Radicali. Puteri. Logaritmi

$a^b = c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Determinarea lui c — Determinarea lui a, dacă $b = n \in \mathbb{N}^*$, $b \ge 2$ — Determinarea lui b

Puteri

Definiții

1) $b = n,\ n \in \mathbb{N}$: $a^0 = 1\ (a \ne 0)$, $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$;

2) $b = -n$: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\ (a \ne 0)$;

3) $b = \dfrac{m}{k}$: $a^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{a^m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a > 0$;

4) $b = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $a > 1$, $a^{x_k} \le a^{\alpha} \le a^{y_k}$;

$0 < a < 1$, $a^{y_k} \le a^{\alpha} \le a^{x_k}$, unde x_k, y_k sînt aproximările zecimale ale numărului α;

$0^{\alpha} = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Proprietăți

Pentru $x, y \in \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, avem:

1° $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2° $(a^x)^y = a^{xy}$;

3° $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

4° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

5° $a^x : a^y = a^{x-y}$.

Radicali

Definiții

1) $\sqrt[n]{c} = a \Leftrightarrow a^n = c$, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$;

2) $\sqrt[n]{c} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a^n = c, \\ a > 0, \end{cases}$ $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Proprietăți

Pentru $a, b \in \mathbb{R}_+$ (proprietățile 1°–5°), avem:

1° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2° $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;.

3° $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

4° $\sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n}$;

5° $\sqrt{a^2} = |a|$;

6° $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+^*$;

7° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}$, $ab \ge 0$;

8° $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$, $ab \ge 0$, $b \ne 0$;

9° $\sqrt[mk]{a^k} = \sqrt[m]{|a|}$, k par.

Logaritmi

Definiții

$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$, $c, a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \ne 1$, $b \in \mathbb{R}$.

$\lg c = \log_{10} c$ – logaritmi zecimali;

$\ln c = \log_e c$ – logaritmi naturali,

unde $e \approx 2{,}71\ldots$

Proprietăți

Pentru $a, c \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ (proprietățile 1°–9°), avem:

1° $\log_a a = 1$; 2° $\log_a 1 = 0$; 3° $a^{\log_a c} = c$;

4° $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;

5° $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;

6° $\log_a x^b = b \cdot \log_a x$;

7° $\log_{a^{\alpha}} x = \dfrac{1}{\alpha} \log_a x$, $\alpha \ne 0$;

8° $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$; 9° $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$;

10° $\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|$, $k \in \mathbb{Z}^*$, $x \ne 0$;

11° $\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$, $xy > 0$;

12° $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|$, $xy > 0$.

Elemente de combinatorică. Binomul lui Newton

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$

$n! = (n-1)!\,n$

$0! = 1$

Mulțimi finite

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Probleme de combinatorică simple

Binomul lui Newton

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m,\ m\in \mathbb{N},\ n\in \mathbb{N}^*$$

Mulțimi ordonate

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Aranjamente

$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$,

$0\le m\le n,\ m\in \mathbb{N},\ n\in \mathbb{N}^*$

Combinări

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$,

$0\le m\le n,\ m\in \mathbb{N},\ n\in \mathbb{N}^*$

Proprietăți ale coeficienților binomiali

1° $C_n^0 = C_n^n = 1$;

2° $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

3° $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$;

4° $C_n^m = C_n^{n-m}$;

5° a) coeficientul binomial C_n^k este cel mai mare pentru $n = 2k,\ k\in \mathbb{N}^*$;

b) coeficienții binomiali $C_n^k = C_n^{k+1}$ sînt cei mai mari pentru $n = 2k+1,\ k\in \mathbb{N}^*$.

Permutări

$P_n = n!,\ n\in \mathbb{N}^*$

Proprietăți ale numerelor $C_n^m,\ 0\le m\le n$

1° $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2° $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$;

3° $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Termenul general al dezvoltării

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$,

$k\in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & & \ldots & & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} \\
C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \ldots C_n^{n-2} & & C_n^{n-1} & C_n^n
\end{array}$$

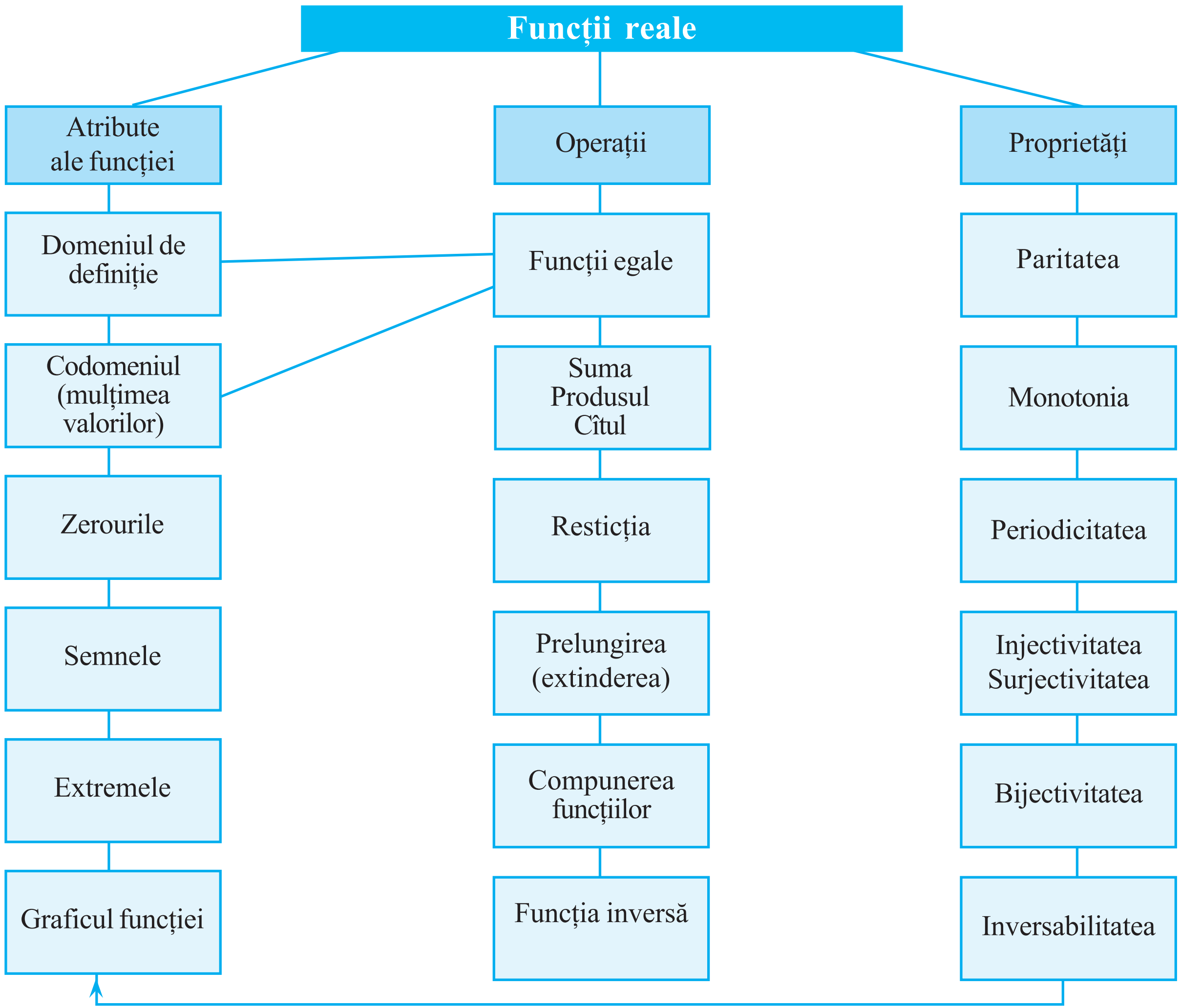
Triunghiul lui Pascal

Regulile fundamentale ale combinatoricii

1. Regula multiplicității (înmulțirii): $\text{card}(A\times B) = \text{card}\,A\cdot \text{card}\,B$.
2. Regula adunării: $\text{card}(A\cup B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B,\quad A\cap B = \varnothing$.

Aplicații: rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, totalităților, sistemelor de ecuații combinatorii. Aplicații în diverse domenii (fizică, chimie, teoria probabilităților, în viața cotidiană etc.).

Aplicații: rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților de ecuații combinatorii; dezvoltări ale binomului la putere. Aplicații în diverse domenii ale științei și tehnicii.


Funcții reale
Atribute ale funcției
Operații
Proprietăți
Domeniul de definiție
Codomeniul (mulțimea valorilor)
Zerourile
Semnele
Extremele
Graficul funcției
Funcții egale
Suma
Produsul
Cîtul
Resticția
Prelungirea (extinderea)
Compunerea funcțiilor
Funcția inversă
Paritatea
Monotonia
Periodicitatea
Injectivitatea
Surjectivitatea
Bijectivitatea
Inversabilitatea

Soluții

Reuniunea mulțimilor soluțiilor ecuațiilor (sistemelor)

Totalități de ecuații (sisteme)

Intersecția mulțimilor soluțiilor ecuațiilor

Sisteme de ecuații

DVA

Metode de rezolvare

Ecuații	Inecuații
1. Aplicarea formulelor	1. Metoda intervalelor
2. Metoda grafică	2. Reducerea la inecuația (sistemul, totalitatea) echivalentă
3. Utilizarea necunoscutelor auxiliare	3. Utilizarea necunoscutelor auxiliare
4. Metoda reducerii	4. Alte
5. Metoda substituției	
6. Descompunerea în factori	
7. Alte	

Soluții

Intersecția mulțimilor soluțiilor inecuațiilor (sistemelor)

Sisteme de inecuații

Reuniunea mulțimilor soluțiilor inecuațiilor

Totalități de inecuații (sisteme)

Ecuații

algebrice

I. Ecuații:

$ax+b=0,\ a\neq 0$

$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$

$ax^3+bx^2+cx+d=0,\ a\neq 0$

ș.a.

Exemple:

$3x-1=0;\ \ 4x^2-6x=0;$

$x^2+x^2+x+1=0.$

II. Sisteme, totalități

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} ax+b=0, \\ ax^2+bx+c=0 \end{array}\right.$

ș.a.

raționale

I. Ecuații

$\dfrac{A(x)}{B(x)}=0$, unde

$A(X), B(X)$ – polinoame.

Exemple:

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x+1}=0;\ \ x-\dfrac{2}{x}=3.$

II. Sisteme, totalități

$\begin{cases} x-\dfrac{1}{y}=5, \\ 3x+\dfrac{2}{y}=0; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+x=5, \\ 2-\dfrac{1}{x+1}=3. \end{array}\right.$

simetrice

I. Ecuații

Exemple:

$x+y+xy=0;\ \ x^2+y^2=1.$

II. Sisteme simetrice de ecuații

Exemple:

$\begin{cases} 2x+2y-xy=0, \\ x+y=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=-2. \end{cases}$

omogene

I. Ecuații

Exemple:

$2x+3y=0;\ \ x^2-xy+y^2=2.$

II. Sisteme omogene de ecuații

$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=2, \\ x^2-xy+2y^2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^3-y^3=0, \\ x^2y+xy^2=1. \end{cases}$

Inecuații

de gradul I

I. Inecuații

$ax+b>0,\ a\neq 0$

$ax+b\geq 0,\ a\neq 0$

$ax+b<0,\ a\neq 0$

$ax+b\leq 0,\ a\neq 0$

Exemplu:

$1-3x<-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x>3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>1.$

II. Sisteme, totalități

Exemple:

$\begin{cases} 6x-4>0 \\ 2-7x\leq 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x-0{,}3<0 \\ 2x-\sqrt{5}\geq 0 \end{array}\right.$

raționale

I. Inecuații

$\dfrac{A(x)}{B(x)}>0,\ \ \dfrac{A(x)}{B(x)}\leq 0$ ș.a.,

unde $A(X), B(X)$ – polinoame.

Exemplu:

$\dfrac{1}{x}>1$

II. Sisteme, totalități

Exemple:

$\begin{cases} \dfrac{2}{x}>0 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}<0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \dfrac{4}{x-1}\leq 0 \\ x-\dfrac{1}{2x}>0 \end{array}\right.$

Alte ecuații, inecuații, sisteme, totalități

Echivalența

Echivalența

Ecuații (inecuații) cu modul

Ecuații (inecuații) cu parametru

$D(f)$ — **Funcții elementare. Ecuații. Inecuații** — **DVA**

Funcția de gradul I. Funcția de gradul II

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,$
$a \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = ax^2 + bx + c,$
$a \neq 0,\ \ a, b, c \in \mathbb{R}$

Ecuații

$ax + b = 0$
$ax^2 + bx + c = 0,\ \ a \neq 0$
$\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0,\ A(x), B(x)$ – polinoame

Inecuații

$ax + b > 0$ (sau $<, \leq, \geq$)
$ax^2 + bx + c > 0,\ \ a \neq 0$ (sau $<, \leq, \geq$)
$\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$ (sau $<, \leq, \geq$)

Sisteme, totalități

$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} ax + b > c \\ a_2x^2 + b_1x + c_1 < 0 \end{array}\right.$

$\begin{cases} x(x-1) \leq 0 \\ \dfrac{x}{x+4} > 0 \end{cases}$ ș.a.

Funcția radical. Funcția putere

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$
$g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ g(x) = \sqrt[2n]{x}$
$h: \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+,\ h(x) = x^\alpha,$
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ecuații iraționale

$\sqrt{f(x)} = g(x)$
$f(x)\sqrt[2k]{g(x)} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x),\ \ k \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ ș.a.

Inecuații iraționale

$\sqrt{f(x)} < g(x)$
$\sqrt{f(x)} > g(x)$
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq h(x)$ ș.a.

Sisteme, totalități

$\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{x} = 5 \\ 3 - \sqrt{x} = x \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} \leq x \\ x\sqrt{x} > \sqrt{x+2} \end{array}\right.$ ș.a.

Funcția exponențială

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+,\ \ f(x) = a^x,$
$a \in \mathbb{R}^*_+,\ a \neq 1$

Ecuații exponențiale

$a^{f(x)} = b,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ a, b \in \mathbb{R}$
$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ a \in \mathbb{R}$
$f(a^x) = 0$
$h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$ ș.a.

Inecuații exponențiale

$a^{f(x)} < a^{g(x)},\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ a \in \mathbb{R}$
$h(x)^{f(x)} < h(x)^{g(x)}$
$f(a^x) > 0$ ș.a.

Sisteme, totalități

$\begin{cases} 4^x - 2^x = y \\ 8^x + 2y = 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} 3 \cdot 9^x + 3^x = 0 \\ 5^x - 5^{x-1} = 1 \end{array}\right.$

$\begin{cases} 64^x + 3 \cdot 8^x - 4 < 0 \\ 1 - 5^{|x|} < 25 \end{cases}$ ș.a.

Funcția logaritmică

$f: \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \log_a x,$
$a \in \mathbb{R}^*_+,\ \ a \neq 1$

Ecuații logaritmice

$\log_a f(x) = b,\ \ a > 0,$
$a \neq 1,\ \ a, b \in \mathbb{R}$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$
$f(\log_a x) = 0$
$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ ș.a.

Inecuații logaritmice

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$
$\log_{h(x)} f(x) \geq \log_{h(x)} g(x)$ ș.a.

Sisteme, totalități

$\begin{cases} \lg x + \lg y = 0 \\ 2\lg x - 3\lg y = 1 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \ln^2 x - \ln x = 0 \\ \lg(x+1) = \lg(x^2 - 4) \end{array}\right.$

$\begin{cases} \log_3(x-1) > \log_9 x \\ \ln \dfrac{x}{x-1} \leq 0 \end{cases}$ ș.a.

Alte (de ex., funcții trigonometrice)

Alte ecuații, inecuații și sisteme, totalități

Mixte

$\sqrt{2^x} - \sqrt{4^x} = 0$
$\log_2 \sqrt{x-1} > \log_2 x$
$\begin{cases} x + y = 2 \\ \lg x + \lg y = -1 \end{cases}$ ș.a.

Simetrice

$x + y + xy = 0$
$x^2 + y^2 = 1$
$\begin{cases} 2x + 2y - xy = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$ ș.a.

Omogene

$2x + 3y = 0$
$x^2 - xy + y^2 = 0$
$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 2 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$ ș.a.

Ecuații (inecuații, sisteme, totalități) cu necunoscuta în modul și/sau cu parametru

Arborele trigonometric

Identitățile trigonometrice fundamentale

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

Formule de reducere

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha;\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha;\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$

$\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha;\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha;\ \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

etc.

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\ominus$ / $\oplus$

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\alpha = \beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\dfrac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\oplus$

$\alpha = \beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$

$\alpha = \beta$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}[\alpha + (-\beta)]$

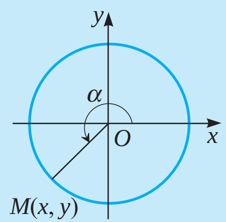
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$

$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \operatorname{ctg}[\alpha + (-\beta)]$

Funcții trigonometrice și proprietățile lor

Funcții trigonometrice



$\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};$

$\mathrm{tg}\colon \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R};$

$\mathrm{ctg}\colon \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R};$

$\cos\alpha = x;\quad \sin\alpha = y;$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x};\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y};$

$\sec\alpha = \frac{1}{x};\quad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{y}.$

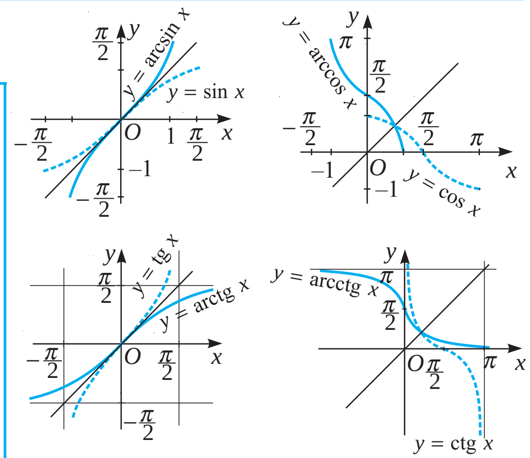
Funcții trigonometrice inverse

$\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin a = t \Leftrightarrow \sin t = a;$

$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi],\ \arccos a = t \Leftrightarrow \cos t = a;$

$\mathrm{arctg}\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \mathrm{arctg}\, a = t \Leftrightarrow \mathrm{tg}\, t = a;$

$\mathrm{arcctg}\colon \mathbb{R} \to (0, \pi),\ \mathrm{arcctg}\, a = t \Leftrightarrow \mathrm{ctg}\, t = a.$



$\arcsin(-a) = -\arcsin a;$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a;$

$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a;$

$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a;$

$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2},\quad a \in [-1, 1];$

$\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arcctg}\, a = \frac{\pi}{2},\quad a \in \mathbb{R}.$

Proprietăți

$f(x) = \sin x$

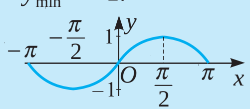
1° $\sin x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z};$

2° impară;

3° perioada: 2π;

4° crescătoare pe
$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z},$
descrescătoare pe
$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z};$

5° $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$
$y_{\max} = 1;$
$x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$
$y_{\min} = -1.$



$f(x) = \cos x$

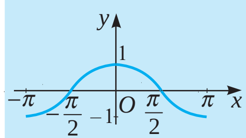
1° $\cos x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};$

2° pară;

3° perioada: 2π;

4° crescătoare pe
$[-\pi + 2\pi k, 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z},$
descrescătoare pe
$[2\pi k, \pi + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z};$

5° $x_{\max} = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$
$y_{\max} = 1;$
$x_{\min} = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$
$y_{\min} = -1.$



$f(x) = \mathrm{tg}\, x$

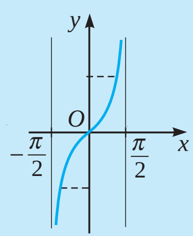
1° $\mathrm{tg}\, x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z};$

2° impară;

3° perioada: π;

4° crescătoare pe
$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z};$

5° nu are extreme.



$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$

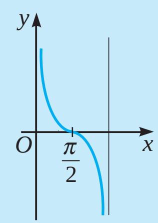
1° $\mathrm{ctg}\, x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k;$

2° impară;

3° perioada: π;

4° descrescătoare pe
$(\pi k, \pi + \pi k),\ k \in \mathbb{Z};$

5° nu are extreme.



Ecuații, inecuații trigonometrice

Ecuații trigonometrice

Ecuații trigonometrice fundamentale

$\sin x = a, |a| \le 1;\ x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = a, |a| \le 1;\ x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbb{R};\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{ctg} x = a, a \in \mathbb{R};\ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Metoda substituției

$f(\sin x) = 0,\quad t = \sin x;$ $\qquad f(\cos x) = 0,\quad t = \cos x;$

$f(\operatorname{tg} x) = 0,\quad t = \operatorname{tg} x;$ $\qquad f(\operatorname{ctg} x) = 0,\quad t = \operatorname{ctg} x.$

*$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha - \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\\ \alpha + \beta = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

*$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = \beta + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\\ \alpha = -\beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

*$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha - \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\\ \alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n, \beta \ne \frac{\pi}{2} + \pi k\end{cases}$

Alte tipuri de ecuații trigonometrice

$a\sin x + b\cos x = c$

1) metoda unghiului auxiliar:

$$\sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a};$$

2) metoda omogenizării;

3*) metoda aplicării formulelor substituției universale;

4) metoda reducerii la sistemul

$$\begin{cases}au + bv = c\\ u^2 + v^2 = 1,\end{cases} \text{ unde } \begin{cases}u = \sin x,\\ v = \cos x.\end{cases}$$

omogene

$$a_n \cos^n x + a_{n-1}\cos^{n-1} x \sin x + \ldots + a_1 \cos x \sin^{n-1} x + a_0 \sin^n x = 0 \,|\, : \cos^n x \ne 0$$

Inecuații trigonometrice

Inecuații trigonometrice fundamentale

	Soluții:
$\sin x > a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\arcsin a + 2\pi n, \pi - \arcsin a + 2\pi n)$
$\sin x < a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (-\pi - \arcsin a + 2\pi n, \arcsin a + 2\pi n)$
$\cos x > a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (-\arccos a + 2\pi n, \arccos a + 2\pi n)$
$\cos x < a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\arccos a + 2\pi n, 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$
$\operatorname{tg} x > a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname{arctg} a + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
$\operatorname{tg} x < a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \operatorname{arctg} a + \pi n\right)$
$\operatorname{ctg} x > a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\pi n, \operatorname{arcctg} a + \pi n)$
$\operatorname{ctg} x < a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\operatorname{arcctg} a + \pi n, \pi + \pi n)$
$\sin x \ge a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [\arcsin a + 2\pi n, \pi - \arcsin a + 2\pi n]$
$\sin x \le a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [-\pi - \arcsin a + 2\pi n, \arcsin a + 2\pi n]$
$\cos x \ge a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [-\arccos a + 2\pi n, \arccos a + 2\pi n]$
$\cos x \le a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [\arccos a + 2\pi n, 2\pi - \arccos a + 2\pi n]$
$\operatorname{tg} x \ge a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left[\operatorname{arctg} a + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
$\operatorname{tg} x \le a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \operatorname{arctg} a + \pi n\right]$
$\operatorname{ctg} x \ge a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\pi n, \operatorname{arcctg} a + \pi n]$
$\operatorname{ctg} x \le a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [\operatorname{arcctg} a + \pi n, \pi + \pi n)$

*Reductibile la inecuații algebrice:

$f(\sin x) \ge 0$,

$f(\cos x) < 0$,

$f(\operatorname{tg} x) \ge 0$,

$f(\operatorname{ctg} x) \le 0$ etc.

Metoda substituției:

$t = \sin x$

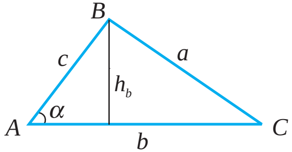
$(t = \cos x$ ș.a.)

Alte tipuri de inecuații trigonometrice

Figuri plane

Poligoane

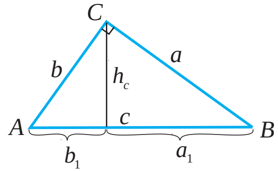
Triunghiuri



$\mathcal{A} = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$2p = a + b + c$

Triunghiul dreptunghic

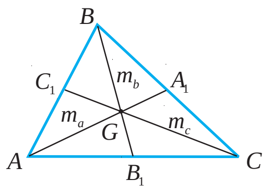


$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 = ca_1$

$b^2 = cb_1$

$h_c^2 = a_1 b_1$



AA_1, BB_1, CC_1 – mediane

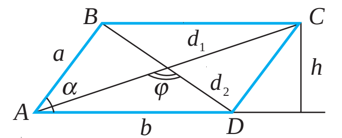
$A_1G = \frac{1}{3} m_a$

$GA = \frac{2}{3} m_a$

$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$

Patrulatere

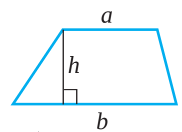
Paralelogramul



$\mathcal{A} = bh = ab \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$

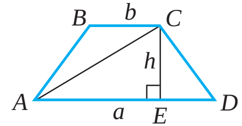
$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

Trapezul

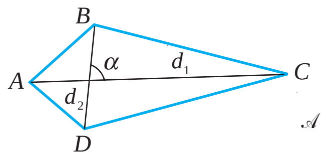


$\mathcal{A} = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Trapezul isoscel

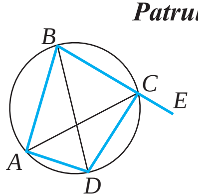


$AE = \frac{a+b}{2}$, $ED = \frac{a-b}{2}$



$\mathcal{A} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$

Patrulatere înscrise



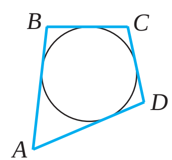
$m(\angle ABC) + m(\angle CDA) = 180° =$

$= m(\angle BAD) + m(\angle BCD)$

$\angle ABD \equiv \angle ACD$

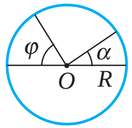
$\angle DCE \equiv \angle DAB$

Patrulatere circumscrise



$BC + AD = CD + AB$

Cercul

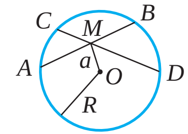


$\mathcal{A}_{\text{cerc}} = \pi R^2$

$\mathcal{A}_{\text{sect}} = \frac{1}{2} R^2 \alpha$; $\mathcal{A}_{\text{sect}} = \pi R^2 \frac{\varphi}{360°}$

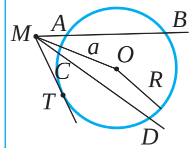
α – măsură în radiani

φ – măsură în grade



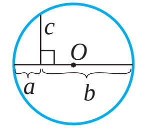
$AM \cdot MB = CM \cdot MD =$

$= R^2 - a^2$

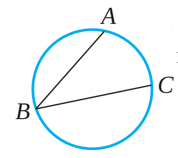


$AM \cdot MB = CM \cdot MD =$

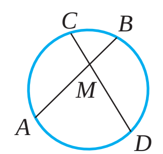
$= a^2 - R^2 = MT^2$



$c^2 = ab$

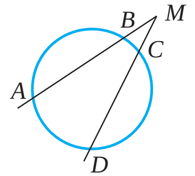


$m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\smile AC)$



$m(\angle AMD) =$

$= \frac{m(\smile AD) + m(\smile CB)}{2}$



$m(\angle AMD) =$

$= \frac{m(\smile AD) - m(\smile BC)}{2}$

Şiruri de numere reale

Şir numeric
$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

Notăm: $(x_n)_{n\ge1}$

Moduri de definire a şirului
1) analitic;
2) prin descrierea termenilor şirului;
3) printr-o relaţie de recurenţă.

Şir mărginit
superior:

$\exists M \in \mathbb{R}$: $x_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

inferior:

$\exists m \in \mathbb{R}$: $x_n \ge m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Şiruri egale
$(x_n)_{n\ge1}$, $(y_n)_{n\ge1}$ sînt egale

$\Leftrightarrow x_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Proprietăţi ale şirurilor convergente
1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, λ – const.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{y_n} = [\lim\limits_{n\to\infty} x_n]^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$

Şir-sumă
$(x_n + y_n)_{n\ge1}$

Şir-produs
$(x_n \cdot y_n)_{n\ge1}$

Şir-cît
$\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\ge1}$

Şirul puterilor
$((x_n)^{y_n})_{n\ge1}$

Şir monoton
crescător: $x_n \le x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

descrescător: $x_n \ge x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Teorema de caracterizare a marginii superioare a unei mulţimi
Fie $X \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă mărginită superior. Numărul M^* este marginea superioară a mulţimii X dacă şi numai dacă:

1) $x \le M^*$, pentru orice $x \in X$;

2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$, astfel încît $x_\varepsilon > M^* - \varepsilon$.

Teorema de caracterizare a marginii inferioare a unei mulţimi
Fie $X \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă mărginită inferior. Numărul m^* este marginea inferioară a mulţimii X dacă şi numai dacă:

1) $x \ge m^*$, pentru orice $x \in X$;

2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$, astfel încît $x_\varepsilon < m^* + \varepsilon$.

Teorema lui Weierstrass
Orice şir numeric monoton şi mărginit este convergent.

Progresie aritmetică
$a_n = a_1 + r(n-1)$, $n \in \mathbb{N}^*$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$, $k \in \mathbb{N}^*$

Progresie geometrică
$b_n = b_1 q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}^*$

Inegalitatea mediilor
$\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$

Numărul *e*
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Limite de funcții

Mulțime
$E \subseteq \mathbb{R}$

Punct de acumulare
$\forall V(x_0)$ are loc relația $V(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$, unde $V(x_0)$ este vecinătate a punctului x_0

Criteriu de existență a punctului de acumulare pentru o mulțime
x_0 este punct de acumulare pentru $E \Leftrightarrow E \supset (x_n)_{n\geq 1},\ x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Funcție
$f\colon E \to \mathbb{R}$

Limită de funcție
$l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Limite laterale
$l_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x);\ l_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$

Criteriu de existență a limitei unei funcții într-un punct
$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \exists l_s(x_0) = l_d(x_0) = l$

Operații cu limite de funcții
1. $\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)] = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, c – const.
2. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = [\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

Proprietăți ale funcțiilor ce au limită în punct
1° Dacă există limita unei funcții într-un punct, atunci ea este unică.

2° Dacă limita unei funcții într-un punct este mai mică (mai mare) decît limita altei funcții în acest punct, atunci pe o vecinătate a punctului și prima funcție este mai mică (mai mare) decît funcția a doua.

3° Dacă limita unei funcții în punct este pozitivă (negativă), atunci pe o vecinătate a acestui punct funcția își păstrează semnul, adică este pozitivă (negativă).

4° Dacă o funcție are limită finită într-un punct, atunci pe o vecinătate a acestui punct ea este mărginită.

5° Într-o inegalitate de funcții se poate trece la limită, păstrînd semnul inegalității.

6° Compoziția de funcții ce au limită într-un punct este o funcție ce are limită în acest punct.

7° Dacă f este o funcție elementară, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, unde x_0 este orice punct din domeniul de definiție al acestei funcții.

Limite remarcabile
❶ $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

❷ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Forme exceptate la operații cu limite de funcții
$\dfrac{0}{0};\ \dfrac{\infty}{\infty};\ \infty-\infty;\ 0\cdot\infty;\ 1^\infty;\ 0^0;\ \infty^0.$

Calcularea formelor exceptate
$\mathbf{\dfrac{0}{0}}$ – prin metoda dezvoltării în factori, prin amplificări cu expresii conjugate sau prin utilizarea unor limite cunoscute.

$\mathbf{\dfrac{\infty}{\infty}}$ – prin extragerea ca factor a funcțiilor ce cresc cel mai rapid la infinit.

$\boldsymbol{\infty-\infty}$ – prin aducerea la numitor comun sau prin amplificări cu expresii conjugate.

$\mathbf{0\cdot\infty}$ – prin transformarea echivalentă a produsului într-un cît de două funcții.

$\mathbf{1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0}$ – prin utilizarea limitelor remarcabile pentru numărul e sau a identității logaritmice fundamentale.

Ordinea în care funcțiile cresc la infinit
1. Cea mai lentă este funcția logaritmică: $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x,\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1.$
2. Mai rapidă este funcția putere: $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^*.$
3. Și mai rapidă este funcția exponențială: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1.$
4. Cea mai rapidă este funcția factorial: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = n!.$

Funcții continue

Criterii de continuitate

Funcția $f\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ este continuă în punctul $x_0 \in E$ dacă este adevărată una din ***propozițiile***:

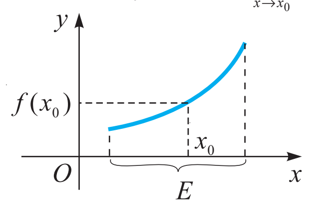
1. $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$.
2. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît pentru orice $x \in E$ din $|x - x_0| < \delta$ rezultă că $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Cauchy).
3. Pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in E$, din $x_n \to x_0$ rezultă că $f(x_n) \to f(x_0)$ cînd $n \to \infty$.
4. Fie funcția f monotonă pe un interval I. Funcția f este continuă pe I dacă şi numai dacă mulțimea valorilor ei, $\{f(x)\}$, este un interval.

Clase de funcții continue

1. Fie f şi g funcții continue. Atunci αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f+g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ sînt funcții continue.
2. Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.
3. Orice funcție elementară este continuă pe tot domeniul ei de definiție.

Definiția continuității

Funcția $f\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ se numeşte **continuă în punctul $x_0 \in E$** dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



Funcția $f\colon E \to \mathbb{R}$ se numeşte **continuă pe E** dacă ea este continuă în orice punct $x \in E$.

Proprietăți ale funcțiilor continue

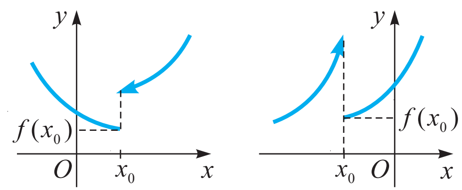
1. ***Teorema (Weierstrass de mărginire).*** Orice funcție continuă pe un interval închis este mărginită şi îşi atinge marginile pe acest interval.

2. ***Teorema Bolzano–Cauchy despre anularea funcției.*** Fie funcția $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ şi $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $f(c) = 0$.

3. Corolar al ***teoremei Bolzano–Cauchy despre valorile intermediare.*** Mulțimea valorilor unei funcții continue pe un interval reprezintă un interval.

Continuitatea la stînga (dreapta)

Funcția $f\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ se numeşte **continuă la stînga (dreapta) în punctul $x_0 \in E$** dacă există limita ei la stînga (dreapta) în x_0 şi $f(x_0-0) = f(x_0)$ $(f(x_0+0) = f(x_0))$.



Clasificarea punctelor de discontinuitate

Dacă funcția f nu este continuă în punctul $x_0 \in E$, atunci x_0 se numeşte **punct de discontinuitate** al acestei funcții.

Punctul de discontinuitate x_0 se numeşte **punct de discontinuitate de speța întîi** pentru funcția f dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există şi sînt finite, însă

$f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ sau

$f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$.

Diferența $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ se numeşte **saltul funcției în punctul** x_0.

Punctul de discontinuitate x_0 se numeşte **punct de discontinuitate de speța a doua** dacă cel puțin una dintre limitele laterale $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ este infinită sau nu există.

Derivata şi diferenţiala funcţiei

Derivata funcţiei

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{sau} \quad f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Derivate laterale

$$f'_s(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'_d(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Diferenţiala funcţiei

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$$

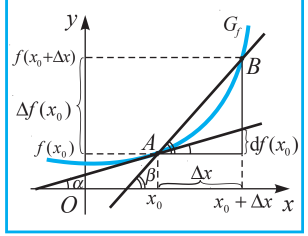
Regulile de calcul al derivatelor

1. $(f+g)'=f'+g'$
2. $(c\cdot f)'=c\cdot f'$
3. $(f-g)'=f'-g'$
4. $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$
6. Derivata funcţiei compuse: $(g\circ f)'(x)=(g(f(x)))'=$ $=g'(f(x))\cdot f'(x)$
7. Derivata funcţiei inverse: $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$
8. Derivate de ordin superior: $f''=(f')'$; $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$

Tabelul derivatelor şi diferenţialelor funcţiilor elementare

f	D_f	f'	$D_{f'}$	$\mathrm{d}f$
1. c (constantă)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	0
2. $x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n\cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n\cdot x^{n-1}\mathrm{d}x$
3. $x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}^*$	$(0,\ +\infty)$	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$(0,\ +\infty)$	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$
4. $\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$
5. $\sqrt[2n]{x},\ n\in\mathbb{N}^*$	$[0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{2n\cdot\sqrt[2n]{x^{2n-1}}}$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{2n\cdot\sqrt[2n]{x^{2n-1}}}\mathrm{d}x$
6. $\sqrt[2n+1]{x},\ n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{(2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{(2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}\mathrm{d}x$
7. $\sqrt{x}$	$[0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
8. $a^x,\ a>0,\ a\neq 1$	$\mathbb{R}$	$a^x\cdot\ln a$	$\mathbb{R}$	$a^x\ln a\,\mathrm{d}x$
9. e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$e^x\mathrm{d}x$
10. $\ln x$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{x}$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$
11. $\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$
12. $\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\cos x\,\mathrm{d}x$
13. $\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x\,\mathrm{d}x$
14. $\mathrm{tg}\,x$	$\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$
15. $\mathrm{ctg}\,x$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$
16. $\arcsin x$	$[-1,\ 1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
17. $\arccos x$	$[-1,\ 1]$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
18. $\mathrm{arctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$
19. $\mathrm{arcctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

Interpretarea geometrică a derivatei şi diferenţialei funcţiei



Regulile de calcul al diferenţialelor

1. $\mathrm{d}(f+g)=\mathrm{d}f+\mathrm{d}g$
2. $\mathrm{d}(c\cdot f)=c\cdot\mathrm{d}f$
3. $\mathrm{d}(f-g)=\mathrm{d}f-\mathrm{d}g$
4. $\mathrm{d}(f\cdot g)=g\cdot\mathrm{d}f+f\cdot\mathrm{d}g$
5. $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\cdot\mathrm{d}f-f\cdot\mathrm{d}g}{g^2}$
6. $\mathrm{d}f(g)=f'(g)\mathrm{d}g$

Proprietăţi generale ale funcţiilor derivabile

1° Teorema lui Fermat

2° Teorema lui Rolle

3° Teorema lui Lagrange

Unele aplicaţii ale derivatelor

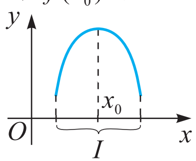
1. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă x_0: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$
2. Aplicaţii la calculele aproximative
3. Determinarea coeficienţilor binomiali
4. Calculul unor limite (regulile lui l'Hospital)
5. Studiul funcţiilor

Aplicații ale derivatelor

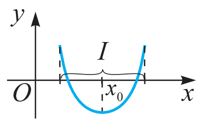
Rolul derivatei întîi în studiul funcțiilor

Fie funcția $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, derivabilă pe I.

1. Dacă $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, atunci $f(x)$ este constantă pe I.
2. Funcția f este **crescătoare** (**descrescătoare**) pe I dacă și numai dacă $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in I$.
3. Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, și $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este **punct de maxim local** al funcției f.
   Se notează: $\nearrow f(x_0) \searrow$.



4. Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, și $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este **punct de minim local** al funcției f.
   Se notează: $\searrow f(x_0) \nearrow$.

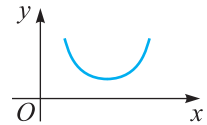


5. Punctele de maxim local și de minim local ale unei funcții se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.
6. Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sînt eventualele puncte de extrem local ale funcției f.

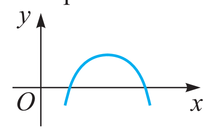
Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

Fie funcția $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, de două ori derivabilă pe I.

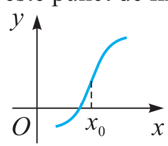
1. Dacă $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția f este **convexă** pe I.

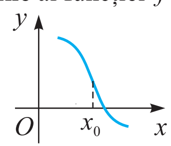


2. Dacă $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția f este **concavă** pe I.



3. Fie $f''(x_0) = 0$ și $V(x_0)$ o vecinătate a punctului $x_0 \in I$.
   Dacă $f''(x) < 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x < x_0$, și $f''(x) > 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x > x_0$, sau invers ($f''(x) > 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x < x_0$, și $f''(x) < 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x > x_0$), atunci x_0 este punct de **inflexiune** al funcției f.

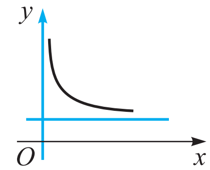


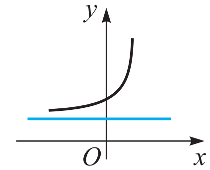


4. Soluțiile ecuației $f''(x) = 0$ sînt eventualele puncte de inflexiune ale funcției f.

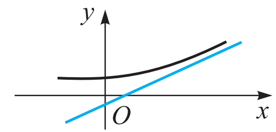
Asimptote

1. Dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$), atunci dreapta de ecuație $y = l$ este **asimptotă orizontală** la $+\infty$ (la $-\infty$) a graficului funcției f.

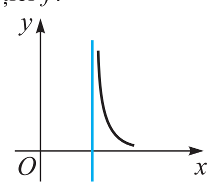


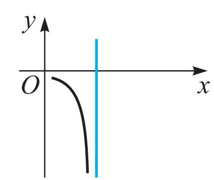


2. Dacă există și sînt finite limitele
   $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \ (m \neq 0) \text{ și } n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx),$$
   atunci dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$, este **asimptotă oblică** la $+\infty$ a graficului funcției f. (Similar pentru $-\infty$.)



3. Dacă $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$) este $+\infty$ sau $-\infty$, atunci dreapta de ecuație $x = a$ este **asimptotă verticală la stînga** (**dreapta**) a graficului funcției f.





Probleme de maxim și minim

Numere complexe

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$

Forma algebrică

$z=a+bi,\ a,\ b\in\mathbb{R}$

$i^2=-1$

Modulul

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Proprietăți

1° $|z|=|\bar{z}|=|-z|$

2° $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

3° $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1+z_2|$

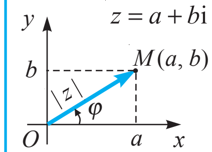
4° $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

5° $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2\ne0$

6° $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1-z_2|$

Reprezentarea geometrică

$z=a+bi$



$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{r}\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{r}\end{cases}$

φ – argument al numărului z,

$\arg z\in(-\pi,\pi]$

Forma trigonometrică

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

$r\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi\in\mathbb{R},\ \varphi=\arg z$.

Operații

$a+bi+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$

$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$

Operații

$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$

$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$

$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\ n\in\mathbb{Z}$

Proprietăți

$\bar{z}=a-bi$

Pentru orice $z,\ z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$:

1° $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$

2° $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

3° $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ z_2\ne0$

(deci și $\bar{z}_2\ne0$)

4° $z\cdot\bar{z}\in\mathbb{R}$

5° $z+\bar{z}\in\mathbb{R}$

6° $z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

7° $\bar{\bar{z}}=z$

Rădăcinile de ordinul n, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, ale numărului z

$\alpha_k\in\left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=\overline{0,\ n-1}\right\}$

Rădăcinile de ordinul 2 ale numărului $z=a+bi$

1) Pentru $b\ne0$,

$\alpha_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\,\mathrm{sgn}\,b\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$;

2) pentru $b=0$, $\alpha_{1,2}=\begin{cases}\pm\sqrt{a}, & \text{dacă } a\ge0\\ \pm i\sqrt{|a|}, & \text{dacă } a<0,\end{cases}$

unde $\mathrm{sgn}\,b=\begin{cases}1, & \text{dacă } b>0\\ 0, & \text{dacă } b=0\\ -1, & \text{dacă } b<0.\end{cases}$

Aplicații

Ecuații binome

$mz^k+p=0\Leftrightarrow z$ – rădăcină de ordinul k a lui $-\dfrac{p}{m}$

Ecuații trinome

$mz^{2k}+pz^k+q=0,\ m\in\mathbb{C}^*$,

$p,\ q\in\mathbb{C}\Leftrightarrow\begin{cases}mu^2+pu+q=0\\ z^k=u\end{cases}$

În geometrie

Ecuații reciproce

Matrice

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$$

Matrice pătratice

$m=n$

Transpusa matricei A

${}^tA$

Matrice unitate

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

Matrice-linie
Matrice-coloană
Matrice diagonală
Matrice nulă
Matrice inferior (superior) triunghiulară

Operații

$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$

$\alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij})$

$(a_{ij})(b_{jk})=(d_{ik}),\ i=\overline{1,m},$
$j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p},\ d_{ik}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$

${}^t(a_{ij})=(a_{ji}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$

Matrice eşalon

transformări elementare ale liniilor

Matrice inversabilă

$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n,\ \ A^{-1}$ – inversa matricei A

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix},\ |A|\neq 0$$

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\overline{M}_j^{\,i}$$

Determinanți

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_j^{\,i}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_j^{\,i},$$

$\overline{M}_j^{\,i}$ – determinant al matricei obținute din A prin suprimarea liniei i şi a coloanei j

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2\,n-1} & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}\cdot a_{2\,n-1}\cdot\ldots\cdot a_{n1}$$

Regula triunghiurilor
Regula lui Sarrus
Dezvoltarea determinantului după linie (coloană)

Sisteme de ecuații liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

A – matrice a sistemului, $\overline{A}$ – matrice extinsă

$$\overline{A}=(A\,|\,B),\ \ B=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

$AX=B$

Sistem compatibil

Numărul liniilor nenule ale matricelor eşalon A_1, $\overline{A}_1$ este acelaşi.

Sistem incompatibil

Sistem compatibil nedeterminat

Matricea eşalon $\overline{A}_1$ are mai puțin de n linii nenule.

Sistem compatibil determinat

Matricea eşalon $\overline{A}_1$ are n linii nenule.

Metoda lui Gauss
Soluția particulară
Soluția generală

$$\begin{cases} x_k=f_k(\alpha,\beta,\ldots)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ x_l=f_l(\alpha,\beta,\ldots)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ x_p=\alpha\\ x_q=\beta\\ \dots\dots\end{cases}$$

Regula lui Cramer

Pentru $m=n$ şi
$\Delta=|A|\neq 0$,
$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ldots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$