серия ШКОЛЬНЫЙ КОНСПЕКТ

Ершова А.П.
Голобородько В.В.
Крижановский А.Ф.

ТЕТРАДЬ-КОНСПЕКТ ПО ГЕОМЕТРИИ

9

по учебнику
Атанасяна Л.С.

А.П. Ершова, В.В. Голобородько,
А.Ф. Крижановский

ТЕТРАДЬ-КОНСПЕКТ ПО ГЕОМЕТРИИ

(по учебнику Л.С. Атанасяна и др.)

учени____ 9—___ класса

____

____

____

____

Москва
ИЛЕКСА
2012

Рецензенты:

И.Л. Соловейчик — главный редактор приложения «Математика» к газете «Первое сентября», г. Москва;

В.А. Лысенко — учитель-методист Авторской школы Бойко, г. Харьков.

Ершова А.П., Голобородько В.В., Крижановский А.Ф.
Тетрадь-конспект по геометрии для 9 класса.— М.: ИЛЕКСА, 2012.— 96 с.
ISBN 978-5-89237-164-3

Тетрадь-конспект содержит все основные теоретические сведения — **определения, аксиомы, теоремы и следствия** из них — курса геометрии 9 класса (по учебнику Л.С. Атанасяна и др.). **Опорные задачи** содержат важные свойства геометрических фигур, не выраженные в теоремах. **Типовые задачи** описывают простейшие и более сложные геометрические ситуации, наиболее часто встречающиеся в тематических проверочных работах. **Полезные задачи** описывают дополнительные свойства изучаемых геометрических фигур. Ко всему материалу приведены чертежи, после теорем и задач оставлено место для самостоятельного заполнения учащимися. К отдельным теоремам и задачам приведены доказательства, решения или указания к решению.

Тетрадь-конспект поможет **существенно сэкономить время урока** учителям и школьникам.

ISBN 978-5-89237-164-3

Дорогие друзья!

Если вы уже купили эту тетрадь-конспект, то у вас наверняка есть свой собственный взгляд на ее эффективное использование. Если же вы раздумываете – покупать или не покупать, пригодится или будет лежать на полке, – то мы можем вкратце, учитывая собственный опыт работы с такими тетрадями, рассказать о той несомненной пользе, которую они приносят на практике.

1. В этой тетради **уже проделана вся рутинная работа** по записи формулировок **определений, аксиом, теорем** и построению чертежей – вам только остается заполнить необходимые доказательства и решения, причем не обязательно в том виде, в котором они приведены в учебнике.
2. Формулировки **опорных задач**, которые, как правило, под диктовку записываются в обычную рабочую тетрадь во время урока или, в худшем случае, выискиваются в учебнике, уже выбраны из учебника и лучших книг по геометрии, и вам только остается грамотно доказать эти важные свойства геометрических фигур и применять их на практике. Многие из опорных задач в других учебниках названы теоремами, что говорит в пользу их важности. Каждая теорема и опорная задача имеет название, что облегчит вам ссылку на нее в решении других задач.
3. В этой тетради много ***типовых задач***, то есть задач, подобные которым часто встречаются на самостоятельных, контрольных и тематических работах. Их решения желательно оформить **как образец** с учетом всех действующих требований – это облегчит подготовку ко всем письменным работам, в том числе и к экзаменам.
4. Для **более глубокого изучения** геометрии предназначены ***полезные задачи***, в которых описаны дополнительные свойства изучаемых фигур или представлены оригинальные геометрические идеи. Эти задачи решаются в тетрадях для практических работ. Много интересного дополнительного материала вы найдете и в главе «Приложение».

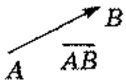
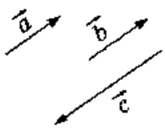
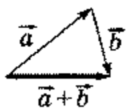
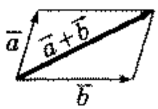
И, наконец, эта тетрадь создавалась, в первую очередь, для того, чтобы
существенно сэкономить время
урока и ваше личное время.

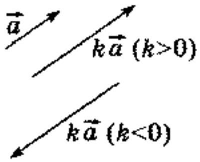
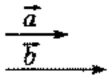
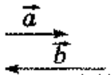
Желаем вам успехов!

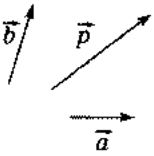
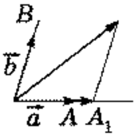
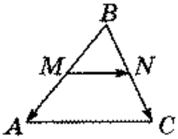
Будем благодарны за ваши замечания и доброжелательные отзывы, которые вы можете разместить на нашем сайте www.axiom.com.ua

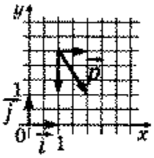
МЕТОД КООРДИНАТ

Повторение.
Основные сведения о векторах

Определение вектора и его длины 	**Вектор** (направленный отрезок) – отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом. Длина этого отрезка называется **длиной (или модулем)** вектора (обозначается $\lvert\overline{AB}\rvert$). **Нулевой вектор** (начало и конец совпадают): $\lvert\vec{0}\rvert = 0$.
Определение коллинеарных векторов и их направленности 	**Коллинеарные векторы** – векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых – **сонаправленные** ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) *и* **противоположно направленные** ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$).
Определение равных векторов 	**Равные векторы** – сонаправленные векторы с равными длинами.
Правила сложения векторов   	**1) правило треугольника** **2) правило параллелограмма** **3) правило многоугольника**

Умножение вектора на число 	$\lvert k\vec{a} \rvert = \lvert k \rvert \lvert \vec{a} \rvert$ $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ при $k > 0$, $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ при $k < 0$.
	Координаты вектора
Лемма ***(о коллинеарных векторах)***  $k = \frac{\lvert\vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert}$  $k = -\frac{\lvert\vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert}$	**Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.** *Доказательство.* 1) Пусть $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. 2) Пусть $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.
Определение разложения вектора по двум векторам	Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа, то говорят, что **вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$**. При этом числа x и y называются **коэффициентами разложения.**

Теорема **(*о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам*)**  	**Любой вектор можно разложить по двум неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.** *Доказательство.*
Типовая задача 	*В треугольнике ABC MN – средняя линия (см. рисунок). Разложите вектор* $\overline{MN}$ *по векторам* $\vec{a} = \overline{BA}$ *и* $\vec{b} = \overline{BC}$. *Решение.*

Определение координатных векторов 	**Координатными векторами (ортами)** называются единичные (длины 1) векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$, отложенные от начала координат в направлении координатных осей: $\vec{i}$ — оси Ox, $\vec{j}$ — оси Oy.
Определение координат вектора	**Координатами вектора** называются коэффициенты его разложения по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$: $\vec{p}=x\vec{i}+y\vec{j} \Leftrightarrow x,\ y$ – координаты вектора $\vec{p}$. ***Обозначение.*** Координаты вектора указываются в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{p}\{x;\ y\}$. Очевидно, что $\vec{i}\{1;0\}$, $\vec{j}\{0;1\}$.
Типовая задача 	*По данному рисунку запишите разложение вектора $\vec{p}$ по координатным векторам и найдите координаты вектора $\vec{p}$.* *Решение.*
Свойства координатных векторов	1. **Нулевой вектор имеет нулевые координаты: $\vec{0}\{0;0\}$.** 2. **Координаты равных векторов равны,** и обратно: **если координаты векторов равны, то равны и сами векторы.**

3. **Каждая координата суммы двух или нескольких векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.**

4. **Каждая координата разности двух или нескольких векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.**

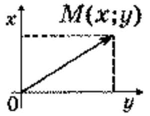
5. **Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.**

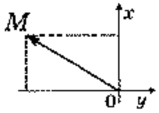
Типовая задача	*Даны векторы* $\vec{a}\{1;-2\}, \vec{b}\{-3;1\}, \vec{c}\{-2;3\}$. *Найдите координаты вектора* $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ *и постройте его.* ***Решение.***
Типовая задача	*Разложите вектор* $\vec{c}\{2;3\}$ *по векторам* $\vec{a}\{1;1\}, \vec{b}\{1;0\}$. ***Решение.*** ***Ответ:*** $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$.

Опорная задача (*о координатах коллинеарных векторов*) $\vec{a}\{a_1;a_2\} \parallel \vec{b}\{b_1;b_2\}$ $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$	**Координаты коллинеарных векторов пропорциональны, и обратно: если координаты двух векторов пропорциональны, то эти векторы коллинеарны.** *Доказательство.* ***Замечание.*** Если в условиях данной задачи один из коллинеарных векторов имеет нулевую координату, то соответствующая координата второго вектора также равна нулю.

Простейшие задачи в координатах

Определение радиус-вектора



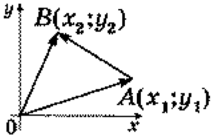


$\vec{r}_M=\overline{OM}\{x;y\}$

Радиус-вектором точки M в прямоугольной системе координат называется вектор $\overline{OM}$ с началом в начале координат.

Координаты точки M равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.

Опорная задача ***(о вычислении координат вектора)***



$\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$

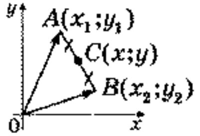
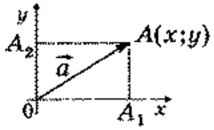
Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

Доказательство.

Типовая задача

Дан вектор $\overrightarrow{AB}\{-2;\ 7\}$, *причем* $A(1;4)$. *Найдите координаты точки* B.

Решение.

Опорная задача ***(формулы координат середины отрезка)***  	**Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов:** $$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$ *Доказательство.*
Опорная задача ***(формула длины вектора с заданными координатами)***  	**Длина вектора $\vec{a}\ \{x;\ y\}$ вычисляется по формуле** $$\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$ *Доказательство.*
Опорная задача ***(формула расстояния между точками)***	**Расстояние между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле** $$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}.$$

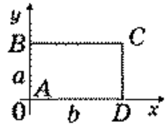
	Доказательство.
Типовая задача	*Даны точки $A(-4;-1)$, $B(1;4)$, $C(5;2)$, $D(0;-3)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.* *Решение.* *1-ый способ.* *Найдем координаты середин отрезков AC и BD.* *2-ой способ.* *Найдем длины сторон четырехугольника $ABCD$.*

3-ий способ.

Докажем, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Применение метода координат к решению задач

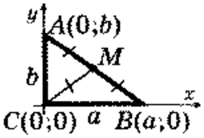
Решение геометрических задач методом координат



1. **Описание условия задачи языком координат.**
   Система координат обычно выбирается таким образом, чтобы большинство рассматриваемых точек имели нулевую или общую координату. Так, прямоугольник $ABCD$ лучше всего описать точками $A(0;0)$, $B(0;a)$, $C(b;a)$, $D(b;0)$.
2. **Преобразование алгебраических выражений, содержащих координаты точек.**
3. **Перевод полученных алгебраических результатов на язык геометрии.**

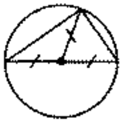
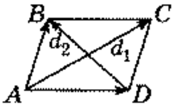
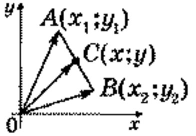
Замечание. Метод координат удобно применять в задачах на доказательство соотношений между линейными элементами фигур и в задачах на отыскание множеств точек, обладающих заданными свойствами.

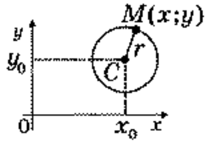
Опорная задача (*о свойстве середины гипотенузы прямоугольного треугольника*)

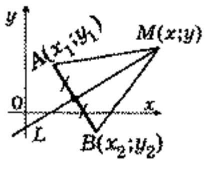


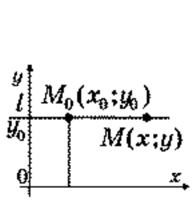
Середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин.

Доказательство.

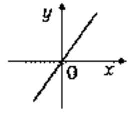
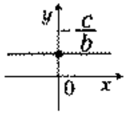
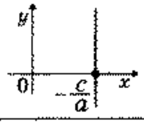
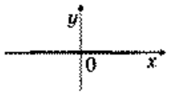
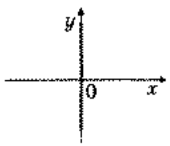
Следствие 	**Середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром окружности, описанной около этого треугольника.**
Опорная задача ***(о сумме квадратов диагоналей параллелограмма)***  	**Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:** $\mathbf{d_1^2 + d_2^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2).}$ *Доказательство.*
Полезная задача (формула длины медианы треугольника)	*Докажите, что в треугольнике со сторонами a, b, c медиана, проведенная к стороне a, вычисляется по формуле* $m_a = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$.
Полезная задача (о делении отрезка в заданном отношении)  	*Если точка $C(x;\ y)$ делит отрезок с концами $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ в отношении $AC : CB = m : n$, то координаты точки C вычисляются по формулам:* $x = \dfrac{n}{m+n}x_1 + \dfrac{m}{m+n}x_2,\ \ y = \dfrac{n}{m+n}y_1 + \dfrac{m}{m+n}y_2.$ *Докажите.* *Сформулируйте и докажите обратное утверждение.*

Полезная задача (о координатах точки пересечения медиан треугольника)	*Если $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ – вершины треугольника ABC, а $M(x;\ y)$ – точка пересечения его медиан, то* $$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$ *Докажите.*
Уравнения окружности и прямой	
Определение уравнения линии	**Уравнением линии** L в прямоугольной системе координат Oxy называется уравнение с двумя переменными x и y, если: 1) этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии L; 2) координаты любой точки, не принадлежащей линии L, не удовлетворяют этому уравнению.
Опорная задача ***(уравнение окружности)*** 	**В прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса r с центром $C(x_0;\ y_0)$ имеет вид** $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$ *Доказательство.* ***Замечание.*** Уравнение окружности может быть задано и в приведенном виде, полученном из исходного раскрытием скобок и приведением подобных слагаемых.
Следствие ***(уравнение окружности с центром в начале координат)***	**Если центром окружности радиуса r является начало координат, то уравнение окружности имеет вид** $$x^2 + y^2 = r^2.$$
Типовая задача	*Точки $A(3;-4)$ и $B(1;2)$ – концы диаметра окружности. Найдите уравнение окружности. Определите, пересекает ли эта окружность оси координат.*

	Решение.
Типовая задача	***Найдите центр и радиус окружности, заданной уравнением*** $$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0.$$ *Решение.* *Ответ:* $O(-1;2)$, $R = 3$.
<u>Опорная задача</u> ***(общий вид уравнения прямой)*** 	**В прямоугольной системе координат уравнение прямой является уравнением первой степени, то есть приводится к виду** $$ax + by + c = 0,$$ **где a, b, c – коэффициенты, причем хотя бы одно из чисел a и b не равно нулю.** *Доказательство.*

	
Следствие	**Если прямая не параллельна оси ординат (и не совпадает с ней), то ее уравнение можно записать в виде $y=kx+b$, где k и b – некоторые числа.** **Если прямая параллельна оси ординат (или совпадает с ней), ее уравнение можно записать в виде $x=x_0$, где x_0 – некоторое число.**

Частные случаи уравнения прямой

	Значения a, b, c	Вид уравнения	Расположение прямой
	$a\neq0,\ b\neq0,\ c=0$	$y=-\dfrac{a}{b}x$	Прямая проходит через начало координат и не совпадает с осями координат
	$a=0,\ b\neq0,\ c\neq0$	$y=-\dfrac{c}{b}$	Прямая параллельна оси Ox
	$a\neq0,\ b=0,\ c\neq0$	$x=-\dfrac{c}{a}$	Прямая параллельна оси Oy
	$a=0,\ b\neq0,\ c=0$	$y=0$	Прямая совпадает с осью Ox
	$a\neq0,\ b=0,\ c=0$	$x=0$	Прямая совпадает с осью Oy

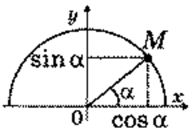
Типовая задача	***Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;3)$ и $B(1;-2)$. Найдите точки пересечения этой прямой с осями координат.*** ***Решение.*** *Ответ*: $5x - y - 7 = 0$; $(1,4;0)$, $(0;-7)$.

Дополнительные сведения и задачи по теме

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение тригонометрических функций

Определение синуса и косинуса



Для любого угла α ($0° \le \alpha \le 180°$):

синусом угла α называется ордината соответствующей точки единичной полуокружности:

$$\sin\alpha = y;$$

косинусом угла α называется абсцисса соответствующей точки единичиой полуокружности:

$$\cos\alpha = x.$$

В условиях этого определения

$$0 \le \sin\alpha \le 1, -1 \le \cos\alpha \le 1.$$

Определение тангенса и котангенса

Тангенсом угла α ($\alpha \ne 90°$) называется отиошение синуса этого угла к его косинусу (то есть ординаты соответствующей точки единичной полуокружности к ее абсциссе):

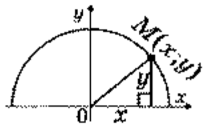
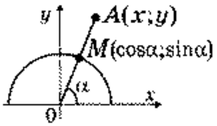
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}.$$

Котангенсом угла α ($\alpha \ne 0°$, $\alpha \ne 180°$) называется отношение косинуса этого угла к его синусу (то есть абсциссы соответствующей точки единиичной полуокружиости к ее ординате):

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{y}.$$

Таблица значений тригонометрических функций для углов 0°, 90°, 180°

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0°	0	1	0	—
90°	1	0	—	0
180°	0	−1	0	—

Основное тригонометрическое тождество  	**Для любого угла α ($0° \le \alpha \le 180°$)** $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$ *Доказательство.*
Следствия	**Для любого угла α ($0° \le \alpha \le 180°$, $\alpha \ne 90°$)** $$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$ **Для любого угла α ($0°<\alpha<180°$)** $$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$
Связь между тангенсом и котангенсом угла	**Для любого угла α ($0°<\alpha<180°$, $\alpha\ne90°$)** $$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1.$$
Формулы приведения	**Для любого угла α ($0° < \alpha < 90°$)** $$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha;$$ $$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha; \quad \mathrm{ctg}(90° - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha.$$ **Для любого угла α ($0° < \alpha < 180°$, $\alpha \ne 90°$)** $$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha; \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha;$$ $$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha; \quad \mathrm{ctg}(180° - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha.$$ ***Замечание.*** Эти формулы будут доказаны в курсе алгебры.
Опорная задача *(формулы для вычисления координат точки)*  	**Координаты точки $A(x; y)$ определяются по формулам** $$x = OA\cos\alpha;\ y = OA\sin\alpha.$$ *Доказательство.*

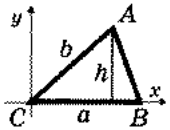
Типовая задача	*Найдите значения косинуса, тангенса и котангенса угла* α*, если* $\sin\alpha = 0{,}6$; $90° < \alpha < 180°$. *Решение.*
Типовая задача	*Заполните таблицу:*

	120°	135°	150°
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			
$\operatorname{tg}\alpha$			
$\operatorname{ctg}\alpha$			

Соотношения между стороиами и углами треугольиика

<table>
<tr>
<td>

<u>Теорема</u>
(*формула площади треугольника по двум сторонам и углу между ними*)



</td>
<td>

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними:

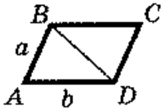
$$S = \frac{1}{2}ab\sin C,$$

где a, b – стороны треугольника, C – угол между ними.

Доказательство.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

<u>Следствие</u>
(*формула площади параллелограмма по двум сторонам и углу между ними*)



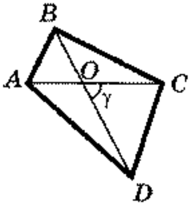
</td>
<td>

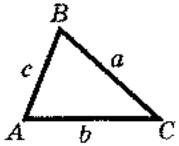
Площадь параллелограмма равна произведению двух его сторон на синус угла между ними:

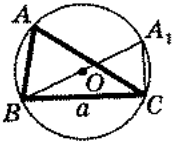
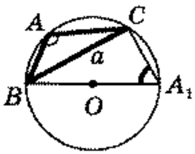
$$S = ab\sin A,$$

где a, b – стороны параллелограмма, A – угол между ними.

</td>
</tr>
</table>

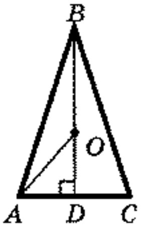
<u>**Теорема**</u> ***(формула площади четырехуголь-ника)***  	**Если диагонали четырехугольника пересекаются, то площадь четырехугольника равна полупроизведению диагоналей на синус угла между ними:** $$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\gamma .$$ *Доказательство.*
<u>**Следствия**</u> ***(формулы площадей ромба, дельтоида, прямоугольника, квадрата)***	**1. Для ромба и дельтоида ($\gamma = 90°$)** $$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 .$$ **2. Для прямоугольника ($d_1 = d_2 = d$)** $$S = \frac{1}{2} d^2 \sin\gamma .$$ **3. Для квадрата ($d_1 = d_2 = d$, $\gamma = 90°$)** $$S = \frac{d^2}{2} .$$

Типовая задача	*Найдите высоту ромба с диагоналями 30 см и 40 см.* *Решение.* *Ответ:* 24 см.
Теорема **(*синусов*)** 	**Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:** $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$ *Доказательство.*

<u>Опорная задача</u> ***(полная формулировка теоремы синусов)***  	$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$ **где R – радиус окружности, описанной около треугольника.** *Доказательство.*
Типовая задача	***Радиус окружности, описанной около треугольника, равен одной из его сторон. Найдите угол треугольника, противолежащий данной стороне. Сколько решений имеет задача?*** *Решение.*

	Ответ: 30° или 150°
Опорная задача ***(формула площади треугольника по сторонам и радиусу описанной окружности)***	**Площадь треугольника вычисляется по формуле** $$S = \frac{abc}{4R},$$ **где a, b, c – стороны треугольника, R – радиус описанной окружности.** *Доказательство.*
Следствие	**Радиус окружности, описанной около треугольника, вычисляется по формуле** $$R = \frac{abc}{4S},$$ **где a, b, c – стороны треугольника, S – его площадь.**

Типовая задача



Основание равнобедренного треугольника равно 48 см, а высота, проведенная к нему, – 32 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

Решение.

1-ый способ.

Пусть дан ΔABC, $AB=BC$, $AC=48$ *см*, $BD\perp AC$, $BD=32$ *см*. *Найдем радиус R окружности, описанной около треугольника.*

Так как ΔABC *– равнобедренный, то BD – высота и медиана* ΔABC. *Тогда из* ΔADB ($\angle D=90°$; $AD=\frac{1}{2}AC=24$ *см*) *по теореме Пифагора*

$$AB=\sqrt{24^2+32^2}=40\,(см).$$

По формуле радиуса описанной окружности

$$R=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S}=\frac{AB^2\cdot AC}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD}=\frac{AB^2}{2BD};$$

$$R=\frac{40^2}{2\cdot 32}=25\,(см).$$

2-ый способ.

Так как ΔABC *– равнобедренный, то BD – высота и медиана* ΔABC. *Пусть O – центр описанной окружности. Тогда O – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам* ΔABC, *т. е. O лежит на прямой BD. Т.к.* $AD=\frac{1}{2}AC=24см$, *то из* ΔABD ($\angle D=90°$) $\angle BAD>\angle ABD$, *т. е.* $\angle BAD>45°$ *и* ΔABC *– остроугольный, значит точка O лежит на отрезке BD. Тогда OA=OB=R, и из* ΔAOD ($\angle D=90°$) *по теореме Пифагора*

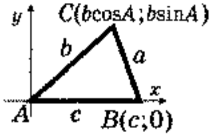
$$24^2+(32-R)^2=R^2,$$

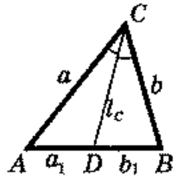
$$64R=1600,$$

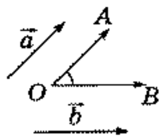
$$R=25(см).$$

Ответ: 25 *см*.

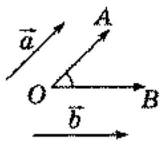
Замечание. Преимущество первого из предложенных способов состоит в том, что при использовании формулы $R=\frac{abc}{4S}$ не нужно определять положение центра описанной окружности.

Теорема ***(косинусов)*** 	**Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:** $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$ *Доказательство.* ***Замечание.*** При $\angle A = 90°$ из теоремы косинусов следует теорема Пифагора, поэтому теорему косинусов иногда называют *обобщенной теоремой Пифагора.*
Типовая задача	*Один из углов треугольника равен* 120°. *Стороны, прилежащие к этому углу, относятся как* 3:5, *а третья сторона равна* 14 *см. Найдите периметр треугольника.* *Решение.*

	Ответ: **44 см.**
<u>**Следствия**</u>	**1. В треугольнике со сторонами a, b, c косинус угла, противолежащего стороне a, вычисляется по формуле** $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a}{2bc}.$$ **2. Если в треугольнике со сторонами a, b, c $b^2 + c^2 > a^2$, то угол, противолежащий стороне a, – острый, если $b^2 + c^2 < a^2$ – тупой.**
<u>**Опорная задача**</u> ***(формула длины биссектрисы треугольника)***  	**Длина биссектрисы треугольника вычисляется по формуле:** $$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1},$$ **где l_c – биссектриса, проведенная к стороне c; a_1, b_1 – отрезки стороны c, на которые ее делит биссектриса l_c.** *Доказательство.*

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Полезная задача</td><td>Докажите, что если в треугольнике α – угол между сторонами b и c, то длина биссектрисы этого угла треугольника вычисляется по формуле
$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$</td></tr>
<tr><td>Полезные задачи</td><td>Докажите, что для четырехугольника $ABCD$ со сторонами a, b, c и d и полупериметром p
1) $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}}$;
2) $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, если данный четырехугольник вписан в окружность;
3) $S = \sqrt{abcd}$, если данный четырехугольник является вписанным и описанным.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решение треугольников</td></tr>
<tr><td>Решение треугольника</td><td>Решение треугольника состоит в нахождении его неизвестных сторон и углов по известным сторонам и углам.</td></tr>
<tr><td>Решение треугольников по стороне и двум углам
</td><td>Решите треугольник по стороне a и двум углам α и β.
Решение.</td></tr>
</table>

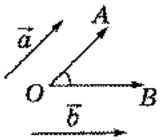
Решение треугольников по двум сторонам и углу между ними



Решите треугольник по двум сторонам a и b и углу γ между ними.

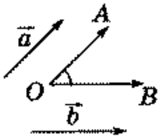
Решение.

Решение треугольников по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них



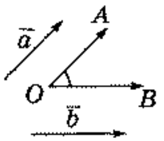
Решите треугольник по двум сторонам a и b и углу α, противолежащему стороне a.

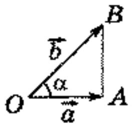
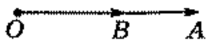
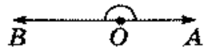
Решение.

Решение треугольников по трем стороиам 	**Решите треугольиик по трем сторонам a, b и c.** *Решение.*
Особенности вычислений при решении треугольников	При определении угла треугольника по зиачению синуса необходимо учитывать, что одному и тому же значению синуса соответствуют два угла – острый α и тупой $180° - \alpha$. В этом случае в зависимости от других числеиных данных задача может иметь одно или два решения или не иметь решений вообще. Чтобы избежать возможных ошибок, полезно при использовании теоремы синусов начииать нахождение неизвестных элементов треугольника с наименьшего угла (так как он обязательно острый) или наименьшей стороны.

Дополнительные сведения и задачи по теме

Скалярное произведение векторов

Определение угла между векторами 	**Углом между векторами** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ называется угол между векторами $\overline{OA} = \vec{a}$ и $\overline{OB} = \vec{b}$, имеющими общее начало. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, в частности, если один из них или оба вектора – нулевые, то угол между ними равен 0°. ***Обозначение.*** $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Определение перпендикулярных векторов	Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **перпендикулярными**, если $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^\circ$.
Определение скалярного произведения векторов	**Скалярным произведением** двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. ***Обозначение.*** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (или $\vec{a}\,\vec{b}$) – скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По определению, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right)$.
Опорная задача ***(о скалярном произведении перпендикулярных векторов)***	**Если векторы** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **перпендикулярны, то** $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, **и** обратно: **если** $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ **и векторы** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **ненулевые, то они перпендикулярны.** *Доказательство.* ***Замечание.*** Из определения скалярного произведения также следует, что если $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$, то $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ – острый, а если $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$, то $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ – тупой.

Определение скалярного квадрата	**Скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ называется скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$. ***Обозначение.*** $\vec{a}^{\,2}$ — скалярный квадрат вектора $\vec{a}$. Очевидно, что $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = \lvert \vec{a} \rvert^2$.
Теорема ***(формула скалярного произведения в координатах)***   	**Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,\{x_1;y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;y_2\}$ вычисляется по формуле** $$\vec{a}\,\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$ *Доказательство.*
Следствия	**1. Ненулевые векторы $\vec{a}\,\{x_1;y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.** **2. Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}\,\{x_1;y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;y_2\}$ вычисляется по формуле** $$\cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$
Опорная задача ***(свойства скалярного произведения векторов)***	**Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:** **1) $\vec{a}^{\,2} \geq 0$, причем $\vec{a}^{\,2} > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$;** **2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон);** **3) $(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$ (распределительный закон);** **4) $(k\vec{a})\,\vec{b} = k\,(\vec{a}\,\vec{b})$ (сочетательный закон).**

	Доказательство.
Типовые задачи	1) *Известно, что* $\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert=\lvert\vec{c}\rvert=1$, *а углы между любыми двумя из данных векторов равны* 60°. *Найдите* $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{c})$. *Ответ*: 4,5. 2) *Даны точки* $A(2;-2)$, $B(2;-3)$, $C(3;-2)$. *Найдите угол* ABC. *Ответ*: 45°.

	3) *Известно, что* $\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=1$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=60^\circ$. *Найдите* $\lvert\vec{a}+2\vec{b}\rvert$. *Ответ*: $2\sqrt{3}$.
Применение скалярного произведения векторов к решению задач	
Решение задач на нахождение длин отрезков и доказательство их равенства	**1. Выбрать два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с известными длинами и величиной угла между ними.** **2. Разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неизвестный вектор (векторы) данной задачи.** **3. Найти скалярный квадрат искомого вектора (векторов).**
Типовая задача	*Докажите с помощью векторов, что в четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями суммы квадратов длин противолежащих сторон равны.* *Решение.*

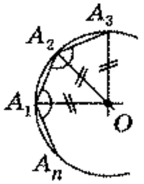
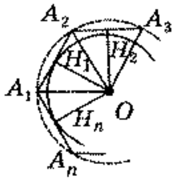
Решение задач на нахождение величины угла	**1. Выбрать векторы, образующие искомый угол.** **2. Разложить эти векторы по двум неколлинеарным векторам с известными длинами (или отношением длин) и углом между ними.** **3. По определению скалярного произведения найти косинус искомого угла.**
Типовая задача	*Найдите косинус тупого угла между медианами, проведенными к катетам равнобедренного прямоугольного треугольника.* *Решение.* *Ответ*: −0,8. ***Замечание.*** Подробнее о применении векторно-координатного метода см. приложение.

Дополнительные сведения и задачи по теме

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

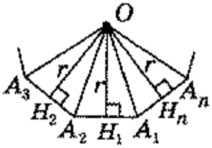
Правильный многоугольник

Определение правильного многоугольника 	**Правильным многоугольником** называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.
Опорная задача *(о величине угла правильного n-угольники)*	**Внутренний угол α_n правильного n-угольника имеет градусную меру, определяемую формулой** $$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°.$$ *Доказательство.*
Определение вписанных и описанных многоугольников	Многоугольник называется **вписанным в окружность**, если все его вершины лежат на некоторой окружности. Многоугольник называется **описанным около окружности**, если все его стороны касаются некоторой окружности.

<u>Теорема</u> ***(об описанной окружности правильного многоугольника)***  	**Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.** *Доказательство.*
<u>Теорема</u> ***(о вписанной окружности правильного многоугольника)***  	**В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.** *Доказательство.*
<u>Следствия</u>	**1. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.** **2. В правильном многоугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают и находятся в точке, называемой центром правильного многоугольника.**

Формулы для вычисления площади, стороны, радиусов вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника

<u>Опорная задача</u>
(формула площади правильного многоугольника)



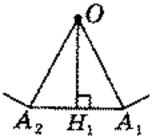
Площадь правильного многоугольника вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}Pr,$$

где P – периметр многоугольника, r – радиус вписанной окружности.

Доказательство.

<u>Опорная задача</u>
(формулы стороны и радиуса вписанной окружности правильного многоугольника)



Для правильного n-угольника со стороной a_n, радиусом описанной окружности R и радиусом вписанной окружности r справедливы формулы:

$$a_n = 2R \sin\frac{180^\circ}{n}, \quad r = R \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Доказательство.

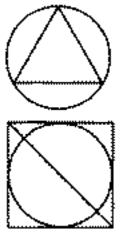
Следствия	**1. Для правильного n-угольника** $$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}.$$ **2. Площадь правильного n-угольника вычисляется по формулам:** $$S = \frac{na_n^2}{4\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}},\ S = nr^2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n},\ S = nR^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Зависимость между стороиой *a*, площадью *S*, радиусом описанной окружности *R* и радиусом вписаииой окружности *r* для иекоторых правильных многоугольииков

Вид правильного многоугольника	r через a	R через a	a через r	a через R	S через a	S через r	S через R
Правильный треугольник							
Квадрат							
Правильный шестиугольник							

Типовая задача

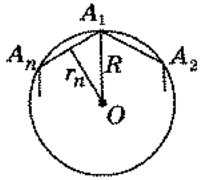
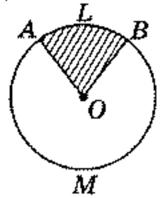
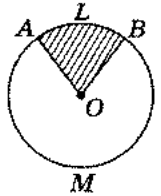
Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен $12\sqrt{3}$ см. Найдите диагональ квадрата, описанного около данной окружности.

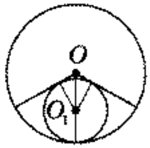


Решение.

Замечание. При выборе формул для решения задач такого типа условие задачи необходимо переформулировать «на языке окружностей»: если многоугольник вписан, то окружность описана, и наоборот.

Полезные задачи	1. *Докажите, что если в треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают, то этот треугольник – правильный.* 2. *Докажите, что если $A_1, A_2, ..., A_n$ – вершины правильного n-угольника, а точка O – его центр, то* $\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + ... + \overline{OA_n} = \bar{0}$.
Длина окружности и площадь круга	
Опорная задача (*о длине окружности*)	**Отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей.** *Доказательство.* ***Обозначение.*** Отношение длины окружности к ее диаметру обозначается греческой буквой π (пи): $\pi \approx 3,141592...$
Правило запоминания числа π	**"Это я знаю и помню прекрасно"** (количество букв в каждом слове этой фразы равно соответствующей цифре в записи числа π). При решении задач π обычно округляют до сотых: $\pi \approx 3,14$.
Следствия	1. **Длина C окружности радиуса R вычисляется по формуле** $C = 2\pi R$. 2. **Длина дуги l_α с градусной мерой α для окружности радиуса R вычисляется по формуле** $l_\alpha = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$.

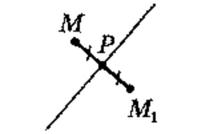
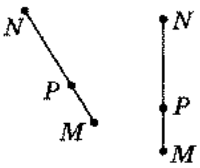
Опорная задача ***(формула площади круга)*** 	**Площадь круга радиуса R вычисляется по формуле** $$S = \pi R^2.$$ *Доказательство.*
Следствие	**Площадь круга с диаметром d вычисляется по формуле** $$S = \frac{\pi d^2}{4}.$$
Определение кругового сектора 	**Круговым сектором** (или просто **сектором**) называется часть круга, ограниченная дугой (**дугой сектора**) и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. ALB – дуга меньшего сектора, AMB – дуга большего сектора.
Опорная задача ***(формула площади сектора)*** 	**Площадь сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α, вычисляется по формуле** $$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha.$$ *Доказательство.*

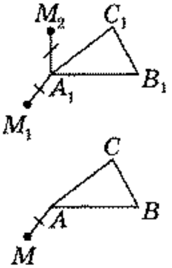
Типовая задача  	*Площадь кругового сектора равна* 6π *см*^{2}, *а длина дуги – * 2π *см. Найдите длину окружности, вписанной в сектор.* *Решение.* *Ответ:* 4π см.

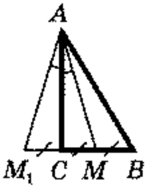
Дополнительные сведения и задачи по теме

ДВИЖЕНИЯ

Понятие движения

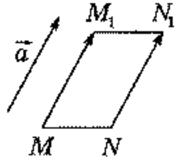
Определение отображения плоскости на себя  	**Отображением плоскости на себя** называется такое соответствие между точками плоскости, при котором каждой точке сопоставляется некоторая точка той же плоскости, причем любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке.
Определение движения плоскости 	**Движением плоскости** (или **перемещением**) называется отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние между точками. Это означает, что если при движении любые две точки M и N отображаются на точки M_1 и N_1 соответственно, то $MN = M_1N_1$.
Теорема ***(об отображении отрезков при движении)*** 	**При движении отрезок отображается на отрезок.** *Доказательство.*

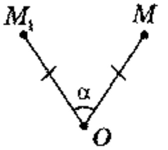
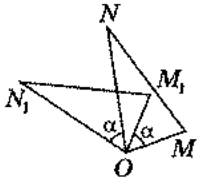
Следствие	**При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.**
Свойства движения	**1. При движении точки, лежащие на прямой, отображаются на точки, лежащие на прямой, причем порядок их взаимного расположения сохраняется.** **2. Движение отображает прямую на прямую, луч – на луч, угол – на равный ему угол.** **3. Два движения, выполненные последовательно, дают движение.**
Теорема ***(о связи движения и наложения)***  	**Любое наложение является движением, и любое движение является наложением.** *Доказательство.*

Следствие	**При движении любая фигура отображается на равную ей фигуру.**
Типовая задача 	*В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к меньшему катету, равна 8 см и образует с большим катетом угол 15°. Найдите площадь треугольника.* *Решение.* *Пусть дан ΔABC ($\angle C=90°$, $AC>BC$), AM = 8 см – медиана, $\angle CAM=15°$.* *Отобразим ΔAMC симметрично относительно прямой АС.* *Ответ*: 16 см².

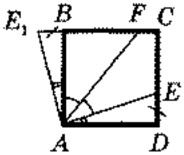
Параллельный перенос и поворот

Определение параллельного переноса 	**Параллельным переносом** на вектор $\vec{a}$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается на точку M_1 такую, что $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$.

<u>Опорная задача</u> ***(основное свойство параллельного переноса)*** 	**Параллельный перенос является движением.** *Доказательство.*
Типовая задача	*При параллельном переносе равносторонний треугольник ABC отображается на треугольник $A_1B_1C_1$, причем точки A_1 и B совпадают. Определите вид четырехугольника AB_1C_1C.* *Решение.*

Определение поворота 	**Поворотом** плоскости вокруг точки O (**центра поворота**) на угол α (**угол поворота**) называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается на точку M_1 такую, что $OM_1 = OM$ и $\angle M_1OM = \alpha$. ***Замечания.*** 1) Направление поворота (по часовой стрелке или против часовой стрелки) обычно указывается. 2) При повороте с центром O любая точка M движется по дуге окружности с центром O и радиусом OM.
Опорная задача (***основное свойство поворота***) 	**Поворот является движением.** *Доказательство.*
Типовая задача	*Постройте фигуру, в которую перейдет квадрат при повороте на 45° против часовой стрелки относительно точки пересечения его диагоналей.* *Решение.*

Типовая задача



На стороне CD квадрата ABCD отмечена точка E. Биссектриса угла BAE пересекает сторону BC в точке F. Докажите, что $AE=DE+BF$.

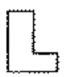
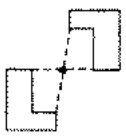
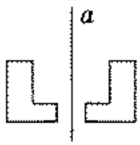
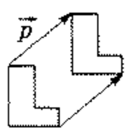
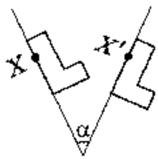
Решение.

Выполним поворот плоскости вокруг точки A на 90° против часовой стрелки. При этом точка D отоброзится на точку B, а E – на E_1, причем $DE = BE_1$ (по свойству поворота). Тогда $E_1F = E_1B+BF = DE+BF$.

$\angle E_1AB = \angle EAD$ (по свойству поворота), тогда, поскольку $\angle BAF = \angle FAE$, то, складывая эти равенства почленно, получим $\angle E_1AF = \angle FAD$.

Но $\angle FAD=\angle BFA$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AF. Тогда $\angle E_1AF = \angle E_1FA$, то есть ΔE_1AF – равнобедренный с основанием AF. Значит, $AE = AE_1 = E_1F = DE+BF$.

Виды движеиий

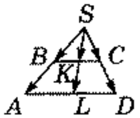
Данная фигура	Центральная симметрия	Осевая симметрия	Параллельный перенос	Поворот
				

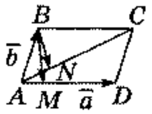
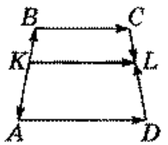
Дополнительные сведения и задачи по теме

ПРИЛОЖЕНИЕ

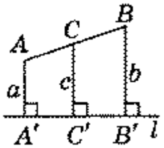
Векторно-координатный метод и его применение

Выражение геометрических свойств языком векторов	**Языком геометрии**	**Языком векторов**
	Точки A и B совпадают	$\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ или $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$
	$AB \parallel CD$	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и прямые AB и CD не совпадают
	Точка C принадлежит прямой AB	$\overrightarrow{CA} = \lambda\overrightarrow{CB}$ или $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$
	Точка C лежит на отрезке AB и делит его в отношении $AC{:}CB = m{:}n$	$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ или $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$
	$AB = CD$	$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{CD}^2$
	$AB \perp CD$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
	$\angle AOB = \varphi$	$\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\lvert\overrightarrow{OA}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{OB}\rvert}$
Полезная задача	***Докажите утверждения, приведенные в таблице.***	
Векторный метод решения задач	Для решения геометрических задач при помощи векторов необходимо: 1. Переформулировать задачу на языке векторов и составить векторные равенства. Часто для этого раскладывают все используемые векторы по двум неколлинеарным векторам. 2. Преобразовать эти равенства, пользуясь известными свойствами векторов. 3. Используя полученные результаты, найти или доказать требуемое в задаче.	
Использование коллинеарности векторов для доказательства принадлежности трех точек одной прямой	При решении задач векторным методом часто используется такой прием. Доказывают, что два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ с общим началом коллинеарны. Тогда точки A, B и C лежат на одной прямой.	

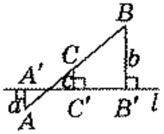
Опорная задача (***о продолжении боковых сторон трапеции***)  	**Точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции и середины ее оснований лежат на одной прямой.** *Доказательство.* Пусть L и K – середины оснований AD и BC данной трапеции $ABCD$ ($AD>BC$), S – точка пересечения прямых AB и CD. Тогда $\overline{SL}=\frac{\overline{SA}+\overline{SD}}{2}$; $\overline{SK}=\frac{\overline{SB}+\overline{SC}}{2}$. Т.к. $AD \parallel BC$, то по обобщенной теореме Фалеса $\frac{SB}{SA}=\frac{SC}{SD}=\lambda$. Откуда $SB=\lambda SA$, $SC=\lambda SD$, $\overline{SB}=\lambda\overline{SA}$, $\overline{SC}=\lambda\overline{SD}$, $\overline{SK}=\lambda\overline{SL}$. Поэтому точки S, K, L лежат на одной прямой.
Типовая задача	*Основания трапеции равны 20 см и 30 см, а углы при большем основании равны 75° и 15°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.* *Решение.* *Ответ*: 5 см.

Типовая задача 	*В параллелограмме ABCD точка M делит сторону AD в отношении 1:5, а точка N делит диагональ AC в отношении 1:6, считая от точки A. Докажите, что точки B, N, M лежат на одной прямой.* *Решение.*
Использование коллинеарности векторов для доказательства параллельности отрезков и вычисления их длин	Если векторы, не лежащие на одной прямой, коллинеарны, то изображающие их отрезки параллельны. Если вектор $\vec{c}$ равен сумме двух коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то он коллинеарен им, причем если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не лежат на одной прямой, то отрезок, изображающий вектор $\vec{c}$, параллелен отрезкам, изображающим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. При этом, если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert+\lvert\vec{b}\rvert$; а если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, то $\lvert\vec{c}\rvert=\big\lvert\lvert\vec{a}\rvert-\lvert\vec{b}\rvert\big\rvert$.
Опорная задача ***(об отрезке, делящем боковые стороны трапеции в данном отношении)*** 	**Пусть точки K и L лежат на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, причем $\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{DL}{CL}=\dfrac{m}{n}$. Тогда $KL \parallel AD \parallel BC$, $KL=\dfrac{nAD+mBC}{m+n}$.** *Доказательство.*

Полезная задача



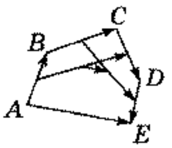
$$c = \frac{a+b}{2}$$



$$c = \frac{|b-a|}{2}$$

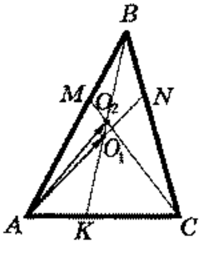
Точки A и B удалены от некоторой прямой l на расстояния a и b соответственно. Докажите, что расстояние от точки C – середины отрезка AB – до этой прямой равно их полусумме, если точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно l, или модулю их полуразности, если A и B лежат в разных полуплоскостях.

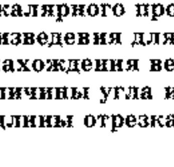
Типовая задача



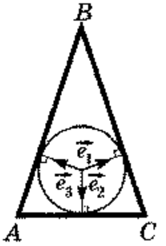
Середины сторон AB и CD, BC и DE выпуклого пятиугольника ABCDE соединены отрезками. Середины полученных отрезков снова соединены. Докажите, что последний отрезок параллелен отрезку AE и равен его четверти.

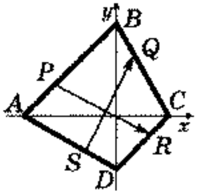
Решение.

Использование теоремы о существовании единственного разложения вектора по двум неколлинеарным векторам	**Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные, отличные от нуля векторы. Тогда любой вектор $\vec{c}$ можно единственным образом представить в виде $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, где λ и μ – некоторые числа.** ***Замечание.*** Таким образом, если $\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b}$, и $\vec{c} = \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b}$, то $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\mu_1 = \mu_2$. Для решения задач эту теорему используют следующим образом. Некоторый вектор, используя условие задачи, двумя способами раскладывают по двум неколлинеарным векторам, а затем приравнивают соответствующие коэффициенты разложения.
Типовая задача  	*Точки M, N, K лежат на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC соответственно, причем: $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{1}$, $\frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$, $\frac{AK}{KC} = \frac{2}{3}$. Докажите, что прямые AN, BK, CM пересекаются в одной точке.* *Решение.* *Пусть O_1 – точка пересечения прямых AN и BK, O_2 – точка пересечения прямых CM и BK. Докажем, что* $\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{AO_2}$.

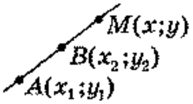
Полезная задача (теорема Чевы) 	*Точки M, N, K лежат на сторонах AB, BC, AC треугольника ΔABC соответственно. Докажите, что прямые AN, BK, CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AM\cdot BN\cdot CK=BM\cdot CN\cdot AK$.*
Использование скалярного произведения для нахождения величины угла и длины отрезка	В задачах, в которых требуется найти угол геометрической фигуры, линейные размеры которой не заданы, часто используют формулу $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$. Эту формулу также используют при нахождении длины отрезка, вычисляя корень из скалярного квадрата соответствующего вектора.

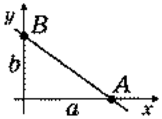
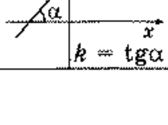
Типовая задача 	***Найдите косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к его боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.*** *Решение.* ***Указание***: разложите векторы $\overline{AL}$ и $\overline{CK}$ по векторам $\vec{a} = \overline{BK}$, $\vec{b} = \overline{BL}$. *Ответ*: 0,8.
Типовая задача 	***Найдите длину медианы AM треугольника ABC, если AB=10 см, AC=6 см, ∠BAC=60°.*** *Решение.* *Ответ*: 7 см.
Использованне скалярного произведения для доказательства неравенств	При доказательстве неравенств, связанных с углами, часто используют такой прием. Для некоторого вектора записывают формулу $\vec{a}^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2$, и пользуются тем, что квадрат любого вектора – неотрицательное число, а также свойствами скалярного произведения.

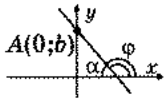
Типовая задача  $\lvert\vec{e}_1\rvert = \lvert\vec{e}_2\rvert = \lvert\vec{e}_3\rvert = 1$	*Докажите, что для углов любого треугольника ABC выполняется неравенство* $\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \le \frac{3}{2}$. *Решение.* $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 = \lvert\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\rvert^2 \ge 0$; $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 =$
Полезная задача	*Докажите, что для углов любого треугольника ABC выполняется неравенство* $\cos 2\angle A + \cos 2\angle B + \cos 2\angle C \ge -\frac{3}{2}$.
Полезная задача (неравенство Коши-Буняковского)	*Для любых чисел* a_1, a_2, b_1, b_2 *верно неравенство* $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2)$, *причем равенство достигается только если* $a_1b_2 = a_2b_1$.
Полезная задача (о векторе нормали)	*Докажите, что вектор* $\vec{n}(a;b)$ *перпендикулярен прямой* l: $ax + by + c = 0$ *(такой вектор называют вектором нормали к данной прямой).*

Полезная задача (о вычислении угла между прямыми)	*Пусть даны прямые* $l_1 : a_1x+b_1y+c_1=0$ *и* $l_2 : a_2x+b_2y+c_2=0$. *Тогда угол между ними определяется из формулы:* $\cos\angle(l_1,l_2)=\dfrac{\lvert a_1a_2+b_1b_2\rvert}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$.
Типовая задача 	*Диагонали четырехугольника ABCD перпендикулярны и равны. На сторонах AB, BC, CD, AD даны точки P, Q, R, S соответственно, так, что AP:PB = BQ:QC = CR:RD = DS:SA. Докажите перпендикулярность и равенство отрезков PR и QS.* *Решение.*

Другие виды уравнения прямой

<u>Опорная задача</u> ***(уравнение прямой, проходящей через две данные точки)*** 	**Уравнение прямой, проходящей через точки** $A(x_1;y_1)$ **и** $B(x_2;y_2)$, **имеет вид** $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$ **При этом, если** $x_1=x_2$, **то уравнение имеет вид** $x=x_1$, **а если** $y_1=y_2$, **то уравнение имеет вид** $y=y_1$. *Доказательство.*

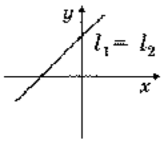
<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td><u>Следствие</u>
(уравнение прямой в отрезках)

</td><td>Уравнение прямой, пересекающей оси координат в точках $A(a;0)$ и $B(0;b)$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, имеет вид
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$</td></tr>
<tr><td>Полезная задача</td><td>Докажите, что в уравнении прямой $y=kx+b$ $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, где $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ – координаты двух точек, принадлежащих данной прямой.</td></tr>
<tr><td><u>Опорная задача</u>
(свойства параметров в уравнении наклонной прямой)

</td><td>Пусть прямая l задана уравнением $y=kx+b$. Тогда:
1) она пересекает ось ординат в точке $A(0;b)$;
2) угловой коэффициент k в уравнении прямой с точностью до знака равен тангенсу острого угла, образованного прямой l и осью Ox.
Доказательство.</td></tr>
</table>

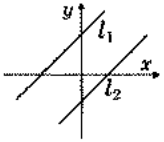
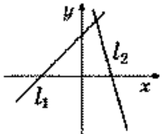
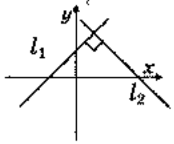
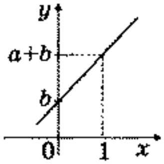
 $k = -\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\varphi$	
Следствие ***(необходимое и достаточное условие параллельности наклонных прямых)***	**Прямые l_1: $y=k_1x+b_1$ и l_2: $y=k_2x+b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1=k_2$ и $b_1 \neq b_2$.**

<table>
<tr>
<td>Типовая задача</td>
<td>Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2)$ и параллельной прямой BC, где $B(2;0)$, $C(4;6)$.

Решение.

Ответ: $3x-y-1=0$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Полезная задача (необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых)</td>
<td>1) Прямые, заданные уравнениями $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$, перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a_1a_2+b_1b_2=0$.
2) Прямые, заданные уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2=-1$.
Докажите.</td>
</tr>
<tr>
<td>Взаимное расположение двух прямых на плоскости


</td>
<td>Взаимное расположение на плоскости двух невертикальных прямых $l_1 : y = k_1x + b_1$ и $l_2 : y = k_2x + b_2$ зависит от параметров k_1, k_2, b_1, b_2 таким образом:
<table>
<tr><th>Соотношения параметров</th><th>Взаимное расположение прямых l_1 и l_2</th></tr>
<tr><td>$k_1=k_2$, $b_1=b_2$</td><td>Прямые совпадают</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

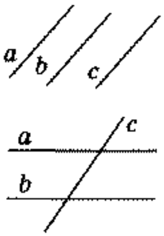
<table>
<tr><td></td><td>$k_1=k_2,\ b_1\neq b_2$</td><td>Прямые параллельны</td></tr>
<tr><td></td><td>$k_1\neq k_2$</td><td>Прямые пересекаются</td></tr>
<tr><td></td><td>$k_1k_2=-1$</td><td>Прямые перпендикулярны</td></tr>
<tr><td><u>Опорная задача</u> (о графике линейной функции)
</td><td colspan="2">Графиком линейной функции $y=ax+b$ является прямая.
Доказательство.</td></tr>
<tr><td><u>Следствие</u>
(о графике линейного уравнения)</td><td colspan="2">Графиком линейного уравнения вида $ax+by+c=0$, где a и b не обращаются одновременно в нуль, является прямая.</td></tr>
</table>

Полезная задача	*Докажите, что расстояние от точки* $A(x_0;y_0)$ *до прямой* $ax+by+c=0$ *вычисляется по формуле* $$d=\left\|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\|.$$
Типовая задача	*Найдите точку пересечения прямых* $2x-y+1=0$ *и* $x+2y-7=0$. *Решение.* *Ответ*: (1;3).

Дополнительные сведения и задачи по теме

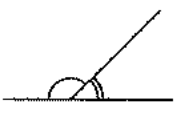
ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ 7–9 КЛАССОВ
(для самостоятельного заполнения)

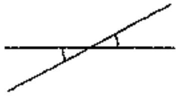
Параллельные прямые



Теорема Фалеса

Смежные и вертикальные углы



	
Произвольный треугольник	
 **Свойства углов и сторон**	
Теорема косинусов	
Теорема синусов	

Вписанная и описанная окружности	
Медианы	
Биссектрисы	

Высоты	
Средние линии	
Площадь	

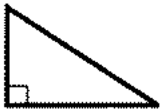
Равнобедренный треугольник

Свойства и признаки

Равносторонний треугольник

Свойства и признаки

Площадь

Прямоугольный треугольник	
 **Теорема Пифагора**	
Метрические соотношения	
Тригонометрические функции	
Площадь	

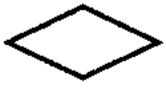
Вписанная и описанная окружности	
Признаки равенства треугольников	
Признаки равенства для произвольных треугольников	

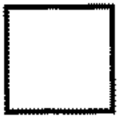
Признаки равенства для прямоугольных треугольников	

Признаки подобия треугольников

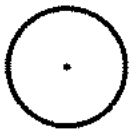
Признаки подобия	

Элементы подобных фигур	
Четырехугольники	
 **Свойства и признаки**	**Произвольный параллелограмм**
Свойства диагоналей	

Площадь	
 **Свойства и признаки**	**Прямоугольник**
Площадь	
 **Свойства и признаки**	**Ромб**

Площадь	
 **Свойства и признаки**	**Квадрат**
Площадь	
 **Свойства**	**Трапеция**

Средняя линия	
Площадь	
Частные случаи трапеции	
Многоугольники	
Выпуклые многоугольники	

Правильные многоугольники	
Окружность и круг	
 **Углы, связанные с окружностью**	
Метрические соотношения, связанные с окружностью	

Длина окружности и дуги	
Площадь круга и его частей	

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ершова Алла Петровна
Голобородько Вадим Владимирович
Крижановский Александр Феликсович

Тетрадь-конспект по геометрии для 9 класса

Оформление обложки *А.А. Андреев*
Ответственный за выпуск *К.П. Бондаренко*
Компьютерная верстка *С.И. Удалов*

Подписано в печать 26.07.2012. Формат 70×90/16.

Усл.-печ. л. 7,02. Тираж 3000 экз. Заказ № 2380.

ООО «Илекса», 107023, г. Москва, ул. Буженинова, д. 30, стр. 4,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
телефон: 8(495) 964-35-67

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных издательством материалов в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».
170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.