готовимся к ЕГЭ

Б.И. Вольфсон,
Л.И. Резницкий

# ЕГЭ

# ГЕОМЕТРИЯ

## Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9: учимся решать задачи

ТМ
ЛЕГИОН

Учебные пособия издательства «Легион-М» допущены к использованию
в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 2 от 13.01.2011

Б. И. Вольфсон, Л. И. Резницкий

# ГЕОМЕТРИЯ

## Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9

## Учимся решать задачи

Учебное пособие

ТМ

ЛЕГИОН-М
Ростов-на-Дону
2011

ББК 22.1
В72

Рецензент:
*Поркшеян В. М.*, кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета «Информатика и вычислительная техника» ДГТУ.

**Вольфсон Б. И.**
В72 Геометрия. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9. Учимся решать задачи : учебное пособие / Б. И. Вольфсон, Л. И. Резницкий. — Ростов н/Д : Легион-М, 2011. — 224 с. — (Готовимся к ЕГЭ.)

ISBN 978-5-91724-080-0

Настоящее пособие предназначено для школьников и абитуриентов, которые готовятся к сдаче ЕГЭ по математике в 11 классе или прохождению государственной итоговой аттестации в 9 классе. Также оно будет полезно всем ученикам, которые **хотят научиться решать геометрические задачи**, учителям математики, преподавателям системы довузовской подготовки и студентам педагогических вузов.

В книге излагается технология, позволяющая структурировать и тем самым облегчить процесс решения геометрических задач, приводятся многочисленные примеры ее применения. Каждая из глав снабжена **справочным теоретическим материалом**, содержит **задачи для самостоятельного решения** с ответами и указаниями, а также анализ заданий ЕГЭ.

ББК 22.1

ISBN 978-5-91724-080-0

# Предисловие

Интерес школьников к учебной литературе определяется либо их увлеченностью изучаемым предметом, либо, что бывает чаще, пониманием той пользы, которую они смогут извлечь из чтения этой литературы. Наше пособие предназначено для обеих категорий читателей.

В первую очередь, оно пригодится выпускникам, которые готовятся к единому госэкзамену (ЕГЭ) в 11 классе или государственной итоговой аттестации (ГИА) в 9 классе. Из восемнадцати задач, входящих в контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по математике, пять — геометрические. С 2012 года подобные задачи включаются и в материалы ГИА-9. Тот, кто проработает все главы нашего пособия, повысит свои шансы на успешное решение этих задач.

Во всех разделах школьного курса математики содержатся не только теоретические сведения, но и методики, позволяющие ученику применять эти сведения для решения задач. Например, уравнение, содержащее различные тригонометрические функции, всегда можно свести к алгебраическому уравнению путем замены всех этих функций на тангенс половинного аргумента.

В геометрии такого универсального метода не существует. Вот почему решение геометрических задач порой вызывает серьезные затруднения даже у сильных учеников. Эта ситуация усугубляется в условиях экзаменационного стресса. Даже зная теорию, ученик порой просто не может сообразить, с чего начать решение задачи, пасуя перед громоздким и запутанным условием.

В настоящем пособии предлагается **технология**, позволяющая **структурировать решение задачи** и последовательно преодолевать возникающие в процессе решения трудности. Основные этапы работы сведены в памятку, знание и осмысленное применение которой позволит ученику успешно справиться с решением различных геометрических задач. Подобный подход уже был применен авторами [2, 11]. Отметим, что предложенная технология аналогична поэтапной сборке сложного изделия на конвейере. Например, подобная организация производства помогла Генри Форду стать автомобильным королем Америки [15]. Разделение процесса сборки на отдельные, достаточно простые операции сделало их выполнение доступным даже для начинающего работника и резко повысило производительность труда.

Одним из ключевых элементов предлагаемой технологии решения задач является формирование и использование учащимися базы знаний. *Базой знаний* мы называем сведения, которые уже имеются у решающего задачу. В процессе решения они могут пополняться из справочной литературы. Однако на экзамене или контрольной работе ученик сможет опереться только на те знания, которые он извлечет из своей памяти либо сумеет самостоятельно восстановить, опираясь на имеющуюся у него информацию.

Книга состоит из двух глав, первая из которых посвящена решению задач планиметрии, вторая — стереометрии. Эти главы можно изучать независимо друг от друга.

Для облегчения работы по формированию базы знаний, необходимых для решения задач, в **§ 1** приведены в сжатой форме основные теоретические сведения из планиметрии или стереометрии соответственно. За более подробной информацией следует обратиться к школьным учебникам и специализированным пособиям по геометрии [1, 3–6, 8, 9, 14, 16].

Описание этапов реализации предложенной в памятке технологической схемы, снабженное необходимыми примерами, дано в **§ 2**.

Полное решение типовых геометрических задач вы найдете в § 3 и § 4.

Задачи для самостоятельного решения помещены в § 5, их также можно найти в дополнительной литературе [7, 9, 12–14].

Тем читателям, которые интересуются общими принципами решения математических задач, мы рекомендуем обратиться к книге Д. Пойя [10].

Подчеркнем, что пособие пригодится не только начинающим или слабым ученикам, которые (особенно на первом этапе обучения) будут досконально выполнять описанную в нем технологическую схему, но и учащимся с достаточным уровнем знаний. Ведь не секрет, что бывают задачи, ход решения которых сразу не виден. И тогда, шаг за шагом применяя предложенную методику, можно существенно облегчить поиск решения задачи. Математическое творчество при этом не отменяется, а переводится на новый качественный уровень, что способствует более глубокому проникновению в математику и развитию подлинно свободной мысли.

Отметим, что предложенная технология решения геометрических задач носит достаточно общий характер. Она оказывает положительное влияние на формирование умственной культуры учащихся. Технология может быть успешно применена при решении широкого круга задач из всех разделов математики и других учебных дисциплин.

Настоящее пособие предназначено для школьников и абитуриентов, которые хотят самостоятельно научиться решать геометрические задачи. Оно также будет полезно школьным учителям и преподавателям системы довузовской подготовки в работе с различными группами учащихся, так как теоретический материал и задания для практических занятий структурированы в соответствии с уровнем их сложности. Как показывает опыт апробации пособия в школах г. Ростова-на-Дону, оно может стать полезным дополнением к школьным учебникам при изучении планиметрии в 7–9 классах, стереометрии в 10–11 классах и повторении курса геометрии в процессе подготовки к экзаменам.

Учиться никогда не поздно. Однако чем раньше вы начнете это делать, тем лучших результатов достигнете. Желаем вам успеха!

*Авторы выражают благодарность Фофонову Алексею Евгеньевичу за внимательное прочтение, рецензирование учебного пособия и ценные рекомендации по его доработке.*

# Глава 1 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПЛАНИМЕТРИИ

## § 1. Основные теоретические сведения, необходимые для решения задач планиметрии

В этом параграфе вы сможете найти определения, формулировки теорем и формулы, которые пригодятся вам при решении задач, встречающихся в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ и вступительных экзаменах по математике в те вузы, где они сохранились.

Фундамент любой математической дисциплины составляют набор основных (неопределяемых) понятий и система аксиом, описывающая свойства этих понятий.

**Основные (неопределяемые) понятия геометрии:**

*точка, прямая, плоскость.* К числу основных следует также отнести общее для всей математики понятие множества.

**Основное (неопределяемое) отношение:** *лежать между.*

Мы не приводим систему аксиом, в которой описываются (без доказательства) свойства основных понятий. Познакомиться с ней можно в школьных учебниках и специальных книгах по геометрии ([3–5, 16]).

Новые (производные) понятия геометрии (например, треугольник, шар, многогранник и др.) вводятся с помощью основных понятий и ранее введенных производных понятий.

Их свойства устанавливаются с помощью теорем (утверждений, которые подлежат доказательству путем логических рассуждений).

## Луч

Если на прямой $a$ выбрать некоторую точку $O$, то множество всех точек, принадлежащих прямой $a$, распадется на два подмножества, каждое из которых обладает следующими свойствами:

— если точки $A$ и $B$ принадлежат одному и тому же подмножеству, то одна из них лежит между второй точкой и точкой $O$ (см. рис. 1.1а);

— если точки $A$ и $B$ принадлежат разным подмножествам, то точка $O$ лежит между ними (см. рис. 1.1б).

Каждое из таких подмножеств, объединенное с точкой $O$, называется *лучом*. Точка $O$ называется началом каждого из этих лучей.

Луч с началом в точке $O$ и принадлежащей ему произвольной точкой $M$, отличной от точки $O$, обозначают $OM$ (см. рис. 1.1в).

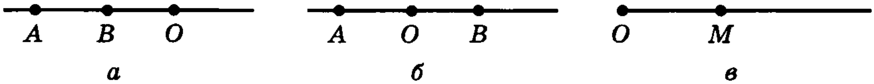


Рис. 1.1

## Отрезки

*Отрезком* $AB$ называется множество точек, состоящее из точек $A$ и $B$ и всех точек, лежащих между ними. (В школьных учебниках дается менее строгое определение: отрезком $AB$ называется часть прямой, ограниченная точками $A$ и $B$.) Точки $A$ и $B$ называются концами отрезка $AB$.

Длиной отрезка $AB$ называется расстояние между его концами. В качестве единицы измерения длины отрезка выбирается длина некоторого отрезка, который называется единичным, или масштабным отрезком. Тогда длина отрезка $AB$ может быть всякий раз выражена положительным числом. Если концы отрезка $A$ и $B$ совпадают, то его длина равна нулю. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые отрезок разбивается любой принадлежащей ему точкой.

Точка, делящая данный отрезок на два равных отрезка, называется серединой отрезка. На рис. 1.2 изображен отрезок $AB$; точка $M$ — середина этого отрезка.


Рис. 1.2

## Ломаная линия

*Ломаная линия* — это геометрическая фигура, состоящая из двух или большего количества отрезков, таких, что конец каждого из них (кроме, может быть, последнего) является началом следующего; причем никакие два смежных отрезка не лежат на одной прямой. Если конец последнего и начало первого отрезков совпадают, то ломаная линия называется замкнутой. Отрезки, образующие ломаную, называются её *звеньями*; общие концы двух смежных звеньев — *вершинами* ломаной. Ломаная, несмежные звенья которой не имеют общих точек, называется простой.

На рис. 1.3а изображена незамкнутая ломаная $ABCDEF$; на рис. 1.3б — простая замкнутая ломаная $ABCDE$.

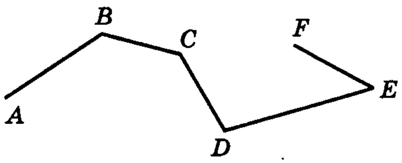


Рис. 1.3а

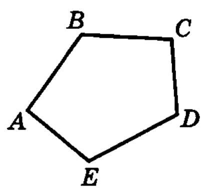


Рис. 1.3б

## Углы

*Углом* называется геометрическая фигура, образованная двумя лучами, имеющими общее начало. На рис. 1.4 изображен угол $ABC$, образованный двумя лучами $BA$ и $BC$, имеющими начало в точке $B$. Точка $B$ называется вершиной угла, а лучи $BA$ и $BC$ — его сторонами. Отметим, что при обозначении этого угла тремя буквами вершина угла $B$ непременно записывается в середине, например $\angle ABC$ или $\angle CBA$. Неверным для угла с вершиной $B$ является обозначение $\angle ACB$. Иногда угол обозначают одной буквой, соответствующей наименованию его вершины: $\angle B$.

*Биссектриса угла* — это луч, исходящий из вершины данного угла и делящий его на два равных угла. Биссектриса есть множество точек, равноудаленных от сторон угла. На рис. 1.5 луч $BD$ — биссектриса угла $ABC$.

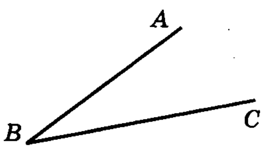


Рис. 1.4

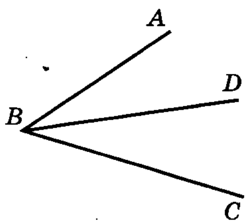


Рис. 1.5

*Развернутый угол* — это угол, стороны которого образуют прямую линию.

*Нулевой угол* — это угол, стороны которого совпадают.

*Прямой угол* — это угол, равный половине развернутого угла.

*Острый угол* — это угол, который больше нулевого, но меньше прямого угла.

*Тупой угол* — это угол, который больше прямого, но меньше развернутого угла.

В качестве единицы измерения угла принимается градус ($1°$) — угол, равный $1/180$ части развернутого угла. Очевидно, что развернутый угол равен 180°, прямой угол равен 90°, острый угол больше 0° и меньше 90°, тупой угол больше 90° и меньше 180°. Более мелкими, чем градус, единицами измерения углов являются 1 минута (1′) и одна секунда (1″): 1′ равняется 1/60 части 1°; 1″ равняется 1/60 части 1′ (1′ = 60″; 1° = 60′ = 3600″).

Углы можно также измерять в радианах. Одним радианом называется центральный угол окружности, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу этой окружности. Соотношение градусной ($n°$) и радианной ($\alpha$) мер углов задается формулой: $n° = (\alpha \cdot 180°)/\pi$.

Две прямые $AB$ и $CD$, пересекающиеся под прямым углом, называются взаимно перпендикулярными (см. рис. 1.6). Обозначение: $AB \perp CD$.

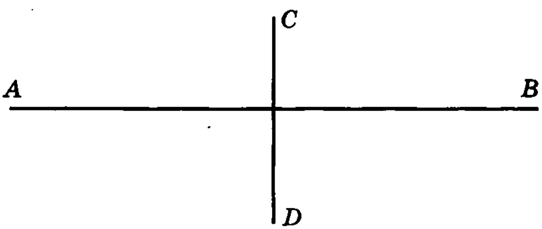


Рис. 1.6

Прямая, пересекающая отрезок под прямым углом и проходящая через середину этого отрезка, называется серединным перпендикуляром к отрезку. Серединный перпендикуляр есть множество точек, равноудаленных от концов отрезка.

Если даны прямая $a$ и точка $M$, не лежащая на этой прямой, то отрезок $MN$ называется *перпендикуляром, опущенным из точки $M$ на прямую $a$*, если $N \in a$, $MN \perp a$ (см. рис. 1.7, с. 12). Точка $N$ называется *основанием перпендикуляра*.

Справедливо утверждение, что из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к данной прямой, и притом только один.

Длина перпендикуляра $MN$ называется *расстоянием от точки $M$ до прямой $a$*. Расстояние от точки $M$ до любой

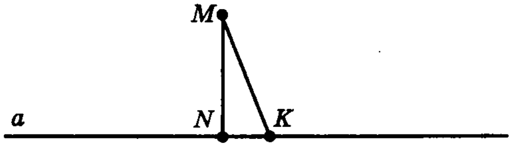


Рис. 1.7

другой точки $K$, лежащей на прямой $a$, больше, чем длина перпендикуляра $MN$.

Два угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие дополняют друг друга до прямой линии. Сумма смежных углов равна 180°.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны между собой.

На рис. 1.8 пересекающиеся прямые $AB$ и $CD$ образуют 4 пары смежных углов: $\angle AOC$ и $\angle COB$; $\angle COB$ и $\angle DOB$; $\angle DOB$ и $\angle DOA$; $\angle DOA$ и $\angle AOC$. Эти же прямые образуют две пары вертикальных углов: $\angle AOC$ и $\angle DOB$; $\angle COB$ и $\angle DOA$.

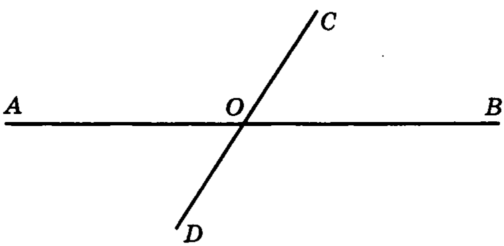


Рис. 1.8

## Равенство геометрических фигур

Две геометрические фигуры называются *равными*, если их можно совместить наложением.

При решении задач для выяснения того, равны ли данные геометрические фигуры, например треугольники, используют не само определение, а теоремы, называемые *признаками равенства*.

## Многоугольники

Простая замкнутая ломаная называется *многоугольником*. Вершины ломаной называются *вершинами многоугольника*, а ее звенья — *сторонами многоугольника*. Если количество вершин и соответственно сторон многоугольника равно $n$, то его называют $n$-угольником.

На рис. 1.9 — 1.11 изображены треугольник $ABC$, четырехугольник $ABCD$, шестиугольник $ABCDEF$.

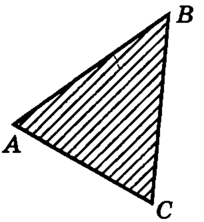


Рис. 1.9

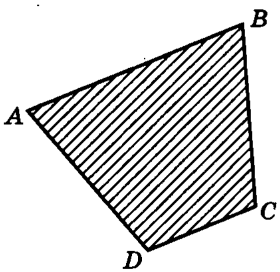


Рис. 1.10

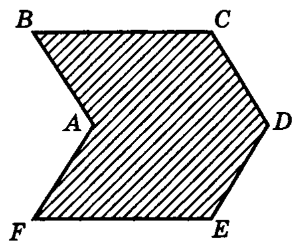


Рис. 1.11

Всякий многоугольник разбивает множество точек плоскости на два подмножества, называемых его *внутренней* и *внешней областями*. Любые две точки каждой из этих областей можно соединить отрезком или ломаной, не пересекающей стороны данного многоугольника. Для внешней области многоугольника можно указать прямую, целиком принадлежащую этой области. Для внутренней области такой прямой нет. Многоугольник вместе с его внутренней областью также называется многоугольником. На рисунках 1.9–1.11 внутренние области многоугольников заштрихованы.

Многоугольник называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий любые две точки, принадлежащие внутренней области многоугольника, целиком принадлежит этой области. Аналогичным образом определяется любая выпуклая плоская фигура. Многоугольники, изображенные на рис. 1.9 и рис. 1.10, являются выпуклыми. На рис. 1.11 изображен невыпуклый многоугольник.

Сумма внутренних углов выпуклого $n$-угольника равна $180° \cdot (n-2)$.

***Внешним углом*** выпуклого $n$-угольника называется угол, смежный с его внутренним углом.

Если от каждой из вершин выпуклого $n$-угольника продолжить только одну из его сторон, то сумма всех образованных таким образом внешних углов равна 360°.

Выпуклый многоугольник называется правильным, если равны все его стороны и все его углы.

Величина внутреннего угла правильного $n$-угольника равна $\dfrac{180°(n-2)}{n}$.

Величина внутреннего угла правильного треугольника равна 60°.

Правильный четырехугольник — это квадрат. Все его углы равны 90°.

## Треугольники

Всякий треугольник является выпуклым многоугольником.

Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. На рис. 1.12 $\angle BCD$ — внешний угол треугольника $ABC$, $\angle BCD = \angle BAC + \angle ABC$.

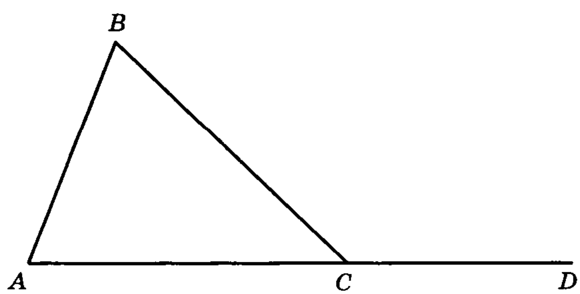


Рис. 1.12

## Неравенство треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Пусть $a$, $b$, $c$ — длины сторон треугольника.

Тогда $a + b > c$; $a + c > b$; $c + b > a$.

В задачах упоминаются следующие виды треугольников:

- прямоугольный треугольник, в котором один из углов прямой;
- косоугольный треугольник, который не содержит ни одного прямого угла;
- остроугольный треугольник, в котором все углы острые;
- тупоугольный треугольник, в котором один из углов тупой.

## Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам).

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (признак равенства треугольников по трем сторонам).

*Медиана треугольника* — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой его противоположной стороны.

*Биссектриса треугольника* — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой его противоположной стороны и делящий угол треугольника пополам.

*Высота треугольника* — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на его противоположную сторону или ее продолжение.

Высóты треугольника пересекаются в одной точке.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром описанной около треугольника окружности.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной в треугольник окружности.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

На рис. 1.13 отрезок $BD$ — биссектриса треугольника $ABC$. Тогда $AD : AB = DC : CB$.

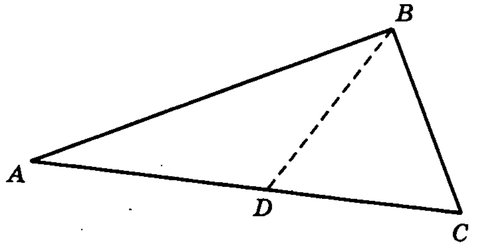


Рис. 1.13

*Средняя линия треугольника* — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Средняя линия параллельна третьей стороне треугольника и равна половине ее длины. На рис. 1.14 отрезок $MN$ — средняя линия треугольника $ABC$: $MN \parallel AC, MN = \frac{1}{2}AC$.

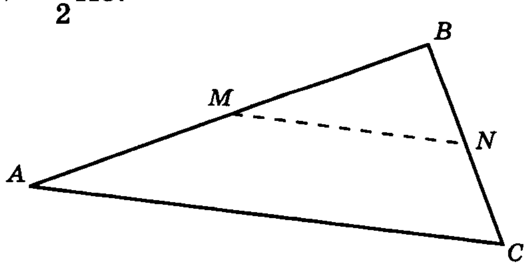


Рис. 1.14

## Равнобедренный треугольник

Треугольник $ABC$ называется равнобедренным, если две его стороны равны между собой. Общая вершина равных сторон называется вершиной равнобедренного треугольника. Сторона, противолежащая вершине, называется его основанием.

**Свойства равнобедренного треугольника:**

Углы при основании равнобедренного треугольника равны, а биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

**Справедливы и обратные теоремы:**

Треугольник является равнобедренным, если в нем совпадают медиана и высота, или медиана и биссектриса, или высота и биссектриса, или углы при одной из сторон равны.

На рис. 1.15 изображен равнобедренный треугольник $ABC$, в котором $AB = BC$. Тогда $\angle BAC = \angle BCA$.

Если $AM = MC$, то $\angle ABM = \angle MBC$, $BM \perp AC$.

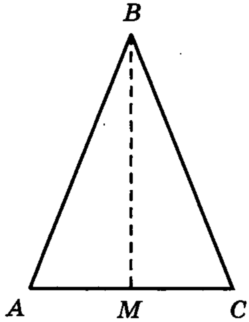

Рис. 1.15

## Равносторонний треугольник

Треугольник $ABC$ называется равносторонним, или правильным, если все его стороны равны: $AB = BC = CA$. В равностороннем треугольнике все углы равны 60°. Каждая из медиан равностороннего треугольника одновременно является биссектрисой и высотой. Точка пересечения медиан является одновременно центром вписанной и центром описанной окружностей.

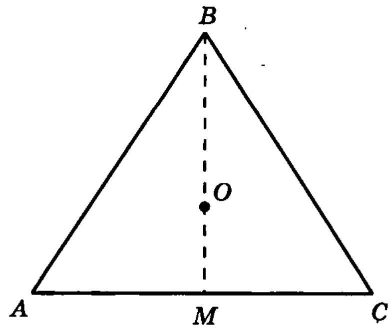

Рис. 1.16

Пусть $\Delta ABC$, изображенный на рис. 1.16, — равносторонний треугольник, $BM$ — медиана этого треугольника, $O$ — точка пересечения медиан. Если $AB =$ $= BC = CA = a$, то $BM \perp AC$, $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; радиус описанной окружности $R = OB = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; радиус вписанной окружности $r = OM = \frac{1}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

## Прямоугольный треугольник

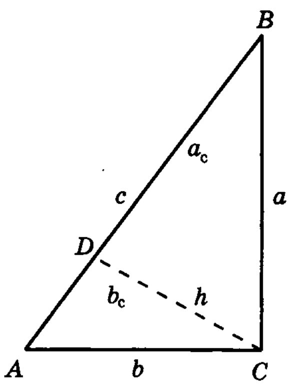


Рис. 1.17

Рассмотрим прямоугольный треугольник $ABC$, в котором $\angle C = 90°$ (рис. 1.17). Стороны $CA$ и $CB$, образующие прямой угол, называются *катетами*, а сторона $AB$ — *гипотенузой* прямоугольного треугольника. Сумма острых углов прямоугольного треугольника $\angle A + \angle B = 90°$.

Пусть $CB = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Тогда $a/c = \sin\alpha = \cos\beta$;
$b/c = \sin\beta = \cos\alpha$;
$a/b = \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta$;
$b/a = \mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{ctg}\,\alpha$.

Из этих формул получаем к примеру:
$a = c \cdot \sin\alpha$; $c = a : \sin\alpha$; $b = c \cdot \cos\alpha$; $a = b \cdot \mathrm{ctg}\,\beta$ и т. п.

Проведем $CD \perp AB$ ($CD$ — высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу; $AD$, $DB$ — проекции катетов на гипотенузу). Пусть $CD = h$, $AD = b_c$, $DB = a_c$. Тогда можно сформулировать **теорему о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике:**

1. Высота $h$ равна среднему геометрическому (среднему пропорциональному) проекций катетов на гипотенузу: $h^2 = a_c \cdot b_c$.

2. Каждый из катетов равен среднему геометрическому (среднему пропорциональному) гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу:

$$a^2 = a_c \cdot c; \quad b^2 = b_c \cdot c.$$

Следствия:

1) $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора);

2) $a_c : b_c = a^2 : b^2$.

## Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. По двум катетам.
2. По катету и гипотенузе.
3. По катету и острому углу, прилежащему к этому катету.
4. По гипотенузе и острому углу.

## Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

Здесь $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы, лежащие против сторон $a$, $b$, $c$ соответственно.

$S$ — площадь треугольника $ABC$, $R$ — радиус описанной окружности.

## Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

## Параллельные прямые

Две прямые $a$ и $b$, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, называются *параллельными*. Обозначение: $a \parallel b$.

### Аксиома параллельных прямых

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.

### Следствия из аксиомы параллельных прямых

1. Если прямая пересекают одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.

2. Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны.

Рассмотрим на плоскости две прямые $a$ и $b$, пересеченные секущей $c$, и пронумеруем образованные при этом углы (рис. 1.18).

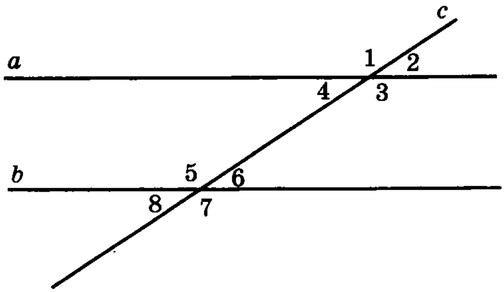


Рис. 1.18

Напомним названия пар углов:

$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$, $\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$ — накрест лежащие углы;

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$ — соответственные углы;

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ — односторонние углы.

### Признаки параллельности двух прямых

1. Если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

2. Если соответственные углы равны, то прямые параллельны.

3. Если сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

**Справедливы и обратные теоремы:**

Если прямые параллельны, то накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны, сумма односторонних углов равна 180°.

### Подобие треугольников

Треугольники называются *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого. Обозначение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Коэффициент пропорциональности сходственных сторон подобных треугольников k называется *коэффициентом подобия*.

### Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.

2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.

### Теорема Фалеса

Пусть прямые $a$ и $b$ лежат в одной плоскости. На прямой $a$ отметим точки $A$, $B$, $C$, так, чтобы $AB = BC$. Проведем через точки $A$, $B$ и $C$ параллельные между собой прямые, пересекающие прямую $b$ в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$. Тогда получим, что $A_1B_1 = B_1C_1$ (рис. 1.19).

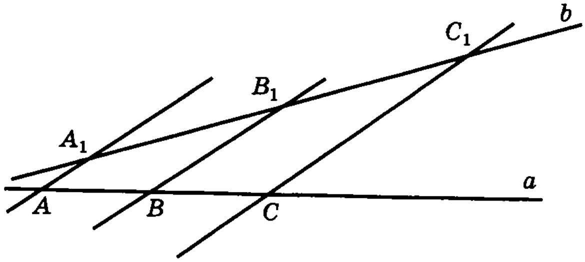


Рис. 1.19

Очевидно, что если на прямой $a$ последовательно отложены $n$ равных между собой отрезков и через их концы проведены параллельные между собой прямые, пересекающих прямую $b$, то на прямой $b$ также получатся $n$ равных между собой отрезков.

Теорема Фалеса дает инструмент деления данного отрезка $AB$ на $n$ равных частей. Для этого необходимо выполнить следующие операции:

— построить луч, начало которого будет совпадать с одним из концов отрезка, например, с точкой $A$;

— отметить на этом луче точки $A_1, A_2, ..., A_n$, такие, что

$$AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}\,A_n;$$

— соединить точку $A_n$ с точкой $B$ и провести через точки $A_1$, $A_2$, ..., $A_{n-1}$ прямые, параллельные $A_nB$; эти прямые пересекут отрезок $AB$ в точках $B_1$, $B_2$, ..., $B_{n-1}$.

В силу теоремы Фалеса, отрезок $AB$ будет разбит на $n$ равных частей $AB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B$.

На рис. 1.20 показан отрезок $AB$, разделенный на 3 равные части. По построению, $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, точка $A_3$ соединена с точкой $B$, через точки $A_1$ и $A_2$ проведены прямые $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B$. Тогда $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$, то есть отрезок $AB$ разделен на три равные части.

Может быть также сформулирована «модифицированная теорема Фалеса», или, как ее иначе называют, теорема о пропорциональных отрезках (рис. 1.21):

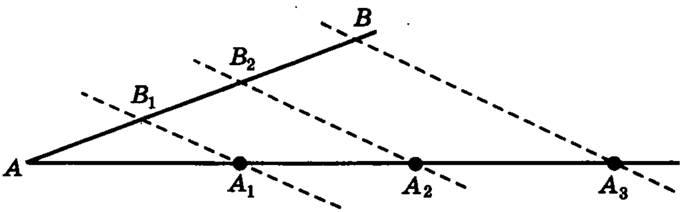


Рис. 1.20

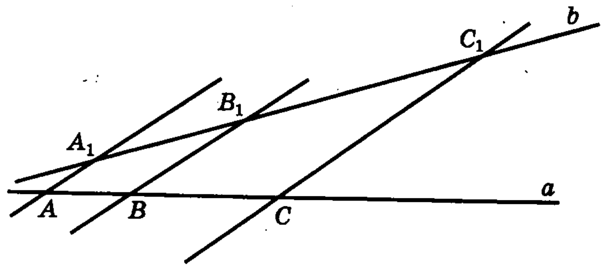


Рис. 1.21

Пусть $AB : BC = m : n$. Проведем $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$.
Тогда $A_1B_1 : B_1C_1 = m : n$.

Следствием из модифицированной теоремы Фалеса является следующее утверждение:

Если через точку $M$, лежащую на стороне $AB$ треугольника $ABC$, провести прямую $MN$, параллельную стороне $AC$, то эта прямая пересечет сторону $BC$ в такой точке $N$, что $BM : MA = BN : NC$ (рис. 1.22).

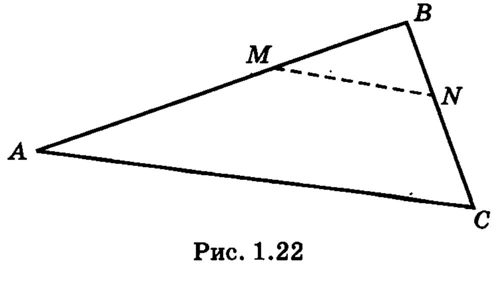


Рис. 1.22

## Параллелограмм

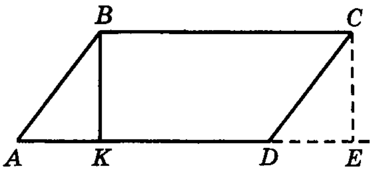


Рис. 1.23

*Параллелограммом* называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. *Высотой* параллелограмма называется перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на его противоположную сторону или ее продолжение.

На рис. 1.23 изображен параллелограмм $ABCD$, в котором $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$. $BK$ и $CE$ — высоты параллелограмма, $BK \perp AD$ и $CE \perp AD$.

### Свойства параллелограмма

Если четырехугольник является параллелограммом, то:

1) его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
2) его противоположные стороны попарно равны;
3) его противоположные углы попарно равны;
4) его сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°;
5) каждая диагональ разбивает его на два равных треугольника;
6) сумма квадратов его диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

### Признаки параллелограмма

Четырехугольник является параллелограммом, если:

1) две его противоположные стороны равны и параллельны;
2) его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
3) его противоположные стороны попарно равны;
4) его противоположные углы попарно равны.

## Прямоугольник

*Прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, диагонали прямоугольника равны (свойство прямоугольника). Верно и обратное: если у параллелограмма диагонали равны, то он является прямоугольником (признак прямоугольника).

## Ромб

*Ромбом* называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, ромб обладает следующими свойствами:

1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
2. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

Справедливы и обратные утверждения — признаки ромба:

Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны или являются биссектрисами его углов, то такой параллелограмм является ромбом.

## Квадрат

*Квадратом* называется ромб, у которого все углы прямые, либо прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника.

## Трапеция

*Трапецией* называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а непараллельные — *боковыми сторонами*. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется ее *средней линией*. На рис. 1.24 изображена трапеция $ABCD$, с основаниями $BC$ и $AD$, боковыми сторонами $AB$ и $CD$, высотой $BE$ ($BE \perp AD$) и средней линией $MN$. Трапеция обладает следующими свойствами:

1. Ее средняя линия параллельна основаниям: $MN \parallel AD \parallel BC$.
2. Длина средней линии равна полусумме длин оснований:

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

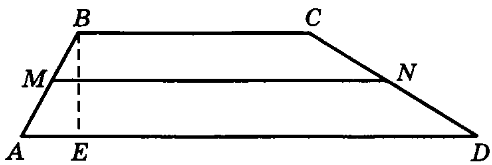


Рис. 1.24

Если боковые стороны трапеции равны, то трапеция называется равнобедренной, или равнобочной (на рис. 1.25 $AB = CD$). Если одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям, то трапеция называется прямоугольной (на рис. 1.26 $AB \perp AD$, $AB \perp BC$).

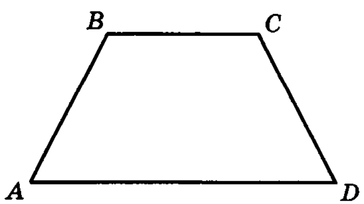


Рис. 1.25

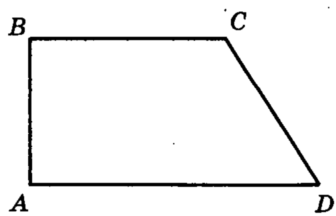


Рис. 1.26

## Окружность и круг

*Окружностью* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки, называемой центром окружности.

Отрезок, соединяющий любую точку окружности с ее центром, называется *радиусом* окружности. В задачах радиусом также обычно называют длину этого отрезка. Отрезок, концы которого лежат на окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром*.

Любые две точки окружности делят ее на две части. Каждая из этих частей называется *дугой* окружности.

На рис. 1.27 изображена окружность с центром в точке $O$. $AB$ — диаметр этой окружности, $OA$ и $OB$ — радиусы, $CD$ — хорда.

Точки $M$ и $N$ на рис. 1.28 делят окружность на две дуги. Чтобы различить эти дуги, на них указываются промежуточные точки $P$ и $K$. Обозначение дуг: $\smile MKN$ и $\smile MPN$.

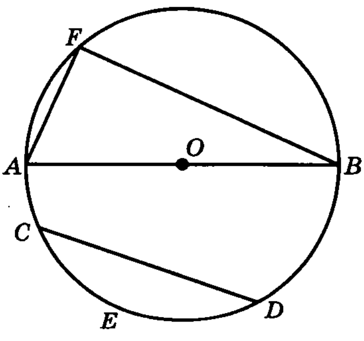


Рис. 1.27

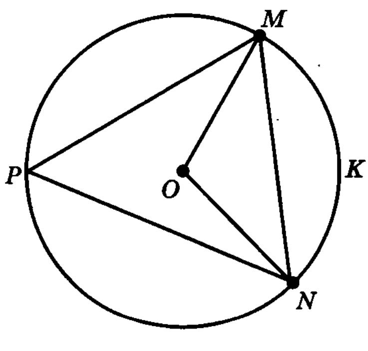


Рис. 1.28

Угол, вершина которого совпадает с центром окружности, называется *центральным углом* данной окружности. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным углом*. На рис. 1.28 угол $MON$ является центральным углом, а угол $MPN$ — вписанным.

Оба эти угла опираются на дугу $MKN$. Градусная или радианная мера дуги $MKN$ считается равной соответствующей мере центрального угла $MON$, опирающегося на эту дугу. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Так, если дуга $MKN$ составляет $\alpha$ градусов, то угол $MON$ также составляет $\alpha$ градусов, а угол $MPN$ — $\alpha/2$ градусов. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. Дуга, равная полуокружности, соответствует развернутому углу и равна $180°$, поэтому любой вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым. На рис. 1.27 угол $AFB$ равен $90°$, так как это вписанный угол, опирающийся на диаметр $AB$.

*Касательной* к окружности называется прямая, имеющая с этой окружностью только одну общую точку. Эта точка называется точкой касания.

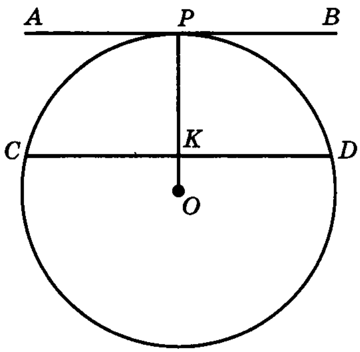


Рис. 1.29

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. На рис. 1.29 $AB$ — касательная, $OP$ — радиус, проведенный в точку касания $P$, $OP \perp AB$. Хорда $CD$, перпендикулярная к радиусу $OP$, делится точкой пересечения с радиусом на две равные части ($CK = KD$).

Из точки, лежащей вне окружности, можно провести к этой окружности две касательные. Отрезки касательных от данной точки до точек касания равны. Центр окружности лежит на биссектрисе угла, образованного касательными. На рис. 1.30 $AB$ и $AC$ — касательные, $O$ — центр окружности. Тогда $AB = AC$, $AO$ — биссектриса угла $BAC$.

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

На рис. 1.31 хорды $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $M$.

Тогда $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

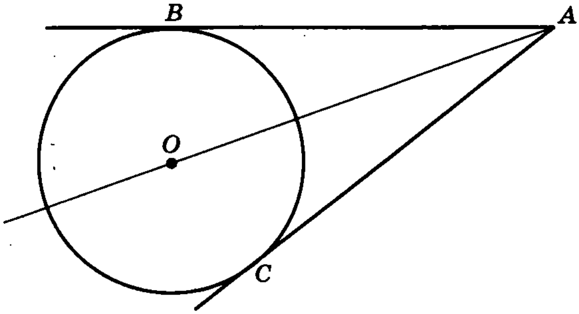


Рис. 1.30

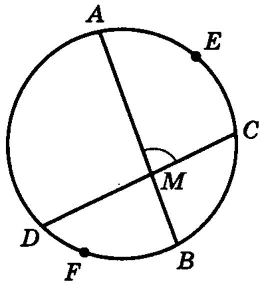


Рис. 1.31

Имеет место также следующее свойство:

$$\angle AMC = \frac{1}{2}\,(\smile AEC + \smile DFB).$$

Угол между касательной и хордой, один из концов которой совпадает с точкой касания, равен половине дуги, которую стягивает эта хорда. На рис. 1.32 $AB$ — касательная, $PQ$ — хорда, $\smile PTQ = \alpha$. Тогда $\angle APQ = \alpha/2$.

Пусть точка $A$ лежит вне окружности и из этой точки проведены к окружности касательная $AB$ и секущие $AD$ и $AN$; отрезки $AC$ и $AM$ называются внешними частями секущих (рис. 1.33). Пусть заданы градусные или радианные меры дуг: $\smile NTD = \alpha$; $\smile MKC = \beta$; $\smile DQB = \varphi$; $\smile BKC = \gamma$.

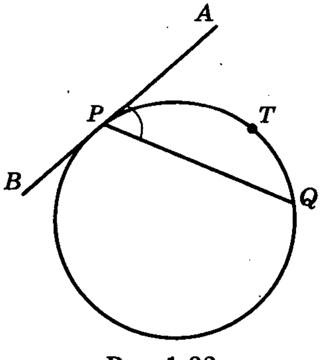


Рис. 1.32

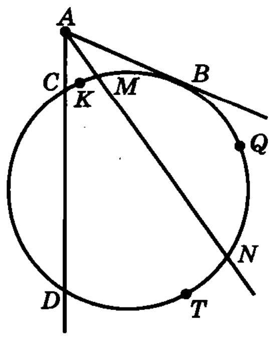


Рис. 1.33

Тогда выполняются следующие соотношения:

1. $AB^2 = AC \cdot AD = AM \cdot AN;$

2. $\angle NAD = \dfrac{1}{2}(\alpha - \beta);$

3. $\angle BAD = \dfrac{1}{2}(\varphi - \gamma).$

## Свойство описанного четырехугольника

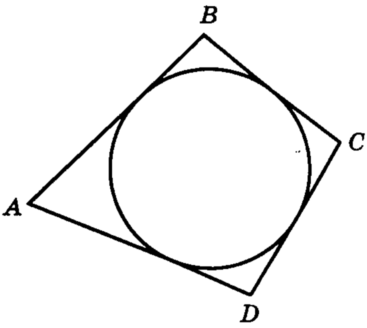


Рис. 1.34

Суммы противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны.

На рис. 1.34 четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Тогда $AB + CD = BC + AD$.

Справедливо и обратное утверждение: если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

## Свойство вписанного четырехугольника

Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна 180°.

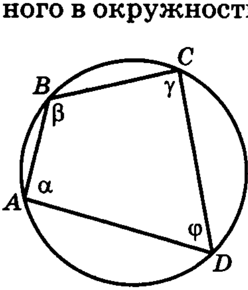


Рис. 1.35

На рис. 1.35 четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть углы этого четырехугольника равны $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\varphi$.

Тогда $\alpha + \gamma = \beta + \varphi = 180°$.

Справедливо и обратное утверждение: если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

## Круг, круговой сектор и круговой сегмент

*Кругом* называется часть плоскости, состоящая из окружности и ее внутренней области. Можно также сказать, что круг с центром $O$ и радиусом $R$ — это множество точек плоскости, расстояние от которых до точки $O$ не превышает $R$.

*Круговым сектором*, или просто *сектором*, называется часть круга, ограниченная дугой и центральным углом, опирающимся на эту дугу. На рис. 1.36 дуга $AMB$ и радиусы $OA$ и $OB$ ограничивают круговой сектор. Другой круговой сектор ограничен этими же радиусами и дугой $ANB$.

Пересечение круга и полуплоскости называется *круговым сегментом*. Очевидно, что всякая хорда делит круг на два сегмента. На рис. 1.37 хорда $PQ$ и дуга $PTQ$ ограничивают круговой сегмент, эта же хорда и дуга $PNQ$ ограничивают второй сегмент.

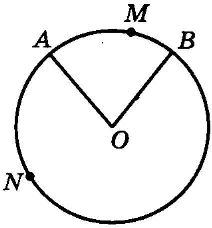

Рис. 1.36

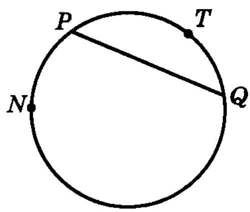

Рис. 1.37

Длина окружности: $L = 2\pi R$.

Длина дуги, равной $\alpha$ радиан: $l = \alpha R$.

Длина дуги, равной $\alpha°$: $l = \dfrac{\alpha° \cdot \pi}{180°} R$. $R$ — радиус окружности.

## Понятие площади

*Площадью* называется числовая характеристика плоских геометрических фигур определенного класса (например, многоугольников, кругов и т. п.).

Площадь геометрической фигуры обладает следующими свойствами:

- Площадь — величина неотрицательная.
- Равные фигуры имеют равные площади.
- Если фигура Ф составлена из фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, не имеющих общих внутренних точек, то площадь фигуры Ф равна сумме площадей фигур $Ф_1$ и $Ф_2$.
- Если фигура $Ф_1$ подобна фигуре $Ф_2$ с коэффициентом подобия $k$, то отношение площадей этих фигур равно $k^2$.

В качестве единицы измерения площади выбирается площадь квадрата со стороной, равной единице измерения длины, например, 1 $м^2$ или 1 $см^2$.

### Формулы для вычисления площадей некоторых геометрических фигур

1. Площадь квадрата со стороной $a$: $S = a^2$.
2. Площадь прямоугольника со сторонами $a$ и $b$: $S = a \cdot b$.
3. Площадь треугольника:

а) $S = \frac{1}{2} a \cdot h$; б) $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$;

в) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона);

г) $S = p \cdot r_в$; д) $S = \frac{abc}{4R_о}$.

Здесь $a, b, c$ — длины сторон треугольника; $h$ — высота, опущенная на сторону $a$; $\gamma$ — угол между сторонами $a$ и $b$; $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника; $r_в$ — радиус вписанной окружности; $R_о$ — радиус описанной окружности.

4. Площадь прямоугольного треугольника с катетами $a$ и $b$:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b.$$

5. Площадь равностороннего треугольника со стороной $a$:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

6. Площадь параллелограмма:

а) $S=a\cdot h$; б) $S=a\cdot b\cdot\sin\gamma$; в) $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi$,

где $a$ и $b$ — длины сторон параллелограмма; $h$ — высота, опущенная на сторону $a$; $\gamma$ — угол между сторонами $a$ и $b$; $d_1$ и $d_2$ — длины диагоналей, $\varphi$ — угол между диагоналями (рис. 1.38; рис. 1.39).

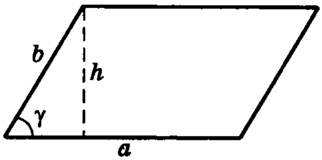


Рис. 1.38

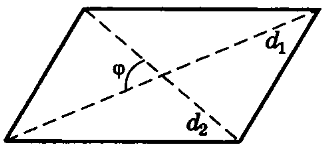


Рис. 1.39

7. Площадь ромба:

а) $S=a\cdot h$; б) $S=a^2\sin\gamma$; в) $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$,

где $a$ — длина стороны ромба; $h$ — высота, опущенная на сторону $a$; $\gamma$ — угол между сторонами ромба; $d_1$ и $d_2$ — длины диагоналей (учитываем, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны).

8. Площадь трапеции с основаниями $a$ и $b$ и высотой $h$ (рис. 1.40):

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

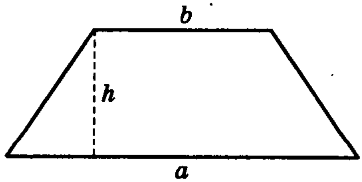


Рис. 1.40

9. Площадь правильного $n$-угольника:

а) $S=p\cdot r=\frac{1}{2}a_n\cdot n\cdot r$; б) $S=\frac{1}{2}R^2\cdot n\cdot\sin\frac{360°}{n}$, где $a_n$ — длина стороны правильного $n$-угольника; $p$ — его полупериметр; $r$ — радиус вписанной окружности; $R$ — радиус описанной окружности.

10. Площадь описанного многоугольника: $S = p \cdot r$, где $p$ — полупериметр многоугольника, $r$ — радиус вписанной окружности.

11. Площадь круга радиуса $R$: $S = \pi R^2$.

12. Площадь кругового сектора с центральным углом, равным $\alpha$ радиан: $S = \frac{\alpha R^2}{2}$. Если $\alpha$ — градусная мера центрального угла, то $S = \frac{\pi R^2 \alpha^\circ}{360^\circ}$. Здесь $R$ также радиус круга.

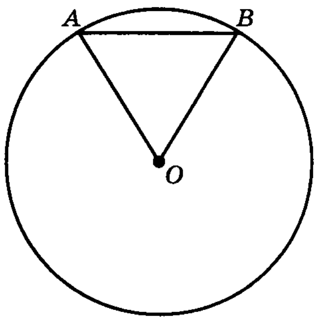

Рис. 1.41

Для того, чтобы вычислить площадь соответствующего кругового сегмента, необходимо вычесть из площади сектора площадь равнобедренного треугольника с боковыми сторонами, равными $R$, и углом $\alpha$ радиан между ними (см. рис. 1.41). Тогда для площади сегмента получаем:

$$S = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{R^2 \sin\alpha}{2}.$$

## Векторы

Отрезок, для которого указано какая из его граничных точек является началом, а какая — концом, называется направленным *отрезком*, или *вектором*.

Вектор характеризуется модулем (длиной вектора) и направлением.

Вектор задает параллельный перенос — перемещение всех точек плоскости в одном и том же заданном направлении на одинаковое расстояние. Поэтому не имеет значения, в какую точку помещено его начало. Два вектора, имеющие одинаковые модули и направления, равны, так как задают один и тот же параллельный перенос.

*Если задан вектор с началом в точке A и концом в точке B*, то его обозначают $\overrightarrow{AB}$. Вектор может быть также обозначен одной строчной буквой со стрелкой наверху, например, $\vec{a}$. На рис. 1.42 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\vec{a}$.

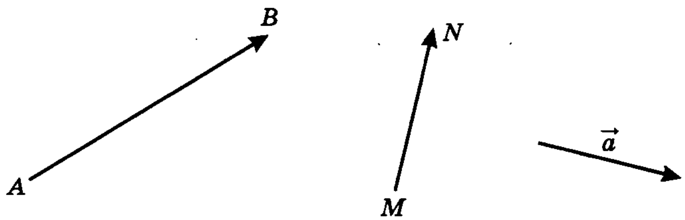


Рис. 1.42

Модуль вектора обозначают $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

Если начало и конец вектора совпадают, то его называют *нулевым вектором*. Модуль нулевого вектора равен нулю, а направление не определено.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначение: ($\vec{a} \parallel \vec{b}$). Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Рассмотрим коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поместим их начала в точку $A$. Так как данные векторы коллинеарны, то они будут лежать на одной прямой, которую точка $A$ разбивает на два луча. Если концы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принадлежат одному и тому же лучу с началом в точке $A$, то такие векторы называются *сонаправленными*. Если они принадлежат двум разным лучам, то их называют *противоположно направленными*. На рис. 1.43 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *сонаправлены* ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ противоположно направлены ($\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$). Вектор $\vec{e}$, равный по модулю и противоположно направленный вектору $\vec{d}$, называется *противоположным вектору* $\vec{d}$ (см. рис. 1.43). Обозначение: $\vec{e} = -\vec{d}$. Очевидно, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

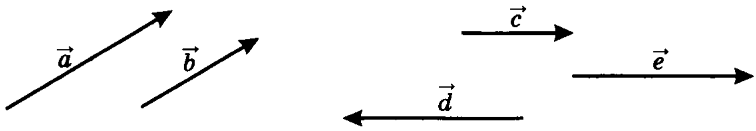

Рис. 1.43

*Суммой векторов* называется вектор, задающий последовательность параллельных переносов и определяемый ниже. Для того чтобы найти вектор $\vec{d}$, равный сумме векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, необходимо взять произвольную точку $M$ и отложить от нее вектор $\overrightarrow{MN}$, равный $\vec{a}$; затем от точки $N$ отложить вектор $\overrightarrow{NK}$, равный $\vec{b}$; наконец, от точки $K$ отложить вектор $\overrightarrow{KL}$, равный $\vec{c}$. Соединив точку $M$ с точкой $L$, мы получим вектор $\overrightarrow{ML}$, который будет равен искомому вектору $\vec{d}$ (рис. 1.44). Выполнение сложения таким методом называется сложением по *правилу многоугольника*. Сумму двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить либо по *правилу многоугольника*, либо по *правилу параллелограмма*. Для реализации второго метода поместим начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в одну точку $A$; обозначим конец вектора $\vec{a}$ буквой $B$, а конец вектора $\vec{b}$ буквой $D$; через точку $B$ проведем прямую, параллельную вектору $\vec{b}$, а через точку $D$ — прямую, параллельную вектору $\vec{a}$; обозначим точку пересечения этих прямых буквой $C$. В результате получим параллелограмм $ABCD$. Вектор $\overrightarrow{AC}$, лежащий на диагонали параллелограмма $ABCD$, равен искомой сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.45).


Рис. 1.44

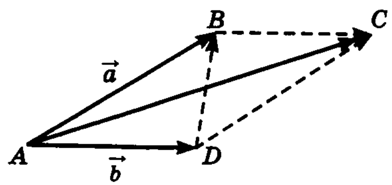


Рис. 1.45

## Законы сложения векторов

а) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон);

б) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательный закон);

в) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (свойство нулевого вектора);

г) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (свойство вектора, противоположного данному).

*Разностью векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. На рис. 1.45 разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\overrightarrow{DB}$. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно также построить, складывая вектор $\vec{a}$ и вектор $-\vec{b}$ по правилу многоугольника, так как $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (рис. 1.46).

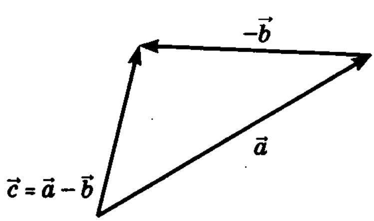


Рис. 1.46

*Произведением вектора* $\vec{a}$ на число $\lambda$ называется вектор $\vec{c}=\lambda\vec{a}$, сонаправленный вектору $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно направленный вектору $\vec{a}$, если $\lambda<0$, причем $|\vec{c}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$. Если $\lambda=0$, то в результате его умножения на любой вектор $\vec{a}$

получается нулевой вектор: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$. На рис. 1.47 изображены вектор $\vec{a}$, вектор $\vec{b} = 2\vec{a}$, вектор $\vec{c} = -3\vec{a}$.

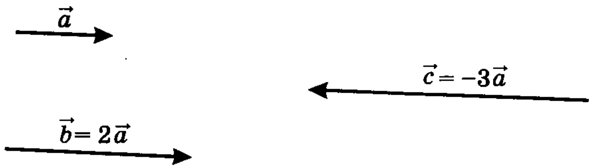


Рис. 1.47

### Законы произведения вектора на число

а) $(mn)\vec{a} = m(n\vec{a})$ (сочетательный закон);

б) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$ (первый распределительный закон);

в) $m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$ (второй распределительный закон),

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, $m$ и $n$ — произвольные действительные числа.

### Линейная комбинация векторов

Любой вектор $\vec{a}$ можно представить в виде линейной комбинации неколлинеарных векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$, в которой коэффициенты разложения $m$ и $n$ определяются единственным образом.

## Система координат на плоскости

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат $Oxy$ (рис. 1.48). Длина отрезка $AB$, для которого определены координаты его концов $A\ (x_A;\ y_A)$ и $B\ (x_B;\ y_B)$, определяется по формуле $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Если точка $C$ делит отрезок $AB$ в отношении $m : n$, то есть $AC : CB = m : n$, то для координат точки $C$ получаем:

$$x_C = \frac{x_A \cdot n + x_B \cdot m}{m+n}; \quad y_C = \frac{y_A \cdot n + y_B \cdot m}{m+n}.$$

В частности, координаты середины отрезка $AB$ вычисляются по формулам:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

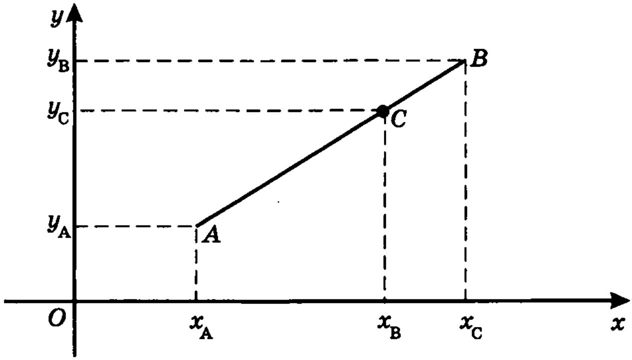


Рис. 1.48

## Уравнения прямой и окружности

*Уравнением линии* на координатной плоскости называется уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей этой линии, и только ей.

1. Уравнение прямой, проходящей через данные точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$:

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_A; y_A)$ и составляющей угол $\alpha$ с положительным направлением оси $Ox$:

$$y = k(x - x_A) + y_A, \text{ где } k = \operatorname{tg}\alpha.$$

3. Уравнение окружности с центром $O(x_0; y_0)$ и радиусом $R$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

## Координаты вектора

Введем *единичные направляющие векторы* координатных осей $\vec{i}$ и $\vec{j}$ так, чтобы их начала совпадали с началом координат $O$, направление вектора $\vec{i}$ совпадало с положительным направлением оси $Ox$, а направление вектора $\vec{j}$ — с положительным направлением оси $Oy$ (рис. 1.49). Таким образом, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.

Поскольку векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ не коллинеарны, то любой вектор $\vec{a}$ на координатной плоскости может быть представлен в виде их линейной комбинации: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Коэффициенты $x$ и $y$ разложения вектора $\vec{a}$ по единичным направляющим векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ определяются единственным образом и называются *координатами вектора* $\vec{a}$.

Координаты вектора принято записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a}\,\{x;\, y\}$.

Для нулевого вектора имеем: $\vec{0}\,\{0;\, 0\}$.

**Координаты суммы и разности векторов** $\vec{a}\,\{x_1;\, y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\, y_2\}$.

Пусть $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, тогда $\vec{c}\,\{x_1 + x_2;\, y_1 + y_2\}$.

Пусть $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, тогда $\vec{d}\,\{x_1 - x_2;\, y_1 - y_2\}$.

**Координаты произведения вектора** $\vec{a}\,\{x;\, y\}$ на число $m$.

Пусть $\vec{e} = m\vec{a}$, тогда $\vec{e}\,\{mx;\, my\}$.

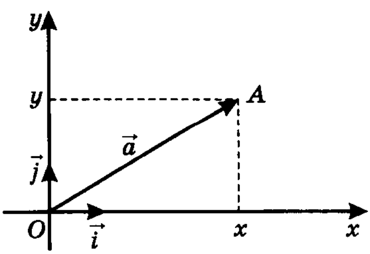


Рис. 1.49

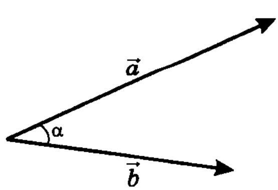


Рис. 1.50

**Координаты вектора** $\overrightarrow{AB}$, для которого заданы координаты начала и конца $A\,(x_A;\, y_A)$, $B\,(x_B;\, y_B)$: $\overrightarrow{AB}\,\{x_B - x_A;\, y_B - y_A\}$.

**Модуль вектора** $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha,$$

где $\alpha$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 1.50).

Если заданы координаты векторов $\vec{a}\,\{x_1;\, y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\, y_2\}$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Косинус угла $\alpha$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вычислить по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

## § 2. Технология решения геометрических задач

Процесс решения задачи можно разбить на одиннадцать этапов. Ниже мы приводим памятку, содержащую их перечень. Решая задачу, памятку полезно иметь перед глазами и стараться последовательно выполнять перечисленные в ней этапы работы.

**Памятка**

1. Чтение условия задачи.
2. Выполнение чертежа с буквенными обозначениями.
3. Краткая запись условия задачи (формирование базы данных).
4. Перенос данных условия на чертеж; выделение элементов чертежа различными цветами.
5. Запись требуемых формул и теорем на черновике (формирование базы знаний).
6. «Деталировка» — вычерчивание отдельных деталей на дополнительных чертежах.
7. Анализ данных задачи, привязка искомых величин к элементам чертежа.
8. «Синтез» — составление «цепочки» действий (алгоритма решения).
9. Реализация алгоритма решения.
10. Проверка правильности решения.
11. Запись ответа.

Отметим, что при решении каждой конкретной задачи не обязательно выполнять все перечисленные этапы работы (например, может не понадобиться чертёж или деталировка, не всегда удается заранее выстроить алгоритм решения и т. д.).

Рассмотрим каждый пункт памятки подробно.

### ✓ Чтение условия задачи

Прочтите условие задачи. Если при чтении условия задачи возникают вопросы, запишите их на черновике.

В условиях задач могут упоминаться различные понятия, которые вы не сразу сможете вспомнить или не знаете их вовсе. Найдите соответствующую информацию в литературе и выпишите на черновике нужное определение, формулировку теоремы или формулу. Все эти знания являются исходными для вашей задачи и поэтому важны. Естественно, что на экзамене удастся воспользоваться только теми знаниями, которыми вы располагаете.

### ✓ Выполнение чертежа с буквенными обозначениями

Чертёж — это рабочее место, то есть пространство, которое нужно организовать так, чтобы работать было удобно. Поэтому не надо мельчить и экономить бумагу, ведь хороший чертёж поможет вам увидеть связи между элементами изучаемых геометрических фигур, после чего останется только оформить решение. Желательно, чтобы на чертеже были соблюдены пропорции длин отрезков и величины углов. По возможности надо использовать в качестве образцов чертежи учебника и порядок введенных там буквенных обозначений.

Механизм построения чертежа надо обосновывать. Пусть, например, надо построить прямоугольный треугольник, вписанный в окружность. Вначале строим окружность с центром $O$ (рис. 1.51).

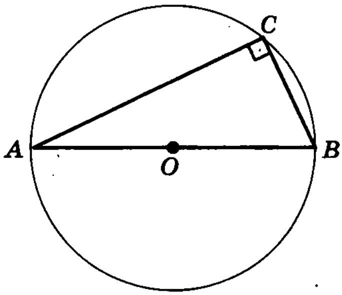

Рис. 1.51

Затем проводим в ней диаметр $AB$. Любая отличная от $A$ и $B$ точка окружности $C$ является вершиной прямого угла треугольника $ABC$, так как по свойству вписанного угла, опирающегося на диаметр окружности, угол $C$ равен 90°.

Для решения задачи вам могут потребоваться дополнительные построения, которые выполняются либо одновременно с основными, либо позже — в процессе решения.

### ✓ Краткая запись условия задачи (формирование базы данных)

Краткая запись условия задачи выполняется с использованием введенных на чертеже буквенных обозначений. Эту запись точнее было бы назвать не краткой, а компактной, так как она должна содержать всю имеющуюся в условии информацию. На основе краткой записи условия осуществляется математическая запись решения задачи.

Правильность записи условия задачи всегда надо проверять. Когда вы проверяете краткую запись условия, воспользуйтесь советом: левую руку держите на тексте условия задачи. Таким образом, вы не пропустите ни одного из данных и всегда сможете вернуться назад в условие, если это понадобится для уточнения. Правую руку держите на том месте тетради, где вы сделали краткую запись. Это поможет вам контролировать ее правильность.

В краткой записи условия отделите жирной чертой исходные данные от того, что надо найти, построить или доказать. Существуют принятые схемы записи условия, которые, к сожалению, периодически меняются. В основном соблюдение этих схем требуется, если проверке подлежит не только ответ, но и описание решения вашей задачи. В иных случаях пользуйтесь удобной вам схемой или схемой, предложенной вашим преподавателем.

В данном методическом пособии мы будем располагать чертеж на левой стороне страницы, а краткую запись условия задачи справа. Некоторые преподаватели располагают чертёж, «дано» и «найти» («построить», «доказать») горизонтально, отделяя одно от другого вертикальной чертой.

**Пример № 1.1.**

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, длины сторон которого равны 13 см, 12 см и 5 см.

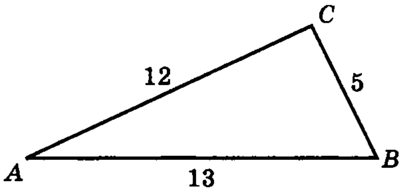


Рис. 1.52

Дано: $\triangle ABC$; $AB = 13$ см;
$AC = 12$ см; $BC = 5$ см.

Найти: $R$.

Краткая запись условия задачи — это база данных для ее решения.

### ✓ Перенос данных условия на чертёж; выделение элементов чертежа разными цветами

На этом этапе осуществляется «привязка» данных условия задачи к чертежу. В примере 1.1 на чертёж (рис. 1.52) переносятся длины сторон треугольника (указывать единицы измерения необязательно).

В случае сложных чертежей их детали, а также дополнительные построения для наглядности могут быть выполнены различными цветами.

Равные отрезки отмечают одинаковыми (одинарными, двойными, тройными) штрихами или тильдами (волнистыми линиями), углы — дугами.

**Пример № 1.2**

В треугольнике $ABC$ сторона $AB$ равна 6 см, угол $A$ равен углу $B$, а угол $C$ равен 60°. Найти $AC$ и $BC$.

Чертёж к этой задаче дан на рис. 1.53.

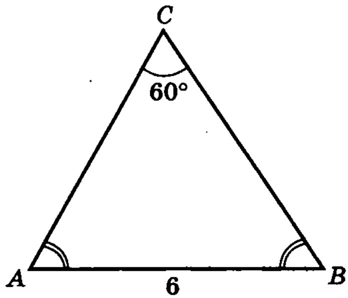


Рис. 1.53

### ✓ Запись требуемых формул и теорем на черновике (формирование базы знаний)

Читая условие задачи, выпишите на черновике всю информацию, которая связана с каждым из терминов, используемых в условии задачи. Затем, если понятно, как сгруппировать информацию, расположите её в нужном порядке. Эта информация является базой знаний. Чем полнее и точнее будет база знаний, тем больше шансов, что в неё попадут именно те формулы, определения и свойства, которые мы будем использовать. Поэтому если сразу решить задачу не удаётся, то анализируется и осмысливается весь относящийся к ней теоретический материал. В процессе работы может быть найден план решения. (Основные теоретические сведения, используемые при решении геометрических задач, даны в § 1.)

Поясним процесс формирования базы знаний на примере.

**Пример № 1.3.**

В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см, а один из острых углов равен 30°. Найти катеты этого треугольника, его периметр, площадь и радиусы вписанной и описанной окружностей.

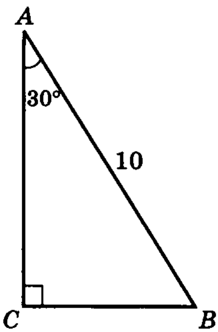


Рис. 1.54

<u>Дано</u>: $\Delta ABC$; $AB = 10$ см; $\angle C = 90°$; $\angle A = 30°$.

<u>Найти</u>: $AC$, $BC$, $P$, $S$, $R$, $r$.

Базируясь на краткой записи условия задачи, выпишем весь теоретический материал, который может помочь в решении, то есть создадим базу знаний на основании базы данных.

База знаний

1. Теорема Пифагора и её следствия:

$$c^2 = a^2 + b^2;\ \ a = \sqrt{c^2 - b^2};\ \ b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

2. Теорема о катете, лежащем против угла в 30°:

В прямоугольном треугольнике против угла в 30° лежит катет, равный половине гипотенузы.

3. Периметр треугольника: $P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA$.

4. Площадь треугольника: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC$.

5. Радиусы описанной и вписанной окружностей:

$$R = \frac{AB}{2};\ \ r = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}}.$$

В базу знаний можно также включить следующие тригонометрические формулы:

$$BC = AB \cdot \sin A;\ AC = AB \cdot \cos A.$$

### ✓ «Деталировка» — вычерчивание отдельных деталей на дополнительных чертежах

Этот этап работы необязателен. Его приходится выполнять в тех случаях, когда чертеж к задаче громоздкий и не обладает достаточной наглядностью для последующего анализа. Деталировка полезна также тогда, когда не ясно, какая фигура получилась в результате геометрических построений, какие прямые параллельны, перпендикулярны и т. п. Суть деталировки заключается в том, что фигуры на дополненных чертежах можно разворачивать удобным для их изучения образом. Исходная сложная задача в результате деталировки разбивается на несколько более простых.

**Пример № 1.4**

Две окружности радиусами $R = 3$ см и $r = 1$ см касаются внешним образом. Найти расстояние от точки касания окружностей до их общих касательных /13/.

Дано: Окружности $(O_1, R)$ и $(O_2, r)$; $O_1M = 3$ см; $O_2N = 1$ см; $FE \perp MN$; $FE_1 \perp M_1N_1$.

Найти: $FE$ и $FE_1$.

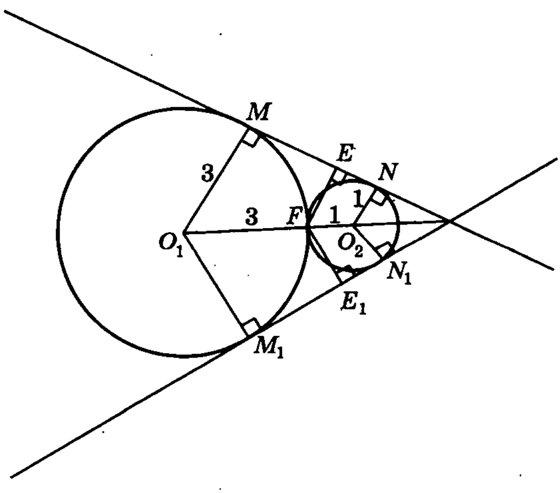


Рис. 1.55

Деталировка

Отметим, что радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому

$$O_1M_1 \perp M_1N_1;\ O_2N_1 \perp M_1N_1;\ O_1M \perp MN;\ O_2N \perp MN.$$

Вычертим фигуру $O_1MNO_2$, содержащую искомый отрезок $FE$ отдельно (рис. 1.56).

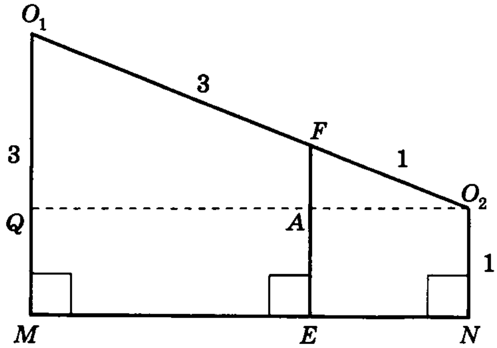


Рис. 1.56

Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Из рис. 1.56 видно, что $O_1MNO_2$ — трапеция, т. к. перпендикуляры к одной и той же прямой параллельны между собой. Следовательно, и искомый отрезок $FE$ тоже параллелен им, то есть

$$O_1M \parallel FE \parallel O_2N.$$

Рисунком 1.56 пользоваться для решения задачи удобнее, чем исходным рисунком 1.55.

### ✓ Анализ данных задачи, привязка искомых величин к элементам чертежа

На этом этапе выясняем, существует ли фигура, которая содержит искомую величину. Допустим, да, существует. Тогда выясняем, какие элементы этой фигуры надо знать, чтобы найти искомую величину. Есть ли они в данных задачи? Если нет, то из каких данных задачи их можно найти?

Этот этап решения описан в примере № 1.4. Мы выяснили, что искомые величины содержатся в фигурах $O_1MNO_2$ и $O_1M_1N_1O_2$. Эти фигуры симметричны относительно прямой $O_1O_2$, поэтому достаточно рассмотреть лишь одну из них $O_1MNO_2$, т. к. $FE_1 = FE$. Зададим себе вопрос: «Что надо знать, чтобы найти $FE$; всё ли, что нам для этого нужно, есть в базе данных?». Нет, не все требуемые величины нам известны. Чтобы решить задачу, требуется использовать знания о подобных треугольниках, поэтому надо построить эти треугольники. Для этого проведем прямую $O_2Q$ параллельно $MN$. Обозначим точку пересечения прямых $FE$ и $O_2Q$ буквой $A$. Вот теперь у нас есть все необходимые для решения задачи фигуры. Осталось найти требуемые величины.

$FE = FA + AE$;

$AE = O_2N = QM$ как противоположные стороны прямоугольника;

$O_1Q = O_1M - QM$;

$O_1O_2 = O_1F + FO_2$;

$$\frac{AF}{FO_2} = \frac{O_1Q}{O_1O_2};$$

$$AF = FO_2 \cdot \frac{O_1Q}{O_1O_2}.$$

✓ **«Синтез» — составление цепочки действий (алгоритма решения)**

В сложных задачах по ходу решения могут использоваться и несколько фигур и деталировок, для каждой фигуры анализируется теоретический материал и данные условия задачи (база данных), затем составляется цепочка, алгоритм решения. Составление цепочки уже было продемонстрировано в примере № 1.4, приведенном в предыдущем пункте «Деталировка».

Схематически она может быть изображена так:

$$\begin{tikzcd}
 & AE \arrow[rrr] & & & FE \\
O_2N \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & QM \arrow[r] & O_1Q \arrow[dr] & & \\
 & (O_1F;\ FO_2) \arrow[r] & O_1O_2 \arrow[r] & AF \arrow[uuur] &
\end{tikzcd}$$

А цепочка для примера № 1.3 изобразится так:

$$\begin{tikzcd}
(AB;\ \angle A) \arrow[r] \arrow[dr] & BC \arrow[r] & AC \arrow[r] \arrow[dr] & P_{\Delta ABC} \arrow[dr] & \\
 & R & & S_{\Delta ABC} \arrow[r] & r
\end{tikzcd}$$

✓ **Реализация алгоритма решения**

На этом этапе, в зависимости от стоящей перед нами задачи, мы осуществляем требуемые доказательства, построения или вычисления. Последовательность наших действий соответствует при этом пунктам выстроенной цепочки.

Рассмотрим реализацию алгоритма в примере № 1.3.

$$BC = \frac{AB}{2} = 5 \text{ (см)}; \quad AC = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ (см)};$$

$$P_{ABC} = 10 + 5 + 5\sqrt{3} = 15 + 5\sqrt{3} \text{ (см)};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = 12{,}5 \cdot \sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$R = \frac{AB}{2} = 5 \text{ (см)}; \quad r = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{25\sqrt{3}}{5\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{5\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right)}{9-3} = \frac{5}{6}\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right) = \frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} \text{ (см)}.$$

Реализация алгоритма в примере № 1.4 выглядит так:

$AE = 1$ (см); $QM = 1$ (см); $O_1Q = 3 - 1 = 2$ (см);

$O_1O_2 = 3 + 1 = 4$ (см); $AF = 1 \cdot \frac{2}{4} = 0{,}5$ (см);
$FE = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$ (см).

Отметим, что уже на этапе анализа условия и далее при составлении алгоритма решения и его реализации может возникнуть необходимость в дополнительных построениях. Конкретные примеры таких построений вы найдете в рассмотренных ниже задачах.

### ✓ Проверка правильности решения

Задачи в учебнике обычно снабжаются ответами, поэтому проверить правильность результата можно без особого труда, сверившись с ответом. Однако на контрольной работе или экзамене такой возможности нет, поэтому нужно научиться самому выполнять необходимую проверку.

Характер проверки зависит от типа решаемой задачи.

Так, в задачах на доказательство полезно заново проследить логику проведенных рассуждений и убедиться в том, что они не содержат противоречий.

В задачах на построение основным объектом проверки является обоснованность выполненных действий. Напомним, что все геометрические построения, в том числе построение параллельных или перпендикулярных прямых, деление отрезков на несколько равных частей и т. д., выполняются по определенным правилам с помощью циркуля и линейки. Все эти действия должны быть обоснованы ссылками на соответствующие теоремы. Это обезопасит вас от того, что кажущееся правдоподобным построение в действительности окажется неверным.

При проверке задач на вычисление нужно убедиться, что найденные величины имеют геометрический смысл. Так, например, длины сторон треугольника должны удовлетворять неравенству треугольника. Длины отрезков и площади фигур — задаваться положительными числами. Важно убедиться в правильности размерностей: например, длины должны измеряться в линейных величинах (метрах, дециметрах, сантиметрах), а площади — в квадратных (м$^2$, дм$^2$, см$^2$). Проверка вычислений путем их повторного выполнения не слишком эффективна, так как при этом не контролируется логика решения. Полезнее найти одну и ту же величину разными способами и убедиться в том, что результаты одинаковы.

При проверке решения задач всех типов необходимо также убедиться, что использованы все данные условия.

### ✓ Запись ответа

В наши дни школьникам и абитуриентам все чаще приходится сталкиваться с тестовой формой контроля знаний, одним из примеров которой является ЕГЭ. При выполнении тестовых заданий принципиальное значение имеет не то, как решали задачу, а то, какой получили ответ. Однако и в традиционных контрольных работах запись ответа является обязательным элементом решения. Как говорится, конец — делу венец.

Оформляется запись ответа следующим образом. Пишем слово «Ответ», ставим двоеточие. Затем записываем найденные величины с указанием единиц измерения, если таковые фигурируют в условии задачи. Например, запись ответа в примере № 1.3 выглядит так:

Ответ: $AC = 5$ см; $BC = 5\sqrt{3}$ см; $P_{\Delta ABC} = 15 + 5\sqrt{3}$ см;

$S_{\Delta ABC} = 12{,}5\cdot\sqrt{3}$ см$^2$; $R = 5$ см; $r = \dfrac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$ см.

## § 3. Решение задач планиметрии

Удобно сначала приобрести опыт применения описанной технологии, рассмотрев примеры решения нескольких простых задач, а потом закрепить навыки, решив более сложную задачу.

Напомним, что при решении каждой конкретной задачи мы можем пропускать те пункты памятки, в которых нет необходимости.

**Пример № 1.5**

Периметр параллелограмма равен 50 см. Одна из его сторон равна 10 см. Найдите остальные стороны параллелограмма.

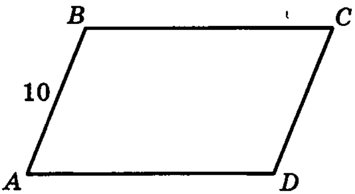


Рис. 1.57

Дано: $ABCD$ — параллелограмм,
$P = 50$ см; $AB = 10$ см.

Найти: $BC$, $CD$, $AD$.

База знаний

1. Периметр многоугольника — это сумма длин всех его сторон:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD.$$

2. Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

3. Свойство параллелограмма: в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Итак, $AB = CD = a$; $BC = AD = b$;
$P = 2(a + b)$; $a = 10$ см; $P = 50$ см.

Синтез — составление цепочки действий (алгоритма решения)

$$AB \longrightarrow CD \longrightarrow P = 2(a + b) \longrightarrow b.$$

Реализация алгоритма решения

$2(10 + b) = 50$;
$2b = 30$;
$b = 15$ (см).

### Проверка

Найденная величина положительна. Размерность результата правильная. Сумма длин сторон $10 + 10 + 15 + 15 = 50$ (см) соответствует условию задачи. Все данные условия участвовали в решении задачи.

Ответ: $BC = AD = 15$ см; $CD = 10$ см.

## Пример № 1.6/1/.

На сторонах $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ четырёхугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки $M$, $N$, $P$ и $Q$ так, что $AM = CP$, $BN = DQ$, $BM = DP$, $NC = QA$. Докажите, что $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.

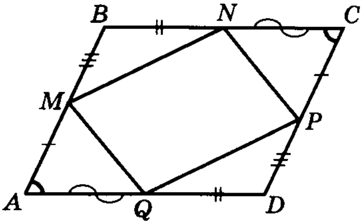


Рис. 1.58

Дано: $ABCD$ — четырехугольник; $AM = CP$; $BN = DQ$; $BM = DP$; $NC = QA$.

Доказать: $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.

***Замечание.*** На рис. 1.58 равные отрезки удобней пометить не чёрточками и волнистыми линиями, а одним и тем же цветом.

### База знаний

Признаки параллелограмма.

1. Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

2. Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

3. Если в четырёхугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

### Решение

Доказать параллельность хотя бы одной пары противоположных сторон непросто, диагоналей и их частей нет в данных задачи, да и построение их на рис. 1.58 не подсказывает очевидного решения, а вот для использования второго признака данных достаточно.

Имеем: $AM = CP$, $MB = PD$.

Сложив эти два равенства, получим:

$AB = CD$.

Аналогично получаем:

$$\left.\begin{matrix} BN = QD \\ NC = AQ \end{matrix}\right\} \to BC = AD.$$

Из двух равенств $AB = CD$ и $BC = AD$ следует, что $ABCD$ — параллелограмм.

Теперь докажем, что $MNPQ$ — параллелограмм.

Дополним базу знаний.

1. Свойство параллелограмма.

В параллелограмме противоположные углы равны.

2. Первый признак равенства треугольников.

Если две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то треугольники равны.

3. Свойство равных треугольников.

В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны.

Рассмотрим $\Delta AMQ$ и $\Delta NCP$. Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Действительно, $AM = CP$, $AQ = CN$, $\angle A = \angle C$ (по свойству параллелограмма).

Следовательно, $MQ = NP$. Аналогично доказывая равенство $\Delta MBN = \Delta QDP$, получаем, что $MN = QP$. Итак, согласно второму признаку, $MNPQ$ — параллелограмм.

**Пример № 1.7.**

Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, у которого все углы равны, если сумма его внешних углов с одним из внутренних равна 468°?

***Примечание.*** Решить эту задачу можно без помощи чертежа и краткой записи условия.

### База знаний

1. Сумма внешних углов выпуклого $n$-угольника равна 360°.

2. Сумма внутренних углов выпуклого $n$-угольника равна 180°($n$ − 2).

### Решение

Так как по условию все внутренние углы рассматриваемого $n$-угольника равны, то величина одного внутреннего угла $\alpha_n$ составляет: $\alpha_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$. Отсюда $360° + \dfrac{180°(n-2)}{n} = 468°$.

Решая это уравнение, получаем $n = 5$.

### Проверка

1. Величина внутреннего угла

$$\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{180°(5-2)}{5} = 108°.$$

2. $108° + 360° = 468°$.

Ответ: $n = 5$.

**Пример № 1.8.**

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если углы треугольника относятся как 1 : 2 : 3, а меньшая сторона равна 5 см.

***Примечание.*** При решении этой задачи также нет необходимости записывать краткое условие и выполнять чертеж. Этап построения алгоритма решения мы также пропускаем, так как исходных данных для этого недостаточно. План действий приходится уточнять по мере установления новых фактов в процессе решения.

### База знаний

1. Сумма углов треугольника равна 180°.

2. Меньшая сторона треугольника лежит против меньшего угла.

### Решение

1. Принимая величину меньшего угла за $x$, находим, что два оставшихся угла равны $2x$ и $3x$.

2. Тогда $x + 2x + 3x = 180°$. Отсюда $x = 30°$, $2x = 60°$, $3x = 90°$.

3. Таким образом, данный треугольник — прямоугольный. Величина меньшего угла равна 30°. Против этого угла лежит катет, равный 5 см.

4. Пополняем базу знаний еще двумя фактами:

— катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы;

— радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы.

Таким образом, радиус описанной окружности равен данному в условии катету, т. е. $r = 5$ см.

Ответ: $r = 5$ см.

**Пример № 1.9.**

Хорды $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $E$.
Найти $CE$, если $AE = 9$ см, $BE = 40$ см, $CD = 39$ см.

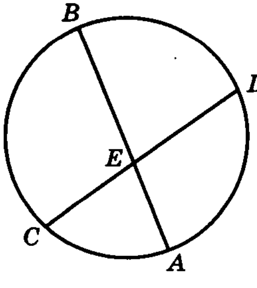


Рис. 1.59

Дано: $AE = 9$ см; $BE = 40$ см;
$CD = 39$ см.

Найти: $CE$.

### База знаний

По свойству отрезков пересекающихся хорд: $DE \cdot EC = AE \cdot BE$.

## Решение

Пусть $CE = x$, тогда $DE = CD - CE = 39 - x$;

$$x(39 - x) = 40 \cdot 9 \rightarrow x^2 - 39x + 360.$$

Решая это уравнение, находим $x_1 = 15$; $x_2 = 24$.

Замечаем, что если выбираем $CE = 15$ см, то $ED = 39 - 15 = 24$ (см); если выбираем $CE = 24$ см, то $ED = 39 - 24 = 15$ (см).

## Проверка

1. $CE \cdot ED = 15 \cdot 24 = 360$;
2. $AE \cdot BE = 9 \cdot 40 = 360$.

Таким образом, $AE \cdot BE = CE \cdot ED$.

Ответ: $CE$ равно 15 см или 24 см.

### Пример № 1.10.

Из точки $A$, лежащей вне окружности, проведены к этой окружности касательная $AF$ и секущая, пересекающая окружность в точках $B$ и $D$. Найти $AD$, если $AF = 15$ см, $DB > AD$ на 7 см.

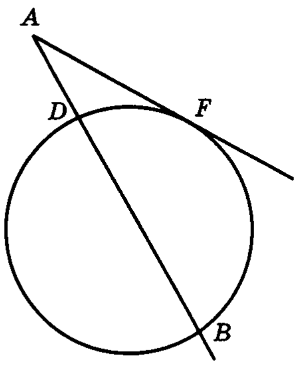

Рис. 1.60

Дано: $AF$ — касательная,
$AF = 15$ см; $AB$ — секущая;
$DB > AD$ на 7 см.

Найти: $AD$.

База знаний

$AF^2 = AB \cdot AD$.

## Решение

1. Обозначим $AD = x$, тогда $DB = x + 7$, $AB = x + x + 7 = 2x + 7$.

2. Составляем уравнение:

$x(2x + 7) = 15^2 \rightarrow 2x^2 + 7x - 225 = 0$.

Корни этого уравнения:

$x_1 = -12{,}5$ (этот корень не имеет геометрического смысла, так как длина отрезка не может быть отрицательной величиной);

$x_2 = 9$.

Итак, $AD = 9$ см.

Проверка

1. $AB = 2 \cdot 9 + 7 = 25$ (см);

2. $AB \cdot AD = 25 \cdot 9 = 225 = 15^2 = AF^2$.

Ответ: $AD = 9$ см.

**Пример № 1.11.**

Из точки $A$, лежащей вне окружности, проведены к этой окружности секущая, которая пересекает окружность в точках $B$ и $D$, и секущая, которая пересекает окружность в точках $C$ и $E$ (см. рис. 1.61). Найти $\smile BMC$, если $\smile DNE = 35°$, $\angle BAC = 27°$.

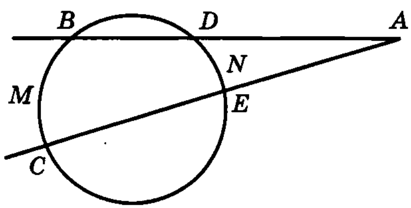


Рис. 1.61

Дано: $AB$ и $CD$ — секущие;
$\smile DNE = 35°$,
$\angle BAC = 27°$.

Найти: $\smile BMC$.

База знаний

$\angle BAC = 1/2\,(\smile BMC - \smile DNE)$.

Решение

Примем $\smile BMC = x$, тогда $27° = 1/2(x - 35°)$. Отсюда находим $x = 89°$.

Проверка

$1/2(89° - 35°) = 27°$.

Ответ: $\smile BMC = 89°$.

## Пример № 1.12.

В треугольнике $ABC$ даны углы 30° и 105°. Найдите длины сторон этого треугольника, если радиус описанной окружности равен 3 см.

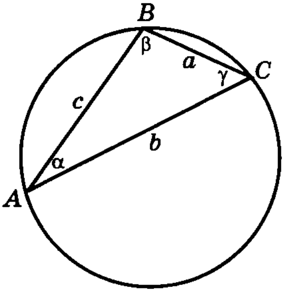


Рис. 1.62

Дано: $\Delta ABC$, $\alpha = 30°$, $\beta = 105°$, $R = 3$ см.

Найти: $a, b, c$.

База знаний

1. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
2. Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы, лежащие против сторон $a$, $b$, $c$, соответственно; $R$ — радиус описанной окружности.

Решение

1. $\gamma = 180° - (a + b) = 180° - (30° + 105°) = 45°$.
2. $a = 2R \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 3 \cdot \sin 30° = 2 \cdot 3 \cdot 1/2 = 3$ (см).
3. $c = 2R \cdot \sin\gamma = 2 \cdot 3 \cdot \sin 45° = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}/2 = 3\sqrt{2}$ (см).

Для вычисления стороны $b$ необходимо пополнить базу знаний формулой синуса суммы двух углов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Тогда

4. $\sin 105° = \sin(60° + 45°) = \sin 60° \cdot \cos 45° + \cos 60° \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
5. $b = 2R \cdot \sin\beta = 2 \cdot 3 \cdot \sin 105° = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ (см).

Ответ: $a = 3$ см; $c = 3\sqrt{2}$ см; $b = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$ см.

**Пример № 1.13.**

В прямоугольной трапеции верхнее основание равно 3 см, радиус вписанной окружности равен 2 см, площадь равна 18 см$^2$. Найдите длины остальных сторон трапеции.

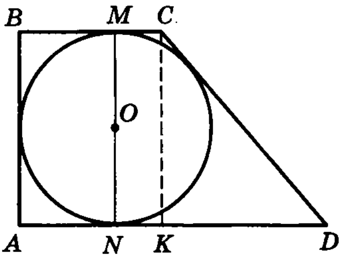


Рис. 1.63

Дано: $ABCD$ — трапеция,
$\angle A = \angle B = 90°$, $BC = 3$ см,
$r = 2$ см, $S = 18$ см$^2$.

Найти: $AB$, $CD$, $AD$.

База знаний

1. Суммы противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны.

2. Площадь трапеции с основаниями $a$ и $b$ и высотой $h$:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

3. Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной прямой.

4. Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике с катетами $a$, $b$ и гипотенузой $c$: $c^2 = a^2 + b^2$.

Решение

1. Пусть $M$ и $N$ — точки касания окружности с верхним и нижним основаниями соответственно. Построим $OM$ и $ON$. По свойству радиуса, проведенного в точку касания, $OM \perp BC$, $ON \perp AD$. Таким образом, точки $M$, $O$ и $N$ лежат на одной прямой, а отрезок $MN$ является диаметром вписанной окружности. Одновременно этот отрезок будет высотой трапеции $ABCD$. $MN = 2r = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

Так как $ABMN$ — прямоугольник, то $AB = MN = 4$ см.

2. Пусть $AD = x$. Подставим $x$ и известные элементы трапеции в формулу ее площади и получим:

$\frac{3+x}{2} \cdot 4 = 18$. Отсюда $x = 6$. Таким образом, $AD = 6$ см.

3. Проведем $CK \perp AD$.

Так как $ABCK$ — прямоугольник, то $AK = BC = 3$ см.

Тогда $KD = AD - AK = 6 - 3 = 3$ (см).

4. Из прямоугольного треугольника $CKD$ находим:

$$CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}.$$

Проверка

Сторону $CD$ можно найти и другим способом, учитывая, что длины трех других сторон уже известны, и используя свойство сторон описанного четырехугольника. Обозначим $CD = x$.

Тогда $x + 4 = 6 + 3$. Отсюда находим: $x = 5$, т. е. $CD = 5$ см.

Ответ: $AB = 4$ см; $CD = 5$ см; $AD = 6$ см.

**Пример № 1.14.**

В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 12$ см, $CD = DA = 5$ см, $\angle B = 30°$. Найдите величины остальных углов этого четырехугольника и диаметр описанной около него окружности. Докажите, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, и найдите ее радиус.

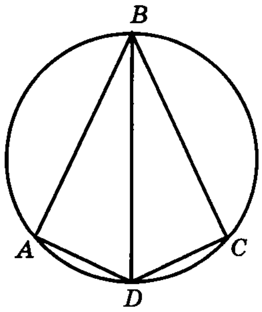

Рис. 1.64

Дано: $ABCD$ — вписан в окружность, $AB = BC = 12$ см, $CD = DA = 5$ см, $\angle B = 30°$.

Найти: $\angle A$, $\angle C$, $\angle D$; $d_0$; $r_в$.

Доказать: В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

База знаний

1. Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны.

2. Суммы противоположных углов вписанного четырехугольника равны 180°.

3. Вписанный угол, равный 90°, опирается на диаметр окружности.

4. Радиус окружности, вписанной в многоугольник, равен отношению площади многоугольника к его полупериметру.

Решение

1. $\angle B + \angle D = 180°$. Отсюда $\angle D = 180° - \angle B = 180° - 30° = 150°$.

2. Проведем $BD$. $\Delta ABD = \Delta CBD$, по третьему признаку равенства треугольников ($AB = BC$, $AD = DC$, по условию; $BD$ — общая сторона).

3. $\angle A = \angle C$, как углы, лежащие в равных треугольниках против равных сторон. С другой стороны, $\angle A + \angle C = 180°$. Следовательно,

$$\angle A = \angle C = 180° : 2 = 90°.$$

4. Отсюда следует, что $BD$ — диаметр описанной окружности.

Из прямоугольного треугольника $ABD$ находим диаметр описанной окружности:

$$d_0 = BD = \sqrt{DA^2 + AB^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см).}$$

5. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, так как суммы противоположных сторон равны:

$$AB + CD = AD + BC = 12 + 5 = 17 \text{ (см).}$$

6. Найдем площадь и полупериметр четырехугольника $ABCD$.

Площадь $SAB_{CD} = 2S_{\Delta ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} DA \cdot AB = 5 \cdot 12 = 60$ (см$^2$).

Полупериметр $p = DA + AB = 5 + 12 = 17$ (см).

Тогда радиус вписанной окружности:

$$r_в = \frac{S_{ABCD}}{p} = \frac{60}{17} = 3\frac{9}{17} \text{ (см).}$$

Ответ: $\angle D = 150°$; $\angle A = \angle C = 90°$; $d_0 = 13$ см; $r_в = 3\frac{9}{17}$ см.

## Пример № 1.15.

Найдите радиус окружности, вписанной в круговой сектор с острым углом $\alpha$ и радиусом $R$.

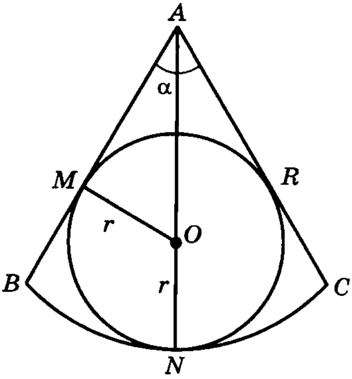


Рис. 1.65

Дано: Окружность ($O$; $r$), сектор $ABC$, $AB = AC = R$, $\angle BAC = \alpha$.

Найти: $r$.

База знаний

1. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

2. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной.

3. В прямоугольном треугольнике: $c = a/\sin\alpha$, где $c$ — гипотенуза, $\alpha$ — острый угол, $a$ — катет, лежащий против этого угла.

Решение

1. Из центра вписанной окружности $O$ проведем в точку касания окружности и прямой $AB$ радиус $OM$. Тогда $OM \perp AB$.

2. Построим отрезок $AN$, проходящий через центр вписанной окружности.

$AN$ — радиус данного сектора, поэтому $AN = R$.

$\angle BAN = \alpha/2$, так как центр окружности, вписанной в угол $BAC$, лежит на биссектрисе этого угла.

3. Отрезки $OM$ и $ON$ — радиусы вписанной окружности, поэтому их длина равна искомой величине $r$.

4. Рассмотрим прямоугольный треугольник $AMO$.

В этом треугольнике гипотенуза $AO$ может быть выражена через катет $OM$ и синус противолежащего этому катету угла $MAO$: $AO = \dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

5. Так как $AN = AO + ON$, причем $AN = R$, $ON = r$, то

$$R = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r = r\cdot\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.\ \text{Отсюда}\ r = R\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Проверка

В качестве проверки этот же результат можно получить и другим способом. Основная идея этого способа состоит в том, что мы строим касательную к дуге кругового сектора, проходящую через точку $N$, и продлеваем $AB$ и $AC$ до пересечения с этой прямой в точках $P$ и $Q$ (см. рис. 1.66). Тогда вписанная в сектор окружность оказывается также вписанной в треугольник $APQ$.

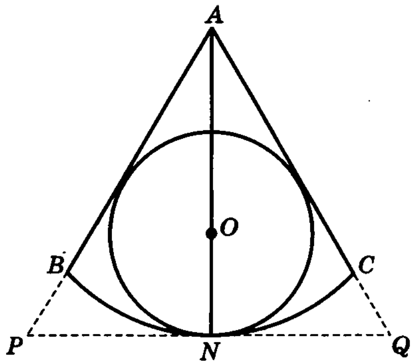


Рис. 1.66

Замечаем, что в треугольнике $APQ$ отрезок $AN$ является одновременно биссектрисой и высотой, следовательно, этот треугольник является равнобедренным ($AP = AQ$).

Из прямоугольного треугольника $APN$, в котором $AN = R$ и $\angle PAN = \alpha/2$, находим $AP = \dfrac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; $PN = R\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Теперь мы можем вычислить площадь $S$ и полупериметр $p$ треугольника $APQ$ и найти радиус вписанной в этот треугольник окружности по формуле $r = S/p$.

Предоставляем читателям возможность убедиться, что значения $r$, найденные двумя указанными способами, совпадают.

<u>Ответ</u>: $r = R\cdot\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$.

## Пример № 1.16 [12]

В треугольнике $ABC$ заданы стороны $AB = c = 13$ см; $BC = a = 14$ см; $AC = b = 15$ см.

Определите:

1) площадь $S$;

2) $h_b$ — высоту $BD$;

3) радиус вписанной окружности $r$;

4) величину наибольшего внутреннего угла этого треугольника;

5) радиус описанной окружности $R$;

6) $m_b$ — длину медианы $BF$;

7) $l_b$ — длину биссектрисы $BE$ угла $B$ (точка $E$ лежит на отрезке $AC$);

8) расстояние между точкой пересечения медиан $G$ и центром описанной окружности $O_O$;

9) расстояние между центрами вписанной ($O_B$) и описанной ($O_O$) окружностей.

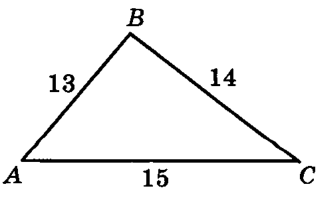

Рис. 1.67

Приступая к решению этой задачи, не будем записывать ее краткое условие, так как основной текст условия уже содержит обозначения чертежа. Поэтому сразу рассмотрим чертеж (рис. 1.67).

Кроме того, в этой задаче мы не станем отделять базу знаний от решения, а будем записывать нужные нам для расчётов формулы в каждом пункте решения.

В последующих задачах поступим точно так же.

Решение

1. База знаний.

Выпишем формулы, по которым можно найти площадь треугольника:

$$S=\frac{1}{2}b\cdot h_b; \qquad (1)$$

$$S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot \sin A; \qquad (2)$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad (3)$$

$$S=r\cdot p, \qquad (4)$$

где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника $ABC$.

Поскольку в условии задачи даны только длины сторон треугольника $ABC$, то для вычисления его площади нам необходимо воспользоваться именно формулой Герона (3).

Вычислим сначала полупериметр треугольника:

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(13+14+15)=21 \text{ (см)}.$$

Тогда, по формуле (3), $S=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84$ (см$^2$).

2. Формула (1) позволяет вычислить $h_b$ — длину высоты $BD$ по заданной длине стороны $AC$ и вычисленной в пункте 1 площади треугольника $S$: $h_b=2S/b=2\cdot 84/15=11,2$ (см).

3. Для вычисления длины радиуса вписанной окружности $r$ нам необходимо воспользоваться формулой площади треугольника (4): $S=p\cdot r$. Отсюда находим $r = S : p = 84 : 21 = 4$ (см).

4. Выполнить четвертое задание можно с помощью теоремы о том, что против большей стороны в треугольнике лежит больший угол. Из этой теоремы следует, что бо́льшим углом в треугольнике $ABC$ является угол $B$. По аналогии с (2) можем записать: $S=\frac{1}{2}a\cdot c\cdot \sin B$.

Отсюда получаем: $\sin B = \dfrac{2S}{a \cdot c} = \dfrac{2 \cdot 84}{13 \cdot 14} = \dfrac{12}{13}$.

Можно было бы сразу вычислить $\angle B = \arcsin\dfrac{12}{13}$, но поскольку нам в дальнейшем может пригодиться $\cos B$, то найдем сначала его. Для этого воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$. Тогда, учитывая, что $\angle B$ — острый угол (так как $b^2 < a^2 + c^2$), а значит, его косинус и синус — положительные величины, находим:

$$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}.$$

Следовательно, $\angle B = \arcsin\dfrac{12}{13} = \arccos\dfrac{5}{13}$.

5. Ответ на вопрос задачи о вычислении длины $R$ радиуса описанной окружности требует знания теоремы синусов и следствия из неё:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2S} = 2R. \qquad (5)$$

Из соотношения (5) следует, что $R = \dfrac{b}{2\sin B} = \dfrac{15 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \dfrac{65}{8}$ (см).

Этот же результат можно получить, подставляя длины сторон и площадь треугольника в другую формулу, также следующую из (5): $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4S}$.

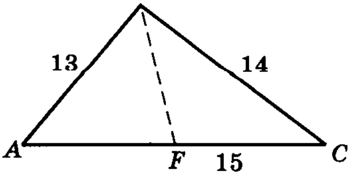

Рис. 1.68

6. Построим медиану $BF$ и вычислим ее длину $m_b$ (рис. 1.68).

Дважды применим теорему косинусов, которая для треугольника $ABC$ записывается так:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

Рассмотрим треугольник $ABF$. В этом треугольнике $AB = c$ по условию задачи, $AF = b/2$, т.к. $BF$ — медиана. Тогда, по теореме косинусов, $m_b^2 = c^2 + \dfrac{b^2}{4} - bc \cdot \cos A$. Значение $\cos A$ также с помощью теоремы косинусов находим из формулы $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, приведенной выше для треугольника $ABC$. После преобразований получаем:

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(13^2 + 14^2) - 15^2}}{2} = \frac{\sqrt{505}}{2} \text{ (см)}.$$

Эту формулу можно также получить, достроив треугольник $ABC$ до параллелограмма, в котором $AC$ является диагональю, а $BF$ — половиной другой диагонали. Тогда для вычисления $m_b$ можно воспользоваться тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

7. Построим биссектрису $BE$ и вычислим ее длину $l_b$ (рис. 1.69) по схеме, описанной в предыдущем пункте.

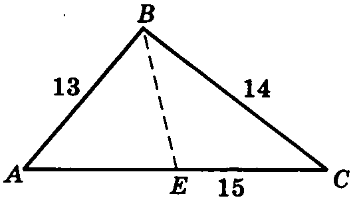

Рис. 1.69

Дополнительное затруднение связано с необходимостью вычисления длины отрезка $AE$. Найти ее нам помогает следующая теорема:

**Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные сторонам, образующим этот угол.**

Обозначим $AE = x$, тогда $EC = b - x$. Из упомянутой теоремы следует пропорция $\dfrac{x}{c} = \dfrac{b - x}{a}$. Отсюда находим: $x = \dfrac{bc}{a + c}$. Используя теорему косинусов, из треугольника $ABE$ выражаем: $l_b^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cdot \cos A$. После преобразований получаем:

$$l_b = \frac{\sqrt{ac((a + c)^2 - b^2)}}{a + c} = \frac{\sqrt{13 \cdot 14((13 + 14)^2 - 15^2)}}{13 + 14} = \frac{28\sqrt{13}}{9} \text{ (см)}.$$

Отметим, что при выводе формул для вычисления $m_b$ и $l_b$ применяются тождества сокращенного умножения, которые также должны быть включены в базу знаний.

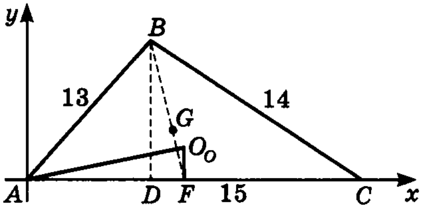


Рис. 1.70

8. Для выполнения двух последних заданий целесообразно воспользоваться методом координат. Введем прямоугольную систему координат, связанную с треугольником $ABC$, так, чтобы начало координат совпало с вершиной $A$, ось абсцисс была направлена по лучу $AC$, ось ординат была направлена вертикально вверх (рис. 1.70).

В этой системе определим координаты точек: $A(0;\ 0)$, $B(c\cdot\cos A; c\cdot\sin A)$, $C\ (b;\ 0)$, $D(c\cdot\cos A; 0)$, $F(b/2;\ 0)$.

Для определения координат точки пересечения медиан $G$ необходимо вписать в базу знаний следующие факты:

а) точка $G$ делит медиану $BF$ на отрезки $BG$ и $GF$, отношение длин которых равно 2:1;

б) точка $G$, делящая данный отрезок $BF$ в отношении $m : n$, имеет координаты: $x_G = \dfrac{x_B\cdot n + x_F\cdot m}{m+n}$; $y_G = \dfrac{y_B\cdot n + y_F\cdot m}{m+n}$;

в) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{15^2+13^2-14^2}{2\cdot 15\cdot 13} = \dfrac{33}{65}$;

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \dfrac{56}{65}$.

Вычислим теперь координаты точки $G$:

$$x_G = \frac{x_B+2x_F}{3} = \frac{c\cdot\cos A + b}{3} = \frac{13\cdot\frac{33}{65}+15}{3} = 7\frac{1}{5};$$

$$y_G = \frac{y_B+2y_F}{3} = \frac{c\cdot\sin A + 0}{3} = \frac{13\cdot\frac{56}{65}}{3} = 3\frac{11}{15}.$$

Отметим, что в общем случае координаты точки пересечения медиан $G$ треугольника $ABC$ могут быть представлены в компактном виде. Действительно, так как точка $F$ — середина стороны $AC$,

то $x_F = \dfrac{x_A + x_C}{2}$; $y_F = \dfrac{y_A + y_C}{2}$.

Тогда $x_G = \dfrac{x_B + 2x_F}{3} = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$;

$y_G = \dfrac{y_B + 2y_F}{3} = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

Для определения координат центра описанной окружности $O_o$ необходимо вспомнить, что точка $O_o$ лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, т. е., в частности, точка $O_o$ лежит на перпендикуляре $FO_o$ к стороне $AC$. Предположим, что точка $O_o$ построена, соединим ее с точкой $A$ и рассмотрим прямоугольный треугольник $AFO_o$(рис. 1.70). В этом треугольнике катет $AF = b/2 = 7{,}5$ см, гипотенуза $AO_o = R = 8{,}125$ см. Тогда, по теореме Пифагора, катет $FO_o = \sqrt{AO_o^2 - AF^2} = 3{,}125$ см. Очевидно, что $O_o$ (7,5; 3,125).

Для определения координат центра вписанной окружности $O_в$ необходимо вспомнить, что точка $O_в$ лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника, в частности, она лежит на биссектрисе $AO_в$ (рис. 1.71).

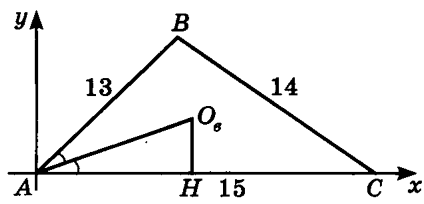

Рис. 1.71

Предположим, что точка $O_в$ построена, соединим ее с точкой $A$ и опустим из точки $O_в$ перпендикуляр $O_вH$ на прямую $AC$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $AO_вH$.

В этом треугольнике катет $O_вH = r = 4$ см; $\angle O_вAH = \dfrac{1}{2}\angle BAC$.

Тогда катет $AH = r \cdot \operatorname{ctg}\angle O_вAH$. Воспользуемся формулой $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$. Отсюда, учитывая найденные ранее значения

$\sin A = \frac{56}{65}$; $\cos A = \frac{33}{65}$, получаем $\operatorname{ctg}\angle O_в AH = \frac{7}{4}$ и $AH = 4 \cdot \frac{7}{4} =$ $= 7$ (см). Таким образом, $O_в$ (7; 4).

Внесём в базу знаний формулу для вычисления расстояний между точками $A\ (x_A;\ y_A)$ и $B\ (x_B;\ y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Тогда, учитывая, что $G\left(\frac{36}{5}; \frac{56}{15}\right)$; $O_в$ (7; 4); $O_о\left(\frac{15}{2}; \frac{25}{8}\right)$, получаем:

$$GO_о = \sqrt{\left(\frac{15}{2} - \frac{36}{5}\right)^2 + \left(\frac{25}{8} - \frac{56}{15}\right)^2} = \frac{\sqrt{265}}{24} \text{ (см)}.$$

9. $O_в O_о = \sqrt{\left(\frac{15}{2} - 7\right)^2 + \left(\frac{25}{8} - 4\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{8}$ (см).

---

Размерности всех результатов верны. Все заданные величины использованы при решении задачи. Поскольку каждому этапу определения искомых величин при решении присвоен номер, соответствующий номеру в условии задачи, мы не будем выписывать ответы в отдельном пункте.

## Задачи на построение

**Пример № 1.17 [16]**

---

С помощью циркуля и линейки построить общую внешнюю касательную $AB$ к двум данным окружностям с центрами $O_1$ и $O_2$, имеющим радиусы $R_1$ и $R_2$ ($R_1 < R_2$) и расположенным так, как это показано на рис. 1.72, т. е. расстояние между центрами окружностей $O_1$ и $O_2$ должно превышать сумму их радиусов $R_1$ и $R_2$.

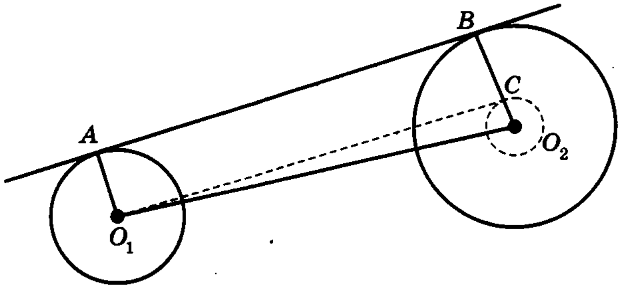


Рис. 1.72

Для решения задач на построение используется алгоритм, который отличается от данного в памятке. Он описан ниже в виде схемы.

**Схема решения задач на построение**

1. Предполагаем, что задача решена и требуемое построение выполнено. Изображаем его эскиз.

2. Если необходимо, выполняем на эскизе дополнительные построения и анализируем чертёж с целью выявления связей между его элементами, которые можно использовать при построении.

3. Если исходная задача сложна, но удаётся разбить её на ряд более простых, то решаем каждую из них в отдельности.

4. На основании проведённого анализа и с учётом приобретённого опыта решения более простых задач осуществляем «сборку», то есть выполняем требуемое построение.

Перейдём к решению задачи. В данном случае краткое условие можно не писать, да и чертёж уже дан на рис. 1.72. Но прежде чем перейти к реализации схемы решения, надо внести в базу знаний определение общей внешней касательной двух окружностей.

Общей внешней касательной двух окружностей называется такая общая касательная, для которой обе эти окружности расположены по одну сторону от неё (лежат в одной полуплоскости).

Заметим, что таких касательных должно быть две, т. к. изображённая на рис. 1.72 совокупность двух окружностей симметрична относительно прямой $O_1O_2$.

1. Итак, предположим, что задача решена и общая внешняя касательная к двум данным окружностям $(O_1; R_1)$ и $(O_2; R_2)$ построена.

2. Изобразим на черновике эскиз требуемого построения (рис. 1.72). Здесь $O_1$ и $O_2$ — центры окружностей; $A$ и $B$ — точки касания окружностей с их общей внешней касательной.

3. Выполним на эскизе следующие дополнительные построения: проведем к точкам касания радиусы $O_1A$ и $O_2B$; соединим центры окружностей отрезком $O_1O_2$.

Отметим, что, по свойству радиуса, проведенного к точке касания окружности и прямой, $O_1A \perp AB$; $O_2B \perp AB$.

4. Опустим из точки $O_1$ перпендикуляр на $O_2B$, точка $C$ — точка пересечения этого перпендикуляра и $O_2B$.

5. Так как $O_1A \perp AB$ и $O_2B \perp AB$, то $O_1A \parallel O_2B$; так как $O_1C \perp O_2B$ и $AB \perp O_2B$, то $O_1C \parallel AB$. Тогда $CB = O_1A = R_1$, как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми.

6. Теперь можем определить, что $O_2C = O_2B - CB = R_2 - R_1$.

7. Отметим, что, если построить окружность с центром $O_2$ и радиусом $R_2 - R_1$, то $O_1C$ будет касаться этой окружности в точке $C$, так как $O_1C \perp O_2B$.

8. Тогда требуемое построение можно выполнить следующим образом:

а) с помощью циркуля и линейки построим отрезок, равный $R_2 - R_1$;

б) начертим окружность с центром $O_2$ и радиусом $R_2 - R_1$;

в) проведем касательную из точки $O_1$ к этой окружности, обозначив точку касания буквой $C$;

г) построим луч $O_2C$, пересекающий окружность $(O_2; R_2)$ в точке $B$;

д) из точки $B$ проведем касательную к окружности $(O_1; R_1)$. Касательная $AB$, где $A \in (O_1; R_1)$, а $B \in (O_2; R_2)$, и будет общей внешней касательной.

Заметим, что в пункте в) мы могли провести из точки $O_1$ две касательные к окружности и, выполняя для второй из этих касательных все построения, получить ещё одну общую касательную $A_1B_1$.

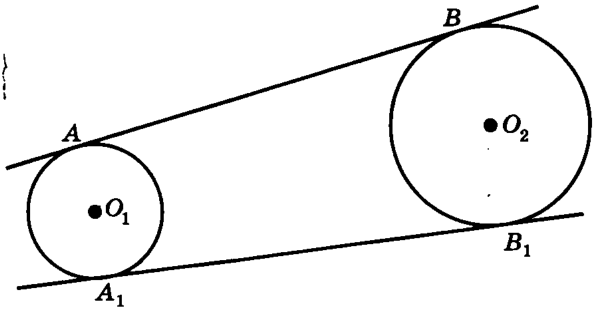


Рис. 1.73

Итак, задача имеет два решения (рис. 1.73): $AB$ и $A_1B_1$.

## Вспомогательная задача

Задача о построении касательной к данной окружности $(O; R)$, проходящей через точку $A$, лежащую вне этой окружности (рис. 1.74).

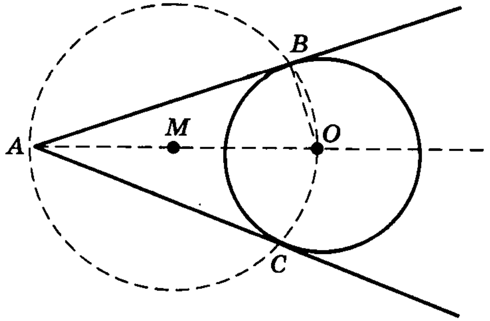


Рис. 1.74

Решение

1. Решение данной задачи требует пополнения сформированной ранее базы знаний теоремой об измерении вписанного

угла и следствием из этой теоремы, которое гласит, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.

2. Построим отрезок $AO$ и найдем его середину — точку $M$.

3. Построим окружность с центром $M$ и радиусом $MO$.

4. Обозначим точки пересечения окружностей ($M$; $MO$) и ($O$; $R$) буквами $B$ и $C$. Отметим, что этих точек — две. Они и являются искомыми точками касания. Действительно, точки $B$ и $C$ принадлежат окружности ($O$; $R$); $\angle ABO$ и $\angle ACO$ — прямые, так как это вписанные углы, опирающиеся на диаметр $AO$.

Задачу, к рассмотрению которой мы сейчас перейдём, часто называют смешанной, так как при её решении используются знания как из геометрии, так и из алгебры. В этой задаче требуется доказать неравенство, но в этом неравенстве сравниваются длины сторон треугольника.

**Пример № 1.18.**

Дано: $a$ и $b$ — катеты прямоугольного треугольника, $c$ — его гипотенуза.

Доказать, что $a + b \leqslant c\sqrt{2}$.

Доказательство

Доказательство начнём с создания базы знаний. Из геометрии известно, что $a$, $b$ и $c$ — величины положительные, так как это длины отрезков.

$a^2 + b^2 = c^2$ — теорема Пифагора.

Из курса алгебры нам могут быть полезны следующие тождества:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$. Отметим, что последнее неравенство превращается в равенство при $a = b$.

Сформировав базу знаний, можем приступить к доказательству.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab.$

Надо оценить $2ab$ через $c$.

$a^2 - 2ab + b^2 = c^2 - 2ab \geqslant 0;$

$c^2 \geqslant 2ab;$

$(a + b)^2 = c^2 + 2ab \leqslant 2c^2.$

Решая неравенство $(a + b)^2 \leqslant 2c^2$ и учитывая, что $a + b > 0$ и $c > 0$, получаем:

$a + b \leqslant c\sqrt{2}$, что и требовалось доказать.

Более того, используя неравенство треугольника $a + b > c$, получаем для прямоугольного треугольника оценку величины суммы двух катетов:

$$c < a + b \leqslant c\sqrt{2}.$$

А теперь представим себе, что мы не сами доказали это неравенство, а нашли его в учебной или справочной литературе. И нам захотелось узнать, для каких прямоугольных треугольников неравенство строгое, а для каких — оно превращается в равенство. Для этого рассмотрим вначале знаменитый египетский треугольник со сторонами 3, 4 и 5.

Итак, здесь $a + b = 7$;

$c\sqrt{2} \approx 1{,}41 \cdot 5 = 7{,}05.$

$7 < 7{,}05$; следовательно, $a + b < c\sqrt{2}$.

Рассмотрим теперь равнобедренный прямоугольный треугольник. В этом треугольнике $a = b$, следовательно, $a + b = 2a$.

$c = a\sqrt{2}$; $c\sqrt{2} = 2a$.

Итак, мы доказали, что в равнобедренном прямоугольном треугольнике

$$a + b = c\sqrt{2}.$$

Это позволяет утверждать, что верхняя граница суммы двух катетов указана в рассматриваемом неравенстве с максимально возможной точностью, т. к. она достижима.

Рассмотрим далее примеры трех несложных задач, связанных с применением метода координат и свойствами векторов.

В этих задачах нет необходимости в выполнении чертежа и записи краткого условия.

**Пример № 1.19.**

Запишите уравнение окружности, которая проходит через точки $A$ (0; −1) и $B$ (6; 5), причем центр окружности лежит на оси ординат. Укажите координаты точек пересечения данной окружности и оси абсцисс. Найдите длину окружности и площадь соответствующего круга.

База знаний

1. Уравнение окружности с центром $O$ ($a$; $b$) и радиусом $R$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

2. Уравнение оси абсцисс: $y=0$.

3. Длина окружности: $L=2\pi R$.

4. Площадь круга: $S=\pi R^2$.

Решение

1. Так как центр окружности лежит на оси ординат, то его координаты равны (0; $b$). Тогда уравнение окружности можно представить в виде

$$x^2+(y-b)^2=R^2.$$

Подставляем в это уравнение координаты точек $A$ и $B$ и получаем систему:

$$\begin{cases}0+(-1-b)^2=R^2,\\36+(5-b)^2=R^2.\end{cases}\to\begin{cases}b=5,\\R=6.\end{cases}$$

Уравнение окружности принимает вид $x^2+(y-5)^2=36$.

2. Координаты точек пересечения данной окружности и оси абсцисс находим из системы уравнений:

$$\begin{cases}x^2+(y-5)^2=36,\\y=0.\end{cases}$$

Получаем $M$ $(-\sqrt{11};\ 0)$, $N$ $(\sqrt{11};\ 0)$.

3. Длина окружности: $L = 2\pi R = 12\pi$.
4. Площадь круга: $S = \pi R^2 = 36\pi$.

Ответ: Уравнение окружности: $x^2 + (y-5)^2 = 36$.
Координаты точек пересечения окружности и оси абсцисс: $M(-\sqrt{11};\ 0)$, $N(\sqrt{11};\ 0)$.
Длина окружности: $L = 12\pi$. Площадь круга: $S = 36\pi$.

## Пример № 1.20.

Даны два вектора $\vec{a}\{-2;\ -5\}$, $\vec{b}\{4;\ \lambda\}$.
Найдите значение параметра $\lambda$, если: а) $\vec{a} \perp \vec{b}$; б) $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

### База знаний

Пусть $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$.
1. Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, причем $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2$.
2. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = k\vec{a}$, причем $x_2 = kx_1$, $y_2 = ky_1$.

### Решение

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 4 + (-5) \cdot \lambda = -8 - 5\lambda$.
Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $-8 - 5\lambda = 0$. Отсюда $\lambda = -1{,}6$.
2. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $4 = -2k$, откуда $k = -2$;
кроме того, $\lambda = -5k = -5 \cdot (-2) = 10$.

Ответ: Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\lambda = -1{,}6$; если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\lambda = 10$.

## Пример № 1.21

Даны два вектора $\vec{a}\{0;\ 3\}$, $\vec{b}\{-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\}$.
Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

### База знаний

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, где $\alpha$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

## Решение

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = \frac{0\cdot(-2\sqrt{2})+3\cdot 2\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{8+8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $\alpha = 45°$.

Ответ: $\alpha = 45°$.

В заключительной части этого параграфа приведем примеры нескольких поучительных задач, которые содержались в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ в 2003–2007 годах. Задачи, соответствующие новому формату ЕГЭ, представлены ниже, в § 4 этой главы.

**Пример № 1.22.**

Площадь треугольника $ABC$ равна $20\sqrt{3}$. Найдите $AC$, если сторона $AB$ равна 8 и она больше половины стороны $AC$, а медиана $BM$ равна 5.

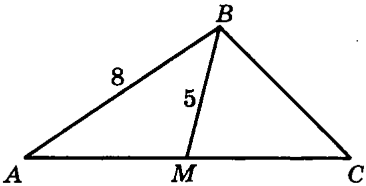


Рис. 1.75

Дано: $S_{ABC} = 20\sqrt{3},\ AB = 8;$
$AB > 0{,}5AC,\ BM = 5.$
$BM$ — медиана.

Найти: $AC$.

## Решение

Используем основную формулу площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ah$, где $a$ — основание треугольника, $h$ — его высота. Рассмотрим треугольники $ABM$ и $MBC$. Поскольку $BM$ — медиана, то $AM = MC$. Основания треугольников равны, высота, проведённая из вершины $B$, — общая, следовательно, площади рассматриваемых треугольников равны. Дальше перспективнее исследовать $\Delta ABM$, так как в нём известны две стороны. $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 10\sqrt{3}.$ Наша цель — найти $AM$.

Применим формулу площади треугольника к треугольнику $ABM$:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot BM \cdot \sin \angle ABM.$$

Подставив в эту формулу величины сторон треугольника и его площадь, получаем уравнение

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin \angle ABM = 10\sqrt{3}, \ \sin \angle ABM = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Учитываем, что в треугольнике $ABM$ сторона $AM = \frac{1}{2} AC$ не является наибольшей, так как, по условию, $AB > \frac{1}{2} AC$. Тогда $\angle ABM$ — острый угол, синус которого равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $\angle ABM = 60°$.

Внеся в базу знаний теорему косинусов и воспользовавшись ею, получим

$AM^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 64 + 25 - 40 = 49;$

$AM = 7; AC = 2AM = 14.$

Ответ: $AC = 14$.

**Пример № 1.23.**

В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 60°, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

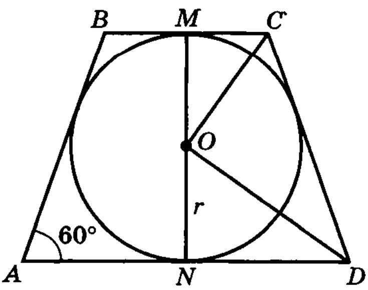


Рис. 1.76

Дано: $ABCD$ — трапеция,
$AB = CD$. $\angle BAD = 60°$;
$S_{ABCD} = 24\sqrt{3}$.

Найти: $r$.

## Решение

Центр вписанной в трапецию окружности $O$ лежит на пересечении биссектрис внутренних углов трапеции.

Рассмотрим $\Delta OND$ (его на чертеже можно выделить другим цветом). Так как радиус $ON$, проведённый в точку касания $N$, перпендикулярен касательной, то этот треугольник прямоугольный. Так как центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла $CDA$, который равен, по условию, 60°, то $\angle OND = 30°$. Используя определение тангенса, получаем

$$\frac{r}{ND} = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad ND = r\sqrt{3}; \; AD = 2r\sqrt{3}.$$

Так как сумма односторонних углов, образованных при пересечении параллельных прямых $BC$ и $AD$ секущей $CD$, равна 180°, то $\angle MCD = 180° - \angle CDN = 180° - 60° = 120°$.

Рассмотрим $\Delta OMC$. Он прямоугольный, и $\angle MCO = 60°$. Отсюда $\frac{MC}{r} = \operatorname{ctg} 60°$; $MC = \frac{r}{\sqrt{3}}$; $BC = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Чтобы составить уравнение для нахождения $r$, включим в базу знаний формулу площади трапеции:

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot MN.$$

Учитывая, что $MN = 2r$, получаем $\left(\sqrt{3}r + \frac{r}{\sqrt{3}}\right) \cdot 2r = 24\sqrt{3}$.

Отсюда $r^2 = 9$, следовательно, $r = 3$.

Ответ: $r = 3$.

### Пример № 1.24

Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках $M$ и $N$, при этом $MN = 8$ см. Найдите сумму длин оснований трапеции, если их отношение равно 4.

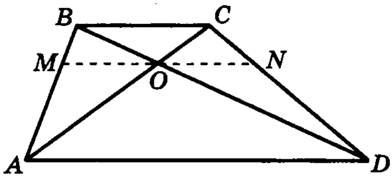


Рис. 1.77

<u>Дано:</u> $ABCD$ — трапеция,
$MN \parallel BC \parallel AD$,
$MN = 8$ см,
$AD : BC = 4$.

<u>Найти:</u> $AD + BC$.

<u>Решение</u>

В базу знаний необходимо включить признаки подобия треугольников и «модифицированную теорему Фалеса», которая гласит, что отрезки прямых, заключенные между параллельными прямыми, пропорциональны (см. § 1).

Проведем анализ условия.

Обозначим точку пересечения диагоналей, через которую проходит $MN$, буквой $O$. Так как, по условию, $MN \parallel BC \parallel AD$, то, в силу «модифицированной теоремы Фалеса»,

$$AM : MB = AO : OC = DO : OB = DN : NC = m : n.$$

Учитывая, что $AB = AM + MB$, $AC = AO + OC$, $DB = DO + OB$, $DC = DN + NC$, получаем

$$AB : MB = AC : OC = DB : OB = DC : NC = (m + n) : n = k_1;$$
$$AB : AM = AC : AO = DB : DO = DC : DN = (m + n) : m = k_2.$$

Так как $MO \parallel AD$ и $ON \parallel AD$, то $\Delta ABD \sim \Delta MBO$, $\Delta ACD \sim \Delta OCN$, причем коэффициент подобия в обоих случаях одинаков и равен $k_1$. Это значит, что $MO : AD = ON : AD = k_1$. Отсюда следует, что $MO = ON = {}^1/_2 MN = 4$ см.

Аналогично устанавливаем, что $\Delta ABC \sim \Delta AMO$, $\Delta DBC \sim \Delta DON$, причем коэффициент подобия в обоих случаях равен $k_2$.

Найдем теперь искомую сумму оснований трапеции.

Пусть $BC = x$, тогда, в силу условия задачи, $AD = 4x$.

Рассмотрим подобные треугольники $ABD$ и $MBO$. В этих треугольниках $AD : MO = AB : MB = k_1 = (m + n) : n$.

Тогда можно записать $(m + n) : n = 4x : 4$.

Рассмотрим подобные треугольники $ABC$ и $AMO$. В этих треугольниках $BC : MO = AB : AM = k_2 = (m + n) : m$.

Тогда можно записать $(m + n) : m = x : 4$.

Выражая $x$ из двух полученных уравнений, находим
$x = (m + n) : n$; $x = 4(m + n) : m$.

Тогда $(m + n) : n = 4(m + n) : m$. Отсюда получаем $m = 4n$.

Подставляем это соотношение в первое из выражений для $x$ и получаем: $x = 5$, $4x = 20$. Таким образом, $BC = 5$ см, $AD = 20$ см.

$BC + AD = 5 + 20 = 25$ (см).

Ответ: $AD + BC = 25$ см.

**Пример № 1.25.**

Биссектрисы $AD$ и $CE$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$, $DE = 4\sqrt{3}$ см. Найти меньшую сторону треугольника $DEO$, если описанная около него окружность проходит через вершину $B$.

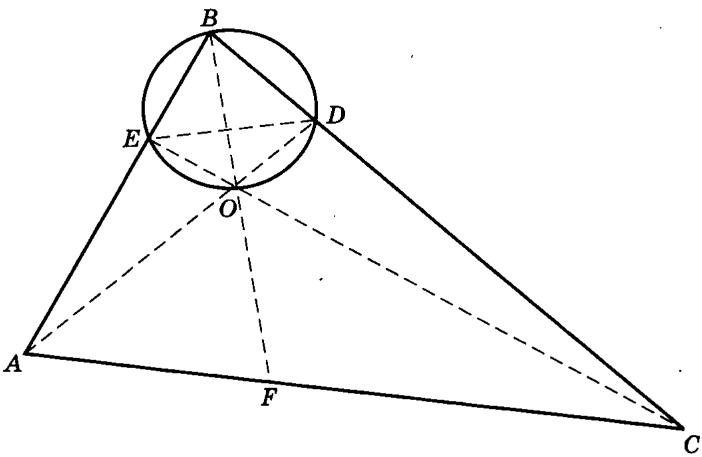


Рис. 1.78

Дано: $AD$, $CE$ — биссектрисы $\Delta ABC$.

Точка $O = AD \cap CE$. Точка В $\in$ окружности, описанной около $\Delta EOD$.

$ED = 4\sqrt{3}$ см.

Найти: меньшую сторону $\Delta EOD$.

## База знаний

1. Сумма углов треугольника равна 180°.

2. Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.

3. Вертикальные углы равны между собой.

4. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. На равные дуги опираются равные вписанные углы. Хорды, стягивающие равные дуги, равны между собой.

5. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

6. Теорема синусов: стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

## Решение

1. Проведем биссектрису $BF$.
Тогда $\angle ABF = \angle CBF \to \smile EO = \smile DO \to EO = DO$.

2. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle BCA = 2\gamma$.
Тогда $\angle ABC = 180° - (2\alpha + 2\gamma)$, $\angle OAC = \alpha$, $\angle OCA = \gamma$.

3. Так как четырехугольник $BEOD$ вписан в окружность, то $\angle EOD = 180° - \angle ABC = 180° - (180° - (2\alpha + 2\gamma)) = 2\alpha + 2\gamma$.

4. Так как $\angle EOD$ и $\angle AOC$ — вертикальные, то $\angle AOC = \angle EOD = 2\alpha + 2\gamma$.

5. Сумма углов треугольника $AOC$ равна 180°. С другой стороны, сумма углов треугольника $AOC$ равна $(2\alpha + 2\gamma) + \alpha + \gamma = 3\alpha + 3\gamma$.
Тогда $3\alpha + 3\gamma = 180° \to \alpha + \gamma = 60°$.

6. $\angle EOD = 2(\alpha + \gamma) = 2 \cdot 60° = 120°$.

7. Так как $EO = OD$, то $\angle OED = \angle ODE = (180° - 120°) : 2 = 30°$.

8. По теореме синусов из треугольника $EOD$ имеем:

$$OD : \sin 30° = ED : \sin 120°.$$

Отсюда $OD = \dfrac{ED \cdot \sin 30°}{\sin 120°} = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 1/2}{\sqrt{3}/2} = 4$ (см).

<u>Ответ</u>: Меньшая сторона треугольника $EOD$ равна 4 см.

## Пример № 1.26

В треугольник, длины сторон которого равны 6, 10 и 12, вписана окружность. Касательная к окружности пересекает две большие стороны. Найдите периметр треугольника, отсекаемого касательной от данного треугольника.

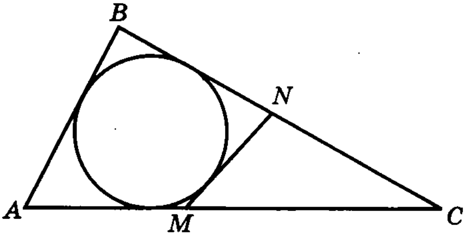


Рис. 1.79

Дано: $AB = 6$, $BC = 10$ и $AC = 12$.
$MN$ — касательная к окружности, вписанной в $ABC$.

Найти: $P_{\Delta CMN}$.

### Решение

1. Очевидно, что касательная $MN$ может быть проведена различными способами. Так как в условии задачи об этом ничего не сказано, то можно предположить, что периметр треугольника $CMN$ не зависит от того, как проведена касательная $MN$. Однако этот факт нуждается в доказательстве.

2. Включаем в базу знаний следующую теорему: «Суммы противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны».

В рассматриваемой задаче это означает, что $AB + MN = AM + BN$. Отсюда следует, что $MN = AM + BN - AB$.

3. $CN = BC - BN$, $CM = AC - AM$.

4. $P_{\Delta CMN} = MN + CN + CM = (AM + BN - AB) + (BC - BN) + (AC - AM) = BC + AC - AB$.

5. Таким образом, периметр треугольника $CMN$ выражается через длины сторон треугольника $ABC$, то есть действительно не зависит от того, как проведена касательная $MN$.

В рассматриваемой задаче $P_{\Delta CMN} = 10 + 12 - 6 = 16$.

Ответ: $P_{\Delta CMN} = 16$.

## Пример № 1.27.

В треугольнике $ABC$ угол $A$ вдвое больше угла $B$. Длины сторон, лежащих против этих углов, равны соответственно 12 и 8. Найдите длину третьей стороны.

В этой задаче нет необходимости в чертеже и кратком условии, так как вся необходимая информация, включая буквенные обозначения, содержится в тексте задачи.

База знаний будет сформирована по мере решения задачи.

### Решение.

1. Обозначим $\angle B = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 180° - 3\alpha$. Очевидно, $\alpha < 90°$, так как в противном случае мы получаем $\angle A \geqslant 180°$, что невозможно, так как это угол треугольника.

2. Неизвестную сторону $AB$, лежащую против угла $C$, обозначим $x$.

Включим в базу знаний следующие факты:

а) теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$;

б) формула приведения: $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$;

в) формула синуса двойного угла: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi$;

г) формула синуса тройного угла: $\sin 3\varphi = \sin\varphi(3 - 4\sin^2\varphi)$.

3. По теореме синусов: $\dfrac{x}{\sin(180° - 3\alpha)} = \dfrac{8}{\sin\alpha} = \dfrac{12}{\sin 2\alpha}$.

4. Рассмотрим уравнение $\dfrac{x}{\sin(180° - 3\alpha)} = \dfrac{8}{\sin\alpha} \to$

$\to \dfrac{x}{\sin 3\alpha} = \dfrac{8}{\sin\alpha} \to \dfrac{x}{\sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha)} = \dfrac{8}{\sin\alpha} \to$

$\to x = 8(3 - 4\sin^2\alpha)$.

5. Рассмотрим уравнение $\dfrac{8}{\sin\alpha} = \dfrac{12}{\sin 2\alpha} \to$

$$\to \frac{8}{\sin\alpha} = \frac{12}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} \to \cos\alpha = \frac{3}{4}.$$

6. Дополним базу знаний основным тригонометрическим тождеством $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Отсюда $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - 9/16 = 7/16$.

7. $x = 8(3 - 4\cdot 7/16) = 10$.

Ответ: $AB = 10$.

**Пример № 1.28.**

Дан ромб $ABCD$ с острым углом $B$. Площадь ромба равна 320, а синус угла $B$ равен 0,8. Высота $CH$ пересекает диагональ $BD$ в точке $K$. Найдите длину отрезка $CK$.

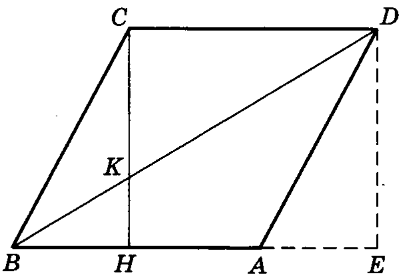

Рис. 1.80

Дано: $AB = BC = CD = DA$;
$\angle B < 90°$; $\sin B = 0{,}8$;
$S_{ABCD} = 320$; $CH \perp AD$.

Найти: $CK$.

База знаний

1. Площадь ромба $ABCD$, у которого длина стороны равна $a$, высота равна $h$ и задан синус угла $B$, вычисляется по формулам $S = a^2 \cdot \sin B$ или $S = a \cdot h$.

2. Сходственные стороны подобных треугольников пропорциональны.

Решение.

1. Пусть длина стороны ромба $ABCD$ равна $a$. Тогда, так как $S = a^2 \cdot \sin B$, то $0{,}8a^2 = 320$. Тогда $a = \sqrt{320 : 0{,}8} = \sqrt{400} = 20$.

2. Обозначим $CH = h$. Так как $S = a \cdot h$, то $h = S : a = 320 : 20 = 16$.

3. В прямоугольном треугольнике $BCH$, по теореме Пифагора, $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{144} = 12$.

4. Продолжим сторону $BA$ и проведем $DE \perp BA$. Очевидно, $HE = CD = 20$, тогда $BE = BH + HE = 12 + 20 = 32$.

5. $\Delta BDE \sim \Delta BKH$, по первому признаку подобия треугольников (это прямоугольные треугольники, имеющие общий острый угол $KBH$).

Тогда $KH : BH = DE : BE$. Отсюда $KH : 12 = 16 : 32$, $KH = (16 : 32) \cdot 12 = 6$.

6. $CK = CH - KH = 16 - 6 = 10$.

Ответ: 10.

**Пример № 1.29.**

В окружности проведены хорды $AB = 1$ и $AC = 2$. Угол $BAC$ равен 120°. Хорда $AD$ — биссектриса угла $BAC$. Найдите длину хорды $AD$.

База знаний

1. Величина вписанного угла равна половине дуги, на которую он опирается.

2. Равные дуги стягиваются равными хордами.

3. Теорема косинусов: в произвольном треугольнике со сторонами $a$, $b$, $c$ и углом $\alpha$, лежащим против стороны $a$,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.

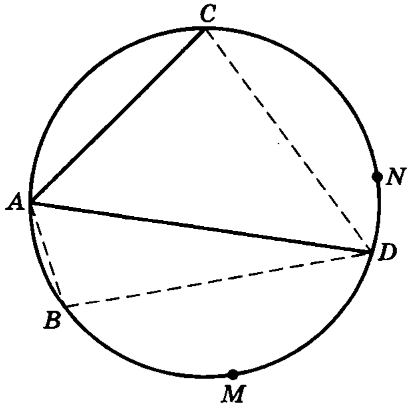

Рис. 1.81

Решение

1. Соединим точку $D$ с точками $B$ и $C$.

2. Так как, по условию, $AD$ — биссектриса угла $BAC$, то

$\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 120° : 2 = 60°$.

3. Поскольку $\angle BAD$ и $\angle DAC$ — равные между собой вписанные углы, то равны также дуги, на которые они опираются: $\smile BMD = \smile CND$. Тогда $BD = CD$.

4. Обозначим $AD = x$, $BD = CD = a$ и примем во внимание, что, по условию, $AB = 1$, $AC = 2$. Тогда, по теореме косинусов, из треугольников $ABD$ и $ACD$ находим:

$$\begin{cases} a^2 = 1^2 + x^2 - 2\cdot 1\cdot x\cdot \cos 60°, \\ a^2 = 2^2 + x^2 - 2\cdot 2\cdot x\cdot \cos 60°; \end{cases} \to \begin{cases} a^2 = 1 + x^2 - x, \\ a^2 = 4 + x^2 - 2x. \end{cases} \to$$

$1 + x^2 - x = 4 + x^2 - 2x \to x = 3$. $AD = 3$.

Ответ: $AD = 3$.

# § 4. Анализ типовых заданий ЕГЭ

Задачи, включенные в контрольно-измерительные материалы ЕГЭ нового образца, подразделяются на две части. Часть 1 содержит двенадцать заданий базового уровня (B1–B12). Эти задания считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит шесть более сложных заданий (C1–C6). При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Рассмотрим геометрические задачи, содержащиеся в контрольно-измерительных материалах и демонстрационных вариантах ЕГЭ. Отметим, что в ЕГЭ 2010 года две планиметрические задачи содержались в части B (B4 и B6) и одна — в части C (C4).

## Задачи типа B4

**Пример № 1.30.**

В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен $90°$, $AB = 13$, $\cos A = \frac{12}{13}$. Найдите $BC$.

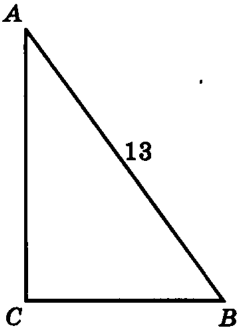


Рис. 1.82

Дано: $AB = 13$, $\cos A = \frac{12}{13}$.

Найти: $BC$.

Включаем в базу знаний теорему Пифагора и определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника как отношение катета, прилежащего к данному углу, к гипотенузе.

Решение

1. $AC = AB \cdot \cos A = 13 \cdot \frac{12}{13} = 12$.

2. $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$.

Проверка

Из треугольника $ABC$: $\sin A = BC : AB = 5/13$.
$\sin^2 A + \cos^2 A = (5/13)^2 + (12/13)^2 = 1$.

Выполняется основное тригонометрическое тождество, значит, задача решена верно.

Ответ: 5.

**Пример № 1.31**

В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен $90°$, $\sin A = \frac{20}{29}$. Найдите $\mathrm{tg} B$.

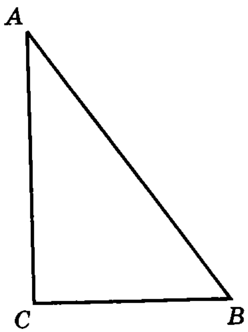

Рис. 1.83

Дано: $\angle C = 90°, AC = 21, \sin A = \frac{20}{29}$.

Найти: tg$B$.

Включаем в базу знаний определения тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника, а также тригонометрические формулы: $\cos(90° - A) = \sin A$; $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

Решение

1. Так как треугольник $ABC$ — прямоугольный, то $\angle B = 90° - \angle A$.

2. Тогда $\cos B = \cos(90° - A) = \sin A = 20/29$.

3. Так как $\angle B$ — острый, то $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - (20/29)^2} = 21/29$.

4. $\text{tg} B = \sin B / \cos B = (21/29) : (20/29) = 21/20 = 1{,}05$.

Проверка

Для проверки вычислим tg$B$ другим способом.

1. $\text{tg}^2 B = \frac{1}{\cos^2 B} - 1 = \frac{1}{\sin^2 A} - 1 = \frac{1}{(20/29)^2} - 1 = \left(\frac{21}{20}\right)^2$.

2. Так как $\angle B$ — острый, то $\text{tg} B = \frac{21}{20} = 1{,}05$.

Ответ: 1,05.

## Задачи типа В6

**Пример № 1.32**

**Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \times 1$ см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.**

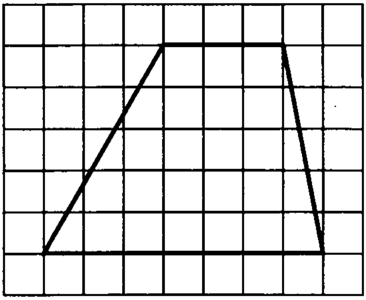

Рис. 1.84

Решение

На рис. 1.84 изображена трапеция. Площадь трапеции находим по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где $a$ и $b$ — длины оснований, $h$ — длина высоты.

Вычисляем по клеткам $a = 3$, $b = 7$, $h = 5$.

Тогда $S = \frac{3+7}{2} \cdot 5 = 25$.

Проверка

Для проверки можно вычислить площадь прямоугольника, в который вписана данная трапеция, и вычесть из нее площади двух прямоугольных треугольников: $35 - 7{,}5 - 2{,}5 = 25$.

Ответ: 25.

**Пример № 1.33**

**Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (0; 0), (7; 4), (4; 7).**

Решение

Решаем эту задачу способом, который был предложен для проверки задачи № 1.32. Площадь искомого треугольника (на чертеже он закрашен) получаем, вычитая из площади квадрата со стороной 7 площади двух прямоугольных треугольников с катетами 7 и 4 и площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3. Получаем

$$S = 49 - 14 - 14 - 4{,}5 = 16{,}5.$$

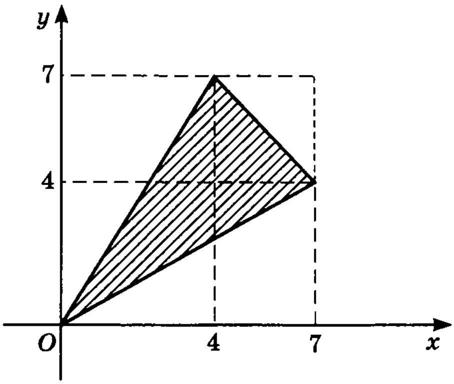


Рис. 1.85

Проверка

Проверку можно осуществить, вычислив длины сторон треугольника по известным координатам его вершин и применив формулу Герона. Предлагаем читателям сделать это самостоятельно.

Ответ: 16,5.

## Задачи типа С4

**Пример № 1.34**

В треугольнике $ABC$ на стороне $AB$ взята точка $M$, а на стороне $BC$ — точка $N$. Отрезки $CM$ и $AN$ пересекаются в точке $E$. Найдите $CE : EM$, если $AM : MB = m : n$, $CN : NB = p : q$.

Построим треугольник $ABC$, отметим точку $M$ на стороне $AB$ и точку $N$ на стороне $BC$, построим отрезки $CM$ и $AN$, обозначим точку пересечения $CM$ и $AN$ буквой $E$. Для решения задачи выполним дополнительное построение: проведем $MK \parallel AN$ (рис. 1.86).

В записи краткого условия, так же как и в предыдущей задаче, нет необходимости, так как оно просто дублировало бы информацию, содержащуюся в текстовом условии.

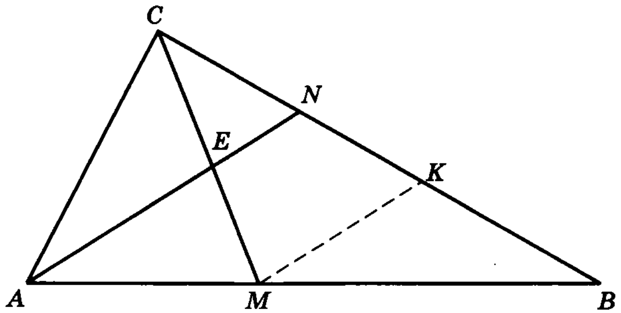


Рис. 1.86

## База знаний

Теорема о пропорциональных отрезках («модифицированная теорема Фалеса»):

Пусть на прямой $a$ выбраны точки $A$, $B$, $C$, причем $AB : BC = m : n$. Проведем через точки $A$, $B$, $C$ параллельные между собой прямые, пересекающие некоторую прямую $b$ в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно. Тогда $A_1B_1 : B_1C_1 = m : n$.

## Решение

1. По теореме о пропорциональных отрезках, $NK : KB = m : n$, так как $AM : MB = m : n$, по условию задачи; $EN \parallel MK$, по построению.

Тогда $NK : NB = m : (m + n)$, так как $NB = NK + KB$. Отсюда $NB = NK \cdot \frac{m+n}{m}$.

2. Учитываем, что, по условию, $CN : NB = p : q$.

Рассмотрим отношение $CN : NB$. Получаем $CN : NB = CN : \left(NK \cdot \frac{m+n}{m}\right)$.

Тогда $CN:NK=\frac{p}{q}\cdot\frac{m+n}{m}$.

3. Из теоремы о пропорциональных отрезках следует, что $CE : EM = CN : NK$, так как $EN \parallel MK$, по построению.

Тогда $CE:EM=\frac{p}{q}\cdot\frac{m+n}{m}$.

Ответ: $CE:EM=\frac{p}{q}\cdot\frac{m+n}{m}$.

Примечание. В частном случае, когда $CM$ и $AN$ — медианы треугольника $ABC$, получаем $m = n = p = q = 1$. Тогда $CE : EM = 2 : 1$.

**Пример № 1.35.**

Даны прямоугольник $ABCD$ и окружность с центром $O$, которая вписана в угол $ABC$ и проходит через вершину $D$. Сторона $CD$ пересекает окружность в точке $K$. Найдите площадь четырехугольника $ABCK$, если известно, что $AB = 8$ см, $BC = 9$ см.

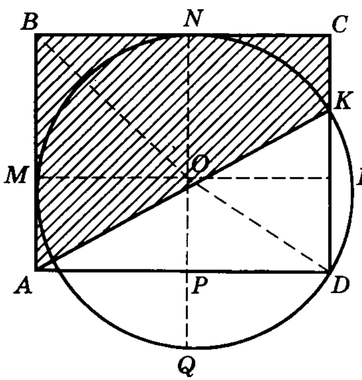


Рис. 1.87

Анализ

$ABCK$ — прямоугольная трапеция, в которой длина основания $AB = 8$ см, высота $BC = 9$ см (по условию). Для вычисления площади четырехугольника $ABCK$ требуется найти длину основания $CK$.

Решение

1. Обозначим буквами $M$ и $N$ точки касания окружности и сторон прямоугольника $AB$ и $BC$ соответственно. Построим диаметры $ML$ и $NQ$ и обозначим буквой $P$ точку пересечения $NQ$ со стороной $AD$. Соединим центр окружности $O$ с вершинами $B$ и $D$.

2. $OM \perp AB$, $ON \perp BC$ по свойству радиусов, проведенных в точки касания.

3. $PA = OM = ON = LC = R$, где $R$ — радиус окружности.

Тогда $PD = 9 - R$, $OP = 8 - R$. Очевидно, что $OD = R$.

4. По теореме Пифагора, из прямоугольного треугольника $OPD$ находим:

$$R^2 = (9 - R)^2 + (8 - R)^2.$$

Отсюда $R = 5$ см (еще один корень $R = 29$ см не имеет геометрического смысла).

5. $LD = LK = OP = 8 - R = 8 - 5 = 3$ (см).

6. $CK = CD - KD = 8 - 6 = 2$ (см).

7. Площадь трапеции $ABCK$:

$$S = \frac{AB + CK}{2} \cdot BC = \frac{8+2}{2} \cdot 9 = 45 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $S = 45$ см$^2$.

# § 5. Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите величины углов ($\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$), образованных двумя пересекающимися прямыми, если известно, что:

а) $\angle 1 = 125°36'47''$;

б) $\angle 1 > \angle 2$ в 5 раз;

в) $\angle 1 > \angle 2$ на 30°;

г) $\angle 2$ составляет 5/13 частей от величины $\angle 1$;

д) $\angle 2$ составляет 80% от величины $\angle 1$.

2. Найдите углы треугольника, если 1-й из них составляет 45% от суммы углов треугольника, а 2-й угол больше 3-го на 16°.

3. Найдите углы треугольника, если 1-й из них составляет 3/8 части от величины 2-го, а 3-й больше 1-го на 40°.

4. Найдите внутренние углы треугольника, если его внешний угол больше смежного с ним внутреннего угла на 16°,

а один из внутренних углов, не смежных с внешним, больше другого на $8^\circ$.

**5.** Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен: а) $90^\circ$; б) $60^\circ$; в) $144^\circ$; г) $120^\circ$; д) $108^\circ$?

**6.** Найдите углы выпуклого четырехугольника, если их величины пропорциональны числам 1, 2, 4, 5.

**7.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ и высотой $BD$ найдите длины сторон, если $AD = 3$ см, а периметр $P = 20$ см.

**8.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ и медианой $BD$ найдите угол $ABC$, если угол $ABD$ равен $27^\circ 38' 49''$.

**9.** Лежат ли на одной прямой точки $A$, $B$ и $C$, если $AB = 15\frac{3}{8}$ см, $BC = 0{,}75$ дм, $AC = 0{,}22875$ м?

**10.** Найдите периметр $P$ треугольника $ABC$ и длины сторон $a$ и $b$, если $a$ составляет 40% от $P$, $b$ составляет 5/8 от $a$, $c = 7$ см.

**11.** Найдите основания трапеции, если разность их длин равна 8 см, а длина средней линии составляет 9 см.

**12.** Длины двух сторон треугольника равны 6 см и 4 см, а угол между ними равен $60^\circ$. Найдите длину третьей стороны этого треугольника.

**13.** Хорды $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $E$. Их концы отсекают на окружности непересекающиеся дуги $\smile AMC$ и $\smile DNB$. Найдите $\angle BED$, если $\smile AMC = 17^\circ$; $\smile DNB = 79^\circ$.

**14.** Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, описанного около некоторой окружности, если $AB = 21$ см; $DC = 33$ см.

**15.** В прямоугольном равнобедренном треугольнике гипотенуза равна 15 см. Найдите длину высоты треугольника, опущенной на гипотенузу.

**16.** Найдите длины отрезков, на которые делит гипотенузу прямоугольного треугольника основание высоты, опущенной из вершины прямого угла, если длина гипотенузы равна 12 см, а один из углов треугольника равен $60^\circ$.

**17.** Найдите длины проекций катетов прямоугольного треугольника на его гипотенузу, если длины катетов равны 3 см и 4 см.

**18.** Из точки $D$, лежащей на катете $AC$ прямоугольного треугольника $ABC$, опущен на гипотенузу $AB$ перпендикуляр $DE$. Найдите отрезок $AD$, если $AB = 17$ см, $CB = 8$ см, $AE = 4$ см.

**19.** Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в окружность радиусом 12 см.

**20.** Периметр равностороннего треугольника $ABC$ равен 36 см, а периметр равнобедренного треугольника $ACD$ равен 40 см. Найдите стороны этих треугольников.

**21.** Найдите медиану большего угла треугольника $ABC$, если его стороны равны 4 см, 6 см и 8 см.

**22.** Найдите биссектрису большего угла треугольника $ABC$, если его стороны равны 4 см, 6 см и 8 см.

**23.** В треугольнике $ABC$ отмечены точки $D$ и $E$, которые являются серединами сторон $AB$ и $BC$ соответственно. Найдите периметр четырехугольника $ADEC$, если $AB = 24$ см, $BC = 32$ см, $AC = 44$ см.

**24.** $BD$ — высота равнобедренного треугольника $ABC$ ($AB = BC$). Найдите ее длину, если периметр треугольника $ABC$ равен 50 см, а периметр треугольника $ABD$ равен 30 см.

**25.** Найдите площадь прямоугольного треугольника, если известно, что медиана, проведенная к его гипотенузе, делит прямой угол в отношении 1 : 2, а длина медианы равна 6 см.

**26.** В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу в отношении 5 : 12. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если радиус вписанной окружности равен 3 см.

**27.** Через точки $M$ и $K$, принадлежащие сторонам $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, проведена прямая $MK$, параллельная стороне $AC$. Найдите отрезок $CK$, если $BC = 12$ см, $MK = 4$ см, $AC = 16$ см.

**28.** Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если углы треугольника относятся как 1 : 2 : 3, а меньшая сторона равна 5 см.

**29.** Площадь прямоугольного треугольника равна 60 см$^2$, а его периметр — 40 см. Найдите стороны треугольника.

**30.** В треугольнике $ABC$ сторона $a = 6\sqrt{2}$, противолежащий ей угол $\alpha = 45°$, угол $\beta = 30°$. Найдите третий угол треугольника $\gamma$, длины сторон $b$ и $c$, радиус описанной окружности $R_о$, радиус вписанной окружности $r_в$.

**31.** Площадь треугольника $ABC$ равна 12 см$^2$. Найдите площадь треугольника $EDC$, если известно, что точка $E$ делит сторону $AB$ пополам, а точка $D$ делит сторону $AC$ на части $AD$ и $DC$, отношение которых равно 2 : 1.

**32.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ угол при вершине $B$ равен 120°. На стороне $AC$ выбрана точка $D$, такая, что $BD \perp AB$. Найдите $AD : DC$.

**33.** В прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 16 см, и острым углом 30° вписан прямоугольник с основанием, лежащим на гипотенузе. При каких размерах сторон прямоугольника его площадь будет наибольшей?

**34.** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ отмечена точка $D$, а на стороне $AC$ — точка $E$. Отрезки $BE$ и $AD$ пересекаются в точке $K$. Найдите $BD : DC$, если известно, что $BK : KE = 3 : 5$, $AE : EC = 2 : 3$.

**35.** Найдите стороны параллелограмма $ABCD$, если его периметр равен 1 м 20 см, а разность смежных сторон равна 8 см.

**36.** Прямоугольник вписан в окружность радиусом 5 см. Одна из его сторон равна 8 см. Найдите смежную с ней сторону прямоугольника.

**37.** Меньшая сторона прямоугольника равна 6 см. Найдите длины диагоналей, если они пересекаются под углом 60°.

**38.** Диагональ ромба равна его стороне, ее длина — 10 см. Найдите вторую диагональ ромба.

**39.** Найдите периметр ромба $ABCD$, если его площадь равна 128 см$^2$, а один из углов — 150°.

**40.** Найдите площадь ромба, если его периметр равен 88 см, а один из углов — 150°.

**41.** Найдите периметр ромба, диагонали которого равны 12 см и 16 см.

**42.** В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиусом 2 см. Найдите площадь ромба.

**43.** Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 30 см, периметр треугольника $ABC$ — 29 см, периметр треугольника $ABD$ — 25 см. Найдите площадь параллелограмма, если угол между его диагоналями равен 45°.

**44.** Найдите периметр параллелограмма, если известно, что биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 см и 14 см.

**45.** Точки $K$ и $L$ — середины сторон $AD$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$. Найдите длины отрезков, на которые прямые $AL$ и $CK$ делят диагональ $BD$, если $BD = 12$ см.

**46.** Найдите сумму площадей квадратов, построенных на сторонах $AB$ и $CD$ четырехугольника $ABCD$, если его диагонали взаимно перпендикулярны, а сумма площадей квадратов, построенных на сторонах $BC$ и $AD$, равна 78 см$^2$.

**47.** Найдите длины отрезков, на которые диагональ трапеции делит ее среднюю линию, если основания трапеции равны 8 см и 12 см.

**48.** Диагонали трапеции делят ее среднюю линию на три равные части. Найдите отношение длин оснований этой трапеции.

**49.** В прямоугольной трапеции меньшее основание составляет 6 см и равно меньшей боковой стороне. Найдите периметр трапеции, если бóльшая боковая сторона равна меньшей диагонали.

**50.** Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна меньшему основанию. Найдите площадь трапеции, если ее периметр равен $(10 + 2\sqrt{3})$ см, а острый угол — 30°.

**51.** Углы трапеции составляют 30° и 135°, а высота равна 6 см. Найдите периметр и площадь трапеции, если ее высота равна меньшему основанию.

**52.** Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 6 см. Найдите периметр и площадь трапеции, если один из ее углов равен 120°.

**53.** Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон равнобедренной трапеции, диагонали которой равны 8 см и пересекаются под углом 120°.

**54.** В трапеции $ABCD$ с бо́льшим основанием $AD$ диагональ $AC$ перпендикулярна к боковой стороне $CD$, $\angle BAC = \angle CAD$. Найдите $AD$, если периметр трапеции равен 20 см, а $\angle D = 60°$.

**55.** В равнобедренной трапеции длины оснований равны 6 см и 2 см, а длина высоты — 2 см. Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

**56.** Найдите углы четырехугольника $ABCD$, вписанного в некоторую окружность, если $\angle A = \angle C$, $\angle B : \angle D = 5 : 4$.

**57.** Найдите площадь круга, вписанного в правильный шестиугольник со стороной 4 см.

**58.** В окружность радиусом $2\sqrt{3}$ вписан правильный треугольник $ABC$. Точка $M$ делит сторону $BC$ в отношении 1 : 2. Найдите $AM$.

**59.** Найдите радиус окружности, вписанной в остроугольный треугольник $ABC$, если известно, что высота $BD$ равна 15, $\sin A = 15/17$, $\sin C = 3/5$.

**60.** Около равнобедренного треугольника с основанием $AC$ и углом при основании 75° описана окружность с центром $O$. Найдите $AC$, если известно, что площадь треугольника $AOB$ равна 9.

**61.** Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 15, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16.

**62.** Из точки $M$, лежащей на окружности, проведены две хорды $MN = 13$ и $MK = 15$. Найдите диаметр окружности, если известно, что расстояние между серединами хорд равно 7.

**63.** Дана точка $M$, отстоящая на 5,5 см от центра окружности с радиусом 8,5 см. Через эту точку проведена хорда длиной 13 см. Найдите длины отрезков, на которые хорда делится точкой $M$.

**64.** Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 см и касательная, длина которой составляет

2/3 внутреннего отрезка секущей. Определите длину касательной.

**65.** Точки $A$, $B$, $C$ лежат на окружности. Найдите длину хорды $AC$, если известно, что $\angle ABC = 30°$, а диаметр окружности равен 10 см.

**66.** Хорды $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $E$. Найдите длины отрезков $CE$ и $DE$, если $AE = 9$ см, $BE = 40$ см, $CD = 39$ см.

**67.** Из точки $A$, лежащей вне окружности, проведены к этой окружности касательная $AF$ и секущая, которая пересекает окружность в точках $B$ и $D$. Найдите внешнюю часть секущей $AD$, если $AF = 15$ см, $AB > AD$ на 16 см.

**68.** Из точки, лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две секущие. Найдите бóльшую из дуг, заключенных между секущими, если меньшая из дуг равна 33°, а угол между секущими равен 27°.

**69.** Даны две окружности с общим центром в точке $O$. $AC = 8$ см и $BD = 15$ см — диаметры этих окружностей. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $\angle BOC = 30°$.

**70.** Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A\,(-100;\ 90)$ и $B\,(100;\ -90)$.

**71.** Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $A\,(2;\ 1)$ и составляющей угол 30° с положительным направлением оси ординат.

**72.** Запишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения медиан треугольника $ABC$ и параллельной стороне $AC$, если координаты вершин $A\,(-2;\ 1)$, $B\,(4;\ 7)$ и $C\,(7;\ -2)$.

**73.** Запишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M$, делящую отрезок $AB$ на части $AM$ и $MB$, такие, что $AM : MB = 2/3$, если заданы координаты точек $A\,(-1;\ -2)$ и $B\,(6;\ 3)$.

**74.** Запишите уравнение окружности с центром $C\,(1;\ -2)$ и точкой $A\,(3;\ 3)$, лежащей на окружности.

**75.** Запишите уравнение окружности, проходящей через точки $A\,(-3;\ -2)$, $B\,(5;\ -2)$, $C\,(5;\ 6)$.

**76.** В параллелограмме $ABCD$ даны координаты трех вершин: $A\,(-2;\ 3)$, $B\,(2;\ -3)$, $C\,(4;\ 0)$. Найдите координаты вершины $D$, точки пересечения диагоналей $M$ и точки $N$, которая делит сторону $CD$ на части: $CN : ND = 3 : 1$.

**77.** Найдите координаты вершины $C$ треугольника $ABC$, если известны координаты двух других его вершин $A$ (3; 0), $B$ (6; 9), а также координаты точки пересечения медиан $M$ (3; 2).

**78.** Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — равнобедренная трапеция, если заданы координаты вершин: $A$ (–3; 1), $B$ (0; 4), $C$ (3; 3), $D$ (–2; –2). Найдите площадь этой трапеции.

**79.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ $AB = BC = 3$, $AC = 4$. На сторонах $AB$ и $BC$ отмечены по 2 точки ($M$ и $N$ — на $AB$, $P$ и $Q$ — на $BC$), которые делят каждую из этих сторон на три равные части. Через точки $M$, $N$, $P$ и $Q$ проведена окружность, пересекающая основание $AC$ в точках $D$ и $E$. Найдите площадь треугольника $DBE$.

**80.** Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6, а медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна 5. Из вершины прямого угла на гипотенузу опущена высота, и в каждый из двух треугольников, на которые она разбила данный треугольник, вписана окружность. Найдите квадрат расстояния между центрами этих окружностей.

**81.** Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их модули равны 5 и 6, а угол между векторами составляет 120°.

**82.** Найдите величину угла $\alpha$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющими координаты $\{3; 0\}$ и $\{2; 2\}$. Вычислите координаты суммы и разности этих векторов, а также вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

**83.** Найдите числа $k$ и $n$, если известно, что $\vec{c} = k\vec{a} + n\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы, $\vec{a}$ и $\vec{c}$ — сонаправленные векторы, $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{c}| = 0{,}5$.

**84.** Найдите числа $k$ и $n$, если известно, что $\vec{c} = k\vec{a} + n\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — противоположно направленные векторы, $|\vec{b}| = 2{,}5$, $|\vec{c}| = 0{,}5$.

**85.** Найдите отношение чисел $k$ и $n$, если известно, что вектор $\vec{c} = k\vec{a} + n\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — сонаправленные векторы, $|\vec{a}| = 4{,}8$, $|\vec{b}| = 1{,}6$, $|\vec{c}| = 0$.

**86.** Найдите отношение чисел $k$ и $n$, если известно, что вектор $\vec{c} = k\vec{a} + n\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — противоположно направленные векторы, $|\vec{a}| = 7{,}5$, $|\vec{b}| = 10$, $|\vec{c}| = 0$.

**87.** Найдите числа $k$ и $n$, если известно, что вектор $\vec{c} = k\vec{a} + n\vec{b}$, причем $\vec{c} = \{-4; 1\}$, $\vec{a} = \{2; 3\}$, $\vec{b} = \{3; 1\}$.

**88.** Найдите угол между вектором $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$ и положительным направлением оси абсцисс, если известно, что:

а) $\vec{a} = \{3{,}7; 3{,}7\}$;
б) $\vec{a} = \{2{,}5; -2{,}5\}$;
в) $\vec{a} = \{-1{,}2; 1{,}2\}$;
г) $\vec{a} = \{5; 0\}$;
д) $\vec{a} = \{0; 12\}$;
е) $\vec{a} = \{-9; 0\}$;
ж) $\vec{a} = \{2\sqrt{3}; 2\}$;
з) $\vec{a} = \{5; 5\sqrt{3}\}$;
и) $|\vec{a}| = 2$, $a_x = \sqrt{2}$;
к) $|\vec{a}| = 2$, $a_x = 1$;
л) $|\vec{a}| = 2$, $a_x = \sqrt{3}$.

**89.** Найдите неизвестные координаты вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$, если известно, что:

а) $|\vec{a}| = 5$; $a_x = 3$;
б) $|\vec{a}| = 13$; $a_y = -5$;
в) $|\vec{a}| = 6$; угол между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси ординат равен $30°$;
г) $|\vec{a}| = 8$; угол между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси абсцисс равен $45°$;
д) $|\vec{a}| = 10$; угол между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси абсцисс равен $150°$.

**90.** В треугольнике $ABC$ проведена медиана $CD$. Найдите модуль вектора $\overrightarrow{CD}$ и скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$, если известно, что $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$.

**91.** Найдите координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a} = \{2; 3\}$, если известно, что скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $-26$.

**92.** Найдите значение $k$, при котором векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ взаимно перпендикулярны, если известно, что $\vec{p} = k\vec{a} + 17\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляет $120°$.

## Ответы

**1.** а) $\angle 1 = \angle 3 = 125°36'47''$, $\angle 2 = \angle 4 = 54°23'13''$;
б) $\angle 1 = \angle 3 = 150°$, $\angle 2 = \angle 4 = 30°$;
в) $\angle 1 = \angle 3 = 105°$, $\angle 2 = \angle 4 = 75°$;
г) $\angle 1 = \angle 3 = 130°$, $\angle 2 = \angle 4 = 50°$;
д) $\angle 1 = \angle 3 = 100°$, $\angle 2 = \angle 4 = 80°$.
**2.** 81°; 57,5°; 41,5°.
**3.** 30°; 80°; 70°.
**4.** 45°; 53°; 82°.
**5.** а) 4; б) 3; в) 10; г) 6; д) 5.
**6.** 30°, 60°, 120°, 150°.
**7.** 6 см, 7 см, 7 см.
**8.** 55°17′38″.
**9.** Точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой, так как $AB + BC = AC$.
**10.** $P = 20$ см, $a = 8$ см, $b = 5$ см.
**11.** 5 см, 13 см.
**12.** $2\sqrt{7}$ см.
**13.** 48°.
**14.** 108 см.
**15.** 7,5 см.
**16.** 3 см, 9 см.
**17.** 1,8 см, 3,2 см.
**18.** $4\frac{8}{15}$ см.
**19.** $12\sqrt{3}$ см.
**20.** $AB = BC = CA = 12$ см; $AD = DC = 14$ см.
**21.** $\sqrt{10}$ см.
**22.** $1{,}2\sqrt{6}$ см.
**23.** 94 см.

**24.** 5 см.
**25.** $18\sqrt{3}$ см$^2$.
**26.** 8,5 см.
**27.** 9 см.
**28.** 5 см.
**29.** 8 см, 15 см, 17 см.
**30.** $\gamma = 105°$; $b = 6$; $c = 3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$; $R_o = 6$; $r_в = \dfrac{3(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.
**31.** 2 см$^2$.
**32.** 2 : 1.
**33.** $2\sqrt{3}$ см и 8 см.
**34.** 6 : 25.
**35.** 34 см, 26 см.
**36.** 6 см.
**37.** 12 см.
**38.** $10\sqrt{3}$ см.
**39.** 64 см.
**40.** 242 см$^2$.
**41.** 40 см.
**42.** $32\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ см$^2$.
**43.** $35\sqrt{2}$ см$^2$.
**44.** 56 см или 70 см.
**45.** 4 см, 4 см, 4 см.
**46.** 78 см$^2$.
**47.** 4 см; 6 см.
**48.** 2 : 1.
**49.** $(24 + 6\sqrt{2})$ см.
**50.** $(4 + 2\sqrt{3})$ см$^2$.
**51.** $6(5+\sqrt{3}+\sqrt{2})$ см; $18(3+\sqrt{3})$ см$^2$.
**52.** $32\sqrt{3}$ см; $96\sqrt{3}$ см$^2$.
**53.** $8\sqrt{3}$ см$^2$.
**54.** 8 см.

**55.** $\sqrt{10}$ см.

**56.** $\angle A = \angle C = 90°$, $\angle B = 100°$, $\angle D = 80°$.

**57.** $12\pi$ см$^2$.

**58.** $2\sqrt{7}$.

**59.** 6.

**60.** 6.

**61.** 12,5.

**62.** 16,25.

**63.** 6 см и 7 см.

**64.** 6 см.

**65.** 5 см.

**66.** 15 см, 24 см.

**67.** 9 см.

**68.** 87°.

**69.** 30 см$^2$.

**70.** $y = -\dfrac{9}{10}x$.

**71.** $y = \sqrt{3}x + (1 - 2\sqrt{3})$.

**72.** $y = -\dfrac{1}{3}x + 3$.

**73.** $y = 0$.

**74.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 29$.

**75.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 32$.

**76.** $D(0; 6)$, $M(1; 1{,}5)$, $N(1; 4{,}5)$.

**77.** $C(0; -3)$.

**78.** Решение. 1) $AB \parallel CD$, так как $\overrightarrow{AB} = \{3; 3\}$, $\overrightarrow{CD} = \{-5; -5\}$, следовательно, $\vec{C}\vec{D} = -5/3 \cdot \vec{A}\vec{B}$, т. е. векторы коллинеарны.

2) $AD = BC = \sqrt{10}$.

3) $AB = 3\sqrt{2}$, $CD = 5\sqrt{2}$, $h = 2\sqrt{2}$.

Тогда $S = 16$. Ответ: 16.

**79.** Решение.

1. Введем систему координат $Kxy$, поместив начало координат $K$ в середине стороны $AC$ и направив ось $Kx$ по лучу $KC$, ось $Ky$ — по лучу $KB$.

2. Обозначим $O$ — центр окружности, $R$ — ее радиус.

3. Высота треугольника $ABC$ : $h = BK = \sqrt{5}$.

4. Координаты точек: $P\left(\frac{4}{3}; \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$, $Q\left(\frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$, $O\left(0; \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$.

5. $R^2 = OP^2 = OQ^2 = 369/180$.

6. Уравнение окружности: $x^2 + \left(y - \sqrt{5}/10\right)^2 = 369/180$.

7. Абсциссы точек $D$ и $E$: $\pm\sqrt{2}$; $DE = 2\sqrt{2}$.

8. Площадь треугольника $DBE$: $S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$.

Ответ: $\sqrt{10}$.

**80.** 8.

**81.** −15.

**82.** $a = 45°$; $\vec{a} + \vec{b} = (5; 2)$, $\vec{a} - \vec{b} = (1; -2)$, $\vec{c} = (0; -6)$.

**83.** $k = 0{,}25$, $n = 0$.

**84.** $k = 0$, $n = -0{,}2$.

**85.** −1 : 3.

**86.** 4 : 3.

**87.** $k = 1$, $n = -2$.

**88.** а) 45°; б) −45°; в) 135°; г) 0°; д) 90°; е) 180°; ж) 30°; з) 60°; и) ±45°; к) ±60°; л) ±30°.

**89.** а) $a_y = \pm 4$; б) $a_x = \pm 12$; в) $a_x = 3$; $a_y = 3\sqrt{3}$; г) $a_x = a_y = 4\sqrt{2}$; д) $a_x = -5\sqrt{3}$; $a_y = 5$.

**90.** $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2}$; $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{a^2+3b^2-c^2}{4}$.

**91.** $\{-4; -6\}$.

**92.** Решение.

1. Так как, по условию, $\vec{p} \perp \vec{q}$, то $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$.

2. $\vec{p} \cdot \vec{q} = \left(k\vec{a} + 17\vec{b}\right) \cdot \left(3\vec{a} - \vec{b}\right) =$

$= 3ka^2 - 17b^2 + (51 - k)ab \cdot \cos 120° =$

$= 12k - 425 - 255 + 5k = 17k - 680$.

3. $17k - 680 = 0 \rightarrow 17k = 680 \rightarrow k = 40$.

Ответ: 40.

# Глава 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ

## § 1. Основные теоретические сведения, необходимые для решения задач стереометрии

**Стереометрия** — раздел геометрии, в котором изучаются пространственные фигуры. В основе стереометрии лежат те же неопределяемые понятия, которые были введены в курсе планиметрии (см. § 1 главы 1). Однако список аксиом нуждается в пополнении.

Приведем одну из аксиом стереометрии, описывающую понятие плоскости: *через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.*

Из этой аксиомы следует, что:

а) через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна;

б) через две параллельные прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Новые (производные) понятия стереометрии, такие, как двугранный угол, сфера, конус, призма, пирамида и др., вводятся с помощью основных понятий и ранее введенных производных понятий. Их свойства, как и в планиметрии, устанавливаются с помощью теорем.

## Взаимное расположение прямых в пространстве

Две прямые в пространстве могут лежать в одной плоскости. При этом они могут пересекаться (иметь одну общую точку) и могут быть параллельными (не иметь ни одной общей точки либо совпадать).

Две прямые называются скрещивающимися, если не существует плоскости, содержащей одновременно обе эти прямые.

Для того чтобы измерить угол между скрещивающимися прямыми $a$ и $b$, необходимо через произвольную точку $M$ провести прямые $a_1$ и $b_1$, параллельные $a$ и $b$. При этом образуются две пары вертикальных углов. Значение меньшего из этих углов принимается за угол между пересекающимися прямыми $a_1$ и $b_1$, а также скрещивающимися прямыми $a$ и $b$.

## Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Прямая может пересекать плоскость в одной точке и может быть параллельной плоскости (целиком принадлежать плоскости либо не иметь с ней общих точек). В силу одной из аксиом геометрии, если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.

### Признак параллельности прямой и плоскости

Если прямая $a$ параллельна некоторой прямой $b$, лежащей в плоскости $\alpha$, то она параллельна плоскости $\alpha$.

Прямая $a$ называется перпендикулярной к плоскости $\alpha$, если она перпендикулярна к каждой прямой, лежащей в плоскости $\alpha$.

## Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая $a$ перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости $\alpha$, то она перпендикулярна к плоскости $\alpha$.

Рассмотрим плоскость $\alpha$ и точку $M$, не лежащую в этой плоскости. Проведем через точку $M$ прямую, перпендикулярную к плоскости $\alpha$, которая пересекает эту плоскость в точке $N$. Отрезок $MN$ называется перпендикуляром, проведенным из точки $M$ к плоскости $\alpha$, а точка $N$ — основанием этого перпендикуляра. Пусть $K$ — точка плоскости $\alpha$, отличная от точки $N$. Отрезок $MK$ называется наклонной, проведенной из точки $M$ к плоскости $\alpha$, а точка $K$ — основанием этой наклонной. Точка $N$ называется проекцией точки $M$ на плоскость $\alpha$. Отрезок $NK$ называется проекцией наклонной $MK$ на плоскость $\alpha$ (рис. 2.1). Здесь и далее речь идет о прямоугольном (или ортогональном) проецировании точек и фигур на плоскость.

## Угол между прямой и плоскостью

Если прямая параллельна плоскости, то угол между ними считается равным нулю. Если прямая перпендикулярна к плоскости, то угол между ними равен 90°. Если прямая не параллельна и не перпендикулярна к плоскости, то углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. На рис. 2.1 угол между прямой $MK$ и плоскостью равен углу $MKN$ между прямой $MK$ и ее проекций $NK$ на плоскость $\alpha$.

В прямоугольном треугольнике $MNK$ (см. рис. 2.1) имеем: $MN$ — катет, $MK$ — гипотенуза. Поэтому $MN < MK$ (перпендикуляр, проведенный из точки $M$ к плоскости $\alpha$, короче любой наклонной, проведенной из точки $M$ к этой же плоскости).

Длина перпендикуляра $MN$ называется расстоянием от точки $M$ до плоскости $\alpha$.

Если из точки $M$ проведены к плоскости $\alpha$ две равные наклонные, то равны и их проекции. Справедливо и обратное

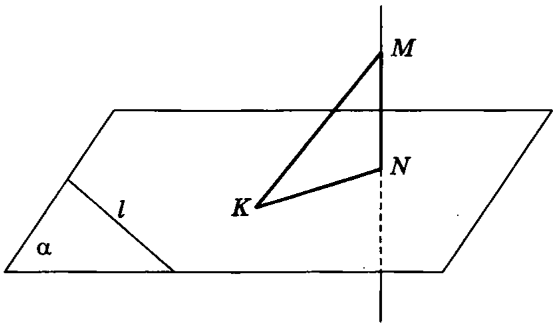


Рис. 2.1

утверждение: если проекции наклонных, проведенных из одной точки к данной плоскости, равны, то равны и сами наклонные.

### Теорема о трех перпендикулярах

**Прямая теорема:** прямая, проведенная в плоскости перпендикулярно к проекции некоторой наклонной, перпендикулярна и к самой наклонной.

В соответствии с обозначениями на рис. 2.1 предполагается, что, по условию, $l \perp NK$ и доказывается, что в этом случае $l \perp MK$.

**Обратная теорема:** прямая, проведенная в плоскости перпендикулярно к некоторой наклонной, перпендикулярна и к ее проекции на эту плоскость.

В соответствии с обозначениями на рис. 2.1 предполагается, что, по условию, $l \perp MK$ и доказывается, что в этом случае $l \perp NK$.

## Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Две плоскости могут пересекаться либо быть параллельными (совпадать или не иметь общих точек).

В силу одной из аксиом, *если две несовпадающие плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.*

## Признак параллельности двух плоскостей

Если две пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости $\alpha$, параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости $\beta$, то плоскости $\alpha$ и $\beta$ параллельны.

*Расстоянием между двумя параллельными плоскостями* называется расстояние от любой точки одной из этих плоскостей до другой плоскости.

*Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми* называется длина общего перпендикуляра к этим прямым.

Для того чтобы измерить расстояние между скрещивающимися прямыми $a$ и $b$, необходимо через произвольную точку $A$ прямой $a$ провести прямую $b_1$, параллельную прямой $b$, и найти расстояние от $b$ до плоскости, образованной пересекающимися прямыми $a$ и $b_1$.

## Двугранные углы

*Прямая $l$, проведенная в некоторой плоскости, разделяет эту плоскость на две полуплоскости с общей границей $l$.*

Две полуплоскости $\alpha$ и $\beta$, не составляющие одну плоскость и имеющие общую границу $l$, образуют фигуру, называемую *двугранным углом*. Полуплоскости $\alpha$ и $\beta$ называются гранями, а их общая граница $l$ — ребром двугранного угла.

Рассмотрим точку $A$, принадлежащую прямой $l$. В полуплоскостях $\alpha$ и $\beta$ построим лучи $AM$ и $AN$, перпендикулярные к $l$. Угол $MAN$ называется линейным углом двугранного угла. За величину двугранного угла принимается величина его линейного угла.

Плоскость, проходящая через ребро двугранного угла и делящая его на два равных двугранных угла, называется *биссектральной плоскостью.*

На рис. 2.2 изображен двугранный угол с ребром $l$ и гранями $\alpha$ и $\beta$, а также линейный угол $MAN$ этого двугранного угла и биссектральная плоскость $\gamma$. Плоскость, образованная прямыми $AM$ и $AN$, и биссектральная плоскость $\gamma$ пересекаются по прямой $AK$. Луч $AK$ является биссектрисой угла $MAN$.

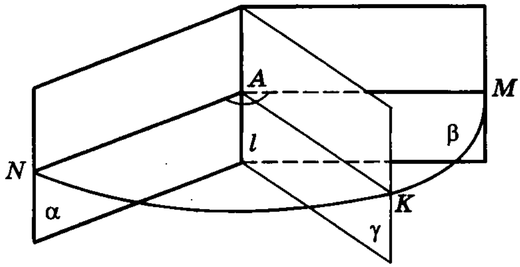


Рис. 2.2

Двугранный угол называется острым, прямым или тупым в зависимости от типа соответствующего ему линейного угла.

При пересечении двух плоскостей образуются четыре двугранных угла с общим ребром. Если эти углы являются прямыми, то данные плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными).

## Признак перпендикулярности плоскостей

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Напомним, что проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость, если точка не принадлежит плоскости, и сама эта точка, если она принадлежит плоскости.

Проекцией фигуры $\Phi$, лежащей в плоскости $\beta$, на плоскость $\alpha$ называется фигура $\Pi$, образованная проекциями всех точек фигуры $\Phi$ на плоскость $\alpha$. Если угол между плоскостями $\beta$ и $\alpha$ равен $\varphi$, то площадь проекции $\Pi$ равна произведению площади фигуры $\Phi$ на косинус угла $\varphi$: $S_{\Pi} = S_{\Phi} \cdot \cos\varphi$.

Рассмотрим в качестве примера треугольник $ABC$, у которого вершины $B$ и $C$ принадлежат плоскости $\alpha$, а вершина $A$ не принадлежит этой плоскости (рис. 2.3). Опустим из точки $A$ перпендикуляр $AA_1$ на плоскость $\alpha$. Треугольник $A_1BC$ является проекцией треугольника $ABC$ на плоскость $\alpha$. Пусть двугранный угол между плоскостью $\alpha$ и плоскостью $\beta$, которой принадлежит треугольник $ABC$, равен $\varphi$ (на рис 2.3 показан линейный угол $ADA_1$ этого двугранного угла). Тогда, если площадь треугольника $ABC$ равна $S$, площадь треугольника $A_1BC$ равна $S \cdot \cos \varphi$.

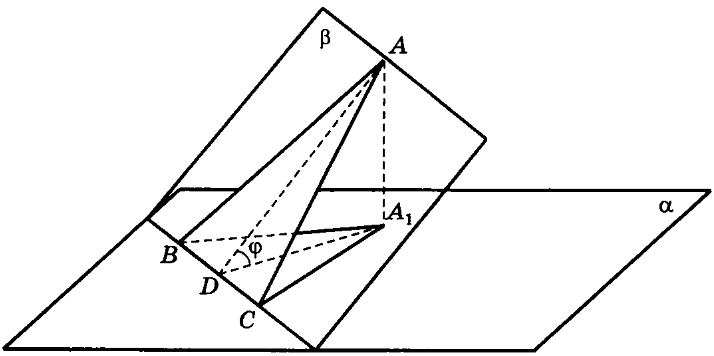


Рис. 2.3

## Многогранники

*Многогранником*, или *многогранной поверхностью*, называется пространственная фигура, образованная многоугольниками, которые отвечают следующим требованиям:

- два соседних многоугольника имеют общую сторону;
- любые две вершины многоугольников могут быть соединены ломаной, звеньями которой являются стороны этих многоугольников.

Многогранная поверхность разбивает пространство на *внешнюю* и *внутреннюю* области. Две точки, принадлежащие одной и той же области, могут быть соединены ломаной, целиком принадлежащей этой области. Во внешней области можно провести прямую, которая не будет пересекать многогранную поверхность. Во внутренней области такую прямую провести нельзя.

Геометрическое тело, образованное многогранной поверхностью и ограниченной ею внутренней областью, также называется многогранником. Многогранная поверхность в этом случае называется поверхностью многогранника.

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его *гранями*; стороны многоугольников — *ребрами*, а вершины — *вершинами* многогранника; отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащий одной грани, называется *диагональю* многогранника. Углы при вершинах многогранника, образованные ребрами, принадлежащими одной и той же грани, называются *плоскими углами* многогранника.

Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. В общем случае, выпуклым геометрическим телом называется такое тело, любые две внутренние точки которого могут быть соединены отрезком прямой, не пересекающим поверхность этого тела. Примерами выпуклых геометрических тел являются шар и прямой круговой конус.

Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками. В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°.

## Виды многогранников

### Призма и параллелепипед

*Призмой* называется многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, лежащих в параллельных плоскостях $\alpha$ и $\beta$, и параллелограммов $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ... $A_nA_1B_1B_n$. Многоугольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ называются *основаниями призмы*, а параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$,...; $A_nA_1B_1B_n$ — ее *боковыми гранями*. Отрезки $A_1B_1$,

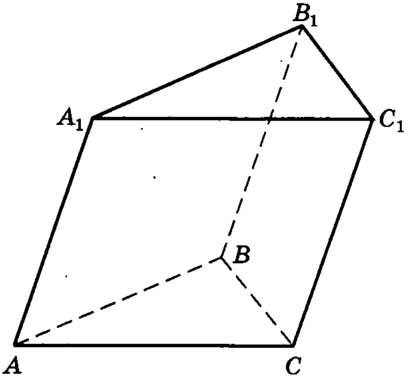

Рис. 2.4

$A_2B_2$, ..., $A_nB_n$ равны и параллельны. Они называются *боковыми ребрами* призмы. Призма, в основании которой лежит $n$-угольник, называется *$n$-угольной призмой*. На рис. 2.4 приведен пример треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к ее основаниям, то такая призма называется *прямой*, в противном случае — *наклонной*. Прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник, называется *правильной призмой*.

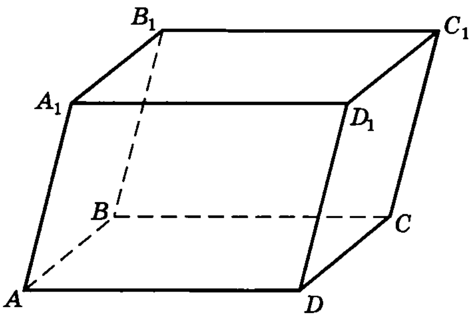

Рис. 2.5

Призма, в основаниях которой лежат параллелограммы, называется *параллелепипедом* (рис. 2.5). Таким образом, в параллелепипеде все грани являются параллелограммами.

**Свойства параллелепипеда:**

1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания параллелепипеда на плоскость его нижнего основания, называется *высотой* параллелепипеда.

Параллелепипед, у которого боковые грани — прямоугольники, называется *прямым*.

Параллелепипед, в основаниях которого лежат прямоугольники, а боковые ребра перпендикулярны к основаниям, называется *прямоугольным*. Очевидно, что в прямом и прямоугольном параллелепипеде высота равна его боковому ребру.

На рис. 2.6 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Здесь $AC_1$ и $DB_1$ — диагонали параллелепипеда, $AB_1$ и $DC_1$ — диагонали его боковых граней. Длины смежных сторон (например, $DA$, $DC$, $DD_1$) называются *измерениями* прямоугольного параллелепипеда.

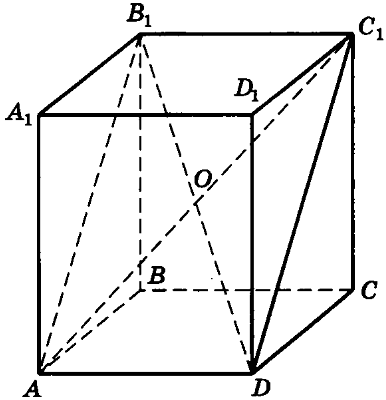

Рис. 2.6

**Свойства прямоугольного параллелепипеда:**

1. В прямоугольном параллелепипеде все грани — прямоугольники.
2. В прямоугольном параллелепипеде все двугранные углы — прямые.
3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений: $B_1D^2 = DA^2 + DC^2 + DD_1^2$ (см. рис. 2.6). Из этого следует, что диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется *кубом*. Все грани куба — равные друг другу квадраты.

**Пирамида**

*Пирамидой* называется многогранник, у которого одна грань (*основание*) — произвольный многоугольник, а все остальные грани (*боковые*) — треугольники с общей вершиной (*вершина пирамиды*). Все боковые грани вместе составляют *боковую поверхность* пирамиды.

Пирамида называется *треугольной*, *четырехугольной* и т. д. в зависимости от вида многоугольника, лежащего в ее основании. На рис. 2.7 изображена пятиугольная пирамида $MABCDE$ с вершиной $M$.

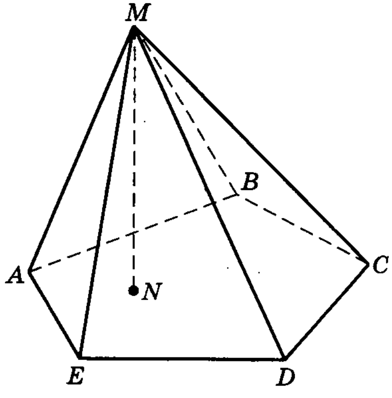


Рис. 2.7

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, называется *высотой* пирамиды. $MN$ — высота пирамиды $MABCDE$.

Треугольная пирамида является четырехгранником и поэтому называется *тетраэдром* («тетраэдр» — в переводе с греческого — «четырехгранник»). Тетраэдр, все грани которого являются равными между собой равносторонними треугольниками, называется *правильным тетраэдром.*

*Ортоцентрический тетраэдр* — это тетраэдр, в котором прямые, содержащие высоты, пересекаются в одной точке (рис. 2.8). Обратите внимание: высота **любого** тетраэдра — это перпендикуляр, проведенный из вершины к противоположной грани.

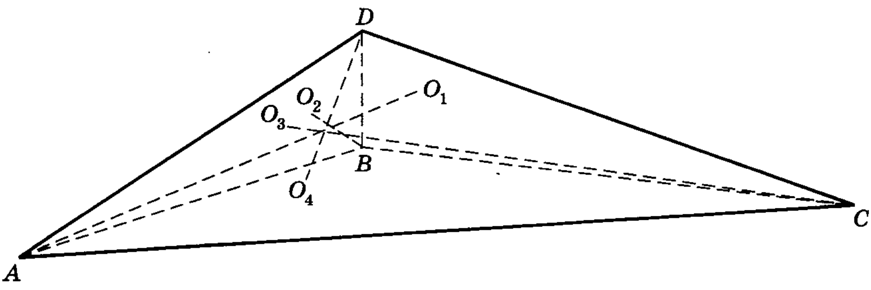


Рис. 2.8

*Правильная пирамида* — это пирамида, в основании которой находится правильный многоугольник, а ее вершина проецируется в центр основания. Напомним, что центром правильного многоугольника называется центр его симметрии, который совпадает с центрами вписанной и описанной окружностей. Из определения правильной пирамиды следует, что ее высота соединяет вершину пирамиды с центром ее основания.

В правильной пирамиде все боковые ребра равны и одинаково наклонены к плоскости основания, все боковые грани также одинаково наклонены к плоскости основания и представляют собой равные равнобедренные треугольники. Высоты этих треугольников, проведенные из вершины пирамиды, равны между собой и называются ***апофемами***.

На рис. 2.9 изображена правильная шестиугольная пирамида $MABCDEF$. Основанием пирамиды является правильный шестиугольник $ABCDEF$. Вершина пирамиды $M$ проецируется в центр основания — точку $N$. Отрезок $MN$ — высота пирамиды. Боковые грани — равные между собой равнобедренные треугольники $MAB$, $MBC$, $MCD$, $MDE$, $MEF$, $MFA$. Высота $MK$ боковой грани $MFA$ — апофема пирамиды.

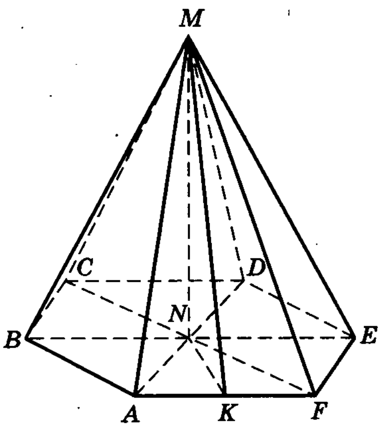

Рис. 2.9

Отметим следующие важные факты, имеющие отношение не только к правильным пирамидам:

1) если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то ее вершина проецируется в центр окружности, вписанной в основание. В этом случае высоты всех боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны между собой;
2) если боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды, то ее вершина проецируется в центр окружности, описанной около основания. В этом случае боковые ребра пирамиды равны между собой.

Справедливы и обратные утверждения:

- если вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание, то боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, а высоты боковых граней равны между собой;

- если вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания, то боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания и равны между собой.

### Сечение тела плоскостью

Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тела, называется *секущей плоскостью*. Фигура, которая образуется при пересечении тела плоскостью (то есть общая часть тела и секущей плоскости), называется *сечением* тела.

Мы не останавливаемся на технике построения сечений, так как она достаточно подробно изложена в школьных учебниках [4]. Однако умение строить сечения может пригодиться при решении задач, связанных с определением характерных размеров сечения и его площади. Поэтому отметим некоторые факты, знание которых может пригодиться при построении сечений.

1. Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость.
2. Если две точки некоторой прямой принадлежат плоскости, то и вся эта прямая принадлежит плоскости.
3. Если две различные плоскости имеют одну общую точку, то они пересекаются по прямой, содержащей эту точку.
4. Параллельные плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются секущей плоскостью $\gamma$ по параллельным прямым $a$ и $b$.

### Усеченная пирамида

Рассмотрим пирамиду $MA_1A_2 \dots A_n$. Пусть высотой пирамиды является отрезок $MN$. Рассечем пирамиду плоскостью, параллельной основанию и пересекающей отрезок $MN$ в точке $K$, расположенной между его концами. Эта плоскость пересечет боковые ребра в точках $B_1, B_2, \dots B_n$. Часть пирамиды, ограниченная ее основанием $A_1 A_2 \dots A_n$, многоугольником $B_1 B_2 \dots B_n$, полученным в сечении, и частью боковой поверхности, расположенной между основанием и секущей плоскостью, называется *усеченной пирамидой*. На рис. 2.10 изображена усеченная пятиугольная пирамида.

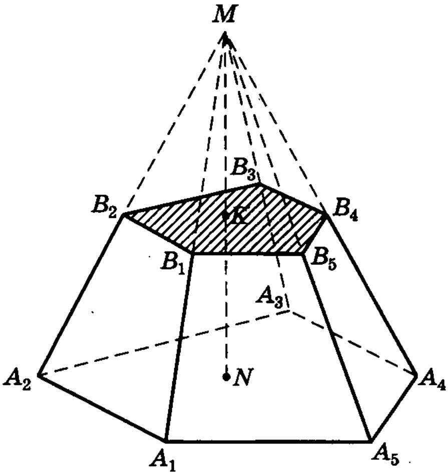


Рис. 2.10

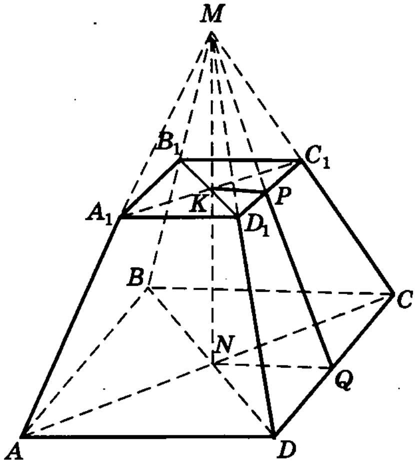


Рис. 2.11

Многоугольник $A_1A_2... A_n$ будем теперь называть *нижним основанием*; подобный ему многоугольник $B_1B_2... B_n$ — *верхним основанием*, отрезок $KN$ — *высотой* усеченной пирамиды. Боковые грани усеченной пирамиды $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$,.., $A_nA_1B_1B_n$ представляют собой трапеции.

В результате сечения правильной пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию, получается правильная усеченная пирамида, оба основания которой — подобные правильные многоугольники, а боковые грани — равные между собой равнобедренные трапеции. В усеченной правильной пирамиде высоты боковых граней равны между собой и называются ее *апофемами*.

На рис. 2.11 изображена правильная усеченная четырехугольная пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$, нижним основанием которой является квадрат $ABCD$, верхним основанием — квадрат $A_1B_1C_1D_1$, высотой — отрезок $KN$, апофемой — отрезок $PQ$.

## Цилиндр

Рассмотрим произвольную плоскую кривую $T$. Если через каждую точку этой кривой провести параллельные между собой прямые (образующие), то получится поверхность, называемая *цилиндрической*. Кривая $T$ называется *направляющей* цилиндрической поверхности.

Пусть направляющая $T$ — окружность, лежащая в плоскости $\alpha$, а образующие перпендикулярны к этой плоскости. Проведем плоскость $\beta$, параллельную плоскости $\alpha$ и пересекающую цилиндрическую поверхность по окружности $T_1$, которая равна окружности $T$. Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и кругами с границами $T$ и $T_1$, называется *прямым круговым цилиндром*. В задачах обычно рассматривается только прямой круговой цилиндр, который мы будем называть просто цилиндром (см. рис. 2.12). Круги с границами $T$ и $T_1$ называются *основаниями* этого цилиндра. Прямая $OO_1$, проходящая через центры оснований, называется *осью* цилиндра. Так как отрезок $OO_1$ перпендикулярен к основаниям, его называют *высотой* цилиндра; длину этого отрезка будем обозначать буквой $h$. Сечение $AA_1B_1B$, содержащее ось цилиндра, называется *осевым сечением*. Отрезки образующих цилиндрической поверхности $AA_1$ и $BB_1$, заключенные между основаниями, называются *образующими цилиндра*, или просто образующими. Очевидно, $AA_1 = BB_1 = OO_1$.

Если разрезать цилиндрическую поверхность прямого кругового цилиндра по образующей и развернуть ее на плоскости,

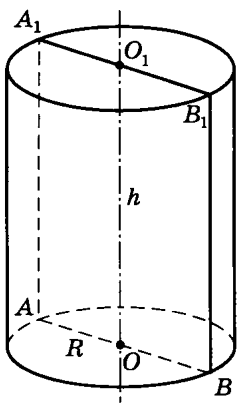


Рис. 2.12

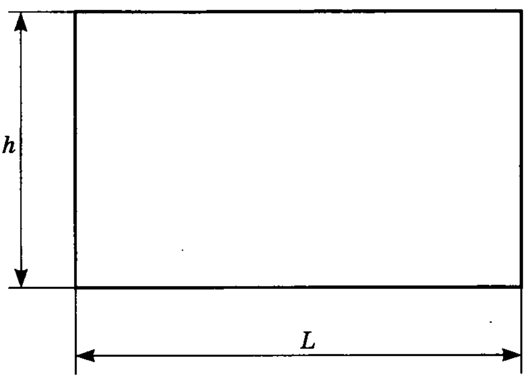


Рис. 2.13

то получится прямоугольник, который называется *разверткой* цилиндра. Стороны этого прямоугольника равны длине окружности $L$ ($L=2\pi R$, где $R$ — радиус основания) и его образующей $h$ (см. рис. 2.13). Цилиндрическую поверхность цилиндра называют также его *боковой поверхностью*.

**Конус**

Рассмотрим произвольную плоскую кривую $T$ и точку $M$, не лежащую в плоскости этой кривой. Лучи с началом в точке $M$, проходящие через каждую точку кривой $T$, образуют *коническую поверхность*. Эти лучи называются *образующими*, а кривая $T$ — *направляющей* конической поверхности. Пусть направляющая $T$ — окружность с центром в точке $O$, а отрезок $MO$ перпендикулярен к плоскости, содержащей окружность $T$. В этом случае получим тело, называемое *прямым круговым конусом*. Прямой круговой конус (в дальнейшем, просто конус) — это тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей $T$ (см. рис. 2.14). Точка $M$ называется *вершиной* конуса, прямая $MO$ — *осью*, круг с границей $T$ — *основанием*, а отрезки образующих конической поверхности, ограниченные плоскостью основания, — *образующими конуса*. Так как отрезок $MO$ перпендикулярен к основанию, то его называют *высотой* конуса. Длину этого отрезка будем обозначать буквой $h$, а длину каждой образующей — буквой $l$. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением*. На рис. 2.14 осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник $MCD$, в котором $MC = MD = l$, $CD = 2R$, где $R$ — радиус основания. Коническую поверхность конуса называют также его *боковой поверхностью*. Если разрезать боковую поверхность по образующей и развернуть ее на плоскости, получится круговой сектор с радиусом, равным $l$, и длиной дуги, равной $L$ ($L = 2\pi R$). Развертка боковой поверхности конуса показана на рис. 2.15.

Радианная мера центрального угла развертки $\alpha$ определяется по формуле $\alpha = \dfrac{2\pi \cdot R}{l}$, градусная мера: $\alpha^\circ = \dfrac{R \cdot 360^\circ}{l}$.

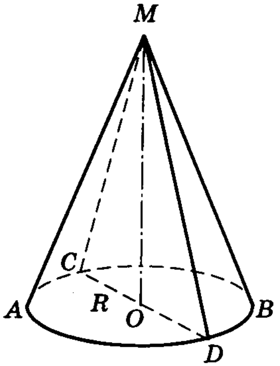


Рис. 2.14

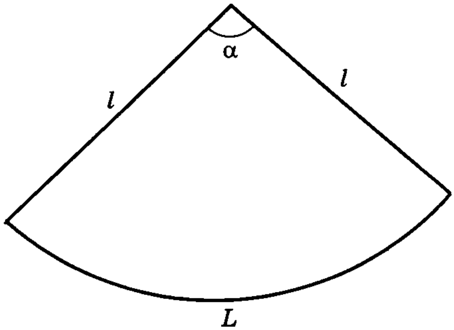


Рис. 2.15

**Усеченный конус**

Отметим, что любое сечение конуса плоскостью, параллельной его основанию, есть круг, центр которого лежит на оси конуса.

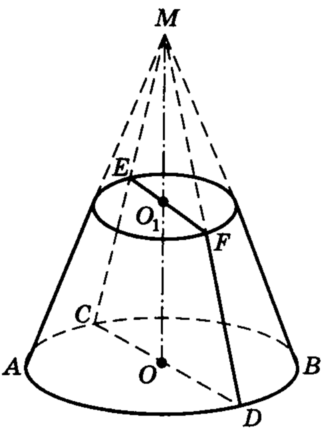


Рис. 2.16

Рассечем конус плоскостью, параллельной основанию и пересекающей отрезок $MO$ в точке $O_1$, лежащей между точками $M$ и $O$ (рис. 2.16). Усеченным конусом называется тело, ограниченное основанием конуса (это круг с центром $O$, который будет теперь называться нижним основанием усеченного конуса) и кругом с центром $O_1$, полученным в сечении (этот круг называется верхним основанием усеченного конуса), а также частью боковой поверхности конуса, заключенной между его основаниями. Отрезок $OO_1$ перпендикулярен к основаниям и называется высотой усеченного конуса (его длину обозначают буквой $H$). Отрезки образующих $CE$ и $DF$, заключенные между основаниями, называются образующими усеченного конуса. Их длину обозначают буквой $l$. Любое осевое сечение усеченного конуса представляет собой равнобедренную трапецию (на рис. 2.16 — это четырехугольник $CEFD$), боковые стороны которой равны $l$, а верхнее и нижнее основания $2r$ и $2R$, где $r$ и $R$ — радиусы верхнего и нижнего оснований усеченного конуса соответственно.

### Сфера и шар

*Сферой* называется множество точек пространства, расположенных на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой центром сферы (рис. 2.17).

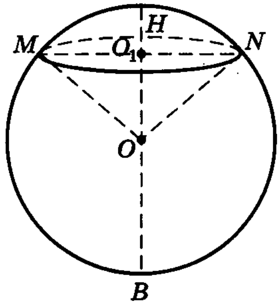


Рис. 2.17

Отрезок, соединяющий центр сферы с любой точкой сферы, называется *радиусом* сферы. В задачах радиусом также обычно называют длину этого отрезка. Отрезок, проходящий через центр сферы, концы которого лежат на ее поверхности, называется *диаметром* сферы. Его обозначают буквой $d$. Очевидно, $d = 2R$.

*Шаром* с центром $O$ и радиусом $R$ называется тело, состоящее из всех точек пространства, удаленных от точки $O$ на расстояние, не превышающее $R$. Можно сказать, что шар — это тело, состоящее из сферы и ее внутренней области. Справедливо также утверждение, что сфера является поверхностью шара.

Любое сечение шара плоскостью есть круг, центр которого лежит на перпендикуляре, опущенном на плоскость сечения из центра шара. Сечение шара плоскостью, проходящей через его центр, является кругом, радиус которого равен радиусу шара (такой круг называют *большим кругом*).

Плоскость, имеющая одну общую точку с некоторой сферой, называется ее *касательной плоскостью*. Эта плоскость перпендикулярна к радиусу сферы, проведенному в точку касания (рис. 2.18).

Плоскость, пересекающая шар, разбивает его на два шаровых сегмента, каждый из которых ограничен кругом, полученным в сечении (*основание* сегмента), и частью сферы, расположенной по одну сторону от секущей плоскости. Отрезок, перпендикулярный к плоскости сечения, один из концов которого совпадает с центром основания сегмента, а другой — лежит на ограничивающей его части сферы, называется *высотой сегмента*, которую будем обозначать буквой $H$ (рис. 2.17).

Часть шара, состоящая из шарового сегмента и конуса, вершина которого совпадает с центром шара, а основание — с основанием шарового сегмента, называется *шаровым сектором* (рис. 2.17).

Часть шара, заключенная между двумя параллельными плоскостями $\alpha$ и $\beta$, пересекающими данный шар, называется *шаровым слоем*. Обозначим центр шара буквой $O$, а центры кругов, полученных в сечениях шара плоскостями $\alpha$ и $\beta$, — $O_1$ и $O_2$. Точки $O_1$ и $O_2$ лежат на одном и том же диаметре шара, причем этот диаметр перпендикулярен к обеим секущим плоскостям. Отрезок $O_1O_2$ называется *высотой шарового слоя* и обозначается буквой $H$ (рис. 2.19).

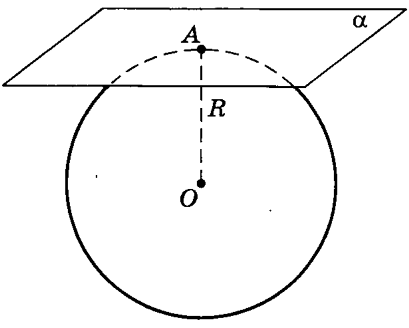


Рис. 2.18

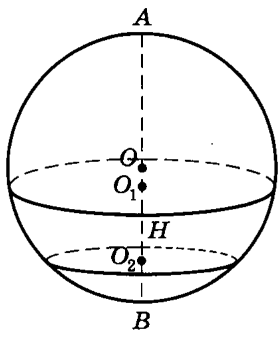


Рис. 2.19

## Площади поверхностей геометрических тел

1. Площадь поверхности многогранника равна сумме площадей его граней.
2. Площади оснований цилиндра, конуса и усеченного конуса вычисляются по формуле площади круга.
3. Площади боковых поверхностей цилиндра, конуса и усеченного конуса равны площадям их разверток.

## Понятие объема

*Объемом* называется числовая характеристика геометрических тел, удовлетворяющая следующим свойствам:

- объем — величина неотрицательная;
- равные тела имеют равные объемы;
- если тело $T$ составлено из тел $T_1$ и $T_2$, не имеющих общих внутренних точек, то объем тела $T$ равен сумме объемов $T_1$ и $T_2$;
- если тело $T_1$ подобно телу $T_2$ с коэффициентом подобия $k$ (то есть отношение размеров соответственных линейных элементов этих тел равно $k$), то отношение объемов этих тел равно $k^3$.

В качестве единицы измерения объема геометрического тела выбирается объем куба с ребром, равным единице измерения длины, например 1 м или 1 см. Тогда единицами измерения объема будут 1 м$^3$ или 1 см$^3$ соответственно.

### Формулы площадей поверхностей и объемов геометрических тел

**1. Произвольная призма:**

$$S_{бок} = P_{сеч}\,l;\ V = S_{осн}\,H,$$

где $l$ — длина бокового ребра, $H$ — высота, $P_{сеч}$ — периметр сечения, перпендикулярного к боковому ребру, $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности, $S_{осн}$ — площадь основания, $V$ — объем.

**2. Прямая призма:**

$$S_{бок} = Pl;\ V = S_{осн}\,l,$$

где $P$ — периметр основания, $l$ — длина бокового ребра, $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности, $S_{осн}$ — площадь основания, $V$ — объем.

**3. Прямоугольный параллелепипед:**

$$S = 2(ab + bc + ac);\ V = abc,$$

где $a$, $b$, $c$ — измерения параллелепипеда, $S$ — площадь поверхности, $V$ — объем.

**4. Куб:**

$$S = 6a^2 = 3d_1^2;$$

$$V = a^3;\ V = d_2^3\frac{\sqrt{3}}{9},$$

$$d_1 = a\sqrt{2},\ d_2 = a\sqrt{3},$$

где $a$ — длина ребра, $d_1$ — длина диагонали грани, $d_2$ — длина диагонали куба, $S$ — площадь поверхности, $V$ — объем.

**5. Произвольная пирамида:**

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H,$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $H$ — высота, $V$ — объем.

**6. Правильная пирамида:**

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}Pk;\ V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H,$$

где $k$ — апофема, $P$ — периметр основания, $H$ — высота, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $V$ — объем.

**7. Произвольная усеченная пирамида:**

$$V = \frac{1}{3}\mathrm{H}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right),$$

где $S_1$ и $S_2$ — площади оснований.

**8. Правильная усеченная пирамида:**

$$S_{\text{бок}} = 1/2\,(P_1 + P_2)k,$$

где $P_1$ и $P_2$ — периметры оснований, $k$ — апофема.

**9. Цилиндр:**

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH,\ S_{\text{пол}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R\,(R + H);$$

$$V = \pi R^2 H,$$

где $R$ — радиус основания, $H$ — высота, $S_{пол}$ — площадь полной поверхности, $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности, $V$ — объем.

**10. Конус:**

$$S_{бок} = \pi Rl; \; S_{пол} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi R(R + l); \; V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

где $R$ — радиус основания, $H$ — высота, $l$ — образующая, $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности, $V$ — объем.

**11. Усеченный конус:**

$$S_{бок} = \pi (R + r)\, l; \; V = \frac{1}{3}\pi (R^2 + Rr + r^2)\, H,$$

где $R$ — радиус нижнего основания, $r$ — радиус верхнего основания, $H$ — высота, $l$ — образующая, $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности, $V$ — объем.

**12. Шар, сфера:**

$$S = 4\pi R^2; \; V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где $R$ — радиус шара, $S$ — площадь сферической поверхности, $V$ — объем шара.

**13. Шаровой сегмент:**

$$S = 2\pi Rh; \; V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right),$$

где $R$ — радиус шара, $h$ — высота шарового сегмента, $S$ — площадь сферической поверхности сегмента, $V$ — объем шарового сегмента.

**14. Шаровой сектор:**

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где $R$ — радиус шара, $h$ — высота соответствующего шарового сегмента, $V$ — объем шарового сектора.

## Комбинации шаров и различных геометрических тел

Цилиндр и усеченный конус называются *вписанными* в шар, если окружности их оснований лежат на поверхности шара (рис. 2.20, 2.21). Конус называется *вписанным* в шар, если его вершина и окружность основания лежат на поверхности шара (рис. 2.22).

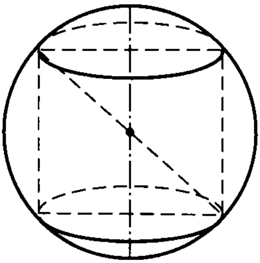

Рис. 2.20

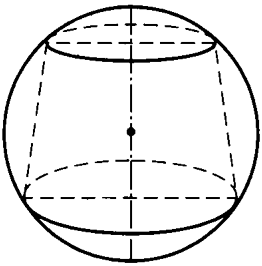

Рис. 2.21

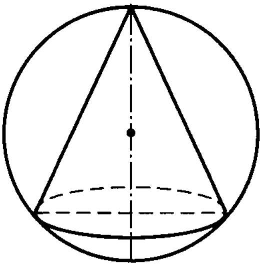

Рис. 2.22

Осевое сечение вписанного цилиндра — прямоугольник, диагональ которого проходит через центр шара и равна его диаметру. Осевое сечение вписанного усеченного конуса — равнобедренная трапеция. Оси вписанных цилиндра и усеченного конуса проходят через центры описанных шаров. Осевое сечение вписанного конуса — равнобедренный треугольник, у которого высота, опущенная из вершины треугольника (она же — ось конуса), проходит через центр описанного шара.

Шар называется *вписанным* в цилиндр, конус или усеченный конус, если его поверхность касается боковой поверхности и оснований данных тел (рис. 2.23–2.25).

Осевое сечение описанного цилиндра — квадрат, сторона которого равна диаметру вписанного шара. Осевое сечение описанного конуса — равнобедренный треугольник, на высоте которого, опущенной из вершины треугольника (оси конуса), лежит центр вписанного шара. Оси описанных цилиндра и усеченного конуса также проходят через центры вписанных шаров. Осевое сечение описанного усеченного конуса — равнобедренная трапеция, у которой сумма длин оснований равна

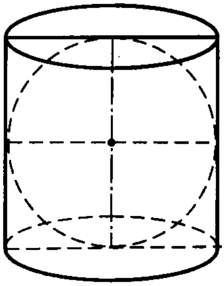

Рис. 2.23

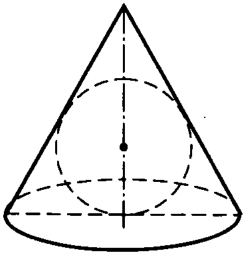

Рис. 2.24

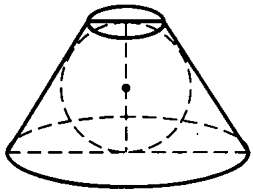

Рис. 2.25

сумме длин боковых сторон (свойство сторон описанного четырехугольника). Можно также сказать, что у описанного усеченного конуса сумма радиусов оснований равна образующей, а высота — диаметру вписанного шара.

Шар называется *описанным* около многогранника, если все вершины многогранника лежат на поверхности шара. Таким образом, центр описанного шара должен быть равноудален от всех вершин многогранника. Пусть $A_k$ и $A_{k+1}$ — вершины, ограничивающие одно из ребер многогранника, $O$ — центр описанного шара. Тогда $OA_k = OA_{k+1}$. Это значит, что центр описанного шара лежит на плоскости, проходящей через середину отрезка $A_kA_{k+1}$ и перпендикулярной к этому отрезку, которая является множеством точек пространства, равноудаленных от концов отрезка. Итак, если около многогранника можно описать шар, то его центр лежит на пересечении плоскостей, проходящих через середины всех ребер и перпендикулярных к этим ребрам.

Кроме того, если около многогранника описан шар, то плоскость каждой грани многогранника пересекает шар по окружности, в которую эта грань должна быть вписана. Центр описанной окружности равноудален от вершин вписанного многоугольника. Прямая, проходящая через центр этой окружности и перпендикулярная к плоскости многоугольника, есть множество точек пространства, равноудаленных от его вершин. Найти центр описанного около многогранника шара можно следующим образом:

а) найти центр окружности, описанной около одной из граней, например основания пирамиды, и провести через эту точку прямую, перпендикулярную к данной грани;

б) через середину одного из ребер, не принадлежащих рассмотренной грани, провести перпендикулярную к нему плоскость.

Центр описанного шара будет находиться на пересечении построенных плоскости и прямой.

Из рассмотренных нами многогранников шар всегда может быть описан около куба, прямоугольного параллелепипеда, треугольной пирамиды. В правильной треугольной пирамиде центр описанного шара лежит на высоте или ее продолжении. Около $n$-угольной пирамиды, где $n > 3$, и около прямой призмы шар может быть описан при условии, что около оснований этих тел можно описать окружность. Шар не может быть описан около наклонной призмы. Около усеченной пирамиды шар можно описать при условии, что около обоих оснований можно описать окружности, причем прямая, проходящая через центры этих окружностей $O_1$ и $O_2$, перпендикулярна к основаниям. Центр описанного шара $O$ также будет находиться на прямой $O_1O_2$.

Шар называется *вписанным* в многогранник, если каждая из граней многогранника касается поверхности шара. Так как радиус, проведенный к точке касания сферы и плоскости, перпендикулярен к этой плоскости, то центр шара, вписанного в многогранник, должен быть равноудален от всех его граней. Это означает, что центр вписанного шара должен лежать на пересечении биссектральных плоскостей всех двугранных углов, образованных гранями многогранника.

**Шар** всегда **можно вписать** в куб и правильную треугольную пирамиду и **нельзя вписать** в произвольный прямоугольный параллелепипед и наклонную призму. Центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на ее высоте. В прямую призму шар можно вписать при условии, что в ее основание может быть вписана окружность, диаметр которой равен высоте призмы. Центр вписанного шара лежит на середине высоты, проведенной между центрами окружностей, вписанных в верхнее и нижнее основания призмы.

## Система координат в пространстве

Зададим прямоугольную систему координат в пространстве. Для этого на некоторой плоскости $\alpha$ зададим прямоугольную систему координат $Oxy$. Через начало координат $O$ проведем перпендикулярно к плоскости $\alpha$ координатную ось $Oz$. В качестве начала отсчета на каждой из осей выбирается точка $O$. Направление оси $Oz$, как правило, выбирают таким образом, чтобы получилась так называемая «правая» система. Если от оси $Ox$ к оси $Oy$ мы движемся против часовой стрелки, то ось $Oz$ направляем вверх, если по часовой стрелке — вниз. Если на каждой оси выбраны одинаковые единицы отсчета, то такая система называется *декартовой прямоугольной системой координат*. Названия осей в этой системе: $Ox$ — ось абсцисс, $Oy$ — ось ординат, $Oz$ — ось аппликат. Каждой точке $P$

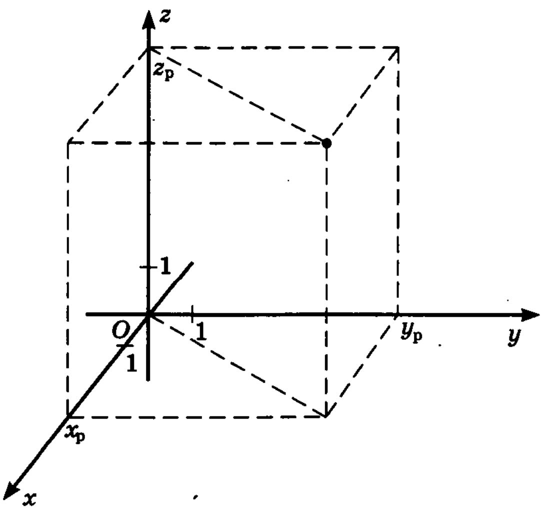


Рис. 2.26

с помощью введенной нами системы координат можно поставить в соответствие единственную тройку чисел ($x_P$; $y_P$; $z_P$), называемых координатами этой точки, задающих ее положение в пространстве. Эти числа соответствуют ортогональным (прямоугольным) проекциям точки $P$ на каждую из осей (рис. 2.26).

Тот факт, что точка $P$ имеет координаты $x_P$, $y_P$, $z_P$, записывают следующим образом: $P$ ($x_P$; $y_P$; $z_P$). Если точка $P$ лежит в одной из координатных плоскостей, например в плоскости $Oxy$, то она имеет координаты $P$ ($x_P$; $y_P$; 0). Если точка Р лежит на одной из координатных осей, например на оси $Oy$, то ее координаты — $P$ (0; $y_P$; 0).

## Векторы в пространстве

Два вектора[1] в пространстве называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны, то любой вектор $\vec{d}$ можно представить в виде их линейной комбинации:

$$\vec{d} = k\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c},$$

где $k$, $m$ и $n$ — действительные числа.

Подобное представление называется *разложением вектора $\vec{d}$ по тройке некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$*. Таким образом, всякий вектор пространства может быть представлен в виде суммы трех некомпланарных векторов, взятых с некоторыми числовыми коэффициентами.

При рассмотрении суммы трех векторов в пространстве можно пользоваться правилом многоугольника, описанным для суммы векторов на плоскости. Но можно воспользоваться и новым правилом, которое называется *правилом параллелепипеда* и является развитием правила параллелограмма для суммы двух векторов. В соответствии с этим правилом для сложения трех некомпланарных векторов нужно поместить их начала в одну точку и построить на этих векторах,

---

[1] См. также раздел «Векторы», § 1, глава 1.

как на сторонах, параллелепипед. Вектор $\vec{d}$, исходящий из общего начала рассматриваемых векторов, направленный по диагонали параллелепипеда и равный ей по модулю, будет искомой суммой векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 2.27).

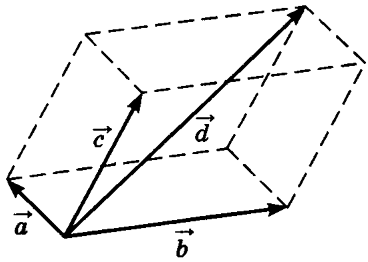


Рис. 2.27

Правило параллелепипеда позволяет ввести координаты вектора в пространстве. Для этой цели зададим тройку единичных направляющих векторов координатных осей $Ox$, $Oy$ и $Oz$: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Эти векторы некомпланарны, поэтому любой вектор $\vec{d}$ можно представить в виде их линейной комбинации. Для этой цели начало вектора $\vec{d}$ поместим в начало координат. Обозначим координаты конца этого вектора $p$, $q$, $t$. Тогда можно представить вектор $\vec{d}$ в следующем виде: $\vec{d} = p\vec{i} + q\vec{j} + t\vec{k}$. Коэффициенты разложения $p$, $q$, $t$ называются *координатами вектора* $\vec{d}$ в пространстве (рис. 2.28). Их записывают так: $\vec{d}\,\{p;\ q;\ t\}$.

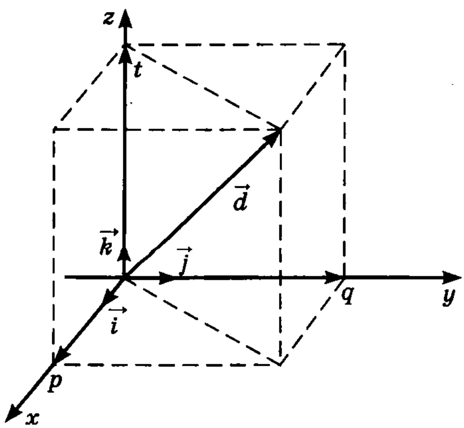


Рис. 2.28

**Координаты суммы и разности векторов**

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$.

Пусть $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, тогда $\vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

Пусть $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, тогда $\vec{d}\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$.

**Координаты произведения вектора $\vec{a}\{x; y; z\}$ на число $m$.**

Пусть $\vec{e} = m\vec{a}$, тогда $\vec{e}\{mx; my; mz\}$.

**Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$**, для которого заданы координаты начала и конца $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$\overrightarrow{AB}\{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}.$$

**Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$:**

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

**Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha,$$

где $\alpha$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если заданы координаты векторов: $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Угол $\alpha$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вычислить по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

## Уравнения плоскости и сферы в пространстве

Уравнением поверхности в пространстве называется уравнение, которому удовлетворяют координаты всех точек данной поверхности, и только они.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной к вектору $\vec{n}\{A;\ B;\ C\}$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Раскрыв скобки, можно записать это уравнение в так называемом стандартном виде:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Уравнение плоскости, проходящей через начало координат:

$$Ax+By+Cz=0.$$

Уравнение плоскости, параллельной одной из координатных осей, например оси $Ox$:

$$By+Cz+D=0.$$

Уравнение плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей, например плоскости $Oxy$:

$$z=m,$$

где $m$ — аппликата точки, в которой данная плоскость пересекает ось $Oz$.

Уравнение сферы с центром $O(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом $R$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

Уравнение сферы радиусом $R$, центр которой совпадает с началом координат:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

## § 2. Технология решения задач стереометрии

Схема решения геометрических задач, состоящая из одиннадцати пунктов и оформленная нами в виде памятки, представлена в § 2 главы 1. Рассмотрим подробно каждый пункт памятки в применении к задачам стереометрии.

**1. Чтение условия задачи**

Этот этап, с которого начинается работа над стереометрической задачей, исключительно важен. Он требует особого внимания и серьезной предварительной подготовки. Условие задачи должно быть правильно понято. Для этого необходимо хорошо владеть математической терминологией и в процессе чтения не упустить ни одной детали. Во время чтения условия полезно делать наброски чертежей и краткие записи на черновике, которые пригодятся на последующих этапах работы.

В условии задачи могут упоминаться различные понятия, которые вы не сразу сможете вспомнить или вообще не знаете. Найдите соответствующую информацию в литературе и выпишите на черновике нужное определение, формулировку теоремы или формулу. Все эти сведения являются исходными для вашей задачи и поэтому важны. Естественно, что в ходе контрольной работы или экзамена удастся воспользоваться только теми знаниями, которыми вы располагаете.

Еще раз хотим подчеркнуть, что правильно понятое условие — залог правильного решения задачи. Поэтому не стоит жалеть времени, потраченного на этом этапе работы.

**2. Выполнение чертежа**

Теперь необходимо перейти от предварительных набросков, сделанных в процессе чтения условия задачи, к качественно выполненному чертежу с использованием чертежных инструментов: линейки, циркуля, лекал и трафаретов. Вершины многогранников, центры окружностей и сфер и прочие характерные точки чертежа должны быть обозначены буквами. Это пригодится при записи краткого условия задачи и непосредственно в процессе ее решения

Особенностью изображения пространственных фигур на плоскости является искажение линейных размеров и углов. Перпендикулярные прямые редко проводятся под прямым углом друг к другу, окружности выглядят как эллипсы и т. п. Об этом необходимо помнить как в процессе создания чертежа, так и при его использовании на этапе решения задачи. Там же, где элементы изображаемого объекта воспроизводятся точно (это может быть, например, передняя грань прямоугольного параллелепипеда), пропорции длин отрезков и величины углов должны быть соблюдены.

Отметим, что при решении задач, в которых рассматривается комбинация геометрических тел, как правило, нет необходимости приводить все из них на чертеже. Например, не обязательно изображать описанные около многогранников или вписанные в них шары. Достаточно бывает определить, где находятся их центры, а также найти, какие отрезки равны радиусам или диаметрам этих шаров.

Если же без более подробного чертежа не обойтись, то при деталировке можно изобразить окружности, в которые вписаны или около которых описаны те или иные плоские фрагменты или сечения рассматриваемых тел.

Для того чтобы чертеж соответствовал исходным данным, необходимо не только внимательно изучить и правильно понять условие задачи, но и хорошо знать теорию. Так, например, основание высоты правильной четырехугольной пирамиды должно совпадать с точкой пересечения диагоналей лежащего в основании квадрата, который будет выглядеть на чертеже как параллелограмм.

Чертеж — это рабочее место, то есть пространство, которое нужно организовать так, чтобы работать было удобно. Поэтому нужен чертеж такого размера, чтобы все его элементы были хорошо видны. Кроме того, необходимо так развернуть изображаемый на чертеже объект, чтобы разные линии и точки не накладывались друг на друга. Если это все же произошло, лучше выполнить чертеж повторно.

Хороший чертеж — важное подспорье в решении стереометрической задачи, так как помогает увидеть связи между элементами изучаемых фигур. С другой стороны, некачественный чертеж может увести вас с верного пути решения.

При решении стереометрических задач, как правило, нет необходимости изображать описанные около многогранников и вписанные в них шары. Достаточно бывает определить, где находятся их центры, а также найти, какие отрезки равны радиусам или диаметрам этих шаров.

При деталировке можно изобразить окружности, в которые вписаны или около которых описаны те или иные плоские фрагменты или сечения рассматриваемых тел.

Рассмотрим конкретный пример чертежа, выполненного по условию задачи.

**Пример № 2.1 [13].**

Высота цилиндра равна $H$, радиус его основания равен $R$. В цилиндр помещена пирамида, высота которой совпадает с образующей цилиндра $AA_1$, а основанием служит равнобедренный треугольник $ABC$ ($AB = AC$), вписанный в основание цилиндра. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если угол $BAC = 120°$.

На рис. 2.29 показано, как правильно выполнить чертеж к задаче.

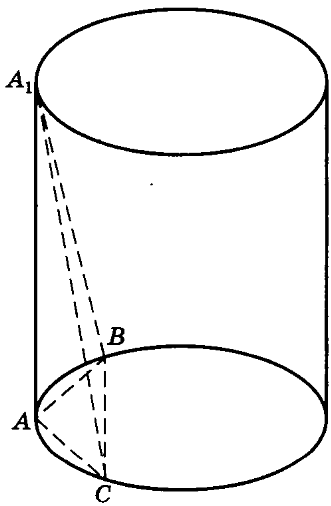


Рис. 2.29

Чертеж построен с учетом условия задачи: высота совпадает с образующей цилиндра; основание пирамиды — равнобедренный треугольник, вписанный в основание цилиндра. Так как, по условию, угол $BAC$ — тупой, то отрезок $BC$ на чертеже меньше диаметра круга, лежащего в основании цилиндра.

### 3. Краткая запись условия задачи (формирование базы данных)

Как и при решении задач планиметрии, будем располагать чертеж в левой части страницы, а краткое условие — в правой. Исходные данные отделяем от того, что требуется найти или доказать, горизонтальной чертой.

**Пример № 2.2 [13].**

В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $c$, и острым углом, равным 30°. Боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найти объем пирамиды (рис. 2.30).

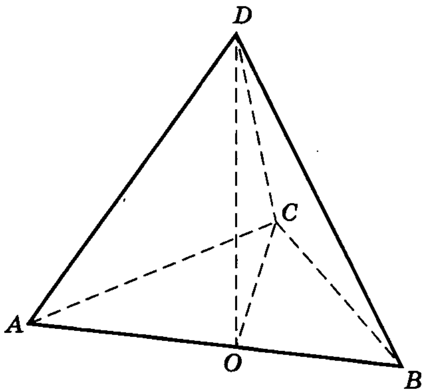


Рис. 2.30

Дано: $DABC$ — пирамида; $\angle ACB = 90°$; $AB = c$; $\angle BAC = 30°$; $\angle DAO = \angle DBO = \angle DCO = 45°$.

Найти: $V_{DABC}$.

Приведенная краткая запись отражает все данные текстового условия задачи и соответствует чертежу (рис. 2.30).

### 4. Перенос данных условия на чертёж. Выделение элементов чертежа различными цветами

Требуется перенести все данные условия задачи на чертеж: плоские углы основания и граней, величины сторон, обозначения нужных двугранных углов и т. п. Очень полезно какими-либо яркими цветами выделить на чертеже плоские фигуры, в которых требуется что-либо определить. Например, сечение, о котором идет речь в условии задачи. Эти фигуры могут быть треугольниками, параллелограммами, трапециями, кругами и т. п.

Для того чтобы рисунок получился более наглядным, исходную фигуру можно изобразить темным цветом (например черным), важные сечения, вписанные и описанные окружности — яркими цветами (красным), остальные упомянутые в условии элементы — средними (по яркости) тонами (зеленым, синим). Заметим, что красным цветом можно пользоваться только на черновике, ибо на чистовике красный цвет используется учителем для записи замечаний. Можно также выделять элементы чертежа серыми полутонами или с помощью штриховки. В данном пособии все чертежи выполнены именно так.

**Пример № 2.3 [13].**

Дан куб, длина ребра которого $a$. На ребре $AA_1$ взята точка $E$, так что $AE = a/4$. Найти объем пирамиды, вершина которой — точка $A_1$, а основание — сечение куба, проходящее через точки $D$, $E$ и произвольную внутреннюю точку ребра $BB_1$ (рис. 2.31).

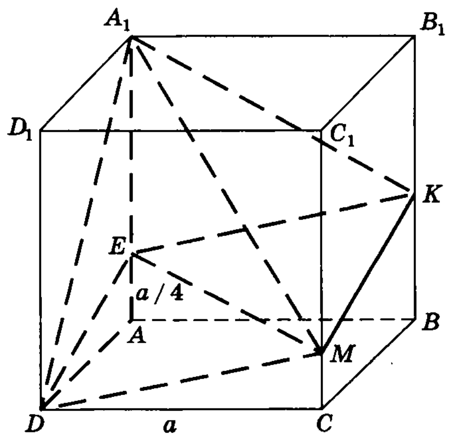


Рис. 2.31

Дано: $AD_1$ — куб; $DC = a$; $AE = a/4$; $A_1$ — вершина пирамиды, а её основание — сечение куба $DEKM$.

Найти: $V_{A_1DEKM}$.

После оформления краткой записи условия мы перенесли на основной рисунок данные задачи, величины указанных длин отрезков, построили сечение, а затем и пирамиду (рис. 2.31).

Куб — второстепенная фигура, его можно начертить темным цветом (черным, синим). Более ярким цветом следует выделить пирамиду, объем которой требуется найти.

**5. Запись требуемых формул и теорем на черновике (формирование базы знаний)**

Этот пункт не обязателен, но исключительно полезен при решении задачи. Он заключается в том, чтобы выписать на черновике теоретические сведения, которые могут быть использованы при решении задачи. Конечно, если вы держите в голове всю необходимую информацию, этого можно не делать. Например, у выпускника школы вряд ли возникает потребность в том, чтобы записать общую формулу корней квадратного уравнения, прежде чем приступить к его решению. Что касается стереометрии, то далеко не все ее факты постоянно встречаются в работе. Поэтому, записывая общий вид формулы или даже формулировку теоремы, на которую предстоит ссылаться, вы избавляете себя от риска допустить ошибку. Кроме того, выписав формулу, вы сможете ясно увидеть, какие величины в нее входят и какие, быть может, придется определить в процессе решения. Отметим, что на контрольной работе или экзамене, где нет возможности обратиться к справочной литературе, процесс формирования базы знаний может включать в себя вывод необходимой формулы, если нет уверенности в том, что вы сможете точно ее воспроизвести.

## Пример № 2.4 [13]

Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой $c$ и острым углом $\alpha$. Высота пирамиды имеет длину $H$ и проходит через вершину прямого угла основания. Найти полную поверхность пирамиды (рис. 2.32).

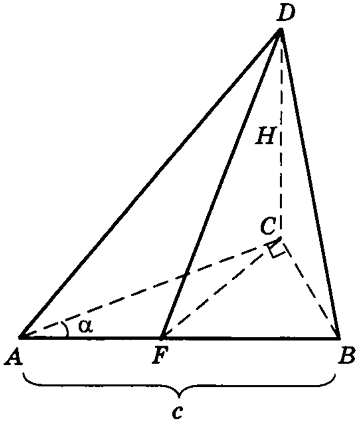


Рис. 2.32

<u>Дано</u>: $\angle CAB = \alpha$; $\angle ACB = 90°$;
$AB = c$; $DC \perp ABC$;
$DC = H$.

<u>Найти</u>: $S_{DABC}$.

Базируясь на краткой записи условия задачи, выпишем весь теоретический материал, который может помочь в решении, т. е. создадим базу знаний на основании базы данных.

1. Требуется найти полную поверхность пирамиды, то есть сумму площадей всех боковых граней плюс площадь основания: $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$.

2. Далее нам требуется определить, каковы эти грани и как найти их площади. Грани являются треугольниками (по определению пирамиды и по условию задачи).

3. Высота пирамиды проходит через вершину прямого угла прямоугольного треугольника, лежащего в основании (по условию задачи), поэтому две грани, имеющие общее ребро $DC$, — прямоугольные треугольники (по определению перпендикулярности прямой и плоскости).

4. Основание — прямоугольный треугольник (по условию задачи).

Далее важно вспомнить, как найти площадь обычного и прямоугольного треугольников, а также выписать формулы для катетов прямоугольного треугольника, связав их с известными величинами.

Итак, в прямоугольном треугольнике $ABC$ (рис. 2.33):
$c^2 = a^2 + b^2$ (теорема Пифагора);

$a = c \cdot \sin\alpha$; $b = c \cdot \cos\alpha$; $S_{\text{ABC}} = \dfrac{1}{2}ab$.

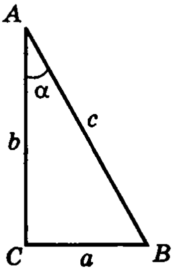


Рис. 2.33

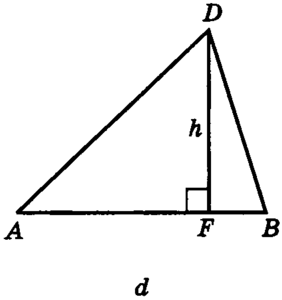


Рис. 2.34

В произвольном треугольнике $ABD$ (см. рис. 2.34):

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}hd.$$

**Пример № 2.5 [13].**

Определите объем прямой треугольной призмы, у которой площадь боковой грани равна $Q$, а расстояние от плоскости этой грани до противолежащего ребра равно $d$.

<u>Дано</u>: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма; $S_{AA_1B_1B} = Q$; расстояние от $CC_1$ до плоскости $AA_1B_1B$ равно $d$.

<u>Найти</u>: $V_{AC_1}$.

Решение этой задачи начнем с формирования базы знаний, необходимых для построения чертежа. Включим в нее следующие определения и теоремы:

1. Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны к основаниям.

2. Если прямая $a$ параллельна прямой $b$, лежащей в плоскости $\alpha$, то прямая $a$ параллельна плоскости $\alpha$.

3. Расстоянием между плоскостью и параллельной ей прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из любой точки этой прямой на плоскость.

4. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

5. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Теперь можно приступить к выполнению чертежа.

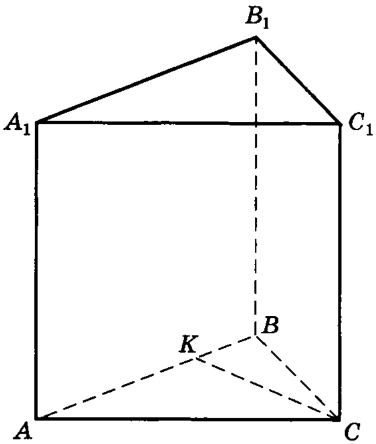


Рис. 2.35

С учетом первого пункта базы знаний строим прямую призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 2.35). Грань $AA_1C_1C$, данная на чертеже во фронтальной проекции, изображается прямоугольником без искажения углов. Боковые грани $AA_1B_1B$ и $BB_1C_1C$, также являющиеся прямоугольниками, изображаются в виде параллелограммов.

Для построения отрезка, длина которого равна расстоянию между ребром $CC_1$ и плоскостью боковой грани $AA_1B_1B$, воспользуемся последующими пунктами базы знаний. Боковые ребра призмы $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ параллельны между собой и перпендикулярны к ее основаниям $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Так как $CC_1 \parallel AA_1$, то прямая $CC_1$ параллельна плоскости $AA_1B_1B$. Построим высоту $CK$ треугольника $ABC$. Имеем: $CK \perp AB$, по построению; $CK \perp AA_1$, так как прямая $AA_1$ перпендикулярна к плоскости $ABC$ и, значит, перпендикулярна к каждой прямой, лежащей в этой плоскости, в том числе и к прямой $CK$. Следовательно, прямая $CK$ перпендикулярна к боковой грани $AA_1B_1B$, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. Таким образом, $CK$ и есть искомый перпендикуляр, опущенный из точки, принадлежащей боковому ребру $CC_1$ на плоскость боковой грани $AA_1B_1B$. Длина $CK$, по условию, равна $d$.

Продолжим решение этой задачи в следующих пунктах памятки.

### 6. «Деталировка» — вычерчивание отдельных деталей на дополнительных чертежах

Деталировка состоит в выделении фрагментов чертежа, которые нужно рассмотреть в конкретных пунктах решения. В стереометрических задачах потребность в деталировке связана также с тем, что при изображении на плоскости пространственных фигур происходит искажение их форм и размеров. Поэтому целесообразно вынести плоские элементы рассматриваемых фигур на отдельные чертежи, на которых эти элементы будут представлены без искажений, что облегчит их расчет.

Вновь обратимся к примеру № 2.5. Вынесем на отдельные чертежи из рисунка 2.35 две фигуры:

- боковую грань призмы — прямоугольник $AA_1B_1B$ (рис. 2.36);
- основание призмы — треугольник $ABC$ (рис. 2.37).

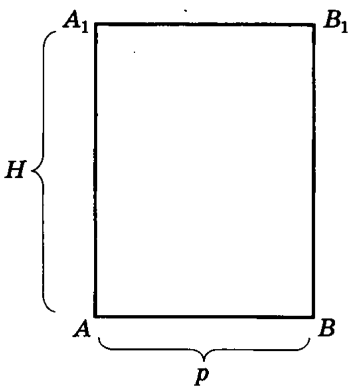


Рис. 2.36

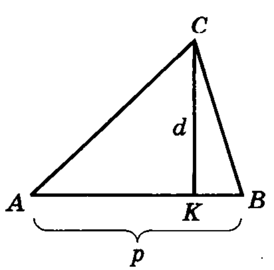


Рис. 2.37

**7. Анализ данных задачи, привязка искомых величин к элементам чертежа**

На этом этапе мы выясняем, существует ли фигура, которая содержит искомую величину. Допустим, что существует. Тогда выясняем, какие элементы этой фигуры надо знать, чтобы найти искомую величину, а также даны ли они в условии задачи. Если исходных данных недостаточно, чтобы найти искомые величины, то необходимо установить, какие дополнительные построения и «деталировки» придется выполнить.

Отметим, что данные условия и искомые величины не всегда могут быть «привязаны» к чертежу. Так, в примере № 2.5 задана площадь боковой грани $Q$, а найти требуется объем прямой призмы $V$. Однако ни площадь, ни объем не являются размерами ни одного из элементов рассматриваемой треугольной призмы $AC_1$. В таких случаях на чертеже могут быть обозначены те элементы, которые будут использованы при вычислении этих величин. В нашем примере это длины ребер $AB$ и $AA_1$, которые мы обозначим буквами $p$ и $H$ соответственно. Перенесем $p$, $H$ и длину $d$ перпендикуляра $CK$ на деталировки (рис. 2.36, 2.37).

**8. «Синтез» — составление цепочки действий (алгоритм решения)**

Составление алгоритма или плана решения — важнейший этап работы над стереометрической задачей. Алгоритм мы оформляем как цепочку необходимых действий. Однако предусмотреть заранее все необходимые для решения действия, в том числе дополнительные построения и деталировки, удается не всегда. Поэтому в сложных задачах составляется приблизительный план решения (иногда не в виде блок-схемы, а в словесной форме), который уточняется в ходе решения.

В частности, в примере № 2.5 решение включает в себя такие пункты, как построение $CK \perp AB$ и обоснование того, что $CK$ есть опущенный из точки ребра $CC_1$ на плоскость боковой грани $AA_1B_1B$ перпендикуляр, длина которого равна, по условию, $d$. Оформить эти действия и последующие алгебраические преобразования в схематическом виде затруднительно. Достаточно ограничиться общим словесным планом.

Приведем пример задачи, в которой нам удается составить цепочку предстоящих действий, что позволяет оптимизировать процесс решения.

**Пример № 2.6.**

Определить длину стороны основания правильной четырехугольной пирамиды, объем которой 32 см$^3$, а высота 6 см.

Выполним чертеж (рис. 2.38) и запишем краткое условие задачи.

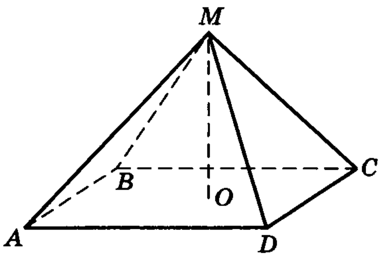


Рис. 2.38

<u>Дано</u>: $MABCD$ — правильная четырехугольная пирамида; $V_{MABCD} = 32$ см$^3$; $MO \perp ABCD$, $MO = 6$ см.

<u>Найти</u>: $AD$.

Проанализируем условие задачи.

Так как $MABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, то ее основанием является квадрат, сторону которого обозначим $a$. Найти $a$ можно, зная, например, площадь квадрата $ABCD$. Ее можно выразить из формулы объема пирамиды $V = \frac{1}{3} SH$ (ее необходимо внести в базу знаний).

Теперь алгоритм решения задачи может быть записан в виде цепочки без разветвлений: $(V; H) \to S \to a$.

Дальнейшие пункты памятки, о которых подробно говорилось в главе 1, лишь коротко прокомментируем.

**9. Реализация алгоритма решения**

На этом этапе, так же, как и в планиметрии, в зависимости от стоящей перед нами задачи, мы осуществляем требуемые доказательства, построения или вычисления. Последовательность наших действий соответствует при этом пунктам выстроенной цепочки.

Реализация алгоритма, составленного для примера № 2.6, очень проста.

1) $S = \dfrac{3V}{H} = \dfrac{3 \cdot 32}{6} = 16$ (см²).

2) $a = \sqrt{S} = \sqrt{16} = 4$ (см).

Что касается примера № 2.5, то для завершения решения нам необходимо пополнить базу знаний формулой вычисления объема прямой призмы: $V = S_{осн.} \cdot H$, где $S_{осн.}$ — площадь основания, $H$ — высота призмы, длина которой совпадает с длиной бокового ребра.

Используем введенные выше обозначения и получаем:

$$V_{AC_1} = S_{ABC} \cdot H.$$

Учитываем, что $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}pd$,

$S_{AA_1B_1B} = pH = Q$ (см. рис. 2.36 и 2.37).

Тогда $V_{AC_1} = \dfrac{1}{2}pdH = \dfrac{1}{2}pHd = \dfrac{1}{2}Qd$.

Таким образом, мы выразили искомый объем $V$ прямой треугольной призмы $AC_1$ через заданные в условии величины $d$ и $Q$. Задача решена.

**10. Проверка решения**

Проверка может быть выполнена на основе данных задачи. Проверяем, все ли данные условия использованы при решении задачи. Контролируем и размерность результата, например, объём измеряется в кубических величинах, а площадь — в квадратных. Следует учитывать, что длины, площади и объемы — величины положительные. Полезно найти одну и ту же величину разными способами, если это возможно. Результат не должен зависеть от способа решения.

**11. Запись ответа**

Пишем слово «Ответ», ставим двоеточие. Затем записываем искомые величины с указанием их размерностей, если таковые фигурируют в условии задачи.

Например:
Ответ: $V_{AD_1} = 130$ дм$^3$.

В заключение этого параграфа мы хотим обратить внимание уважаемых читателей на следующие факты. Во-первых, не в каждой задаче вам необходимо выполнять все пункты памятки. К числу таких необязательных пунктов относятся, в частности, деталировка, а иногда и построение чертежа. Что же касается составления алгоритма решения, то сделать это на начальном этапе работы удается далеко не всегда. Подобная ситуация не должна вас смущать. В этом случае мы советуем перейти к этапу решения, не имея ясного плана и действуя под девизом: «Глаза боятся, а руки делают». В процессе работы, как правило, вам удастся выяснить новые факты, которые позволят выйти на описанный нами путь и добиться успеха.

## § 3. Примеры решения задач стереометрии

Рассмотрим примеры решения задач по методике, описанной во втором параграфе. Заметим, что пункты «деталировка», «анализ» и «синтез» лучше проиллюстрировать именно на примерах, так как они неразрывно связаны между собой.

**Пример № 2.7.**

Вычислите объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен $R$.

1. Читаем условие задачи, выписываем на черновике термины вместе с пояснениями к ним.

*Правильный тетраэдр* — это треугольная пирамида, все грани которой — правильные треугольники.

*Описанная окружность* — это окружность, проходящая через вершины треугольника.

*Центр описанной окружности* — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Эти определения пригодятся нам при построении чертежа, формировании базы знаний и решении задачи.

2. Выполняем чертеж (рис. 2.39), обозначаем буквами его характерные точки. На чертеже $DO$ — высота тетраэдра.

3. Записываем краткое условие задачи справа от чертежа, используя его буквенные обозначения.

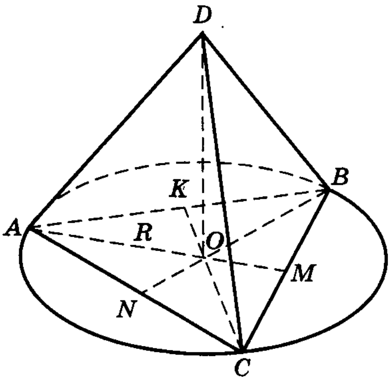


Рис. 2.39

Дано: $ABCD$ — правильный тетраэдр; $AO = R$.

Найти: $V_{ABCD}$.

4. Переносим данные условия на чертеж: на рис. 2.39 над отрезком $OA$ поставим букву $R$ — данный в условии радиус описанной окружности.

5. Формируем базу знаний (для этого используем записи, сделанные на черновике во время чтения условия задачи):

а) площадь правильного треугольника: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где $a$ — сторона треугольника;

б) радиус окружности, описанной около правильного треугольника: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$;

в) теорема Пифагора и следствия из нее:

$$c^2 = a^2 + b^2;\ a = \sqrt{c^2 - b^2}\ ;\ b = \sqrt{c^2 - a^2};$$

г) объем пирамиды $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн.}}\cdot H$;

д) высота в правильном треугольнике совпадает с серединным перпендикуляром, медианой и биссектрисой;

е) медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

6. Выносим на отдельные чертежи грань тетраэдра — равносторонний треугольник $ABC$ с описанной около него окружностью и прямоугольный треугольник $AOD$, содержащий высоту тетраэдра. Отмечаем, что в каждый из них входит радиус описанной окружности $R$.

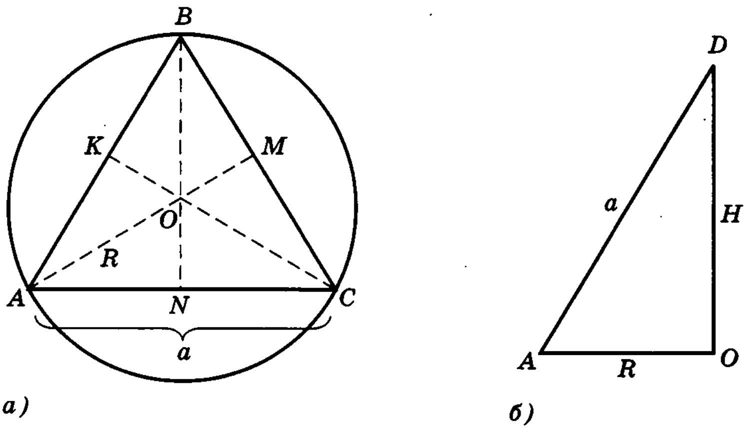


Рис. 2.40

7. Выясняем, через какие данные условия задачи можно найти искомую величину — объем тетраэдра.

Для вычисления объема необходимо знать площадь основания и высоту тетраэдра. В качестве основания можно рассматривать любую грань, например, правильный треугольник $ABC$ (рис. 2.40, *а*), высота является элементом прямоугольного треугольника $AOD$ (рис. 2.40, *б*). Отметим, что оба треугольника содержат равные между собою ребра правильного тетраэдра, и обозначим длину этих ребер, которая нам пока неизвестна, буквой $a$.

8. Составляем цепочку действий (алгоритм решения):

$$R \to a \to (S, H) \to V.$$

Здесь $S$ и $H$ — площадь грани и высота правильного тетраэдра, $V$ — его объем.

9. Реализация алгоритма выглядит следующим образом:

$a = R\sqrt{3}$;

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R^2$;

$H = DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}} = R\sqrt{2}$;

$V = \dfrac{1}{3} SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 \cdot R\sqrt{2} = \dfrac{R^3\sqrt{6}}{4}$.

10. Выполняем проверку полученного результата:

$$V = \frac{R^3\sqrt{6}}{4}.$$

По размерности этот ответ верен, т. к. размерность объема — кубические единицы; все заданные в условии задачи величины участвуют в ответе (в данном случае — это радиус описанной окружности $R$). Кроме подобной косвенной проверки, полезно также повторить все проведенные выкладки.

11. Ответ: $V = \dfrac{R^3\sqrt{6}}{4}$.

Хотим напомнить, что общая схема решения, описанная в памятке, предназначена для того, чтобы структурировать и тем самым облегчить работу над задачей. Однако, хорошо зная схему, вы не обязаны в каждом конкретном случае механически выполнять все ее пункты, если в этом нет особой необходимости. В последующих примерах мы будем приводить именно такие, необходимые с нашей точки зрения, этапы решения.

**Пример № 2.8 [13].**

В прямом параллелепипеде стороны основания равны $a$ и $b$, а острый угол между ними равен 60°. Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найти объем.

Дано: $AD_1$ — параллелепипед; $AB = DC = a$; $AD = BC = b$; $\alpha = 60°$; $AC = B_1D$; $AA_1 \perp ABCD$.

Найти: $V_{AD_1}$.

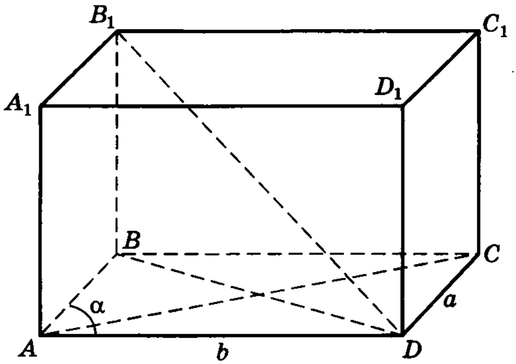


Рис. 2.41

Решение

1. База знаний:

- объем параллелепипеда: $V = S_{осн}H$;
- площадь параллелограмма $ABCD$: $S = ab \cdot \sin\alpha$;
- у прямого параллелепипеда боковые ребра перпендикулярны основанию;
- теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha$;
- свойства углов при двух параллельных прямых, пересеченных третьей: сумма односторонних углов равна 180°;
- теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$.

2. Алгоритм решения (задаем в текстовой форме, а затем строим цепочку):

— зная длины сторон и величину острого угла параллелограмма $ABCD$, находим его площадь и длины диагоналей;

— из прямоугольного треугольника $B_1BD$ находим, по теореме Пифагора, высоту параллелепипеда $B_1B$;

— вычисляем объем параллелепипеда.

Цепочка: $(a, b, \alpha) \to (S_{ABCD}, BD, AC = B_1D) \to B_1B \to V$.

3. Реализация алгоритма:

рассмотрим основание $ABCD$.

$S_{ABCD} = ab\sin 60° = ab\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$B_1D^2 = AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120° = a^2 + b^2 + ab$, так как $\cos 120° = -1/2$;

$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60° = a^2 + b^2 - ab$.

Рассмотрим треугольник $BDB_1$.

$H^2 = BB_1^2 = B_1D^2 - BD^2 = 2ab$;

$H = \sqrt{2ab}$;

$V = \frac{ab\sqrt{3}}{2}\sqrt{2ab} = \frac{ab\sqrt{6ab}}{2}$.

Ответ: $V_{AD_1} = \frac{ab\sqrt{6ab}}{2}$.

**Пример № 2.9 [13].**

Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна $d$ и составляет с боковым ребром призмы угол 30°. Найти объем призмы.

Дано: $AF_1$ — правильная шестиугольная призма; $AD_1 = d$; $\angle AD_1D = \alpha = 30°$.

Найти: $V_{AF_1}$.

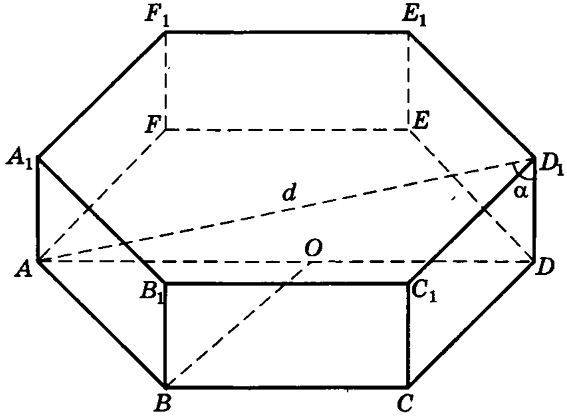


Рис. 2.42

Решение.

1. База знаний:

— объем призмы $V = S_{осн}H$;

— площадь правильного шестиугольника

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2,$$

где $a$ — сторона шестиугольника;

— катет, лежащий в прямоугольном треугольнике против угла 30°, равен половине гипотенузы;

— радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен его стороне.

2. Алгоритм решения (задаем в текстовой форме):

— из треугольника $ADD_1$ найдем высоту призмы $DD_1$;

— в шестиугольнике $ABCDEF$ вычислим наибольшую диагональ $AD$; найдем $AO$ — радиус окружности, описанной около шестиугольника;

— найдем площадь треугольника $AOB$;

— найдем площадь шестиугольника $ABCDEF$;

— определим объем призмы.

3. Реализация алгоритма:

По определению правильной призмы, треугольник $ADD_1$ — прямоугольный; $H=DD_1=AD_1\cos 30^\circ = d\frac{\sqrt{3}}{2}$; $AD=\frac{AD_1}{2}=\frac{d}{2}$.

Точка $O$ — центр описанной окружности, поэтому

$AO=OB=BA=\frac{d}{4}$.

Треугольник $AOB$ — правильный.

Площадь равностороннего треугольника $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где $a$ — длина стороны треугольника. В нашем случае $a=\frac{d}{4}$. Площадь правильного шестиугольника определяется по формуле

$$S_{ABCDEF}=6\,S_{AOE}=\frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}d^2}{32}.$$

Вычислим объем шестиугольной призмы $AF_1$:

$$V=S_{осн}H=d^2\frac{3\sqrt{3}}{32}d\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9d^3}{64}.$$

4. Проверка: Размерность $V$ — объема — кубическая, в ответе присутствуют все данные задачи.

<u>Ответ</u>: $V_{AF_1}=\frac{9d^3}{64}$.

---

Рассмотрим далее задачу о правильной треугольной пирамиде, в которой по заданным размерам двух ее элементов будут найдены многие другие величины.

**Пример № 2.10.**

---

В правильной треугольной пирамиде сторона основания $a$ равна 6 см и высота пирамиды $H$ равна 8 см.

Требуется найти:

а) высоту $h$ треугольника, лежащего в основании пирамиды; его площадь $S_{осн}$; радиус $r_в$ окружности, вписанной в основание; радиус $r_о$ окружности, описанной около основания; объем пирамиды $V$;

б) боковое ребро $l$ и апофему пирамиды $h_1$; площадь боковой грани $S_{бг}$ и площадь боковой поверхности пирамиды $S_{бп}$; радиус $r_{в1}$ окружности, вписанной в боковую грань; радиус $r_{о1}$ окружности, описанной около боковой грани;

в) плоский угол $\alpha$ при вершине пирамиды;

г) угол $\beta$ между боковым ребром и стороной основания;

д) угол $\varphi$ между боковым ребром и плоскостью основания;

е) двугранный угол $\psi$, образованный боковой гранью и плоскостью основания пирамиды;

ж) двугранный угол $\gamma$, образованный двумя боковыми гранями пирамиды;

з) радиус $R_в$ сферы, вписанной в пирамиду;

и) радиус $R_о$ сферы, описанной около пирамиды;

к) расстояние $d_1$ от центра основания до боковой грани;

л) угол $l$ и расстояние $d_2$ между боковым ребром и скрещивающейся с ним стороной основания пирамиды.

Сформируем необходимую для начала решения этой задачи базу знаний, которая в процессе решения будет пополняться новыми положениями:

- Пирамида называется правильной, если в ее основании лежит правильный многоугольник (в рассматриваемой задаче треугольник), а вершина пирамиды проецируется в центр основания.
- В правильной пирамиде боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом.
- В правильной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом.
- В правильном треугольнике все стороны равны, углы равны 60°, а каждая из его медиан является одновременно высотой, биссектрисой и лежит на серединном перпендикуляре к стороне треугольника.
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и каждая из них делится точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

- Центром правильного треугольника называется точка пересечения его медиан, которая совпадает с центром вписанной и описанной окружностей.

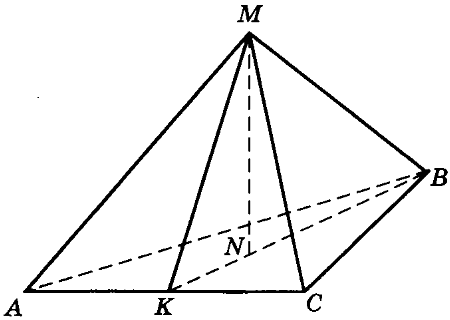


Рис. 2.43

С учетом сделанных замечаний выполним чертеж к задаче (рис. 2.43). Обозначим вершину пирамиды буквой $M$, вершины основания буквами $A$, $B$ и $C$. Построим высоту основания пирамиды $BK$, которая является также медианой и биссектрисой. Обозначим буквой $N$ точку пересечения медиан, которая, как было отмечено выше, делит отрезок $BK$ на части $BN$ и $NK$, такие, что $BN : NK = 2 : 1$, т. е. $BN = 2/3\ BK$, $NK = 1/3\ BK$.

Построим отрезок $MN$. Очевидно, $MN$ — высота пирамиды, так как, по определению правильной пирамиды, точка $N$ является проекцией точки $M$ на плоскость $ABC$.

Запишем *краткое условие задачи*, ограничившись пунктом «Дано», так как те величины, которые требуется найти, вместе с их буквенными обозначениями уже введены в основном тексте условия.

Дано: $MABC$ — правильная пирамида; $AB = BC = CA = a = 6$ см; $MN \perp$ плоскости $ABC$; $MN = H = 8$ см.

## Решение

1. Для того чтобы выполнить первую группу заданий, применим деталировку: вычертим отдельно правильный треугольник $ABC$ (рис. 2.44).

В этом треугольнике $AB = BC = CA = a = 6$ см, по условию. Проведем $BK \perp AC$, тогда $BK = h$, $AK = KC = a/2 = 3$ см.

В базу знаний должны быть включены правила расчета элементов прямоугольного треугольника с использованием тригонометрических функций, теорема Пифагора, а также формулы вычисления площади треугольника и объема пирамиды.

Находим $h$ из прямоугольного $\Delta BKC$, учитывая, что $\angle BCK = 60°$. Тогда $h = a \cdot \sin 60° = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Этот же результат можно получить, используя теорему Пифагора:

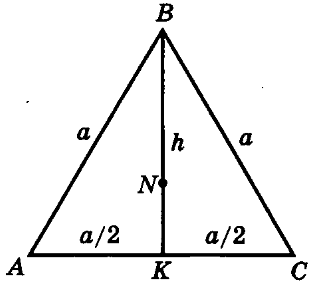


Рис. 2.44

$$h = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставляем в полученную формулу значение $a = 6$ см и находим $h = 3\sqrt{3}$ см.

Теперь можно вычислить площадь основания и объем пирамиды:

$$S_{осн} = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ см^2;\ V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H = 24\sqrt{3}\ см^3.$$

Для выполнения дальнейших расчетов снова дополним базу знаний:

- Окружность называется вписанной в многоугольник, если она касается всех сторон этого многоугольника.
- Центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения его биссектрис.
- Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен к касательной, проходящей через эту точку.
- Окружность называется описанной около многоугольника, если все вершины этого многоугольника лежат на окружности.
- Центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

Поскольку $\Delta ABC$ — правильный, то точка пересечения его медиан $N$ является одновременно точкой пересечения биссектрис и серединных перпендикуляров, а следовательно, общим центром вписанной и описанной окружностей. Очевидно:

$$r_о = BN = 2h/3 = a\sqrt{3}/3 = 2\sqrt{3} \text{ см};$$

$$r_в = NK = h/3 = a\sqrt{3}/6 = \sqrt{3} \text{ см}.$$

Заметим, что $r_о$ и $r_в$ можно сразу вычислить, используя уже известное числовое значение $h$. Далее также будем приводить общие формулы вычисления элементов правильной треугольной пирамиды, так как данная большая задача может быть разбита на несколько мелких, решаемых независимо друг от друга.

2. Чтобы выполнить задания б) — з), осуществим новую деталировку: вычертим отдельно $\Delta AMC$ (рис. 2.45) и $\Delta BMK$ (рис. 2.46).

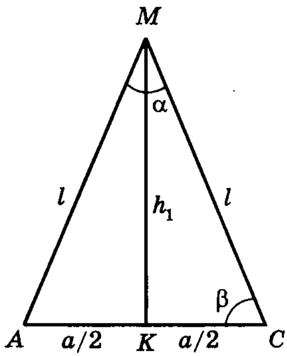


Рис. 2.45

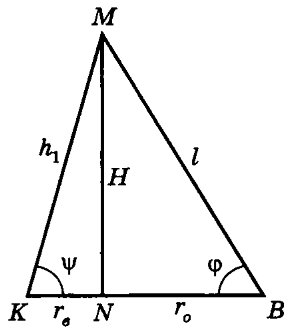


Рис. 2.46

Пополним базу знаний следующими фактами:

- Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной (теорема о трех перпендикулярах).
- Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, причем в качестве коэффициента

пропорциональности выступает удвоенный радиус окружности, описанной около этого треугольника:

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}=2r_o \text{ (теорема синусов).}$$

- Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в этот треугольник окружности: $S_\Delta = p\cdot r_в$; здесь $p=(a+b+c)/2$ — полупериметр треугольника.
- Медиана, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является также его высотой и биссектрисой.
- Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.
- Двугранным углом называется угол, образованный двумя полуплоскостями (гранями), имеющими общую границу (ребро двугранного угла).
- Двугранный угол измеряется его линейным углом. Линейным углом двугранного угла называется угол, вершина которого лежит на ребре, а стороны принадлежат граням двугранного угла и перпендикулярны к его ребру.
- Плоским углом при вершине пирамиды называется угол, образованный боковыми ребрами, принадлежащими одной грани пирамиды.

С учетом этой информации обозначим непосредственно на чертежах буквами известные элементы пирамиды и те ее элементы, которые необходимо найти.

В $\Delta AMC$ и $\Delta BMK$ имеем: $MA = MC = MB = l$, так как это боковые ребра правильной пирамиды $MABC$.

Построим отрезок $MK$. По теореме о трех перпендикулярах имеем: $MK \perp AC$. Действительно, $MK$ — наклонная, проведенная к плоскости $ABC$, $NK$ — проекция $MK$ на плоскость $ABC$; $NK \perp AC$, так как отрезок $NK$ лежит на высоте $BK$ треугольника $ABC$. Следовательно, $MK = h_1$ — высота $\Delta AMC$ или апофема рассматриваемой пирамиды. Отметим, что к этому выводу можно прийти и иным путем. Так как $BK$ — перпендикуляр, опущенный из вершины равностороннего треугольника $ABC$

на сторону $AC$, а значит, и медиана этого треугольника, то точка $K$ делит отрезок $AC$ пополам ($AK = KC = a/2$). Тогда $MK$ — медиана равнобедренного треугольника $AMC$, а значит, и его высота, т. е. $MK \perp AC$, что и требовалось доказать.

Так как $MK \perp AC$ и $BK \perp AC$, то $\angle MKB$ — линейный угол двугранного угла, образованного боковой гранью пирамиды $MAC$ и ее основанием $ABC$. Следовательно, $\angle MKB = \psi$.

Поскольку $NB$ — проекция ребра $MB$ на плоскость основания пирамиды, то $\angle MBK$ — это угол между боковым ребром и плоскостью основания, т. е. $\angle MBK = \varphi$.

$\angle AMC = \alpha$, так как он образован боковыми ребрами, лежащими в одной грани, т. е. является плоским углом при вершине пирамиды.

$\angle MCA = \beta$ — угол, образованный боковым ребром пирамиды и стороной основания.

Очевидно также, что $MN = H$, $BN = r_о$, $NK = r_в$.

3. Вычислим $l$, $h_1$, $\varphi$ и $\psi$. Для этого воспользуемся чертежом (рис. 2.46).

3.1. Рассмотрим прямоугольный треугольник $MNB$:

а) по теореме Пифагора,

$$l = \sqrt{H^2 + r_o^2} = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3H^2 + a^2}{3}} = 2\sqrt{19}\ \text{см};$$

б) $\sin\varphi = \dfrac{H}{l}$; $\varphi = \arcsin\dfrac{8}{2\sqrt{19}} = \arcsin\dfrac{4\sqrt{19}}{19}$; $\cos\varphi = \dfrac{r_o}{l}$;

$$\varphi = \arccos\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} = \arccos\frac{\sqrt{57}}{19};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{H}{r_o};\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{8}{2\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Проверить правильность выполненных расчетов можно с помощью основного тригонометрического тождества:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \frac{16}{19} + \frac{3}{19} = 1;$$

кроме того, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{4\sqrt{19}\cdot 19}{19\cdot\sqrt{57}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Таким образом, найдены подтверждения ранее полученных результатов.

3.2. Рассмотрим прямоугольный треугольник $MNK$:

а) по теореме Пифагора,

$$h_1 = \sqrt{H^2 + r_в^2} = \sqrt{H^2 + a^2/12} = \sqrt{\frac{12H^2 + a^2}{12}} = \sqrt{67} \text{ см};$$

б) $\sin\psi = \dfrac{H}{h_1}$; $\psi = \arcsin\dfrac{8}{\sqrt{67}} = \arcsin\dfrac{8\sqrt{67}}{67}$; $\cos\psi = \dfrac{r_в}{h_1}$;

$$\psi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{67}} = \arccos\frac{\sqrt{201}}{67};$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{H}{r_в};\ \psi = \operatorname{arctg}\frac{8}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Проверку этих результатов можно осуществить так же, как и в предыдущем пункте.

Отметим, что если найдены величины углов $\varphi$ и $\psi$, то угол, образованный боковым ребром пирамиды и ее апофемой, не принадлежащими одной грани, например $\angle KMB$, легко найти из $\Delta KMB$: $\angle KMB = 180° - (\varphi + \psi)$. $\angle KMB$ может быть найден и непосредственно из $\Delta KMB$ с использованием теоремы косинусов, так как известны длины сторон этого треугольника.

3.3. Обратимся теперь к рис. 2.45 и рассмотрим прямоугольный треугольник $MKC$:

а) найдем плоский угол $\alpha$ при вершине пирамиды и угол $\beta$, образованный боковым ребром пирамиды и стороной ее основания; из $\Delta MKC$ находим:

$$\sin\angle KMC = \frac{a/2}{l} = \frac{3}{2\sqrt{19}} = \frac{3\sqrt{19}}{38} = \cos\angle KCM;$$

$$\cos\angle KMC = \frac{h_1}{l} = \frac{\sqrt{67}}{2\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{1273}}{38} = \sin\angle KCM;$$

так как $\angle KMC = \alpha/2$, то $\alpha = 2\arcsin\dfrac{3\sqrt{19}}{38} = 2\arccos\dfrac{\sqrt{1273}}{38}$;

$\beta = \arccos\dfrac{3\sqrt{19}}{38} = \arcsin\dfrac{\sqrt{1273}}{38}$;

б) найдем радиус окружности, описанной около боковой грани пирамиды; используя теорему синусов, получаем из $\Delta AMC$:

$$r_{o_1} = \frac{l}{2\sin\beta} = \frac{2\sqrt{19}\cdot 2\sqrt{19}}{2\sqrt{67}} = \frac{38\sqrt{67}}{67} \text{ (см)};$$

в) вычислим площадь одной из боковых граней, например $S_{\Delta AMC}$:

$$\mathrm{S}_{\text{бг}} = \frac{1}{2}a\cdot h_1 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{67} = 3\sqrt{67} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Так как все боковые грани правильной пирамиды равны, получаем площадь ее боковой поверхности:

$$S_{\text{бп}} = 3S_{\text{бг}} = 9\sqrt{67}\text{ см}^2;$$

г) найдем радиус окружности, вписанной в боковую грань пирамиды, используя формулу

$$S_{\text{бг}} = S_{\Delta\text{AMC}} = p\cdot r_{\text{в}_1},$$

где $p = (2l + a)/2$,

получаем:

$$r_{\text{в}_1} = \frac{2S_{\text{бг}}}{2l+a} = \frac{2\cdot 3\sqrt{67}}{2\cdot 2\sqrt{19}+6} = \frac{3\sqrt{67}}{2\sqrt{19}+3} \text{ (см)}.$$

4. Найдем двугранный угол, образованный боковыми гранями пирамиды $AMC$ и $BMC$. Построим соответствующий линейный угол (рис. 2.47). С этой целью в плоскости $AMC$ проведем $KQ \perp MC$ (точка $Q$ лежит на ребре $MC$). Построим в $\Delta ABC$ высоту $AP$, которая одновременно является его медианой, и соединим точки $P$ и $Q$. Так как точка $P$ является серединой стороны $BC$, а точка $K$ — серединой стороны $AC$ и к тому же $\Delta BMC = \Delta AMC$, то, осуществляя наложение одного из них на другой, при котором общая сторона $MC$ остается неподвижной, мы

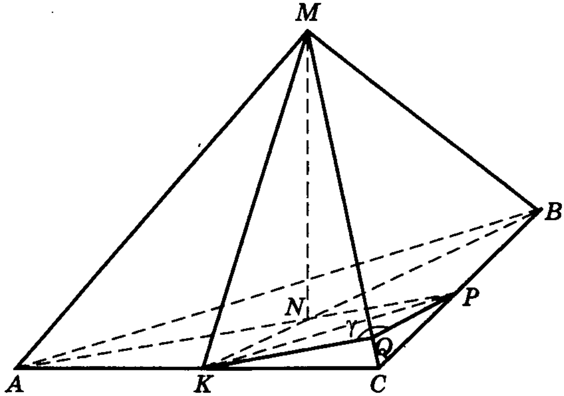


Рис. 2.47

обнаружим, что отрезки $KQ$ и $PQ$ совпадут. Следовательно, $PQ \perp MC$. Таким образом, $\angle KQP = \gamma$ — линейный угол двугранного угла, образованного боковыми гранями пирамиды $AMC$ и $BMC$.

Найдем величину угла $\gamma$ из $\Delta KQP$. Используя теорему косинусов, которая также должна быть включена в базу знаний, можем записать $KP^2 = KQ^2 + QP^2 - 2KQ \cdot QP \cdot \cos\gamma$. Отсюда $\cos\gamma = (KQ^2 + QP^2 - KP^2)/2KQ \cdot QP$.

В этой формуле $KP$ — это средняя линия $\Delta ABC$ (по построению). Следовательно, $KP = a/2 = 3$ см.

Отрезок $KQ$ найдем из прямоугольного $\Delta KQC$, в котором $KC = a/2 = 3$ см, $\angle KCQ = \beta$. Получаем:

$$KQ = (a/2)\sin\beta = 3 \cdot \frac{\sqrt{1273}}{38} \text{ (см).}$$

Поскольку $QP = KQ$, то $\cos\gamma = 1 - KP^2/(2KQ^2) = 29/67$.

Отсюда $\gamma = \arccos(29/67)$.

5. Приступим к вычислению радиуса $R_0$ сферы, описанной около пирамиды $MABC$. Пополним базу знаний:

- Сфера называется описанной около многогранника, если все вершины этого многогранника лежат на сфере.

- Если около пирамиды можно описать сферу, то ее центр, будучи равноудаленным от всех вершин пирамиды, должен лежать на пересечении перпендикуляра, проведенного к плоскости основания через центр описанной около него окружности, и плоскости, перпендикулярной к боковому ребру, проходящей через его середину.
- Вписанный в окружность угол равен половине дуги, на которую он опирается. Вписанный угол, который опирается на диаметр окружности, равен 90°.
- Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны (3-й признак подобия треугольников).

Отметим, что для вычисления радиуса описанной сферы нам нет необходимости изображать эту сферу на чертеже. Более того, не обязательно строить центр описанной сферы, так как в этом случае нам пришлось бы рассмотреть три различных ситуации, когда центр сферы лежит выше, ниже и непосредственно в плоскости основания. Впрочем, результат вычислений не должен зависеть от расположения центра описанной сферы, однако это еще требуется доказать.

Мы применим другой метод решения, который будем условно называть *методом «протыкания»*. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду $MABC$. Центр описанной около нее сферы лежит на высоте этой пирамиды или ее продолжении. Это следует из того, что прямая, содержащая высоту правильной пирамиды, проходит через центр описанной около основания окружности и перпендикулярна к его плоскости. Продолжим высоту пирамиды $MN$ до пересечения в точке $M_1$ с описанной сферой, т. е. как бы проткнем высотой основание пирамиды. Тогда отрезок $MM_1$ окажется диаметром сферы. Построим отрезок $M_1B$ (см. рис. 2.48).

Плоскость $MBM_1$ пересекается с описанной около пирамиды сферой по окружности, радиус которой равен радиусу сферы. Таким образом, $\Delta MBM_1$ вписан в указанную окружность, причем вписанный угол $MBM_1$ опирается на диаметр

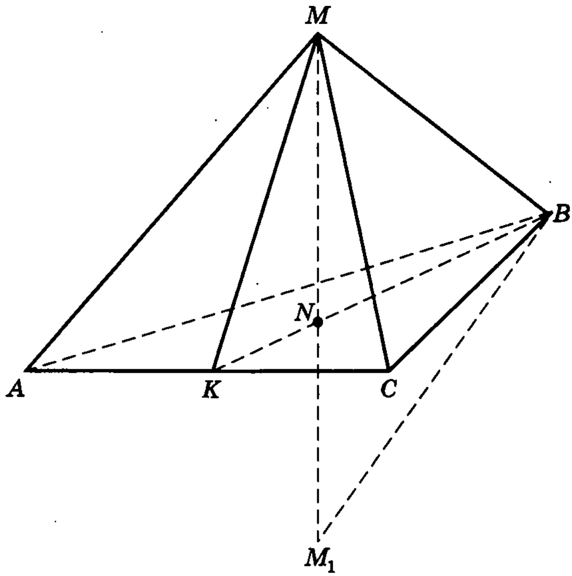


Рис. 2.48

окружности $MM_1$ и, следовательно, $\angle MBM_1 = 90°$. Вынесем треугольники $MBM_1$ и $KMB$, расположенные на секущей плоскости (рис. 2.49), на отдельный чертеж и обозначим их элементы.

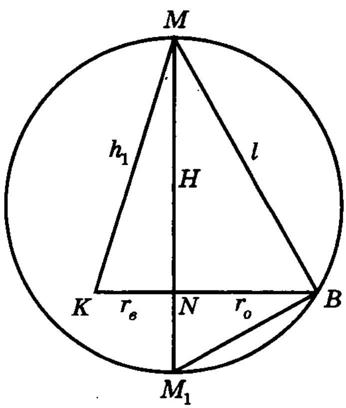


Рис. 2.49

Так как в $\Delta MBM_1$ и $\Delta MNB$ имеется по два равных угла ($\angle MBM_1 = \angle MNB = 90°$; $\angle BMM_1$ — общий), то эти треугольники подобны. Тогда $\frac{MN}{MB} = \frac{MB}{MM_1}$. Отсюда $MM_1 = \frac{MB^2}{MN}$, т. е. $2R_о = \frac{l^2}{H}$, $R_о = \frac{l^2}{2H} = \frac{4 \cdot 19}{2 \cdot 8} = 4,75$ (см). Косвенный вывод, который можно сделать из полученного результата, состоит в том, что центр описанной сферы лежит выше плоскости основания пирамиды, т. е. на отрезке $MN$, так как оказалось, что $R_о < H$.

6. Перейдем к вычислению радиуса $R_в$ сферы, вписанной в пирамиду $MABC$. Включим в базу знаний факты, необходимые для решения этой проблемы:

- Сфера называется вписанной в многогранник, если она касается всех граней этого многогранника.
- Если в многогранник можно вписать сферу, то ее центр, будучи равноудаленным от всех граней многогранника, должен лежать на пересечения биссектральных плоскостей всех его двугранных углов.
- Биссектральной плоскостью называется плоскость, которая проходит через ребро двугранного угла и делит его пополам.

В силу того, что пирамида $MABC$ — правильная, биссектральные плоскости двугранных углов, образованных боковыми гранями, пересекаются по высоте пирамиды $MN$. Проведем биссектральную плоскость двугранного угла, образованного боковой гранью $MAC$ и плоскостью основания. Эта плоскость пересекается с плоскостью $MBK$ по лучу $KO$ — биссектрисе $\angle MKB$. Точка $O$ лежит на пересечении биссектрисы $KO$ и высоты $MN$ и является центром вписанной сферы. Тогда $ON = R_в$ (см. рис. 2.50).

Снова прибегнем к деталировке: вычертим прямоугольный $\Delta MNK$ (рис. 2.51). Обозначим на чертеже его элементы.

Найдем $R_в$ из прямоугольного $\Delta KNO$, учитывая, что $\angle OKN = \psi/2$:

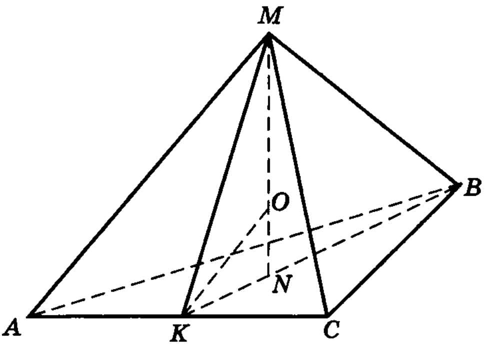


Рис. 2.50

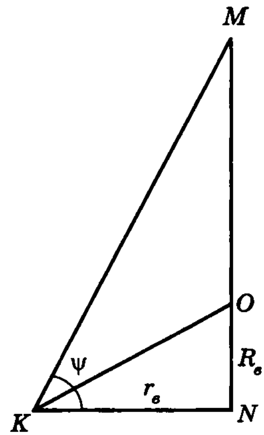


Рис. 2.51

$$R_в = r_в \cdot \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = r_в \cdot \frac{1-\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{\sqrt{201}-3}{8} \text{ см.}$$

7. Найдем расстояние $d_1$ от центра основания правильной треугольной пирамиды — точки $N$ до боковой грани пирамиды $MAC$. Снова дополним базу знаний:

- Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на данную плоскость.
- Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.
- Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости (признак перпендикулярности прямой и плоскости).

Выполним дополнительное построение: опустим перпендикуляр $NT$ из точки $N$ на апофему $MK$, лежащую в боковой грани $MAC$ (рис. 2.52).

Докажем, что отрезок $NT$ перпендикулярен к плоскости $MAC$. Действительно, $NT$ лежит в плоскости $KMN$, которая перпендикулярна к прямой $AC$, так как две пересекающиеся прямые $MK$ и $NK$, лежащие в плоскости $KMN$, перпендикулярны к прямой $AC$. Тогда $NT \perp AC$, так как $NT$ также лежит в плоскости $KMN$. Кроме того, по построению, $NT \perp MK$. Следовательно, отрезок $NT$ перпендикулярен к плоскости $MAC$, так как он перпендикулярен к пересекающимся прямым $MK$ и $AC$, лежащим в этой плоскости.

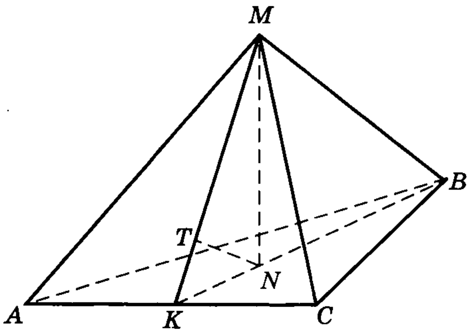


Рис. 2.52

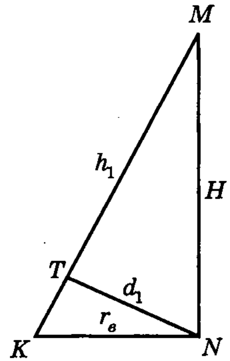


Рис. 2.53

Вычертим еще раз прямоугольный треугольник $KMN$ (см. рис. 2.53). В этом треугольнике $MN = H$, $NK = r_в$, $MK = h_1$; $NT = d_1$. Обозначим их на чертеже.

Очевидно, что $d_1 \cdot h_1 = H \cdot r_в = 2S_{\Delta KMN}$

Отсюда $d_1 = H \cdot r_в : h_1 = 8 \cdot \sqrt{3} : \sqrt{67} = \dfrac{8\sqrt{201}}{67}$ (см).

8. В заключение найдем угол $l$ и расстояние $d_2$ между боковым ребром $MB$ и скрещивающейся с ним стороной основания пирамиды $AC$. Для этого необходимо вспомнить и включить в базу знаний следующие сведения:

- Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.
- Углом между скрещивающимися прямыми $a$ и $b$ называется угол между пересекающимися прямыми $a_1$ и $b_1$, которые соответственно параллельны прямым $a$ и $b$.
- Расстоянием между скрещивающимися прямыми $a$ и $b$ называется расстояние от произвольной точки $X$,

принадлежащей одной из этих прямых (например, $a$), и плоскостью $\mu$, которая параллельна прямой $a$ и содержит прямую $b$.

- Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости (признак параллельности прямой и плоскости).

Чтобы найти угол $\gamma$ между боковым ребром $MB$ и скрещивающейся с ним стороной основания пирамиды $AC$, проведем через точку $B$ прямую $FG \parallel AC$ и определим величину угла $MBF$. Это и будет искомое значение $\gamma$ (рис. 2.54).

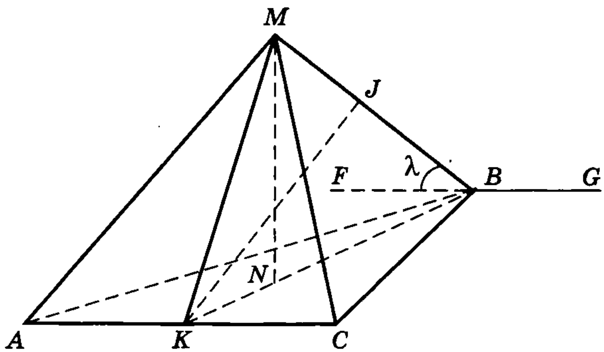


Рис. 2.54

В предыдущем пункте было показано, что плоскость $KMB$ перпендикулярна прямой $AC$. Следовательно, $MB \perp AC$, так как $MB$ лежит в плоскости $KMB$. Но тогда $MB \perp FG$, так как $FG \parallel AC$, по построению, т. е. $\gamma = 90°$.

Выполним еще одно дополнительное построение: на рисунке 2.54 проведем $KJ \perp MB$. Докажем, что длина отрезка $KJ$ равна расстоянию $d_2$ между скрещивающимися прямыми $AC$ и $MB$. Рассмотрим плоскость $\mu$, образованную пересекающимися прямыми $MB$ и $FG$. Эта плоскость параллельна прямой $AC$, так как $FG \parallel AC$ по построению. Прямая $KJ$ перпендикулярна плоскости $\mu$, так как $KJ \perp MB$ по построению, и $KJ \perp FG$, поскольку $KJ$ лежит в плоскости $KMB$, которая перпендикулярна к прямой $FG$. Но тогда длина отрезка $KJ$ и есть искомое расстояние $d_2$ между прямыми $AC$ и $MB$.

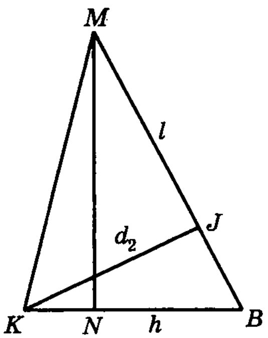

Рис. 2.55

Выполним деталировку: вычертим $\Delta KMB$ и обозначим на чертеже используемые в решении элементы (рис. 2.55). Здесь $KJ = d_2$; $MB = l$, $MN = H$, $BK = h$.

Найдем $d_2$ из равенства:

$$d_2 \cdot l = h \cdot H = 2S_{\Delta KMB}.$$

Отсюда

$d_2 = h \cdot H : l = 3\sqrt{3} \cdot 8 : (2\sqrt{19}) = \dfrac{12\sqrt{57}}{19}$ (см).

<u>Ответы</u>:

$h = 3\sqrt{3}$ см; $r_о = 2\sqrt{3}$ см; $r_в = \sqrt{3}$ см;

$l = 2\sqrt{19}$ см; $h_1 = \sqrt{67}$ см; $r_{о_1} = \dfrac{38\sqrt{67}}{67}$ см; $r_{в_1} = \dfrac{3\sqrt{67}}{2\sqrt{19}+3}$ см;

$S_{осн} = 9\sqrt{3}$ см$^2$; $S_{бг} = 3\sqrt{67}$ см$^2$; $S_{бп} = 9\sqrt{67}$ см$^2$; $V = 24\sqrt{3}$ см$^3$;

$\alpha = 2\arcsin\dfrac{3\sqrt{19}}{38} = 2\arccos\dfrac{\sqrt{1273}}{38}$;

$\beta = \arccos\dfrac{3\sqrt{19}}{38} = \arcsin\dfrac{\sqrt{1273}}{38}$;

$\varphi = \arcsin\dfrac{4\sqrt{19}}{19} = \arccos\dfrac{\sqrt{57}}{19} = \operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$;

$\psi = \arcsin\dfrac{8\sqrt{67}}{67} = \arccos\dfrac{\sqrt{201}}{67} = \operatorname{arctg}\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$;

$\gamma = \arccos(29/67)$.

$R_о = 4{,}75$ см; $R_в = \dfrac{\sqrt{201}-3}{8}$ см;

$d_1 = \dfrac{8\sqrt{201}}{67}$ см; $l = 90°$; $d_2 = \dfrac{12\sqrt{57}}{19}$ см.

*Примечание* № 1. В этой задаче можно также вычислить длины различных окружностей, площади кругов, площади сфер и объемы шаров, вписанных или описанных около пирамиды и ее элементов, пользуясь следующими формулами:

- Длина окружности: $L = 2\pi r$, где $r$ — радиус окружности.
- Площадь круга: $S = \pi r^2$, где $r$ — радиус круга.
- Площадь сферы: $Q = 4\pi R^2$, где $R$ — радиус сферы.
- Объем шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где $R$ — радиус шара.

Можно также вычислить, к примеру, площади поверхности и объемы шарового сегмента, в который вписана правильная треугольная пирамида (рис. 2.56, а):

- площадь поверхности шарового сегмента, включая площадь основания сегмента $S = \pi(2R_о H + r_0^2)$;
- объем шарового сегмента $V = \frac{1}{3}\pi H^2 (3R_о - H)$.

Кроме того, если центр описанного шара лежит ниже основания пирамиды (рис. 2.56, б), то можно вычислить:

- площадь поверхности шарового сектора $S = \pi R_о (2H + r_о)$;
- объем шарового сектора $V = \frac{2}{3}\pi R_0^2 H$.

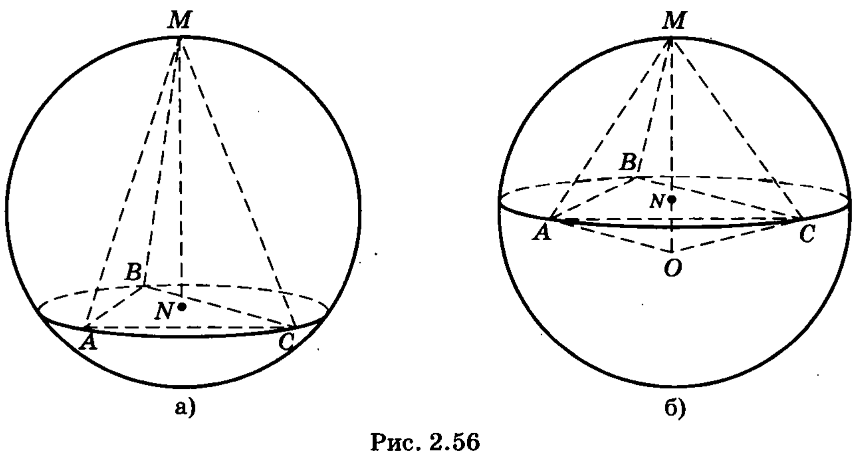


Рис. 2.56

Здесь, как и прежде, были использованы обозначения: $r_0$ — радиус описанного около основания пирамиды круга, который совпадает с основанием шарового сегмента, $R_0$ — радиус описанной около пирамиды сферы, $H$ — высота пирамиды и соответственно высота шарового сегмента.

*Примечание № 2.* Рассмотренная задача может быть преобразована в большое количество новых задач, если в качестве исходных данных принять любую пару из встречающихся в ней величин (при условии, что хотя бы одна из них не является углом). Остальные величины, включая и те, которые были заданы в условии базовой задачи, автоматически переходят при этом в разряд неизвестных и могут быть вновь найдены с использованием примененных ранее формул. Умение решать такие модифицированные задачи дает нам инструмент проверки правильности полученных ранее результатов. Оно также помогает выявить разнообразные связи, существующие между элементами изучаемого геометрического объекта. Отметим, что при решении модифицированных задач порою возникает необходимость выполнять более сложные алгебраические преобразования, чем в исходной версии задачи, что также полезно, поскольку способствует улучшению техники подобных преобразований.

**Пример № 2.11.**

Найдите объем куба, если известно, что расстояние между диагональю куба и скрещивающейся с нею диагональю одной из граней куба равно $d$. Чему равен угол между этими диагоналями?

<u>Дано</u>: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб; расстояние между $B_1D$ и $AC$ равно $d$.

<u>Найти</u>: $V$ куба; угол $\varphi$ между $B_1D$ и $AC$.

База знаний

1. Если ребро куба равно $a$, то:

— диагональ его грани, например $AC$ или $BD$, равняется $a\sqrt{2}$;

— диагональ куба, например $B_1D$, равняется $a\sqrt{3}$;

— объем куба $V = a^3$.

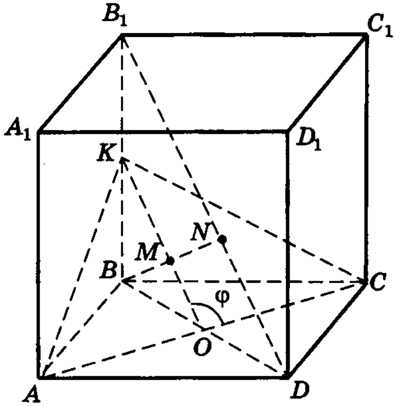


Рис. 2.57

2. Диагонали квадрата в точке пересечения делятся пополам и пересекаются под прямым углом.

3. Для того чтобы измерить расстояние между скрещивающимися прямыми $B_1D$ и $AC$, необходимо через произвольную точку одной из этих прямых, например $AC$, провести прямую $b$, параллельную прямой $B_1D$, и найти расстояние от прямой $B_1D$ до плоскости, образованной пересекающимися прямыми $AC$ и $b$.

4. Для того чтобы измерить угол между скрещивающимися прямыми $B_1D$ и $AC$, необходимо измерить угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным, например угол между $AC$ и $b$.

## Решение

1. Построим плоскость, проходящую через $BB_1$ и $BD$. Эта плоскость перпендикулярна к плоскости основания куба $ABCD$, так как проходит через прямую $BB_1$, которая перпендикулярна к плоскости $ABCD$.

2. Плоскость $BB_1D$ пересекает плоскость $ABCD$ по прямой $BD$. Обозначим точку пересечения диагоналей основания куба $AC$ и $BD$ буквой $O$.

3. Построим прямую $OK \parallel B_1D$. Точка $K$ является точкой пересечения этой прямой и ребра $BB_1$.

4. Опустим из точки $B$ перпендикуляр $BN$ на диагональ $B_1D$. Имеем $BN \perp B_1D$, по построению; $BN \perp OK$, так как $OK \parallel B_1D$.

5. Прямые $AC$ и $BD$ перпендикулярны, так как это диагонали квадрата $ABCD$; кроме того, прямая $BB_1$ перпендикулярна к плоскости $ABCD$, в которой лежит прямая $AC$, следовательно, $AC \perp BB_1$. Таким образом, прямая $AC$ перпендикулярна к двум прямым $BD$ и $BB_1$, лежащим в плоскости $BB_1D$, следовательно, она перпендикулярна к самой этой плоскости. Значит, $AC$ перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости $BB_1D$, в том числе и к прямой $BN$.

6. Прямая $BN$ перпендикулярна к плоскости $AKC$, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым $OK$ и $AC$, лежащим в этой плоскости. Тогда $NM = d$, так как это перпендикуляр, опущенный из точки $N$, принадлежащей прямой $B_1D$, на плоскость $AKC$, содержащей прямую $AC$ и параллельной прямой $B_1D$.

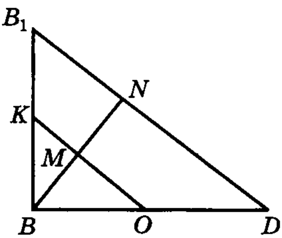

Рис. 2.58

7. Прибегнем к помощи деталировки: вычертим треугольник $BB_1D$ со всеми выполненными в нем дополнительными построениями (рис. 2.58).

8. Пусть ребро куба $BB_1$ равно $a$. Тогда диагональ основания $BD$ равна $a\sqrt{2}$, диагональ куба $B_1D$ равна $a\sqrt{3}$.

9. $OK$ — средняя линия треугольника $BB_1D$, так как точка $O$ — середина отрезка $BD$, как точка пересечения диагоналей основания куба, $OK \parallel B_1D$, по построению.

Тогда, по теореме Фалеса, $BM = MN = d$. Отсюда, $BN = 2d$.

10. Вычислим двумя способами площадь треугольника $BB_1D$:

а) $S = 1/2\, BB_1 \cdot BD = 1/2\, a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}/2$;

б) $S = 1/2\, BN \cdot B_1D = 1/2 \cdot 2d \cdot a\sqrt{3} = ad\sqrt{3}$.

Приравнивая найденные значения $S$, получаем:

$a^2\sqrt{2}/2 = ad\sqrt{3}$. Отсюда $a = d\sqrt{6}$.

11. Найдем объем куба: $V = a^3 = 6d^3\sqrt{6}$.

12. Вновь возвращаемся к рис. 2.57. Искомый угол φ между скрещивающимися прямыми $B_1D$ и $AC$ можно найти, измерив угол между пересекающимися прямыми $OK$ и $AC$, так как $OK \parallel B_1D$ по построению.

13. Рассмотрим треугольник $AKC$. Это равнобедренный треугольник. Действительно, $AK = KC$ как гипотенузы двух равных прямоугольных треугольников $AKB$ и $CKB$, у которых катет $BK$ — общий, а катеты $AB$ и $BC$ равны как ребра куба. Точка $O$ — середина отрезка $AC$, поэтому $KO$ — медиана равнобедренного треугольника $AKC$, проведенная из его вершины к основанию. Следовательно, $KO$ также и высота этого треугольника. Таким образом, $KO \perp AC$ и угол φ равен 90°.

Ответ: $V = 6d^3\sqrt{6}$, $\varphi = 90°$.

**Пример № 2.12.**

Концы отрезка $A_1M$ лежат на окружностях, ограничивающих разные основания цилиндра, высота которого равна $H$, а радиус основания $R$. Требуется найти расстояние $d$ от оси цилиндра до отрезка $A_1M$, если длина этого отрезка равна $a$.

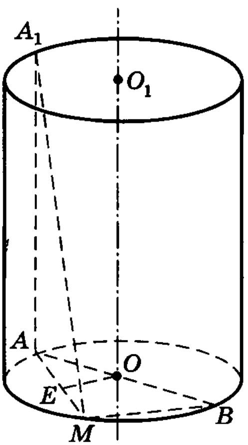

Рис. 2.59

Дано: $OO_1 = H$; $A_1M = a$; $OA = R$.

Найти: $d$, где $d$ — расстояние от $OO_1$ до $A_1M$.

При формировании базы знаний в этой задаче используем пункт 3 базы знаний из примера № 2.11, теорему Пифагора и свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр окружности.

Предполагается, что точка $M$ не совпадает ни с точкой $A$, ни с точкой $B$. Эти частные случаи будут рассмотрены при выполнении проверки.

Решение.

1. Обозначим ось цилиндра $OO_1$.

2. Построим образующую $AA_1$. Очевидно, что она перпендикулярна к плоскости основания цилиндра, т. е. параллельна и равна его высоте ($AA_1 = H$). Тогда, в силу признака параллельности прямой и плоскости, прямая $OO_1$ параллельна плоскости $AA_1M$.

3. Построим диаметр $AB$ и соединим точку $M$ с точками $A$ и $B$. Угол $AMB$ — прямой, так как это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности. Угол $A_1AM$ тоже прямой, так как прямая $AM$ лежит в плоскости основания цилиндра, к которой перпендикулярен отрезок $A_1A$.

4. Построим $OE$ — среднюю линию треугольника $AMB$. Очевидно, что $OE = 1/2MB$, а также $OE \parallel MB$, следовательно, $OE \perp AM$. Отметим, что $OE \perp AA_1$, так как образующая $AA_1$ перпендикулярна к плоскости основания, в которой лежит отрезок $OE$. Таким образом, отрезок $OE$ перпендикулярен к двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости $A_1AM$, а следовательно, перпендикулярен к этой плоскости. Этот отрезок равен расстоянию от точки $O$, лежащей на оси цилиндра, до плоскости $A_1AM$, параллельной оси цилиндра $OO_1$ и содержащей прямую $A_1M$, следовательно, он равен искомому расстоянию между $OO_1$ и $A_1M$.

5. В прямоугольном треугольнике $A_1AM$ (по теореме Пифагора)

$$AM^2 = A_1M^2 - A_1A^2 = a^2 - H^2.$$

6. В прямоугольном треугольнике $AMB$ (по теореме Пифагора)

$$MB = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{4R^2 - (a^2 - H^2)}.$$

7. Окончательно получаем

$$OE = 1/2MB = 1/2\sqrt{4R^2 - a^2 + H^2}.$$

Это и есть искомое расстояние $d$.

Проверка

Так как точка $M$ может совпадать с точкой $A$ или точкой $B$, то можно проверить, удовлетворяет ли найденная формула этим предельным случаям.

1. Пусть точка $M$ совпадает с точкой $A$. Тогда $A_1M = a = H$, $d = 1/2\sqrt{4R^2 - H^2 + H^2} = R$. Действительно, расстояние от $O$ до $A$ равно $R$.

2. Пусть точка $M$ совпадает с точкой $B$. Тогда $A_1M = a = \sqrt{H^2 + 4R^2}$, $d = 1/2\sqrt{4R^2 - H^2 - 4R^2 + H^2} = 0$. Действительно, в этом случае $A_1M$ совпадает с $A_1B$, а расстояние между пересекающимися прямыми $A_1B$ и $OO_1$ равно нулю.

Ответ: $d = 1/2\sqrt{4R^2 - a^2 + H^2}$.

**Пример № 2.13 [12].**

В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, в котором один из катетов равен $a$, а противолежащий этому катету угол равен $\alpha$. Вершина пирамиды проецируется в вершину прямого угла треугольника, лежащего в основании. Найдите радиус шара, описанного около этой пирамиды, если известно, что ее высота равна $H$.

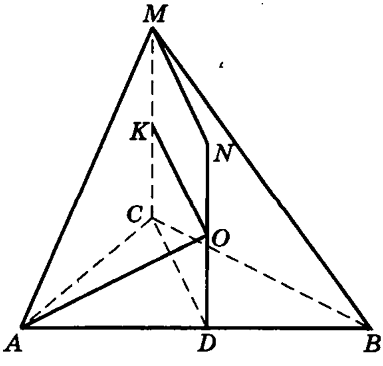

Рис. 2.60

Дано: $MABC$ — пирамида;
в $\Delta ABC$ $\angle C = 90°$;
$\angle A = \alpha$; $BC = a$.
$MC \perp$ плоскости $ABC$;
$MC = H$.

Найти: радиус описанного шара $R$.

## База знаний

При решении этой задачи не будем применять описанный в примере № 2.10 метод «протыкания». Найдем положение центра описанного шара и построим отрезок, равный искомому радиусу, а для этого включим в базу знаний следующие факты:

1. Центр шара, описанного около пирамиды, находится на пересечении прямой, проведенной перпендикулярно к основанию через центр окружности, описанной около основания, и плоскости, проведенной через середину одного из боковых ребер пирамиды перпендикулярно к этому ребру.

2. Отрезок, соединяющий центр шара, описанного около многогранника, с любой из его вершин, равен радиусу этого шара.

3. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы этого треугольника.

4. Добавим в базу знаний формулу для вычисления синуса острого угла $\alpha$, лежащего в прямоугольном треугольнике против катета $a$, если гипотенуза треугольника равна $c$: $\sin\alpha = a/c$.

## Решение

1. Рассмотрим прямоугольный треугольник $ABC$. Обозначим $AB = c$.

Из формулы $\sin\alpha = a/c$ получаем: $c = a/\sin\alpha$.

2. Пусть $D$ — середина отрезка $AB$. Проведем $DN \perp$ к плоскости $ABC$. Очевидно, $DN \parallel MC$, так как эти прямые одновременно перпендикулярны к плоскости $ABC$.

3. Построим плоскость $\gamma$, проходящую через параллельные прямые $DN$ и $MC$. Эта плоскость пересечется с плоскостью $ABC$ по прямой $CD$.

4. Обозначим середину отрезка $MC$ буквой $K$. Тогда $CK = KM = H/2$.

5. Построим плоскость $\lambda$, проходящую через точку $K$ и перпендикулярную к прямой $MC$. Плоскость $\lambda$ параллельна плоскости $ABC$ и пересекает плоскость $\gamma$ по прямой $KO$, которая

параллельна прямой $CD$ и соответственно перпендикулярна к прямым $MC$ и $ND$.

6. Точка $O$, которая лежит на пересечении прямой $DN$ и плоскости $\lambda$, является искомым центром описанного около пирамиды шара. Тогда отрезок $OA$ — радиус этого шара.

7. По построению четырехугольник $KODC$ является прямоугольником, поэтому $DO = CK = H/2$.

8. В прямоугольном треугольнике $ODA$ имеем:

$$DO = H/2,\ DA = c/2 = a/(2\sin\alpha).$$

Тогда, по теореме Пифагора,

$$OA^2 = DO^2 + DA^2 = \frac{H^2}{4} + \frac{a^2}{4\sin^2\alpha} = \frac{H^2\sin^2\alpha + a^2}{4\sin^2\alpha}.$$

Искомый радиус описанного шара $R = OA = \dfrac{\sqrt{H^2\sin^2\alpha + a^2}}{2\sin\alpha}$.

<u>Ответ</u>: $R = \dfrac{\sqrt{H^2\sin^2\alpha + a^2}}{2\sin\alpha}$.

---

**Пример № 2.14.**

---

Полная поверхность правильной треугольной пирамиды $MABC$ с вершиной в точке $M$ равна $13\sqrt{3}$ см². На стороне основания $AB$ взята точка $P$, а на стороне основания $AC$ взята точка $Q$ таким образом, что $PQ \parallel BC$, $PQ = \dfrac{1}{3}BC$. Найдите сторону основания пирамиды, если площадь треугольника $MPQ$ равна $\sqrt{3}$ см².

<u>Дано</u>: $MABC$ — правильная пирамида; $S_{MABC} = 13\sqrt{3}$ см²;

$PQ \parallel BC$, $PQ = \dfrac{1}{3}BC$; $S_{MPQ} = \sqrt{3}$ см².

---

<u>Найти</u>: сторону основания пирамиды.

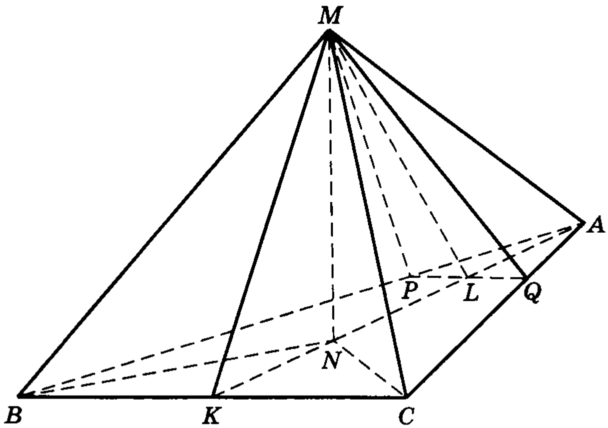


Рис. 2.61

### База знаний

1. Вершина правильной треугольной пирамиды проецируется в точку пересечения медиан ее основания.

2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

3. Если основание треугольника равно $a$, а высота, проведенная к этому основанию, равна $h$, то площадь треугольника $S = 1/2ah$.

4. Если сторона правильного треугольника равна $a$, то его площадь $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

5. Прямая, пересекающая две стороны треугольника и параллельная третьей его стороне, отсекает от этого треугольника подобный ему треугольник.

### План (алгоритм) решения этой задачи

1. Выразим площадь боковой грани и всей боковой поверхности через площадь сечения $MPQ$.

2. Вычислим площадь основания пирамиды.

3. Найдем длину стороны основания.

Решение

1. Обозначим площадь боковой поверхности $S_{бок.}$, площадь основания — $S_{осн.}$, а полную площадь поверхности пирамиды — $S$.

2. Проведем $AK \perp BC$. $AK$ — высота, а значит, и медиана треугольника $ABC$. Обозначим $N$ — основание высоты пирамиды. Так как $MABC$ — правильная пирамида, то точка $N$ лежит на $AK$ и является точкой пересечения медиан.

Тогда $AN : NK = 2 : 1$, $NK = AK/3$, $AN = 2AK/3$.

3. Сделаем деталировку: вычертим треугольник $ABC$ с учетом всех дополнительных построений (рис. 2.62). Обозначим $L$ — точку пересечения $AK$ и $PQ$.

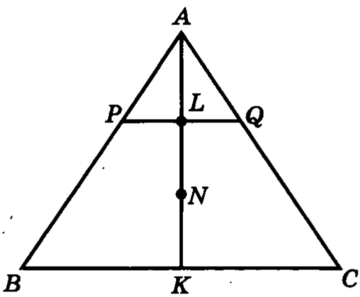


Рис. 2.62

4. Так как, по условию, $PQ \parallel BC$, $PQ = \frac{1}{3}BC$, то $DAPQ \sim DABC$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$. Тогда $AL = \frac{1}{3}AK$, следовательно

$$NL = AN - AL = \frac{2}{3}AK - \frac{1}{3}AK = \frac{1}{3}AK = NK.$$

5. Вернемся к рис. 2.61 и проведем $ML$. Этот отрезок является наклонной, проекция которого $NL$ перпендикулярна к прямой $PQ$. Действительно, $NL$ принадлежит прямой $AK$, которая перпендикулярна к $BC$ по построению. $PQ \parallel BC$ по условию. Следовательно, $AK \perp PQ$ и $NL \perp PQ$. Но тогда $ML \perp PQ$ по теореме о трех перпендикулярах.

Проведем $MK$. $MK \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Таким образом, $ML$ и $MK$ — высоты треугольников $MPQ$ и $MBC$ соответственно. Причем $ML = MK$, так как это наклонные, проекции которых равны ($NL = NK$).

6. Треугольники $MPQ$ и $MBC$ имеют одинаковые высоты, а основание треугольника $MBC$ втрое больше основания треугольника $MPQ$ ($PQ = \frac{1}{3}BC$, по условию). Следовательно, площадь боковой грани $MBC$ втрое больше площади сечения $MPQ$, то есть $S_{MAB} = 3S_{MPQ} = 3\sqrt{3}$ см$^2$.

Тогда $S_{бок.} = 3S_{MAB} = 9\sqrt{3}$ см$^2$.

7. $S = S_{осн.}(1+1/\cos\varphi) = S_{осн.}(1 + 9/4) = S_{осн.} \cdot 13/4$.

Тогда $S_{осн.} = S - S_{бок.} = 13\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (см$^2$).

8. Обозначим $BC = a$, тогда $S_{осн.} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

9. Приравнивая два выражения для $S_{осн.}$, получаем уравнение для нахождения $a$:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$$

Отсюда $a^2 = 16$. Поскольку $a$ — длина отрезка, то $a$ должно быть больше нуля, поэтому окончательно получаем: $a = 4$ см.

Ответ: $a = 4$ см.

**Пример № 2.15.**

Даны векторы $\vec{t}\,\{3;\ 6;\ -8\}$ и $\vec{s}\,\{1;\ 2;\ -4\}$. Требуется найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{a} = \vec{t} - 2\vec{s}$, $\vec{b}\,\{1;\ 2;\ \sqrt{5}\}$.

В этой задаче нет необходимости в выполнении чертежа и записи краткого условия. В базу знаний необходимо включить формулы определения координат суммы двух векторов, произведения вектора на число и косинуса угла $\alpha$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1. Если $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c}\,\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$.

2. Если $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$ и $\vec{e}=m\vec{a}$, то $\vec{e}\{mx;\ my;\ mz\}$.

3. $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

## Решение

1. $\vec{a}=\vec{t}-2\vec{s}\rightarrow\vec{a}\{1;\ 2;\ 0\}\rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{5}$.

2. $\vec{b}\{1;\ 2;\ \sqrt{5}\}\rightarrow|\vec{b}|=\sqrt{10}$.

3. $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{1+4+0}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Наименьший угол, косинус которого равен $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, это угол 45°.

Таким образом, $\alpha$ = 45°.

Ответ: $\alpha$ = 45°.

**Пример № 2.16.**

В правильный тетраэдр вписаны 4 шара, имеющих одинаковый радиус, равный $R$, так, что каждый шар касается трех других шаров и трех граней тетраэдра. Найдите объем тетраэдра.

Построим чертеж. Учитываем, что правильный тетраэдр есть не что иное, как правильная треугольная пирамида, боковые ребра которой равны сторонам основания. Выполним построение данного тетраэдра (рис. 2.63). Здесь $MN$ — высота тетраэдра (обозначим ее $H$), $BK$ — высота правильного треугольника $ABC$, которая одновременно является его медианой и биссектрисой (будем обозначать ее $h$), $N$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$,

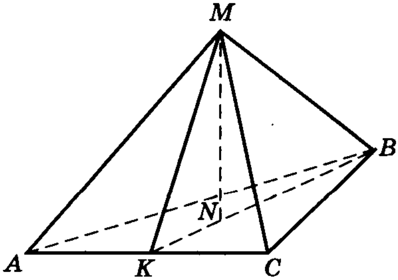

Рис. 2.63

а также центр окружностей, вписанной в этот треугольник и описанной около него, $NB$ — радиус описанной окружности (обозначим $r_о$), $NK$ — радиус вписанной окружности ($r_в$), $MK$ — апофема, которая в правильном тетраэдре равна высоте его основания $h$, $\angle MKN$ — линейный угол двугранного угла, образованного гранями $ABC$ и $MAC$ (будем обозначать его $\psi$).

Изображать на чертеже вписанные шары затруднительно, но в этом и нет необходимости. Если обозначить центры шаров $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$, то, так как шары касаются друг друга, эти точки могут рассматриваться как вершины правильного тетраэдра, ребра которого равны $2R$ (рис. 2.64). Опустим из точек $O_1$, $O_2$, $O_3$ перпендикуляры $O_1O_1'$, $O_2O_2'$, $O_3O_3'$ на плоскость $ABC$, которой касаются соответствующие шары. Очевидно, длины этих перпендикуляров равны $R$. Центр четвертого шара $O_4$ лежит на высоте пирамиды $MN$. Обозначим буквой $Q$ основание высоты тетраэдра $O_1O_2O_3O_4$, опущенной из вершины $O_4$ на основание $O_1O_2O_3$. Очевидно, $QN$ также равняется $R$.

Запишем краткое условие задачи.

Дано: $MABC$ — правильный тетраэдр; $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ — центры вписанных шаров радиуса $R$.

Найти: объем тетраэдра $V$.

Наметим алгоритм решения задачи. Чтобы найти объем правильного тетраэдра $MABC$, надо выразить длину его высоты через радиус вписанных в него шаров $R$. Для этого нужно выразить через $R$ длины отрезков $QN$, $O_4Q$ и $MO_4$.

В качестве основной базы знаний для решения данной задачи можно использовать формулы, полученные при решении задачи о правильной треугольной пирамиде (пример № 2.10). Обозначим длину стороны основания $b$ и положим его равным длине бокового ребра $l$, сохранив все остальные обозначения, принятые в примере № 2.10. Тогда:

$$h = h_1 = b\sqrt{3}/2; \tag{1}$$

$$r_в = b\sqrt{3}/6; \tag{2}$$

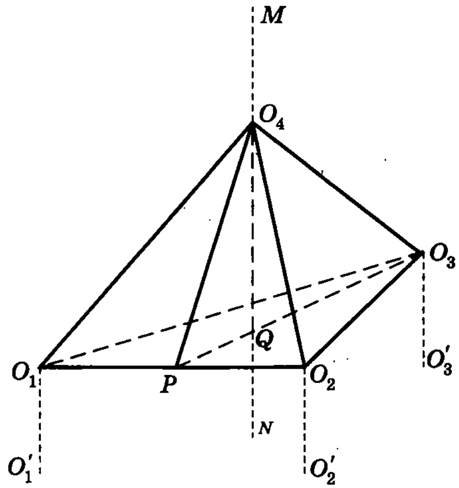


Рис. 2.64

$$H=\sqrt{h_1^2-r_в^2}=\sqrt{3b^2/4-b^2/12}=b\sqrt{2/3}; \quad (3)$$

$$\sin\psi=\frac{H}{h_1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad (4)$$

$$\cos\psi=\frac{r_в}{h_1}=\frac{1}{3}; \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{H}{r_в}=2\sqrt{2}; \quad (6)$$

$$R_в=r_в\cdot\frac{1-\cos\psi}{\sin\psi}=\frac{b\sqrt{6}}{12}; \quad (7)$$

$$\mathrm{b}=2\mathrm{R}_{\mathrm{в}}\sqrt{6}; \quad (8)$$

$$H=4R_в=\frac{b\sqrt{6}}{3}; \quad (9)$$

$$b=\frac{H\sqrt{6}}{2}. \quad (10)$$

Вычислим длину высоты $O_4Q$ правильного тетраэдра $O_1O_2O_3O_4$. Воспользуемся для этого формулой (9), положив в ней $b = 2R$. Тогда для высоты рассматриваемого тетраэдра получим $O_4Q = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$.

Для того чтобы вычислить длину отрезка $O_4M$, выполним дополнительное построение. Проведем плоскость, параллельную грани $ABC$ и касающуюся шара с центром $O_4$ в его нижней точке $F$. Секущая плоскость отсекает от исходного правильного тетраэдра также правильный тетраэдр с вершиной $M$, в который вписан шар радиусом $R$ с центром в точке $O_4$.

Высота отсеченного тетраэдра $\tilde{H}$ вычисляется по формуле (9) $\tilde{H} = 4R$. Тогда $O_4M = \tilde{H} - R = 4R - R = 3R$.

Окончательно для вычисления высоты тетраэдра $MABC$ получаем:

$$H = O_4M + O_4Q + QN = 3R + \frac{2R\sqrt{6}}{3} + R =$$
$$= 4R + \frac{2R\sqrt{6}}{3} = \frac{2R(6+\sqrt{6})}{3}.$$

Воспользовавшись формулой (10), найдем длину ребра $a$ правильного тетраэдра $MABC$:

$$a = \frac{H\sqrt{6}}{2} = \frac{R(6+\sqrt{6})\sqrt{6}}{3} = 2R(\sqrt{6}+1).$$

Вычислим площадь основания тетраэдра $MABC$:

$$S_{основания} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = R^2(7\sqrt{3}+6\sqrt{2}).$$

Объем тетраэдра вычисляем по формуле

$$V = \frac{1}{3}S_{основания} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot R^2(7\sqrt{3}+6\sqrt{2}) \cdot \frac{2R(6+\sqrt{6})}{3} =$$
$$= \frac{2R^3}{3} \cdot (19\sqrt{2}+18\sqrt{3}).$$

<u>Ответ</u>: $V = \frac{2R^3}{3} \cdot (19\sqrt{2}+18\sqrt{3})$.

# § 4. Анализ типовых заданий ЕГЭ

В контрольно-измерительных материалах ЕГЭ нового образца содержатся две стереометрические задачи — это задачи B9 и C2. Напомним, что задачу B9 требуется решить на черновике и записать в бланк ответ, представленный в виде целого числа или десятичной дроби. В задаче C2 надо записать в бланк полное решение и записать ответ.

## Задачи типа B9

### Пример № 2.17

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 2. Боковые ребра равны $1/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

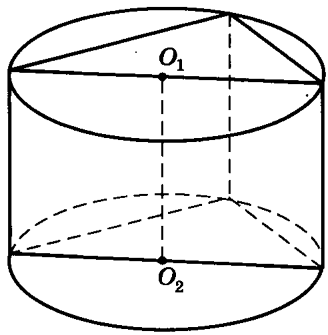

Рис. 2.65

База знаний

1. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы этого треугольника.

2. Объем цилиндра, радиус основания которого равен $R$, а высота определяется из формулы $V = \pi R^2 H$.

Решение

1. Обозначим гипотенузу прямоугольного треугольника, лежащего в основании призмы, $c$. По теореме Пифагора, $c = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$.

2. Радиус окружности $R = c/2 = \sqrt{13}/2$.

3. Высота цилиндра $H$ равна высоте призмы, т. е. $H = 1/\pi$.

4. Объем цилиндра $V = \pi R^2 H = \pi \cdot (13/4) \cdot (1/\pi) = 13/4 = 3{,}25$.

Ответ: $V = 3{,}25$.

## Пример № 2.18.

**Объем конуса равен 540. Через точку на высоте, которая делит высоту в отношении 1 : 2, считая от вершины, параллельно основанию конуса проведено сечение, являющееся основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.**

### Построение чертежа

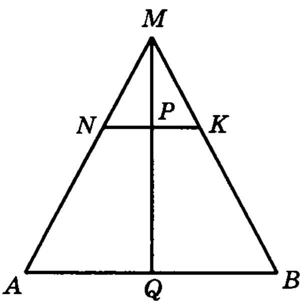


Рис. 2.66

Осуществим деталировку и начертим осевое сечение данного в условии задачи конуса. Введем обозначения: $MQ = H$ и $QB = R$ — высота и радиус большего конуса; $MP = h$ и $PK = r$ — высота и радиус меньшего конуса.

### База знаний

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

2. Сходственные линейные элементы подобных треугольников пропорциональны.

3. Объем конуса: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.

### Решение

1. По условию задачи, $NK \parallel AB$, $MP : MQ = 1 : 2$. Тогда $h : H = 1 : 3$.

2. $\Delta MQB \sim \Delta MPK$ с коэффициентом подобия 1/3, поэтому $r : R = 1 : 3$.

3. Таким образом, $h = \dfrac{1}{3}H$, $r = \dfrac{1}{3}R$.

4. Объем большего конуса: $V_1 = \pi R^2 H$.

5. Объем меньшего конуса: $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{1}{9} R^2 \frac{1}{3} H = \frac{1}{27} V_1 = \frac{1}{27} \cdot 540 = 20$.

*Примечание.* Этот результат можно также получить, воспользовавшись тем фактом, что отношение объёмов подобных фигур равно кубу коэффициента подобия $k$. В рассматриваемой задаче $k = \frac{1}{3}$, следовательно, $V_2 = \frac{1}{27} V_1 = \frac{1}{27} \cdot 540 = 20$.

Ответ: $V_2 = 20$.

## Задачи типа С2

**Пример № 2.19.**

Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит квадрат, а боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом в 60°. Отрезок $D_1A$ перпендикулярен к плоскости основания. Найдите длину этого отрезка, если площадь боковой поверхности призмы равна $6(\sqrt{3}+2)$.

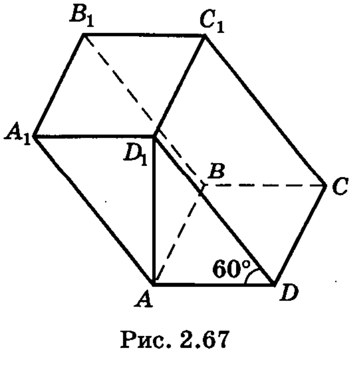


Рис. 2.67

Дано: $\angle D_1DA = 60°$; $D_1A \perp ABCD$; $ABCD$ — квадрат; $S_{бок} = 6(\sqrt{3}+2)$.

Найти: $D_1A$.

Решение

На рис. 2.67 угол $D_1DA$ — это угол между боковым ребром $D_1D$ и плоскостью основания $ABCD$. По условию $D_1A \perp ABCD$, следовательно, $DA$ является проекцией наклонной $D_1D$ на плоскость $ABCD$.

Чтобы составить уравнение и найти неизвестную величину, воспользуемся формулой площади боковой поверхности призмы:

$$S_{бок}=2(S_{AA_1D_1D}+S_{DD_1C_1C}).$$

Пусть $D_1A = x$,

тогда $\dfrac{AD}{x}=\text{ctg}\,60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $AD=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $S_{ADD_1A_1}=AD\cdot AD_1=\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}$.

Так как, по условию, $ABCD$ — квадрат, то $AD\perp DC$. Но $AD$ — проекция наклонной $D_1D$ на плоскость $ABCD$. Тогда, по теореме о трех перпендикулярах, $D_1D\perp DC$, то есть $DD_1C_1C$ — прямоугольник. Для определения площади этого прямоугольника нужно знать величины его сторон.

$$DC=AD=\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$DD_1$ найдём из треугольника $ADD_1$. $\angle AD_1D=30^\circ$. $DD_1$ — гипотенуза. Она вдвое больше катета, лежащего против угла в $30^\circ$, т. е.

$$D_1D=2AD=\frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{DD_1C_1C}=D_1D\cdot DC=\frac{2x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{2x^2}{3}.$$

Подставив найденные выражения площадей в формулу $S_{бок}$, получим уравнение

$$2\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}+\frac{2x^2}{3}\right)=6(\sqrt{3}+2).$$

Решая это уравнение, получаем $x = 3$.

Ответ: $D_1A = 3$.

**Пример № 2.20.**

Двугранные углы при основании правильной четырёхугольной пирамиды равны $45^\circ$, а площадь боковой поверхности равна $36\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.

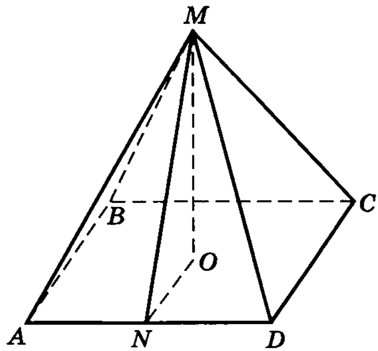

Рис. 2.68

Дано: $MABCD$ — правильная пирамида, $S_{бок} = 36\sqrt{2}$, двугранные углы при основании пирамиды равны 45°.

Найти: $V$.

Решение

1. Так как боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания двугранные углы, равные 45°, то

$$S_{осн} = S_{бок} \cdot \cos 45° = 36\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 36.$$

2. В основании пирамиды лежит квадрат $ABCD$. Обозначим сторону квадрата $AD = a$. Тогда $S_{осн} = a^2 \to a^2 = 36 \to a = 6$.

3. Построим высоту пирамиды $MO$ и проведем $ON \perp AD$. Очевидно, $MO = a/2 = 6/2 = 3$.

4. Соединим точки $M$ и $N$ отрезком $MN$. По теореме о трех перпендикулярах, $MN \perp AD$. Тогда угол $MNO$ — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды, то есть $\angle MNO = 45°$. Это значит, что прямоугольный треугольник $MNO$ — равнобедренный: $MO = ON = 3$.

5. Обозначим высоту пирамиды $MO = H$.

Тогда объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3 = 36$.

Ответ: $V = 36$.

**Пример № 2.21.**

Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 8, а сторона основания $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины $A$ до плоскости $A_1BD$.

Дано: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 8$; $AB = BC = CD = DA = 6\sqrt{2}$;

$AK \perp A_1BD$,
$K \in$ плоскости $A_1BD$.

Найти: $AK$.

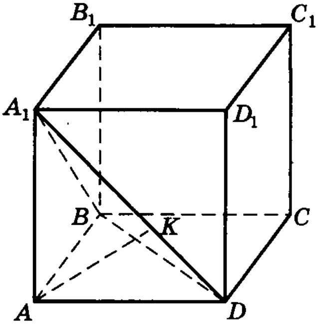


Рис. 2.69

База знаний

1. В основаниях правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$; боковые ребра $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ равны между собой и перпендикулярны основаниям.

2. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$, где $S_{осн}$ — площадь основания, $H$ — высота.

3. Площадь произвольного треугольника $S = \frac{1}{2}ah$, где $a$ — длина основания, $h$ — высота треугольника.

4. Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого равны $a$, вычисляется по формуле $S = a^2/2$. Гипотенуза этого треугольника $c = a\sqrt{2}$.

5. Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Решение

1. Рассмотрим треугольную пирамиду $AA_1BD$.

В качестве основания пирамиды будем рассматривать равнобедренный прямоугольный треугольник $ABD$, тогда высотой будет боковое ребро $AA_1$.

2. $S_{\Delta ABD} = a^2/2$, где $a = 6\sqrt{2}$, то есть $S_{\Delta ABD} = 36$.

3. $V_{AA_1BD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABD} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 8 = 96$.

4. Рассмотрим теперь в качестве основания пирамиды $AA_1BD$ треугольник $A_1BD$. Высотой пирамиды в этом случае является искомый отрезок $AK$, который обозначим буквой $H$.

5. Обозначим $A_1D = c$ и найдем $c$ как гипотенузу прямоугольного треугольника $AA_1D$. По теореме Пифагора, $c^2 = AA_1^2 + AD^2 = 8^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 136$.

6. Обозначим $BD = b$ и найдем $b$ из равнобедренного прямоугольного треугольника $ABD$, катеты которого равны $6\sqrt{2}$. Получаем $b = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12$.

7. Рассмотрим равнобедренный треугольник $A_1BD$, стороны которого $BD = b$, $A_1B = A_1D = c$. Выполним деталировку: изобразим треугольник $A_1BD$ на отдельном чертеже (рис. 2.70).

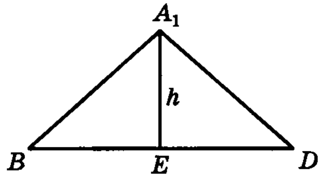

Рис. 2.70

Проведем $A_1E \perp BD$ и обозначим $A_1E = h$. В прямоугольном треугольнике $A_1DE$ $DE = b/2 = 12/2 = 6$.

Тогда, по теореме Пифагора,

$$h = \sqrt{c^2 - b^2/4} = \sqrt{136 - 36} = \sqrt{100} = 10.$$

Площадь треугольника $A_1BD$ равна

$$S_{\Delta A_1BD} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 60.$$

8. $V_{AA_1BD} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1BD} \cdot H$. Отсюда $H = \dfrac{3 \cdot V_{AA_1BD}}{S_{\Delta A_1BD}} = \dfrac{3 \cdot 96}{60} = 4{,}8$.

<u>Ответ</u>: $AK = 4{,}8$.

**Пример № 2.22**

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см. Боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

## База знаний

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна отношению площади основания пирамиды к косинусу угла между боковой гранью и плоскостью основания.

## Решение

Решим эту задачу без построения чертежа и записи краткого условия.

1. Основание правильной четырехугольной пирамиды — квадрат. Его площадь вычисляется по формуле

$$S_{\text{осн.}} = a^2,\ S_{\text{осн.}} = 10^2 = 100\ (\text{см}^2).$$

2. Обозначим $\alpha$ — угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды. Так как по условию $\alpha = 60°$, то $\cos\alpha = 1/2$.

3. Обозначим $S_{\text{бок.}}$ — площадь боковой поверхности пирамиды, $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания пирамиды.

$S_{\text{бок.}} = S_{\text{осн.}} / \cos\alpha = 100/0{,}5 = 200\ (\text{см}^2)$.

Ответ: $S_{\text{бок.}} = 200$ см$^2$.

### Пример № 2.23.

Сумма длин ребер правильной треугольной пирамиды равна 30. Найдите длину бокового ребра пирамиды, объем которой наибольший.

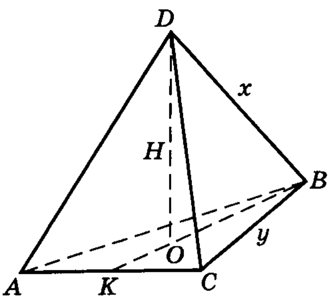

Рис. 2.71

Дано: $DABC$ — правильная пирамида.
$AB + BC + CA + DA + DB +$
$+ DC = 30$.

Найти: $DA = DB = DC$, при котором $V_{ABCD}$ — наибольший.

Смотрите *базу знаний* в задаче о расчете правильной треугольной пирамиды (пример № 2.10).

## Решение

1. Примем во внимание, что $DABC$ — правильная пирамида, и обозначим $DA = DB = DC = x$; $AB = BC = CA = y$.

2. Тогда, с учетом условия задачи, $3\ (x + y) = 30$. Отсюда $y = 10 - x$.

3. Очевидно,

$$\begin{cases} x>0, \\ y>0; \end{cases} \to \begin{cases} x>0, \\ 10-x>0; \end{cases} \to 0<x<10.$$

Далее необходимо выразить через $x$ объем пирамиды.

4. Построим $DO \perp ABC$ и $BK \perp AC$. Обозначим $DO = H$, $BK = h$.

Так как $DABC$ — правильная пирамида, то точка $O$ принадлежит отрезку $BK$ и делит его в отношении 2 : 1, считая от точки $B$, то есть $BO = 2h/3$.

5. Рассмотрим правильный треугольник $ABC$.

$S_{\Delta ABC} = y^2\sqrt{3}/4 = (10-x)^2\sqrt{3}/4$; $h = y\sqrt{3}/2 = (10-x)\sqrt{3}/2$; $BO = (10-x)\sqrt{3}/3$.

6. Рассмотрим прямоугольный треугольник $DOB$. По теореме Пифагора $H = \sqrt{x^2 - BO^2} = \sqrt{\dfrac{3x^2-(10-x)^2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6x^2+60x-300}}{3}$.

7. Объем пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot H = \frac{1}{3}(10-x)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6x^2+60x-300}}{3} =$$

$$= \frac{(10-x)^2\sqrt{2(x^2+10x-50)}}{12}.$$

8. Таким образом, объем пирамиды задан как функция одной переменной $x$: $V(x) = \dfrac{(10-x)^2\sqrt{2(x^2+10x-50)}}{12}$.

Область определения функции $V(x)$ найдем, решая систему неравенств

$$\begin{cases} 0<x<10, \\ x^2+10x-50>0; \end{cases} \to \begin{cases} 0<x<10, \\ x<-5-5\sqrt{3};\ x>5\sqrt{3}-5; \end{cases} \to 5\sqrt{3}-5<x<10.$$

9. Наибольшее значение объема пирамиды теперь можно найти, вычислив наибольшее значение функции

$$f(x) = (10-x)^2\sqrt{x^2+10x-50},\ \text{где}\ x\in(5\sqrt{3}-5;\ 10).$$

**10.** Вычислим производную функции $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{(x-10)(3x^2+15x-150)}{\sqrt{x^2+10x-50}}.$$

$f'(x)$ определена и непрерывна на интервале $(5\sqrt{3}-5;\ 10)$.

Найдем стационарные точки функции $f(x)$, приравняв $f'(x)$ к нулю.

Получаем: $f'(x)=0$, если $x_1=-10$; $x_2=5$; $x_3=10$.

Интервалу $(5\sqrt{3}-5;\ 10)$ принадлежит только значение $x=5$. Таким образом, единственной критической точкой функции $f(x)$ на интервале $(5\sqrt{3}-5;\ 10)$ является точка $x=5$.

Исследуем знаки $f'(x)$ на рассматриваемом интервале слева и справа от точки $x=5$. Получаем:

а) если $x\in(5\sqrt{3}-5\ ;\ 5)$, то $f'(x)>0$ и, следовательно, $f(x)$ монотонно возрастает;

б) если $x\in(5;\ 10)$, то $f'(x)<0$ и, следовательно, $f(x)$ монотонно убывает.

Таким образом, при $x=5$ функция $f(x)$, а вместе с ней и объем пирамиды принимает наибольшее значение на указанном промежутке.

Ответ: $DA=DB=DC=5$.

# § 5. Задачи для самостоятельного решения

## Часть А

**1.** В конус, осевое сечение которого представляет собой правильный треугольник со стороной 12 см, вписана сфера. Найдите площадь сферы.

**2.** В сферу вписан цилиндр, осевым сечением которого является квадрат со стороной 6 см. Найдите площадь сферы.

**3.** Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30°, а высота равна 12 см. Найдите площадь его боковой поверхности.

**4.** Радиус основания цилиндра равен 5 см, а его образующая — 9 см. Найдите площадь осевого сечения.

**5.** В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 4 см, а сторона основания — 6 см. Найдите апофему боковой грани.

**6.** В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 12 см, а апофема боковой грани — 15 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

**7.** Высота прямой призмы равна 10 см, а ее основание — прямоугольник, стороны которого равны 6 см и 8 см. Найдите площадь диагонального сечения.

**8.** Найдите площадь сечения шара, проведенного на расстоянии 9 см от центра. Радиус шара равен 41 см.

**9.** Диагональное сечение правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой равна 10 см и высота 12 см, разбивает ее на две треугольные призмы. Найдите площади боковых поверхностей треугольных призм.

**10.** Образующая конуса равна 25 см, а радиус основания — 7 см. Найдите объем конуса.

**11.** Найдите объем конуса, вписанного в шар, если известно, что радиус шара и радиус основания конуса равны 8 см.

**12.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение через вершину $C_1$ и ребро $AB$. Найдите периметр сечения, если сторона основания равна 24 см, а боковое ребро — 10 см.

**13.** В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 15 см, а один из катетов — 9 см. Найдите площадь сечения, проведенного через середину высоты пирамиды параллельно ее основанию.

**14.** В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 5 см и 12 см, а диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите высоту параллелепипеда.

**15.** Шар с центром в точке $O$ касается плоскости в точке $A$. Точка $B$ лежит в плоскости касания. Найдите объем шара, если $AB = 21$ см, а $BO = 29$ см.

**16.** Радиус основания конуса равен 14 см. Найдите площадь сечения, проведенного перпендикулярно его оси через ее середину.

**17.** Сферу на расстоянии 8 см от центра пересекает плоскость. Радиус сечения равен 15 см. Найдите площадь сферы.

**18.** В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10 см, а высота — 12 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

**19.** Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $3\sqrt{2}$ см. Найдите площадь поверхности цилиндра.

**20.** Развертка боковой поверхности конуса представляет собой сектор окружности радиусом 5 см и длиной дуги 6 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

**21.** Найдите объем куба, длина диагонали которого равна $8\sqrt{3}$ см.

**22.** Прямоугольник, стороны которого равны 6 см и 4 см, вращается около меньшей стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.

**23.** Прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 17 см, а один из катетов — 8 см, вращается около этого катета. Найдите площадь поверхности тела вращения.

**24.** Образующая конуса равна 25 см, а радиус основания — 7 см. Найдите объем конуса.

**25.** Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12 см, а апофема боковой грани — 15 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

**26.** В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, диагонали которого равны 12 см и 16 см. Высота параллелепипеда — 8 см. Найдите площадь его полной поверхности.

**27.** Величина угла развертки (центральный угол сектора) боковой поверхности конуса равна 120°. Длина образующей конуса равна 15 см. Найдите длину диаметра основания конуса.

**28.** Если длину каждого ребра куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см$^3$. Найдите длину ребра куба.

## Часть B

**1.** Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, относится к стороне основания пирамиды, как 3 : 4. Найдите величину угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

**2.** В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна $a$, а боковое ребро — $l$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

**3.** В правильной треугольной пирамиде апофема равна $h$, а длина высоты пирамиды — $H$. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду.

**4.** Два равных шара радиусом $R$ расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

**5.** В основании треугольной пирамиды, высота которой равна $H$, лежит прямоугольный треугольник с катетом, равным $a$, и острым углом $\alpha$, прилежащим к этому катету. Вершина пирамиды проецируется в вершину прямого угла этого треугольника. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

**6.** Высота правильной треугольной пирамиды равна $H$, а радиус круга, вписанного в основание этой пирамиды, равен $r$. Через середины двух сторон основания и вершину пирамиды проведена секущая плоскость. Найдите радиус сферы, касающейся секущей плоскости и основания пирамиды в точке пересечения его медиан.

**7.** Плоскость, параллельная основанию конуса, делит его боковую поверхность на две части, площади которых равны. Определите отношение (считая от вершины), в котором эта плоскость делит высоту конуса.

**8.** В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен $\alpha$, а длина высоты пирамиды — $H$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

**9.** В конусе, у которого длина высоты равна длине радиуса основания, проведена через вершину плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 90°. Найдите площадь полученного сечения, если длина радиуса основания равна $R$.

**10.** Площадь боковой поверхности цилиндра равна $Q$. Найдите площадь осевого сечения.

**11.** В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

**12.** В цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все его вершины лежат на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата, если высота цилиндра равна 2 см, а радиус основания равен 7 см.

**13.** Найдите боковую поверхность пирамиды, если площадь основания равна $S$, а двугранные углы при основании равны $\alpha$.

**14.** Найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, диагональное сечение которой равновелико основанию, если сторона основания равна $a$.

**15.** В правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.

**16.** Ребро куба равно $a$. Найдите расстояние от вершины куба до его диагонали, соединяющей две другие вершины.

**17.** Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая боковые грани по отрезкам, угол между которыми равен $\alpha$. Найдите угол наклона этой плоскости к основанию призмы.

**18.** Дан прямоугольный параллелепипед. Угол между диагональю основания и одной из его сторон равен $\alpha$. Угол между этой стороной и диагональю параллелепипеда равен $\beta$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если диагональ основания равна $d$.

**19.** Найдите площадь полной поверхности куба, диагональ которого равна $d$.

**20.** Через основание трапеции проведена плоскость, отстоящая от другого основания на расстоянии $a$. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до этой плоскости, если основания трапеции относятся как $m/n$.

**21.** Вычислите объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен $R$.

**22.** Через концы отрезка $AB$, пересекающего плоскость $\alpha$, и его середину $M$ проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость $\alpha$ в точках $A_1$, $B_1$ и $M_1$. Найдите длину отрезка $MM_1$, если $AA_1=a$, а $BB_1=b$.

## Часть С

**1.** В основании пирамиды $MPQR$ лежит равнобедренный треугольник $PQR$ с прямым углом при вершине $R$ и катетом $a$. Высота $MO$ пирамиды образует с гранью $MPQ$ угол $\alpha$, а с ребрами $MP$ и $MQ$ — равные углы $\beta$ ($\alpha < \beta$). Найдите объем пирамиды.

**2.** В основании четырехугольной пирамиды $MPRTQ$ лежит квадрат $PRTQ$. Боковая грань $MPR$ наклонена к плоскости основания под углом $\varphi$, а проекции на основание ребер $MP$ и $MR$ образуют со стороной $PR$ равные углы $\beta$. Найдите объем пирамиды, если длины отрезков $MP$ и $MR$ равны $l$.

**3.** В основании пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник $ABC$ со стороной длины $a$. Грань $MAC$ наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$, а ребра $AM$ и $CM$ — под углом $\beta$ ($\alpha > \beta$). Найдите объем пирамиды.

**4.** В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольная трапеция с большим основанием $b$ и высотой $h$. Высота пирамиды образует со всеми боковыми гранями равные углы $\varphi$. Найдите длину большего бокового ребра пирамиды.

**5.** В основании четырехугольной пирамиды $TKLMN$ лежит прямоугольник $KLMN$ со сторонами $KL$ длиной $b$ и $LM$ длиной $a$. Грань $TKL$ наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. Ребра $TK$ и $TL$ образуют с высотой $TO$ пирамиды равные углы $\beta$ ($\alpha + \beta > \pi/2$). Найдите объем пирамиды.

**6.** В правильную четырехугольную пирамиду вписан цилиндр так, что нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковых граней пирамиды в точках пересечения биссектрис их внутренних углов, угол наклона боковой грани к основанию пирамиды равен $\varphi$, высота пирамиды равна $H$. Найдите высоту цилиндра.

**7.** В правильную треугольную пирамиду вписан цилиндр так, что его нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковых граней пирамиды в точках пересечения биссектрис их внутренних углов. Величина угла между высотой пирамиды и боковой гранью равна $\varphi$, длина высоты пирамиды равна $H$. Найдите высоту цилиндра.

**8.** В правильную четырехугольную пирамиду вписан цилиндр так, что нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковых граней пирамиды в точках пересечения их высот. Величина плоского угла при вершине пирамиды равна $2\beta$ ($2\beta < \pi/2$), радиус окружности, описанной около боковой грани, равен $R$. Найдите полную поверхность цилиндра.

**9.** Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $l$, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. Найдите расстояние от центра шара, вписанного в пирамиду, до вершины ее основания.

**10.** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Угол между диагональю основания $BD$ и стороной $AD$ равен $\alpha$. Угол между стороной $AD$ и диагональю параллелепипеда $B_1D$ равен $\beta$. Найдите объем $V$ параллелепипеда, если диагональ основания равна $d$.

**11.** Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна $32\pi$. Найдите угол между образующей и плоскостью нижнего основания, если радиусы оснований равны 3 и 5.

**12.** Площадь полной поверхности конуса равна $10\pi$, длина образующей — 3. Найдите радиус основания конуса $r$; угол $\varphi$ между образующими конуса, принадлежащими осевому сечению; центральный угол развертки конуса $\alpha$.

**13.** В правильной треугольной пирамиде радиус окружности, вписанной в основание, равен 2, а угол между боковым ребром и плоскостью основания — $\arcsin\frac{3}{5}$. Найдите объем пирамиды.

**14.** Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с острым углом $\alpha$ при вершине и основанием $a$. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $\beta$. Найдите радиус $R$ шара, описанного около пирамиды.

**15.** Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно $b$, сторона основания — $a$. Через диагональ основания проведена секущая плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь $S$ сечения.

**16.** Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, относится к стороне основания пирамиды как 3 : 4. Найдите величину угла $\alpha$ между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

**17.** В шар радиусом $R$ вписан конус с высотой $H$. Найдите площадь $S$ боковой поверхности конуса. При каком значении $H$ эта площадь достигнет наибольшего значения?

**18.** Найдите высоту $H$ и радиус основания $R$ цилиндра, который имел бы наибольший объем при данной полной поверхности $S$.

**19.** Даны векторы $\vec{a}\{1;\ -2;\ 3\}$, $\vec{b}\{0;\ 3;\ -8\}$, $\vec{c}\{-1;\ -5;\ 0\}$. Найдите угол между векторами $\vec{d}$ и $\vec{e}$, если $\vec{d}=3\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{e}=\vec{a}-\vec{c}$.

**20.** Даны точки $A$ (0; 4; 0), $B$ (0; 0; 4); $C$ (4; 0; 0). Найдите периметр $P$ и площадь $S$ треугольника $ABC$; величины углов $A$, $B$ и $C$; площадь боковой поверхности $S_{\text{бок.}}$ треугольной пирамиды $OABC$, где $O$ — начало координат; радиус окружности $r$, вписанной в треугольник $ABC$; радиус окружности $R$, описанной около треугольника $ABC$.

---

## Ответы

### Часть А

**1.** $48\pi$ см$^2$.

**2.** $72\pi$ см$^2$.

**3.** $288\pi\sqrt{3}$ см$^2$.

**4.** 90 см$^2$.

**5.** $\sqrt{7}$ см.

**6.** $3\sqrt{29}$ см.
**7.** 100 см$^2$.
**8.** $1600\pi$ см$^2$.
**9.** $120\,(2+\sqrt{2}\,)$ см$^2$.
**10.** $392\pi$ см$^3$.
**11.** $512\pi/3$ см$^3$.
**12.** 76 см.
**13.** 13,5 см$^2$.
**14.** 13 см.
**15.** $32\,000\pi/3$ см$^3$.
**16.** $49\pi$ см$^2$.
**17.** $1156\pi$ см$^2$.
**18.** 360 см$^2$.
**19.** $13{,}5\pi$ см$^2$.
**20.** 15 см$^2$.
**21.** 512 см$^3$.
**22.** $120\pi$ см$^2$.
**23.** $480\pi$ см$^2$.
**24.** $392\pi$ см$^3$.
**25.** $3\sqrt{34}$ см.
**26.** 512 см$^2$.
**27.** 10 см.
**28.** 3 см.

### Часть В

**1.** arctg2; 45°.

**2.** $\dfrac{l^2}{\sqrt{4l^2-2a^2}}$.

**3.** $\dfrac{H\sqrt{h^2-H^2}}{\sqrt{h^2-H^2}+h}$.

**4.** $\pi R\sqrt{3}$.

**5.** $\dfrac{\sqrt{H^2\cos^2\alpha+a^2}}{2\cos\alpha}$.

6. $\dfrac{r\left(\sqrt{4H^2+r^2}-r\right)}{4H}$.

7. $1:(\sqrt{2}-1)$.

8. $\dfrac{3H}{2\cdot(1+2\cos\alpha)}$.

9. $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

10. $\dfrac{Q}{\pi}$.

11. 45°.

12. 10 см.

13. $\dfrac{S}{\cos\alpha}$.

14. $3a^2$.

15. 60°.

16. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

17. $\arccos\left(\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

18. $2d^2(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\sqrt{\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta-\sin^2\alpha}$.

19. $2d^2$.

20. $\dfrac{am}{m+n}$ или $\dfrac{an}{m+n}$.

21. $\dfrac{R^3\sqrt{6}}{4}$.

22. $\dfrac{|a-b|}{2}$. Указание. Рассмотреть случаи: $a = b$, $a > b$, $a < b$.

## Часть С

1. $\dfrac{a^3\cdot\sqrt{2}}{12\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

**2.** $\dfrac{4}{3}l^3\dfrac{\sin\beta\cdot\cos^2\beta\cdot\operatorname{tg}\varphi}{(1+\sin^2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\varphi)^{3/2}}$.

**3.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}\sin\alpha\cdot\sin\beta}{24\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}}$.

**4.** $\sqrt{\left(b-\dfrac{h}{2}\right)^2+\dfrac{h^2}{4\sin^2\varphi}}$.

**5.** $\dfrac{ab^2\sin\alpha\cdot\cos\beta}{6\sqrt{-\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)}}$.

**6.** $\dfrac{H\cdot\cos\varphi}{\cos\varphi+\sqrt{1+\cos^2\varphi}}$.

**7.** $\dfrac{\sqrt{3}H\cdot\sin\varphi}{\sqrt{3}\sin\varphi+\sqrt{3\sin^2\varphi+1}}$.

**8.** $8\pi R^2\cos(2\beta)\operatorname{tg}^2\beta\left(\cos(2\beta)+\sin\beta\sqrt{\cos(2\beta}\right)$.

**9.** $l\cdot\sqrt{\dfrac{4+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

**10.** $\dfrac{d^3\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}}{\cos\beta}$.

**11.** $60°$.

**12.** $r=2$; $\varphi=2\arcsin\dfrac{2}{3}$; $\alpha=240°$.

**13.** $12\sqrt{3}$;

**14.** $\dfrac{a}{2\sin\alpha\cdot\sin2\beta}$.

**15.** $\dfrac{ab\sqrt{2}}{4}$.

**16.** $\operatorname{arctg}2$; $45°$.

**17.** $S=\pi\cdot H\cdot\sqrt{2R(2R-H)}$. Наибольшее значение $S$ будет достигнуто при $H=\frac{4}{3}R$.

**18.** $R=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$; $H=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6S}{\pi}}$.

**19.** 90°.

**20.** $P=12\sqrt{2}$; $S=8\sqrt{3}$; $\angle A=\angle B=\angle C=60°$; $S_{бок.}=24$;
$r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$; $R=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

# Список литературы


1. *Абрамович М.И., Стародубцев М.Т.* Математика (геометрия и тригонометрические функции). Учебное пособие для подготовительных отделений втузов. — М.: Высшая школа, 1976. — 304 с.

2. *Вольфсон Б.И., Резницкий Л.И.* Методическое пособие по решению задач геометрии (планиметрия). — Ростов н/Д., 2003. — 32 с.

3. Геометрия, 7–9: Учебное пособие для общеобразовательных учреждений / Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. — 13-е изд. — М.: Просвещение, 2003. — 384 с.

4. Геометрия, 10–11: Учебное пособие для общеобразовательных учреждений./Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. — 12-е изд. — М.: Просвещение, 2003. — 206 с.

5. Геометрия для подготовительных отделений втузов: Справ. пособие./А.И. Герасимович и др. — Мн.: Вышэйшая школа, 1987. — 255 с.

6. Геометрия. Теория и ее использование для решения задач. Учебн. пособие./Под ред. Г.Н. Яковлева. — М.: Изд. «Альфа», 1995. — 335 с.

7. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2011: учебно-методическое пособие/Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2010. — 416 с.

8. *Лурье М.В.* Геометрия. Техника решения задач. Учебн. пособие. — 3-е изд. стер. — Ростов н/Д.: Феникс, 2002. — 240 с.

9. *Моденов П.С.* Задачи по геометрии. — М.: Наука, 1979. — 368 с.

10. *Пойя Д.* Как решать задачу. — Львов: Журнал «Квантор», 1991. — 215 с.

11. *Резницкий Л.И., Резницкий Ф.Л.* Методическое пособие по решению задач по стереометрии. — Ростов н/Д.: Изд. «Экспертное бюро», 1999. — 32 с.

12. Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учебн. пособие / Дыбов П. Т., Забоев А. И., Иванов А. С. и др. / Под ред. А. И. Прилепко. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Высшая школа, 1989. — 271 с.

13. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. М. И. Сканави. — 6-е изд. — М.: ООО «Издат. дом «ОНИКС 21 век»; ООО «Изд. «Мир и Образование», 2003. — 608 с.

14. *Фискович Т.Т.* Геометрия без репетитора. — М.: Издательский отдел УНЦ МГУ, 1998. — 152 с.

15. *Форд Г.* Моя жизнь, мои достижения. — М.: Финансы и статистика, 1989. — 205 с.

16. *Шувалова Э.З., Каплун В.И.* Геометрия: Учеб. пособие для подготовительных отделений вузов. — М.: Высшая школа, 1980. — 256 с.

# Оглавление

*Готовимся к ЕГЭ*

Учебное издание

**Вольфсон** Борис Ильич
**Резницкий** Леонид Иэгудович

**ГЕОМЕТРИЯ
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ И ГИА-9
УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ**

Учебное пособие

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *А. Ильинов*
Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать 20.07.2011.
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская.
Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,7.
Тираж 5000 экз. Заказ № 2472

ООО «ЛЕГИОН-М»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Издательство ООО «Легион-М» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 2 от 13.01.2011, зарегистрирован в Минюст 08.02.2011 № 19739.

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»
142300, Чехов Московской области.
E-mail: marketing@chpk.ru Сайт www.chpk.ru
Телефон 8 (495)988-63-87 Факс 8 (496)726-54-10