identică. Atunci:
1° Pentru orice mulţime B şi pentru orice funcţie $f : A \to B$, avem $f \circ 1_A = f$.
2° Pentru orice mulţime C şi pentru orice funcţie $g : C \to A$, avem $1_A \circ g = g$.

Demonstraţie. Demonstrăm afirmaţia 1°. Funcţiile f şi $f \circ 1_A$ au acelaşi domeniu şi codomeniu aşa că pentru a arăta egalitatea $f \circ 1_A = f$ rămâne să dovedim că pentru orice $a \in A$, $(f \circ 1_A)(a) = f(a)$.

Într-adevăr $(f \circ 1_A)(a) = f(1_A(a)) = f(a)$.

Demonstrăm afirmaţia 2°. Funcţiile $1_A \circ g$ şi g au acelaşi domeniu şi codomeniu, adică mulţimile C respectiv A.

Pentru a arăta egalitatea $1_A \circ g = g$ rămâne să dovedim că pentru orice $c \in C$ avem $(1_A \circ g)(c) = g(c)$.

Într-adevăr $(1_A \circ g)(c) = 1_A(g(c)) = g(c)$.

Definiţie. O funcţie $f : A \to B$ se numeşte inversabilă dacă există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât

$$g \circ f = 1_A \text{ şi } f \circ g = 1_B. \tag{1}$$

Observăm că funcţia g definită de relaţiile (1) este unică. Într-adevăr, dacă $g' : B \to A$ este o altă funcţie astfel încât

$$g' \circ f = 1_A \text{ şi } f \circ g' = 1_B, \tag{2}$$

atunci obţinem:

$$g = 1_A \circ g = (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \circ 1_B = g',$$

unde s-au utilizat relaţiile (1) şi (2) precum şi asociativitatea compunerii funcţiilor.

Dacă f este o funcţie inversabilă, atunci funcţia g definită de relaţiile (1), care este unică, se numeşte *inversa funcţiei f* şi se notează f^{-1}.

Se pune întrebarea, când este o funcţie inversabilă? Răspunsul este dat de următoarea teoremă.

T e o r e m a 4. O funcţie $f : A \to B$ este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.

Demonstraţie. Să presupunem mai întâi că f este inversabilă şi să arătăm că f este injectivă şi surjectivă. Din faptul că f este inversabilă, rezultă că există $f^{-1} : B \to A$ astfel încât

$$f^{-1} \circ f = 1_A \text{ şi } f \circ f^{-1} = 1_B \tag{3}$$

Fie x_1, x_2 din A şi să presupunem că $f(x_1) = f(x_2)$. Din prima dintre relaţiile (3) obţinem că $x_1 = 1_A(x_1) = (f^{-1} \circ f)(x_1) = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = (f^{-1} \circ f)(x_2) = 1_A(x_2) = x_2$. Deci f este injectivă. Fie $y \in B$. Din a doua dintre relaţiile (3) se obţine: $y = 1_B(y) = (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y))$. Dacă se notează $x = f^{-1}(y)$, atunci $y = f(x)$, ceea ce arată că f este şi surjectivă.

Reciproc, presupunem că f este bijectivă. Definim funcţia $g : B \to A$ în modul următor. Fie $y \in B$. Deoarece f este surjectivă există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$. Elementul x este unic determinat cu această proprietate, întrucât f este injectivă şi definim $g(y) = x$.

Să dovedim că $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$. Fie $x \in A$. Atunci, notând $y = f(x)$, rezultă din definiţia lui g că $g(y) = x$ şi deci $g(f(x)) = x$ sau $(g \circ f)(x) = 1_A(x)$. Rezultă atunci $g \circ f = 1_A$. Să arătăm acum că $f \circ g = 1_B$. Fie $y \in B$. Din definiţia lui g, $g(y) = x$, unde x este elementul din A pentru care $f(x) = y$. Atunci $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = 1_B(y)$, de unde obţinem că $f \circ g = 1_B$.

Observaţie. Din demonstraţia teoremei precedente rezultă că dacă $f : A \to B$ este o funcţie bijectivă, atunci funcţia sa inversă $f^{-1} : B \to A$ se defineşte după următorul procedeu: dacă $b \in B$, atunci $f^{-1}(b)$ este unicul element $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$.

Exemple

1. Fie funcţia $f : A \to B$ asociată diagramei din figura 10.

$$f(1) = c, f(2) = a, f(3) = e, f(4) = d, f(5) = b.$$

Se vede că f este o funcţie bijectivă. Atunci există funcţia inversă $f^{-1} : B \to A$.

Vom avea: $f^{-1}(a) = 2$; $f^{-1}(b) = 5$; $f^{-1}(c) = 1$; $f^{-1}(d) = 4$; $f^{-1}(e) = 3$. Funcţia f^{-1} are următoarea diagramă (figura 11).

Se observă că diagrama funcţiei f^{-1} se obţine din aceea a lui f, inversând sensul săgeţilor.

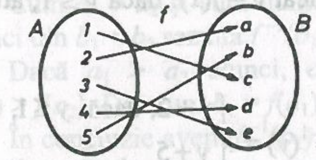


Fig. 13

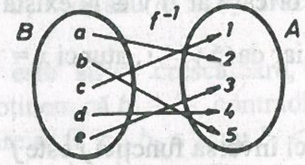


Fig. 14

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a \neq 0$.

Această funcţie este bijectivă, deci putem vorbi de inversa sa. Fie $y \in \mathbb{R}$. Atunci $f^{-1}(y) = x$ unde $f(x) = y$. Deci pentru $y \in \mathbb{R}$ trebuie să determinăm $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$ sau $ax + b = y$. Din $ax + b = y$ obţinem pe $x = \dfrac{y-b}{a} = \dfrac{1}{a}y - \dfrac{b}{a}$

şi deci $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{a}y - \dfrac{b}{a}$. Folosind notaţia cu x, funcţia inversă a lui f este $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a}$.

Presupunem că $b \neq 0$.

Considerăm punctele din planul xOy:

$P_1(0, b)$; $P_2\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$ respectiv $Q_1(b, 0)$, $Q_2\left(0, -\dfrac{b}{a}\right)$. Se observă că P_1 şi Q_1 (respectiv P_2 şi Q_2) sunt simetrice faţă de prima bisectoare. Cum graficul funcţiei f este dreapta ce trece prin punctele P_1 şi P_2, iar graficul funcţiei f^{-1} este dreapta ce trece prin punctele Q_1 şi Q_2 rezultă că aceste două drepte sunt simetrice faţă de prima bisectoare aşa cum se vede din figura 15.

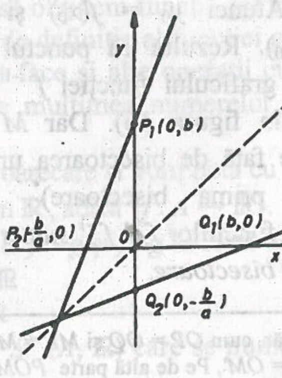


Fig. 15

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-2, \text{ dacă } x \le 3, \\ 2x-5, \text{ dacă } x > 3 \end{cases}$ Să se arate că funcţia f este bijectivă şi să se calculeze inversa sa.

R: Să arătăm, mai întâi, că f este injectivă. Pentru aceasta, fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Distingem cazurile:

1° $x_1, x_2 \le 3$. Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $x_1 - 3 = x_2 - 3$, de unde $x_1 = x_2$.

2° $x_1, x_2 > 3$. Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $2x_1 - 5 = 2x_2 - 5$, de unde $x_1 = x_2$

3° $x_1 \le 3$, $x_2 > 3$. Avem $x_1 \ne x_2$, iar $f(x_1) = x_1 - 2 \le 1$ şi $f(x_2) = 2x_2 - 5 > 1$, de unde $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Deci f este funcţie injectivă.

Să arătăm acum că f este surjectivă. Pentru aceasta, fie $y \in \mathbb{R}$. Distingem cazurile:

1° $y \le 1$. Dacă $f(x) = y$, atunci $x - 2 = y$, de unde $x = y + 2 \le 3$.

2° $y > 1$. Dacă $f(x) = y$, $2x - 5 = y$, de unde $x = \dfrac{y+5}{2} > 3$.

Deci oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = f(x)$: dacă $y \le 1$, atunci $x = y + 2$, iar dacă $y > 1$, atunci $x = \dfrac{y+5}{2}$.

Atunci inversa funcţiei f este $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \begin{cases} y+2, \text{ dacă } y \le 1, \\ \dfrac{y+5}{2}, \text{ dacă } y > 1. \end{cases}$

Interpretarea geometrică a inversei unei funcţii numerice

Am văzut că pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ unde $a \ne 0$ şi $b \ne 0$, graficele funcţiilor f şi f^{-1} sunt două drepte simetrice în raport cu prima bisectoare.

Vom arăta că acest lucru rămâne valabil pentru orice funcţie numerică.

Fie $f : A \to B$ o funcţie numerică inversabilă şi $f^{-1} : B \to A$ funcţia inversă a lui f. Fie $M(x_0, y_0)$ un punct al graficului funcţiei f. Atunci $y_0 = f(x_0)$ şi deci $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Rezultă că punctul M' (y_0, x_0) aparţine graficului funcţiei f^{-1} (reprezentat punctat în figura 16). Dar M şi M' sunt simetrice faţă de bisectoarea unghiului xOy (numită prima bisectoare)*. Rezultă că graficele funcţiilor f şi f^{-1} *sunt simetrice faţă de prima bisectoare.*

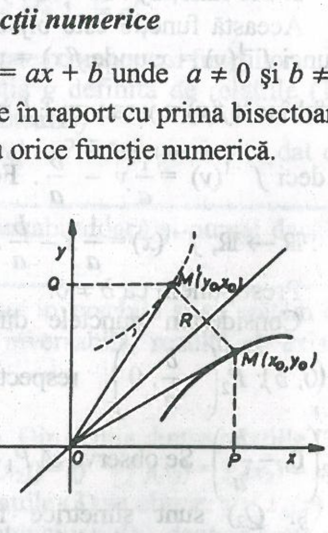


Fig. 16

* Într-adevăr, cum $OP = OQ$ şi $MP = M'Q$, rezultă că triunghiurile OPM şi OQM' sunt congruente. Deci, $OM = OM'$, Pe de altă parte $POM \equiv QOM'$ şi deci $MOR \equiv M'OR$. În triunghiul MOM' care este isoscel, OR este bisectoare, deci şi mediană. Rezultă că $MR = M'R$, adică M şi M' sunt simetrice faţă de dreapta OR.

Monotonia funcţiei numerice inversabile

Fie $f : A \to B$ o funcţie numerică care este inversabilă. În acest caz putem vorbi de inversa sa $f^{-1} : B \to A$. Următorul rezultat caracterizează monotonia unei funcţii inversabile.

T e o r e m a 5. Presupunem că funcţia numerică $f : A \to B$ este inversabilă având inversa $f^{-1} : B \to A$. Atunci f este strict monotonă dacă şi numai dacă f^{-1} este strict monotonă.

Demonstraţie. Reamintim că faţă de compunerea funcţiilor avem egalităţile: $f^{-1} \circ f = 1_A$ şi $f \circ f^{-1} = 1_B$ unde 1_A (respectiv 1_B) este funcţia identică a mulţimii A (respectiv a mulţimii B).

Presupunem că f este strict crescătoare şi fie $b_1, b_2 \in B$ cu $b_1 < b_2$. Punem $a_1 = f^{-1}(b_1)$, $a_2 = f^{-1}(b_2)$. Avem $a_1 \ne a_2$ deoarece în caz că avem $a_1 = a_2$ ar rezulta $f(a_1) = f(f^{-1}(b_1)) = (f \circ f^{-1})(b_1) = 1_B(b_1)$ şi analog $f(a_2) = b_2$. Cum $f(a_1) = f(a_2)$ rezultă că $b_1 = b_2$, contradicţie.

Cum $a_1 \ne a_2$ şi sunt numere reale avem $a_1 < a_2$ sau $a_1 > a_2$. Dacă $a_1 < a_2$, atunci din $b_1 < b_2$ rezultă $f^{-1}(b_1) < f^{-1}(b_2)$.

Dacă $a_1 > a_2$ atunci, cum funcţia f este strict crescătoare, avem că $f(a_1) > f(a_2)$. Dar cum $b_1 = f(a_1)$ şi $b_2 = f(a_2)$ obţinem că $b_1 > b_2$, contradicţie.

În concluzie avem $f^{-1}(b_1) < f^{-1}(b_2)$ oricare ar fi $b_1, b_2 \in B$ cu $b_1 < b_2$ şi deci f^{-1} este strict crescătoare. Analog, dacă f este strict descrescătoare se arată că f^{-1} este strict descrescătoare.

Cum f este inversa funcţiei f^{-1} rezultă şi reciproca propoziţiei date.

4. Operaţii cu funcţii

Am văzut în paragraful 1 al acestui capitol că date două funcţii $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ obţinem o nouă funcţie $g \circ f : A \to C$, numită compunerea funcţiilor f şi g. Compunerea funcţiilor este o operaţie fundamentală în matematică, deoarece se aplică oricărui tip de funcţii (să observăm totuşi că operaţia de compunere a funcţiilor este o „operaţie parţială", deoarece ca să obţinem funcţia $g \circ f$ trebuie ca domeniul valorilor lui f să coincidă cu domeniul de definiţie al funcţiei g).

Totuşi în anumite situaţii particulare se pot face şi alte operaţii cu funcţii, operaţii ce extind, în general, operaţiile de pe mulţimea numerelor reale, şi anume adunarea şi înmulţirea.

În acest caz considerăm A o mulţime nevidă oarecare şi vom nota cu $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ mulţimea tuturor funcţiilor definite pe A cu valori în $\mathbb{R}$, adică $\{f : A \to \mathbb{R}\}$.

Dacă $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ putem defini funcţiile $f + g$ şi $f \cdot g$ în felul următor:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}$$

Este clar că $f + g$ şi $f \cdot g$ sunt elemente din $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ care se numesc *suma* (respectiv *produsul*) funcţiilor f şi g.

În continuare, o să dăm unele proprietăţi pe care le lăsăm ca exerciţii.

1. Cu notaţiile de mai sus să se arate că au loc următoarele proprietăţi:

1) $f + g = g + f$, oricare ar fi $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.

2) $f \cdot g = g \cdot f$, oricare ar fi $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.

3) $(f + g) + h = f + (g + h)$, oricare ar fi $f, g, h \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.

4) $(f \cdot g)\, h = f(g \cdot h)$, oricare ar fi $f, g, h \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.

5) $f\,(g + h) = f \cdot g + f \cdot h$, oricare ar fi $f, g, h \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.

Vom nota cu $\mathbb{O} : A \to \mathbb{R}$ şi $\mathbb{1} : A \to \mathbb{R}$ următoarele funcţii constante definite în felul următor:

$\mathbb{O}(x) = 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi $\mathbb{1}(x) = 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Funcţia $\mathbb{O}$ (respectiv $\mathbb{1}$) se numeşte funcţia nulă sau funcţia zero pe mulţimea A (respectiv funcţia unitate).

Observaţie. Funcţia unitate $\mathbb{1}$ este diferită de funcţia identică $1_A : A \to A$ a mulţimii A.

6) $f + \mathbb{O} = f$ şi $f \cdot \mathbb{1} = f$, oricare ar fi $f \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.

Dată o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$, notăm cu $-f : A \to \mathbb{R}$ funcţia definită astfel: $(-f)(x) = -f(x)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Funcţia $-f$ se numeşte *opusa funcţiei f*.

7) $f + (-f) = \mathbb{O}$ (funcţia nulă)

8) Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie astfel încât $f(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in A$ atunci putem defini funcţia $\frac{1}{f} : A \to \mathbb{R}$, punând $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$, oricare ar fi $x \in A$.

9) Să se arate că $f \cdot \frac{1}{f} = \mathbb{1}$.

Date două funcţii $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ pentru care există funcţia $\frac{1}{f}$ (adică $f(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in A$) putem considera funcţia $\frac{g}{f}$ care este prin definiţie $g \cdot \frac{1}{f}$.

Deci $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ oricare ar fi $x \in A$.

10) Presupunem acum că A este o submulţime nevidă a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie (numerică). Să se arate că f este crescătoare (respectiv strict crescătoare) pe mulţimea A dacă şi numai dacă funcţia $(-f)$ este descrescătoare (respectiv strict descrescătoare).

11) Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este pozitivă (respectiv strict pozitivă) pe mulţimea A dacă şi numai dacă funcţia $-f : A \to \mathbb{R}$ este negativă (respectiv strict negativă) pe mulţimea A.

În continuare să dăm câteva exemple de calcul al sumei şi produsului a două funcţii.

Exemple

1. Fie funcţiile f; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ şi $g(x) = 3x - 1$.

R: Cum $f(x) + g(x) = (2x + 1) + (3x - 1) = 5x$ rezultă că funcţia sumă $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin egalitatea: $(f + g)(x) = 5x$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Cum $f(x) \cdot g(x) = (2x + 1) \cdot (3x - 1) = 6x^2 + x - 1$ obţinem că funcţia produs $f g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin egalitatea: $(f \cdot g)(x) = 6x^2 + x - 1$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

R: Se vede că oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$, $2x + 1 \neq 0$ şi deci putem vorbi de funcţia $\frac{1}{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ care este definită prin egalitatea $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{2x+1}$ oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

Exerciţii

1. Să notăm cu A mulţimea oamenilor de pe glob. Definim funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ după legea „$f(x)$ = înălţimea lui x". Este f injectivă? Dar surjectivă?

2. Notăm cu A mulţimea oraşelor ţării noastre, iar cu B mulţimea judeţelor ţării noastre. Definim funcţia $f : A \to B$ după legea „$f(a)$ = judeţul pe teritoriul căruia se află a" şi funcţia $g : B \to A$ după legea „$g(b)$ = oraşul care este reşedinţa judeţului b".

i) Cine este f (Galaţi) şi f (Făgăraş)? Cine este g(Teleorman) şi g(Mehedinţi)?

ii) Să se arăte că f este surjectivă şi g este injectivă.

iii) Să se arate că $f \circ g = 1_B$ şi $g \circ f \neq 1_A$.

3. Fie mulţimea $A = \{0, 1\}$. Să se construiască toate funcţiile de la A la A şi să se precizeze care sunt injective, surjective sau bijective.

4. Folosindu-se diagrama asociată unei funcţii, să se determine numărul funcţiilor injective de la mulţimea $A = \{1, 2\}$ în mulţimea $B = \{3, 5, 7\}$. Există funcţii surjective de la A la B?

5. Fie $A = \{0, 1\}$ şi $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Să se scrie toate funcţiile injective de la mulţimea A la mulţimea B şi toate funcţiile surjective de la mulţimea B în mulţimea A.

6. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite respectiv prin formulele $f(x) = x^2 + x - 1$, $g(x) = x^2 - x + 1$. Să se determine $g \circ f$ şi $f \circ g$.

7. Se consideră funcţiile

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x + 3, \text{ dacă } x < 1, \\ x + 1, \text{ dacă } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{şi } g(x) = \begin{cases} -x + 3, \text{ dacă } x < 2, \\ x - 1, \text{ dacă } x \geq 2 \end{cases}$$

Să se determine $g \circ f$ şi $f \circ g$.

8. Considerăm funcţiile definite respectiv prin formulele următoare:

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = n + 5$; b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(n) = n^2 + 1$; c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, h(x) = 3x + 1$;

d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, l(x) = x^3 - 2$; e) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, l(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dacă } x \leq 0 \\ -x \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$.

Să se arate că: f, g, h sunt injective şi nu sunt surjective; k, l sunt funcţii bijective.

9. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty), f(x) = x^2$. Să se arate că f este surjectivă dar nu este injectivă.

10. Considerăm funcţiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Să se arate că:

i) dacă f şi g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.

ii) dacă f şi g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă.

11. Să se arate că funcţia de gradul al doilea nu este nici injectivă, nici surjectivă.

12. Considerăm funcţiile definite respectiv prin formulele:

i) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; f(x) = -x + 4$; ii) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; g(x) = x + 1$;

iii) $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; h(x) = x^2$; iv) $k: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}; k(x) = x^2$.

Să se arate că f, g sunt bijective. Cum sunt h şi k? Să se determine funcţiile inverse pentru f şi g.

13. Fie mulţimile $A = \{0, 1, 2\}$ şi $B = \{a, b, c\}$. Să se determine toate funcţiile bijective de la A în B şi apoi să se scrie pentru fiecare inversa sa.

14. Considerăm funcţia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definită astfel:

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{dacă } n \text{ este număr par.} \\ n - 1, & \text{dacă } n \text{ este număr impar.} \end{cases}$$

Arătaţi că f este funcţie bijectivă şi construiţi inversa sa.

15. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ 3x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$

Să se arate că f este bijectivă şi să se determine inversa sa.

16. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{dacă } x \leq 1, \\ x+2, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Să se arate că f este bijectivă şi să se determine inversa sa.

17. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x+3, & \text{dacă } x \leq 2, \\ -2x+m, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$

Să se determine parametrul real m astfel încât funcţia să fie bijectivă şi apoi să se găsească inversa sa.

18. Fie funcţiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$ şi $g(x) = 2x$. Să se calculeze: $f + g$, $f \cdot g$, $f^2 = f \cdot f$, $f^3 = f \cdot f \cdot f$.

2 PUTERI ŞI RADICALI. FUNCŢIA PUTERE ŞI FUNCŢIA RADICAL

1. Puteri. Funcţia putere

1.1. Puteri cu exponent natural nenul

Fie a un număr real şi n un număr natural mai mare sau egal cu 2. Se numeşte *puterea n a numărului a* produsul a n numere, fiecare număr fiind egal cu a. Acest număr *se notează cu* a^n. Deci:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ ori}}.$$

În reprezentarea a^n, a se numeşte *baza* puterii, iar n *exponentul* puterii. Convenim să punem $a^1 = a$.

Exemple

1. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$;

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

1. *Semnul puterii cu exponentul natural*

Puterea unui număr real pozitiv cu exponent natural nenul este pozitivă. Puterea unui număr real negativ cu exponent natural par este pozitivă, iar cu exponent natural impar este negativă.

Într-adevăr dacă $a > 0$, atunci a^n fiind produsul a n numere pozitive este pozitiv. Dacă $a < 0$, atunci din regula semnelor rezultă că a^{2n}, care este produsul unui număr par de numere negative, este pozitiv, iar a^{2m+1}, care este produsul unui număr impar de numere negative, este negativ.

De exemplu $(-2)^9$ are semnul (–) iar $(-2)^{12}$ are semnul (+).

2. *Puterea produsului şi a câtului a două numere reale*

Fie a, b două numere reale şi n număr natural nenul. Atunci:

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ (b \neq 0).$$

Într-adevăr: $(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ ori}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ ori}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ ori}} = a^n b^n$

(am folosit asociativitatea şi comutativitatea înmulţirii a două numere reale).

De asemenea: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$.

Observații: În calcule, deseori, folosim egalitățile de mai sus sub forma:

$$a^n b^n = (ab)^n \text{ și } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

De exemplu: $6^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \left(6 \cdot \frac{1}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32}$.

3. *Înmulțirea puterilor care au aceeași bază*

Dacă a este un număr real și m, n numere naturale nenule, atunci:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Într-adevăr $a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ ori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ ori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ ori}} = a^{m+n}$

De exemplu: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$; $(-2) \cdot (-2)^4 = (-2)^5 = -32$.

4. *Ridicarea unei puteri la altă putere*

Dacă a este un număr real și m, n numere naturale nenule, atunci:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Într-adevăr $\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ ori}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ ori}}} = a^{mn}$.

(Am folosit proprietatea 3.)

De exemplu: $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$; $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$.

5. *Împărțirea a două puteri cu aceeași bază*

Dacă a este un număr real nenul și m, n numere naturale nenule, astfel încât $m > n$, atunci:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Într-adevăr, folosind proprietatea 3, avem: $a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$, de unde rezultă că $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$.

De exemplu: $\frac{3^{10}}{3^8} = 3^{10-8} = 3^2 = 9$; $\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2 = 16$.

6. *Compararea puterilor*

1° dacă a și b sunt numere reale pozitive astfel încât $a < b$ și n număr natural nenul, atunci

$$a^n < b^n.$$

Această proprietate este o consecință imediată a unei proprietății a inegalităților între numere reale, cunoscută din clasa a IX-a.

Exemplu Care dintre numerele 2^{30} sau 3^{20} este mai mare?

Avem $2^{30} = 2^{3\cdot 10} = (2^3)^{10} = 8^{10}$; $3^{20} = 3^{2\cdot 10} = (3^2)^{10} = 9^{10}$.

Deoarece $8 < 9$, atunci $8^{10} < 9^{10}$, adică $2^{30} < 3^{20}$.

2° Fie a un număr real pozitiv și m, n numere naturale nenule, astfel încât $m > n$.

i) Dacă $0 < a < 1$, atunci $a^m < a^n$;

ii) Dacă $a > 1$, atunci $a^m > a^n$.

Într-adevăr, avem $m = n + k$, cu k număr natural nenul. Deci $a^m = a^{n+k} = a^n \cdot a^k$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $0 < a^k < 1$. Prin urmare, $a^m = a^n \cdot a^k < a^n$.

Dacă $a > 1$, atunci $a^k > 1$. Prin urmare, $a^m = a^n \cdot a^k > a^n$.

De exemplu, $\left(\frac{1}{5}\right)^{60} < \left(\frac{1}{5}\right)^{30}$; $5^{60} > 5^{30}$.

1.2. Funcția putere

Fie n un număr natural nenul. Definim funcția

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n.$$

Această funcție se numește *funcția putere de gradul n*.

Observații: 1. Funcția putere este o funcție numerică.

2. Pentru $n = 1$ se obține funcția de gradul întâi $f(x) = x$, iar pentru $n = 2$ se obține funcția de gradul al doilea $f(x) = x^2$.

Teorema 1.
1° Dacă n este un număr par nenul, atunci funcția $f(x) = x^n$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.
2° Dacă n este un număr impar atunci funcția $f(x) = x^n$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Demonstrație. 1° Presupunem că n este par, adică $n = 2m$ și fie $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ astfel încât $x_1 < x_2$. Folosind proprietatea 6 privind compararea puterilor, avem că $x_1^n < x_2^n$ unde n este număr natural nenul oarecare. În particular, $x_1^{2m} < x_2^{2m}$, adică $f(x_1) < f(x_2)$.

Rezultă că funcția $f(x) = x^{2m}$ este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

Fie acum $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ astfel încât $x_1 < x_2$. Cum $x_1 < x_2 \leqslant 0$, atunci $(-x_1) > (-x_2) \geqslant 0$ și deci $(-x_1)^{2m} > (-x_2)^{2m}$, adică $x_1^{2m} > x_2^{2m}$. Prin urmare $f(x_1) > f(x_2)$, ceea ce ne arată că f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

2° Presupunem acum că n este impar, adică $n = 2m + 1$ și fie $x_1 < x_2$. Dacă $0 \leqslant x_1 < x_2$, la fel ca mai sus avem $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$. Dacă $x_1 < x_2 \leqslant 0$, atunci $(-x_1) > (-x_2) \geqslant 0$ și deci $(-x_1)^{2m+1} > (-x_2)^{2m+1}$ adică $-x_1^{2m+1} > -x_2^{2m+1}$. Prin urmare, $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$.

Dacă $x_1 < 0$ și $x_2 \geqslant 0$, atunci x_1^{2m+1} este un număr negativ, iar $x_2^{2m+1} \geqslant 0$ și deci în acest caz avem $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$. În concluzie, din $x_1 < x_2$ se obține $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$, adică $f(x_1) < f(x_2)$, adică funcția $f(x) = x^{2m+1}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Teorema 2. Dacă n este un număr par, funcția putere $f(x) = x^n$ este o funcție pară. Dacă n este un număr impar, funcția putere $f(x) = x^n$ este impară.

Demonstrație. Dacă $n = 2m$, atunci $f(-x) = (-x)^{2m} = x^{2m} = f(x)$ și deci funcția $f(x) = x^{2m}$ este pară. Dacă $n = 2m + 1$, atunci $f(-x) = (-x)^{2m+1} = -x^{2m+1} = -f(x)$ și deci funcția $f(x) = x^{2m+1}$ este impară.

Interpretare geometrică. Fie $f : A \to B$ o funcție numerică unde mulțimea A este simetrică. Am amintit în primul capitol că în clasa a IX-a s-a arătat: dacă f este o funcție pară, atunci $y'y$ este axă de simetrie pentru graficul funcției f, iar dacă f este o funcție impară, atunci originea axelor O este centru de simetrie al graficului funcției f.

Graficul funcției putere $f(x) = x^n$ pentru $n = 3, 4$

1. *Funcția* $f(x) = x^3$. Trasarea graficului funcție $f(x) = x^3$ se face prin „puncte". Mai exact, funcției $f(x) = x^3$ i se asociază următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$
$f(x) = x^3$		-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	

Reprezentăm într-un sistem de axe xOy, punctele ale căror coordonate sunt valorile din tabel. Punctele obținute le unim printr-o linie continuă. În figura 1 este schițat graficul funcției $f(x) = x^3$.

Graficul acestei funcții se numește *parabolă cubică.*

Parabola cubică are următoarele proprietăți:

1) Trece prin originea axelor, care este un centru de simetrie (deoarece $f(x) = x^3$ este funcție impară);

2) Ramura din dreapta a graficului se găsește deasupra axei $x'x$, iar ramura din stânga se găsește sub axa $x'x$.

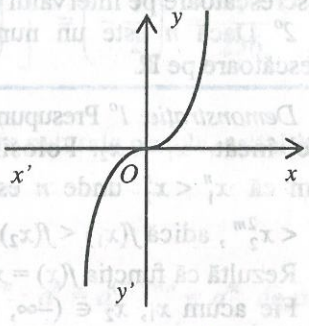


Fig. 1

Observație. Graficul funcției $f(x) = x^{2m+1}$ $(m \geqslant 1)$ are o comportare asemănătoare cu graficul funcției $f(x) = x^3$.

2. *Funcția* $f(x) = x^4$. Graficul acestei funcții se trasează tot prin „puncte". Pentru această funcție se asociază următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$
$f(x) = x^4$.		256	81	16	1	0	1	16	81	256	

Punctele ale căror coordonate sunt valorile din tabel le reprezentăm într-un sistem rectangular de axe xOy. Punctele obținute le unim printr-o linie continuă. În figura 2 este schițat graficul funcției $f(x) = x^4$.

Graficul acestei funcții are următoarele proprietăți:

1° Se găsește deasupra axei $x'x$ și trece prin originea axelor.

2° Axa $y'y$ este axă de simetrie pentru graficul funcției $f(x) = x^4$ (deoarece $f(x) = x^4$ este o funcție pară).

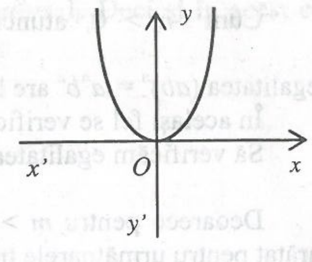


Fig. 2

Observație. Graficul funcției $f(x) = x^{2m}$ $(m \geqslant 1)$ are o comportare asemănătoare cu graficul funcției $f(x) = x^4$.

1.3. Puteri cu exponent întreg

Am demonstrat că pentru $m > n$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0).$$

Vom căuta să lărgim noțiunea de putere astfel încât $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$ să aibă loc și pentru cazul când $m \leqslant n$.

1) *Exponentul* 0. Dacă $a \neq 0$, prin definiție vom pune $a^0 = 1$.

Dacă $m = n$, atunci $a^m : a^n = 1$ și $a^{m-n} = a^0 = 1$. Rezultă că formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ are loc și pentru cazul $m = n$.

Observație. Expresia 0^0 nu are nici un sens.

2) *Exponentul negativ.* Dacă n este număr natural nenul și a un număr real nenul, prin definiție vom pune $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

De exemplu, $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$; $3^{-1} = \dfrac{1}{3} = 0,(3)$.

Dacă m, n sunt numere naturale astfel încât $m < n$, atunci

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+(n-m)}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^{n-m}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}.$$

Rezultă că formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ are loc și pentru cazul $m < n$.

3) *Exponent întreg.* În urma definirii puterilor cu exponent 0 și negativ puterea a^n cu a număr real și n număr întreg este bine precizată exceptând cazul $a = 0$. Vom arăta că proprietățile puterilor cu exponent natural se păstrează și pentru exponent întreg:

$$\boxed{\begin{array}{lll} 1^\circ\ (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; & 3^\circ\ a^m \cdot a^n = a^{m+n}; & 5^\circ\ a^m : a^n = a^{m-n}; \\ 2^\circ\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}; & 4^\circ\ (a^m)^n = a^{mn} & \end{array}}$$

Să verificăm 1°. Pentru exponent $n > 0$ am demonstrat egalitatea 1°. Dacă $n = 0$, atunci $(a \cdot b)^0 = 1$ și $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$. Deci:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot a^n$, are loc și pentru $n = 0$.

Presupunem $n < 0$. Atunci $(ab)^n = \dfrac{1}{(ab)^{-n}}$.

Cum $-n > 0$, atunci $\dfrac{1}{(ab)^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-n}\cdot b^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-n}}\cdot\dfrac{1}{b^{-n}} = a^n\cdot b^n$. Deci egalitatea $(ab)^n = a^nb^n$ are loc şi pentru $n < 0$.

În acelaşi fel se verifică egalitatea 2°.

Să verificăm egalitatea

$$a^m\cdot a^n = a^{m+n}\ (a \neq 0). \qquad (1)$$

Deoarece pentru $m > 0$ şi $n > 0$ egalitatea (1) este adevărată, rămâne de arătat pentru următoarele trei cazuri:

Cazul $m > 0$ şi $n < 0$. Atunci $a^m\cdot a^n = a^m\cdot\dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{a^m}{a^{-n}}$.

Dar cum $-n > 0$, am văzut că $\dfrac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$ şi deci $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$.

Cazul $m < 0$ şi $n < 0$. Avem $a^m\cdot a^n = \dfrac{1}{a^{-m}}\cdot\dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m}\cdot a^{-n}}$.

Cum $-m > 0$ şi $-n > 0$, atunci $a^{-m}\cdot a^{-n} = a^{-(m+n)}$.

Deci $a^m\cdot a^n = \dfrac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$.

Cazul când unul dintre m sau n este zero. Presupunem că $n = 0$. Atunci $a^m\cdot a^n = a^m\cdot a^0 = a^m\cdot 1 = a^m$ şi $a^{m+n} = a^{m+0} = a^m$.

Deci şi în acest caz avem $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$.

Din egalitatea 3° rezultă şi egalitatea $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$.

Să verificăm egalitatea

$$(a^m)^n = a^{mn}\ (a \neq 0) \qquad (2)$$

Deoarece pentru $m > 0$ şi $n > 0$ egalitatea (2) este adevărată, rămâne de arătat în următoarele cazuri:

Cazul $m < 0$ şi $n > 0$. Avem $(a^m)^n = \left(\dfrac{1}{a^{-m}}\right)^n = \dfrac{1}{a^{(-m)n}}$.

Cum $-m > 0$, atunci $(a^{-m})^n = a^{-mn}$. Deoarece $-mn < 0$ atunci $a^{mn} = \dfrac{1}{a^{-mn}}$ şi deci $(a^m)^n = a^{mn}$.

Cazul $m > 0$ şi $n < 0$. Avem $(a^m)^n = \dfrac{1}{(a^m)^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$. Deci $(a^m)^n = a^{mn}$.

Cazul $m < 0$ şi $n < 0$. Avem $(a^m)^n = \dfrac{1}{(a^m)^{-n}}$. Din primul caz obţinem că $(a^m)^{-n} = a^{-mn}$ şi cum $mn > 0$, atunci $\dfrac{1}{a^{-mn}} = \dfrac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn}$. Deci $(a^m)^n = a^{mn}$.

Cazul când unul dintre m sau n este zero. Dacă $m = 0$, atunci $a^m = 1$ şi deci $(a^m)^n = 1^n = 1$. Dar cum $a^{mn} = a^0 = 1$, rezultă $(a^m)^n = a^{mn}$.

Dacă $n = 0$, atunci $(a^m)^n = (a^m)^0 = 1$ şi $a^{mn} = a^0 = 1$. Deci şi în acest caz avem $(a^m)^n = a^{mn}$.

Exemple

1. $3^{-6}\cdot 3^8 = 3^{-6+8} = 3^2 = 9$;

2. $(4^2)^{-2} = 4^{-4} = \dfrac{1}{4^4} = \dfrac{1}{256}$;

3. $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\right]^3 [(-1)^{-2}]^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729$.

1.4. Funcţia putere de exponent negativ

Vom studia funcţia: $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Vom distinge două cazuri: 1) $n = 2m$; 2) $n = 2m + 1$.

1) $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^{2m}}$.

La punctul 1.2. s-a arătat că dacă $0 < x_1 < x_2$, atunci $x_1^{2m} < x_2^{2m}$, de unde $\dfrac{1}{x_1^{2m}} > \dfrac{1}{x_2^{2m}}$ şi deci f este *strict descrescătoare pe intervalul* $(0, +\infty)$.

Dacă $x_1 < x_2 < 0$, atunci $x_1^{2m} > x_2^{2m}$ şi deci $\dfrac{1}{x_1^{2m}} < \dfrac{1}{x_2^{2m}}$, ceea ce ne arată că f *este strict crescătoare pe intervalul* $(-\infty, 0)$.

Cum $x^{2m} = (-x)^{2m}$, atunci $f(x) = f(-x)$ şi deci f este o funcţie pară.

2) $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^{2m+1}}$.

Dacă $0 < x_1 < x_2$, atunci $0 < x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$, de unde $\dfrac{1}{x_1^{2m+1}} > \dfrac{1}{x_2^{2m+1}}$ şi deci f este *strict descrescătoare pe intervalul* $(0, +\infty)$.

Dacă $x_1 < x_2 < 0$, atunci $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1} < 0$ şi deci $\dfrac{1}{x_1^{2m+1}} > \dfrac{1}{x_2^{2m+1}}$, ceea ce ne arată că f *este strict descrescătoare şi pe intervalul* $(-\infty, 0)$.

Cum $x^{2m+1} = -(-x)^{2m+1}$, atunci $f(x) = -f(-x)$ şi deci f este o funcţie impară.

Observaţie. Deşi funcţia f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, +\infty)$ ea nu este strict descrescătoare pe mulţimea $\mathbb{R} - \{0\}$. Într-adevăr, dacă $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ atunci $x_1 < x_2$. Dar, $f(x_1) = f(-1) = \dfrac{1}{(-1)^{2m+1}} = -1$ şi $f(x_2) = f(1) = 1$ şi deci $f(x_1) < f(x_2)$.

Graficul funcției putere $f(x) = x^n$, pentru $n = -1$ și $n = -2$.

Funcția $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{-1}$.

Trasarea graficului se face prin „puncte". Pentru aceasta asociem următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-100	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10	100	$+\infty$
$f(x) = x^{-1}$		$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-10	-100	100	10	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	

În acest tabel se vede că pentru valori din ce în ce mai mari ale lui $|x|$, $f(x)$ se „apropie" de zero, iar pentru valori din ce în ce mai mici ale lui $|x|$, $f(x)$ ia valori din ce în ce mai mari (în valoarea absolută). Graficul funcției $f(x) = x^{-1}$ este schițat în figura 3. Acest grafic se numește *hiperbolă*. El este constituit din două ramuri simetrice față de originea axelor (deoarece funcția $f(x) = x^{-1}$ este o funcție impară).

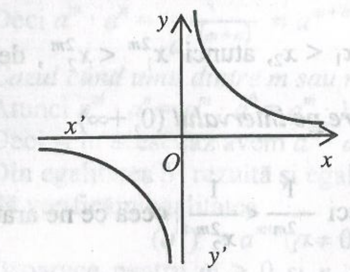


Fig. 3

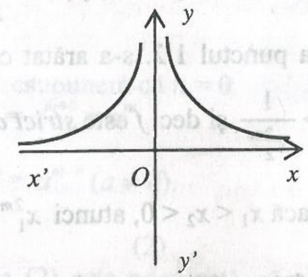


Fig. 4

Funcția $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{-2}$.

Pentru trasarea graficului, acestei funcții îi asociem următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10	$+\infty$
$f(x) = x^{-2}$		$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{4}$	1	4	100	$10\,000$	$10\,000$	100	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{100}$	

Din acest tabel se vede că pentru valori ale lui x din ce în ce mai apropiate de 0 (pozitive sau negative) funcția f ia valori din ce în ce mai mari. Pentru valori ale lui $|x|$ din ce în ce mai mari, funcția f ia valori din ce în ce mai mici.

Graficul funcției $f(x) = x^{-2}$ este schițat în figura 4.

Acest grafic este constituit din două ramuri simetrice față de axa $y'y$ (deoarece funcția $f(x) = x^{-2}$ este pară) situate deasupra axei $x'x$.

Exerciții

1. Să se calculeze:

a) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 8^2 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2$; b) $5^3 \cdot 15^2 \cdot 25^3 \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^3$; c) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right]^2$;

d) $\frac{(-5)^{100}}{(-3)^{103}}$; e) $\left(-\frac{10}{17}\right)^5 \cdot \left(-\frac{51}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)^5$; f) $\left[6 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^0\right]^{-2}$.

2. Să se efectueze:

a) $(-2x)^6 - (-8x^3)^2 - [-(2x)^2]^3 - [2 \cdot (-x)^3]^2$;

b) $(-2x)^{10} - (-13x^5)^2 - [-(2x)^2]^5 - [2 \cdot (-x)^5]^2$.

3. În raport cu valorile lui m să se determine semnul expresiilor:

a) $(1 - m)^{13}$; b) $(2 - 3m)^{125}$; c) $(4 - 2m)^{102}$.

4. Să se calculeze:

a) $(x^5y^3)^2 : (x^3y)^3$, $(x, y \neq 0)$; b) $[a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)]^4 : (a^2 + b^2 + 2ab)^5$, $(a + b \neq 0)$;

c) $(10^n - 4^n) : (5^n - 2^n)$.

5. Să se arate că: $(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16}) = \frac{a^{32} - b^{32}}{a - b}$ $(a \neq b)$.

6. Să se descompună în produs de doi factori:

a) $x^{2m} + x^{m+n} + x^{m-n} + 1\,(m > n)$; b) $x^m(x^n - 1) - x^n(x^m - 1)$.

7. Care dintre următoarele numere este mai mare:

a) 4^2 sau 2^6; b) 27^3 sau 9^6; c) 125^2 sau 25^3; d) 4^{300} sau 3^{400};

e) $-\frac{1}{8}$ sau $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$; f) $\left(\frac{1}{16}\right)^{100}$ sau $\left(\frac{1}{2}\right)^{500}$; g) 5^{-63} sau 6^{-63}; h) $\left(\frac{1}{5}\right)^{63}$ sau 5^{-63}?

8. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = 2x^3$; b) $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = x^3 - 1$;

c) $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_3(x) = (x - 1)^3$; d) $f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_4(x) = (x + 2)^4$;

e) $f_5: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_5(x) = |x^3|$; f) $f_6: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_6(x) = |(x - 1)^3|$.

9. Să se arate că funcția putere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2m}$, $m \in \mathbb{N}$, nu este nici injectivă, nici surjectivă.

10. Să se scrie, folosind exponentul negativ:

i) $\frac{1}{a^3b^4}$; $\frac{1}{(a+b)^3(a^2-b^2)^2}$; $\frac{3}{a^5b^6c^2}$; $(a, b, c \neq 0; |a| \neq |b|)$;

ii) 0, 0002; iii) 0,000003; 0,00015.

11. Să se efectueze:

a) $(a^{-2} + 1)(a^4 - a^{-2} + 1)$; $(a \neq 0)$;

b) $(a^{-2} + 1)^2 - (a^{-2} - 1)^2$, $(a \neq 0)$;

c) $a(a + b)^{-1} + b(a + b)^{-1}$, $(a + b \neq 0)$.

12. Să se calculeze:

a) $\left\{x + \left[1 + \left(\frac{3 - x}{x + 1}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1}$, pentru $x = -\frac{1}{3}$;

b) $\frac{\frac{1}{2} - x^{-1}}{4 - \left(\frac{1}{x}\right)^{-2}} : \left[\frac{1}{2^{-2}(2 + x)} - 2x^{-1} - 1\right]$, pentru $x = -\frac{1}{2}$.

13. Să se simplifice expresiile:

a) $\dfrac{x^{-1}+(y+z)^{-1}}{x^{-1}-(y+z)^{-1}}\cdot\left[1+\left(\dfrac{2yz}{y^2+z^2-x^2}\right)^{-1}\right]$;

b) $\dfrac{x^{-2}y^{-1}+x^{-1}y^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}+x^3(x^2-2xy+y^2)^{-2}$.

14. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) a) $f_1 : \mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}, f_1(x)=x^{-3}+1$; b) $f_2 : \mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}, f_2(x)=x^{-2}-1$;

c) $f_3 : \mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f_3(x)=\dfrac{1}{x+1}$; d) $f_4 : \mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f_4(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$;

2. Radicali. Funcţia radical

Fie $n \geqslant 2$ un număr natural, iar a un număr real. Să considerăm ecuaţia

$$x^n - a = 0. \quad (1)$$

În continuare ne punem problema existenţei şi a numărului rădăcinilor (soluţiilor) reale ale acestei ecuaţii. O *rădăcină reală* a ecuaţiei (1) este un număr real α, astfel încât $\alpha^n - a = 0$.

2.1. Radicalul unui număr pozitiv

Fie ca mai sus $n \geqslant 2$ un *număr natural*, $a > 0$ un *număr real pozitiv* şi ecuaţia $x^n - a = 0$. Atunci avem

T e o r e m a 3. Dacă $n \geqslant 2$ este un număr natural şi $a > 0$ un număr real pozitiv atunci ecuaţia

$$x^n - a = 0. \quad (2)$$

are o rădăcină reală pozitivă şi numai una.

Demonstraţia riguroasă a faptului că există o rădăcină pozitivă a ecuaţiei (2) depăşeşte programa clasei a X-a. Ea necesită noţiunea de continuitate şi se va face la Analiză matematică în clasa a XI-a. Vom indica totuşi mai jos pe un exemplu cum poate fi găsită o valoare aproximativă a rădăcinii pozitive a unei astfel de ecuaţii.

Să demonstrăm acum unicitatea. Într-adevăr, să presupunem prin absurd, că ecuaţia (2) ar avea mai multe rădăcini pozitive diferite. Fie atunci x_1 şi x_2, $x_1 \neq x_2$ două astfel de rădăcini, adică

$$x_1^n = x_2^n = a. \quad (3)$$

Cum $x_1 \neq x_2$, atunci unul dintre aceste numere este mai mic decât celălalt. Fie, de exemplu, $x_1 < x_2$. Atunci din proprietăţile puterilor rezultă $x_1^n < x_2^n$, ceea ce contrazice relaţia (3). Această contradicţie arată că există o singură rădăcină pozitivă a ecuaţiei (2).

Cu alte cuvinte, teorema precedentă spune că *pentru orice număr real pozitiv $a > 0$ şi orice număr natural $n \geqslant 2$, există un unic număr real pozitiv cu proprietatea că puterea a n-a a sa să fie a.*

Atunci putem da următoarea definiţie:

Definiţie. Dacă $a > 0$ este un număr real pozitiv şi $n \geqslant 2$ un număr natural, se numeşte radical de ordin n din a, numărul pozitiv a cărui putere a n-a este a.

Conform teoremei precedente există un astfel de număr şi este unic.

Notaţie. Vom nota radicalul de ordin n din a prin $\sqrt[n]{a}$. Pentru $\sqrt[2]{a}$, de obicei, se omite 2 şi se scrie, simplu, $\sqrt{a}$.

Aşadar, $\sqrt[n]{a}$ este un număr care verifică relaţiile:

$$\sqrt[n]{a} > 0, (\sqrt[n]{a})^n = a \ (a > 0).$$

Exemple

1. $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[5]{32} = 2$; $\sqrt[4]{81} = 3$.

2. Să arătăm, acum, cum poate fi găsită o valoare aproximativă a numărului $\sqrt[3]{2}$.

Deoarece $1 = 1^3 < 2 < 2^3 = 8$, rezultă că $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ şi deci 1, respectiv 2 sunt valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos, ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decât 1. Ca să găsim valorile aproximative cu o eroare mai mică decât 0,1 ale lui $\sqrt[3]{2}$, procedăm în modul următor. Scriem şirul de numere

1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0.

Căutăm în acest şir două numere consecutive, astfel încât cubul primului dintre ele să fie mai mic decât 2, iar cubul celui de-al doilea să fie mai mare decât 2.

Pentru aceasta să ridicăm la cub numărul din mijloc.

Obţinem $1{,}5^3 = 3{,}375$, care este mai mare decât 2. Deoarece toate numerele de la dreapta lui 1,5 prin ridicare la cub dau numere mai mari decât 2, perechea de numere căutată va fi printre numerele

1,1; 1,2; 1,3; 1,4.

Ridicăm la cub 1,2 şi obţinem 1,728 care este mai mic decât 2, şi deci cubul lui 1,1 va fi şi mai mic. Calculăm atunci cubul lui 1,3 şi obţinem $(1{,}3)^3 = 2{,}197$ care este mai mare decât 2. Deci $1{,}2 < \sqrt{2} < 1{,}3$. Aşadar 1,2 respectiv 1,3 vor fi valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decât 0,1.

Dacă vrem să găsim valorile aproximative cu o eroare mai mică decât 0,01 ale lui $\sqrt[3]{2}$., procedăm ca mai înainte pentru şirul de numere următor:

1,21; 1,22; 1,23; 1,24;…; 1,29.

Deoarece $(1{,}25)^3 = 1{,}953125$ este mai mic decât 2, o să luăm în considerare numai numerele:

1,26; 1,27; 1,28; 1,29.

Cum $(1{,}26)^3 = 2{,}00376$ este mai mare decât 2, avem $1{,}25 < \sqrt[3]{2} < 1{,}26$. Aşadar 1,25 respectiv 1,26 vor fi valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos, ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decât 0,01.

Continuând procedeul putem găsi valori aproximative ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare oricât de mică dorim.

În general, ecuația $x^n - a = 0$ $(a > 0)$ poate să aibă și alte rădăcini (care evident trebuie să fie negative). De exemplu, ecuația $x^2 - 4 = 0$ are rădăcinile $x_1 = -2 < 0$ și $x_2 = 2 > 0$. În acest sens avem în general:

1° Dacă $n = 2k + 1$, atunci ecuația $x^{2k+1} - a = 0$ $(a > 0)$ nu are rădăcini negative.

Această afirmație rezultă ușor observând că oricare ar fi $\alpha < 0$ avem $\alpha^{2k+1} < 0$ și deci $\alpha^{2k+1} \neq a$ $(a > 0)$.

2° Dacă $n = 2k$ atunci ecuația $x^{2k} - a = 0$ $(a > 0)$ are o singură rădăcină negativă și anume $-\sqrt[2k]{a}$.

Într-adevăr, avem $(-\sqrt[2k]{a})^{2k} = \left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$ și deci $-\sqrt[2k]{a}$ este o rădăcină a ecuației $x^{2k} - a = 0$. Un raționament analog celui folosit la demonstrarea unicității în teorema precedentă, ne arată că $-\sqrt[2k]{a}$ este unica rădăcină negativă.

Prin definiție, avem $\sqrt[n]{0} = 0$ $(n \geq 2$, număr natural$)$.

Evident, $\sqrt[n]{0} = 0$ este unica rădăcină a ecuației $x^n = 0$.

Observații. 1. În clasele anterioare s-a definit radicalul de ordin doi (rădăcina pătrată) dintr-un număr pozitiv. De asemenea, s-a studiat proprietățile acestuia și operațiile cu radicali de ordinul doi.

2. Având în vedere definiția radicalului, mai precis că radicalul unui număr pozitiv (sau nul) este pozitiv (sau nul) este folositor de remarcat următoarea formulă importantă:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemple

1. $\sqrt{(2-a)^2} = |2-a| = \begin{cases} 2-a, & \text{dacă } a < 2, \\ 0, & \text{dacă } a = 2, \\ a-2, & \text{dacă } a > 2. \end{cases}$

2. $\sqrt{(x^2+1)^2} = |x^2+1| = x^2+1$, deoarece pentru orice x, avem $x^2+1 > 0$.

2.2. Funcția radical

Fie $n \geq 2$ un număr natural. Definind noțiunea de radical de ordin n, fiecărui număr pozitiv (sau nul) a i s-a asociat un număr bine determinat, pozitiv (sau nul) $\sqrt[n]{a}$.

Astfel am obținut o funcție $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty), f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Această funcție se numește *funcție radical*. Iată câteva proprietăți ale funcției radical:

1° Funcția radical este *strict crescătoare*.

Într-adevăr fie $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, astfel încât $x_1 < x_2$. Deoarece $x_1 = \left(\sqrt[n]{x_1}\right)^n$ și $x_2 = \left(\sqrt[n]{x_2}\right)^n$, avem $\left(\sqrt[n]{x_1}\right)^n < \left(\sqrt[n]{x_2}\right)^n$. Dar funcția putere fiind strict crescătoare pe $[0, +\infty)$ rezultă că $\left(\sqrt[n]{x_1}\right) < \left(\sqrt[n]{x_2}\right)$ adică $f(x_1) < f(x_2)$.

2° Funcția radical este bijectivă.

Deoarece funcția radical este strict crescătoare (proprietatea 1°) rezultă că ea este injectivă (vezi teorema 2 din cap. 1). Fie acum $y \in [0, +\infty)$. Deoarece $f(y^n) = \sqrt[n]{y^n} = y$, rezultă că f este surjectivă.

Observații. 1. Deoarece funcția radical

$$f: [0, +\infty) \to [0, +\infty), f(x) = \sqrt[n]{y^n},$$

este bijectivă, rezultă (vezi teorema 4 din cap. 1) că ea este inversabilă.

Din relațiile $(\sqrt[n]{x})^n = x$ și $\sqrt[n]{y^n} = y$, $(x \geq 0, y \geq 0)$ rezultă că inversa sa nu este alta decât funcția:

$$g: [0, +\infty) \to [0, +\infty); g(x) = x^n.$$

(a nu se confunda funcția g cu funcția putere, ele neavând același domeniu de definiție.)

Într-adevăr, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[n]{x}) = \sqrt[n]{x^n} = x, x \in [0, +\infty)$.

$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y^n) = \sqrt[n]{y^n} = y, y \in [0, +\infty)$.

2. Din punctul 1. rezultă că g este inversabilă și, conform teoremei 4 din capitolul 1, este deci bijectivă.

Graficul funcției radical $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ***pentru*** $n = 2, 3$.

1) Funcția $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty), f(x) = \sqrt{x}$. Din proprietățile 1° și 2° de mai sus rezultă, în particular, că funcția f este strict crescătoare și bijectivă. Graficul acestei funcții (construit prin „puncte“) este reprezentat în figura 5.

2) Funcția $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty), f(x) = \sqrt[3]{x}$. De asemenea, această funcție este strict crescătoare și inversabilă. Graficul său (construit prin „puncte") este reprezentat în figura 6.

Se observă din aceste figuri că graficele celor două funcții radical considerate sunt asemănătoare.

În cele două figuri am reprezentat prin linie întreruptă graficul funcției inverse. Cele două grafice (al funcției f și al inversei sale g) sunt simetrice față de prima bisectoare (vezi teorema 5, cap. 1).

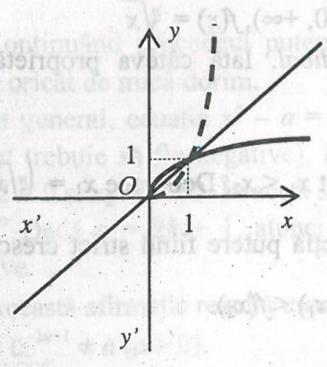


Fig. 5

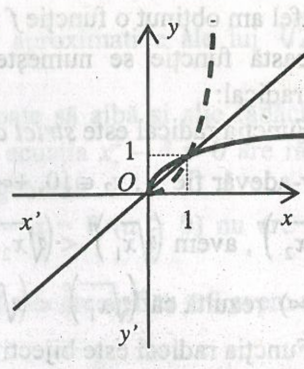


Fig. 6

2.3. Radicalul (de ordin impar) al unui număr negativ

Fie $n \geqslant 2$ un *număr natural,* $a < 0$ un *număr real negativ și ecuația* $x^n - a = 0$. Atunci avem:

T e o r e m a 4. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural, $a < 0$ un număr real negativ și ecuația $x^n - a = 0$ (1)

Atunci:

1° Dacă $n = 2k$ $(k \geqslant 1)$, ecuația (1) nu are rădăcini reale.

2° Dacă $n = 2k + 1$ $(k \geqslant 1)$, ecuația (1) are o rădăcină reală negativă și numai una.

Demonstrație. Afirmația 1° rezultă ușor observând că oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $\alpha^{2k} = (\alpha^2)^k \geqslant 0$ și deci $\alpha^{2k} \neq a$ $(a < 0)$, adică $\alpha^{2k} - a \neq 0$.

Să demonstrăm acum 2°. Fie pentru aceasta $y = -x$. Cum $y^{2k+1} = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, ecuația devine $-y^{2k+1} - a = 0$ sau încă $y^{2k+1} - (-a) = 0$.

Cum $a < 0$ rezultă $-a > 0$ și după teorema din paragraful 2, rezultă că ecuația în y are o rădăcină reală pozitivă unică. Aceasta este tocmai $\sqrt[n]{-a}$ $(-a > 0)$. Dar, atunci este clar că ecuația în x are o rădăcină negativă unică și anume $x = -\sqrt[n]{-a}$ $(-a > 0)$.

Având în vedere afirmația 2° a teoremei precedente putem da următoarea definiție:

Definiție. Dacă $a < 0$ este un număr real negativ și $n \geqslant 3$ un număr natural impar, se numește radical de ordin n din a, numărul negativ a cărui putere a n-a este a.

Un astfel de număr există și este unic. Îl notăm prin $\sqrt[n]{a}$. Așadar $\sqrt[n]{a}$ $(a < 0,$ $n \geqslant 3$, impar) este un număr care verifică relațiile: $\sqrt[n]{a} < 0$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Din considerațiile anterioare rezultă:

Dacă $a < 0$, $n = 2k + 1$, atunci $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

Exemple

1. Ecuațiile $x^4 + 81 = 0$ și $x^{100} + 125 = 0$ nu au rădăcini reale.

2. Ecuațiile $x^5 + 32 = 0$ și $x^3 + 125 = 0$ au câte o rădăcină reală negativă și anume: $\sqrt[5]{-32} = -2$, respectiv $\sqrt[3]{-125} = -5$.

Observație. Pentru un număr natural impar, $n = 2k + 1$, am definit radicalul de ordin n din orice număr real (pozitiv, negativ sau zero). Astfel se obține o funcție

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$$

Această funcție este *inversabilă*, inversa sa fiind funcția putere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^n$.

Din cele precedente rezultă, în particular, că putem defini radicalul de ordin trei (ordin impar) dintr-un număr real oarecare (pozitiv, negativ sau zero). De asemenea, proprietățile acestuia și operațiile cu radicali de ordin trei se obțin prin particularizare ($n = 3$) din cele ale radicalilor de ordin n studiate în continuare.

2.4. Proprietățile radicalilor

În cele ce urmează vom vedea că radicalii au o serie de proprietăți asemănătoare puterilor.

Amintim, la început, că dacă x și y sunt numere reale, iar n un număr natural nenul, atunci $x^n y^n = (xy)^n$.

De asemenea, dacă $x, y \geqslant 0$ sunt numere reale, iar n este un număr natural nenul, atunci din $x^n = y^n$ rezultă $x = y$.

În cele ce urmează m, n, k vor fi numere naturale nenule, iar atunci când ele indică ordinul unui radical, vor fi mai mari sau egale decât 2.

1. Oricare ar fi numerele reale $a, b \geqslant 0$, atunci:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \tag{1}$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[n]{ab}$ și $y = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. Atunci $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ și $x^n = \left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$, $y^n = \left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$. Deci $x^n = y^n$, de unde $x = y$, ceea ce trebuia demonstrat.

Cerința $a \geqslant 0$ și $b \geqslant 0$ este esențială numai pentru n par.

Dacă n este impar, formula (1) este valabilă pentru orice numere reale a și b (inclusiv negative).

Exemple

$$\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25}\sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35;$$

$$\sqrt[3]{-125 \cdot 8} = \sqrt[3]{-125}\sqrt[3]{8} = -5 \cdot 2 = -10.$$

Remarcăm că formula (1) rămâne adevărată pentru orice număr finit de numere $a_1, a_2, \ldots, a_k \geqslant 0$ $(k \geqslant 2)$, adică

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2} \ldots \sqrt[n]{a_k}. \tag{2}$$

2. Oricare ar fi numerele reale $a \geqslant 0$, $b > 0$, atunci

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \tag{3}$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $y = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Atunci $x \geqslant 0$ și $y \geqslant 0$ și

$x^n = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$ și $y^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$. Deci $x^n = y^n$, de unde $x = y$ ceea ce trebuia demonstrat.

Cerința $a \geqslant 0$ și $b > 0$ este esențială numai pentru n număr par.

Dacă n este impar formula (3) este valabilă pentru orice număr real a şi orice număr real $b \neq 0$.

Exemple $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$; $\sqrt[3]{\frac{-64}{27}} = -\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = -\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = -\frac{4}{3}$.

3. Oricare ar fi numărul real $a \geqslant 0$, atunci

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m. \tag{4}$$

Într-adevăr,

$$\sqrt[n]{a^{nm}} = \sqrt[n]{(a^n)^m} = \underbrace{\sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a^n}}_{m \text{ ori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ ori}} = a^m.$$

Exemple $\sqrt[3]{4^6} = \sqrt[3]{4^{3\cdot 2}} = 4^2 = 16$; $\sqrt[4]{2^{12}} = \sqrt[4]{2^{4\cdot 3}} = 2^3 = 8$.

4. Oricare ar fi numărul real $a \geqslant 0$, atunci:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \tag{5}$$

Într-adevăr,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ ori}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ ori}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Dacă n este impar, formula (5) este valabilă şi pentru $a < 0$.

Exemple $\left(\sqrt[4]{3}\right)^3 = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$; $\left(\sqrt[6]{16}\right)^3 = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$;

$$\left(\sqrt[3]{-2}\right)^5 = \sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-32}.$$

5. Oricare ar fi numărul $a \geqslant 0$, atunci:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}. \tag{6}$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ şi $y = \sqrt[n]{a^m}$. Atunci $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ şi $x^n = \left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = \sqrt[nk]{a^{(nk)m}} = a^m$ şi $y^n = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m$. Deci $x^n = y^n$, de unde $x = y$, ceea ce trebuia demonstrat.

Exemple $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$; $\sqrt[25]{a^{10}} = \sqrt[5]{a^2}$.

6. Oricare ar fi numărul real $a \geqslant 0$, atunci:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ şi $y = \sqrt[nm]{a}$. Atunci $x \geqslant 0$ şi $y \geqslant 0$. După proprietăţile **4** şi **5** avem $y^n = (\sqrt[nm]{a})^n = \sqrt[nm]{a^n} = \sqrt[m]{a}$. Cum $x^n = \sqrt[m]{a}$, după definiţia radicalului de ordin n rezultă că $y = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

Deci $y = x$, ceea ce trebuia demonstrat.

Exemple $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$.

2.5. Operaţii cu radicali

1. *Scoaterea unui factor de sub semnul radical şi introducerea unui factor sub semnul radical.*

Uneori numărul de sub semnul radical se descompune în factori, caz în care radicalul este uşor de calculat. În aceste cazuri, expresia radicalului devine mai simplă (se simplifică), dacă scoatem aceşti factori de sub semnul radical. În efectuarea unei astfel de operaţii, ne bazăm pe proprietăţile 1 şi 3 ale radicalilor.

De exemplu: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;

$\sqrt[4]{1250} = \sqrt[4]{625 \cdot 2} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{5^4}\sqrt[4]{2} = 5\sqrt[4]{2}$;

$\sqrt[4]{2a^{12}} = |a^3|\sqrt[4]{2}$.

Uneori este folositor să introducem factori sub semnul radical. Pentru efectuarea unui astfel de operaţii ne bazăm pe aceleaşi proprietăţi menţionate mai sus.

De exemplu: $\sqrt[3]{16\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{16^2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^8 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^9}} = \sqrt[6]{2^9} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$.

2. *Înmulţirea radicalilor.* Proprietatea 1 a radicalilor ne dă legea de înmulţire a radicalilor de acelaşi ordin:

$$\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}. \tag{1}$$

Ca să înmulţim radicali de ordine diferite, este necesar să-i aducem la acelaşi ordin şi, apoi, să-i înmulţim după formula (1). Fie, de exemplu, $\sqrt[n]{a}$ şi $\sqrt[m]{b}$. Folosind proprietatea 5 a radicalilor avem:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}; \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{b^n}.$$

Atunci $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} \cdot \sqrt[nm]{b^n} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$.

De exemplu: $\sqrt{3}\sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{3^3}\sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 9^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{3^7} = 3\sqrt[6]{3}$.

Observăm că se poate lua ca ordin comun al radicalilor $\sqrt[n]{a}$ şi $\sqrt[m]{b}$, tocmai cel mai mic multiplu comun al numerelor n şi m.

De exemplu, putem lua ca ordin comun pentru radicalii $\sqrt[4]{2}$ şi $\sqrt[6]{32}$ pe 12, care este cel mai mic multiplu comun al numerelor 4 şi 6. Atunci avem:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{32} = \sqrt[12]{2^3} \cdot \sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[12]{2^{13}} = 2\sqrt[12]{2}.$$

3. *Împărţirea radicalilor.* Proprietatea 2 a radicalilor ne dă legea de împărţire a radicalilor de acelaşi ordin.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \tag{2}$$

Ca să împărţim radicali de ordine diferite, îi aducem mai întâi la acelaşi ordin şi apoi îi împărţim după formula (2).

De exemplu: $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$.

4. *Raţionalizarea numitorilor.* Înţelegem prin raţionalizarea numitorilor, operaţia de eliminare (prin transformări) a radicalilor de la numitorul unei fracţii. Vom clarifica aceasta prin câteva cazuri speciale, pe care le vom prezenta mai jos.

Să precizăm mai întâi noţiunea de *expresie conjugată*. Astfel, o expresie, care conţine radicali se numeşte *conjugata* unei alte expresii care conţine radicali, dacă produsul acestor expresii se poate scrie fără radicali. Atunci cele două expresii se numesc *conjugate*.

În cazurile următoare, raționalizarea numitorului se realizează prin amplificarea fracției cu conjugata numitorului. De aceea vom pune în evidență pentru fiecare caz în parte, conjugatele numitorului.

1° *Numitorul este un radical*. În acest caz radicalul de la numitor se elimină printr-o amplificare.

De exemplu: $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{5}{\sqrt[3]{12}} = \frac{5\sqrt[3]{2\cdot 3^2}}{\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}} = \frac{5\sqrt[3]{18}}{6}$.

2° *Numitorul este de forma*: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ $(a, b > 0)$.

Observăm că $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$. Expresiile $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ și $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sunt conjugate. Pentru a raționaliza numitorul amplificăm fracția cu conjugata numitorului.

De exemplu: $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2} = 5-2\sqrt{6}$.

3° *Numitorul este de forma*: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}$ $(a, b, c > 0)$. În acest caz, radicalii de la numitor se elimină succesiv, reducând problema la cazul precedent.

De exemplu:

$$\frac{4}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{4\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}\right]}{\left[\left(1+\sqrt{3}\right)-\sqrt{2}\right]\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}\right]} = \frac{4\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(4+2\sqrt{3}\right)-2} = \frac{4\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2+2\sqrt{3}} = \frac{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{1-3} =$$

$$= 2-\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

4° *Numitorul este de forma* $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ sau $\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$. Avem:

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right) = a+b \text{ și}$$

$$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right) = a-b$$

acestea fiind perechi de expresii conjugate.

Exemplu

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3\cdot 5^2}+\sqrt[3]{3^2\cdot 5}+\sqrt[3]{3^3}}{5-3} = \frac{3+\sqrt[3]{45}+\sqrt[3]{75}}{2}.$$

Aplicație. Să se demonstreze că: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, unde a, b, c sunt numere reale pozitive oarecare (*media aritmetică* a trei numere pozitive este mai mare sau egală cu *media geometrică* a lor).

Demonstrație. Se verifică ușor că are loc identitatea:

$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz\right)$, unde x, y, z sunt numere reale oarecare.

Deoarece $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$, rezultă identitatea $x^3+y^3+z^3-3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$.

În această ultimă identitate punem: $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$ și obținem:

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2+\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}\right)^2+\left(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}\right)^2\right]$$

Deoarece a, b, c sunt numere pozitive, iar pătratul oricărui număr real este nenegativ, rezultă că $a+b+c-3\sqrt[3]{abc} \geq 0$, adică

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Inegalitatea dată devine egalitatea dacă și numai dacă $a=b=c$.

Observație. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive oarecare, atunci:

$$\sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

(*media geometrică* a trei numere reale pozitive este mai mare sau egală cu *media armonică* a lor). Folosind faptul că media aritmetică a numerelor $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ și $\frac{1}{c}$ este mai mare sau egală cu media lor geometrică, rezultă inegalitatea cerută.

2.6. Ecuații iraționale

1. Se numesc *ecuații iraționale*, ecuațiile care conțin necunoscuta sub semnul radical. Așa, de exemplu, ecuațiile

$$\sqrt{x-2} = 5+\sqrt{x};\ \sqrt{x} = 1-2x;$$

$$\sqrt[3]{4-x} = \sqrt{x+10}+5x$$

sunt ecuații iraționale.

Amintim că radicalii de ordin par sunt definiți numai pentru numere nenegative, aceștia fiind de asemenea numere nenegative. Să considerăm, de exemplu, ecuațiile iraționale:

1° $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}=3$. Cum radicalii de ordinul doi sunt definiți numai pentru numere nenegative, rezultă că soluțiile ecuației trebuie să verifice sistemul de inecuații:

$$x-3 \geqslant 0,\ 2-x \geqslant 0. \qquad (1)$$

De aici rezultă: $x \geqslant 3$ şi $x \leqslant 2$ şi deci sistemul (1) evident nu are soluţii. Aşadar ecuaţia dată nu are soluţii reale.

2° $\sqrt{x} + \sqrt{3 - x} = -5$. Cum $\sqrt{x}$ şi $\sqrt{3 - x}$ sunt nenegative, avem $\sqrt{x} + \sqrt{3 - x} \geq 0$ pentru x real. Însă $-5 < 0$ şi deci ecuaţia nu are soluţii reale.

Observaţie. Cele două exemple precedente ne arată că este necesar ca înainte de a trece la găsirea, prin diferite metode, a soluţiilor unei ecuaţii iraţionale, să ne asigurăm dacă astfel de soluţii pot să existe.

2. *Metode de rezolvare a ecuaţiilor iraţionale.* Calea obişnuită de rezolvare a ecuaţiilor iraţionale constă în eliminarea radicalilor, prin diferite transformări, reducându-le astfel la ecuaţii deja studiate (de exemplu, de gradul întâi sau al doilea). Mai jos prezentăm câteva exemple de ecuaţii iraţionale a căror rezolvare se poate efectua prin ridicarea la putere sau înmulţire cu expresii conjugate.

Exemple

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$x = \sqrt{2 - x}, \tag{2}$$

Pentru ca radicalul să existe trebuie ca $2 - x \geqslant 0$, de unde $x \leqslant 2$. Deci soluţiile ecuaţiei trebuie să verifice această inegalitate. Ridicăm ambii membri ai ecuaţiei la pătrat şi obţinem: $x^2 = 2 - x$, sau $x^2 + x - 2 = 0$. de unde $x_1 = -2$ şi $x_2 = 1$.

Cu toate că $x_1 \leqslant 2$ şi $x_2 \leqslant 2$, nu putem încă trage concluzia că acestea sunt rădăcini ale ecuaţiei (2).

Aceasta pentru că la acelaşi rezultat am fi ajuns (prin ridicare la pătrat, membru cu membru) chiar dacă am fi considerat ecuaţia iraţională $x = -\sqrt{2 - x}$, care evident este diferită de ecuaţia dată (2). Deci printre rădăcinile ecuaţiei obţinute prin ridicare la pătrat (membru cu membru) a ecuaţiei (2) se găsesc şi rădăcinile ecuaţiei $x = -\sqrt{2 - x}$, care pot să nu fie rădăcini ale ecuaţiei (2). De aceea, trebuie să verificăm dacă, într-adevăr, $x_1 = -2$ şi $x_2 = 1$ sunt rădăcini ale ecuaţiei iraţionale date. Pentru $x = -2$, membrul stâng al ecuaţiei (2) are valoarea -2, iar cel drept $\sqrt{4} = 2$. Cum $-2 \neq 2$, rezultă că -2 nu este rădăcină a ecuaţiei (2). Pentru $x = 1$, ambii membrii ai ecuaţiei (2) iau valoarea 1. Deci 1 este rădăcină a ecuaţiei iraţionale date.

2. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x - 5} + \sqrt{10 - x} = 3. \tag{3}$$

Din condiţiile de existenţă a radicalilor rezultă că soluţiile ecuaţiei trebuie să verifice inegalitatea: $5 \leqslant x \leqslant 10$. Prin ridicare la pătrat se obţine:

$$x - 5 + 2\sqrt{(x - 5)(10 - x)} + 10 - x = 9, \text{ sau}$$

$$2\sqrt{(x - 5)(10 - x)} = 4, \text{ sau } \sqrt{(x - 5)(10 - x)} = 2.$$

Printr-o nouă ridicare la pătrat se obţine:

$(x - 5)(10 - x) = 4$, sau $-x^2 + 15x - 50 = 4$, sau încă $x^2 - 15x + 54 = 0$.

Această ecuaţie are rădăcinile: $x_1 = 6$, $x_2 = 9$, deci cuprinse între 5 şi 10. Verificarea arată că atât 6 cât şi 9 sunt rădăcini ale ecuaţiei date.

3. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1} = 4. \tag{4}$$

Din condiţiile de existenţă a radicalilor rezultă $x \geqslant 1$.

Să rezolvăm această ecuaţie prin înmulţirea ambilor membri cu expresia conjugată a membrului stâng, adică cu $\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 1}$. Astfel obţinem:

$$\left(\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1}\right)\left(\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 1}\right) = 4\left(\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 1}\right) \text{de unde}$$

$$(x + 7) - (x - 1) = 4\left(\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 1}\right).$$

De aici, avem

$$\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 1} = 2. \tag{5}$$

Adunând membru cu membru ecuaţiile (4) şi (5) se obţine $2\sqrt{x + 7} = 6$, de unde $x + 7 = 9$, adică $x = 2$. Prin verificare, se obţine că 2 este o rădăcină a ecuaţiei date.

4. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{x - 1} = 1 \tag{6}$$

Fiind de ordin 3, radicalii există pentru orice x real.

Pentru rezolvarea ecuaţiei folosim identitatea

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b).$$

Ridicând la puterea a treia ambii membri ai ecuaţiei (6), obţinem:

$$2x - 1 + x - 1 + 3\sqrt[3]{2x - 1}\sqrt[3]{x - 1}\left(\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{x - 1}\right) = 1, \text{ sau}$$

$$3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x - 1)(x - 1)} \cdot 1 = 1, \text{ sau încă } 3\sqrt[3]{(2x - 1)(x - 1)} = 3(1 - x).$$

Atunci $\sqrt[3]{(2x - 1)(x - 1)} = 1 - x$ şi printr-o nouă ridicare la puterea treia, obţinem $(2x - 1)(x - 1) = (1 - x)^3$, sau $(2x - 1)(x - 1) - (1 - x)^3 = 0$, adică $(2x - 1)(x - 1) + (x - 1)^3 = 0$. Scoţând factor comun pe $x - 1$, rezultă $(x - 1)\left[(2x - 1) + (x - 1)^2\right] = 0$, sau $(x - 1)x^2 = 0$, de unde $x_1 = 1$ şi $x_2 = 0$.

Verificarea arată că $x_1 = 1$ este rădăcină a ecuaţiei (6) (pentru $x = 1$ ambii membri ai ecuaţiei sunt egali cu 1), iar $x_2 = 0$ nu este rădăcină (pentru $x = 0$, membrul stâng al ecuaţiei (6) ia valoarea -2, iar membrul drept este 1 şi avem $-2 \neq 1$). Deci 1 este singura rădăcină a ecuaţiei date.

Observaţie. Prin metodele de rezolvare a ecuaţiilor iraţionale, indicate în exemplele de mai sus, nu se pot pierde rădăcini ale ecuaţiei iraţionale date. Dimpotrivă, ecuaţia (fără radicali), la care se ajunge prin transformări ale ecuaţiei iraţionale date, poate avea rădăcini în plus faţă de ecuaţia iniţială. De aceea remarcăm încă o dată necesitatea de a verifica dacă rădăcinile ecuaţiei obţinute (prin transformări) sunt rădăcini ale ecuaţiei iraţionale date (în forma iniţială), această etapă făcând parte din însăşi rezolvarea ecuaţiilor iraţionale.

3. Puteri cu exponent rațional

În acest paragraf vom prezenta o extindere a noțiunii de putere, care cuprinde în particular, atât noțiunea de putere cu exponent întreg, cât și cea de radical.

3.1. Puteri cu exponent rațional pozitiv

Definiție. *Fie $a \geqslant 0$ un număr real nenegativ și $\frac{m}{n}$ un număr rațional pozitiv, atunci definim*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{1}$$

(citim a la puterea $\frac{m}{n}$).

Observăm că în această definiție intervin numerele naturale m și n care definesc numărul rațional dat.

Cum numărul rațional $\frac{m}{n} > 0$ este egal, de exemplu, cu numărul rațional $\frac{km}{kn}$, pentru k număr natural nenul, se pune în mod firesc problema de a arăta că această definiție este corectă, adică nu depinde de alegerea reprezentanților.

Cu alte cuvinte, trebuie arătat că dacă $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, atunci $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$.

Într-adevăr, avem $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ dacă și numai dacă $mn' = m'n$.

Atunci folosind proprietatea 5 a radicalilor, avem:

$$a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}} = \sqrt[n'm]{a^{m'm}} = \sqrt[m'n]{a^{m'm}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Obținem astfel noțiunea de putere cu exponent rațional pozitiv.

De exemplu: $9^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{9^5} = \sqrt[4]{9^4 \cdot 9} = 9\sqrt[4]{9} = 9\sqrt{3}$; $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^6} = 4$.

Din noțiunea de putere cu exponent rațional pozitiv particularizată la numerele naturale n, respectiv la numerele raționale pozitive $\frac{1}{n}$, se obține noțiunea de putere cu exponent natural, respectiv noțiunea de radical pentru numerele pozitive.

Observație. Cerința $a \geqslant 0$, din definiție, este esențială deoarece în caz contrar, formula (1) ar putea să nu aibă sens. De exemplu, $(-2)^{\frac{1}{4}}$ după formula (1) ar trebui să fie radical de ordinul 4 din -2, care nu are sens.

Proprietăți ale puterilor cu exponent rațional pozitiv

În cele ce urmează presupunem că $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ sunt numere raționale pozitive. Atunci:

1° $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \ (a \geq 0)$;

3° $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} \ (a \geq 0, b > 0)$;

2° $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \ (a, b \geq 0)$;

4° $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} \ (a \geqslant 0)$;

5° Dacă $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, *atunci* $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \ (a > 0)$.

Aceste proprietăți se demonstrează ușor folosind proprietățile radicalilor. Să demonstrăm prima proprietate. Avem:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Lăsăm ca exercițiu, verificarea celorlalte proprietăți.

Observație. Proprietatea 1° este adevărată și pentru un număr finit de factori, adică:

$$a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{m_k}{n_k}} = a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}+\ldots+\frac{m_k}{n_k}}.$$

Exemple $5^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{4}{5}} = 5^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = 5^1 = 5$; $a^{\frac{6}{7}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{6}{7}+\frac{5}{6}} = a^{\frac{71}{42}} \ (a \geq 0)$.

Pentru $a \neq 0$, am convenit să punem $a^0 = 1$. Expresiei 0^0 nu i se dă nici un sens.

3.2. Puteri cu exponent rațional negativ

Așa cum am definit puterea cu exponent întreg negativ (vezi pct. 1.3), definim și puterea cu exponent rațional negativ.

Fie $a > 0$, un număr real pozitiv și $\frac{m}{n}$ un număr rațional pozitiv. Atunci prin definiție, $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

De exemplu:

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4};\ 27^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{27^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{27^5}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3^{15}}} = \frac{1}{\sqrt{3^5}} = \frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

Acum știm ce înseamnă puterea cu exponent rațional oarecare a oricărui număr real pozitiv. Puterile cu exponent rațional oarecare au următoarele proprietăți de bază:

$$1^\circ\ a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}\ (a>0);\qquad 3^\circ\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}\ (a,b>0);$$

$$2^\circ\ (ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}\ (a,b>0);\qquad 4^\circ\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}\ (a>0);$$

$$5^\circ\ \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}\ (a>0).$$

Am demonstrat în paragraful precedent aceste proprietăţi pentru cazul exponenţilor raţionali pozitivi. Ele se pot demonstra şi pentru exponenţi raţionali oarecare.

Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea 1). Fie pentru aceasta $\frac{m}{n}$ şi $\frac{p}{q}$ numere raţionale. Cazul în care ambele numere sunt pozitive a fost dat la punctul precedent. Rămân atunci de considerat următoarele cazuri:

1° ambii exponenţi sunt negativi;
2° unul dintre exponenţi este negativ, iar celălalt pozitiv;
3° cel puţin unul dintre exponenţi este zero.
Să le analizăm pe rând:

1° Dacă $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} < 0$, atunci $-\frac{m}{n}, -\frac{p}{q} > 0$. După definiţie şi aplicând proprietatea analoagă a puterilor cu exponent raţional pozitiv, avem:

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}}\cdot\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}} = \frac{1}{a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

2° În cazul al doilea fie, de exemplu,

$$\frac{m}{n}>0 \text{ şi } \frac{p}{q}<0;\ \text{deci } -\frac{p}{q}>0.$$

Să presupunem mai întâi că $\frac{m}{n} > -\frac{p}{q}$.

Atunci, după definiţie şi proprietatea 5° a puterilor cu exponent pozitiv, avem:

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}\cdot\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{-\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\left(-\frac{p}{q}\right)} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Dacă $\frac{m}{n} < -\frac{p}{q}$, atunci $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}\cdot\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}}\cdot\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}}$

Dar $-\frac{p}{q} > \frac{m}{n} = -\left(-\frac{m}{n}\right)$ şi după situaţia precedentă, avem:

$$\frac{1}{a^{-\frac{m}{m}}\cdot a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

În sfârşit, dacă:

$\frac{m}{n} = -\frac{p}{q}$ adică $\frac{m}{n}+\frac{p}{q} = 0$, atunci $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{m}{m}}}{a^{-\frac{p}{q}}} = 1 = a^0 = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

3° Dacă unul sau ambii exponenţi sunt zero proprietatea este evidentă (avem în vedere că $a^0 = 1$).

Lăsăm ca exerciţiu demonstrarea celorlalte proprietăţi.

Observaţie. Dacă în cazul puterilor cu exponent raţional pozitiv am putut vorbi despre proprietatea 5, doar pentru $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, în acest paragraf (după ce am definit puterile cu exponent raţional negativ) ea se poate demonstra şi pentru $\frac{m}{n} \le \frac{p}{q}$ (când $a>0$), de exemplu: $\frac{16^{\frac{3}{4}}}{16^{\frac{4}{5}}} = 16^{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}} = 16^{-\frac{1}{20}} = \left(2^4\right)^{-\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.

Exerciţii

1. Să se găsească radicalii:

a) $\sqrt{(x-1)^2}$; b) $\sqrt{(x+5)^2}$; c) $\sqrt{(2x^2-3x+1)^2}$; d) $\sqrt{(-3x^2+x-1)^2}$.

2. Să se găsească valorile lui x, pentru care sunt definite expresiile:

a) $\sqrt{x-2}$; b) $\sqrt[5]{x-2}$; c) $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[4]{5x-5}$; d) $\sqrt[4]{x^2+1}$. e) $\sqrt[6]{x^2-x+1}$.

3. Să se calculeze:

a) $\sqrt{173^2-52^2}$; b) $\sqrt[3]{373^2-252^2}$; c) $\sqrt{(242{,}5)^2-(46{,}5)^2}$.

4. Să se simplifice expresiile: $\sqrt[10]{2^5}$; $\sqrt[12]{(-5)^4}$; $\sqrt[8]{a^4}$; $\sqrt{\frac{625}{256}}$; $\sqrt[6]{(\sqrt{7}-2)}$.

5. Să se simplifice expresiile: a) $\sqrt[8]{(x-2)^4}$; b) $\sqrt[8]{[(x-1)(x+1)]^4}$; c) $\sqrt[8]{[(x-1)(x^2+1)]^4}$.

6. Fără a calcula radicalii, să se găsească care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $2\sqrt{3}$ sau $3\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{7}$ sau $8\sqrt{3}$; c) $3\sqrt[3]{4}$ sau $4\sqrt[3]{2}$.

7. Să se calculeze:

a) $\sqrt{50}-5\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{128}$; b) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{686}-\sqrt[3]{16}$;

c) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$;

d) $\left(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{1{,}6}+3\sqrt{0{,}4}\right)$

8. Să se raţionalizeze numitorii fracţiilor:

a) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{24}}$; c) $\dfrac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; d) $\dfrac{15}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}}$; e) $\dfrac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$;

9. Să se simplifice expresiile:

i) $\dfrac{3\sqrt{a}}{a}+a^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{a}-\dfrac{a^{\frac{2}{7}}}{\sqrt[2]{a}}-\dfrac{3a^{0}}{\sqrt{a}}\,(a>0)$; ii) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}\,(x>0,\ y>0, x\neq y)$.

10. Să se aşeze în ordine crescătoare radicalii:

a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}$; b) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[6]{30}$; c) $\sqrt{6}, \sqrt[4]{12}, \sqrt[8]{72}$.

11. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x+1}=2$ b) $\sqrt{x-3}=x-3$; c) $\sqrt{x-1}+1=\sqrt{x+\sqrt{x+8}}$; d) $\sqrt{7-\sqrt{x-3}}=2$;

e) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$; f) $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{2}$; g) $\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$;

h) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$; i) $x+\sqrt{6+\sqrt{x^2}}=0$.

12. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{x}+3}+\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}=4$; b) $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

13. Să se arate că $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

14. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\ \sqrt{(x+y)}\,\sqrt[3]{(x-y)^2}=8\end{cases}$; b) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28.\end{cases}$

15. Să se construiască graficele funcţiilor:

a) $f_1:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f_1(x)=\sqrt{x-1}$; b) $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_2(x)=\sqrt[3]{x-2}$;

c) $f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_3(x)=\sqrt[3]{x}-2$.

16. Să se aşeze în ordine crescătoare numerele:

a) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\dfrac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\dfrac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$; b) $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{-0{,}1}$; $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{0{,}2}$; $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$.

unde a, b şi a^2-b sunt numere reale nenegative.

17. Să se demonstreze că, pentru $1\leqslant x\leqslant 2$, $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

18. Să se calculeze: $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}\left(x^{-1}+y^{-1}\right)+\dfrac{2}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^{3}}\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right)$, dacă se dă că: $x=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)^{-1}$, $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-7}$.

19. Să se calculeze: $\left(x^{-2}+a^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-2}+a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ pentru $x=\left(1-a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

20. Să se arate că, pentru orice $a>0$, $b>0$, $c>0$ şi $\sqrt{abc}>2$, are loc identitatea

$$\frac{\sqrt{\dfrac{abc+4}{a}-4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}-2}=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

21. Să se arate că funcţia putere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{2m+1}$ este bijectivă.

22. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^4+bx+c, a\neq 0$ nu este injectivă.

23. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}$. Să se arate că f este bijectivă şi să se determine inversa sa f^{-1}.

3 FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

1. Funcția exponențială

1.1. Puteri cu exponent real

În capitolul precedent s-a definit puterea cu exponent rațional și s-au studiat o serie de proprietăți ale puterilor cu exponent rațional oarecare. În cele ce urmează, vom folosi în special proprietățile date de următoarea teoremă.

T e o r e m a 1. *1°* Dacă $a > 1$ este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent rațional pozitiv ale acestui număr, este mai mare aceea al cărei exponent este mai mare.

2° Dacă $0 < a < 1$ este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent rațional pozitiv ale acestui număr, este mai mare aceea al cărei exponent este mai mic.

Demonstrație. 1° Într-adevăr, fie $\frac{m}{n} > \frac{p}{q} > 0$ două numere raționale pozitive. Avem $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ și $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Aducem acești radicali la radicali de același ordin:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}}, \quad \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}}.$$

Cum $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, rezultă că $mq > np$. Dar cum $a > 1$, rezultă $a^{mq} > a^{np}$, de unde $\sqrt[nq]{a^{mq}} > \sqrt[nq]{a^{np}}$ sau $a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}$.

2° Demonstrația este analoagă cu cea de la punctul *1°* și, de aceea, o omitem.

Exemple

1. Avem $1{,}21 < 1{,}22$. De aceea $2^{1,21} < 2^{1,22}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,21} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1,22}$.

2. Avem $0{,}3 < 0{,}4$. De aceea $\left(\sqrt{3}\right)^{0,3} < \left(\sqrt{3}\right)^{0,4}$; $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{0,3} > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{0,4}$.

În continuare vom defini puterea cu exponent real oarecare de bază pozitivă, astfel încât aceasta să coincidă pentru exponent rațional cu cea introdusă mai înainte.

Mai precis, dacă $a > 0$ este un număr real pozitiv, iar x un număr real oarecare, ne propunem să dăm sens expresiei a^x.

Amintim, mai întâi, câteva cunoștințe privind aproximările zecimale ale numerelor reale.

Fie x un număr real oarecare reprezentat sub formă de fracție zecimală infinită, adică $x = x_0, x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots$. Pentru numărul x, aproximările zecimale cu o eroare mai mică decât 10^{-n} sunt:

i) prin lipsă: $x_n' = x_0, x_1x_2x_3 \ldots x_n$;

ii) prin adaos: $x_n'' = x_0, x_1x_2x_3 \ldots x_n + 10^{-n}$.

Așadar, numărului x i-am asociat aproximările sale zecimale:

prin lipsă: $x_0', x_1', x_2', x_3', \ldots$,

prin adaos: $x_0'', x_1'', x_2'', x_3'', \ldots$,

astfel încât

$$x_0' \le x < x_0'',$$
$$x_1' \le x < x_1'',$$
$$x_2' \le x < x_2'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Observăm că aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos ale unui număr real x sunt întotdeauna numere raționale.

1. Puteri cu exponent real pozitiv

Pentru definirea puterii de bază $a > 0$, cu exponent real, distingem două cazuri, după cum baza este supraunitară sau subunitară:

1° $a > 1$. Fie $x > 0$ un număr real și să considerăm aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n}. Atunci, pentru orice n, avem

$$x_n' \le x < x_n''.$$

După cum am observat, numerele x_n', x_n'' sunt raționale pozitive și deci conform definiției puterilor cu exponent rațional, au sens puterile $a^{x_n'}$ și $a^{x_n''}$, pentru orice n.

Mai mult, după punctul *1°* al teoremei 1, rezultă că $a^{x_n'} < a^{x_n''}$.

Definiție. Fie $a > 1$ și x un număr real pozitiv. Se numește *puterea x a lui a* un număr real y care, pentru orice număr natural n, satisface inegalitățile:

$$a^{x_n'} \le y < a^{x_n''}.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real y există și, mai mult, este unic. Demonstrația riguroasă a acestui fapt depășește programa clasei a X-a. Ea necesită noțiunea de limită și se va studia la Analiză matematică în clasa a XI-a.

Numărul y dat de definiția precedentă se notează a^x și se citește *a la puterea x*.

Exemplu

Să explicăm ce trebuie înțeles prin $3^{\sqrt{2}}$. Aproximările zecimale ale lui $\sqrt{2}$ sunt următoarele:

prin lipsă: 1; 1,4; 1,41; 1,414; …,

prin adaos: 2; 1,5; 1,42; 1,415; …;

astfel încât

$$
\begin{aligned}
1 &\le \sqrt{2} < 2,\\
1{,}4 &\le \sqrt{2} < 1{,}5,\\
1{,}41 &\le \sqrt{2} < 1{,}42,\\
1{,}414 &\le \sqrt{2} < 1{,}415,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Numărul care ne interesează $y = 3^{\sqrt{2}}$ îndeplineşte inegalităţile:

$$
\begin{aligned}
3^{1} &\le y < 3^{2},\\
3^{1,4} &\le y < 3^{1,5},\\
3^{1,41} &\le y < 3^{1,42},\\
3^{1,414} &\le y < 3^{1,415},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

2° $0 < a < 1$. Dacă $x > 0$ este un număr real, avem: $x_n' \le x < x_n''$.

După punctul *2°* al teoremei 1, rezultă că $a^{x_n''} < a^{x_n'}$.

Definiţie. Fie $0 < a < 1$ şi x un număr real pozitiv. Se numeşte *puterea x a lui a* un număr real y care, pentru orice număr natural n, satisface inegalităţile:

$$a^{x_n''} < y \le a^{x_n'}.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real y există şi, mai mult, este unic.

Exemplu

Să explicăm ce trebuie înţeles prin $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$. Având în vedere cele de mai înainte, precum şi tabelul aproximărilor zecimale ale lui $\sqrt{2}$ din exemplul precedent, numărul care ne interesează $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ îndeplineşte inegalităţile:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}\right)^{2} &< y \le \left(\frac{1}{3}\right)^{1},\\
\left(\frac{1}{3}\right)^{1,5} &< y \le \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4},\\
\left(\frac{1}{3}\right)^{1,42} &< y \le \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41},\\
\left(\frac{1}{3}\right)^{1,415} &< y \le \left(\frac{1}{3}\right)^{1,414},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Vom adăuga că, pentru orice număr real x, $1^x = 1$.

În final, trebuie menţionată o proprietate importantă a puterilor cu exponent pozitiv, şi anume:

Oricare ar fi $a > 0$ şi $x > 0$, avem $a^x > 0$.

Într-adevăr, fie x_n', x_n'' aproximările zecimale ale lui x prin lipsă, respectiv prin adaos. Atunci, pentru orice n, avem:

1° Dacă $a > 1$, atunci

$$a^{x_n'} \le a^x < a^{x_n''}.$$

2° Dacă $0 < a < 1$, atunci

$$a^{x_n''} < a^x \le a^{x_n'}.$$

Numerele x_n', x_n'' sunt raţionale şi pozitive. De aceea $a^{x_n'} > 0$ şi $a^{x_n''} > 0$, pentru orice $a > 0$. Atunci, evident $a^x > 0$, deoarece este cuprins între două numere pozitive.

2. Puteri cu exponent real negativ

Dacă $a > 0$ şi x este un număr real negativ, atunci prin definiţie

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} \tag{1}$$

Deoarece numărul $-x$ este pozitiv, a^{-x} a fost definit la punctul 1. Mai mult, am demonstrat că $a^{-x} \ne 0$, pentru $-x > 0$.

Exemplu

$3^{-\sqrt{5}} = \frac{1}{3^{\sqrt{5}}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{5}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}}$. Am demonstrat că dacă $x > 0$, atunci $a^{-x} > 0$.

Cum $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, rezultă că şi pentru $x < 0$, avem $a^x > 0$.

Amintim că pentru $a \ne 0$, am convenit să punem $a^0 = 1$.

Astfel am definit puterea unui număr pozitiv cu orice exponent real. Puterea unui număr negativ cu exponent real, în general, nu este definită.

3. Proprietăţi ale puterilor cu exponent real

Fie $a > 0$ şi $b > 0$ (numere reale pozitive). Atunci, pentru x şi y numere reale, avem:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
3. $(ab)^x = a^x b^x$;
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;
5. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Pe baza definiţiei puterii cu exponent real dată mai înainte şi folosind proprietăţile corespunzătoare ale puterii cu exponent raţional, verificarea acestora se face fără dificultate. Lăsăm ca exerciţiu demonstrarea lor.

Exemple

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{3}} = (2^{-1})^{-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}}.$

2. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{81}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-9} = (2^{-1})^{-9} = 2^{9} = 512.$

3. $\frac{7^{\sqrt{8}}}{7^{\sqrt{2}}} = 7^{\sqrt{8}-\sqrt{2}} = 7^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{2}}.$

1.2. Funcţia exponenţială

Fie $a > 0$ un număr real pozitiv. Am văzut în paragraful 1.1. că oricare ar fi numărul real x, avem $a^x > 0$.

Aşadar, putem defini funcţia următoare:

$$f: \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = a^x.$$

Observaţie. Pentru $a = 1$ se obţine funcţia constantă $f: \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = 1$ şi de aceea acest caz nu prezintă un interes special.

O funcţie $f: \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = a^x$, unde $a > 0$ şi $a \neq 1$, se numeşte *funcţie exponenţială (de bază a).*

Enunţăm în continuare o serie de proprietăţi importante ale funcţiei exponenţiale.

1. Dacă $a > 1$, atunci pentru $x > 0$ avem $a^x > 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x < 1$. Dacă $a < 1$, atunci pentru $x > 0$ avem $a^x < 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x > 1$.

Demonstraţie. Fie $a > 1$ şi $x > 0$. Dacă x este raţional, adică $x = \frac{m}{n}$, atunci $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Cum $a > 1$, rezultă că şi $a^m > 1$, dar atunci şi $\sqrt[n]{a^m} > 1$. Dacă x este un număr real pozitiv oarecare, fie x_n' şi x_n'', pentru orice n, aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos ale lui x. Atunci

$$x_n' \leq x < x_n''.$$

Cum $a > 1$, rezultă că pentru orice n avem

$$a^{x_n'} \leq a^x < a^{x_n''}.$$

Dar x_n' este raţional pozitiv şi, după cum am observat mai înainte, $a^{x_n'} > 1$, de unde $a^x > 1$.

Dacă $x < 0$, atunci avem $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$. Dar $-x > 0$ şi deci $a^{-x} > 1$. Prin urmare,

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} < 1.$$

Cazul în care $0 < a < 1$ se tratează analog; îl lăsăm ca exerciţiu.

2. Dacă $x = 0$, atunci independent de $a > 0$ avem $a^x = 1$. Aceasta rezultă din defința puterii nule.

3. Pentru $a > 1$, funcţia exponenţială $f(x) = a^x$ este strict crescătoare, iar pentru $0 < a < 1$ este strict descrescătoare.

Demonstraţie. Fie $a > 1$ şi $x_1 < x_2$. Să arătăm că

$$a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Într-adevăr, din $x_1 < x_2$ rezultă că există $u > 0$ astfel încât $x_2 = x_1 + u$. Atunci

$$a^{x_1} - a^{x_2} = a^{x_1} - a^{x_1+u} = a^{x_1}(1 - a^u).$$

Deoarece $u > 0$, după proprietatea 1 a funcţiei exponenţiale rezultă $a^u > 1$. Aşadar, $a^{x_1} > 0$ şi $1 - a^u < 0$, de unde $a^{x_1}(1 - a^u) < 0$. Înseamnă că $a^{x_1} - a^{x_2} < 0$ sau $a^{x_1} < a^{x_2}$. Deci din $x_1 < x_2$ rezultă $a^{x_1} < a^{x_2}$, adică funcţia $f(x) = a^x$ este strict crescătoare.

Analog se demonstrează că pentru $0 < a < 1$ funcţia $f(x) = a^x$ este strict descrescătoare.

4. Funcţia exponenţială $f: \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ este bijectivă.

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi că f este injectivă. Fie, pentru aceasta, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 \neq x_2$. Atunci avem $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Să presupunem, de exemplu, că $x_1 < x_2$. Atunci, după monotonia funcţiei exponenţiale (proprietatea 3) rezultă:

1. dacă $a > 1$, atunci $f(x_1) < f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$;
2. dacă $0 < a < 1$, atunci $f(x_1) > f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Analog, rezultă pentru $x_1 > x_2$. Deci f este injectivă. Demonstraţia faptului că funcţia exponenţială f este surjectivă depăşeşte programa clasei a X-a. Ea necesită noţiunea de continuitate şi se va face la Analiză matematică în clasa a XI-a. Cu alte cuvinte, se poate demonstra că oricare ar fi $y_0 > 0$ un număr real pozitiv, există un număr real x_0 astfel încât $a^{x_0} = y_0$ (conform injectivităţii funcţiei f, rezultă că x_0 este unic).

5. Funcţia exponenţială $f(x) = a^x$ este inversabilă. Această proprietate este evidentă, deoarece orice funcţie bijectivă este inversabilă.

În §2 ne vom ocupa de studiul inversei funcţiei exponenţiale.

1.3. Graficul funcţiei exponenţiale

Pe aceeaşi figură vom reprezenta graficul funcţiilor $f(x) = 2^x$ şi $g(x) = 5^x$, iar pe alta al funcţiilor $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ şi $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. Trasarea fiecărui grafic se face „prin puncte". Asociem tabelele de valori următoare:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)=2^x$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	
$h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$		8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	

Observăm că pentru $x = \pm 2, \pm 3$ şi, în general, pentru x întreg diferit de ± 1, valorile funcţiilor $g(x) = 5^x$ şi $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ sunt ori foarte mari, ori foarte mici, deci punctele corespunzătoare sunt greu de figurat pe grafic. De aceea, în acest caz, vom lua pentru x valori fracţionare cuprinse între -1 şi 1, ca de exemplu: $x = -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1.$

Valorile funcţiilor vor fi calculate aproximativ. Astfel:

$$5^0 = 1; \quad 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5} = \sqrt{\sqrt{5}} \approx \sqrt{2{,}2360} \approx 1{,}5; \quad 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2{,}24;$$

$$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} = \left(\sqrt[4]{5}\right)^3 \approx 3{,}34; \quad 5^1 = 5; \quad 5^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} \approx \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}66; \text{ ş.a.m.d.}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
$g(x)=5^x$		$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}45$	$0{,}66$	1	$1{,}5$	$2{,}24$	$3{,}34$	5	
$k(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$		5	$3{,}34$	$2{,}24$	$1{,}5$	1	$0{,}66$	$0{,}45$	$0{,}3$	$0{,}2$	

Prezentăm într-un sistem de axe xOy punctele ale căror coordonate sunt valorile din tabelele de mai sus. Punctele obţinute le unim printr-o linie continuă. În figura 1 sunt reprezentate graficele funcţiilor $f(x) = 2^x$ şi $g(x) = 5^x$, iar în figura 2 sunt reprezentate graficele funcţiilor $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ şi $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

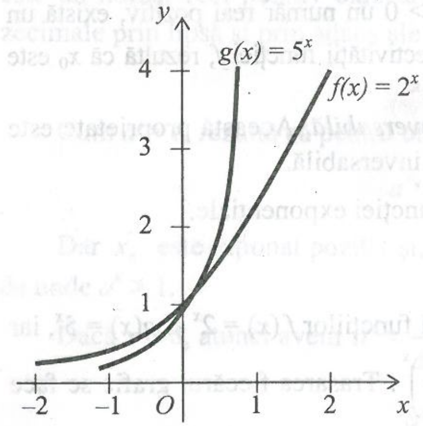


Fig. 1

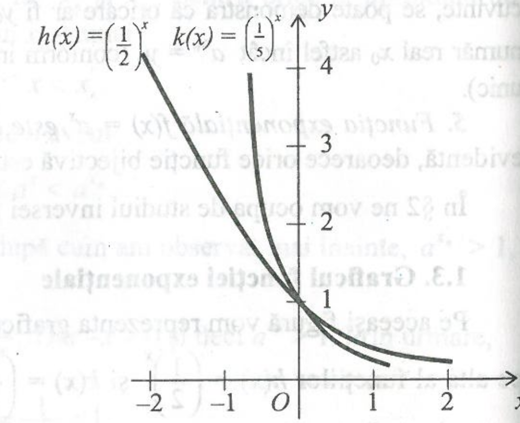


Fig. 2

Analizând graficul funcţiei exponenţiale pentru diverse baze, constatăm că el are următoarele proprietăţi:

1) Trece prin punctul de coordonate $(0, 1)$ de pe axa Oy.

2) Graficul funcţiei exponenţiale este constituit dintr-o singură ramură care „urcă” pentru baza $a > 1$ şi „coboară” pentru baza $0 < a < 1$.

3) Graficul funcţiei exponenţiale este din ce în ce mai „apropiat” de axele Ox şi Oy cu cât a este mai mare, dacă $a > 1$, sau cu cât a este mai mic, dacă $0 < a < 1$.

Exerciţii

1. Să se afle care număr din perechile de numere următoare este mai mare:

a) $3^{\frac{4}{5}}$ şi $3^{\frac{5}{6}}$; d) $(0{,}5)^{-13}$ şi 2^{13}; g) $5^{\sqrt{3}}$ şi $5^{\sqrt{2{,}5}}$;

b) $\sqrt[11]{6^3}$ şi $\sqrt[15]{6^7}$; e) $\left(\sqrt{3}\right)^{-6}$ şi $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6$; h) $\sqrt[6]{\left(\frac{7}{8}\right)^{38}}$ şi $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{8}\right)^{33}}$;

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{7}{2}}$ şi $\left(\frac{2}{5}\right)^4$; f) $2^{-\sqrt{5}}$ şi $2^{-\sqrt{3}}$.

2. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{13} \cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} \cdot 16^3$; c) $\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt{5}}\right]^{-3\sqrt{5}}$;

b) $\frac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}} \cdot \frac{2^{27\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{27}}}$; d) $\left[\left(\sqrt{8}\right)^{-4\frac{1}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{6}}{26}}$.

3. Să se afle mulţimea valorilor lui x pentru care este adevărată inegalitatea:

a) $3^x \geq 729$; d) $3^x < 3$; g) $\left(\frac{1}{81}\right)^x \sqrt{3} > 1$;

b) $2^x \leq 0{,}25$; e) $\left(\sqrt{2}\right)^x \cdot 2 > \frac{1}{8}$; h) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{0{,}5}}\right)^x < \frac{1}{4}$;

c) $2^x > \frac{1}{128}$; f) $(0{,}01)^2\left(\sqrt{10}\right)^x < 1$; i) $32\left(\sqrt[3]{2}\right)^x > 0{,}25$.

4. Să se compare m şi n dacă este adevărată inegalitatea:

a) $(3\pi)^m > (3\pi)^n$; c) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^m \geq \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^n$;

b) $\left(\frac{5\pi}{16}\right)^m < \left(\frac{5\pi}{16}\right)^n$; d) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^m \leq \left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^n$.

5. Deduceţi care din numerele următoare este mai mare decât 1 şi care este mai mic decât 1:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$; c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}$; e) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

b) $\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}$; d) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{-\frac{3}{2}}$; f) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{2}}$.

6. Să se afle care număr din perechile de numere următoare este mai mare:

a) $\pi^{-\sqrt{2}}$ şi $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{2}}$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\sqrt{6}}$ şi $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$;

b) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1+\sqrt{3}}$ şi $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2}$; d) $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ şi $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{3}-2}$.

7. Să se afle x astfel încât $a^x > \left(\frac{1}{a}\right)^x$, unde $a > 0$ este un număr real pozitiv.

8. Să se spună dacă sunt echivalente inegalităţile următoare:

a) $a^x > a^4$ şi $x > 4$; c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ şi $2x < x - 1$;

b) $6^{x^2} < 6^x$ şi $x^2 < x$; d) $8^{x^2} < 4$ şi $3x^2 \geq 2$.

9. Să se traseze graficul funcţiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde:

a) $f(x) = 2^{x-2}$; c) $f(x) = 2^{|x|}$; e) $f(x) = 2^x - 2$;

b) $f(x) = 2^{x+2}$; d) $f(x) = 2^{-|x|}$; f) $f(x) = 2^x + 2$.

10. Să se traseze graficul funcţiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$;

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$; d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$; f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

2. Logaritmi

2.1. Definiţia logaritmului unui număr pozitiv

Fie $a > 0$ un număr real pozitiv, $a \neq 1$. Considerăm ecuaţia exponenţială

$$a^x = N, \quad N > 0. \tag{1}$$

Din proprietatea 4 (punctul 1.2.) rezultă că ecuaţia (1) are o soluţie care este unic determinată. Această soluţie se notează

$$x = \log_a N \tag{2}$$

şi se numeşte *logaritmul numărului pozitiv N în baza a.*

Din (1) şi (2) obţinem egalitatea

$$a^{\log_a N} = N \tag{3}$$

care ne arată că logaritmul unui număr real pozitiv este exponentul la care trebuie ridicată baza a (a > 0, a ≠ 1) pentru a obţine numărul dat.

Dacă în (1) facem $x = 1$, obţinem $a^1 = a$ şi deci

$$\log_a a = 1. \tag{4}$$

Exemple

1. Să calculăm $\log_2 32$. Cum $2^5 = 32$, atunci din definiţia logaritmului avem $\log_2 32 = 5$.

2. Să determinăm $\log_2 \frac{1}{16}$. Din egalitatea $2^{-4} = \frac{1}{16}$, obţinem $\log_2 \frac{1}{16} = -4$.

3. Să determinăm $\log_{\frac{1}{3}} 27$. Să considerăm ecuaţia exponenţială $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$.

Cum $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{3^{-3}} = 27$, obţinem $x = -3$ şi deci $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$.

4. Să determinăm $\log_4 256$. Cum $4^4 = 256$, atunci din definiţia logaritmului obţinem $\log_4 256 = 4$.

Observaţii. 1. În practică se folosesc logaritmii în bază zece care se mai numesc şi logaritmi zecimali. Aceştia se notează lg în loc de $\log_{10}$; de aceea nu mai este nevoie să se specifice baza. Astfel, vom scrie lg106 în loc de $\log_{10}106$ şi lg5 în loc de $\log_{10}5$ etc.

2. În matematica superioară apar foarte des logaritmi care au ca bază numărul iraţional, notat cu e, $e = 2{,}718281828\ldots$. Folosirea acestor logaritmi permite simplificarea multor formule matematice. Logaritmii în baza e apar în rezolvarea unor probleme fizice şi intră în mod natural în descrierea matematică a unor procese chimice, biologice ş.a. De aceea aceşti logaritmi se numesc naturali. Logaritmul natural al numărului a se notează ln*a*.

2.2. Funcţia logaritmică

Fie $a > 0$, $a \neq 1$ un număr real. La punctul 2.1 am definit noţiunea de logaritm în baza a; fiecărui număr pozitiv N i s-a asociat un număr real bine determinat. Acest lucru ne permite să definim o funcţie

$$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}\ f(x) = \log_a x$$

numită *funcţie logaritmică*.

Iată câteva proprietăţi ale funcţiei logaritmice:

1° $f(1) = 0$.

Într-adevăr, cum $a^0 = 1$, rezultă că $\log_a 1 = 0$ şi deci $f(1) = 0$.

2° Funcţia logaritmică este monotonă. Mai exact, dacă $a > 1$, atunci funcţia logaritmică este strict crescătoare, iar dacă $0 < a < 1$, funcţia logaritmică este strict descrescătoare.

Într-adevăr, să considerăm cazul $a > 1$ şi fie $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ astfel încât $x_1 < x_2$. Cum $x_1 = a^{\log_a x_1}$ şi $x_2 = a^{\log_a x_2}$, rezultă că $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$.

Dar funcţia exponenţială fiind crescătoare (a se vedea §1) obţinem că $\log_a x_1 < \log_a x_2$, adică $f(x_1) < f(x_2)$.

În cazul $0 < a < 1$, din inegalitatea $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$ şi din faptul că funcţia exponenţială cu baza un număr real $0 < a < 1$ este strict descrescătoare, rezultă că $\log_a x_1 > \log_a x_2$, adică $f(x_1) > f(x_2)$.

3° Funcţia logaritmică este bijectivă.

Într-adevăr, dacă $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$, atunci din $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Dar din egalitatea (3) din §2 obţinem $x_1 = a^{\log_a x_1}$ şi $x_2 = a^{\log_a x_2}$, adică $x_1 = x_2$. Deci f este o funcţie injectivă.

Fie $y \in \mathbb{R}$ un număr real oarecare. Notăm $x = a^y$. Se vede că $x \in (0, +\infty)$ şi $\log_a x = \log_a a^y = y$. Deci $f(x) = y$, ceea ce ne arată că f este şi surjectivă. Aşadar, f este bijectivă.

4° Inversa funcţiei logaritmice este funcţia exponenţială.

Funcţia logaritmică $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, fiind bijectivă, este inversabilă. Inversa ei este funcţia exponenţială $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $g(x) = a^x$.

Într-adevăr, dacă $x \in (0, +\infty)$ avem $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$ şi dacă $y \in \mathbb{R}$, atunci $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(a^y) = \log_a a^y = y$.

Graficul funcţiei logaritmice $f(x) = \log_a x$ pentru $a = 2, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$.

Considerăm tabelele de valori:

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$\log_2 x$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$\log_{\frac{1}{2}} x$	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4

x	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25	125	625
$\log_5 x$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$\log_{\frac{1}{5}} x$	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4

Reprezentăm într-un sistem de axe xOy punctele ale căror coordonate sunt valorile din tabelele de mai sus. Punctele obţinute le unim printr-o linie continuă.

În figura 3 sunt reprezentate graficele funcţiilor $f(x) = \log_2 x$ şi $g(x) = \log_5 x$, iar în figura 4 sunt reprezentate graficele funcţiilor $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ şi $k(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$.

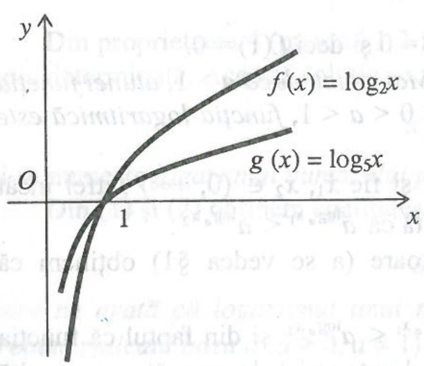


Fig. 3

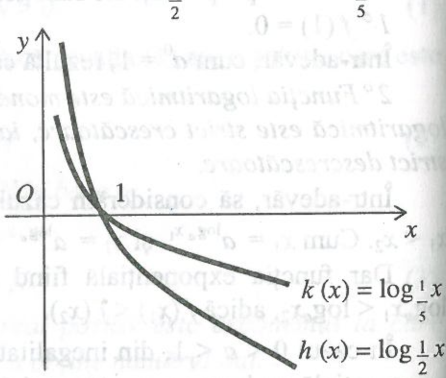


Fig. 4

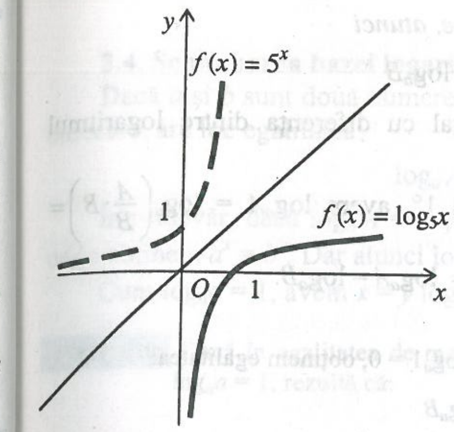


Fig. 5

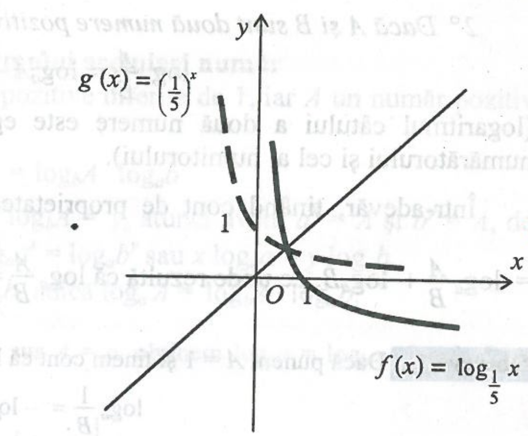


Fig. 6

Deoarece funcţia logaritmică este inversa funcţiei exponenţiale, graficele celor două funcţii sunt simetrice faţă de prima bisectoare. În figura 5 am reprezentat grafic funcţiile $f(x) = \log_5 x$ şi $g(x) = 5^x$, iar în figura 6 am reprezentat grafic funcţiile $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ şi $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Graficul funcţiei logaritmice are următoarele proprietăţi:

1) Trece prin punctul de coordonate (1, 0) de pe axa Ox.
2) Graficul funcţiei logaritmice este constituit dintr-o singură ramură care „urcă“ dacă baza $a > 1$ şi „coboară“ dacă $0 < a < 1$.
3) Graficul funcţiei logaritmice este din ce în ce mai „apropiat“ de axele Ox şi Oy cu cât a este mai mare, dacă $a > 1$, sau cu cât a este mai mic, dacă $0 < a < 1$.
4) Graficul funcţiei logaritmice este simetricul graficului funcţiei exponenţiale faţă de bisectoarea unghiului xOy.

2.3. Proprietăţile logaritmilor

Folosind proprietăţile puterilor cu exponenţi reali obţinem următoarele proprietăţi pentru logaritmi:

1° Dacă A şi B sunt două numere pozitive, atunci

$$\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$$

(logaritmul produsului a două numere este egal cu suma logaritmilor celor două numere).

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$ şi $\log_a B = y$, atunci $a^x = A$ şi $a^y = B$. Cum $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, obţinem $a^{x+y} = A \cdot B$ şi deci $\log_a(AB) = x + y = \log_a A + \log_a B$.

Observaţie. Proprietatea se poate da pentru n numere pozitive $A_1, A_2, \ldots, A_n$, adică

$$\log_a(A_1 A_2 \ldots A_n) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \ldots + \log_a A_n.$$

2° Dacă A şi B sunt două numere pozitive, atunci

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

(logaritmul câtului a două numere este egal cu diferenţa dintre logaritmul numărătorului şi cel al numitorului).

Într-adevăr, ţinând cont de proprietatea 1°, avem $\log_a A = \log_a\left(\frac{A}{B}\cdot B\right) =$
$= \log_a \frac{A}{B} + \log_a B$, de unde rezultă că $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$.

Observaţie. Dacă punem $A = 1$ şi ţinem cont că $\log_a 1 = 0$, obţinem egalitatea:

$$\log_a \frac{1}{B} = -\log_a B$$

3° Dacă A este un număr pozitiv şi m un număr real arbitrar, atunci

$$\log_a A^m = m \log_a A$$

(logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii şi logaritmul numărului).

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$, atunci $a^x = A$. Dar atunci $A^m = (a^x)^m = a^{mx}$ şi deci $\log_a A^m = mx = m \log_a A$.

4° Dacă A este un număr pozitiv şi n un număr natural ($n \geq 2$), atunci

$$\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{\log_a A}{n}$$

(logaritmul unui radical dintr-un număr este egal cu câtul dintre logaritmul numărului şi ordinul radicalului).

Într-adevăr, proprietatea 4° este un caz particular al proprietăţii 3°, punând $m = \frac{1}{n}$.

Exemple

1. Să calculăm $\log_3 75$. Cum $\log_3 75 = \log_3(3 \cdot 25) = \log_3 3 + \log_3 25 = 1 + \log_3 5^2 = 1 + 2\log_3 5$.

2. Să determinăm $\log_2 1000 - \log_2 125$.

Avem $\log_2 1000 - \log_2 125 = \log_2 \frac{1000}{125} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$.

3. Să calculăm $\lg 0{,}18 - \lg 180$.

Avem $\lg 0{,}18 - \lg 180 = \lg \frac{0{,}18}{180} = \lg \frac{1}{1000} = \lg 10^{-3} = -3$.

4. Să calculăm $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12}$.

Avem $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12} = -\log_6 18 - \log_6 12 = -(\log_6 18 + \log_6 12) = -\log_6(18 \cdot 12) = -\log_6 6^3 = -3$.

5. Să calculăm $\log_2 \sqrt[4]{8}$. Avem $\log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{1}{4}\log_2 2^3 = \frac{3}{4}\log_2 2 = \frac{3}{4}$.

6. Să calculăm $\log_2 \sqrt[5]{81}$. Avem $\log_2 \sqrt[5]{81} = \frac{1}{5}\log_2 81 = \frac{1}{5}\log_2 3^4 = \frac{4}{5}\log_2 3$.

2.4. Schimbarea bazei logaritmului aceluiaşi număr

Dacă a şi b sunt două numere pozitive diferite de 1, iar A un număr pozitiv oarecare, are loc egalitatea:

$$\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b$$

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$ şi $\log_b A = y$, atunci avem $a^x = A$ şi $b^y = A$, de unde obţinem $a^x = b^y$. Dar atunci $\log_a a^x = \log_a b^y$ sau $x \log_a a = y \log_a b$.

Cum $\log_a a = 1$, avem $x = y \log_a b$, adică $\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b$.

Observaţie. Dacă în egalitatea de mai sus $A = a$, obţinem $\log_a a = \log_b a \cdot \log_a b$. Cum $\log_a a = 1$, rezultă că:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Exemple

1. Să se scrie $\log_2 x$ în funcţie de $\log_4 x$. Avem $\log_2 x = \log_4 x \cdot \log_2 4 = 2\log_4 x$.

2. Să se arate că expresia $E = \frac{\log_2 x}{\log_5 x}$ nu depinde de x.

Într-adevăr, $E = \frac{\log_2 x}{\log_2 x \cdot \log_5 2} = \frac{1}{\log_5 2} = \log_2 5$.

3. Să se arate că $\log_2 6 + \log_6 2 > 2$. Avem $\log_2 6 + \log_6 2 = \log_2 6 + \frac{1}{\log_2 6}$.

Deci trebuie să arătăm că $\log_2 6 + \frac{1}{\log_2 6} > 2$ sau $(\log_2 6)^2 - 2\log_2 6 + 1 > 0$, sau încă $(\log_2 6 - 1)^2 > 0$, inegalitate evidentă deoarece $\log_2 6 \neq 1$.

2.5. Operaţia de logaritmare a unei expresii

Să considerăm expresia:

$$E = \frac{17^3 \sqrt[4]{131} \cdot \sqrt[3]{92}}{\sqrt[5]{37 \cdot 98 \cdot 23}}$$

Vom logaritma expresia într-o anumită bază convenabilă a. Folosind proprietăţile logaritmilor, obţinem:

$$\log_a E = \log_a \left(17^3 \sqrt[4]{131}\, \sqrt[3]{92}\right) - \log_a \sqrt[5]{37 \cdot 98 \cdot 23} = \log_a 17^3 + \log_a \sqrt[4]{131} +$$

$$+ \log_a \sqrt[3]{92} - \frac{\log_a(37 \cdot 98 \cdot 23)}{5} = 3\log_a 17 + \frac{1}{4}\log_a 131 + \frac{1}{3}\log_a 92 -$$

$$-\frac{1}{5}\log_a 37 - \frac{1}{5}\log_a 98 - \frac{1}{5}\log_a 23.$$

Deci am obţinut egalitatea:

$$\log_a E = 3\log_a 17 + \frac{1}{4}\log_a 131 + \frac{1}{3}\log_a 92 - \frac{1}{5}\log_a 37 - \frac{1}{5}\log_a 98 - \frac{1}{5}\log_a 23.$$

În general, dacă E este o expresie algebrică în care apar produse de puteri şi radicali, putem să-i asociem, exact ca în exemplul de mai sus, o expresie, notată $\log E$, în care apar sume (diferenţe) de logaritmi înmulţite eventual cu anumite numere raţionale. Operaţia prin care expresiei E i se asociază expresia $\log E$ se numeşte „operaţie de logaritmare".

Exemple

1. Fie $E = a^2\sqrt[7]{ab^6}$. Prin operaţia de logaritmare, obţinem:

$$\log_c E = \log_c(a^2\sqrt[7]{ab^6}) = \log_c a^2 + \log_c\sqrt[7]{ab^6} = 2\log_c a + \frac{1}{7}\log_c a + \frac{6}{7}\log_c b.$$

2. Fie $E = \sqrt[4]{\dfrac{a^3}{b^5}}$. Prin operaţia de logaritmare, obţinem:

$$\log_c E = \log_c\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}} = \frac{1}{4}\log_c\frac{a^3}{b^5} = \frac{1}{4}(\log_c a^3 - \log_c b^5) = \frac{3}{4}\log_c a - \frac{5}{4}\log_c b.$$

Adesea în calcule este nevoie să se facă şi operaţia inversă, adică unei expresii în care intervin logaritmi să-i asociem o expresie fără logaritmi.

De exemplu, să considerăm expresia $\log_c E = 2\log_c a - \frac{1}{2}\log_c b - 3\log_c 3$.

Folosind proprietăţile logaritmilor, avem:

$$\log_c E = \log_c a^2 - \log_c\sqrt{b} - \log_c 3^3 = \log_c\frac{a^2}{\sqrt{b}\,3^3} = \log_c\frac{a^2}{27\sqrt{b}},$$

de unde obţinem că $E = \dfrac{a^2}{27\sqrt{b}}$.

Exerciţii

1. Să se determine valorile lui x pentru ca următorii logaritmi să aibă sens:

a) $\log_2(1-x)$; d) $\log_4(x^2+x-2)$; g) $\log_4(\log_2 x)$;

b) $\log_2(1-x^2)$; e) $\log_3(-x^2+5x-6)$; h) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)$;

c) $\log_{\frac{1}{2}}(1+x^2)$; f) $\log_5(x^2-x+1)$; i) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{2}} x)$.

2. Care dintre următoarele numere este mai mare?

a) $\log_2 4$ sau $\log_2 5$; c) $\log_5\frac{1}{2}$ sau $\log_5\frac{1}{7}$;

b) 2 sau $\log_3 10$; d) 3 sau $\log_2 7$.

3. Determinaţi valorile lui x pentru care au loc inegalităţile:

a) $\log_3 x > \log_3 4$; c) $\log_2 x^2 \geq \log_2 8$;

b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x) \geq \log_{\frac{1}{2}} 5$; d) $\log_6(x^2-1) \leq \log_6(4x+4)$.

4. Pornind de la graficul funcţiei logaritmice să se construiască graficele următoarelor funcţii:

a) $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(1+x)$;

b) $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x^3$;

c) $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5(x-1)$;

d) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5 x^2$;

e) $f: (2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$;

f) $f: \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_6|x-3|$.

5. Să se calculeze:

a) $\log_2 5 + \log_2\frac{4}{5}$; b) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$;

c) $\log_5 1000 - \log_5 40$; d) $\log_6 7 - \log_6\frac{7}{36}$;

e) $\log_{0,1} 50 - \log_{0,1} 0{,}5$; f) $\log_4 6 + \log_4 8 - \log_4 3$;

g) $\log_{\frac{1}{2}} 3 - \log_{\frac{1}{2}} 12 + \log_{\frac{1}{2}} 2$; h) $\log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 4 - \log_{0,1} 2$.

6. Ştiind că $\lg 7 = p$ şi $\lg 5 = q$, să se exprime în funcţie de p şi q:

a) $\lg 0{,}7$; b) $\lg\sqrt[3]{7}$; c) $\lg 35$; d) $\lg 175$; e) $\lg 7\sqrt{5}$.

7. Să se arate că expresiile următoare nu depind de x:

a) $E = \dfrac{\log_7 x^2}{\log_8 x^2}$; b) $E = \dfrac{\log_2 x + \log_2\sqrt{x}}{\log_3 x + \log_3\sqrt{x}}$; c) $E = \dfrac{\log_x\sqrt{7}}{\log_x 7}$.

8. Să se logaritmeze expresiile:

a) $E = 41^2\sqrt[13]{41\cdot 37^5}$; b) $E = \dfrac{31^3\sqrt[7]{41\cdot 33^4}}{17^2\sqrt[3]{23^2\cdot 29}}$; c) $E = a^2\sqrt[5]{ab^3c}$.

d) $E = 23a^2\sqrt[3]{b^2a^5}$; e) $E = \sqrt[6]{\left(\dfrac{a}{5b}\right)^7}$; f) $E = \left(\sqrt{\dfrac{a^3}{2b}}\right)^3$; g) $E = \dfrac{21}{4}\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}$.

9. Să se determine expresia lui x astfel încât să avem:

a) $\log_a x = \log_a 3 + \log_a 4 - \log_a 5$; b) $\log_a x = 2\log_a 7 + 3\log_a 6 - 4\log_a 5$;

c) $\log_2 x = 2\log_2 a + 3\log_2(a+b) - 4\log_2(a-b)$.

3. Ecuaţii şi inecuaţii exponenţiale şi logaritmice

3.1. Ecuaţii exponenţiale

Ecuaţia exponenţială este o ecuaţie în care necunoscuta este exponent sau o ecuaţie în care este exponent o expresie care conţine necunoscuta.

Astfel, ecuaţiile: $3^x = 2^{x-1}$; $5^{x^2-6} - 1 = 0$ şi $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ sunt ecuaţii exponenţiale.

În practică, atunci când avem de rezolvat o ecuaţie exponenţială, vom proceda astfel: folosind diverse substituţii precum şi proprietăţile funcţiei exponenţiale, vom căuta s-o reducem la rezolvarea unor ecuaţii simple, de regulă de gradul întâi sau gradul al doilea.

Cele mai multe ecuaţii exponenţiale sunt reductibile la forma $a^{f(x)} = b$, cu $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$.

Datorită injectivității funcției logaritmice, această ecuație este echivalentă cu:

$$f(x)=\log_a b=\frac{\lg b}{\lg a}.$$

În aplicațiile practice, în aceste ecuații b se poate exprima, de obicei, ca putere a lui a, $b=a^{\alpha}$, de unde rezultă ecuația

$$f(x)=\alpha.$$

Exemplu

Să se rezolve ecuațiile $2^{2x}=64$; $3^{2^x}=81$; $5^{x^2-x-2}=625$.

Vom avea $2^{2x}=2^6$, de unde rezultă $2x=6$, adică $x=3$.

Din ecuația $3^{2^x}=81$, $3^{2^x}=3^4$, deducem $2^x=4$, $2^x=2^2$ și deci $x=2$.

Pentru ultima ecuație, obținem $5^{x^2-x-2}=5^4$, deci $x^2-x-2=4$, de unde rezultă $x^2-x-6=0$. Avem, în final, $x_1=3$ și $x_2=-2$.

Unele ecuații exponențiale se aduc la forma mai generală $a^{f(x)}=a^{g(x)}$. Din această ecuație ținând cont de injectivitatea funcției exponențiale, deducem că $f(x)=g(x)$, care apoi se rezolvă.

Exemple

1. Să se rezolve ecuația $3^{x-6}=3^{15-2x}$

Obținem $x-6=15-2x$, deci $3x=21$, $x=7$.

2. Să se rezolve ecuația $49^x=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}$.

Obținem $7^{2x}=7^{-x^2}$, deci $2x=-x^2$, de unde deducem $x_1=0$, $x_2=-2$.

Există ecuații exponențiale care nu se pot reduce la nici una dintre formele discutate.

Exemple

1. $2^x=3^{2x+1}$. Ținând cont de injectivitatea funcției logaritmice, obținem prin logaritmare ecuația echivalentă $x\lg 2=(2x+1)\lg 3$ și deci $x(2\lg 3-\lg 2)=-\lg 3$, $x=\frac{-\lg 3}{2\lg 3-\lg 2}$.

2. $5^{7^x}=7^{5^x}$. Logaritmând, deducem $7^x\lg 5=5^x\lg 7$; logaritmând din nou, obținem $x\lg 7+\lg\lg 5=x\lg 5+\lg\lg 7$ și deci $x=\frac{\lg\lg 7-\lg\lg 5}{\lg 7-\lg 5}$.

3. $3^{2x}\cdot 5^{2x-3}=7^{x-1}\cdot 4^{x+3}$.

Deducem că $2x\lg 3+(2x-3)\lg 5=(x-1)\lg 7+(x+3)\lg 4$, prin urmare $x(2\lg 3+2\lg 5-\lg 7-\lg 4)=3\lg 5-\lg 7+3\lg 4$. În final, avem:

$$x=\frac{3\lg 5-\lg 7+3\lg 4}{2\lg 3+2\lg 5-\lg 7-\lg 4}=\frac{\lg\frac{125\cdot 64}{7}}{\lg\frac{225}{28}}.$$

4. Să considerăm în cele ce urmează ecuația $4^x+2^x=272$.

Pentru a rezolva ecuații de acest tip vom observa mai întâi că putem scrie $2^{2x}+2^x-272=0$ și deci făcând substituția $2^x=y$, obținem: $y^2+y-272=0$, deci $y_1=16$, $y_2=-17$.

Deoarece $2^x>0$, rezultă că -17 nu poate fi egal cu 2^x și deci singura soluție se obține din $2^x=16$, $2^x=2^4$, deci $x=4$.

În unele situații, substituția efectuată la exercițiul precedent nu se poate face imediat în forma inițială a exercițiului. Să luăm, de exemplu, ecuația $6^x+4^x=9^x$.

Vom împărți ambii termeni cu 9^x și obținem $\left(\frac{6}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x=1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=1$.

Făcând substituția $\left(\frac{2}{3}\right)^x=y$, obținem $y^2+y-1=0$ și deci $y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Deoarece $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$, rezultă că singura soluție a ecuației o obținem din

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ \text{și deci}\ x=\frac{\lg\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\lg\frac{2}{3}}.$$

3.2. Ecuații logaritmice

Ecuațiile logaritmice sunt ecuații în care expresiile ce conțin necunoscute apar ca bază sau ca argument al unor logaritmi.

De exemplu: $\log_{x+1}(x+2)=1$; $\lg(x^2+x-2)=3$; $\log_x(5x^2+3)=\lg(2x+3)-1$.

Folosind injectivitatea funcției exponențiale, avem că rezolvarea unei ecuații de tipul $\log_{g(x)}f(x)=b$ este echivalentă cu rezolvarea ecuației $f(x)=g(x)^b$. Vom avea însă grijă ca soluțiile obținute să satisfacă $f(x)>0$, $g(x)>0$, $g(x)\neq 1$, pentru care expresia $\log_{g(x)}f(x)$ are sens.

La fel ca la ecuațiile exponențiale, în practică atunci când avem de rezolvat o ecuație logaritmică, vom proceda astfel: folosind diverse substituții precum și proprietățile logaritmilor, vom căuta s-o reducem la rezolvarea unor ecuații simple, de regulă de gradul întâi sau de gradul al doilea.

Exemplu

Să se rezolve ecuația: $\log_x(x^2-3x+9)=2$. Obținem $x^2-3x+9=x^2$ și deci $3x=9$, $x=3$. Deoarece pentru $x=3>0$, expresia x^2-3x+9 este pozitivă, rezultă că $x=3$ este soluție a ecuației.

Rezolvarea altor ecuații se bazează pe injectivitatea funcției logaritmice, și anume din $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, deducem $f(x)=g(x)$, impunând condițiile: $f(x)>0$, $g(x)>0$.

Exemple

1. Să se rezolve ecuaţia: $\lg(x^2 - 15) = \lg(x - 3)$. Deducem că $x^2 - 15 = x - 3$, deci $x^2 - x - 12 = 0$, adică $x_1 = 4$, $x_2 = -3$. Deoarece pentru $x_2 = -3$ obţinem $x - 3 = -3 - 3 = -6 < 0$, rezultă că $x_2 = -3$ nu este soluţie a ecuaţiei. Deci numai 4 este soluţie.

2. Să se rezolve ecuaţia: $2\lg(x - 1) = \frac{1}{2}\lg x^5 - \lg\sqrt{x}$. În această ecuaţie punem de la început condiţiile $x - 1 > 0$, $x > 0$, pentru a avea sens expresiile $\lg(x - 1)$, $\lg x^5$, $\sqrt{x}$, $\lg\sqrt{x}$.

Ecuaţia se mai scrie $2\lg(x - 1) = \frac{5}{2}\lg x - \frac{1}{2}\lg x$ şi deci $2\lg(x - 1) = 2\lg x$. Prin urmare, $\lg(x - 1) = \lg x$, de unde obţinem $x - 1 = x$, $-1 = 0$, contradicţie; rezultă deci că ecuaţia dată nu are soluţii.

3. Să se rezolve ecuaţia: $\lg(x + 7) + \lg(3x + 1) = 2$. Punem condiţiile de existenţă a logaritmilor: $x + 7 > 0$ şi $3x + 1 > 0$, deci $x > -\frac{1}{3}$. Obţinem $\lg(x + 7)(3x + 1) = 2$ şi deci $(x + 7)(3x + 1) = 10^2 = 100$. Rezultă ecuaţia de gradul al doilea $3x^2 + 22x - 93 = 0$, de unde rezultă $x_1 = 3$ şi $x_2 = -\frac{31}{3}$. Deoarece $-\frac{31}{3} < -\frac{1}{3}$, obţinem că 3 este singura soluţie a ecuaţiei date.

Observaţie. Ecuaţia precedentă nu este echivalentă cu ecuaţia $\lg(x + 7)(3x + 1) = 2$, care are două soluţii $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{31}{3}$, deoarece pentru amândouă aceste valori ale lui x, $\lg(x + 7)(3x + 1)$ are sens.

4. Să se rezolve ecuaţia: $\log_3^2 x - 3\log_3 x - 4 = 0$. Avem condiţia $x > 0$ şi făcând substituţia $\log_3 x = y$, obţinem $y^2 - 3y - 4 = 0$. Deci $y_1 = 4$, $y_2 = -1$. Din $\log_3 x = 4$, obţinem $x = 3^4$, $x = 81$, iar din $\log_3 x = -1$, obţinem $x = 3^{-1}$, $x = \frac{1}{3}$.

În continuare vom rezolva câteva ecuaţii care nu se pot încadra într-un anumit tip. Astfel, pot apărea ecuaţii cu logaritmi scrişi în diferite baze, ecuaţii în care apar expresii conţinând necunoscute şi la exponenţi şi la logaritmi etc.

5. Să se rezolve ecuaţia: $\log_2 x + \log_3 x = 1$. Deducem, aplicând formula de schimbare a bazei, $\frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 1$ sau $\lg x = \frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}$. Deci $x = 10^{\frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}}$.

6. Să se rezolve ecuaţia: $\log_3 x + \log_x 3 = 2$. Deoarece $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$, rezultă $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = 2$. Notând $\log_3 x = y$, obţinem $y + \frac{1}{y} = 2$, adică $y^2 - 2y + 1 = 0$; deci $y = 1$, adică $\log_3 x = 1$. Prin urmare, $x = 3$.

7. Să se rezolve ecuaţia: $x^{\lg x + 2} = 1000$. Punem condiţia de existenţă a expresiilor: $x > 0$. Logaritmând, obţinem o ecuaţie echivalentă $\lg\left(x^{\lg x + 2}\right) = \lg 1000$ care devine $(\lg x + 2)\lg x = 3$. Notând $\lg x = y$, avem $y^2 + 2y - 3 = 0$ şi deci $y_1 = -3$, $y_2 = 1$. Din $\lg x = -3$, obţinem $x = 10^{-3}$, $x = 0{,}001$, iar din $\lg x = 1$, obţinem $x = 10$.

3.3. Sisteme de ecuaţii exponenţiale şi logaritmice

În astfel de sisteme se aplică metodele arătate anterior la ecuaţiile de tipul respectiv.

Exemple

1. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 27^{2y-1} = 243 \cdot 3^{4x+2} \\ 3 \cdot 3^{x+y} = \sqrt{81^{2x-1}} \end{cases}$. Deoarece $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, $243 = 3^5$, obţinem $\begin{cases} 3^{6y-3} = 3^{4x+7} \\ 3^{x+y} = 3^{4x-3} \end{cases}$. Rezultă sistemul echivalent $\begin{cases} 6y - 3 = 4x + 7 \\ x + y = 4x - 3 \end{cases}$, deci $x = 2$, $y = 3$ şi soluţia sistemului este perechea $(2, 3)$.

2. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \lg x + \lg y = 2 \end{cases}$. Obţinem, pe rând sistemele

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \lg xy = 2 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ xy = 100 \\ x, y > 0 \end{cases}.$$

Acest sistem simetric îl putem rezolva pe căile cunoscute din clasa a IX-a: punem $s = x + y$, $p = xy$ şi vom avea $\begin{cases} s^2 - 2p = 425 \\ p = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^2 = 625 \\ p = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \pm 25 \\ p = 100 \end{cases}$. Sistemul $\begin{cases} s = 25 \\ p = 100 \end{cases}$ dă soluţiile $(5, 20)$ şi $(20, 5)$ care satisfac şi condiţiile de existenţă ale sistemului iniţial, $x > 0$, $y > 0$. Sistemul $\begin{cases} s = -25 \\ p = 100 \end{cases}$ dă soluţiile $(-20, -5)$, $(-5, -20)$, care nu convin.

3.4. Inecuaţii exponenţiale şi logaritmice

Rezolvarea inecuaţiilor exponenţiale şi logaritmice se bazează pe proprietăţile de monotonie ale funcţiilor exponenţiale şi logaritmice. Am văzut că atât funcţia exponenţială cât şi funcţia logaritmică sunt crescătoare dacă baza este supraunitară şi descrescătoare dacă baza este subunitară.

Exemple

1. Să se rezolve inecuaţia: $3^x > 9$. Inecuaţia se scrie $3^x > 3^2$ şi deoarece funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$ este crescătoare, rezultă că $x > 2$.

2. Să se rezolve inecuaţia: $2^{x^2-4x} > \frac{1}{8}$. Deoarece $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, inecuaţia se scrie $2^{x^2-4x} > 2^{-3}$, care este echivalentă cu $x^2 - 4x > -3$. Rezolvarea inecuaţiei $x^2 - 4x + 3 > 0$ dă pentru x valorile posibile $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

3. Să se rezolve inecuaţia: $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > -3$. Avem că $-3 = \log_{\frac{1}{3}} 27$ şi inecuaţia devine $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{3}} 27$. Deoarece baza $\frac{1}{3}$ a logaritmului este subunitară (funcţia $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ este descrescătoare), inecuaţia devine $2x - 1 < 27$, adică $x < 14$. În acelaşi timp, din condiţia de existenţă a logaritmului iniţial, avem $2x - 1 > 0$, adică $x > \frac{1}{2}$. Deci obţinem pentru x valorile posibile $x \in \left(\frac{1}{2}, 14\right)$.

Exerciţii

Să se rezolve ecuaţiile (exerciţiile 1–10):

1. a) $5^x = 125$; b) $4^x = 1024$; c) $9^x = \frac{1}{729}$; d) $25^x = 0,2$; e) $2^{x+3} = 32$; f) $8^x = 16$.

2. a) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; c) $3^{2x-1} = 81$; d) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$.

3. a) $5^x + 5^{x+1} = 3750$; b) $7^x - 7^{x-1} = 6$; c) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$; d) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$; e) $3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x-1} - 7 \cdot 3^x + 21 = 0$.

4. a) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; b) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$; c) $16\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$;

5. a) $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$; e) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} = 1,2$;

b) $9^x - 3^x - 6 = 0$; f) $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$;

c) $4^x + 2^{x+1} = 80$; g) $2 \cdot 25^x = 10^x + 4^x$;

d) $3^x + 9^{x-1} - 810 = 0$; h) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

6. a) $3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$; b) $7 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^x$;

c) $11^x = 17^x$; d) $6^{2x+4} = 2^{8+x} \cdot 3^{3x}$.

7. a) $\lg x = \lg 2$; b) $\lg x = -\lg 2$; c) $\log_2(x-1) = \log_2(x^2 - x - 16)$; d) $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1$.

8. a) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$; b) $\log_x 2 - \log_x 3 = 2$; c) $\log_x(x+3) = \log_x(x^2 + 1)$.

9. a) $\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x$; b) $3\lg^2(x^2) - \lg x - 1 = 0$; c) $2\lg^2(x^3) - 3\lg x - 1 = 0$.

10. $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$.

11. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 641, \\ 2\lg x + 2\lg y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 90, \\ \lg x + \lg y = 3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^y - y^x = 0, \\ 2^x - 4^y = 0. \end{cases}$

12. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\lg(x^2 - 3) > \lg(x + 3)$; b) $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \le 0$; c) $(0,25)^{x-4} \le \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

13. Rezolvaţi inecuaţiile:

a) $\log_2(9 - 2^x) > 3 - x$; b) $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) \le 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$.

14. Să se rezolve şi să se discute după valorile parametrului a, inecuaţiile:

a) $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \ge \frac{3}{4}$; b) $\log_a x + \log_a(x+5) + \log_a 0,02 < 0$.

4 ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

În practică, adesea, se ajunge la problema de a alege dintr-o mulţime oarecare submulţimi de elemente care posedă anumite proprietăţi, de a dispune elementele uneia sau ale mai multor mulţimi într-o anumită ordine ş.a.m.d. De asemenea, poate apărea problema determinării numărului tuturor submulţimilor unei mulţimi, constituite după anumite reguli.

Pentru că în astfel de probleme este vorba de anumite combinaţii de elemente, ele se numesc probleme combinatorii. Domeniul matematicii în care se studiază astfel de probleme se numeşte combinatorică. Combinatorica poate fi considerată ca o parte a teoriei mulţimilor, orice problemă de combinatorică putând fi redusă la o problemă despre mulţimi finite şi aplicaţii.

Această ramură a matematicii are mare importanţă pentru teoria probabilităţilor, cibernetică, logica matematică, teoria numerelor, precum şi pentru alte ramuri ale ştiinţei şi tehnicii. În continuare, vom prezenta unele probleme simple de combinatorică.

În cuprinsul acestui capitol avem de-a face numai cu mulţimi finite.

1. Mulţimi finite ordonate

Se consideră adesea mulţimi ale căror elemente sunt aranjate într-o ordine determinată. De exemplu, alfabetul este o mulţime ale cărei elemente (litere) sunt date într-o anumită ordine. Astfel, cele 31 litere ale alfabetului românesc sunt aranjate, de obicei, în următoarea ordine: *a* este prima (nu urmează după altă literă), *ă* este a doua (urmează după prima), *â* este a treia (urmează după a doua) ş.a.m.d. până la *z* care este ultima (după care nu mai urmează nici o literă). Elementele aceleiaşi mulţmi se pot da şi într-o altă ordine. De exemplu, este posibil ca literele alfabetului să fie aranjate într-o ordine inversă celei dintâi, astfel: prima literă să fie socotită *z*, a doua să fie *y* ş.a.m.d. până la ultima, a 31-a literă, *a*. Sunt, evident, şi alte moduri de aranjare a literelor alfabetului.

Spunem că *o mulţime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o mulţime ordonată.* Mai precis:

Fie A o mulţime (finită) care are n elemente. Mulţimea A se numeşte ordonată dacă fiecărui element al său i se asociază un anumit număr de la 1 la n, numit *rangul* elementului, astfel încât la elemente diferite ale lui A corespund numere diferite.

Această asociere exprimă, mai exact, tocmai ordinea elementelor mulţimii A. Astfel, ordinea este următoarea: elementul căruia i se asociază numărul 1, elementul căruia i se asociază numărul 2, ..., elementul căruia i se asociază numărul n.

Observăm că orice mulţime finită poate deveni o mulţime ordonată, adică se poate ordona. Această ordine se poate da, pur şi simplu, numerotând elementele mulţimii. Mulţimea ordonată obţinută o notăm cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, unde ordinea elementelor este dată de indici.

O mulţime ordonată este caracterizată prin elementele din care este formată şi prin ordinea în care sunt considerate acestea.

În consecinţă, două mulţimi ordonate sunt diferite dacă ele se deosebesc fie prin elementele din care sunt formate, fie prin ordinea lor.

În exemplul de mai sus am considerat, aşadar, două mulţimi ordonate diferite.

Un alt exemplu de mulţimi ordonate diferite este următorul: (1, 2, 3) şi (2, 1, 3). Mulţimile au aceleaşi elemente, dar ordinea în care acestea sunt dispuse este diferită în cele două mulţimi. Astfel, în prima mulţime 1 este pe primul loc, 2 pe locul al doilea, iar 3 pe locul al treilea, în timp ce, în a doua mulţime 2 este pe primul loc, 1 pe al doilea, iar 3 pe al treilea.

2. Permutări

Fie A o mulţime (finită) cu n elemente. Această mulţime se poate ordona în mai multe moduri. Se obţin, astfel, mulţimi ordonate diferite, care se deosebesc între ele numai prin ordinea elementelor.

Dacă A este o mulţime cu n elemente, fiecare din mulţimile ordonate care se formează cu cele n elemente ale mulţimii A se numeşte permutare a acestei mulţimi.

Se mai spune că este *o permutare a elementelor sale* sau, încă, *o permutare de n elemente.*

Numărul permutărilor de n elemente se notează cu P_n şi se citeşte „permutări de n". Avem:

1. O mulţime cu un singur element poate fi ordonată într-un singur mod, deci $P_1 = 1$.
2. O mulţime cu două elemente $A = \{a, b\}$ poate fi ordonată în două moduri. Se obţin două permutări:
$$(a, b) \text{ şi } (b, a).$$
Deci $P_2 = 2 = 1 \cdot 2$.
3. Fie o mulţime cu trei elemente $A = \{a, b, c\}$. Permutările acestei mulţimi sunt: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Rezultă $P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Ne propunem, în continuare, să găsim numărul permutărilor unei mulţimi date, adică numărul modurilor în care poate să fie ordonată o mulţime dată.

Pentru produsul primelor n numere naturale nenule se foloseşte, de obicei, notaţia $n!$ care se citeşte „n factorial":
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

În ceea ce priveşte numărul permutărilor, avem:

Teorema 1. Dacă $n \geq 1$ este număr natural, atunci $P_n = n!$ (1)

Demonstrație. Să ordonăm în toate modurile posibile o mulțime cu n elemente. Oricare dintre cele n elemente ale mulțimii poate fi pus pe primul loc; prin urmare, „ocupantul" primului loc poate fi ales în n moduri. Dacă pe primul loc este pus elementul a, pe locul al doilea putem pune oricare dintre elementele mulțimii, diferite de a. Prin urmare, „ocupantele" locului al doilea pot fi alese în $n-1$ moduri. Rezultă că „ocupantele" primelor două locuri pot fi alese în $n(n-1)$ moduri. Raționând analog, rezultă că „ocupantele" primelor trei locuri pot fi alese în $n(n-1)(n-2)$ moduri și, în general, „ocupantele" primelor k locuri pot fi alese în $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ moduri. Pentru $k = n$, numărul de moduri de ocupare pentru toate cele n locuri. În final, deducem că pentru $k = n$, numărul de moduri de ocupare pentru toate cele n locuri este $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = n!$.

Convenim să considerăm că mulțimea vidă poate fi ordonată într-un singur mod, adică $P_0 = 1$. Deci definim $0! = 1$.

Exemple

1. Să dăm în tabelul următor valorile lui $n!$, pentru $1 \le n \le 10$.

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5 040
3	6	8	40 320
4	24	9	362 880
5	120	10	3 628 800

2. Câte numere diferite se pot forma din cifrele:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

astfel încât orice număr să conțină toate cifrele și doar o singură dată fiecare cifră?

R: Din numărul mulțimilor ordonate care au ca elemente cele 10 cifre, trebuie să scădem pe cele care au pe primul loc cifra 0. Deci obținem:

$$10! - 9! = 9 \cdot 9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9^2 = 3\,265\,920$$

numere.

3. În câte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ astfel încât fiecare număr par să aibă rang par?

R: Fiind n locuri de rang par, rezultă că numerele pare de la 1 la $2n$, care sunt tot în număr de n, se pot așeza pe locuri de rang par în $n!$ moduri. Fiecărui astfel de mod de aranjare a numerelor pare îi corespund $n!$ moduri de aranjare a numerelor impare pe locuri de rang impar. De aceea numărul total al permutărilor de tipul cerut este egal cu $n! \cdot n! = (n!)^2$.

3. Aranjamente

3.1. Fie dată o mulțime A cu n elemente. Dacă $m \le n$, atunci se pot forma diferite mulțimi ordonate cu câte m elemente fiecare, în care intră numai elemente ale mulțimii A. De exemplu, din elementele mulțimii $\{a, b, c, d\}$ se pot constitui 12 mulțimi ordonate, având câte două elemente fiecare:

$$(a, b), (a, c), (a, d),$$
$$(b, a), (b, c), (b, d),$$
$$(c, a), (c, b), (c, d),$$
$$(d, a), (d, b), (d, c).$$

Mulțimile ordonate care se formează cu elementele unei submulțimi oarecare a unei mulțimi finite A se numesc *submulțimi ordonate* ale lui A sau *aranjamente*. Mai precis:

Dacă A este o mulțime cu n elemente, atunci fiecare submulțime ordonată a lui A, având k elemente, unde $0 \le k \le n$, se numește aranjament de n elemente luate câte k.

Observăm că două aranjamente de n elemente luate câte k se deosebesc prin *natura* elementelor ori prin *ordinea* lor. Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k se notează A_n^k și se citește „aranjamente de n luate câte k".

Din exemplul de mai înainte rezultă:

$$A_4^2 = 12.$$

Ne propunem, în continuare, să găsim o formulă pentru calculul numărului A_n^k.

Observăm că $A_n^1 = n$.

Într-adevăr, un element din cele n elemente poate fi ales în n moduri, iar cu acest element ales se formează o singură mulțime ordonată.

Formula care exprimă A_n^k în funcție de n și k, este dată de următoarea teoremă:

Teorema 2. Dacă n și k sunt numere naturale astfel încât $0 < k < n$, atunci:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1). \qquad (1)$$

Demonstrație. Să arătăm mai întâi că $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$. Într-adevăr, ca să repartizăm oricare $k+1$ elemente, luate din n elemente date, pe $k+1$ locuri, se pot lua mai întâi oricare k elemente și aranja pe primele k locuri. Aceasta se poate face în A_n^k moduri. În fiecare din aceste cazuri rămân $(n-k)$ elemente. Oricare din aceste elemente se poate pune pe al $(k+1)$-lea loc. Astfel, în fiecare din cele A_n^k moduri de aranjare a elementelor pe primele k locuri, obținem $(n-k)$ posibilități prin care al $(k+1)$-lea loc este ocupat de unul din cele $(n-k)$ elemente rămase. Prin urmare, avem $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$.

Având în vedere că $A_n^1 = n$, deducem succesiv:

$$A_n^2 = n(n-1),\ A_n^3 = n(n-1)(n-2),$$
$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Să dăm o altă formă formulei (1). Produsul $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ se poate scrie sub forma:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 2\cdot 1}{(n-k)\ldots 2\cdot 1},$$

adică sub forma $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Deci

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (2)$$

Pentru $k = 0$, formula (2) dă

$$A_n^0 = 1.$$

Acest lucru este adevărat deoarece orice mulţime conţine mulţimea vidă, despre care am convenit s-o considerăm ordonată într-un singur mod.

Pentru $k = n$, formula (2) dă

$$A_n^n = n! = P_n.$$

Aşadar, formulele (1) şi (2) sunt adevărate pentru orice k, astfel încât $0 \le k \le n$.

Exemple

1. În câte moduri pot fi aşezaţi 4 elevi pe 25 de locuri?

R: Numărul căutat este egal cu:

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600.$$

2. Câte numere naturale diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, dacă în fiecare astfel de număr orice cifră intră cel mult o dată.

R: Cu 5 cifre se pot forma $A_5^5 = 5!$ aranjamente diferite. Dar aranjamentele care încep cu 0, în număr de A_4^4, dau numere de 4 cifre. Aşadar sunt

$$A_5^5 - A_4^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$$

numere cu 5 cifre. Numărul numerelor cu 4 cifre care se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, este egal cu A_5^4, din care scădem numărul aranjamentelor care încep cu 0, care este egal cu A_4^3. Deci numere cu 4 cifre sunt în număr de

$$A_5^4 - A_4^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96.$$

În mod analog, numărul numerelor diferite de 3 cifre, 2 cifre şi o cifră va fi, respectiv: $A_5^3 - A_4^2 = 48$, $A_5^2 - A_4^1 = 16$ şi $A_4^1 = 4$.

Deci se pot forma 260 numere.

4. Combinări

4.1. Fie mulţimea $A = \{a, b, c\}$ şi să considerăm toare submulţimile sale. Acestea sunt:

1) mulţimea vidă: $\varnothing$;
2) submulţimi având fiecare câte un element: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$;
3) submulţimi având fiecare câte două elemente: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$;
4) mulţimea totală: $\{a, b, c\}$.

Aşadar, mulţimea $A = \{a, b, c\}$ are opt submulţimi, dintre care: trei submulţimi cu câte un element, trei submulţimi cu câte două elemente, o submulţime cu trei elemente şi mulţimea vidă.

În continuare vom rezolva următoarea problemă:

Fiind dată o mulţime finită cu n elemente, să se calculeze numărul submulţimilor sale având fiecare câte k elemente.

Dacă A este o mulţime cu n elemente, atunci fiecare submulţime a lui A având k elemente, unde $0 \le k \le n$, se numeşte combinare de n elemente luate câte k.

Numărul combinărilor de n elemente luate câte k se notează C_n^k şi se citeşte „combinări de n luate câte k”*.

Din exemplul de mai înainte, rezultă: $C_3^0 = 1, C_3^1 = 3, C_3^2 = 3, C_3^3 = 1$, iar $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8 = 2^3$ (acesta este numărul tuturor submulţimilor mulţimii $\{a, b, c\}$).

Ne propunem în continuare să găsim o formulă pentru calculul numărului C_n^k.

Observăm că $C_n^0 = 1$, deoarece fiecare mulţime A are numai o submulţime fără nici un element, şi anume mulţimea vidă. Apoi, $C_n^1 = n$ deoarece o mulţime cu n elemente $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ are exact n submulţimi cu un singur element, adică submulţimile de forma $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}$. Formula care exprimă C_n^k în funcţie de n şi k este dată de următoarea teoremă:

T e o r e m a 3. Dacă n şi k sunt numere naturale astfel încât $0 \le k \le n$, atunci:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \quad (1)$$

Demonstraţie. Fie A o mulţime de n elemente. Să considerăm toate submulţimile mulţimii A care au k elemente. Ordonăm fiecare dintre aceste submulţimi în toate modurile posibile. Obţinem astfel toate submulţimile ordonate ale lui A care au câte k elemente. Numărul lor, după cum ştim, este A_n^k. Dar cum numărul tuturor submulţimilor lui A având k elemente este egal cu C_n^k, iar fiecare din acestea se pot ordona în P_k moduri, rezultă că $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Din această egalitate rezultă că: $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

Înlocuind în această formulă expresiile $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $P_k = k!$, obţinem:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

ceea ce se mai poate scrie $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

* Numărul C_n^k se mai notează $\dbinom{k}{n}$.

De exemplu, $C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 25 \cdot 23 \cdot 22 = 12\,650.$

Exemple

1. În câte moduri se poate alcătui o comisie formată din 5 membri aleşi din 9 persoane?

R: Pentru a avea toate cazurile posibile, trebuie să considerăm toate submulţimile, formate din 5 elemente, ale unei mulţimi formate din 9 elemente. Numărul căutat este $C_9^5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 126.$

2. La un turneu de şah au participat n şahişti şi fiecare 2 şahişti s-au întâlnit o dată. Câte partide s-au jucat în turneu?

R: Numărul partidelor este egal cu numărul submulţimilor formate din câte două elemente ale unei mulţimi cu n elemente, adică $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

3. Să se găsească numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi.

R: Vârfurile poligonului formează o mulţime de n puncte în plan, necoliniare câte 3. Numărul diagonalelor şi al laturilor poligonului este egal cu numărul submulţimilor formate din câte două elemente ale unei mulţimi cu n elemente, adică $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Scăzând cele n laturi din acest număr, obţinem: $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$, care reprezintă numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi.

4. În câte puncte se intersectează diagonalele unui poligon convex cu n laturi, dacă oricare trei dintre ele nu sunt concurente?

R: Fiecărui punct de intersecţie a două diagonale îi corespund 4 vârfuri ale poligonului, iar la oricare 4 vârfuri ale poligonului le corespunde un punct de intersecţie (punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului cu vârfurile în cele 4 puncte). De aceea, numărul tuturor punctelor de intersecţie este egal cu numărul posibilităţilor de a alege 4 vârfuri din cele n vârfuri, adică:

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

4.2. Câteva proprietăţi ale numerelor C_n^k

Numerele C_n^k au o serie de proprietăţi importante. Ele exprimă diferite relaţii între submulţimile unei mulţimi. Aceste proprietăţi se pot demonstra direct din formula pentru C_n^k. Mai instructive sunt, însă, demonstraţiile bazate pe raţionamente cu mulţimi.

1° *Formula combinărilor complementare.* Dacă $0 \le k \le n$, atunci este adevărată egalitatea:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{1}$$

Demonstraţie. Cu ajutorul formulei pentru C_n^k, avem:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}.$$

Sensul acestei afirmaţii este următorul: fie A o mulţime cu n elemente. Fiecărei submulţimi X cu k elemente a lui A îi asociem o submulţime bine determinată, cu $(n-k)$ elemente, a mulţimii A, şi anume CX (complementara lui X). Prin această asociere, unei submulţimi cu $(n-k)$ elemente îi corespunde o singură submulţime cu k elemente. Aşadar, numărul submulţimilor cu k elemente ale lui A este egal cu numărul submulţimilor sale cu $(n-k)$ elemente. Această afirmaţie se exprimă, de altfel, prin egalitatea (1).

2° *Formula de recurenţă pentru calculul numărului de combinări.*
Pentru orice n şi k astfel încât $0 < k < n$, este adevărată egalitatea:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \tag{2}$$

Demonstraţie. Cu ajutorul formulei pentru C_n^k, avem:

$$C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!},$$

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,k}{k!(n-k)!}.$$

Înlocuind aceste valori în partea din dreapta a formulei (3), obţinem:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Egalitatea (3) este demonstrată.

Să dăm o altă demonstraţie formulei (3) făcând un raţionament cu mulţimi. Să considerăm un element oarecare a al unei mulţimi A formată din n elemente şi toate submulţimile mulţimii A, formate din câte k elemente. Numărul acestor submulţimi este egal cu C_n^k. Submulţimile cu k elemente ale lui A le împărţim în două clase (disjuncte): submulţimi care conţin pe a şi submulţimi care nu conţin pe a. Numărul submulţimilor din prima clasă este egal cu C_{n-1}^{k-1}, deoarece fiecare astfel de submulţime se obţine prin adăugarea elementului a la o submulţime oarecare cu $(k-1)$ elemente, a mulţimii $A - \{a\}$. Numărul submulţimilor din a doua clasă este egal cu C_{n-1}^k, deoarece fiecare astfel de submulţime este o submulţime cu k elemente, a mulţimii $A - \{a\}$. Deci: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

3° *Triunghiul lui Pascal**.
Formula (3) a punctului precedent permite să calculăm C_n^k, ştiind C_{n-1}^k şi C_{n-1}^{k-1}. Cu ajutorul ei se pot calcula succesiv numerele C_n^k, mai întâi pentru $n = 0$, apoi

* *Blaise Pascal* (1623-1662), matematician francez.

pentru $n = 1$, pentru $n = 2$ ş.a.m.d. Valorile numerelor C_n^k le scriem sub forma unui tabel triunghiular care se numeşte *triunghiul lui Pascal*:

1	$n = 0$
1 1	$n = 1$
1 2 1	$n = 2$
1 3 3 1	$n = 3$
1 4 6 4 1	$n = 4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$

În linia a $(n + 1)$-a a tabelului sunt aşezate în ordine numerele $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$. Avem $C_n^0 = C_n^n = 1$, iar numerele rămase se calculează cu ajutorul formulei de recurenţă.

Întrucât numerele C_{n-1}^k şi C_{n-1}^{k-1} sunt dispuse în acest tabel în linia precedentă celei în care se găseşte C_n^k, la stânga şi la dreapta acestuia, atunci pentru a obţine C_n^k adunăm numerele din linia precedentă care se găsesc la stânga şi la dreapta sa. De exemplu, numărul 10 din linia a şasea se obţine adunând numerele 4 şi 6 din linia precedentă.

4.3. O interpretare geometrică pentru numerele C_n^k.

Fie numerele naturale n şi k astfel încât $0 < k < n$. În continuare se va da o interpretare geometrică a numărului C_n^k.

Fie planul xOy şi punctul $M(k, n - k)$. Notăm cu M' şi M'' punctele de coordonate $(k, 0)$, respectiv $(0, n - k)$. Realizăm reţeaua din fig. 1, cu pătrate de latură 1 (adică un caroiaj al dreptunghiului $OM'MM''$ cu pătrate de latură 1). Acestea sunt în număr de $k \cdot (n - k)$. Vârfurile celor $k \cdot (n - k)$ pătrate se numesc nodurile reţelei. Numim *drum pe reţea* o linie frântă care uneşte două noduri oarecare ale reţelei şi este formată din laturi succesive ale pătratelor reţelei.

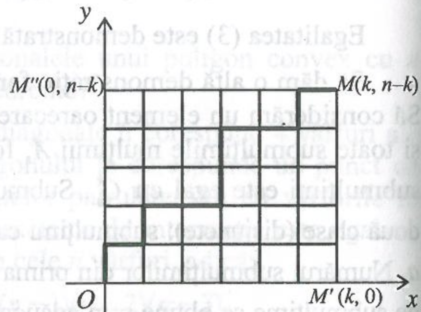


Fig. 1

Se pune problema determinării numărului drumurilor pe reţea *minimale* (cele mai scurte) care unesc punctul $O(0, 0)$ cu punctul $M(k, n - k)$.

Se observă că un drum pe reţea minimal care uneşte O cu M este format din $k + (n - k) = n$ segmente (de lungime 1), dintre care k segmente orizontale şi $(n - k)$ segmente verticale. Drumurile diferă între ele doar prin ordinea de succesiune a segmentelor orizontale şi verticale. De aceea, numărul tuturor acestor drumuri este egal cu numărul tuturor posibilităţilor prin care din n segmente se pot alege k segmente orizontale, adică C_n^k.

Remarcăm că n este suma coordonatelor punctului M.

S-ar putea considera numărul posibilităţilor de alegere a $(n - k)$ segmente verticale din cele n segmente şi atunci obţinem numărul C_n^{n-k}. Astfel, am stabilit geometric formula combinărilor complementare: $C_n^k = C_n^{n-k}$. Să demonstrăm în acelaşi fel formula de recurenţă pentru calculul numărului de combinări.

Să considerăm reţeaua din figura 2, pe care figurăm punctele $M_1(k, n - k - 1)$ şi $M_2(k - 1, n - k)$. Rezultă că numărul tuturor drumurilor minimale care unesc $O(0, 0)$ cu $M(k, n - k)$ este C_n^k. Toate aceste drumuri le împărţim în două clase (disjuncte): drumuri care trec prin punctul M_1 şi drumuri care trec prin punctul M_2.

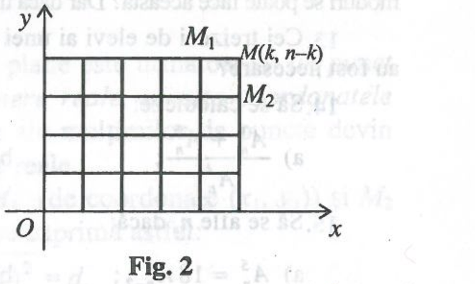


Fig. 2

Cum suma coordonatelor fiecăruia dintre punctele M_1 şi M_2 este $n - 1$, rezultă că numărul drumurilor care trec prin M_1 este C_{n-1}^k, iar numărul drumurilor care trec prin M_2 este C_{n-1}^{k-1}, de unde rezultă: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Exerciţii

Permutări

1. Din elementele mulţimii A să se formeze toate permutările posibile, dacă:
   a) $A = \{2\}$; b) $A = \{4, 5\}$; c) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$; d) $A = \{a, b, c, d\}$.
2. Să se simplifice expresiile:
   a) $6! + 7!$; b) $9! - 8!$; c) $\dfrac{213!}{210!}$; d) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$; e) $\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!}$; f) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+2)!}$.
3. Să se rezolve ecuaţiile:
   a) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 72$; b) $\dfrac{n!}{(n-4)!} = \dfrac{12n!}{(n-2)!}$; c) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n^3}{(n+2)!}$.
4. Să se rezolve inecuaţiile:
   a) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$; b) $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} < 1\,000$.
5. În câte moduri se pot aşeza pe un raft patru cărţi?
6. Un tren de persoane are zece vagoane. În câte moduri pot fi aşezate vagoanele pentru formarea trenului?
7. Câte elemente trebuie să conţină o mulţime, astfel încât numărul permutărilor acestei mulţimi să fie cuprins între 500 şi 1 000?
8. Din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 se formează toate numerele cu şase cifre astfel încât în fiecare număr să nu fie cifre identice. Câte numere se pot obţine?
9. În câte moduri pot fi aşezate n persoane la o masă circulară?

Aranjamente

10. Să se scrie toate aranjamentele de câte 4 elemente ale mulțimii $\{a, b, c, d, e\}$.

11. Câte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, dacă în fiecare astfel de număr orice cifră intră cel mult o dată?

12. O grupă de studenți trebuie să programeze patru examene în timp de 8 zile. În câte moduri se poate face aceasta? Dar dacă ultimul examen se va da în mod obligatoriu în ziua a opta?

13. Cei treizeci de elevi ai unei clase au schimbat fotografii între ei. Câte fotografii au fost necesare?

14. Să se calculeze:

a) $\dfrac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$; b) $\dfrac{A_{n+k}^{k+3} + A_{n+k}^{k+2}}{A_{n+k}^{k+1} - A_{n+k}^{k}}$; c) $\dfrac{(2n+1)!\,A_{2n}^{k}}{A_{2n-1}^{k-1}\cdot(2n-k)!}$.

15. Să se afle n, dacă:

a) $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$; b) $\dfrac{A_n^{10} - A_n^8}{A_n^8} = 109$; c) $\dfrac{(n+2)!}{A_n^k\cdot(n-k)!} = 132$.

Combinări

16. Să se scrie toate submulțimile mulțimii A și să se găsească numărul lor, dacă:

a) $A = \{3, 4\}$; $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

17. În câte moduri, din 30 elevi, poate fi ales un comitet format din 3 elevi?

18. Câte numere de câte patru cifre se pot forma astfel încât în fiecare număr o cifră să fie mai mare decât precedenta? Dar dacă fiecare cifră este mai mică decât precedenta?

19. În câte moduri se pot forma echipe de câte 4 elevi și un profesor, dacă sunt 20 elevi și 3 profesori?

20. La 9 clase trebuie repartizați 3 profesori de matematică, fiecăruia repar-tizându-i-se câte 3 clase. În câte moduri se poate face repartizarea?

21. Să se calculeze:

a) C_{10}^8; b) C_{16}^{13}; c) $C_{100}^0 + C_{100}^{99}$; d) $C_{10}^9 + C_{10}^8$.

22. Să se afle n, dacă:

a) $C_n^4 = \dfrac{5n(n-3)}{6}$; b) $C_n^3 + C_n^4 = n(n-2)$; c) $C_{4n+9}^{4(n+1)} = 5A_{4n+7}^3$; d) $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3$.

23. Să se rezolve inecuațiile:

a) $C_n^5 < C_n^6$; b) $C_n^5 > C_n^7$; c) $C_{20}^{k-1} < C_{20}^k$; d) $C_{16}^{k-2} < C_{16}^k$.

24. Să se rezolve sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} A_x^y = 7A_x^{y-1} \\ 6C_x^y = 5C_x^{y+1} \end{cases}$; b) $\begin{cases} A_{2x}^{y-2} = 8A_{2x}^{y-3} \\ 3C_{2x}^{y-2} = 8C_{2x}^{y-3} \end{cases}$.

25. Să se deducă egalitățile:

a) $C_n^k = C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$;

b) $C_n^k = C_{n-3}^k + 3C_{n-3}^{k-1} + 3C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-3}$;

c) $C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + \ldots + C_{20}^9 = C_{21}^{10}$.

26. Din 11 persoane, dintre care 7 bărbați și 4 femei, se formează o delegație alcătuită din 5 persoane, dintre care cel puțin două femei. În câte moduri se poate forma această delegație?

5 METODA COORDONATELOR CARTEZIENE (GEOMETRIE ANALITICĂ)

Ideea care stă la baza geometriei analitice plane este următoarea: *un punct din plan este identificat cu o pereche de numere reale, numite coordonatele punctului.* În acest fel, proprietățile geometrice ale mulțimilor de puncte devin proprietăți calculatorii, adică relații între numere reale.

De exemplu, faptul că punctele din plan M_1 (de coordonate (x_1, y_1)) și M_2 (de coordonate (x_2, y_2)) se află la distanța $d > 0$ se exprimă astfel:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d.$$

De asemenea, anumite *figuri geometrice* (adică mulțimi de puncte din plan) au anumite *ecuații*.

De exemplu, faptul că punctele M (de coordonate (x, y)) se află pe o dreaptă d se exprimă prin aceea că există trei numere reale a, b, c (dintre care $a \neq 0$ sau $b \neq 0$) astfel încât coordonatele x, y satisfac *ecuația dreptei d*:

$$ax + by + c = 0.$$

Putem face geometrie analitică și pe o dreaptă (identificând punctele cu numere, după cum vom vedea) sau în spațiu (identificând punctele cu triplete de numere).

*

Istoria matematicii îl recunoaște ca fondator al geometriei analitice, bazată pe metoda coordonatelor, pe matematicianul și filosoful francez **René Descartes** (1596 -1650).

Coordonatele punctelor se mai numesc și *coordonate carteziene* în onoarea lui Descartes, care scria în limba latină (așa cum era obiceiul timpului) și semna Renatus Cartesius. Același comentariu se poate face referitor la denumirea de *produs cartezian* a două mulțimi.

1. Coordonate carteziene pe dreaptă

1.1. Noțiuni fundamentale

Fie d o dreaptă fixată (acesta este spațiul în care vom lucra). Considerăm două puncte distincte A și B pe d. Presupunem că știm (în mod intuitiv) ce înseamnă că un punct $M \in d$ se află între A și B.

Notăm $(AB) = \{M \in d \mid M$ este între A și B, $M \neq A$, $M \neq B\}$ și numim (AB) *segmentul deschis de extremități A și B.*

Mai notăm

$[AB] = (AB) \cup \{A, B\}$ = *segmentul închis de extremități A și B.*

$[AB) = (AB) \cup \{A\}$, $(AB] = (AB) \cup (B)$.

Dacă $A = B$, extindem definițiile de mai sus astfel:

$$[AA] = \{A\},\ (AA) = [AA) = (AA] = \varnothing.$$

*

Pentru a putea face geometrie analitică pe dreapta d, trebuie să definim un sens şi o unitate de măsură.

Definirea sensului. Vom considera un punct fixat O pe d, numit origine (fig. 1). El împarte dreapta d în două semidrepte, anume $[Ox$ (notată pentru comoditate cu Ox) şi $[Ox'$ (notată pentru comoditate Ox').

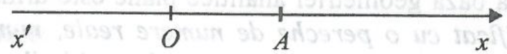


Fig. 1

Facem o alegere între cele două semidrepte şi numim pe Ox *semidreapta pozitivă* (de obicei se alege ca semidreaptă pozitivă pe cea care este „la dreapta" pe desen).

Spunem că am *ales un sens pe dreapta d* în momentul când am ales semidreapta pozitivă Ox.

Definirea unităţii de măsură. Pe semidreapta pozitivă Ox considerăm un punct fixat $A \neq O$. *Unitatea de măsură pe d* este lungimea segmentului $[OA]$ (şi această definiţie este intuitivă, pentru că ea presupune că ştim ce înseamnă să măsurăm lungimea unui segment).

Definiţie. O dreaptă d, pe care s-a ales un sens şi o unitate de măsură se numeşte *axă de coordonate* sau *dreaptă carteziană*.

O dreaptă carteziană se poate pune în corespondenţă bijectivă cu mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$. Vom arăta cum oricărui punct M al dreptei d îi corespunde un singur număr real x_M, adică vom defini o *funcţie bijectivă*

$$h : d \to \mathbb{R},\ h(M) = x_M,\ \forall M \in d.$$

În primul rând, $h(O) = 0$ (adică $x_O = 0$).

Apoi, dacă $M \neq O$, vom avea $x_M > 0$ dacă $M \in Ox$ sau $x_M < 0$ dacă $M \in Ox'$.

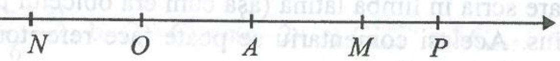


Fig. 2

Dacă $M \in Ox$, vom defini $x_M =$ lungimea segmentului $[OM]$, iar dacă $N \in Ox'$ vom defini $x_N = -$ lungimea segmentului $[NO]$.

În mod intuitiv, *lungimea* lui $[OM]$ înseamnă „de câte ori se cuprinde unitatea de măsură $[OA]$ în $[OM]$".

În figura 2, avem $x_M = 2$, $x_N = -1$ şi $x_P = \dfrac{5}{2}$.

Acest mod de definire poate fi extins şi la cazul lungimilor iraţionale. În figura 3 segmentele OA şi AB au lungimea 1 şi sunt perpendiculare.

Rezultă că ipotenuza OB are lungimea $\sqrt{2}$. Purtând pe Ox un segment OU de lungime egală cu OB, vom avea $x_U = \sqrt{2}$.

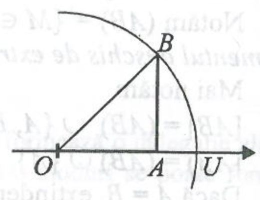


Fig. 3

Definiţie. Dacă punctului $M \in d$ îi corespunde numărul real $h(M) = x_M$ vom spune că x_M este *coordonata carteziană* a lui M pe dreapta carteziană d şi vom nota $M(x_M)$.

Folosind bijecţia h, vom identifica un punct $M \in d$ cu coordonata sa, numărul real x_M. În acest fel, practic, identificăm o dreaptă carteziană cu mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$.

De asemenea, observăm că M se află între A şi B dacă şi numai dacă numărul x_M este cuprins între numerele x_A şi x_B (de exemplu, dacă $x_A < x_B$ trebuie să avem $x_A \leq x_M \leq x_B$).

Distanţa dintre două puncte

Definiţie. Fie A şi B două puncte pe dreapta d. Se numeşte *distanţa dintre punctele A şi B* lungimea segmentului $[AB]$.

Vom nota distanţa dintre A şi B prin $|AB|$ sau, simplu, AB. Avem, în mod evident $|AB| = 0 \Leftrightarrow A = B$.

T e o r e m ă. Dacă A şi B sunt pe d, distanţa dintre A şi B este

$$|AB| = |x_B - x_A|$$

În particular, distanţa dintre A şi O este $|AO| = |x_A|$.

Exemple

Ne vom referi la punctele din figura 4.

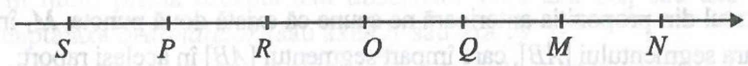


Fig. 4

$|MN| = x_N - x_M = |x_N - x_M|$,

$|RQ| = |RO| + |OQ| = |x_R| + |x_Q| = -x_R + x_Q = x_Q - x_R = |x_Q - x_R|$,

$|SP| = |OS| - |OP| = |x_S| - |x_P| = -x_S - (-x_P) = x_P - x_S = |x_P - x_S|$.

Mijlocul unui segment

Fie punctele $A \neq B$ pe dreapta d. Presupunem $x_B > x_A$ (cazul $x_B < x_A$ se tratează analog). Se ştie că mijlocul segmentului $[AB]$ este unicul punct $M \in d$ pentru care $|MA| = |MB|$. Se arată că:

* dacă M este mijlocul lui $[AB]$ atunci $x_M = \dfrac{1}{2}(x_A + x_B)$;

* reciproc, dacă $M \in d$ are coordonata $x_M = \dfrac{1}{2}(x_A + x_B)$ atunci M este mijlocul lui $[AB]$ (se arată că $|MA| = |MB| = \dfrac{1}{2}(x_B - x_A)$).

Exemple

1. Fie punctele $A(2)$ şi $B(6)$. Mijlocul segmentului $[AB]$ este punctul M de coordonată $x_M = \dfrac{2+6}{2} = 4$, deci $M(4)$.

2. Fie punctele $A(-3)$ şi $E(5)$ şi B simetricul lui A în raport cu E. Care este coordonata punctului B?

Avem $2x_E = x_A + x_B$, de unde $x_B = 2x_E - x_A = 10 + 3 = 13$.

Raportul a două segmente

Definiţie. Fie punctele $A \neq B$ pe dreapta d şi $M \in d$, $M \neq B$. Se numeşte *raportul segmentelor MA şi MB* numărul $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{|MA|}{|MB|}$.

Dacă A şi B sunt fixate, iar M parcuge mulţimea $d - \{B\}$, raportul $\dfrac{MA}{MB}$ poate lua orice valoare din mulţimea $[0, +\infty)$, fiind egal cu 0 dacă şi numai dacă $M = A$. Mai precis, avem următoarea:

Propoziţie. Fie două puncte $A \neq B$ pe d şi t un număr strict pozitiv. Se consideră egalitatea $\dfrac{MA}{MB} = t$ (*).

1) Dacă $t = 1$, există un punct M unic (anume, M este mijlocul segmentului AB) pentru care avem (*).

2) Dacă $t \neq 1$, există exact două puncte M pentru care avem (*).

Rezultatul din propoziţia anterioară ne spune că există două puncte, M_1 între A şi B, M_2 în afara segmentului $[AB]$, care împart segmentul $[AB]$ în acelaşi raport:

$$\frac{M_1A}{M_1B} = \frac{M_2A}{M_2B} = t \neq 1.$$

Se spune că punctele M_1 şi M_2 sunt *conjugate armonic* faţă de punctele A şi B (vezi ex. 8).

Exemplu

Fie $A(0)$, $B(3)$ şi $t = 2$. Există punctele $M_1(2)$ şi $M_2(6)$ astfel încât $\dfrac{M_1A}{M_1B} = \dfrac{M_2A}{M_2B} = 2$.

Exerciţii

1. Desenaţi pe axă punctele A, B şi calculaţi $|AB|$ dacă:

a) $x_A = 2, x_B = 4$; b) $x_A = 2, x_B = 2$; c) $x_A = 1, x_B = -\sqrt{3}$.

2. Calculaţi mijlocul segmentului $[AB]$ în fiecare dintre cazurile de la exerciţiul anterior.

3. Fie $A(3)$ şi $M(-3)$. Determinaţi simetricul lui A faţă de M.

4. Dacă A, B şi C sunt puncte pe d, arătaţi că:

a) $|AB| = 0 \Leftrightarrow A = B$;

b) $|AB| = |BA|$;

c) $|AC| \leq |AB| + |BC|$. În ce caz avem egalitate?

5. a) Dacă A şi B sunt puncte distincte pe o dreaptă d, arătaţi că există un unic punct M între A şi B cu proprietatea $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AB}{MA}$ (spunem că M împarte pe AB în *medie şi extrema raţie*).

b) În condiţiile de mai sus, arătaţi că $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (numărul $\rho = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ se numeşte *numărul de aur* şi nu depinde de A, B).

2. Coordonate carteziene în plan

Considerăm un plan fixat $\mathscr{P}$ (acesta este spaţiul în care vom lucra). Folosind noţiunea de dreapta carteziană, prezentată în paragraful anterior, vom introduce conceptul fundamental al geometriei analitice în plan – reperul cartezian în plan.

Definiţie. Se numeşte *reper cartezian* (sau *sistem de axe de coordonate*) în $\mathscr{P}$ *o* pereche de drepte carteziene perpendiculare din $\mathscr{P}$, care au *originea comună* situată în punctul lor de intersecţie O şi au *unitatea de măsură comună* (adică unitatea de măsură este aceeaşi pe ambele axe).

Prin urmare, pe prima dreaptă avem punctul O şi semidreapta pozitivă Ox, iar pe a doua dreaptă avem punctul O şi semidreapta pozitiva Oy.

Vom numi prima dreaptă *axa absciselor* (sau axa Ox, sau axa xx'), iar a doua dreaptă axa *ordonatelor* (sau axa Oy sau axa yy').

Definiţie. Vom numi *plan cartezian* un plan $\mathscr{P}$ împreună cu un reper cartezian.

În figura 5 avem un reper cartezian, unde $OI = OJ = 1$.

În continuare vom arăta cum se stabileşte o corespondenţă între punctele planului cartezian şi perechile ordonate de numere reale.

1) Considerăm un punct oarecare M în planul $\mathscr{P}$. Vom asocia lui M o pereche de numere $(x_M, y_M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ după cum urmează. Ducem prin M două drepte perpendiculare (fig. 6).

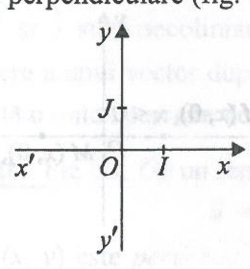


Fig. 5

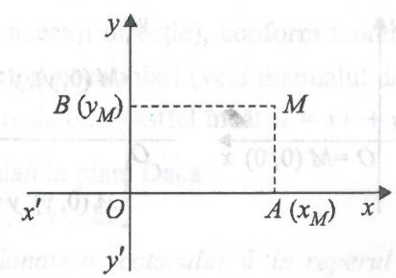


Fig. 6

- prima dreaptă este paralelă cu Oy şi intersectează Ox în $A(x_M)$, unde x_M este coordonata lui A pe dreapta carteziană Ox;

- a doua dreaptă este paralelă cu Ox şi intersectează Oy în $B(y_M)$, unde y_M este coordonata lui B pe dreapta carteziană Oy;

În acest fel, am asociat punctului M perechea $(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$.

2) Invers, vom arăta cum oricărei perechi de numere reale $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ îi corespunde un punct M din planul $\mathscr{P}$.

Să considerăm deci o pereche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Atunci:

- numărului real x îi corespunde pe dreapta carteziană Ox punctul de coordonată x, pe care îl notăm A;
- numărului real y îi corespunde pe dreapta carteziană Oy punctul de coordonată y, pe care îl notăm B.

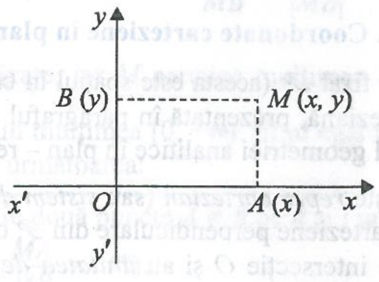


Fig. 7

Prin A ducem o paralelă la Oy, iar prin B ducem o paralelă la Ox. Aceste două drepte se întâlnesc într-un punct $M \in \mathscr{P}$. Dacă $x = 0$ punctul M este pe Oy, dacă $y = 0$ punctul M este pe Ox, iar dacă $x = y = 0$ obţinem $M = O$.

Dacă M este legat de x şi y în modul descris mai sus, vom scrie $M(x, y)$ şi vom spune că *x şi y sunt coordonatele carteziene ale punctului M*, anume x este *abscisa lui M*, y este *ordonata lui M*.

Observaţii cu privire la semnul coordonatelor

Vom discuta poziţia unui punct $M(x, y)$ din planul cartezian, în funcţie de semnele coordonatelor sale x şi y.

* Situaţiile posibile în cazul $x = 0$ sau $y = 0$ se află în figura 8.

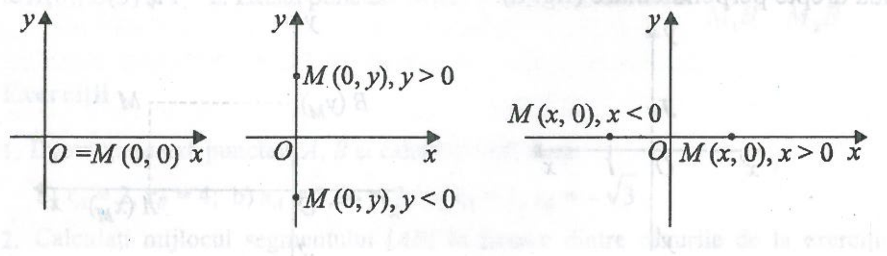
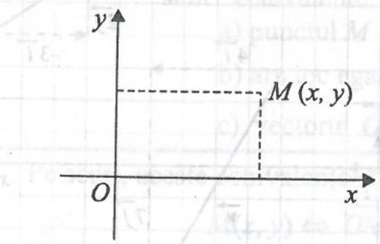
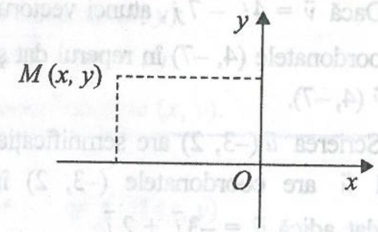


Fig. 8

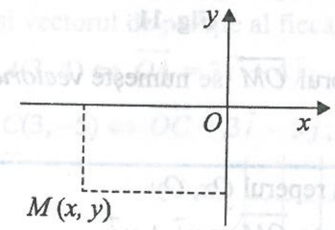
* Situaţiile posibile în cazul $x \neq 0$ şi $y \neq 0$ se află în figura 9.



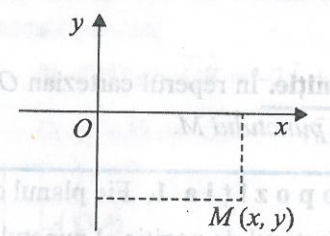
Dacă $x > 0$, $y > 0$, spunem că M se află în **cadranul I** (dreapta, sus)



Dacă $x < 0$, $y > 0$, spunem că M se află în **cadranul II** (stânga, sus)



Dacă $x < 0$, $y < 0$, spunem că M se află în **cadranul III** (stânga, jos)



Dacă $x > 0$, $y < 0$, spunem că M se află în **cadranul IV** (dreapta, jos)

Fig. 9

3. Vectori şi coordonate în planul cartezian

3.1. Coordonatele unui vector din planul cartezian

Fie un plan cartezian $\mathscr{P}$ cu reperul cartezian Ox, Oy şi punctele $I(1, 0)$ şi $J(0, 1)$. Considerăm vectorii $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ şi $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. Vectorul $\vec{i}$ este un versor al axei Ox, iar $\vec{j}$ este un versor al axei Oy (se numeşte *versor al dreptei d* un vector de lungime 1 care are aceeaşi direcţie cu dreapta d).

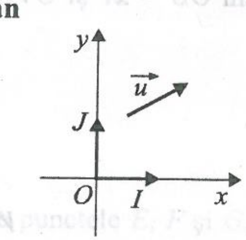


Fig. 10

Considerăm un vector $\vec{u}$ din plan.

Cum $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt necoliniari (nu au aceeaşi direcţie), conform teoremei de descompunere a unui vector după doi vectori necoliniari (vezi manualul de clasa a IX-a) există o unică pereche de numere reale (x, y) astfel încât $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Definiţie. Fie Ox, Oy un reper cartezian în plan. Dacă

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}, x, y \in \mathbb{R},$$

spunem că (x, y) este *perechea de coordonate a vectorului $\vec{u}$ în reperul dat* şi notăm $\vec{u}\,(x, y)$.

Exemple

* Dacă $\vec{v} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$, atunci vectorul $\vec{v}$ are coordonatele (4, –7) în reperul dat şi notăm $\vec{v}$ (4, –7).

* Scrierea $\vec{u}$ (–3, 2) are semnificaţia: vectorul $\vec{u}$ are coordonatele (–3, 2) în reperul dat, adică $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$.

Fie un punct oarecare $M(x, y)$ în plan.

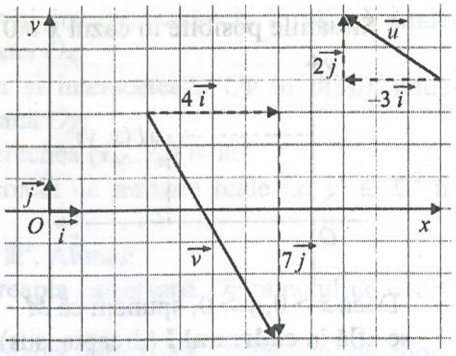


Fig. 11

Definiţie. În reperul cartezian *Ox*, *Oy* vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *vectorul de poziţie al punctului M.*

Propoziţia 1. Fie planul cartezian cu reperul *Ox*, *Oy*.

a) Vectorul de poziţie al punctului $M(x, y)$ este $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

b) Dacă *M* are vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, atunci *M* are coordonatele (x, y).

Demonstraţie: a) Perpendiculara din *M* pe *Ox* intersectează *Ox* în punctul $U(x, 0)$, iar perpendiculara din *M* pe *Oy* intersectează *Oy* în punctul $V(0, y)$. Avem $\overrightarrow{OU} = x\vec{i}$ şi $\overrightarrow{OV} = y\vec{j}$. Conform regulii paralelogramului,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

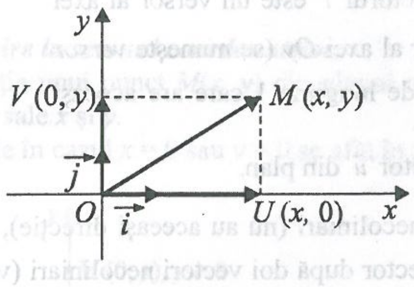


Fig. 12

b) Fie *M* astfel încât $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Notăm cu (x', y') coordonatele lui *M*. Conform cu punctul a) avem $\overrightarrow{OM} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Prin urmare $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, de unde $x = x'$, $y = y'$, deoarece vectorii $\vec{i}$, $\vec{j}$ sunt necoliniari.

Reţineţi! Fie *M* un punct în planul cartezian. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) punctul *M* are coordonatele (x, y);

b) are loc egalitatea $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

c) vectorul $\overrightarrow{OM}$ are coordonatele (x, y).

Pe scurt, aceste echivalenţe se scriu

$$M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\,(x, y)$$

Exemple

1. Considerăm în plan punctele *A*, *B*, *C* şi *D* (fig. 13). Să scriem coordonatele şi vectorul de poziţie al fiecăruia dintre aceste puncte:

$A(3, 4) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\quad B(-2, 3) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$;

$C(3, -5) \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$; $\quad D(-4, -3) \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$.

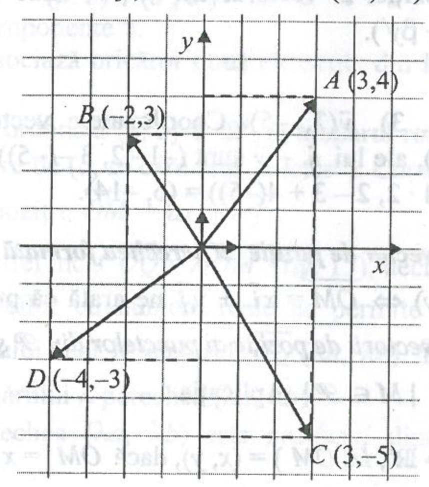


Fig. 13

2. Fiind dat vectorul de poziţie pentru fiecare dintre punctele *E*, *F* şi *G*, să aflăm coordonatele punctului respectiv:

$\overrightarrow{OE} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \Leftrightarrow E(3, -2)$; $\quad \overrightarrow{OF} = 4\vec{i} + 2\vec{j} \Leftrightarrow F(4, 2)$;

$\overrightarrow{OG} = -2\vec{i} - 4\vec{j} \Leftrightarrow G(-2, -4)$.

3.2. Operaţii cu vectori daţi prin coordonate

Considerăm în planul cartezian cu reperul *Ox*, *Oy*, doi vectori $\vec{u}\,(x, y)$ şi $\vec{v}\,(x, y)$, deci

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

Cum $\vec{i}$, $\vec{j}$ sunt vectori necoliniari, avem:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \Leftrightarrow (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} = 0 \Leftrightarrow x = x' \text{ şi } y = y'$$

Să calculăm coordonatele sumei și diferenței vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$, precum și ale vectorului $\alpha\vec{u}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) + (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) - (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j}$$

$$\alpha\vec{u} = \alpha(x\vec{i} + y\vec{j}) = \alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j}$$

P r o p o z i ț i a 2. Fie vectorii $\vec{u}$ (x, y) și $\vec{v}$ (x', y'). Atunci:

* $\vec{u} = \vec{v}$ dacă și numai dacă $x = x'$ și $y = y'$
* vectorul $\vec{u} + \vec{v}$ are coordonatele $(x + x', y + y')$
* vectorul $\vec{u} - \vec{v}$ are coordonatele $(x - x', y - y')$
* vectorul $\alpha\vec{u}$ are coordonatele $(\alpha x, \alpha y)$

În condițiile propoziției 2, vectorul $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ are coordonatele $(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$.

Exemplu

Fie vectorii $\vec{u}(-1, 3)$, $\vec{v}(2, -5)$. Coordonatele vectorului $\vec{u} + \vec{v}$ sunt $(-1 + 2, 3 - 5) = (1, -2)$, ale lui $\vec{u} - \vec{v}$ sunt $(-1 -2, 3 -(-5)) = (-3, 8)$, iar ale lui $2\vec{u} + 4\vec{v}$ sunt $(2(-1) + 4 \cdot 2, 2 - 3 + 4(-5)) = (6, -14)$.

Identificarea unui vector de poziție cu perechea formată de coordonatele sale

Echivalența $M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ne arată că putem stabili o *corespondență bijectivă între vectorii de poziție ai punctelor din $\mathscr{P}$ și elementele lui $\mathbb{R}^2$.*

Notăm $\mathscr{V} = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in \mathscr{P}\}$. Aplicația

$$H: \mathscr{V} \to \mathbb{R}^2, H(\overrightarrow{OM}) = (x, y), \text{ dacă } \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

este bijectivă. Prin intermediul aplicației H *identificăm* vectorul $\overrightarrow{OM} \in \mathscr{V}$ cu perechea (x, y) a coordonatelor sale.

Cele două operații pe $\mathscr{V}$, adunarea vectorilor și înmulțirea cu scalari a vectorilor, ne conduc, prin intermediul lui H, la definirea a două operații în $\mathbb{R}^2$.

1) Fie perechile ordonate (a, b), $(a', b') \in \mathbb{R}^2$. Considerăm punctele $M(a, b)$, $N(a', b')$ care au vectorii de poziție

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}, \quad \overrightarrow{ON} = a'\vec{i} + b'\vec{j},$$

Fie punctul P astfel încât $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP}$ (fig. 14), deci

$$\overrightarrow{OP} = (a + a')\vec{i} + (b + b')\vec{j}.$$

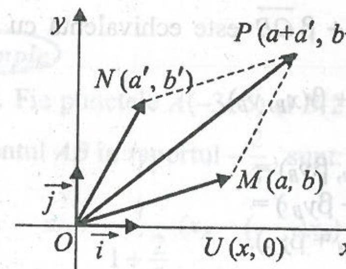


Fig. 14

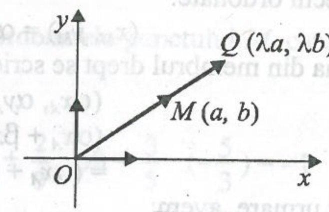


Fig. 15

Adunarea vectorilor ne permite să asociem vectorilor $\overrightarrow{OM}(a, b)$ și $\overrightarrow{ON}(a', b')$ vectorul $\overrightarrow{OP}(a + a', b + b')$. În felul acesta asociem perechilor (a, b) și (a', b') perechea $(a + a', b + b')$.

Vom spune că perechea $(a + a', b + b')$ este suma perechilor (a, b) și (a', b') și vom nota:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

(se face suma „pe componente").

Operația care asociază oricăror două elemente din $\mathbb{R}^2$ suma lor se numește *adunarea în* $\mathbb{R}^2$.

2) Fie perechea ordonată $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ și numărul real $\lambda \in \mathbb{R}$ (λ se numește „scalar" spre deosebire de (a, b) care este „vector"). Considerăm punctul $M(a, b)$ care are vectorul de poziție $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Fie punctul Q astfel încât $\overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OM}$ (fig. 15), deci $\overrightarrow{OQ} = \lambda a\vec{i} + \lambda b\vec{j}$.

Înmulțirea vectorilor cu numere reale ne permite să asociem vectorului $\overrightarrow{OM}(a, b)$ și numărului real λ vectorul $\overrightarrow{OQ}(\lambda a, \lambda b)$. În felul acesta asociem perechii (a, b) și numărului λ perechea $(\lambda a, \lambda b)$.

Spunem că perechea $(\lambda a, \lambda b)$ este *produsul* dintre perechea (a, b) și numărul λ și notăm

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

(se face produsul „pe componente").

Operația care asociază oricărui număr $\lambda \in \mathbb{R}$ și oricărui element din $\mathbb{R}^2$ produsul lor se numește *înmulțirea perechilor cu numere reale.*

*

P r o p o z i ț i a 3. Fie în plan punctele $M(x_M, y_M)$ și $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

b) $x_M = \alpha x_A + \beta x_B$ și $y_M = \alpha y_A + \beta y_B$.

Demonstrație. Propoziția este o consecință directă a identificării dintre un vector de poziție și perechea sa de coordonate precum și a operațiilor cu perechi ordonate, definite mai sus.

Astfel, relația vectorială $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ este echivalentă cu relația între perechi ordonate:

$$(x_M, y_M) = \alpha(x_A, y_A) + \beta(x_B, y_B).$$

Suma din membrul drept se scrie:

$$(\alpha x_A, \alpha y_A) + (\beta x_B, \beta y_B) = (\alpha x_A + \beta x_B, \alpha y_A + \beta y_B) = = (\alpha x_A + \beta x_B , \alpha y_A + \beta y_B).$$

Prin urmare, avem:

$$(x_M, y_M) = (\alpha x_A + \beta x_B, \alpha y_A + \beta y_B)$$

ceea ce este echivalent cu

$$x_M = \alpha x_A + \beta x_B \text{ și } y_M = \alpha y_A + \beta y_B.$$

Coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat

Propoziția 4. Fie $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ două puncte distincte în planul cartezian și numărul $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1$.

Coordonatele carteziene ale unicului punct M de pe dreapta AB pentru care $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = t$ sunt $x_M = \frac{x_A - t x_B}{1-t}$, $y_M = \frac{y_A - t y_B}{1-t}$ (M este punctul care împarte segmentul orientat AB în raportul t).

Demonstrație. Prin definiție, avem $\overrightarrow{MA} = t\overrightarrow{MB}$, de unde, conform unei teoreme din clasa a IX-a, rezultă $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1-t}(\overrightarrow{OA} - t\overrightarrow{OB})$.

Aplicând propoziția 3 pentru $\alpha = \frac{1}{1-t}$, $\beta = \frac{-t}{1-t}$ și $\gamma = 0$ obținem ceea ce trebuia demonstrat.

Observație. Dacă M este mijlocul segmentului AB, atunci $t = -1$ și obținem

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Invers, dacă punctele A, B, M sunt coliniare și $M \neq B$, atunci raportul în care M împarte segmentul AB poate fi exprimat după cum urmează:

- dacă $x_A \neq x_B, y_A \neq y_B$, $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{x_A - x_M}{x_B - x_M} = \frac{y_A - y_M}{y_B - y_M}$;
- dacă $y_A = y_B$, $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{x_A - x_M}{x_B - x_M}$;
- dacă $x_A = x_B$, $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{y_A - y_M}{y_B - y_M}$

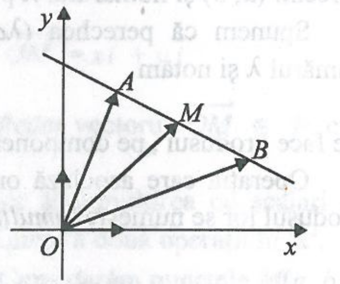


Fig. 16

Exemple

1. Fie punctele $A(-3, 5)$ și $B(2, 1)$. Coordonatele punctului M, care împarte segmentul AB în raportul $-\frac{2}{3}$, sunt:

$$x_M = \frac{1}{1+\frac{2}{3}}(x_A - (-\frac{2}{3})x_B) = \frac{3}{5}(-3 + \frac{2}{3} \cdot 2) = \frac{3}{5} \cdot (-\frac{5}{3}) = -1$$

$$y_M = \frac{1}{1+\frac{2}{3}}(y_A - (-\frac{2}{3})y_B) = \frac{3}{5}(5 + \frac{2}{3} \cdot 1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{17}{3} = \frac{17}{5}.$$

2. Fie punctele $A(4, -3)$ și $B(2, -5)$. Mijlocul M al segmentului AB are coordonatele

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3-5}{2} = -4,$$

deci $M(\frac{7}{2}, -4)$.

O condiție de coliniaritate a doi vectori

Fie vectorii $\vec{u}(x, y)$ și $\vec{v}(x', y')$. Se știe că avem echivalența: $\vec{u}$, $\vec{v}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow$ există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = t\vec{u}$. Cum $t\vec{u}$ are coordonatele (tx, ty), aplicând propoziția 1, rezultă

$$\vec{v} = t\vec{u} \Leftrightarrow x' = tx \text{ și } y' = ty.$$

Vom demonstra:

Propoziția 5. Fie a, b și a', b' numere reale cu proprietatea: ($a \neq 0$ sau $b \neq 0$) și ($a' \neq 0$ sau $b' \neq 0$). Sunt echivalente afirmațiile:

(i) există un număr real $t \neq 0$, astfel încât $a' = ta$, $b' = tb$;

(ii) avem egalitatea $ab' - a'b = 0$.

Demonstrație. Implicația (i) $\Rightarrow$ (ii) este evidentă.

Vom demonstra implicația (ii) $\Rightarrow$ (i). Fie, de exemplu $a \neq 0$. Notăm $\frac{a'}{a} = t$, deci $a' = ta$. Atunci: $ab' - a'b = 0 \Rightarrow b' - \frac{a'}{a}b = 0 \Rightarrow b' = tb$.

Propoziția 6. Fie vectorii $\vec{u}(x, y)$ și $\vec{v}(x', y')$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari;

b) are loc egalitatea $xy' - x'y = 0$.

Demonstrație. **a) $\Rightarrow$ b)** Cazul $\vec{u} = \vec{0}$ sau $\vec{v} = \vec{0}$ (când $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt automat coliniari, deoarece vectorul nul este coliniar cu orice vector) este banal: avem $x = y = 0$ (dacă $\vec{u} = \vec{0}$) sau $x' = y' = 0$ (dacă $\vec{v} = \vec{0}$).

Dacă $\vec{u} \neq \vec{0}$ şi $\vec{v} \neq \vec{0}$, rezultă existenţa unui număr real $t \neq 0$ astfel încât $\vec{v} = t\vec{u}$, deci $x' = tx$, $y' = ty$ şi am ajuns la implicaţia (i) $\Rightarrow$ (ii) din propoziţia anterioară.

b) $\Rightarrow$ a) Dacă unul dintre vectori este nul, rezultă că ei sunt automat coliniari. Dacă ambii sunt nenuli, avem: ($x \neq 0$ sau $y \neq 0$) şi ($x' \neq 0$ sau $y' \neq 0$); aplicând implicaţia (ii) $\Rightarrow$ (i) din propoziţia 5 rezultă că există $t \neq 0$ astfel încât $x' = tx$, $y' = ty$ deci $\vec{v} = t\vec{u}$, adică $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari.

Exemple

1) Vectorii $\vec{u}(4, -3)$ şi $\vec{v}(12, -9)$ sunt coliniari, deoarece coordonatele lor îndeplinesc condiţia $xy' - x'y = 4(-9) - 12(-3) = 0$. De altfel, $\vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 12\vec{i} - 9\vec{j}$, deci $\vec{v} = 3(4\vec{i} - 3\vec{j})$ adică $\vec{v} = 3\vec{u}$.

2) Se arată imediat că $\vec{u}(5, 0)$ şi $\vec{v}(3, 0)$ sunt coliniari (fiecare este coliniar cu vectorul $\vec{i}(1, 0)$). (De asemenea, $\vec{u}(0, -6)$ şi $\vec{v}(0, 4)$ sunt coliniari (fiecare este coliniar cu $\vec{j}(0, 1)$).

3) Fie $\vec{u}(5, -1)$ şi $\vec{v}(-4, 3)$. Deoarece $xy' - x'y = 15 - 4 = 11 \neq 0$, vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ nu sunt coliniari.

Coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ în funcţie de coordonatele punctelor A şi B

Fie punctele $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ (fig. 27). Să determinăm coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$.

Avem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ şi cum $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$, rezultă $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$.

Propoziţia 7. Vectorul $\overrightarrow{AB}$, unde $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$, are coordonatele $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Se constată că $\overrightarrow{AB}$ este vectorul de poziţie al punctului $M(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

În adevăr, se arată imediat că $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Prin identificarea unui vector de poziţie cu coordonatele sale, rezultă:

* vectorul $\overrightarrow{AB}$ se identifică cu perechea

$$(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

* vectorul $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ se identifică cu perechea

$$(x_B + x_D - x_A - x_C;\ y_B + y_D - y_A - y_C)$$

* vectorul $t\overrightarrow{AB}$ se identifică cu perechea

$$t(x_B - x_A; y_B - y_A) = (tx_B - tx_A; ty_B - ty_A)$$

Exemplu

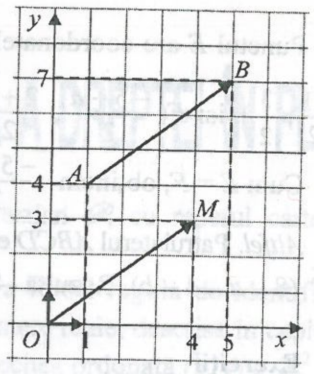


Fig. 17

Fie punctele $A(1, 4)$ şi $B(5, 7)$, reprezentate în figura 17. Vectorul $\overrightarrow{AB}$ are coordonatele $(5 - 1, 7 - 4) = (4, 3)$, deci $\overrightarrow{AB}(4, 3)$.

$\overrightarrow{AB}$ este vectorul de poziţie al punctului $M(4, 3)$, deci $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Exerciţii rezolvate

E1. Să se arate că:

a) punctele $A(-2,3)$, $B(-8,12)$ şi $C(2, -3)$ sunt coliniare;

b) punctele $A(0, -6)$, $B(7, -1)$ şi $C(-10, -13)$ nu sunt coliniare.

R: Reamintim: punctele A, B, C coliniare $\Leftrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

a) Avem $\overrightarrow{AB}(-6, 9)$ şi $\overrightarrow{BC}(10, -15)$, iar $xy' - x'y = (-6) \cdot (-15) - 9 \cdot 10 = 0$. Prin urmare $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari, deci punctele A, B şi C sunt coliniare.

Raportul în care punctul C împarte segmentul AB este $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{x_A - x_C}{x_B - x_C} = \dfrac{4}{5}$.

b) Avem $\overrightarrow{AB}(7, 5)$, $\overrightarrow{BC}(-17, -12)$, iar $xy' - x'y = -84 + 85 = 1 \neq 0$. Rezultă că vectorii AB şi BC nu sunt coliniari, deci punctele A, B şi C nu sunt coliniare.

E2. Fiind date punctele $A(2, -3)$, $B(5, 4)$, $C(0, -1)$ şi $D(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, să se arate că dreptele AB şi CD sunt paralele.

R: Reamintim: $AB \parallel CD \Leftrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari şi $AB \neq CD$. Deoarece punctul C nu aparţine dreptei AB (echivalent, punctele A, B şi C nu sunt coliniare), rezultă $AB \neq CD$.

Avem $\overrightarrow{AB}(3,7)$ şi $\overrightarrow{CD}(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$, iar $xy' - x'y = \frac{21}{2} - \frac{21}{2} = 0$, deci cei doi vectori sunt coliniari. Coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ implică $AB \parallel CD$ sau $AB = CD$. Cum avem $AB \neq CD$, rezultă $AB \parallel CD$.

E3. Fie punctele $A(3, 7)$, $B(-5, 2)$ şi $C(8, -4)$. Să se afle coordonatele punctului D astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

R: Fie E, F mijloacele diagonalelor AC, BD. Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram $\Leftrightarrow$ punctele E, F coincid. Fie $D(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Punctul E are coordonatele $x_E = \frac{1}{2}(3 + 8) = \frac{11}{2}$, $y_E = \frac{1}{2}(7 - 4) = \frac{3}{2}$, deci $E(\frac{11}{2}, \frac{3}{2})$, iar $F(\frac{-5+a}{2}, \frac{2+b}{2})$.

Cum $E = F$, obținem $\frac{-5+a}{2} = \frac{11}{2}$ și $\frac{2+b}{2} = \frac{3}{2}$, de unde $a = 16$, $b = 1$.

Altfel. Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Avem $\overrightarrow{AB}(-8, -5)$, $\overrightarrow{DC}(8 - a, -4 - b)$. Rezultă $-8 = 8 - a$ și $-5 = -4 - b$, deci $a = 16$, $b = 1$.

Exerciții

Considerăm planul cartezian cu un reper Ox, Oy.

1. Scrieți sub forma $a\vec{i} + b\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, fiecare dintre următorii vectori: $\vec{u}_1(-4, 0)$, $\vec{u}_2(0, 3)$, $\vec{u}_3(5, -2)$, $\vec{u}_4(-3, 6)$.

2. Care sunt coordonatele vectorului $\vec{u}$, dacă avem:

a) $\vec{u} = 2\vec{i} - (\vec{i} + \vec{j}) + 4\vec{i} + 5\vec{j}$; b) $\vec{u} = -3\vec{i} + 4(-\vec{i} + 3\vec{j}) + 7\vec{i} - 6\vec{j}$;

c) $\vec{u} = 5\vec{i} - 7\vec{j} + 2(-3\vec{i} + 2\vec{j}) + 3\vec{j}$.

3. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = \vec{v}$, unde:

a) $\vec{u}(3, -4)$, $\vec{v}(a, 2b)$; b) $\vec{u}(2, -3)$, $\vec{v}(3a - 2b, a + 2b)$;

c) $\vec{u}(5, 3 - b)$, $\vec{v}(a - 1, b\sqrt{2})$.

4. Fiind dați vectorii $\vec{u}(3, 2)$ și $\vec{v}(-4, 1)$, calculați coordonatele vectorilor $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{c} = -3\vec{u} + 4\vec{v}$.

5. Fiind dați vectorii $\vec{u}(-3, 2)$, $\vec{v}(6, 5)$ și $\vec{w}(4, 0)$ determinați coordonatele vectorilor $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ și $\vec{b} = 5\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$.

6. Arătați că vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari și găsiți r astfel încât $\vec{v} = r\vec{u}$, unde:

a) $\vec{u}(2, -1)$, $\vec{v}(4, -2)$; b) $\vec{u}(\frac{2}{3}, -3)$, $\vec{v}(2, -9)$; c) $\vec{u}(-\frac{1}{2}, 1)$, $\vec{v}(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.

7. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie coliniari, unde:

a) $\vec{u}(3, -4)$, $\vec{v}(a, 8)$; b) $\vec{u}(a, -1)$, $\vec{v}(-4, a)$; c) $\vec{u}(-1, 2)$, $\vec{v}(a - 1, 3a)$.

8. Fie punctele $A(0, 3)$, $B(1, -3)$ și $C(2, 4)$. Calculați coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$. Verificați relația $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

9. Fie punctele $A(4, -1)$, $B(0, 1)$ și $C(7, 5)$. Aflați coordonatele vectorilor:

a) $-2\overrightarrow{BC}$; b) $3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

10. Fie punctele $A(-3, 4)$, $B(1, -2)$ și $C(0, -4)$. Care sunt coordonatele punctelor M, N și P, definite prin relațiile:

a) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC}$; a) $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}$.

6 REPREZENTAREA ANALITICĂ A DREPTEI ÎN PLAN

În acest capitol vom considera un plan cartezian $\mathscr{P}$, cu reperul cartezian Ox, Oy.

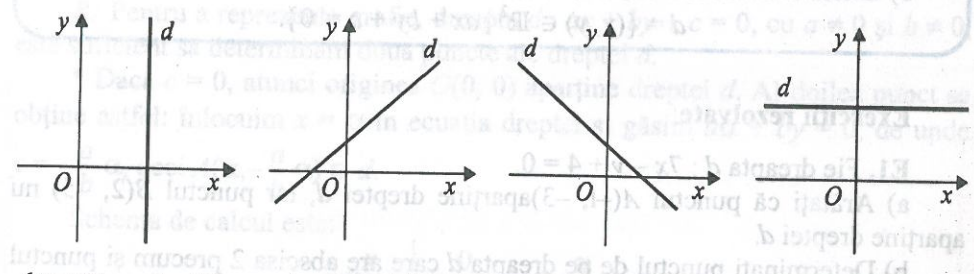
A face geometrie analitică în $\mathscr{P}$ înseamnă a folosi regula de identificare între punctele planului și perechile ordonate de numere reale, descrisă în capitolul precedent: punctul $P(x, y) \in \mathscr{P}$ este identic cu perechea ordonată $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Mai precis, înseamnă că *o figură geometrică din planul* $\mathscr{P}$ (adică o mulțime de puncte din $\mathscr{P}$) se identifică cu *o mulțime de perechi ordonate din* $\mathbb{R}^2$. De asemenea, proprietățile geometrice (paralelism, coliniaritate, concurență etc.) se traduc în relații algebrice. De exemplu, pentru a demonstra că două drepte sunt paralele, vom arăta că anumite numere reale verifică o relație algebrică.

Vom aplica acest punct de vedere pentru cele mai simple figuri geometrice ale planului $\mathscr{P}$, anume dreptele.

*

După poziția față de axele Ox și Oy, vom împărți dreptele planului $\mathscr{P}$ în clase distincte: drepte verticale, drepte orizontale și drepte oblice.



dreaptă verticală $d \parallel Oy$ sau $d = Oy$ | dreaptă oblică | dreaptă oblică | dreaptă orizontală $d \parallel Ox$ sau $d = Ox$

Fig. 1

Vom spune că două drepte date d și d' *au aceeași direcție* (sau *sunt paralele în sens generalizat*) dacă ele coincid sau sunt paralele.

Definiție. Fie o dreaptă d în planul $\mathscr{P}$. Spunem că:

* d este *verticală*, dacă d are aceeași direcție cu axa Oy
* d este *orizontală* dacă d are aceeași direcție cu axa Ox
* d este *oblică* dacă d nu are aceeași direcție nici cu Ox, nici cu Oy.

1. Ecuaţia carteziană generală a dreptei

Scopul principal al acestui paragraf este de a demonstra următoarea:

Teoremă (ecuaţia carteziană generală a dreptei). Fie $d \subset \mathscr{P}$ o mulţime nevidă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Mulţimea d este o dreaptă.

b) Există numerele reale a, b, c, cu $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, astfel încât

$$d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}.$$

Completări şi denumiri

În condiţiile teoremei, egalitatea $ax + by + c = 0$ se numeşte *ecuaţia carteziană generală a dreptei d* şi se notează $d : ax + by + c = 0$.

Dacă d are ecuaţia $ax + by + c = 0$, avem echivalenţa

$$M(x_M, y_M) \in d \Leftrightarrow ax_M + by_M + c = 0.$$

Cu alte cuvinte, punctul (x_M, y_M) aparţine dreptei d dacă şi numai dacă (x_M, y_M) verifică ecuaţia $ax + by + c = 0$.

În cazul unei drepte oblice, condiţia „$a \neq 0$ sau $b \neq 0$" trebuie înlocuită cu condiţia „$a \neq 0$ şi $b \neq 0$". Următoarea proprietate este „inclusă" în teorema anterioară.

Propoziţie (ecuaţia carteziană generală a dreptei oblice)

Fie $d \subset \mathscr{P}$ o mulţime nevidă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Mulţimea d este o dreaptă oblică.

b) Există trei numere reale a, b, c, cu $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, astfel încât

$$d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}.$$

Exerciţii rezolvate

E1. Fie dreapta $d : 7x - y + 4 = 0$.

a) Arătaţi că punctul $A(-1, -3)$ aparţine dreptei d, iar punctul $B(2, -5)$ nu aparţine dreptei d.

b) Determinaţi punctul de pe dreapta d care are abscisa 2 precum şi punctul de pe dreapta d care are ordonata -10.

c) Determinaţi punctele de intersecţie ale dreptei d cu axele de coordonate.

R: Fie un punct $A(x_A, y_A)$ şi dreapta $d : ax + by + c = 0$. Ştim că punctul A aparţine dreptei d dacă şi numai dacă perechea sa de coordonate verifică ecuaţia dreptei, adică $A(x_A, y_A) \in d \Leftrightarrow ax_A + by_A + c = 0$. În consecinţă, dacă $ax_A + by_A + c \neq 0$, atunci A nu aparţine dreptei d (sau dreapta d nu trece prin punctul A).

Dacă $A(x_A, y_A) \in d$ şi $x_A = \alpha$, putem calcula y_A, dacă $b \neq 0$:

$$x_A = \alpha \Rightarrow a\alpha + by_A + c = 0 \Rightarrow y_A = \frac{-c - a\alpha}{b}.$$

Analog, dacă $A(x_A, y_A) \in d$ şi $y_A = \beta$, atunci $x_A = \frac{-c - b\beta}{a}$, dacă $a \neq 0$.

a) Înlocuind $x = -1$, $y = -3$ în ecuaţia lui d, obţinem $-7 - (-3) + 4 = 0$, deci $A(-1, -3) \in d$.

Înlocuind $x = 2$, $y = -5$ în ecuaţia lui d obţinem $14 - (-5) + 4 = 23 \neq 0$, deci $B(2, -5) \notin d$.

b) Înlocuind $x = 2$ în ecuaţia lui d avem $14 - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 18$, deci punctul de abscisă 2 este $C(2, 18)$.

Înlocuind $y = -10$ în ecuaţia lui d avem $7x + 10 + 4 \Leftrightarrow x = -2$, deci punctul de ordonată -10 este $D(-2, -10)$.

c) Dreapta d este oblică, deci intersectează fiecare axă în câte un punct. Pentru a afla $d \cap Ox$ rezolvăm sistemul:

$$y = 0 \text{ şi } 7x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ şi } 7x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{7}, y = 0.$$

Pentru a afla $d \cap Oy$ rezolvăm sistemul:

$$x = 0 \text{ şi } 7x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ şi } -y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 4.$$

Prin urmare $d \cap Ox = \{A(-\frac{4}{7}, 0)\}$, $d \cap Oy = \{B(0, 4)\}$.

Calculele pot fi aranjate în următoarea schemă:

x	0	$-\frac{4}{7}$
y	4	0

E2. Reprezentaţi grafic dreapta d, unde d are ecuaţia:

a) $x - 2y = 0$; b) $x - 2y - 4 = 0$; c) $x + 3y - 6 = 0$.

R: Pentru a reprezenta grafic, dreapta $d : ax + by + c = 0$, cu $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, este suficient să determinăm două puncte ale dreptei d.

* Dacă $c = 0$, atunci originea $O(0, 0)$ aparţine dreptei d. Al doilea punct se obţine astfel: înlocuim $x = \alpha$ în ecuaţia dreptei şi găsim $a\alpha + by = 0$, de unde $y = -\frac{a}{b}\alpha$, deci $A(\alpha, -\frac{a}{b}\alpha) \in d$.

Schema de calcul este:

x	0	α
y	0	$-\frac{a}{b}\alpha$

* Dacă $c \neq 0$, se determină punctele de intersecţie ale dreptei d cu axele de coordonate, anume $A(-\frac{c}{a}, 0)$ şi $B(0, -\frac{c}{b})$.

Schema de calcul este:

x	0	$-\frac{c}{a}$
y	$-\frac{c}{b}$	0

Dacă punctele A, B sunt prea apropiate putem alege orice altă pereche de puncte distincte ale dreptei d.

a)

x	0	1
y	0	2

b)

x	0	4
y	-2	0

c)

x	0	6
y	2	0

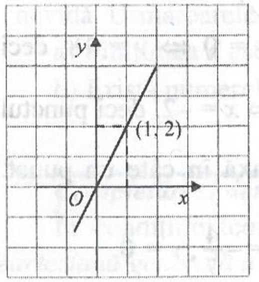


Fig. 2

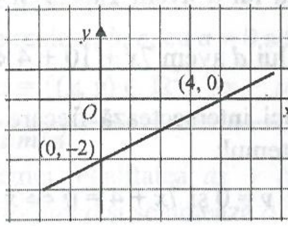


Fig. 3

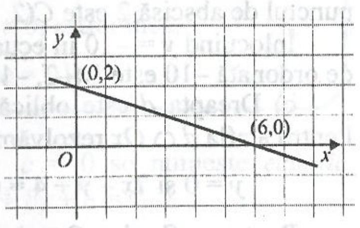


Fig. 4

Condiţia ca două drepte să coincidă

T e o r e m ă. Fie numerele reale a, b, c (unde $a \neq 0$ sau $b \neq 0$) şi a', b', c' (unde $a' \neq 0$ sau $b' \neq 0$). Considerăm dreptele

$$d : ax + by + c = 0, \quad d' : a'x + b'y + c' = 0.$$

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Avem egalitatea $d = d'$;

b) Numerele a, b, c şi a', b', c' sunt proporţionale, adică există un număr real $\lambda \neq 0$ astfel încât $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$.

SINTEZĂ (rezumatul paragrafului 1)

1. O mulţime $d \subset \mathscr{P}$ este o dreaptă dacă şi numai dacă există trei numere reale a, b şi c, cu $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, astfel încât

$$d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\} \quad (1)$$

Dacă are loc (1) spunem că *d este dreapta de ecuaţie* $ax + by + c = 0$ şi scriem $d : ax + by + c = 0$.

2. Despre dreapta $d : ax + by + c = 0$ afirmăm:

* d are aceeaşi direcţie cu Ox (este orizontală) $\Leftrightarrow a = 0$;

* d are aceeaşi direcţie cu Oy (este verticală) $\Leftrightarrow b = 0$;

* d este oblică $\Leftrightarrow a \neq 0$ şi $b \neq 0$.

3. Dreptele $d : ax + by + c = 0$ şi $d' : a'x + b'y + c' = 0$ coincid dacă şi numai dacă există un număr real $\lambda \neq 0$ astfel încât

$$a' = \lambda a,\ b' = \lambda b,\ c' = \lambda c.$$

Exerciţii

1. Reprezentaţi grafic dreapta d, unde d are ecuaţia:
a) $x = 3$; b) $2x = 3$; c) $4y - 2 = 0$; d) $3y = -4$.

2. Determinaţi următoarele figuri geometrice:
$\mathscr{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy + x = 0\}$, $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - bx - ay + ab = 0\}$, unde a, b sunt numere reale date.

3. Fie mulţimile de puncte din plan $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - x - y + 1 = 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 2x - 2y + 4 = 0\}$, $C = [1, 2] \times [1, 2]$. Determinaţi figura geometrica $\mathscr{F} = (A \cup B) \cap C$.

4. Fie dreapta $d : 2x - y - 7 = 0$. Dintre punctele $A(1, -6)$, $B(2, -3)$, $C(-1, -9)$, $D(2, 1)$, $E(0, -7)$, $F(5, 3)$ şi $G(3, 4)$, aflaţi pe cele care aparţin dreptei d.

5. Fie dreapta $d : x + 2y - 4 = 0$. Găsiţi punctul de pe dreapta d care are abscisa: 1, 3, -2, 0.

6. Fie dreapta $d : 7x + 2y - 5 = 0$. Găsiţi punctul de pe dreapta d care are ordonata: 2, 1, 0, -3, 4.

7. Aflaţi valoarea parametrului $c \in \mathbb{R}$ pentru care dreapta de ecuaţie $2x - 3y + c = 0$ trece prin punctul $A(6, 3)$.

8. Determinaţi $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta $mx - 3y + n = 0$ să treacă prin punctele $A(-3, 5)$şi $B(4, -2)$.

9. Arătaţi că relaţia $(m + 2)x + (m^2 - 9)y + 3m^2 - 8m + 5 = 0$, $m \in \mathbb{R}$, este ecuaţia unei drepte d_m, pentru orice $m \in \mathbb{R}$. Determinaţi valorile lui m pentru care:
a) $d_m \parallel Ox$; b) $d_m \parallel Oy$; c) d_m trece prin origine.

10. Fie o dreaptă d şi două puncte $A, B \in d$. Calculaţi coordonatele indicate şi apoi reprezentaţi grafic dreapta d, unde:
a) $d : 7x - y + 4 = 0$, $A(2, y_A)$, $B(x_B, -4)$;
b) $d : 3x + 5y - 10 = 0$, $A(0, y_A)$, $B(x_B, -\frac{2}{5})$.

11. Arătaţi că dreptele d şi d' coincid, unde:
a) $d : 3x + 5y - 4 = 0$, $d' : 6x + 10y - 8 = 0$;
b) $d : x - y\sqrt{2} = 0$, $d' : x\sqrt{2} - 2y = 0$.

12. Determinaţi p şi q astfel încât ecuaţiile
$$(3 + p)x - 5y + 4 = 0, \quad 5x - (4 - q)y - 5 = 0$$
să reprezinte aceeaşi dreaptă.

13. Fie $m \in \mathbb{R}$. Pot coincide dreptele d şi d' având ecuaţiile:
a) $d : 2x - 3y + 1 = 0$, $d' : -4x + 5y + m = 0$;
b) $d : mx + y + m = 0$, $d' : x - my + 1 = 0$;
c) $d : 2x - 3y = 0$, $d' : x + my = 0$.

2. Ecuaţii carteziene particulare ale dreptei

2.1. Ecuaţia carteziană explicită a dreptei

1. Fie dreapta $d : Ax + By + C = 0$, unde $A \neq 0$ sau $B \neq 0$. Dacă $B \neq 0$, adică d nu are aceeaşi direcţie cu Oy, avem $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, de unde, dacă notăm $-\frac{A}{B} = m$, $-\frac{C}{B} = n$, obţinem ecuaţia $y = mx + n$.

2. Reciproc, m şi n fiind numere reale date, ecuaţia $y = mx + n$ este ecuaţia unei drepte care nu are aceeaşi direcţie cu Oy.

Într-adevăr, avem $y = mx + n \Leftrightarrow mx - y + n = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$, cu $a = m$, $b = -1$ şi $c = n$.

Conform teoremei ecuaţiei generale a dreptei (§1), rezultă că există o dreaptă care are ecuaţia $y = mx + n$. Cum $b \neq 0$, această dreaptă nu are aceeaşi direcţie cu Oy.

Definiţie. Vom spune că $y = mx + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$, este *ecuaţia carteziană explicită a dreptei în plan*.

Dacă dreapta d are ecuaţia $y = mx + n$, atunci:

* numărul m se numeşte *panta dreptei d* sau *coeficientul unghiular al dreptei d*;
* numărul n se numeşte *ordonata la origine a dreptei d*.

Observaţie. Numai dreptele care nu sunt verticale pot fi reprezentate printr-o ecuaţie explicită.

Exemple

* dreapta $d: 2x + 3y - 5 = 0$ are ecuaţia explicită $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$;
* dreapta $d: 2y + 10 = 0$ are ecuaţia explicită $y = -5$;
* dreapta $d: 2x - 7 = 0$ este verticală (este paralela cu Oy), deci nu are ecuaţie explicită;
* dreapta $d: y = -4x + 7$ are ecuaţia generală $4x + y - 7 = 0$.

Următoarea propoziţie ne arată că panta unei drepte care nu este verticală se poate calcula cunoscând două puncte ale dreptei.

Propoziţia 1. Dacă m este panta unei drepte care nu este verticală şi care trece prin punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, atunci

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.$$

Demonstraţie. Deoarece nu este verticală, dreapta $d = AB$ poate fi reprezentată de ecuaţia explicită $y = mx + n$. De asemenea, avem $x_A \neq x_B$.

Cum $A, B \in d$, avem $y_A = mx_A + n$, $y_B = mx_B + n$, deci

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{mx_A + n - mx_B - n}{x_A - x_B} = \frac{m(x_A - x_B)}{x_A - x_B} = m.$$

Observaţie. Panta dreptei d se notează m_d.

Exemple

Ne referim la punctele din fig. 5. Avem:

$$m_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{2-4}{2-3} = 2,$$

$$m_{PQ} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{4-2}{5-8} = -\frac{2}{3},$$

$$m_{RS} = \frac{y_R - y_S}{x_R - x_S} = \frac{0}{-2} = 0.$$

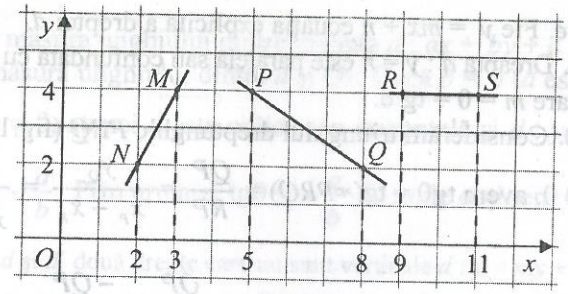


Fig. 5

Măsura unghiului dintre o dreaptă şi axa Ox

Fie d o dreaptă oarecare din plan.

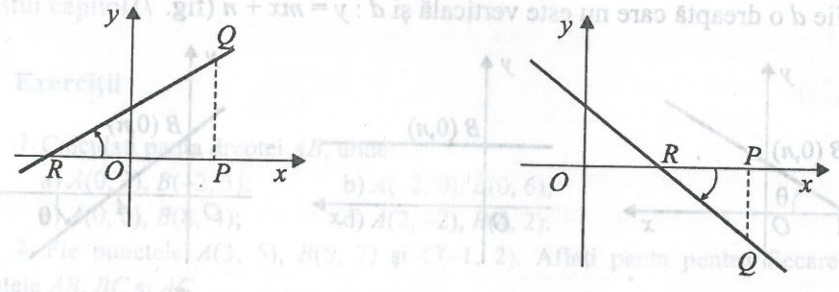


Fig. 6

Se numeşte *măsura unghiului dintre dreapta d şi axa Ox* şi se notează cu θ un număr real definit după cum urmează:

1. Dacă d este verticală, atunci $\theta = \frac{\pi}{2}$.
2. Dacă d este orizontală, atunci $\theta = 0$.
3. Dacă $d: y = mx + n$ este o dreaptă oblică (deci $m \neq 0$) considerăm unghiul $\sphericalangle PRQ$, unde: R este punctul $d \cap Ox$, deci $x_R = -\frac{n}{m}$, P este un punct pe Ox cu $x_P > x_R$, iar $Q \in d$ astfel încât $QP \perp Ox$, deci $x_Q = x_P$ şi $y_Q = mx_P + n$. Punctul Q se află „deasupra lui Ox" dacă $m > 0$ sau „sub axa Ox" dacă $m < 0$ (dacă $m > 0$, $y_Q = mx_Q + n = mx_P + n > 0$ deoarece $x_P > x_R = -\frac{n}{m}$).

În acest caz, θ se defineşte astfel:

* dacă $m > 0$, $\theta = m(\sphericalangle PRQ)$ şi $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$;
* dacă $m < 0$, $\theta = -m(\sphericalangle PRQ)$ şi $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Uneori vom spune că θ este unghiul dintre d şi Ox.

Propoziţia 2. Dacă m este panta unei drepte d care nu este verticală şi θ este măsura unghiului dintre d şi axa Ox, atunci $m = \operatorname{tg} \theta$.

Demonstrație. Fie $y = mx + n$ ecuația explicită a dreptei d.

Cazul $m = 0$. Dreapta $d : y = n$ este paralelă sau confundată cu Ox deci $\theta = 0$ și $\mathrm{tg}\theta = 0$, prin urmare $m = 0 = \mathrm{tg}\,\theta$.

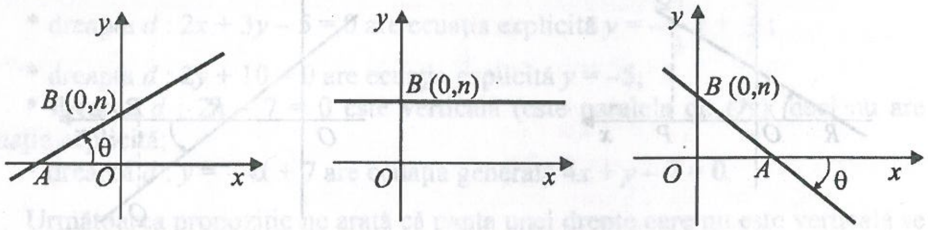
Cazul $m \neq 0$. Considerăm triunghiul dreptunghic PRQ (fig.10).

În cazul $m > 0$, avem $\mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}(\sphericalangle PRQ) = \dfrac{QP}{RP} = \dfrac{y_Q}{x_P - x_R} = \dfrac{mx_P + n}{x_P - (-\frac{n}{m})} = m$.

În cazul $m < 0$, avem $\mathrm{tg}\theta = -\mathrm{tg}(\sphericalangle PRQ) = -\dfrac{QP}{RP} = \dfrac{-QP}{RP} = \dfrac{y_Q}{x_P - x_R} = m$.

Semnificația geometrică a coeficienților ecuației explicite a dreptei

Fie d o dreaptă care nu este verticală și $d : y = mx + n$ (fig. 7).



$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ și $m = \mathrm{tg}\theta > 0$ $\quad$ $\theta = 0$ și $m = \mathrm{tg}\theta = 0$ $\quad$ $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ și $m = \mathrm{tg}\theta < 0$

Fig.7

Dreapta d intersectează axa Oy în punctul $B(0, n)$, iar $m = \mathrm{tg}\theta$ unde θ este măsura unghiului dintre d și axa Ox, deci:

* *panta* sau *coeficientul unghiular* m este tangenta trigonometrică a lui θ, unde θ este măsura unghiului dintre d și Ox.

* *ordonata la origine* n este ordonata punctului în care d intersectează axa Oy.

Exerciții rezolvate

E1. Fie punctul $A(x_0, y_0)$ și $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Scrieți ecuația dreptei d care face cu axa Ox un unghi de măsură θ și trece prin punctul A.

R: Deoarece $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, rezultă că d nu este verticală. Prin urmare, d are o ecuație de forma $y = mx + n$, unde $m = \mathrm{tg}\theta$, iar n se află din condiția $A \in d$, adică $y_0 = x_0\,\mathrm{tg}\theta + n$, deci

$$d : y = x\,\mathrm{tg}\theta + y_0 - x_0\,\mathrm{tg}\theta \quad \text{sau} \quad d : y - y_0 = \mathrm{tg}\theta(x - x_0).$$

De exemplu, ecuația dreptei care trece prin $A(1, 1)$ și face unghiul $-\frac{\pi}{4}$ cu axa Ox este $y = -x + 2$.

E2. Aflați măsura unghiului dintre dreapta $d : ax + by + c = 0$ și axa Ox.

R: Fie θ măsura unghiului dintre d și Ox. Dacă $b = 0$ (d este verticală) avem $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dacă $b \neq 0$, atunci d este oblică sau orizontală și $d : y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$, deci are panta $m_d = -\frac{a}{b}$. Prin urmare, $\mathrm{tg}\theta = -\frac{a}{b}$ de unde obținem $\theta = \mathrm{arctg}(-\frac{a}{b})$.

Observații. Fie d și d' două drepte care nu sunt verticale $d : y = mx + n$, $d' : y = m'x + n'$.

Folosind semnificația geometrică a pantei, rezultă:

* d și d' au aceeași direcție $\Leftrightarrow m = m'$

* d și d' sunt paralele $\Leftrightarrow m = m'$ și $d \neq d'$

Condiția de paralelism a două drepte va fi reluată în ultimul paragraf al acestui capitol.

Exerciții

1. Calculați panta dreptei AB, unde:

a) $A(0, 3)$, $B(-2, 3)$; b) $A(-2, 0)$, $B(0, 6)$;
c) $A(0, 0)$, $B(8, 4)$; d) $A(2, -2)$, $B(4, 2)$.

2. Fie punctele $A(3, 5)$, $B(5, 7)$ și $C(-1, 2)$. Aflați panta pentru fiecare dintre dreptele AB, BC și AC.

3. Aflați, dacă există, panta dreptei d, unde d are ecuația:

a) $9x + 3y - 1 = 0$; b) $x - 2y + 5 = 0$; c) $2x - 3y = 0$;
d) $x + 9 = 0$; e) $3y - 11 = 0$.

4. Scrieți ecuația dreptei care face unghiul α cu axa Ox și trece prin origine, dacă:

a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; c) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; d) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

5. Fie dreapta $d : 5x - 3y + 10 = 0$ și punctele $A(1, 3)$ și $M(a, a - 1)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea lui a astfel încât dreapta AM să fie paralelă cu dreapta d.

6. Fie dreapta $d : y = mx + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$. Care este poziția dreptei d în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $m = 1$ și $n \in (2, 3)$; b) $m = 2$ și $n \in \mathbb{Z}$;
c) $m \in (0, 1)$ și $n = 2$; d) $m \in (1, \sqrt{3})$ și $n = 2$.

7. Fie punctele $M(-4, 6)$, $N(1, 1)$ și $P(4, -2)$.

a) Calculați pantele dreptelor MN și NP.
b) Arătați că punctele M, N și P sunt coliniare.

2.2. Ecuația unei drepte care trece printr-un punct dat

Fie în plan un punct $A(x_A, y_A)$ și o dreaptă d care trece prin A. Dacă d este verticală, atunci are ecuația $d : x = x_A$. Dacă d nu este verticală, atunci scriem ecuația lui d sub formă explicită, anume $y = mx + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$. Cum $A \in d$, avem $y_A = mx_A + n$, deci $n = y_A - mx_A$. Astfel obținem $y = mx + y_A - mx_A$ sau $y - y_A = m(x - x_A)$.