SINTEZE LYCEUM

CĂTĂLIN-PETRU NICOLESCU

TESTE DE GEOMETRIE

PROBLEME DE MATEMATICĂ

★★

EDITURA ALBATROS

SINTEZE LYCEUM

CĂTĂLIN-PETRU NICOLESCU

TESTE DE GEOMETRIE

PROBLEME DE MATEMATICĂ

★ ★

Cuvînt înainte de
prof. dr. doc. CONSTANTIN DRÂMBĂ
Membru corespondent al Academiei R.S. România

EDITURA ALBATROS • BUCUREȘTI, 1986

Referenți:

Prof. univ. dr. doc. CONSTANTIN DRÂMBĂ
Prof. univ. dr. CONSTANTIN POPOVICI

Desene: pictor NADEJDA LUMINIȚA NICOLESCU

Lucrarea avizată de Institutul Central de Matematică

CUVÎNT ÎNAINTE

Profesorul Cătălin-Petru Nicolescu publică volumul „Teste de geometrie" conținînd 552 probleme din domeniul geometriei sintetice și analitice, reprezentînd partea a II-a a unei lucrări mai cuprinzătoare, „Probleme de matematică în liceu", din care culegerea precedentă, „Teste de analiză matematică", apărută în Editura Albatros, în anul 1984, conține aproximativ 700 probleme și se bucură de o frumoasă apreciere din partea profesorilor și elevilor.

Scopul lucrării actuale este de a ușura elevilor înțelegerea și rezolvarea problemelor din următoarele categorii: locuri geometrice, puncte coliniare, puncte fixe, concurențe de drepte și cercuri, toate acestea pe baza unei scheme unitare.

Această metodă propusă de autor constă în alcătuirea unui tabel (o schemă) care conține trei categorii de elemente: fixe, mobile, constante și se face analiza fiecărei probleme așa cum se arată în partea teoretică a Culegerii.

Tabla de materii cuprinde un bogat material de geometrie sintetică și analitică, alcătuit conform programei în vigoare și redactat pentru sprijinirea elevilor care doresc să-și completeze pregătirea în domeniul geometriei.

Menționez că o parte din probleme au fost rezolvate prin ambele metode, sintetică și analitică, fapt care arată specificul și utilitatea fiecărui procedeu în parte.

În această Culegere, autorul a introdus un număr mare de probleme originale, care vor ajuta pe elevi să aprofundeze cunoștințele de geometrie sintetică, respectiv analitică. De asemenea, se găsesc probleme care au fost date la examenele de admitere în învățămîntul superior.

Autorul, Cătălin-Petru Nicolescu, a întocmit această lucrare pentru elevii care se prezintă la examenul pentru treapta a doua, pentru participanții la olimpiadele de matematică, precum și pentru concursurile de admitere în universități și institute tehnice.

Prof. dr. doc. CONSTANTIN DRÂMBĂ
membru corespondent al Academiei R.S. România

București 18 aprilie 1985

GEOMETRIE SINTETICĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU

CAPITOLUL I

PUNCT FIX. PUNCTE COLINIARE. DREPTE CONCURENTE. DIRECȚIE FIXĂ. PUNCTE CONCICLICE

EXERCIȚII PROPUSE

1. Se dă un unghi drept xOy și un triunghi isoscel variabil MON $(MO \equiv MN)$ situat în acest unghi, cu vîrful O fix și baza ON situată pe Ox, iar raza cercului înscris în triunghi are o valoare constantă r. Să se demonstreze că bisectoarea unghiului OMN trece printr-un punct fix situat pe Oy și că dreapta (MN) este tangentă unui cerc fix.

2. Să se arate că dacă laturile AB și AD ale unui paralelogram invariabil trec prin două puncte fixe P, Q, atunci diagonala AC trece și ea printr-un punct fix.

3. Fie A un punct fix aparținînd laturii Ox a unghiului xOy. Se duce un cerc oarecare (C) tangent la Ox și Oy. Fie D punctul de contact cu Oy. Din punctul A se duce la acest cerc a doua tangentă care îl intersectează în E. Să se arate că oricare ar fi cercul (C) dreapta (DE) trece printr-un punct fix.

4. Se dă unghiul drept xOy. Pe latura Oy se iau punctele fixe A, B, iar pe Ox se ia un punct M variabil. Fie P, Q proiecțiile vîrfului O pe dreptele (MA) și (MB). Să se arate că dreapta (PQ) trece printr-un punct fix.

5. Fiind dat un triunghi ABC, se consideră în planul său un punct mobil P, astfel încît perpendicularele în punctele A, B, C la dreptele (AP), (BP) și (CP) să fie concurente în punctul M. Să se demonstreze că dreapta (PM) trece printr-un punct fix.

6. Fiind dat un triunghi ABC, cu B' și C' mijloacele laturilor AC și AB. Se construiește de la B' spre C, $B'D \equiv AC'$.

Să se arate că perpendiculara coborîtă din punctul D pe bisectoarea interioară unghiului A, trece printr-un punct fix.

7. Se dă un triunghi ABC. Pe latura BC se ia punctul D astfel încît $CD = \frac{1}{3} BC$. Să se arate că dreapta (AD) trece printr-un punct fix.

8. Fiind dat un triunghi ABM se iau de la M spre A și B măsurile $MC = p \cdot MA$, $MD = q \cdot MB$, unde p, q sînt două numere reale date. Să se arate că dreapta care unește punctul M cu mijlocul segmentului CD intersectează dreapta (AB) într-un punct fix, oricare ar fi poziția punctului M în raport cu punctele A și B.

9. Se dă unghiul XOY pe ale cărui laturi se iau lungimile OA și OB astfel încît $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{K}$. Să se arate că dreapta (AB) trece printr-un punct fix.

10. Se dau trei puncte A, B, C coliniare și un cerc de centru O și rază R. Notînd cu ρ_a, ρ_b și ρ_c puterile punctelor A, B, C față de cerc și presupunînd că punctul B este între A și C, să se demonstreze relația:

$$\rho_a \cdot BC - \rho_b AC + \rho_c AB = AB \cdot BC \cdot AC$$

relație care exprimă o generalizare a teoremei lui Stewart.

11. În două cercuri de centre O, O', raze R, R' și tangente în punctul A se duc două coarde perpendiculare AB și AC ($B \in \mathcal{C}(O, R)$, $C \in \mathcal{C}(O', R')$). Să se arate că dreapta (BC) trece printr-un punct fix.

12. Se dă triunghiul ABC. Fie B', B'' proiecțiile vîrfului B pe bisectoarea interioară și pe bisectoarea exterioară a unghiului A, iar C' și C'' proiecțiile vîrfului C pe aceleași bisectoare. Să se demonstreze că dreptele (BC') și (CB') se intersectează pe bisectoarea exterioară a unghiului A, iar dreptele (BC''), (CB'') se intersectează pe bisectoarea interioară a aceluiași unghi.

13. Se dă triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) = 2\, m(\hat{B})$, în care se duce mediana AM și înălțimea CC'. Dreapta (MC') intersectează latura AC în punctul D. Să se arate că cercul circumscris triunghiului ABD trece printr-un punct fix cînd vîrful A se deplasează, unghiul A rămînînd constant iar cercul considerat este ortogonal unui cerc fix.

14. Se dă un segment AB și un punct fix C situat pe el. Se construiește un cerc de centru O și rază R, ce trece prin punctele A, B și un cerc concentric cu acesta, ce trece prin C. Fie MN o coardă oarecare în cercul de centru O tangentă cercului concentric. Să se demonstreze că atunci cînd centrul O, comun celor două cercuri este variabil, atunci coarda MN are o mărime constantă.

Reciproc: prin punctele fixe A, B se duce un cerc de centru O variabil, pe care se ia o coardă MN de lungime constantă. Să se demonstreze că cercul concentric cercului inițial, tangent coardei MN, intersectează segmentul AB în două puncte fixe.

15. Se dă trapezul $ABCD$ înscris într-un cerc al cărui centru este fix, avînd însă raza variabilă. Dacă M este intersecția diagonalelor AC și BD, să se arate că axa radicală a cercurilor circumscrise triunghiurilor MAD și MBC trece printr-un punct fix.

16. O dreaptă (Δ) intersectează laturile AB, AC ale unui triunghi ABC în punctele C', B'. Fie D proiecția punctului A pe (Δ) și E intersecția dreptelor (BB') și (CC'). Să se demonstreze că dacă (Δ), B, C rămîn fixe, atunci dreapta (DE) trece printr-un punct fix, oricare ar fi punctul A în plan.

17. Printr-un punct fix M se duc secantele (MAB) și (NCD) la un cerc dat (O). Să se arate că dreapta care unește centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor MAD și MCB trece printr-un punct fix, cînd secantele duse din M sînt variabile.

18. În triunghiul ABC se duc perpendicularele AD și AE, pe bisectoarele unghiului B și AF și AG pe bisectoarele unghiului C. Să se arate că punctele D, E, F, G sînt coliniare.

19. Fie un triunghi oarecare ABC, B', C' două puncte arbitrare considerate pe laturile CA, AB iar A_1 mijlocul segmentului BC.

Paralela dusă prin A la BC intersectează dreapta $(B'C')$ în M; dreptele (A_1C'), (A_1B') intersectează pe CA, AB

în punctele N, P. Să se demonstreze că punctele M, N, P, sînt coliniare.

20. Trei antiparalele congruente înscrise în unghiurile unui triunghi, intersectează laturile opuse în trei puncte coliniare.

21. Fie ABC un triunghi oarecare și (AE), (AF) două drepte izogonale. Se proiectează vîrful A al triunghiului pe una din izogonale, de exemplu pe (AE), în B_1; fie apoi D_1, proiecția piciorului F al celeilalte izogonale pe AC, iar A_1 proiecția lui A pe BC. Să se arate că punctele A_1, B_1, D_1 sînt coliniare.

Reamintesc: se numesc drepte izogonale, două drepte care trec prin vîrful unui unghi și formează unghiuri congruente cu laturile unghiului, fiind simetrice față de bisectoarea unghiului. Izogonala medianei unui triunghi se numește simediană și cele trei simediane ale unui triunghi sînt concurente într-un punct numit punctul izogonal centrului de greutate al triunghiului sau punctul lui Lemoine.

22. Să se demonstreze că diametrele AOC și $AO'D$ a două cercuri (O), (O') care se intersectează în A și B întîlnesc aceste cercuri în C și D, care sînt puncte coliniare cu B.

23. Să se demonstreze că paralelele duse din centrul I al cercului înscris unui triunghi ABC la dreptele (MA_1), (MB_1), (MC_1) care unesc un punct M al cercului circumscris cu punctele A_1, B_1, C_1 unde bisectoarele interioare sau exterioare intersectează cercul circumscris, întîlnesc laturile triunghiului în trei puncte coliniare.

24. Să se demonstreze că dacă se prelungesc laturile opuse ale unui patrulater inscriptibil $ABCD$ și se duc bisectoarele celor două unghiuri astfel formate, punctul de intersecție al acestor două drepte și mijloacele diagonalelor patrulaterului dat sînt coliniare.

25. Fie Q, P, S puncte arbitrare, respectiv pe laturile BC, AC, AB în triunghiul oarecare ABC. Paralelele la direcția (Δ) duse prin vîrfurile A, B, C intersectează respectiv cercurile (APS), (BSQ), (CQP) în puncte situate pe o dreaptă ce trece prin punctul I de intersecție al celor trei cercuri.

26. Fie D și E proiecțiile ortocentrului H al triunghiului oarecare ABC respectiv pe bisectoarea interioară și exterioară a unghiului A, iar M mijlocul laturii BC. Să se arate că punctele D, E, M sînt coliniare.

27. Pe latura BC a triunghiului ABC luăm două puncte D și E, simetrice în raport cu mijlocul laturii. Dreptele (AD), (AE) retaie cercul circumscris triunghiului în D' și E'. Să se arate că:

i) paralelogramele cu două laturi AB, AC respectiv AD au un al patrulea vîrf comun.

ii) avem relațiile:

$$AB^2 + AC^2 + \frac{DE^2}{2} = AD^2 + AE^2 + \frac{BC^2}{2}$$

ii) $AD \cdot DD' = AE \cdot AE'$

iv) $AD \cdot AD' + AE \cdot AE' = AB^2 + AC^2$.

v) $\frac{D'B}{D'C} \cdot \frac{E'B}{E'C} = \frac{AC^2}{AB^2}$

vi) să se arate că perechile de drepte $(BC, D'E')$, (AB, CD') $(AE$, tangenta în $C)$ se intersectează în puncte coliniare.

(Fac. de matematică)

28. Se dă un triunghi ABC oarecare. Prin C se duce o paralelă la AB și prin B o paralelă la AC. Mediana dusă din vîrful C intersectează paralela din B la AC în C', iar mediana dusă din vîrful B intersectează paralela din C la AB în B'. Să se demonstreze că punctele C', A, B' sînt coliniare.

29. Se dă un triunghi ABC oarecare și AA' înălțimea coborîtă din A pe BC. Fie B' și C' mijloacele laturilor AC și AB, iar A_1 și A_2 simetricele punctelor A' în raport cu C' și A' în raport cu B'.

Să se demonstreze că punctele A_1, A, A_2 sînt coliniare.

30. Se dă triunghiul dreptunghic în A, ABC și înălțimea AM. Dacă N și P sînt simetricele punctului M în raport cu catetele BA și AC să se arate că punctele N, A, P sînt coliniare.

31. Se dă triunghiul ABC și un punct D exterior din care se duc paralele la laturile triunghiului dat. Paralela din D la AB intersectează BC în M și CA în M', paralela la AC intersectează BC în N' și AB în N, iar paralela la BC intersectează AC în P și AB în P'. Să se arate că dacă punctele M, N, P sînt coliniare, atunci și punctele M', N', P' sînt coliniare.

32. Se dă triunghiul ABC în care se duc înălțimile AA_1, BB_1, CC_1 și medianele AA', BB', CC'. Fie $\{M\} = (BC) \cap (B_1C')$, $\{N\} = (CA) \cap (C_1A')$, $\{P\} = (AB) \cap (A_1B')$. Să se demonstreze că punctele M, N, P sînt coliniare.

33. Pe diagonala AC a unui pătrat $ABCD$ se iau punctele E și F, astfel ca $AE \equiv CF \equiv AB$. (E interior segmentului AC și F ales pe prelungirea segmentului AC).

Dreapta (BE) intersectează laturile pătratului CD și AD în punctele M și N, iar segmentele CN și DF se intersectează în P. Să se arate că punctele M, A, P sînt coliniare.

34. Se dă triunghiul ABC înscris într-un cerc. Prin vîrfurile triunghiului se duc tangente la cercul circumscris. Tangenta în A intersectează latura opusă BC în M și analog tangentele în B și C intersectează laturile AC, respectiv AB în punctele N și P, iar intersecția dintre AC cu paralela din B la AM se notează cu D. Să se arate că punctele M, N, P sînt coliniare.

35. Să se arate că dacă dintr-un punct M situat pe cercul circumscris triunghiului ABC se coboară perpendiculare pe cele trei laturi, picioarele perpendicularelor sînt coliniare, iar dreapta ce conține cele trei puncte se numește dreapta lui Simson.

36. Se dau două cercuri $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', r)$ secante în punctele A și B. Se duce diametrul MON paralel cu $O'A$ și diametrul $M'O'N'$ paralel cu OA, punctele M, M', A fiind de aceeași parte a dreptei (OO'). Să se demonstreze că punctele A, M, M' sînt coliniare și că dreptele (AN) și (AN') sînt confundate.

37. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A și avînd $AC = b$, $AB = c$. Se duce înălțimea AA' apoi se proiectează punctul A' în F și E respectiv pe AB și AC. Perpendicularele în B și C, pe ipotenuză, intersectează pe $A'F$ și $A'E$ respectiv în P și Q. Să se arate că punctele P, A, Q sînt coliniare.

38. Se consideră triunghiul ABC. Se construiesc trei cercuri de raze congruente avînd ca centru vîrfurile triunghiului. Cercul cu centrul în A intersectează laturile AB, AC

respectiv în M_1 și N_1. Notăm cu M_2, N_2, M_3, N_3 punctele analoage pentru cercurile cu centrul în B respectiv în C. Să se demonstreze că intersecțiile dreptelor (M_1N_1), (M_2N_2), (M_3N_3) sînt trei puncte coliniare.

39. Să se demonstreze că bisectoarele exterioare ale unui triunghi intersectează laturile opuse în trei puncte coliniare.

40. Pe laturile AB, AC ale triunghiului ABC se iau respectiv punctele D și E astfel încît $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = K$ ($K \in$ $\in$ **R**).

Se prelungesc segmentele BE și CD respectiv cu $EE' = K \cdot BE$ și $DD' = K \cdot CD$. Să se demonstreze că punctele D', A, E' sînt coliniare.

41. Se dau semidreptele Ax și Ay și un punct O. Un cerc ce trece prin A și O intersectează semidreptele în $C \in (Ax)$ și $D \in (Ay)$. Prin O se duc două cercuri, unul tangent în C la (Ax), altul tangent în D la (Ay), care se intersectează a doua oară în E. Să se arate că punctele C, E, D sînt coliniare.

42. Se dă triunghiul ABC și punctele K, L situate respectiv pe laturile AB, AC astfel ca $\frac{KB}{AK} + \frac{LC}{AL} = 1$. Să se arate că segmentul KL trece prin centrul de greutate al triunghiului.

43. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare și E un punct pe latura CD. Prin E se duc două drepte oarecare: prima dreaptă intersectează pe BD în G și pe BC în M, iar a doua dreaptă intersectează pe AC în H și pe AD în N. Să se demonstreze că dreptele (MH) și (NG) sînt concurente pe latura AB.

44. Se dau cercurile (O_1), (O_2) secante în punctele A și B. O dreaptă (Δ) oarecare intersectează cercul (O_1) în punctele M și N, iar pe (O_2) în punctele P și Q(N și P sînt situate în interiorul segmentului MQ). Din B ducem perpendicularele: BC pe AM, BD pe AQ, BE pe AP și BF pe AN.

i) Să se arate că punctele A, B, C, D, E, F, sînt conciclice.

ii) Să se arate că dreptele (CF), (DE) și (Δ) sînt concurente.

45. Fiind dat un patrulater $ABCD$, o paralelă la diagonala BD intersectează latura AB în E și latura AD în F. O a doua paralelă la BD intersectează pe BC în G și CD în H. Să se arate că dreptele (EG) și (FH) sînt concurente cu dreapta (AC).

46. Fie O un punct în planul unui triunghi ABC. Notăm cu A', B', C' simetricele lui O față de mijloacele laturilor triunghiului. Să se demonstreze că dreptele (AA'), (BB') (CC') sînt concurente.

47. Pe vîrful A al unui triunghi oarecare ABC se duc două izogonale AY, AZ, prin B izogonalele BZ, BX și prin C izogonalele CX, CY. Fie X', Y', Z' proiecțiile punctelor X, Y, Z respectiv pe BC, CA, AB. Să se demonstreze că dreptele (AX'), (BY'), (CZ') sînt concurente.

48. Fie AC diagonala mare a rombului $ABCD$ și A_1, A_2, C_1, C_2 proiecțiile punctelor A și C pe laturile opuse.

i) Să se demonstreze că dreptele (A_1C_1), (A_2C_2), (AC) și (BD) sînt concurente.

ii) Să se determine mărimea unghiului A al rombului astfel ca dreptele (A_1C_1) și (A_2C_2) să fie perpendiculare pe segmentele AD și AB.

49. Perpendicularele duse pe bisectoarele interioare AI, BI, CI ale unui triunghi ABC, în punctul lor comun I, intersectează laturile triunghiului: perpendiculara AI în punctele B_1, C_1, perpendiculara pe BI în punctele C_2, A_2, perpendiculara CI în punctele A_3, B_3. Dacă P_1, P_2, P_3 sînt punctele comune dreptelor (BB_3), (CC_2); (CC_1), (AA_3); (AA_2), (BB_1) atunci dreptele (AP_1), (BP_2), (CP_3) sînt concurente.

50. Fie $ABCD$ un paralelogram și A' un punct în planul său. Paralelele prin A' la laturile paralelogramului intersectează pe BC și AD în D' și P, iar pe AB și CD în Q și B'.

i) Să se arate că dreptele (AA'), (BB'), (DD') sînt concurente.

ii) Să se arate că dreptele (PQ), (BD), $(B'D')$ sînt concurente.

51. Fie M un punct interior triunghiului ABC și P, Q, R simetricele lui față de mijloacele laturilor triunghiului dat. Să se arate că dreptele (AP), (BQ), (CR) sînt concurente.

52. Fie A', B', C' picioarele înălțimilor triunghiului ABC și H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor $AB'C', BC'A', CA'B'$. Să se arate că:

i) dreptele $(A'H_1), (B'H_2), (C'H_3)$ sînt concurente.

ii) dreptele $(AH_1), (BH_2), (CH_3)$ sînt concurente.

53. Fie A', B', C' simetricele punctelor A, B, C față de o dreaptă (Δ). Să se demonstreze că perpendicularele duse din A', B', C' respectiv pe BC, CA, AB sînt concurente.

54. În vîrfurile triunghiului ABC se duc tangentele la cercul circumscris care formează triunghiul $A'B'C'$. Se notează prin A_1, B_1, C_1 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $A'BC, B'CA, C'AB$.

i) Să se demonstreze că dreptele $(AA_1), (BB_1), (CC_1)$ sînt concurente.

ii) Să se demonstreze că dreptele $(AA'), (BB'), (CC')$ sînt concurente.

55. Fie punctele M, N, P pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC.

i) Să se arate că perpendicularele pe laturile BC, CA, AB în punctele M, N, P sînt concurente dacă și numai dacă $BM^2 - CM^2 + CN^2 - AN^2 + AP^2 - BP^2 = 0$.

ii) Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri. Să se arate că perpendicularele din A, B, C pe $(B'C'), (C'A'), (A'B')$ sînt concurente dacă și numai dacă perpendicularele din A', B', C' pe $(BC), (CA), (AB)$ sînt concurente.

iii) Să se deducă că perpendicularele din vîrfurile unui triunghi pe laturile triunghiului ortic corespunzător sînt concurente.

iv) În triunghiul ABC fie A', B', C' picioarele bisectoarelor interioare. Să se arate că perpendicularele în A' pe BC, în B' pe CA, în C' pe AB sînt concurente dacă și numai dacă triunghiul este isoscel.

56. Un dreptunghi se numește circumscris unui triunghi dacă una din laturile dreptunghiului coincide cu o latură a triunghiului și latura opusă trece prin al treilea vîrf al triunghiului. Fie A_1, B_1, C_1 centrele dreptunghiurilor circumscrise triunghiului ABC care au pe BC, CA, AB ca latură.

Dreptele (AA_1), (BB_1), (CC_1) intersectează laturile opuse ale triunghiului ABC în A_2, B_2, C_2. Să se demonstreze că perpendicularele în punctele A_2, B_2, C_2 pe laturile triunghiului sînt concurente.

57. Să se demonstreze că dacă A_1, B_1, C_1 sînt intersecțiile bisectoarelor triunghiului ABC cu cercul său circumscris și A_2, B_2, C_2 punctele de contact ale laturilor cu cercul înscris, atunci dreptele (A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2) sînt concurente.

58. Se consideră două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ simetrice în raport cu o dreaptă. Să se demonstreze că perpendicularele coborîte din A', B', C' respectiv pe laturile BC, CA, AB sînt concurente.

59. Să se demonstreze că dacă perpendicularele coborîte din vîrfurile triunghiului ABC pe laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt concurente, atunci și perpendicularele coborîte din vîrfurile triunghiului $A'B'C'$ pe laturile triunghiului ABC sînt concurente (triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se numesc ortologice).

60. Pe laturile unui triunghi ABC, ca baze, se construiesc, în afară, triunghiurile isoscele BCA', CAB', ABC' asemenea. Să se arate că dreptele (AA'), (BB'), (CC') sînt concurente.

61. Printr-un punct O se duce o secantă arbitrară care intersectează laturile unui triunghi ABC în A', B', C'. Se iau simetricele A_1, B_1, C_1 ale punctelor A', B', C' în raport cu punctul dat O. Să se demonstreze că dreptele (AA_1), (BB_1), (CC_1) sînt concurente.

62. Fie A_1, B_1, C_1 trei puncte pe cercul circumscris triunghiului oarecare ABC, iar $A_2B_2C_2$ triunghiul format de dreptele (AA_1), (BB_1), (CC_1). Dacă notăm $\{M\} = (A_1A_2) \cap (BC)$, $\{N\} = (B_1B_2) \cap (CA)$, $\{P\} = (C_1C_2) \cap (AB)$, să se arate că dreptele (AM), (BN), (CP) sînt concurente.

63. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene într-un triunghi oarecare ABC, iar A_2, B_2, C_2 punctele unde o transversală oarecare intersectează laturile BC, CA, AB. Se consideră punctele $\{A_3\} = (B_1C_1) \cap (BC)$, $\{B_3\} = (C_1A_2) \cap (CA)$, $\{C_3\} = (A_1B_2) \cap (AB)$. Să se arate că dreptele (AA_3), (BB_3), (CC_3) sînt concurente.

Reamintesc: se numește ceviană, o dreaptă care unește un vîrf al unui triunghi cu un punct al laturii opuse, în particular ceviene într-un triunghi pot fi: mediane, bisectoare, înălțimi.

64. Fie A_1, B_1, C_1 trei puncte pe cercul circumscris triunghiului ABC, iar $A_2B_2C_2$ triunghiul format de dreptele (AA_1), (BB_1), (CC_1). Dacă notăm $\{M\} = (A_1A_2) \cap (BC)$, $\{N\} = (B_1B_2) \cap (CA)$, $\{P\} = (C_1C_2) \cap (AB)$ să se arate că dreptele (AM), (BN), (CP) sînt concurente.

65. i) În tetraedrul $ABCD$ muchiile AB și CD sînt perpendiculare. Să se arate că două din înălțimile tetraedului sînt concurente.

ii) Dacă două perechi de muchii opuse sînt formate din perpendiculare atunci și a treia pereche este formată din perpendiculare. În acest caz toate înălțimile tetraedului sînt concurente.

66. Fie G centrul de greutate al tetraedrului oarecare $A_1A_2A_3A_4$. Se notează cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale fețelor opuse respectiv vîrfurilor A_1, A_2, A_3, A_4. Știind că M este un punct în interiorul tetraedrului, iar M_1, M_2, M_3, M_4 sînt respectiv simetricele lui M față de G_1, G_2, G_3, G_4, se cere:

i) să se demonstreze că dreptele (A_1M_1), (A_2M_2), (A_3M_3), (A_4M_4) sînt concurente într-un punct P;

ii) să se arate că punctele M, G, P sînt coliniare și că există relația: $3GM = 5GP$.

67. Pe latura BC, a unui triunghi ABC, ca diametru se construiește un cerc care intersectează laturile AB și BC în D și E. Perpendicularele din D și E pe BC intersectează cercul în M și N. Să se demonstreze că (BN), (CM) și înălțimea AA' sînt drepte concurente.

68. Să se arate că dreptele care unesc vîrfurile unui triunghi ABC cu punctele M, N, P de intersecție ale laturilor triunghiului cu cercul înscris sînt trei drepte concurente.

69. Se consideră triunghiul ABC și înălțimea AA' iar din A' se duc două drepte care fac unghiuri congruente cu AA'. Aceste drepte intersectează latura AC în B' și latura AB în C'. Să se arate că înălțimea AA', dreptele (BB') și (CC') sînt concurente.

70. Se consideră triunghiul ABC pe ale cărui laturi se construiesc triunghiuri isoscele în exteriorul triunghiului ABC. Dacă $\triangle BPA$, $\triangle ANC$ și $\triangle BCM$ astfel construite sînt asemenea, să se arate că dreptele (AM), (BN) și (CP) sînt concurente.

71. Să se demonstreze că în orice triunghi două bisectoare exterioare și bisectoarea interioară a celui de-al treilea unghi sînt concurente (punctul numindu-se centrul cercului exînscris triunghiului).

72. Se consideră trapezul $ABCD$ și cercul tangent laturilor AB, AD, BC în punctele H,F,E. Dacă $\{I\} = AD \cap BC$, să se arate că dreptele (AE), (FB) și (IH) sînt concurente.

73. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, pe cateta AC se ridică în C perpendiculara CC' cu $CC' \equiv AC$ iar pe cateta AB se ridică perpendiculara BB' cu $BB' \equiv AB$. Să se arate că dreptele (BC'), (CB') și înălțimea AA' sînt concurente.

74. Să se determine condiția ca într-un triunghi ABC, înălțimea AA', mediana BB' și bisectoarea CC' să fie concurente.

75. Se dă triunghiul ABC și punctul P în interiorul triunghiului. Vîrfurile triunghiului unite cu P, intersectează laturile opuse în punctele L, M, N. Cercul $\mathcal{C}(O, R)$ circumscris triunghiului LMN, intersectează laturile BC, CA și AB în punctele A', B', C'. Să se arate că dreptele (AA'), (BB'), (CC') sînt concurente.

76. Pe fiecare latură a unui triunghi oarecare se construiește în exterior cîte un triunghi echilateral și se unește vîrful exterior al triunghiului echilateral cu vîrful opus al triunghiului dat. Să se arate că cele trei drepte sînt concurente.

77. Într-un cerc de rază R se înscrie dreptunghiul $ABCD$ avînd latura AB congruentă cu latura triunghiului echilateral înscris în cerc.

i) Să se calculeze latura AD a dreptunghiului.

ii) Se duc perpendicularele AA' și BB' pe diagonalele BD și AC; să se arate că aceste perpendiculare se intersectează pe cerc și că $A'B' = \frac{1}{2} AB$.

78. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale pătratului $ABCD$ se iau în acelaşi sens segmentele congruente AA', BB', CC' şi DD'. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor $D'AA'$, $A'BB'$, $B'CC'$, $C'DD'$ sînt concurente.

79. Se consideră cercul cu centrul în O de diametru AB. Pe prelungirea diametrului AB de partea lui B se ia punctul C prin care se duce o secantă mobilă care intersectează cercul în M şi M'. Dreptele (AM) şi (AM') intersectează perpendiculara în C pe AB în punctele P şi P'.

Se cere:

i) să se arate că triunghiurile CMP şi $CM'P'$ sînt asemenea şi punctele M, P, M', P' sînt conciclice.

ii) $CP \cdot CP' =$ const. şi să se calculeze lungimile segmentelor CP şi CP' în funcţie de $OA = r$, $OC = a$ şi $\alpha = m(\widehat{BAP})$.

iii) să se calculeze aria totală şi volumul obţinut prin rotirea triunghiului AMC în jurul laturii AC în funcţie de r, a şi α.

80. Fie $ABCD$ un trapez înscris într-un cerc şi M un punct oarecare pe cerc. Să se demonstreze să proiecţiile A_1, B_1, C_1, D_1 ale punctului M pe laturile neparalele şi pe diagonalele trapezului sînt patru puncte conciclice.

81. Unui patrulater $ABCD$ i se exînscriu patru cercuri de centru O_1, O_2, O_3, O_4. Să se arate că punctele O_1, O_2, O_3, O_4 sînt patru puncte conciclice.

82. Se dă triunghiul ABC echilateral, al cărui centru este O. Segmentele OA, OB şi OC se prelungesc cu $AA' \equiv BB' \equiv CC'$, iar punctele A', B', C' se proiectează în $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ pe prelungirile laturilor triunghiului. Să se arate că punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sînt conciclice.

83. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul O. Se duce înălţimea AD şi diametrul cercului prin A. Se proiectează vîrfurile B şi C pe acest diametru în E şi F şi se prelungeşte DE şi DF pînă întîlnesc laturile AC şi AB respectiv în G şi H. Să se demonstreze că punctele A, H, D, G sînt conciclice.

84. O dreaptă (AB) intersectează cercurile (O_1) şi (O_2) în punctele A_1, B_1 şi A_2, B_2. O altă dreaptă (CD) intersectează aceleaşi cercuri în punctele C_1, D_1 şi C_2, D_2. Să se arate că secantele (A_1D_1) și (B_1C_1) ale cercului (O_1) intersectează secantele (A_2D_2) și (B_2C_2) ale cercului (O_2) în patru puncte M, N, P, Q conciclice.

85. Două corzi MA și MB ale unui cerc $\mathcal{C}$ (O, R) fac unghiuri congruente cu o coardă fixă MC. Să se arate că coarda AB rămîne paralelă cu o direcție fixă cînd cele două corzi sînt variabile.

86. Vîrfurile B, C ale triunghiului ABC se proiectează în E, F pe diametrul AA'; fie D piciorul înălțimii din A; dreptele (DE), (DF) intersectează laturile AC, AB în G și H. Să se demonstreze că punctele A, G, D, H sînt conciclice.

87. Să se demonstreze că proiecțiile pe laturi ale punctului de intersecție al diagonalelor unui patrulater ortodiagonal sînt patru puncte conciclice.

88. Pe laturile Ox, Oy ale unui unghi se iau punctele $A, B \in Ox$, $C, D \in Oy$ astfel încît $OA \cdot OB = OD \cdot OC$. Să se demonstreze că punctele A, B, C, D sînt conciclice.

89. Pe fiecare latură a unui patrulater inscriptibil luat drept coardă se descrie un cerc; cele patru cercuri se intersectează două cîte două în alte patru puncte. Să se arate că aceste patru puncte sînt conciclice.

90. Să se demonstreze că bisectoarele interioare ale unghiurilor unui patrulater convex se intersectează în patru puncte conciclice.

REZOLVĂRI ȘI RĂSPUNSURI

1. Bisectoarea vîrfului N intersetează axa Oy în L, iar aceea a vîrfului M trece prin punctul P mijlocul bazei și este perpendiculară pe bază. De aici rezultă că $OL = 2PI = 2r$, deci L este un punct fix pe Oy.

Punctul L fiind situat pe bisectoarea unghiului N, este egal depărtat de laturile unghiului. Rezultă deci că dreapta (MN) rămîne la distanța $2r$ de punctul fix L. Dreapta (MN) este deci tangentă la cercul cu centrul în L și cu raza egală cu $2r$.

2. Unghiul A fiind constant, punctul A descrie un arc de cerc, care trece prin P și Q. Dreapta (AC) intersectează acest cerc într-un punct fix R.

3. Fie F punctul unde DE intersectează pe OC, G unde AE intersectează pe Oy, F este proiecția punctului A pe OC, deci punct fix deoarece, $m(\widehat{GAX}) = m(\widehat{GOX}) + m(\widehat{OGA}) = 2[m\,\widehat{DOC}) + m(\widehat{ODF})] = 2m\,(\widehat{DFC})$, deci $m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{EFC})$ și prin urmare patrulaterul $ACEF$ este inscriptibil.

4. În triunghiul AMB intersectat de transversala PQ care intersectează pe AB în R, aplicăm teorema lui Menelaus: $\frac{RA}{RB}\cdot\frac{QB}{QM}\cdot\frac{PM}{PA}=1$, dar din triunghiurile dreptunghice OMB, OMA avem $\frac{BQ}{QM}=\frac{OB^2}{OM^2}$ și $\frac{PM}{PA}=\frac{OM^2}{OA^2}$. Înlocuind aceste rapoarte obținem $\frac{RA}{RB}=\frac{OA^2}{OB^2}=$ const., deci R este punct fix.

5. (Fig. I.5) Din ipoteză $m(\widehat{PAM}) = m\,(\widehat{PCM}) = m(\widehat{PMB}) = 90° \Rightarrow PM$ diametru. Deci PM trece prin punctul fix O (centrul cercului circumscris triunghiului ABC).

6. (Fig. I.6) Construim $BE \perp AT$ (bisectoarea unghiului A). Dar D este mijlocul segmentului MC deoarece triunghiul

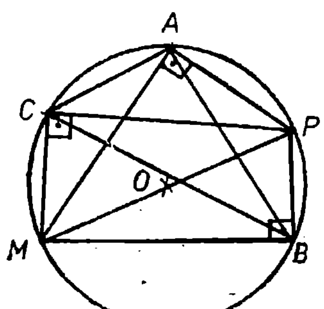


Fig. I.5

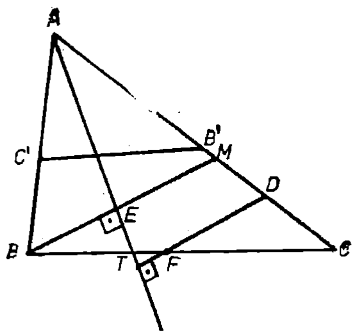


Fig. I.6

ABM este isoscel (bisectoarea este și înălțime) $\Rightarrow AB \equiv \equiv AM$, $DC = AC - AB' - B'D = AC - \frac{AC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{AC - AB}{2}$; $MD = AC - DC - AM = AC - DC. AB = \frac{AC - AB}{2}$, deci $DF \parallel BM$ și DF este linie mijlocie în triunghiul BMC, deci DF trece printr-un punct fix și anume punctul F mijlocul segmentului BC.

7. (Fig. I.7) Fie $BF \equiv FD \equiv DC$ și $AE \equiv EB$. În triunghiul BAD, $EF \parallel AD$ ca linie mijlocie. În triunghiul FEC, $AD \parallel EF$ și GD linie mijlocie, $GE \equiv GC$, deci punctul fix este G, mijlocul medianei EC.

8. (Fig. I.8) Fie C între A și M, D între B și M. Se duce $AS \parallel CD$, $(MN) \cap (AB) = \{P\}$, $CN \equiv ND$, $AR \equiv RS$. $\triangle MCD \sim \triangle MAS \Rightarrow \frac{MS}{MD} = \frac{MA}{MC} = \frac{1}{p}$. În $\triangle ASB$ intersectat de transversala MRP, se poate aplica Teorema lui Menelaus: $\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MS} \cdot \frac{RS}{RA} = 1$, și cum $AR \equiv RS \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{MS}{MB} = \frac{MS}{MD} \cdot \frac{MD}{MB} = \frac{q}{p}$ = const. deci P este un punct fix, deoarece împarte segmentul AB în raportul constant $\frac{q}{p}$.

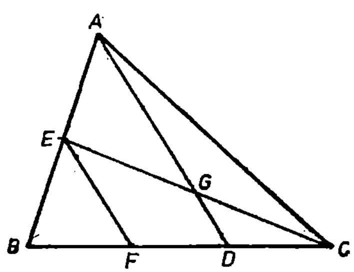


Fig. I.7

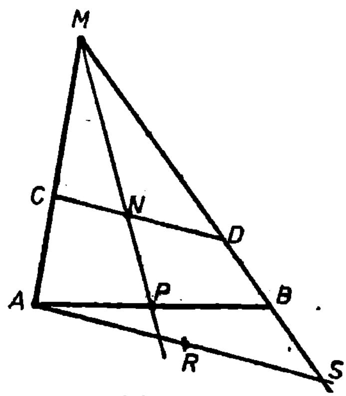


Fig. I.8

9. (Fig. I.9) Fie $A' \in OY$ astfel încît $OA \equiv OA'$, $B' \in$ $\in OY$ astfel încît $OB \equiv OB' \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle OAB \equiv \triangle OA'B'$ (L.U.L) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle APB' \equiv \triangle PA'B \Rightarrow PA \equiv$ $\equiv PA'$ și $PB \equiv PB' \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle OB'R \equiv \triangle OPB \Rightarrow m(\hat{O}_1) =$ $= m(\hat{O}_2)$, deci punctul fix este P, situat pe bisectoarea unghiului O.

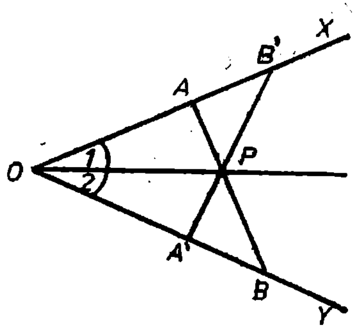


Fig. I.9

10. Conform relației puterii punctului față de un cerc: $\rho_a = OA^2 - R^2$, $\rho_b = OB^2 - R^2$, $\rho_c = OC^2 - R^2$ și înlocuind în relația din enunț, vom obține relația lui Stewart față de punctul O.

Reamintesc teorema lui Stewart: fie A, B, C trei puncte coliniare, cu B situat între A și C, și O un punct exterior dreptei AC, atunci are loc relația lui Stewart: $OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot AC$. Este valabilă și reciproca teoremei, adică dacă există relația lui Stewart, atunci punctele A, B, C sînt coliniare.

Demonstrația teoremei se face aplicînd teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile OAB și OBC (fie H proiecția punctului O pe dreapta AC):

$$OA^2 = AB^2 + OB^2 - 2 \cdot AB \cdot HB \qquad | : BC$$
$$OC^2 = OB^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot HB \qquad | : AB$$

și însumînd obținem:

$$OA^2 \cdot BC + OC^2 \cdot AB = AB^2 \cdot BC + BC^2 \cdot AB + OB^2 \cdot BC + OB^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot AC + OB^2 \cdot AC.$$

11. (Fig. I.11) Vom analiza cazul în care cercurile sînt tangente exterioare, iar cazul în care cercurile sînt tangente interioare se va analiza analog.

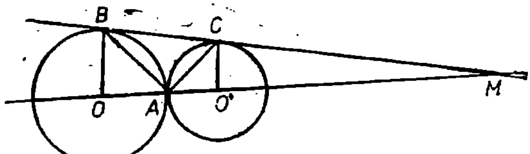


Fig. I.11

Cum $\triangle OAB$ și $\triangle O'AC$ sînt isoscele și cum unghiurile OAB, $O'AC$ sînt complementare $\Rightarrow OB \parallel O'C$, $\triangle MO'C \sim \sim \triangle MBO \Rightarrow MO' = \dfrac{R(R+R')}{R-R'}$ deci M este un punct fix, deoarece depinde numai de razele cercurilor, deci dreapta (BC) trece prin punctul fix M.

12. Fie F și G intersecțiile dreptelor (BB'), (CC') respectiv cu AC și AB. Avem:

$$BB' \equiv B'F, CC' \equiv C'G, BG \equiv FC.$$

Fie I și J intersecțiile dreptelor (CB') și (BC') respectiv cu AB, AC. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului ABF intersectat de transversala (CB') avem:

$$\frac{CF}{CA} \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{B'B}{B'F} = 1.$$

În triunghiul ACG intersectat de transversala $(BC'J)$ obținem

$$\frac{JC}{JA} \cdot \frac{BA}{BG} \cdot \frac{C'G}{C'C} = 1.$$

Înmulțind cele două șiruri de rapoarte și ținînd seama de congruențe obținem:

$$\frac{IA}{IB} \cdot \frac{JC}{JA} \cdot \frac{BA}{CA} = 1.$$

Dar

$$\frac{BA}{CA} = \frac{EB}{EC}.$$

E fiind piciorul bisectoarei exterioare a unghiului A. Înlocuind în relația precedentă obținem:

$$\frac{IA}{IB} \cdot \frac{JC}{JA} \cdot \frac{EB}{EC} = 1,$$

deci dreptele (CB'), (BC') și (AE) sînt concurente.

Fie K și L intersecțiile dreptelor (BC'') și (CB'') respectiv cu AC, AB, iar M și N intersecțiile dreptelor (BB''), (CC'') respectiv cu AC, AB. Avem: $B''M \equiv B''B$, $C''N \equiv C''C$ și $CM = CA + AM = CA + AB = NA + AB = BN$.

Din triunghiul ABM intersectat de transversala (CB'') avem conform teoremei lui Menelaus:

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{B''B}{B''M} \cdot \frac{CM}{CA} = 1,$$

iar din triunghiul ACN intersectat de transversala (BC'') avem

$$\frac{KC}{KA} \cdot \frac{BA}{BN} \cdot \frac{C'N}{C''C} = 1.$$

Însumînd cele două şiruri de rapoarte şi ţinînd seama de congruenţe obţinem:

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{KC}{KA} \cdot \frac{BA}{CA} = 1.$$

Dar

$$\frac{BA}{CA} = \frac{DB}{DC};$$

D fiind piciorul bisectoarei interioare unghiului A. Înlocuind în relaţia precedentă obţinem:

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{KC}{KA} \cdot \frac{DB}{DC} = 1,$$

deci dreptele (CB''), (BC'') şi (AD) sînt concurente.

Reamintesc teorema lui MENELAUS: Dacă o transversală intersectează cele trei laturi ale unui triunghi ABC în punctele M, N, P, atunci există relaţia:

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

Demonstraţia acestei teoreme se poate face în multe feluri; fie o demonstraţie simplă, bazată pe asemănarea triunghiurilor dreptunghice.

Să considerăm distanţele AA', BB', CC' ale vîrfurilor triunghiului la secanta dată. Triunghiurile dreptunghice formate sînt asemenea (avînd cîte un unghi ascuțit ca opus la vîrf sau comun) şi deci laturile lor sînt proporționale:

$$\triangle AA'P \sim \triangle BB'P : \frac{PA}{PB} = \frac{AA'}{BB'}$$

$$\triangle BB'M \sim \triangle CC'M : \frac{MB}{MC} = \frac{BB'}{CC'}$$

$$\triangle CC'N \sim \triangle AA'N : \frac{NC}{NA} = \frac{CC'}{AA'}.$$

Înmulțind aceste relații membru cu membru și efectuînd simplificările din membrul al doilea, se obține relația cerută:

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

Această teoremă admite și o reciprocă adevărată, ce se poate demonstra prin reducere la absurd, utilă pentru a demonstra coliniaritatea a trei puncte:

Dacă pe două laturi ale unui triunghi ABC și pe prelungirea celei de-a treia se iau trei puncte M, N, P astfel încît să fie satisfăcută relația:

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1,$$

atunci cele trei puncte sînt coliniare.

Teorema lui CEVA: Trei drepte cunoscute într-un triunghi, AQ, BQ, CQ intersectează laturile triunghiului în punctele M, N, P astfel încît este satisfăcută relația:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = -1. \qquad (1)$$

și reciproc: dacă punctele M, N, P așezate pe laturile unui triunghi satisfac relația (1) atunci dreptele (AM), (BN) și (CP) sînt concurente.

Demonstrația se poate face folosind teorema lui Menelaus pentru triunghiurile ABM și AMC intersectate de transversalele (CPQ) și (BQN):

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{CB}{CM} \cdot \frac{QM}{QA} = 1$$

$$\frac{QA}{QM} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

Ţinînd seama că $BC = -CB$ şi înmulţind cele două relaţii membru cu membru (făcînd simplificările posibile), se obţine relaţia de demonstrat.

Pentru a demonstra reciproca, presupunem că dreptele (AM) şi (BN) se intersectează în Q şi fie P' punctul în care (CQ) intersectează latura AB. Conform teoremei directe, $\frac{P'A}{P'B} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = -1$. Comparînd această relaţie cu cea dată, urmează ca $\frac{P'A}{P'B} = \frac{PA}{PB}$, adică punctele P şi P' coincid: rezultă că dreapta (CP) trece prin Q adică cele trei drepte sînt concurente. Reciproca teoremei lui Ceva foloseşte pentru a demonstra concurenţa a trei drepte.

13. Triunghiul $BC'C$ este dreptunghic, iar $C'M$ este mediană, deci $m(\widehat{MBC}) = m(\widehat{MC'B})$. Din triunghiul BMC se deduce:

$$m(\widehat{MBC'}) + m(\widehat{BC'M}) + m(\widehat{C'MN}) = 180° \quad \text{sau}$$

$$2m(\widehat{MBC'}) + m(\widehat{C'MB}) = 180°$$

care se mai poate scrie:

$$m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{C'MB}) = 180°,$$

deoarece prin construcţie $2\widehat{MBC'} = \widehat{BAD}$. Deci, patrulaterul $BADM$ este inscriptibil, iar cercul său circumscris trece prin M care este punctul fix.

Observaţie: Cum $m(\hat{A}) = \text{const.}$, urmează că unghiurile B şi C sînt de asemenea constante. Triunghiul ABC poate lua orice poziţie în plan rămînînd asemenea cu el însuşi. Considerăm că C este fix, iar triunghiul ABC variabil, însă asemenea cu un triunghi dat, puterea punctului C faţă de cercul (ABD) este $CM \cdot CB = \frac{1}{2} CB^2$. Deci puterea punctului C faţă de toate cercurile (ABD) este constantă, iar cercul cu centrul în C şi cu raza $\frac{\sqrt{2}}{2} BC$ intersectează ortogonal aceste cercuri.

14. Tangenta în punctul C la cercul interior, intersectează cercul de centrul O în punctele E, F. Cum $CE^2 = CA \cdot CB =$ constant, atunci $EF \equiv MN =$ constant.

Reciproc: Fie C unul din punctele unde cercul concentric intersectează segmentul AB, atunci $CA \cdot CB = CE^2$. Notînd $AB = 2l$, $AC = x$ și $MN = 2a$, avem $x(2l - x) = a^2$, de unde rezultă două puncte simetrice față de mijlocul segmentului AB. Condiția de posibilitate fiind $MN < AB$.

15. Cum trapezul înscris în cerc este isoscel, atunci perpendiculara dusă din M pe laturile paralele AB și CD ale trapezului este axă de simetrie a figurii și trece prin centrul cercului care este fix, iar axa radicală va avea și o direcție fixă dacă laturile paralele ale trapezului rămîn paralele cu o direcție fixă.

16. Fie A_1 intersecția dreptelor (Δ), (BC) și punctele B_1, C_1 intersecțiile dreptei (Δ) cu paralele duse din B și C la AD. Notăm cu A' intersecția dreptei (AE) cu (BC). Punctul A' fiind conjugatul armonic al punctului A_1 față de BC este un punct fix. Ținînd seama de relația lui Van Aubel:

$$\frac{AE}{EA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}. \tag{1}$$

și de relațiile:

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AD}{BB_1} \quad \text{și} \quad \frac{AB'}{B'C} = \frac{AD}{CC_1}$$

deduse din: $\triangle ADC' \sim \triangle BB_1C'$ și $\triangle ADB' \sim \triangle CC_1B'$ relația (1) devine:

$$\frac{AE}{EA'} \cdot \frac{1}{AD} = \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} = \frac{1}{K} = \text{const.} \tag{2}$$

Fie P intersecția lui DE cu paralela dusă din A' la AD. Din triunghiurile asemenea $A'PE$, EDA, deducem

$$\frac{A'P}{A'E} = \frac{AD}{AE}$$

de unde

$$A'P = \frac{A'E}{AE} \cdot AD$$

și comparînd cu relația (2) obținem $A'P = K$ ceea ce arată că P este un punct fix.

Observaţie: Din demonstraţia precedentă se vede că nu s-a făcut uz de ipoteza că $(AD) \perp (\Delta)$. Proprietatea este deci adevărată oricare ar fi unghiul dreptelor (Δ), (AD). Este suficient ca dreapta (AD) să aibă o direcţie fixă.

Reamintesc teorema lui Van Aubel: în triunghiul ABC, între segmentele determinate de trei ceviene, AA_1, BB_1, CC_1 concurente în O, există relaţia:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C}.$$

Demonstraţie: Se aplică teorema lui Menelaus în triunghiurile ABA_1 şi AA_1C pentru secantele (COC_1) respectiv (BOB_1):

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{CB}{CA_1} \cdot \frac{A_1O}{OA} = 1 \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CA_1}{CB} \cdot \frac{OA}{OA_1}$$

respectiv

$$\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1 \Rightarrow \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{BA_1}{BC}.$$

Însumînd ultimele două egalităţi obţinem:

$$\frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{CA_1}{CB} \cdot \frac{OA}{OA_1} + \frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{AO}{OA_1} =$$

$$= \left(\frac{CA_1}{BC} + \frac{A_1B}{BC}\right) \cdot \frac{AO}{OA_1} = \frac{AO}{OA_1}.$$

17. Centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor MAD şi MCB sînt punctele O' şi O'' care se obţin ca intersecţii dintre perpendicularele în punctele P şi N, mijloacele laturilor AD şi MD, iar O'' este intersecţia dintre perpendicularele duse în punctele P' şi N' mijloacele laturilor BC respectiv BM. Se notează cu $\{E\} = (BC) \cap (O'M)$. Patrulaterul $PNDO'$ este inscriptibil de unde rezultă $m(\widehat{CME}) = m(\widehat{NDO'})$, deoarece triunghiul $DO'M$ este isoscel $(DO' \equiv O'M$ raze în cercul $(O'))$ şi $m(\widehat{NDO'}) = m(\widehat{NPO'})$ avînd în patrulaterul $PNDO'$ aceeaşi măsură. Deci $m(\widehat{CME}) = m(\widehat{O'PN})$. De asemenea $m(\widehat{MCE}) = m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{APN})$, de unde rezultă că $m(\widehat{MCE}) = m(\widehat{APN})$ şi ţinînd seama că $m(\widehat{CME}) =$

$= m(\widehat{NPO'})$ se poate deduce $m(\widehat{CME}) + m(\widehat{MCE}) = m(\widehat{NPO'}) + m(\widehat{APN}) = 90°$ însă $m(\widehat{CME}) + m(\widehat{MCE}) = m(\widehat{CEO'}) = 90°$ deci $MO' \parallel OO''$ ca perpendiculare pe dreapta BCE. Analog se arată că $MO'' \parallel OO'$ şi patrulaterul $MO''OO'$ este paralelogram, iar diagonalele $O'O''$ şi MO se intersectează în mijlocul lor I. Cum MO este un segment fix rezultă că $O'O''$ trece prin punctul fix I.

18. (Fig. I.18) Ţinînd cont de proprietatea că bisectoarele unui unghi sînt perpendiculare, atunci patrulaterele

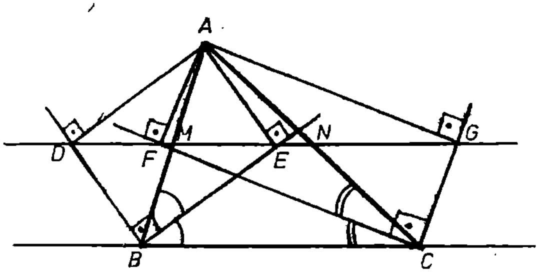


Fig. I.18

$ADBE$ şi $AFCG$ sînt dreptunghiuri, deci diagonalele lor se înjumătăţesc în punctul M, respectiv punctul N. Deci punctele D, M, N, şi F, N, G sînt coliniare şi cum MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, atunci punctele D, F, E, G sînt coliniare.

19. Paralela dusă prin A la BC intersectează dreptele $(A_1B'), (A_1C')$ în punctele D, E. Triunghiul A_1DE este intersectat de transversalele $(MB'C'), (NAB'), (PAC')$. Aplicînd de trei ori teorema lui Menelaus avem:

$$\frac{MD}{ME} \cdot \frac{C'E}{C'A_1} \cdot \frac{B'A_1}{B'D} = 1, \quad \frac{NE}{NA_1} \cdot \frac{B'A_1}{B'D} \cdot \frac{AD}{AE} = 1,$$

$$\frac{PA_1}{PD} \cdot \frac{AD}{AE} \cdot \frac{C'E}{C'A_1} = 1$$

şi înmulţind aceste relaţii avem

$$\frac{MD}{ME} \cdot \frac{NE}{NA_1} \cdot \frac{PA_1}{PD} \cdot \frac{C'E^2}{C'A_1^2} \cdot \frac{B'A_1^2}{B'D^2} \cdot \frac{AD^2}{AE^2} = 1.$$

Din triunghiurile asemenea $AC'E$, $C'BA_1$ și $AB'D$, $A_1B'C$ deducem relațiile

$$\frac{C'E}{C'A_1} = \frac{AE}{A_1B}, \quad \frac{B'A_1}{B'D} = \frac{A_1C}{AD},$$

care ridicate la pătrat și înmulțite ne dau relația:

$$\frac{C'E^2 \cdot B'A_1^2 \cdot AD^2}{C'A_1^2 \cdot B'D^2 \cdot AE^2} = 1$$

și înlocuind în primul șir de rapoarte obținem:

$$\frac{MD}{ME} \cdot \frac{NE}{NA_1} \cdot \frac{PA_1}{PD} = 1,$$

deci punctele M, N, P sînt coliniare conform reciprocei teoremei lui Menelaus.

20. (Fig. I.20) Fie B_a, C_a punctele unde antiparalela înscrisă în unghiul A intersectează AC, AB, iar C_b, A_b; A_c, B_c puncte analoage.

Fie A' punctul unde dreapta (B_aC_a) intersectează pe BC, iar B', C' puncte analoage. Aplicînd teorema lui Menelaus, triunghiului ABC intersectat de transversala $(A'B_aC_a)$ avem:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B_aC}{B_aA} \cdot \frac{C_aA}{C_aB} = 1.$$

Triunghiurile ABC și AB_aC_a fiind asemenea obținem

$$\frac{B_aA}{C_aA} = \frac{BA}{CA};$$

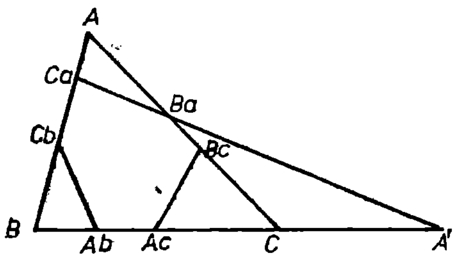


Fig. I.20

care înlocuită în relația precedentă obținem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BA}{CA} \frac{C_aB}{B_aC}.$$

Scriind și celelalte două relații analoage și înmulțindu-le membru cu membru obținem:

$$\frac{AB}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{C_aB}{B_aC} \cdot \frac{A_bC}{C_bA} \cdot \frac{B_cA}{A_cB} \qquad \text{(R)}$$

Dar dreapta (C_aA_b) este paralelă cu dreapta (AC), deci:

$$\frac{C_aB}{A_aB} = \frac{AB}{CB}$$

analog

$$\frac{A_bC}{B_aC} = \frac{BC}{AC}, \quad \frac{B_cA}{C_bA} = \frac{CA}{BA}.$$

Ţinînd seama de aceste relaţii, şirurile de rapoarte (R) devin:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

deci punctele A', B', C' sînt coliniare.

Observaţie: Trei antiparalele înscrise în unghiurile unui triunghi determină pe laturile triunghiului şase puncte conciclice (cercul lui Tucker). Aplicînd teorema lui Pascal hexagonul $A_bA_cB_cB_aC_aC_b$ obţinem proprietatea enunţată.

21. (Fig. I.21) Patrulaterele ABB_1A_1 şi AA_1FD_1 sînt inscriptibile, deci $m(\widehat{BA_1B_1}) = m(\widehat{BAB_1})$ şi $m(\widehat{FA_1D_1}) = m(\widehat{FAD_1})$; unghiurile opuse la vîrf în A_1 sînt egale şi dreptele (A_1B_1), (A_1D_1) în prelungire, deci punctele A_1, B_1, D_1 sînt coliniare.

22. $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ABD}) = 90°$ fiind înscrise într-un semicerc, deci: $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ABD}) = 180°$.

23. (Fig. I.23) Fie D, E, F punctele în care paralelele din I la dreptele (MA_1), (MB_1), (MC_1) intersectează respectiv laturile BC, CA, AB şi P punctul unde bisectoarea AI intersectează cercul (AEF). Punctul P se află pe mediatoarea segmentului EF şi $m(\widehat{EIF}) = m(\widehat{B_1MC_1}) = 90° - \frac{1}{2}\, m(\hat{A})$, iar $m(\widehat{EPF}) = 180° - m(\hat{A})$. Deci P este centrul cercului circumscris triunghiului EIF. În cercul (AEF) avem $m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{APE})$, iar în cercul (IEF) avem $m(\widehat{APE}) = 2m(\widehat{AIE})$. Deci $m(\widehat{AFE}) = 2m(\widehat{AIE})$ şi analog avem

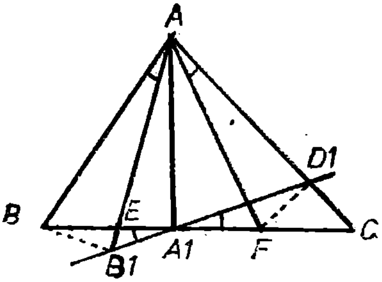


Fig. 1.21

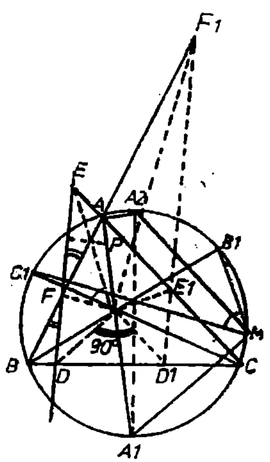


Fig. 1·23

$m(\widehat{BFD}) = 2m(\widehat{BID})$. Dar $m(\widehat{DIE}) = 90° + \frac{1}{2}\, m(\hat{C}) = m(\widehat{AIB})$. Rezúltă că $m(\widehat{AIE}) = m(\widehat{BID})$ și deci $m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{BFD})$. Fie A_2, B_2, C_2 punctele în care bisectoarele exterioare triunghiului ABC intersectează cercul circumscris, iar D_1, E_1, F_1 punctele în care paralelele duse prin I la MA_2, MB_2, MC_2 intersectează respectiv laturile BC, CA, AB. Analog se arată că punctele D_1, E_1, F_1 sînt coliniare, iar centrul cercului circumscris triunghiului IE_1F_1 este punctul P_1 unde bisectoarea AI intersectează cercul (AE_1F_1).

24. Fie E intersecția laturilor AB, CD; F intersecția laturilor BC, AD; M, N mijloacele diagonalelor AC, BD. Bisectoarea unghiului E intersectează laturile BC, AD în G, H, iar bisectoarea unghiului F intersectează laturile CD, AB în I și J. Patrulaterul $CHIJ$ este un romb. Bisectoarea FJ, conform teoremei bisectoarei: $\frac{AJ}{BJ} = \frac{AF}{BF}$; iar din triunghiurile asemenea AFC, BFD avem $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BD}$; deci $\frac{AJ}{BJ} = \frac{AC}{CD}$. Analog bisectoarea EH și triunghiurile asemenea AEC, DEB dau $\frac{AH}{DH} = \frac{AE}{DE} = \frac{AC}{BD}$. Rezultă că $\frac{AJ}{BJ} = \frac{AH}{DH}$ și deci $HJ \parallel BD$.

Analog $HI \parallel AC$. Dreapta (BM) intersectează segmentul GJ în mijlocul său K, iar (DM) intersectează segmentul IH în mijlocul său L. Dreapta (LK) trece deci prin punctul O, centrul rombului în care se intersectează cele două bisectoare. Cum $LK \parallel BD$, punctul O aparține medianei MN a triunghiului BMD.

25. Deoarece AD și CE sînt paralele $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{ACE})$, iar din patrulaterul $CIEP$ rezultă că $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{PIE})$ adică $m(\widehat{PIE}) = m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{PID})$, deci punctele I, E, D sînt coliniare.

Din patrulaterul $ECIQ$ avem $m(\widehat{ECQ}) + m(\widehat{EIQ}) = 180°$. Cum $m(\widehat{ECB}) = m(\widehat{FBC})$, iar $m(\widehat{FBC}) = m(\widehat{FIQ})$; $m(\widehat{FIQ}) = m(\widehat{ECQ})$ și deci $m(\widehat{FIQ}) + m(\widehat{EIQ}) = 180°$. Ceea ce arată că și punctele F, I, E sînt coliniare, adică punctele D, E, I, F sînt coliniare.

26. Fie BB' și CC' înălțimi ale triunghiului. Patrulaterul $ADHE$ este un dreptunghi. Cercul circumscris acestui dreptunghi are diagonalele AH și DE ca diametre și mai trece prin punctele B' și C'; $m(\widehat{B'HD}) = m(\widehat{DC})$ deoarece AD este bisectoarea interioară. Rezultă $DE \perp B'C'$ și diametrul DE trece prin punctul F mijlocul coardei $B'C'$. Patrulaterul $BCB'C'$ este inscriptibil în cercul de diametru BC și centrul M. Rezultă că (MF) este perpendiculară în F pe $B'C'$; iar pe aceeași dreaptă (MF) se află și punctele D și E, deci punctele D, E, M sînt coliniare.

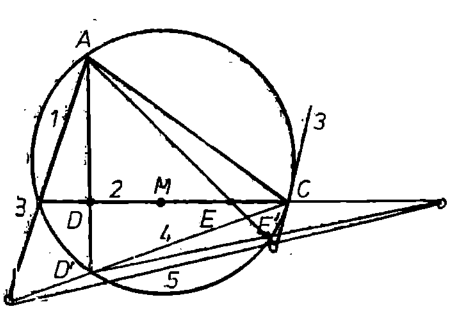


Fig. I.27

27. (Fig. I.27) i) Al patrulea vîrf comun al paralelogramului este simetricul vîrfului A față de mijlocul M, comun al segmentelor BC, DE.

ii) Aplicăm teorema medianei în triunghiurile ABC, ADE: $AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{AD^2 + AE^2}{2} - \frac{DE^2}{4}$.

iii) Scriem puterea punctelor D, E față de cerc și cum $BD \equiv CE$, $BE \equiv CD$, avem $DA \cdot DD' = DB \cdot DC = EC \cdot EB = EA \cdot EE'$.

iv) Avem $DD' = \frac{DB \cdot DC}{DA}$; $AD' = AD + \frac{DB \cdot DC}{DA} = \frac{AD^2 + DB \cdot DC}{DA}$.

Din relația lui Stewart:

$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = (AD^2 + DB \cdot DC) \cdot BC$ avem

$$AD' = \frac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{DA \cdot BC} \text{ deci}$$

$BC(AD \cdot AD' + AE \cdot AE') = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot EC + AC^2 \cdot BE$, $AB^2(DC + EC) + AC^2(BD + BE) = BC(AB^2 + AC^2)$, deoarece $BD \equiv EC$, $BE \equiv DC$.

v) Din asemănarea triunghiurilor $BD'D$ și ADC avem $D'B = \frac{AC \cdot DD'}{CD}$; analog $D'C = \frac{AB \cdot DD'}{BD}$; $E'B = \frac{AC \cdot EE'}{CE}$; $E'C = \frac{AB \cdot EE'}{BE}$.

vi) Aplicăm teorema lui Pascal hexagonului degenerat, format din dreptele (AB), (BC); (tangenta în C), (CD'); $(D'E')$, $(E'A)$. Intersecțiile laturilor opuse AB cu CD', BC cu $D'E'$, tangenta în C cu AE' sînt puncte coliniare.

Reamintesc teorema lui Blaise Pascal: laturile opuse unui hexagon înscris într-un cerc sînt concurente în puncte coliniare.

28. (Fig. I.28) Paralelogramele $ACBC'$ și $ABCB'$ sînt echivalente, deoarece $AB \parallel CB'$ și $AC \parallel BC'$, iar diagonalele CC' și BB' intersectează laturile în mijloacele lor. Deci $m(\hat{A}_1) = m(\hat{B}_1)$, $m(\hat{A}_3) = m(\hat{C}_1)$ ca unghiuri alterne interne, deci $m(\widehat{C'AB'}) = m(\hat{A}_1) + m(\hat{A}_2) + m(\hat{A}_3) = m(\hat{B}_1) + m(\hat{A}_2) + m(\hat{C}_1) = 180°$, deci punctele C', A, B' sînt coliniare.

29. (Fig. I.29) Patrulaterele $A_1AA'B$ și AA_2CA' sînt paralelograme (deoarece diagonalele se înjumătățesc) deci $A_1A \parallel BA'$ și $AA_2 \parallel A'C$, deci prin punctul A se duc două paralele la segmentul BC, deci paralelele se confundă $\Rightarrow$ punctele A_1, A, A_2 sînt coliniare.

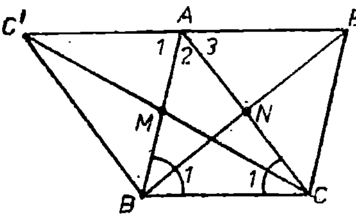


Fig. I.28

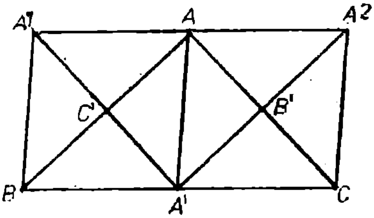


Fig. I.29

30. (Fig. I.30) Triunghiurile AMN și AMP sînt isoscele deoarece înălțimea este și mediană, deci $m(\hat{A}_1) = m(\hat{A}_2)$ și $m(\hat{A}_3) = m(\hat{A}_4) \Rightarrow m(\widehat{NAP}) = 2m(\hat{A}_2) + 2m(\hat{A}_3) = 2 \cdot 90° = 180°$, deci punctele N, A, P sînt coliniare.

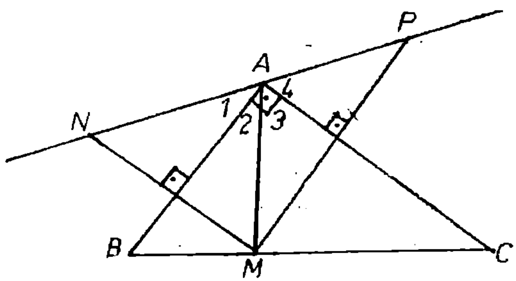


Fig. I.30

31. (Fig. I.31). Cum punctele M', N', P' sînt coliniare, din ipoteză, atunci va fi verificată teorema lui Menelaus, deci $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$. Dar $\triangle ABC \sim \triangle ANP' \sim \triangle CMN \sim$

$$\sim \triangle BM'P \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{N'A}{N'C}, \quad \frac{NC}{NA} = \frac{P'B}{P'A}, \quad \frac{PA}{PB} = \frac{M'C}{M'B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{M'C}{M'B} \cdot \frac{N'A}{N'C} \cdot \frac{P'B}{P'A} = 1$$ și conform reciprocei teoremei lui Menelaus punctele M', N', P' sînt coliniare.

32. (Fig. I.32) Vom considera medianele și înălțimile ca două triplete de ceviene, deci aplicînd teorema lui Menelaus obținem:

$$\frac{MC}{MB} \cdot \frac{C'B}{C'A} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} = 1$$

$$\frac{NA}{NC} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} = 1$$

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{A_1C}{A_1B} = 1$$

și înmulțind cele trei șiruri de rapoarte obținem:

$$\frac{MC}{MB} \cdot \frac{NA}{NC} \cdot \frac{PA}{PC} = 1,$$

deci conform reciprocei teoremei lui Menelaus, cele trei puncte, N, M, P, sînt coliniare.

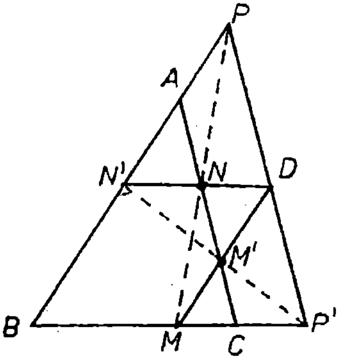


Fig. I.31

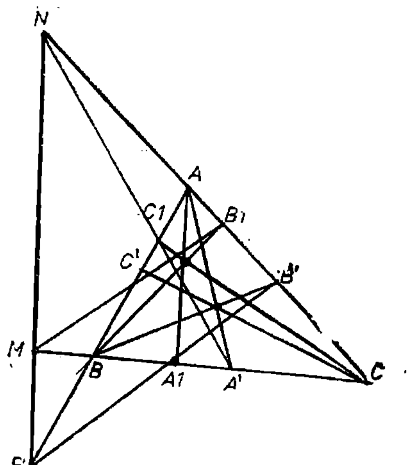


Fig. I.32

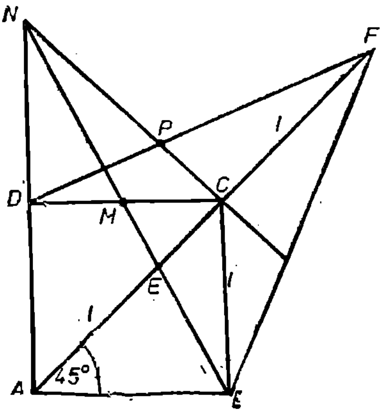


Fig. I.33

33. (Fig. I.33). În triunghiul ACN, pentru care (FPD) este transversală se aplică teorema lui Menelaus:

$$\frac{FA}{FC} \cdot \frac{PC}{PN} \cdot \frac{DN}{DA} = 1.$$

Cum $m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{CBF}) = \frac{45^\circ}{2} \Rightarrow BC$ este bisectoarea interioară, iar AB este bisectoarea exterioară unghiului EBF, deci punctele A și C sînt conjugate armonic față de punctele E și F adică: $\frac{FA}{FC} = \frac{EA}{EC}$, relație care înlocuită în primul șir de rapoarte va genera: $\frac{EA}{EC} \cdot \frac{PC}{PN} \cdot \frac{DN}{DA} = 1$ și conform reciprocei teoremei lui Ceva, aplicată în $\triangle ACN$, punctele A, M, P sînt coliniare, deoarece punctul M este punctul comun celor trei ceviene.

34. (Fig. I.34) $\triangle BCD \sim \triangle MAC \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AD}{AC}$. $\triangle ABD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AC}$ și înlocuind pe AD în prima relație obținem:

$$\frac{MB}{MC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Repetînd raționamentul obținem:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1,$$

deci punctele M, N, P sînt coliniare.

35. (Fig. I.35) Cum A', B', C' sînt proiecțiile punctului M pe laturile triunghiului atunci patrulaterele $MB'AC'$ și

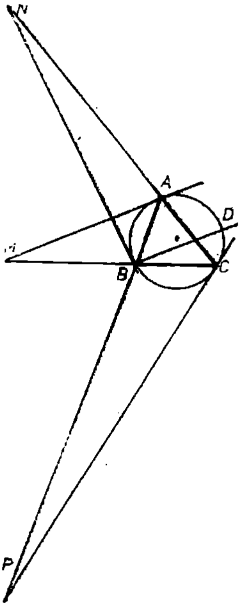


Fig. I.34

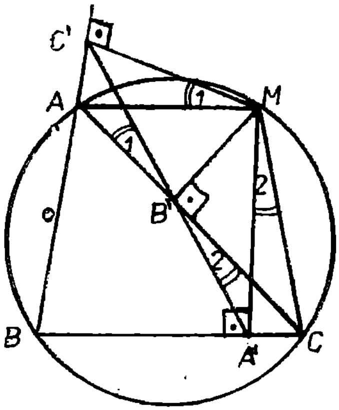


Fig. I.35

$MB'A'C$ sînt inscriptibile $\Rightarrow$ m$(\hat{B_1'})$ = m$(\hat{M_1})$ și m$(\hat{B_2'})$ = = m$(\hat{M_2})$. Dar m$(\hat{M_1})$ = m$(\hat{M_2})$ deoarece au complemente unghiurile egale $C'AM$ și MCA' (patrulaterul $AMCB$ fiind inscriptibil) $\Rightarrow$ m$(\hat{B_1'})$ = m$(\hat{B_2'})$, deci punctele C', B', A' sînt coliniare.

36. (Fig. I. 36) m$(\widehat{O'AO})$ + m$(\widehat{AON})$ = 180°, m$(\widehat{AON})$= = m$(\widehat{OAM})$ + m$(\widehat{OMA})$, m$(\widehat{OMA})$ = m$(\widehat{O'AM'})$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ m$(\widehat{MAO})$ + m$(\widehat{OAO'})$ + + m$(\widehat{O'AM'})$ = 180° $\Rightarrow$ punctele M, A, M' sînt coliniare.

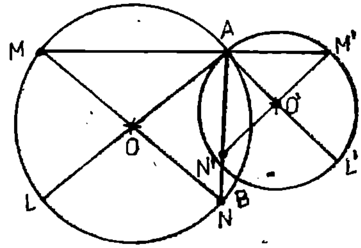


Fig. I.36

Din ascmănarea triunghiurilor AON și $AO'N'$ deducem

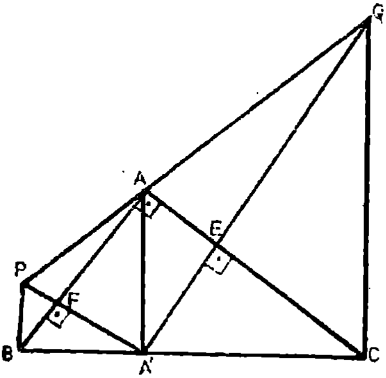


Fig. I.37

$m(\widehat{OAN}) = m(\widehat{AN'O'}) = m(\widehat{OAN'})$, deci dreptele (AN) și (AN') sînt confundate.

37. (Fig. I. 37) Cum triunghiurile dreptunghice ECQ, ECA', $AA'E$, ABC sînt asemenea, rezultă că $\frac{EQ}{AC-AE} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ sau $c\cdot\frac{EQ}{AE} = \frac{b^2}{AE} - b$.

— Aplicînd teorema catetei în triunghiul $AA'C \Rightarrow AE = \frac{AA'^2}{AC} = \frac{bc^2}{b^2+c^2}$ care substituită în prima relație obținem: $\frac{EQ}{AE} = \left(\frac{b}{c}\right)^3$. Printr-un raționament analog deducem $\frac{PF}{AF} = \left(\frac{c}{b}\right)^3 \Rightarrow \frac{AF}{PF} = \frac{EQ}{AE}$.

$\triangle AEQ \sim \triangle PFA \Rightarrow m(\widehat{PAF}) = m(\widehat{AQE})$ și deci punctele P, A, Q sînt coliniare.

38. (Fig. I. 38) Fie $\{P\} = (M_1N_1) \cap (BC)$, $\{Q\} = (M_2N_2) \cap (AC)$, $\{R\} = (M_3N_3) \cap (AB)$. Aplicînd teorema lui Menelaus în triunghiul ABC pentru punctele coliniare M_1, N_1, P obținem:

$$\frac{AM_1}{BM_1}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CN_1}{AN_1} = 1$$

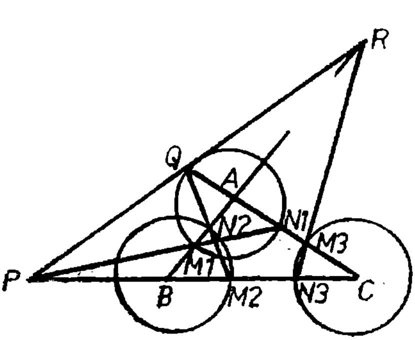


Fig. I.38

și notînd $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ și cu r raza cercurilor, din relația precedentă avem:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{c-r}{b-r}.$$

Analog pentru secantele QN_2M_2 şi RM_3N_3: $\frac{QC}{QA} = \frac{a-r}{c-r}$, $\frac{RA}{RB} = \frac{b-r}{a-r} \Rightarrow \frac{BP}{CP} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1$ deci punctele P, Q, R sînt coliniare conform reciprocei teoremei lui Meneleus.

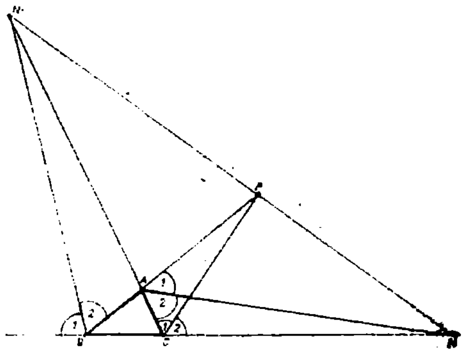


Fig. I.39

39. (Fig. I. 39). Se aplică teorema bisectoarei: $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC}$, $\frac{CA}{CB} = \frac{PA}{PB}$, $\frac{BC}{BA} = \frac{NC}{NA}$. Înmulţind cele trei şiruri de rapoarte obţinem: $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{PA}{PB} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CA}{CB} \cdot \frac{BC}{BA} = 1$, deci conform reciprocei teoremei lui Menelaus, punctele M, N, P sînt coliniare.

40. Conform teoremei lui Tales, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ şi conform reciprocei teoremei fundamentale a asemănării $DE \parallel BC$.

Dar $\frac{EE'}{BE} = \frac{AD}{DB} = K$ şi $\frac{DD'}{CD} = \frac{AE}{EC} = K$, deci conform celor două teoreme amintite rezultă că $AE' \parallel DE$ şi $AD' \parallel DE$, deci cum printr-un punct exterior unei drepte se duce o singură paralelă la dreapta considerată, rezultă că punctele D', A, E' sînt coliniare.

41. (Fig. I. 41) $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{COE})$ şi $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{DOE})$ ca unghiuri înscrise, iar patrulaterul $ACOD$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{COD}) = 180° - m(\hat{A})$. Dar $m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{ADE}) + m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{COE}) + m(\widehat{DOE}) + m(\widehat{CAD}) = 180°$, deci punctele C, E, D sînt coliniare.

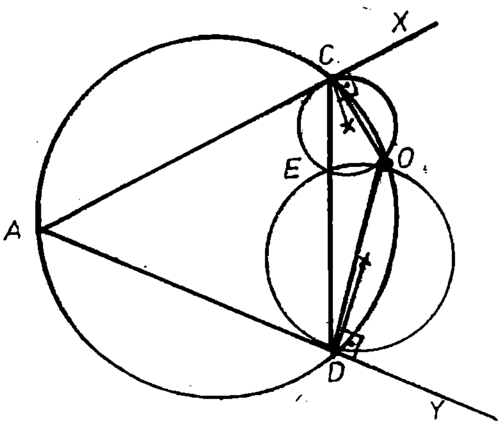


Fig. I.41

42. Notăm $AC = b$, $AB = c$, $AK = x$, $AL = y$ şi relaţia din enunţ se scrie:

$$\frac{c - x}{x} + \frac{b - y}{y} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{c}{x} + \frac{b}{y} = 3.$$

Fie G intersecţia segmentului KL cu mediana AA' dusă din A. Paralela dusă prin G la AC intersectează pe AB în M şi pe BC în N. Din $\triangle KMS \sim \triangle KAL$ avem $\frac{MG}{AL} = \frac{MK}{AK}$. Dacă G ar fi centrul de greutate al triunghiului ABC atunci

$$AM = \frac{c}{3}, \quad MG = \frac{b}{3} = GN, \quad CN = \frac{a}{3}$$

şi astfel relaţia precedentă devine:

$$\frac{\frac{b}{3}}{y} = \frac{x - \frac{c}{3}}{x}, \text{ sau } \frac{b}{3y} = 1 - \frac{c}{3x} \Rightarrow \frac{b}{3y} + \frac{c}{3x} = 1, \ \frac{b}{y} + \frac{c}{x} = 3,$$

adică relaţia iniţială şi deci dreapta (KL) trece prin centrul de greutate G.

43. Fie P_1 intersecţia lui MN cu AB, iar P_2 intersecţia lui NG cu AB. Teorema lui Menelaus aplicată triunghiurilor

ABC și ABD intersectate respectiv de secantele (MH) și (NG) ne dă:

$$\frac{MC}{MB}\cdot\frac{BP_1}{P_1A}\cdot\frac{AH}{HC}=1 \qquad (1)$$

$$\frac{ND}{NA}\cdot\frac{AP_2}{P_2B}\cdot\frac{BG}{GD}=1 \qquad (2)$$

Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiurilor BCD și ACD intersectate respectiv de secantele (MG) și (NH) obținem

$$\frac{MC}{MB}\cdot\frac{BG}{GD}\cdot\frac{DE}{EC}=1 \qquad (3)$$

$$\frac{ND}{NA}\cdot\frac{AH}{HC}\cdot\frac{EC}{ED}=1. \qquad (4)$$

Egalăm relațiile (1) cu (3) și (2) cu (4) și avem:

$$\frac{BP_1}{P_1A}=\frac{BG}{GD}\cdot\frac{DE}{EC}\cdot\frac{HC}{AH}$$

$$\frac{BP_2}{P_2A}=\frac{BG}{GD}\cdot\frac{DE}{EC}\cdot\frac{HC}{AH}$$

$\Rightarrow \frac{BP_1}{AP_1}=\frac{BP_2}{AP_2}$, deci punctele P_1 și P_2 se confundă și dreptele (MH), (NG) sînt concurente pe latura AB.

44. i) Următoarele patrulatere sînt inscriptibile: $AEBF$ deoarece $m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{AFB}) = 90°$; $ADBE$ deoarece $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{AEB}) = 90°$, $ACBF$ deoarece $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AFB}) = 90°$. Rezultă deci că punctele A, B, C, D, E, F, sînt conciclice.

ii) Fie $\{R\} = (\Delta) \cap (CF)$. Din $m(\widehat{BMR}) = m(\widehat{BAN}) = \frac{m(\widehat{BN})}{2}$ și $m(\widehat{BCR}) = m(\widehat{BAN})$ (din patrulaterul inscriptibil $CBAF$) rezultă: $m(\widehat{BMR}) = m(\widehat{BCR})$.

Deci patrulaterul $BMCR$ este inscriptibil $\Rightarrow m(\widehat{BRM}) = m(\widehat{BCM}) = 90°$. Aceasta arată că dreapta (CF) intersectează pe (Δ) în piciorul perpendicularei duse din B pe (Δ)

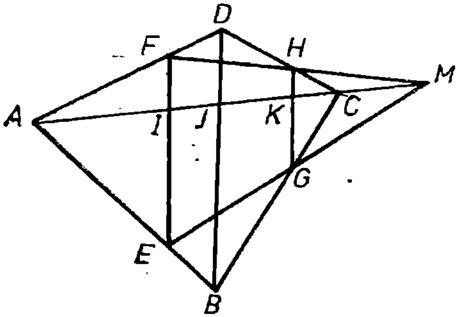


Fig. I.45

Analog se demonstrează că dreapta (DE) intersectează pe (Δ) în același punct.

45. (Fig. I. 45) Dreptele concurente (AB), (AJ), (AD) determină pe paralelele EF și BD segmente proporționale:

$$\frac{IF}{IE} = \frac{JD}{JB}.$$

Analog considerînd dreptele concurente (CB), (CJ), (CD), avem:

$$\frac{KH}{KG} = \frac{JD}{JB}$$

deci

$$\frac{IF}{IE} = \frac{KH}{KG};$$

adică dreptele (FH), (IK), (EG) sînt concurente.

Altă soluție: fie M_1, M_2 punctele unde dreptele (FH), (EG) intersectează pe AC și aplicînd teorema lui Menelaus triunghiurilor DAC, BAC intersectate de transversalele (FHM_1), (EGM_2) obținem:

$$\frac{M_1C}{M_1A} \cdot \frac{FA}{FD} \cdot \frac{HD}{HC} = 1, \quad \frac{M_2C}{M_2A} \cdot \frac{EA}{EB} \cdot \frac{GB}{GC} = 1$$

dar cum

$$\frac{FA}{FD} = \frac{EA}{EB} \quad \text{și} \quad \frac{HD}{HC} = \frac{GB}{GC}$$

rezultă că:

$$\frac{M_1C}{M_1A} = \frac{M_2C}{M_2A};$$

adică punctele M_1, M_2 sînt confundate.

Observație: Triunghiurile AEF și CHG au proprietatea că punctele de intersecție ale perechilor de laturi (AF, CH),

(AE, CG) și (EF, GH) sînt coliniare, unul din puncte fiind punctul de la infinit al dreptei (BD). Conform reciprocei teoremei lui D e s a r g u e s dreptele care unesc vîrfurile corespunzătoare sînt drepte concurente.

Reamintesc teorema lui Desargues:
din punctul V pornesc trei semidrepte a, b, c, necoplanare toate trei. Pe semidreapta a luăm punctele A, A', pe semidreapta b luăm punctele B, B', pe semidreapta c luăm punctele C, C', astfel încît laturile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ să nu fie respectiv paralele. Atunci dreptele (AB) și $(A'B')$, (BC) și $(B'C')$, (CA) și $(C'A')$ sînt concurente în trei puncte coliniare.

Demonstrație: punctele A, A' și C, C' sînt coplanare, deoarece aparțin dreptelor (a) și (c) care sînt concurente. Din ipoteză dreptele (AC) și $(A'C')$ nu sînt paralele, deci fiind coplanare sînt concurente în punctul N.

Analog, demonstrăm că $(AB) \cap (A'P') = \{P\}$ și $(BC) \cap$ $\cap (B'C') = \{M\}$. Dar punctele M, N, P situate pe dreptele (BC), (CA), (AB) aparțin planului triunghiului ABC; aceleași puncte M, N, P fiind situate și pe dreptele $(B'C')$, $(C'A')$, $(A'B')$, aparțin și planului triunghiului $A'B'C'$, deci sînt situate pe dreapta de intersecție a planelor, deci punctele M, N, P sînt coliniare.

Observații: i) dacă două laturi ale triunghiului sînt paralele, de exemplu $AC \parallel A'C'$ și restul enunțului rămîne același, atunci $MP \parallel A'C' \parallel AC$.

ii) dacă $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$ atunci și $AB \parallel A'B'$ și planul triunghiului ABC este paralel cu cel al triunghiului $A'B'C'$.

iii) dacă vom conveni să spunem că două drepte paralele au un punct comun la infinit și că două plane paralele au o dreaptă comună la infinit, în enunțul teoremei nu mai este nevoie să specificăm că laturile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ nu sînt respectiv paralele.

46. (Fig. I. 46) Segmentele OA' și BC înjumătățindu-se, figura $BOCA'$ este un paralelogram; analog $COAB'$ și $AOBC'$ sînt paralelograme. Rezultă $OB \parallel A'C$, $OB \equiv A'C$, $OB \parallel AC'$, $OB \equiv AC'$ deci patrulaterul $ACA'C'$ este un paralelogram și diagonala AA' trece prin mijlocul segmentului CC'.

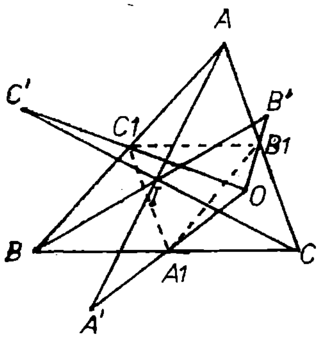


Fig. 1.46

Analog, patrulaterul $BCB'C'$ este un paralelogram și diagonala BB' trece prin mijlocul segmentului CC'. Dreptele (AA'), (BB'), (CC') sînt deci concurente.

Altă soluție: fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC. În triunghiurile ABC și $OA'B'$, A_1B_1 unind mijloacele a două laturi rezultă:

$$A_1B_1 \parallel AB \text{ și } A_1B_1 = \frac{AB}{2};$$

$$A_1B_1 \parallel A'B' \text{ și } A_1B_1 = \frac{A'B'}{2},$$

deci patrulaterul $ABA'B'$ este un paralelogram și diagonala AA' trece prin mijlocul segmentului BB'.

Analog patrulaterul $BCB'C$ este un paraleogram și CC' trece prin mijlocul segmentului BB'.

47. Deoarece AY și AZ sînt izogonale față de AB și AC rezultă că $m(\widehat{YAC}) = m(\widehat{ZAB}) = \alpha$. În mod analog $m(\widehat{ZBA}) = m(\widehat{XBC}) = \beta$ și $m(\widehat{XCB}) = m(\widehat{YCA}) = \gamma$. Din triunghiurile dreptunghice BXX', CXX' deducem $BX' = XX' \cdot \operatorname{ctg}\beta$; $CX' = XX \cdot \operatorname{ctg}\gamma$ și deci rezultă $\frac{BX'}{X'C} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\gamma}$.

În mod analog obținem relațiile:

$$\frac{CY'}{Y'A} = \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \frac{AZ'}{Z'B} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\gamma}. \text{ Deci } \frac{BX'}{X'C}\cdot\frac{CY'}{Y'A}\cdot\frac{SZ'}{Z'B} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\gamma}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta} = 1$$

ceea ce conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă că (AX'), (BY'), (CZ') sînt drepte concurente.

48. (Fig. I. 48) i) AA_1CC_1, AC_2CA_2 sînt dreptunghiuri şi cum diagonalele se înjumătăţesc, A_1C_1 şi A_2C_2 trec prin mijlocul segmentului AC.

ii) $m(\hat{A}) = 60°$.

49. (Fig. I.49) Cum $IB_1 \equiv IC_1$, $IC_2 \equiv IA_2$, $IA_3 \equiv IB_3$, atunci $B_3C_2 \parallel BC$. Punctul P_1 este situat pe mediana din A. Dreptele (AP_1), (BP_2), (CP_3) se intersectează în centrul de greutate G al triunghiului ABC.

50. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului $BC'B'$ intersectat de dreapta (DD') obţinem $\frac{DB'}{DC} \cdot \frac{CD'}{D'B} \cdot \frac{BM}{MB'} = 1$ unde M este intersecţia dreptelor (BB') şi (DD'). Aplicînd aceeaşi teoremă triunghiului BQB' intersectat de dreapta (AA') obţinem: $\frac{AQ}{AB} \cdot \frac{BN}{NB'} \cdot \frac{A'B'}{A'Q} = 1$, N fiind intersecţia dreptelor (AA') şi (BB'). Din cele două relaţii se obţine $\frac{BM}{MB'} = \frac{BN}{NB'}$ şi deci punctele M şi N coincid.

ii) Fie R punctul de intersecţie a dreptelor $(B'D')$ şi (BD), iar S punctul de intersecţie a dreptelor (PQ) şi (BD). Cu ajutorul teoremei lui Menelaus obţinem relaţiile $\frac{RB}{RD} \cdot \frac{BD'}{B'C} \cdot \frac{CD'}{D'B} = 1$ şi $\frac{SB}{SD} \cdot \frac{DP}{PA} \cdot \frac{AQ}{QB} = 1$ de unde $\frac{RB}{RD} = \frac{SB}{SD}$ şi deci punctele R şi S coincid.

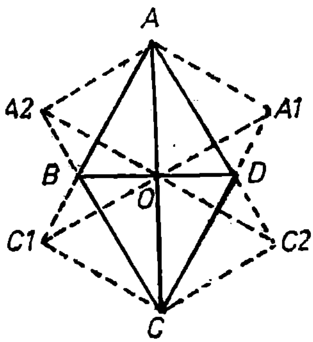


Fig. I.48

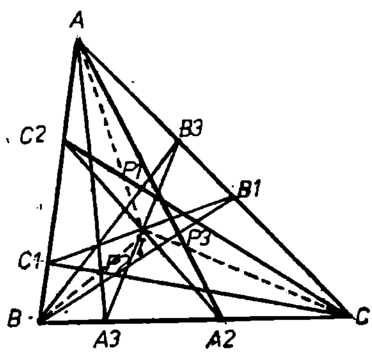


Fig. I.49

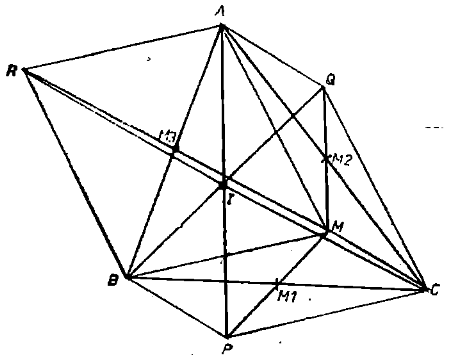


Fig. I.51

51. (fig. I.51). Patrulaterele $BPCM$, $CMAQ$, $AMBR$ sînt paralelograme deoarece diagonalele se înjumătățesc, deci $PC \overset{\parallel}{\equiv} BM \overset{\parallel}{\equiv} AR$, $BP \overset{\parallel}{\equiv} MC \overset{\parallel}{\equiv} AQ$, $QC \overset{\parallel}{\equiv} AM \overset{\parallel}{\equiv} RB \Rightarrow$ patrulaterele $PCAR$ și $BPQA$ sînt paralelograme deoarece au laturile opuse paralele și congruente, deci diagonalele AP și RC respectiv AP și BQ se înjumătățesc într-un același punct I, deci dreptele (AP), (BQ), (CR) sînt concurente în punctul I.

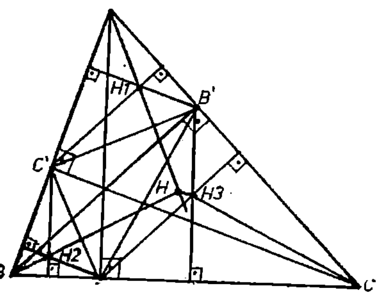


Fig. I.52 i

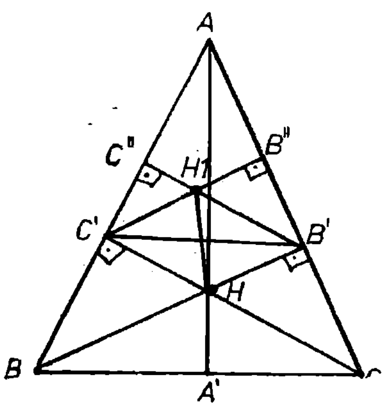


Fig. I.52. ii

52. (Fig. I.52) i) Punctele H_1, H_2, H_3 sînt simetricele ortocentrului H al triunghiului ABC, față de mijloacele segmentelor $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, deoarece patrulaterele $HB'H_1C'$, $HC'H_2A'$, $HA'H_3B'$ sînt paralelograme ca avînd laturile opuse paralele. Se aplică rezolvarea problemei precedente pentru triunghiul ortic $A'B'C'$, punctul H în interiorul triunghiului ortic și H_1, H_2, H_3 simetricele punctului H față de mijloacele laturilor triunghiului ortic, deci dreptele $(A'H_1)$, $(B'H_2)$, $(C'H_3)$ sînt concurente.

ii) Dreptele (AH_1), (BH_2), (CH_3) sînt înălțimi în triunghiurile $AB'C'$, $BA'C'$, $CB'A'$, deci perpendiculare pe laturile triunghiului ortic și paralele cu înălțimile triunghiului ortic.

53. Notăm cu M, N, P proiecțiile vîrfurilor A', B', C' respectiv pe laturile BC, AC, BA. Din triunghiul $A'BC$ se obține $A'M^2 = A'B^2 - BM^2 = A'C^2 - MC^2$ de unde $BM^2 - MC^2 = A'B^2 - A'C^2$; analog din triunghiurile $B'AC$ și $C'AB$ rezultă $CN^2 - AN^2 = B'C^2 - AB'^2$ și respectiv $AP^2 - BP^2 = C'A^2 - C'B^2$.

Adunînd cele trei relații și ținînd seama că $A'B \equiv AB'$, $A'C \equiv AC'$, $BC' \equiv B'C$ ca diagonale în trapeze isoscele, se obține relația din problema precedentă.

54. i) Centrul cercului înscris în triunghiul $A'BC$ este mijlocul arcului BC. Prin urmare AA_1 este bisectoarea interioară a unghiului BAC al triunghiului. Rezultă că (AA_1), (BB_1), (CC_1) sînt drepte concurente.

ii) Deoarece $AC' \equiv BC'$, $BA' \equiv CA'$, $CB' \equiv AB'$ rezultă că $\dfrac{AB'}{AC'} \cdot \dfrac{BC'}{BA'} \cdot \dfrac{CA'}{CB'} = 1$ și conform reciprocei teoremei lui Ceva dreptele (AA'), (BB'), (CC') sînt concurente.

55. i) Dacă perpendicularele sînt concurente în punctul O atunci $BM^2 - CM^2 = BO^2 - CO^2$, $CN^2 - AN^2 = CO^2 - AO^2$, $AP^2 - BP^2 = AD^2 - BO^2$ și prin urmare $BM^2 - CM^2 + CN^2 - AN^2 + AP^2 - BP^2 = 0$. *Reciproc*: să presupunem egalitatea din enunț adevărată; fie punctul O intersecția perpendicularelor din M și N, iar punctul Q proiecția punctului O pe AB. Atunci $BM^2 - CM^2 + CN^2 - AN^2 + AQ^2 - BQ^2 = 0$, care împreună cu relația dată implică relația $AP^2 - BP^2 = AQ^2 - BQ^2$, de unde $AP - BP = AQ - BQ$ și deci punctul Q coincide cu punctul P.

ii) Fie M, N, P proiecțiile punctelor A', B', C' pe BC, CA, AB. Condiția $BM^2 - CM^2 + CN^2 - AN^2 + BP^2 = 0$, se transcrie în $A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0$, care exprimă o condiție necesară și suficientă ca perpendicularele din A', B', C', pe BC, CA, AB să fie concurente. Această ultimă relație fiind simetrică în tripletele (A, B, C), (A', B', C') este, atunci, echivalentă cu afirmația: perpendicularele duse din A, B, C pe dreptele $(B'C')$, $(C'A')$, (A,B') sînt concurente.

iii) Triunghiul ortic este format de picioarele înălţimilor unui triunghi; cum, evident perpendicularele din vîrfurile triunghiului ortic pe laturile triunghiului sînt concurente, după punctul ii) rezultă că perpendicularele din vîrfurile triunghiului pe laturile triunghiului ortic corespunzător sînt concurente.

iv) Ţinînd seama că $A'B = \frac{c}{b+c}a$, etc. condiţia de la ii) se scrie: $k(b-c)(c-a)(a-b) = 0$, unde k este un factor nenul, de unde rezultă afirmaţia.

56. Se aplică problema precedentă observînd că A_2 este simetricul piciorului înălţimii din A faţă de mijlocul laturii BC.

Se poate aplica şi următoarea problemă (propusă spre rezolvare): Într-un triunghi oarecare ABC, notăm cu A_1, B_1, C_1 simetricele picioarelor înălţimilor faţă de mijloacele laturilor respective. Să se demonstreze că perpendicularele duse în A_1, B_1, C_1 pe laturile BC, CA, AB sînt concurente.

57. $CA_2 \equiv CB_2$, deci $A_2B_2 \perp CC_1$. Unghiul făcut de A_1B_1 cu CC_1 are ca măsură $\frac{1}{2}[m(\widehat{CB_1}) + m(\widehat{A_1B}) + m(\widehat{BC_1})] = \frac{180°}{2} = 90°$. Rezultă $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ sînt omotetice şi deci dreptele (A_1B_2), (B_1B_2), (C_1C_2) sînt concurente în centrul de omotetie. Cercurile $(A_1B_1C_1)$ şi $(A_2B_2C_2)$ au acelaşi centru de omotetie CO; acesta se află deci pe dreapta OI astfel ca $\frac{\omega I}{\omega O} = \frac{r}{R}$.

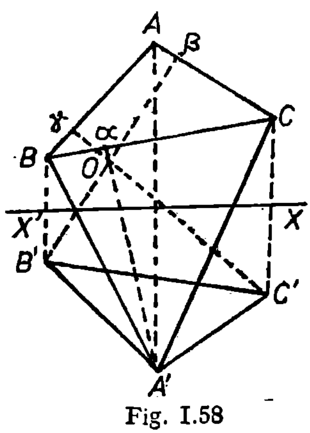


Fig. I.58

58. (Fig. I.58). Fie α, β, γ proiecţiile punctelor A', B', C', pe laturile BC, CA, AB. Avem $B\alpha^2 - C\alpha^2 = BA'^2 - CA'^2$ şi încă două relaţii analoage care se adună. Proprietatea rezultă din faptul că înălţimile sînt concurente şi observînd că $AB' \equiv BA'$, $BC' \equiv CB'$, $CA' \equiv AC'$.

59. Fie $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ proiecţiile punctelor A, B, C, A', B', C', respectiv pe dreptele $(B'C')$, $(C'A')$, $(A'B')$, (BC), (CA), (AB). Trebuie demonstrat că dacă avem relaţia $B'\alpha^2 - C'\alpha^2 + C'\beta^2 - A'\beta^2 + A'\gamma^2 - B'\gamma^2 = 0$ avem şi $B\alpha'^2 - C\alpha'^2 + C\beta'^2 - A\beta'^2 + A\gamma'^2 - B\gamma'^2 = 0$. Se va demonstra că primele părţi ale celor două egalităţi sînt egale cu $B'A^2 - C'A^2 + C'B^2 - A'B^2 + A'C^2 - B'C^2$.

60. Se observă că $\sigma[ABB']/\sigma[ACC'] = (AB \cdot AB')/(AC \cdot AC') = 1$. Dreptele (AA'), (BB'), (CC') intersectează laturile BC, CA, AB, în A_1, B_1, C_1. $\sigma[BAA']/\sigma[CAA'] = -BA_1/CA_1$, se va deduce $BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1 = -CA_1 \cdot BC_1 \cdot AB_1$, deci conform teoremei lui Ceva dreptele sînt concurente.

61. (Fig. I.61). Dreptele (AA_1) şi (BB_1) se intersectează în punctul O_1. Va trebui să se arate că O_1, C_1, C sînt puncte coliniare. Se aplică teorema lui Menelaus triunghiului $AB'C'$ intersectat de transversala (BCA') şi triunghiului AA_1C'

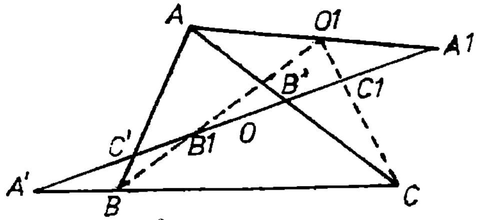


Fig. I.61

intersectat de transversala (B_1BO_1). Se va deduce prin înmulţiri şi înlocuiri de segmente congruente că $\frac{O_1A}{O_1A_1} \cdot \frac{C_1A_1}{C_1A'} \cdot \frac{CB'}{CA} = 1$, deci conform reciprocei teoremei lui Menelaus punctele O_1, C_1, C sînt coliniare.

62. Dacă notăm $\{A_3\} = (AA_1) \cap (BC)$, atunci teorema lui Menelaus aplicată triunghiurilor A_3BC_2 şi A_3B_2C intersectate de transversala (A_1MA_2) ne dă:

$$\frac{MB}{MA_2} \cdot \frac{A_1A_2}{A_1C_2} \cdot \frac{A_2C_2}{A_2B} = 1;$$

$$\frac{MA_3}{MC} \cdot \frac{A_2C}{A_2B_2} \cdot \frac{A_1B_2}{A_1A_3} = 1,$$

de unde:

$$\frac{MB}{MC}=\frac{A_1C_2}{A_1B_2}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{A_2B_2}{A_2C_2}.$$

În mod analog obţinem:

$$\frac{NC}{NA}=\frac{B_1A_2}{B_1C_2}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{B_2C_2}{B_2A_2};$$

$$\frac{PA}{PB}=\frac{C_1B_2}{C_1A_2}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}\cdot\frac{C_2A_2}{C_2B_2}.$$

Înmulţind aceste trei relaţii, obţinem:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=\frac{A_1C_2}{A_1B_2}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_1A_2}{B_1C_2}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_1B_2}{C_1A_2}\cdot$$

$$\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=\frac{A_1C_2\cdot C_2A}{B_1C_2\cdot C_2B}\cdot\frac{B_1A_2\cdot A_2B}{C_1A_2\cdot A_2C}\cdot\frac{C_1B_2\cdot B_2C}{A_1B_2\cdot B_2A}.$$

Cum însă

$$A_1C_2\cdot C_2A=B_1C_2\cdot C_2B;\quad B_1A_2\cdot A_2B=C_1A_2\cdot A_2C;$$
$$C_1B_2\cdot B_2C=A_1B_2\cdot B_2A,$$

rezultă că

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1.$$

Conform reciprocei teoremei lui Ceva, rezultă că dreptele (AM), (BN), (CP) sînt concurente.

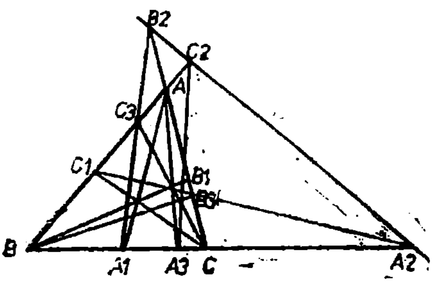


Fig. I.63

63. (Fig. I.63). Conform teoremei lui Ceva avem:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1,$$

iar teorema lui Menelaus ne dă:

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=1.$$

Aplicînd teorema lui Menelaus în triunghiul ABC cu transversalele (A_1B_2), (B_1C_2), (C_1A_2) obținem:

$$\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=1;\quad \frac{C_2B}{C_2A}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{A_3C}{A_3B}=1;$$

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_3C}{B_2A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1.$$

Din aceste ultime trei relații deducem:

$$\frac{A_3B}{A_3C}\cdot\frac{B_3C}{B_3A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=1.$$

Ținînd seama de primele două relații, rezultă:

$$\frac{A_3B}{A_3C}\cdot\frac{B_3C}{B_3A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B}=1,$$

adică conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele (AA_3), (BB_3), (CC_3) sînt concurente.

64. (Fig. I.64) Notăm $\{A_3\}=(AA_1)\cap(BC)$ · Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiurile BC_2A_3, CB_2A_3 intersectate de transversala (A_1MA_2) avem

$$\frac{MB}{MA_3}\cdot\frac{A_1A_3}{A_1C_2}\cdot\frac{A_2C_2}{A_2B}=1,\quad \frac{MA_3}{MC}\cdot\frac{A_1B_2}{A_1A_3}\cdot\frac{A_2C}{A_2B_2}=1.$$

Prin înmulțire avem

$$\frac{MB}{MC}=\frac{A_1C_2}{A_1B_2}\cdot\frac{A_2B_2}{A_2C_2}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}.$$

În mod analog avem rapoarte obținute prin permutări circulare; deci

$$\prod\frac{MC}{MB}=\prod\frac{A_1C_2}{A_1B_2}\cdot\prod\frac{A_2B}{A_2C}=$$

$$=\prod\frac{C_2A_1\cdot C_2A}{C_2B_1\cdot C_2B}=1.$$

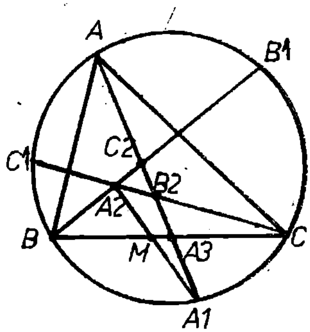


Fig. I.64

Pentru punctele A_1, B_1, C_1 situate pe arcele BC, CA, AB

punctele M, N, P sînt interioare laturilor. Conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele (AM), (BN), (CP) sînt concurente. Aceeași situație are deci loc, oricare ar fi poziția punctelor A_1, B_1, C_1 pe cerc.

65. i) Fie BM înălțimea din B în triunghiul DBC. Dreapta (CD) fiind perpendiculară pe dreptele (AB)și (BM) este perpendiculară pe planul (ABM).

Fie AH_a, BH_b înălțimile din A și B ale triunghiului ABM: $AH_a \perp BM$, $BH_b \perp AM$. Aceste drepte sînt înălțimi ale piramidei. În adevăr, AH_a este perpendiculară pe planul (BCD) fiind perpendiculară pe CD și pe BM. Evident ele sînt concurente, dar și înălțimile din C și D sînt concurente.

ii) Să admitem că și perechea (BC, AD) este format din drepte perpendiculare. Atunci BC este perpendiculară pe planul (AH_aD) și prin urmare H_a este ortocentrul triunghiului BCD; analog H_b este ortocentrul triunghiului ACD. Atunci BD este perpendiculară pe CH_a și cum este perpendiculară pe AH_a rezultă că este perpendiculară pe AC. Ultima afirmație rezultă astfel: planul (BH_bC) este perpendicular pe planul (ABD), deoarece AD este perpendiculară pe BC și pe BH_b. La fel planul (ABH_a) este perpendicular pe planul (ABD). Muchia acestor plane este înălțimea din C și este concurentă cu înălțimile AH_a, BH_b.

66. (Fig. I.66) i) Fie B și C mijloacele muchiilor A_2B_3 și A_3A_4. Deoarece $M_2M_4 \parallel G_2G_4 \parallel BC$ și $BC \parallel A_2A_4$ rezultă că $M_2M_4 \parallel A_2A_4$.

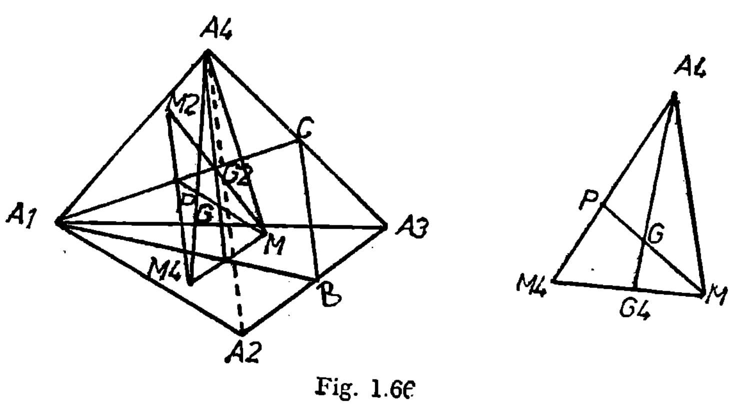


Fig. 1.66

Ţinînd seama că:

$$BC = \frac{A_2A_4}{2}, \ G_2G_4 = \frac{M_2M_4}{2} \text{ şi } \frac{G_2G_4}{BC} = \frac{A_1G_4}{A_1C} = \frac{2}{3}$$

se obţine

$$\frac{M_2M_4}{A_2A_4} = \frac{2}{3} \text{, şi deci } \frac{PM_4}{PA_4} = \frac{2}{3}$$

(unde P este intersecţia dreptelor (A_2M_2), (A_4N_4).

Analog se demonstrează că şi dreptele (A_1M_1) şi (A_3M_3) intersectează dreapta (A_4M_4) în acelaşi punct P.

ii) Ţinînd seama că:

$$\frac{PM_4}{PA_4} = \frac{2}{3}, \ \frac{GA_4}{GG_4} = 3, \ \frac{G_4M}{M_4M} = \frac{1}{2};$$

relaţia lui Menelaus

$$\frac{PM_4}{PA_4} \cdot \frac{GA_4}{GG_4} \cdot \frac{MG_4}{MM_4} = 1$$

este verificată în triunghiul $A_4G_4M_4$ şi deci punctele M, G, P sînt coliniare.

Aplicînd relaţia lui Menelaus în triunghiul MPM_4 intersectat de transversala (G_4A_4) se obţine:

$$\frac{G_4M_4}{G_4M} \cdot \frac{GM}{GP} \cdot \frac{A_4P}{A_4M_4} = 1$$

şi cum

$$\frac{G_4M_4}{G_4M} = 1, \ \frac{A_4P}{A_4M_4} = \frac{5}{3}$$

rezultă: $3GM = 5GP$.

Observaţie: Se poate da şi o generalizare problemei considerînd punctele M_1, M_2, M_3, M_4 situate pe dreptele (MG_1), (MG_2), (MG_3), (MG_3) astfel încît:

$$\frac{MG_1}{MM_1} = \frac{MG_2}{MM_2} = \frac{MG_3}{MM_3} = \frac{MG_4}{MM_4} = k,$$

şi printr-o demonstraţie analoagă, se poate arăta că:

— dreptele (A_1M_1), (A_2M_2), (A_3M_3), (A_4M_4) sînt concurente într-un punct P;

— punctele M, G, P sînt coliniare și există relația:

$$3(1-k)\cdot GM = (1+3k)\cdot GP.$$

67. AA', BE, CD fiind înălțimile triunghiului ABC sînt concurente într-un punct H • $\triangle BCD \equiv \triangle ABC$ și simetrice, deci I este ortocentrul triunghiului BCD.

68. Cum $AP \equiv AN$, $BP \equiv BM$, $CM \equiv CN$ (deoarece dintr-un punct exterior unui cerc se duc segmente de tangentă egale). Aplicînd relația lui Ceva obținem:

$$\frac{AP}{AN}\cdot\frac{BM}{BP}\cdot\frac{CN}{CM} = 1,$$

deci conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele sînt concurente.

69. (Fig. I.69). Vom construi simetricele laturii AC față de AA', AM, care este intersectată de $A'C'$ în punctul F.

Aplicînd teorema lui Menelaus în $\triangle AMB$, pentru transversala $(FC'A')$, obținem: $\frac{FM}{FA}\cdot\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{A'B}{A'M} = 1$. Cum $\triangle AA'F \equiv \triangle AB'A' \Rightarrow \triangle A'FM \equiv \triangle A'B'C \Rightarrow FA \equiv AB'$ și $FM \equiv B'C$ sau $\frac{FM}{FA} = \frac{B'C}{B'A}$. Dar $\triangle AMA' \equiv \triangle AA'C \Rightarrow$

$\Rightarrow A'M \equiv A'C \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A'B}{A'M} = \frac{A'B}{A'C}$, și efectuî-d înlocuirile în prima relație obținem:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B} = 1$$

deci conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele sînt concurente.

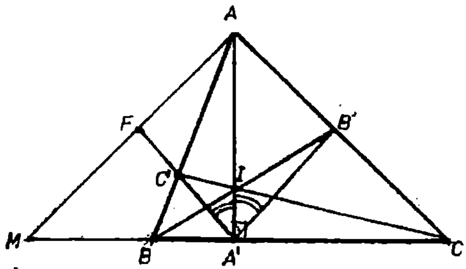


Fig. I.69

70. (Fig. I.70) Cum $\triangle ABP \sim \triangle ACN \Rightarrow AB\cdot AN = AC\cdot AP$.

$\triangle ABN$ și $\triangle ACP$ sînt congruente deoarece au un unghi congruent $(\widehat{PAC} \equiv \widehat{BAN})$ cuprins între laturi congruente, deci $\sigma[CAP] = \sigma[ABC]$. Analog se poate arăta că

$\sigma[BCP] = \sigma[BAM]$ şi $\sigma[CAM] = \sigma[BCN]$. Triunghiurile BAM şi CAM au ca latură comună segmentul AM, deci raportul ariilor este egal cu QB/QC şi cum punctul Q este cuprins între B şi C rezultă că $\frac{\sigma[ABM]}{\sigma[ACM]} = \frac{QB}{QC}$. Analog se arată că $\frac{\sigma[CBN]}{\sigma[ABN]} = \frac{RC}{RA}$ şi $\frac{\sigma[ACP]}{\sigma[CBP]} = \frac{SA}{SB}$, şi efectuînd produsul celor trei egalităţi obţinem:

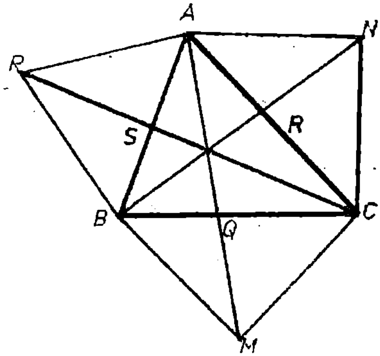


Fig. I.70

$$\frac{\sigma[ABM]}{\sigma[ACM]} \cdot \frac{\sigma[BCN]}{\sigma[ABN]} \cdot \frac{\sigma[ACP]}{\sigma[BCP]} = \frac{QB}{QC} \cdot \frac{RC}{RA} \cdot \frac{SA}{SB} = 1$$

deci conform reciprocei teoremei lui Ceva cele trei drepte sînt concurente.

71. Aplicînd teorema bisectoarei interioare obţinem: $\frac{MC}{MB} = \frac{b}{c}$, şi aplicînd teorema bisectoarei exterioare obţinem:

$$\frac{NB}{NA} = \frac{a}{b} \text{ şi } \frac{PA}{PC} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{MC}{MB} \cdot \frac{NB}{NA} \cdot \frac{PA}{PC} = 1$$

şi conform reciprocei teoremei lui Ceva, cele trei drepte sînt concurente, unde $\{N\} = (AB) \cap (CI)$, $\{P\} = (AC) \cap (BI)$, $\{M\} = (BC) \cap (AI)$.

72. (Fig. I.72) Cum dintr-un punct exterior unui cerc se duc segmente de tangentă congruente, atunci $AH \equiv AF$, $BH \equiv BE$ şi $IE \equiv IF \Rightarrow HA \cdot EB \cdot FI = EA \cdot HB \cdot FI$

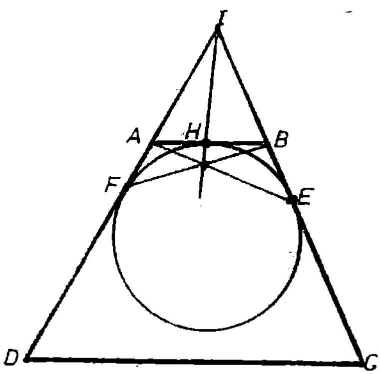


Fig. I.72

şi efectuînd împărţirea obţinem:

$$\frac{HA}{HB}\cdot\frac{EB}{EI}\cdot\frac{FI}{FA}=1.$$

Conform reciprocei teoremei lui Ceva, cele trei drepte sînt concurente.

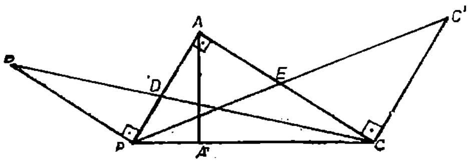


Fig. I.73

73. (Fig. I.73) Aplicînd teorema catetei în triunghiul ABC obţinem:

$$AB^2 = BA' \cdot BC \quad \text{şi} \quad AC^2 = CA' \cdot BC \Rightarrow \frac{A'B}{A'C}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Din $\triangle BAE \sim \triangle ECC' \Rightarrow \dfrac{EC}{EA}=\dfrac{CC'}{AB}=\dfrac{AC}{AB}$, iar din $\triangle BDB' \sim \triangle ADC \Rightarrow \dfrac{DA}{DB}=\dfrac{AC}{BB'}=\dfrac{DC}{B'D}$ şi înmulţind relaţiile obţinem:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{DA}{DB}=1$$

obţinînd relaţia lui Ceva. Deci cele trei drepte sînt concurente.

74. Condiţia este ca teorema lui Ceva să fie verificată, deci:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$$

adică

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}\cdot\frac{b}{a}=1 \Leftrightarrow \frac{\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}\cdot\frac{c}{a}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos B}{\cos C}\cdot\frac{\sin C}{\sin A}=1.$$

Reamintesc modul de calcul al segmentului determinate de:

i) piciorul H al înălțimii coborîte pe latura unui triunghi: fie $BH = m$, $HC = n$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a \Rightarrow$

$$\begin{cases} m + n = a \\ AH^2 = c^2 - m^2 = b^2 - n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = a \\ (m+n)(m-n) = c^2 - b^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = a \\ m - n = \dfrac{c^2 - b^2}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \\ n = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \end{cases}.$$

ii) piciorul D al bisectoarei interioare coborîte pe latura unui triunghi: fie $BD = m$, $DC = n$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$,

$$\begin{cases} m + n = c \\ ma = nb \text{ — conform teoremei bisectoarei interioare,} \end{cases}$$

deci

$$\begin{cases} m + n = c \\ m = \dfrac{b}{a} n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \dfrac{ac}{a + b} \\ m = \dfrac{bc}{a + b} \end{cases}$$

75. (Fig. I.75) Cum dreptele (AL), (BM), (CN) sînt concurente, atunci aplicînd teorema lui Ceva obținem:

$$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1.$$

Folosind puterea punctului exterior unui cerc, pentru vîrfurile A, B, C obținem:

$$AM \cdot AB' = AC' \cdot AN$$

$$BN \cdot BC' = BL \cdot BA'$$

$$CL \cdot CA' = CM \cdot CB'.$$

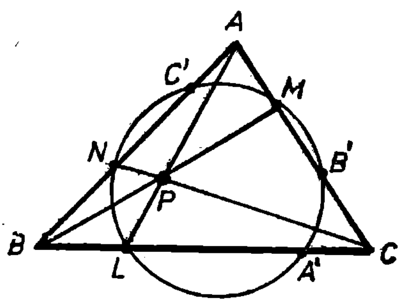


Fig. I.75

Înmulțind cele trei relații și ținînd cont de prima relație obținem:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1,$$

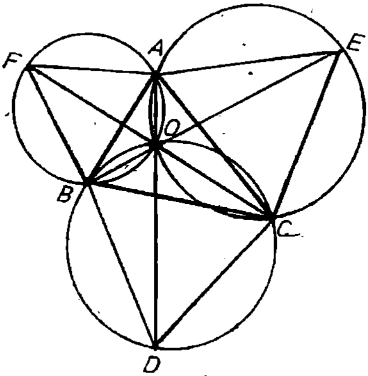


Fig. I.76

deci conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele (AA'), (BB'), (CC') sînt concurente.

76. (Fig. I.76) Cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale ABF și ACE se intersectează în punctele A și O. $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOC}) = 120^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{BOC}) = 120^\circ$. Cercul circumscris triunghiului BDC trece de asemenea prin punctul O. Cum $m(\widehat{AOF}) = m\left(\frac{\widehat{AF}}{2}\right) =$ $= 60^\circ$ și $m(\widehat{AOC}) = m\left(\frac{\widehat{AEC}}{2}\right) = 120^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOF}) + m(\widehat{AOC}) =$ $= 180^\circ$ $\Rightarrow$ punctele F, O, C sînt coliniare, deci segmentele FO și OC sînt în prelungire. Analog se demonstrează că punctele B, O, E și respectiv A, O, D sînt coliniare. Deci cum O este un punct comun dreptelor (CF), (BE), (AD) înseamnă că aceste drepte sînt concurente în punctul O.

77. i) Cum AB este latura triunghiului echilateral, $m(\widehat{AB}) = 120^\circ \Rightarrow m(\widehat{AD}) = 60^\circ \Rightarrow AD$ este latura hexagonului și deci egală cu R.

ii) unghiul dreptelor (AA'), (BB') este $180^\circ -$ $- 2m(\widehat{A'AB}) = 2m(\widehat{ABD}) = 60^\circ$ și deci intersecția lor L se află pe cerc, deoarece măsura unghiului ALB este $\frac{1}{2} m(\widehat{AB})$. Dreptele (BD) și (AC) fiind diametru în cerc și AA', BB' respectiv perpendiculare pe aceste diametre, rezultă că A', B' sînt mijloacele segmentelor AL, BL și deci $A'B' = \frac{1}{2} AB$.

78. (Fig. I.78) Patrulaterul $A'B'C'D'$ este un pătrat, iar punctul I de intersecție al diagonalelor $A'C', B'D'$ aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor $D'AA'$, $A'BB'$, $B'CC'$ și $C'DD'$

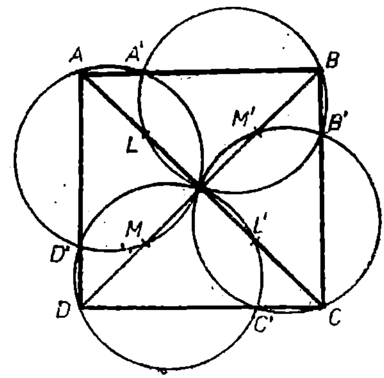


Fig. I.78

79. i) $m(\widehat{CMP}) = m(\widehat{M'P'P}) = m\left(\frac{\widehat{AM'}}{2}\right)$, unghiul $\widehat{MCP}$ fiind comun.

$$m(\widehat{AMN}) + m(\widehat{CMP}) = m(\widehat{AMN}) + m(\widehat{M'P'P}) = 180^\circ.$$

ii) Din asemănarea triunghiurilor CMP și $CM'P'$ obținem

$$\frac{CM}{CP'} = \frac{CP}{CM'} \text{ sau } CP \cdot CP' = CM \cdot CM' = CB \cdot CA =$$

$$= (a + r)(a - r) = \text{const.}, \; CP = (a + r) \operatorname{tg} \alpha,$$

$$C'P' = (a - r) \operatorname{ctg} \alpha.$$

iii) $AM = 2r \cos \alpha$, $MN = AM \sin \alpha = r \sin 2\alpha$.

$$V = \frac{\pi MN^2}{3}(AN + NC) = \frac{\pi r^2}{3}(a + r) \sin^2 2\alpha.$$

$$A = 2\pi r \sin 2\alpha\left(2r \cos \alpha + \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos 2\alpha}\right).$$

80. Fie A_1, B_1, E, F, C_1, D_1 proiecțiile punctului M pe laturile AD, BC, CD, AB și diagonalele AC, BD. Punctele A_1, C_1, E se află pe dreapta lui Simson a punctului M în raport cu triunghiul ACD, iar punctele C_1, D_1, E se află pe dreapta lui Simson a lui M în raport cu triunghiul BCD. Punctele M, E, F sînt coliniare. Cercul de diametru AM trece prin punctele A_1, F, C_1, iar cercul de diametru BM trece prin punctele B_1, F, D_1. În aceste două cercuri avem $EC_1 \cdot EA_1 = EF \cdot EM$ și $ED_1 \cdot EB_1 = EF \cdot EM$. Deci $EC_1 \cdot EA_1 = ED_1 \cdot EB_1$ și punctele A_1, B_1, C_1, D_1 sînt conciclice.

Reamintesc dreapta lui Simson: proiecţiile unui punct M aparţinînd cercului circumscris triunghiului ABC, pe laturile triunghiului, sînt trei puncte coliniare. Dacă A' este intersecţia proiecţiei punctului M pe BC cu cercul circumscris, dreapta lui Simson este paralelă cu AA'.

81. (Fig. I.81) Dacă notăm cu a, b, c, d, jumătăţile măsurilor unghiurilor exterioare ale patrulaterului $ABCD$ se observă că:

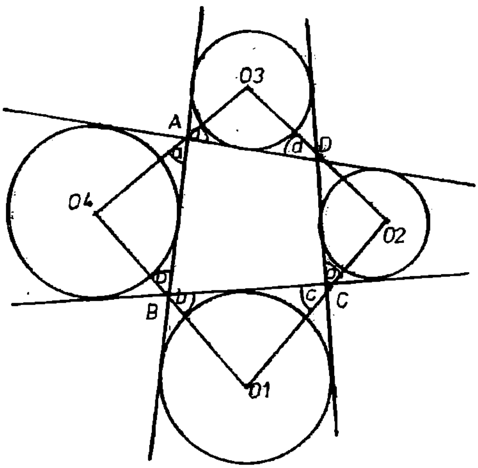


Fig. I.81

$$m(\hat{O}_1) + m(\hat{O}_3) = 360° - (a + b + c + d) =$$

$$= 360° - \left[\frac{180° - m(\hat{A})}{2} + \frac{180° - m(\hat{B})}{2} + \frac{180° - m(\hat{C})}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{180° - m(\hat{D})}{2}\right] = \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D})}{2} = 180°,$$

deci patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$ este inscriptibil.

82. (Fig. I.82) Segmentele $OA_1 \equiv OA_2 \equiv OC_1 \equiv OC_2 \equiv OB_1 \equiv OB_2$, ca aparţinînd triunghiurilor congruente şi se opun la unghiuri egale. Cum O este un punct fix, înseamnă că punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 aparţin unui cerc concentric cu cercul circumscris $\triangle ABC$.

83. (Fig. I.83) Cum patrulaterele $BADE$ și $BACA'$ sînt inscriptibile, $m(\widehat{DGA}) = m(\widehat{DHA}) = 90°$ (se ține cont că două antiparalele duse la o dreaptă sînt paralele între ele) atunci patrulaterul $AGDH$ este inscriptibil, deci punctele A, D, G, H sînt conciclice.

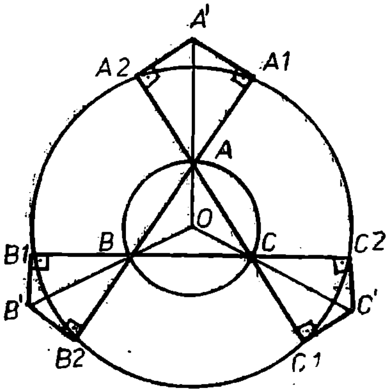


Fig. I.82

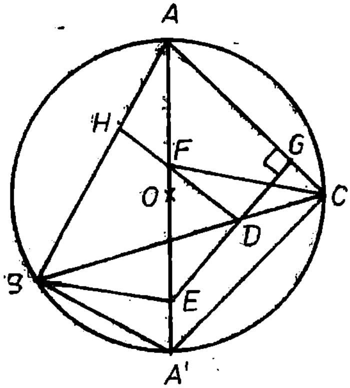


Fig. I.83

84. (Fig. I.84) Pentru a demonstra că punctele sînt conciclice este suficient să arătăm că $\widehat{MNP} \equiv \widehat{NQP}$. Dar $m(\widehat{NMP}) = 180° - m(\widehat{ND_2D_1}) - m(\widehat{D_2D_1M})$ și $m(\widehat{NQP}) = 180° - m(\widehat{B_1B_2P}) - m(\widehat{QB_1B_2})$. Dar $\widehat{ND_2D_1} \equiv \widehat{B_1B_2P}$ deoarece patrulaterul $A_2B_2D_2C_2$ este inscriptibil. Dar și patrulaterul $A_1B_1D_1C_1$ este inscriptibil, deci $\widehat{A_1B_1C_1} \equiv \widehat{A_1D_1C_1}$, deci sînt congruente și suplementele lor $\widehat{QB_1B_2}$ și $\widehat{D_2D_1M}$, așa că proprietatea este demonstrată. În cazul în care $A_2D_2 \parallel A_1D_1$, atunci $B_2C_2 \parallel B_1C_1$.

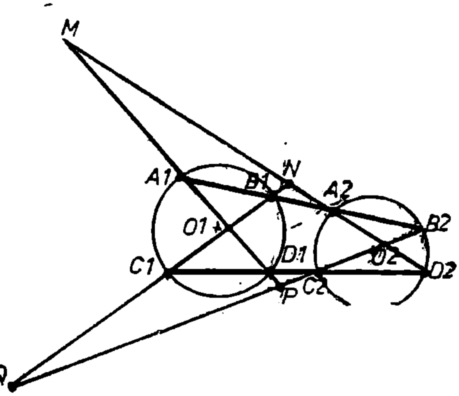


Fig. I.84

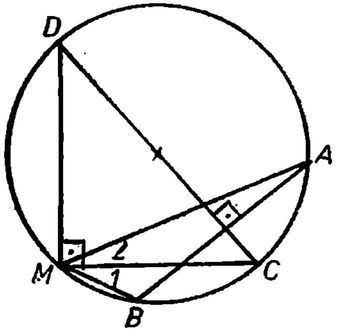


Fig. I.85

85. (Fig. I.85) Se construiește $MD \perp MC$ unde MC este bisectoarea unghiului AMB. Deci cum $m(\hat{M}_1) = m(\hat{M}_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{CA})$ și deci coarda AB este perpendiculară pe diametrul CD.

86. Într-un patrulater inscriptibil un unghi este congruent cu suplementul unghiului opus și reciproc. Patrulaterul $ABED$ este inscriptibil, având unghiurile ADB și AEB drepte. Deci $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDC})$. De asemenea $m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{CDF})$ din patrulaterul inscriptibil $ADFC$, cu $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{AFC}) = 90.°$ Deci $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{GDF}) =$ $=$ suplementul $\widehat{ADG}$; rezultă că patrulaterul $AHDG$ este înscriptibil.

87. (Fig. I.87) Patrulaterele $AMIQ$, $BNIM$, $CPIN$, $QIPD$ sînt inscriptibile, deci $m(\hat{Q}_1) = m(\hat{A}_1)$, $m(\hat{N}_1) = m(\hat{B}_1)$, $m(\hat{N}_2) = m(\hat{C}_1)$, $m(\hat{Q}_2) = m(\hat{D}_1)$. Însumînd cele patru egalități obținem: $m(\hat{Q}_1) +$ $+ m(\hat{Q}_2) + m(\hat{N}_1) +$ $+ m(\hat{N}_2) = m(\hat{A}_1) +$ $+ m(\hat{B}_1) + m(\hat{C}_1) +$ $+ m(\hat{D}_1) = 90° + 90° =$ $= 180°$, deci cum unghiurile formate de două vîrfuri opuse ale patrulaterului $MNPQ$ sînt suplementare, înseamnă că patrulaterul este inscriptibil.

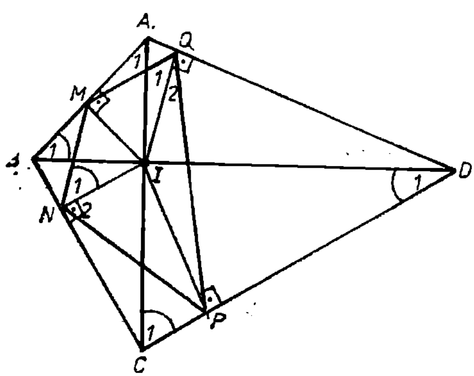


Fig. I.87

88. (Fig. I.88) Cum $OA \cdot OB = OD \cdot OC \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OC}{OB}$ deci conform cazului II de asemănare $\triangle OCA \sim$ $\sim \triangle OBD$ și cum $m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{ODB})$ atunci patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil.

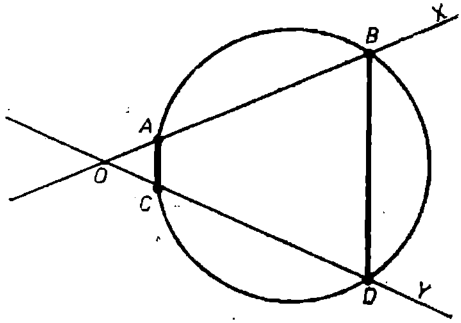


Fig. I.88

89. (Fig. I.89) Patrulaterele $ABCD$, $DQMA$, $AMNB$, $BNPC$, $CPQD$ sînt inscriptibile. $m(\hat{M}) + m(\hat{P}) = m(\hat{M}_1) +$ $+ m(\hat{M}_2) + m(\hat{P}_1) + m(\hat{P}_2) = m(\hat{D}_1) + m(\hat{B}_1) + m(\hat{D}_2) +$ $+ m(\hat{B}_2) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ADC}) = 180°$.

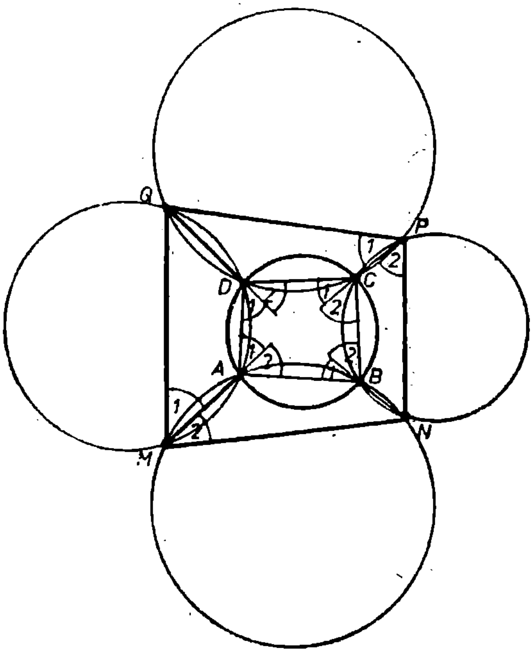


Fig. I.89

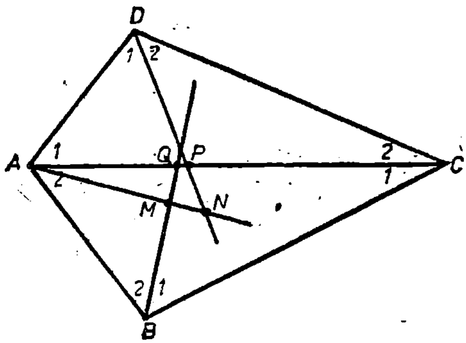


Fig. I.90

90. (Fig. I.90) În triunghiul AND, $m(\hat{N})=180°-m(\hat{A}_1)-$ $-m(\hat{D}_1)=180°-$ $-\frac{1}{2}[m(\hat{A})+m(\hat{D})]$, iar în triunghiul BQC $m(\hat{Q})=180°-m(\hat{B}_1)-$ $-m(\hat{D}_1)=180°-$ $-\frac{1}{2}[m(\hat{B})+m(\hat{C})]$, deci $m(\hat{N})+m(\hat{Q})=360°-\frac{1}{2}[m(\hat{A})+$ $+m(\hat{B})+m(\hat{C})+m(\hat{D})]=180°$ ceea ce arată că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil, deci punctele M, N, P, Q sînt conciclice.

CAPITOLUL II

LOCURI GEOMETRICE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU

CÎTEVA CATEGORII DE LOCURI GEOMETRICE

Definiţie: se numeşte loc geometric mulţimea punctelor din plan sau din spaţiu care au o aceeaşi proprietate.

Cîteva categorii de locuri geometrice elementare:

I. — În geometria plană

1°. *Un punct fix O — un punct mobil M*:

Dacă segmentul OM = constant atunci locul geometric al punctului M este un cerc de rază OM (de fapt este tocmai interpretarea definiţiei cercului ca loc geometric).

2°. *Două puncte fixe A, B, un punct mobil M*:

i) Locul geometric al punctelor situate de aceeaşi parte a unei drepte şi din care un segment dat, situat pe această dreaptă se vede sub un unghi dat (constant) este un arc de cerc, avînd aceleaşi extremităţi ca şi segmentul dat, iar arcul de cerc astfel trasat se numeşte arc capabil de unghiul dat. Dacă facem abstracţie de condiţia impusă locului geometric de a se afla de o anumită parte a segmentului, atunci locul geometric se va compune din reuniunea a două arce de cerc, situate de o parte şi de alta a coardei date. *Caz particular*: locul geometric al punctelor din care un segment de dreaptă dat se vede sub un unghi drept, este un cerc care are diametrul egal cu măsura acestui segment.

ii) Locul geometric al punctelor M, ale căror distanţe la două puncte fixe A, B sînt într-un raport dat, diferit de unu, adică $\frac{MA}{MB} = K \neq 1$, este un cerc (dacă $K = 1$, locul geometric este mediatoarea segmentului AB).

Demonstrație: Dreapta (MC) care împarte segmentul AB în segmentele AC, BC proporționale cu MA, MB este bisectoarea interioară unghiului AMB. Dreapta (MD), care împarte segmentul exterior laturii AB în părți proporționale cu celelalte două laturi este bisectoarea exterioară unghiului AMB deci $\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$, iar punctele C și D se numesc conjugate armonic față de A și B. Cum cele două bisectoare sînt perpendiculare, adică $m(\widehat{CMD}) = 90°$ și punctele C și D sînt fixe, atunci locul geometric căutat este un cerc de diametru CD. Cercurile ce apar ca loc geometric al punctelor M pentru care $\frac{MA}{MB}=K \neq 1$ și pentru diferite valori ale lui K se numesc cercurile lui Apollonius.

iii) Locul geometric al punctelor M pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe A, B date este constantă, adică $MB^2 - MB^2 = K$ (constantă reală), este o dreaptă perpendiculară pe AB. Dacă $K = 0$, atunci locul geometric este mediatoarea segmentului AB care este tocmai interpretarea definiției mediatoarei ca loc geometric).

Demonstrație: Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată:

$$MB^2 = MD^2 + DB^2 - 2DB \cdot DH$$

$MA^2 = MD^2 + AD^2 + 2AD \cdot DH$; scăzînd relațiile și ținînd cont că $AD = DB = \frac{a}{2}$ atunci rezultă:

$MA^2 - MB^2 = 2a \cdot DH$ = constant $\Rightarrow DH$ = constant. Deci proiecția H a punctului M pe AB este fixă oricare ar fi punctul $M \Rightarrow M$ aparține perpendicularei în H pe AB.

iv) Locul geometric al punctelor pentru care suma pătratelor distanțelor la două puncte fixe este constantă, este un cerc cu centrul în mijlocul O al segmentului determinat de cele două puncte, sau mulțimea formată numai din O.

Demonstrație:

Scriem relația lungimii medianei:

$$MO^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{2}K^2 - \frac{1}{4}a^2 = \text{constant} \Rightarrow MO = \frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - a^2} = \text{constant} \Rightarrow \text{locul geometric}$$

este cercul cu centrul în O și de rază OM. Condiția de existență a locului geometric este ca $2K^2 - a^2 > 0 \Rightarrow K > \frac{\sqrt{2}}{2} a.$

v) (Fig. II. T2° v)) Locul geometric al punctelor care au suma distanțelor la două puncte fixe constantă (numite focare) este o elipsă. Fie punctele:

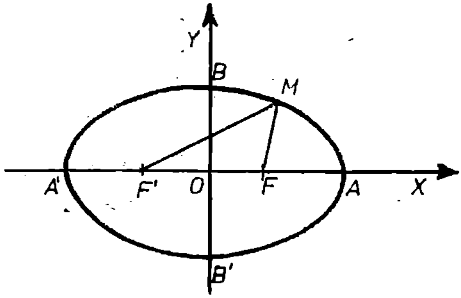


Fig. II.T.2°v)

$F(c, 0)$ și $F'(c, 0)$ numite focare,

$A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$ numite vîrfurile axei mari,

$B(0, b)$ și $B'(0, -b)$ numite vîrfurile axei mici și $c^2 = a^2 - b^2$. Atunci conform definiției avem:

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ (ecuația elipsei).}$$

vi) (Fig. II.I 2°vi)) Locul geometric al punctelor care au diferența distanțelor la două puncte fixe (numite focare) constantă este o hiperbolă. Fie punctele:

$F(c, 0)$ și $F'(-c, 0)$ numite focare, $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$ numite vîrfurile hiperbolei. Atunci conform definiției avem:

$$MF - MF' = \pm 2a \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ (ecuația hiperbolei).}$$

vii) Locul geometric al vîrfului A al unui triunghi ABC, care are vîrfurile B și C fixe, iar aria constantă este formată din două paralele echidistante față de segmentul BC, deoarece înălțimea triunghiului are măsura constantă.

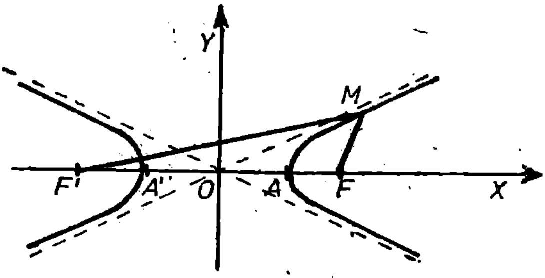


Fig. II.T.2°vi)

3°. *O dreaptă fixă* (Δ), *un punct mobil M*:

Dacă distanţa între punctul M şi dreapta (Δ) este constantă (pentru orice poziţie a punctului mobil), atunci locul geometric este format din două drepte paralele şi echidistante cu (Δ) (situate la o distanţă d faţă de (Δ), de o parte şi de alta a dreptei date (Δ)).

4°. *O dreaptă fixă* (Δ), *un punct fix* $O \notin (\Delta)$, *un punct mobil M*:

i) Dacă $M \in (\Delta)$, atunci locul geometric al punctelor L, care împart segmentul OM într-un raport constant $\frac{OL}{OM} = K$, este o dreaptă paralelă cu (Δ).

Demonstraţie: Fie B piciorul perpendicularei coborîte din punctul O pe dreaptă şi punctul A intersecţia dintre dreapta (OB) cu paralela dusă prin L la dreapta (BM). Folosim teorema lui Tales:

$$\frac{OL}{OM} = \frac{OA}{OB} = K$$

Dacă $K = 0$ atunci locul geometric este punctul O;

Dacă $K = 1$ atunci locul geometric este dreapta (Δ).

ii) Fie O un punct dat, (D) o dreaptă dată şi $M \in (D)$ un punct variabil. Locul geometric al punctului M' simetricul punctului M faţă de O este o dreaptă ce trece prin punctele B', C' simetricele punctelor B şi C fixe pe (D) faţă de punctul O.

iii) (Fig. II.T.4° iii)) Locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix (numit focar) şi de o dreaptă fixă (numită directoare) se numeşte parabolă. Fie punctele: $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, $P'\left(-\frac{p}{2},0\right)$; atunci conform definiţiei avem:

$MP \equiv MF \Rightarrow y^2 = 2px$ (ecuaţia parabolei).

iv) Locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanţelor lor la un punct fix F (numit focar) şi la o dreaptă fixă (D) (numită directoare) este egal cu numărul constant $e = \frac{c}{a} < 1$ (numit excentricitate) este o elipsă. Ecuaţia dreptei (D) este $x = a$.

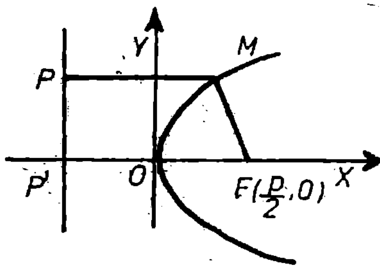


Fig. II.T.4°iii)

v) Locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanţelor la un punct fix F (numit focar) şi o dreaptă fixă (D) (numită directoare) este egal cu numărul constant $e = \frac{c}{a} > 1$ (numit excentricitate) este o hiperbolă. Ecuaţia dreptei (D) este $x = a$.

5°. *Un cerc fix (C) (de centru O şi raza R), un punct fix $P \notin (C)$, un punct mobil $M \notin \mathcal{C}(O, R)$:*

i) (Vezi figurile nr. II.T5°i)) Locul geometric al punctelor L care aparţin segmentului PM cu $P \notin C$ şi $M \notin C$ şi care

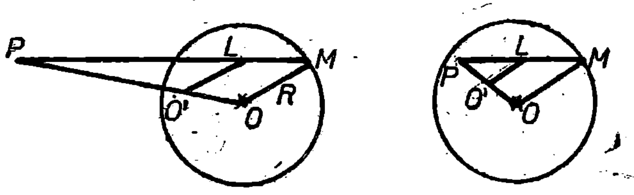


Fig. II.T.5°i)

împart segmentul PM într-un raport constant $\frac{PL}{PM} = \frac{PO'}{PO} = \frac{R'}{R} = K$ este un cerc cu centrul O' şi de rază R'. (evident că O' este un punct fix deoarece P, O sînt puncte fixe și raportul $\frac{PO'}{PO}$ este constant).

ii) Locul geometric al centrelor cercurilor tangente la un cerc dat și care trec printr-un punct dat, situat în interiorul acestui cerc, este o elipsă.

Reciproc: orice elipsă poate fi considerată ca locul geometric al centrului unui cerc tangent la un cerc fix și trecînd printr-un punct fix, interior cercului fix. Un astfel de cerc se numește cerc director, și cum există două focare ale elipsei, atunci în mod evident, există două cercuri directoare.

Demonstrație: fie F — punctul dat, F' — centrul cercului fix, R — raza sa, MF — raza cercului tangent interior; atunci $R - MF = MF' \Rightarrow MF + MF' = R =$ constant.

iii) Locul geometric al centrelor cercurilor tangente la un cerc dat și care trec printr-un punct dat (fix), exterior acestui cerc este o hiperbolă, iar cercul este numit cerc director al hiperbolei, și cum hiperbola are două focare, atunci în mod evident, există două cercuri directoare. Punctul fix va fi unul dintre focare, iar cercul fix va avea centrul în celălalt focar.

iv) Locul geometric al centrelor cercurilor care trec printr-un punct fix numit focar și sînt tangente la o dreaptă fixă (numită directoare) este o parabolă.

6°. *Două drepte fixe* (D), (D_1) *și un punct mobil* M:

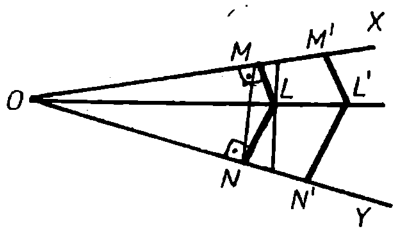
i) Dacă $(D) \parallel (D_1)$, atunci locul geometric al punctelor M egal depărtate de cele două drepte fixe este o paralelă echidistantă.

ii) dacă (D) și (D_1) sînt două drepte concurente, atunci locul geometric al punctelor M egal depărtate de cele două drepte fixe este format din două drepte perpendiculare, mai precis, din cele două bisectoare ale unghiurilor celor două drepte (de fapt este tocmai interpretarea definiției bisectoarei ca loc geometric).

iii) (Fig. II.T6° iii)) Locul geometric al punctelor din interiorul unui unghi nealungit, pentru care raportul distanțelor la laturile unghiului este egal cu un număr dat, este o semidreaptă cu originea în vîrful unghiului.

Demonstrație: Fie punctele L și L' care îndeplinesc condițiile din enunț, și fie:
$L'M' \parallel LM$ și $L'N' \parallel LN$; atunci, aplicînd teorema fundamentală a asemănării, obținem $\frac{ML}{M'L'} = \frac{LN}{L'N'} = \frac{OL}{OL'} = K \Rightarrow OL = K \cdot OL' \Rightarrow L$ aparține unei semidrepte cu originea în vîrful unghiului.

Fig. II.T.6°iii)



7°. *Un cerc fix, o dreaptă variabilă* (Δ), *un punct mobil* M *(exterior cercului)*:

i) Locul geometric al punctelor M, care au aceeași putere față de un cerc dat este un cerc concentric cu cel dat.

Demonstrație: Fie ρ puterea punctului M față de cerc. $OM^2 = d^2 = \rho + R^2 =$ constant $\Rightarrow$ locul geometric al punctului M este un cerc de rază OM, concentric cu cel dat.

ii) Locul geometric al punctelor M, din care se duc segmente de tangentă de lungime constantă la un cerc dat, este un cerc concentric cu cel dat.

Demonstrație: $OM = \sqrt{MT^2 + R^2} =$ constant.

8°. *Două cercuri fixe, două secante mobile* (D_1), (D_2), *un punct mobil* M:

i) (Fig. II.T8°i)) Locul geometric al punctelor care au aceeași putere față de două cercuri date, este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor — numită axa radicală a celor două cercuri (dreaptă care împarte tangenta comună în două părți congruente).

Demonstrație: Cum punctele au aceeași putere: $\rho = \rho_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow OM^2 - R^2 = O_1M^2 - r^2 \Rightarrow OM^2 - O_1M^2 = R^2 - r^2 =$
$=$ constant.

Deci locul geometric al punctului M este o perpendiculară pe OO_1 (conform 2°i). Dacă cercurile sînt:

a) secante, atunci axa radicală este coarda comună, deoarece punctele de intersecție ale cercurilor sînt puncte

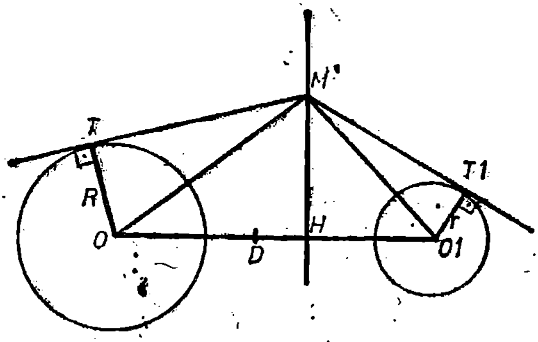


Fig. II.T.8°i)

care au aceeaşi putere zero faţă de fiecare din cele două cercuri secante.

b) tangente, atunci axa radicală este tangenta comună dusă prin punctul de tangenţă.

c) concentrice, atunci axa radicală nu există — ea fiind aruncată la infinit.

ii) (Fig. II.T8°ii) Locul geometric al centrului unui cerc variabil care intersectează două cercuri date (*C1*), (*C2*) sub un unghi drept (raza unui cerc fiind tangenta celuilalt — se mai numesc şi cercuri ortogonale) este o dreaptă numită axa radicală a cercurilor (*C1*), (*C2*).

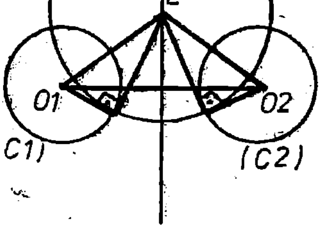


Fig. II.P.8°ii)

iii) Locul geometric al punctelor *M*, care au diferenţa puterilor faţă de două cercuri date constantă, este o perpendiculară pe linia centrelor; dacă constanta este zero, atunci locul geometric este axa radicală a celor două cercuri.

Demonstraţie: Cum $\rho - \rho_1 = \text{constant} \Rightarrow MO^2 - O_1M^2 = R^2 - r^2 + K = \text{constant} \Rightarrow$ locul geometric al punctului *M* este o dreaptă perpendiculară pe OO_1 (conform 2°iii)).

iv) Locul geometric al punctelor din plan de unde se duc tangente de aceeași lungime la cele două cercuri este axa radicală a celor două cercuri — deoarece lungimea unei tangente duse dintr-un punct la un cerc este rădăcina pătrată din puterea acelui punct față de cerc și că un punct de pe axa radicală are aceeași putere față de cele două cercuri.

II. În geometria în spațiu

1°. *Un punct fix O, un punct mobil M*

i) Dacă $OM =$ constant $\Rightarrow$ locul geometric al punctului M este o sferă de centru O și rază OM (de fapt este tocmai definiția sferei ca loc geometric).

ii) Locul geometric al punctelor din plan situate la o distanță constantă de un punct fix O din spațiu este un cerc, avînd ca centru piciorul H al perpendicularei coborîte din O pe plan.

2°. *Două puncte fixe A, B, un punct mobil M*

i) Locul geometric al punctelor M din spațiu, egal depărtate, de două puncte fixe A, B este un plan perpendicular pe mijlocul segmentului AB, numit plan mediator.

ii) Locul geometric al punctelor M din spațiu, din care un segment dat AB se vede sub un unghi drept dat, este o sferă de diametru AB, iar locul geometric al punctelor din spațiu din care un segment dat AB se vede sub un unghi care nu este drept, dar dat, nu este o sferă, ci o suprafață generată prin rotirea unui arc de cerc în jurul unei coarde care nu este diametru.

iii) Locul geometric al punctelor din spațiu astfel ca raportul distanțelor lor la două puncte fixe A, B este egal cu un număr dat K, este o sferă (dacă $K = 1$, atunci sfera degenerează într-un plan).

3°. *O dreaptă fixă (D), A un punct fix aparținînd dreptei (D), o direcție dată, un punct mobil M:*

i) Locul geometric al punctelor situate pe dreptele care trec printr-un punct fix A al unei drepte (D) și sînt perpendiculare pe această dreaptă, este un plan perpendicular pe această dreaptă și care trece prin acel punct.

ii) Locul geometric al punctelor situate pe dreptele care trec printr-un punct fix A și un punct mobil M, ce aparține unei drepte fixe (D) este un plan determinat de A și (D), mai puţin semidreptele ce trec prin A şi sînt paralele cu (D) (evident punctul A aparţine locului geometric).

iii) Locul geometric al punctelor din spaţiu care se proiectează într-un punct fix A al unei drepte (D) fixe este un plan perpendicular pe (D) în A.

iv) Locul geometric al punctelor situate pe dreptele paralele cu o dreaptă fixă (D) şi care au un punct comun cu un poligon director ((D) nu este paralelă cu planul poligonului) este o suprafaţă prismatică.

4°. *O dreaptă fixă (D), o direcţie dată, un punct mobil M*

i) Locul geometric al unei drepte care se deplasează rămînînd paralelă cu poziţia ei iniţială şi sprijinindu-se mereu pe o dreaptă fixă este un plan, sau mai general, locul geometric al unei drepte care se deplasează sprijinindu-se pe o dreaptă fixă (D) şi rămînînd paralelă cu o dreaptă fixă (D'), neparalelă cu prima, este un plan.

ii) Locul geometric al punctelor din spaţiu situate la o distanţă dată d, faţă de o dreaptă dată (D) este o suprafaţă cilindrică (de rază d).

5°. *Două drepte fixe, un punct fix A, un punct mobil M*

i) Locul geometric al dreptelor duse dintr-un punct dat şi care formează unghiuri egale cu două drepte date, duse din acelaşi punct, este planul care trece prin bisectoarea unghiului format de semidreptele date şi prin perpendiculara pe planul lor, dusă prin punctul lor comun.

ii) Locul geometric al punctelor M situate pe dreptele variabile care se sprijină (au un punct comun) pe o dreaptă (D_1) şi sînt paralele cu (D_2) ($(D_1) \cap (D_2) = \emptyset$) este planul format din dreptele (D_1) şi (D_2).

6°. *Un plan fix, un punct mobil (care nu aparţine planului)*

i) (Fig. II.T.6°i)) Locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de punctele unui cerc (frontiera cercului) este o dreaptă perpendiculară pe planul cercului în centrul cercului.

ii) (Fig. II.T.6°ii)) Locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de vîrfurile unui pătrat este o dreaptă perpendiculară pe planul pătratului, în punctul de intersecţie al diagonalelor.

iii) Locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de vîrfurile unui triunghi este o dreaptă perpendiculară,

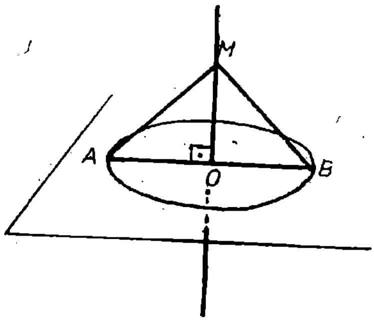


Fig. II.T.6°i)

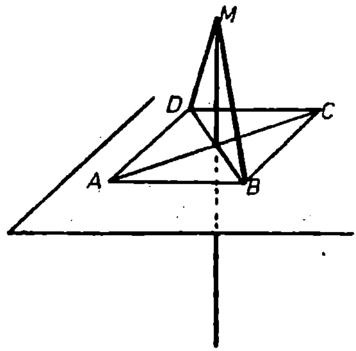


Fig. II.T.6°ii)

pe planul acestuia, dusă în centrul cercului circumscris triunghiului, pe planul acestuia.

iv) Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de laturile unui triunghi este o dreaptă perpendiculară pe planul acestuia dusă în centrul cercului înscris triunghiului, pe planul său.

v) Locul geometric al centrelor sferelor care trec printr-un cerc dat (conținut într-un plan dat) este o dreaptă perpendiculară pe planul cercului în centrul său; dreapta se numește axa cercului.

7°. *Două drepte fixe, un plan mobil, un punct mobil M*

i) Locul geometric al punctelor M, care împart un segment AB într-un raport K, A și B fiind punctele de intersecție ale două drepte paralele (D_1), (D_2) intersectate de un plan variabil este o dreaptă paralelă, coplanară cu (D_1) și (D_2). Dacă $K = 1$, atunci locul geometric este o dreaptă echidistantă cu (D_1) și (D_2).

ii) Dacă două drepte paralele (D_1) și (D_2) sînt intersectate de un plan variabil, în punctele A și B, atunci locul geometric al mijlocului segmentului AB este planul determinat de cele două drepte (evident se poate reduce la o problemă de geometrie plană și anume locul geometric al mijlocului unui segment care se sprijină pe două drepte paralele).

8°. *Un plan fix, un punct fix exterior, un punct mobil M*

i) Fie o curbă (C) închisă, conținută în plan și A un punct exterior planului. Locul geometric al punctelor situate pe dreptele cu originea în A și care întîlnesc curba (C) este o pînză conică cu vîrful în A și baza (C).

ii) Locul geometric al punctului L, care împarte un segment AM într-un raport K, unde M parcurge un plan fix, iar A este fix și exterior planului, este un plan paralel cu cel dat și care trece prin L.

9°. *Un plan fix, o dreaptă fixă (neconținută în plan)*

i) Fie planul (P) și o dreaptă $(D) \parallel (P)$. Dacă A parcurge dreapta și B este un punct curent în plan, atunci locul geometric al mijlocului M al segmentului AB este un plan care conține punctul M și este paralel cu (P).

ii) O dreaptă (D) întîlnește un plan (P) în punctul A. Pe (D) se ia un punct fix B și fie o dreaptă variabilă (D_1), care trece prin A și este conținută în planul (P). Locul geometric al picioarelor perpendicularelor din B pe dreapta (D_1) este un cerc conținut în planul (P) și cu diametrul AM, M fiind piciorul perpendicularei din B pe (P).

iii) Fie o curbă (C) conținută în plan și (D) o dreaptă dată neparalelă cu planul curbei (C). Locul geometric al punctelor situate pe dreptele (D) care trec prin punctele curbei (C) și sînt paralele cu (D) este o suprafață cilindrică de bază (C) și direcție (D). Dreptele (D) se numesc generatoarele suprafeței cilindrice, iar (C) se numește curba directoare a suprafeței cilindrice.

10°. *Două plane fixe, un punct mobil M:*

i) Locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane paralele este un plan echidistant planelor date.

ii) Locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane concurente este format de planele bisectoare ale unghiurilor diedrelor formate de aceste două plane.

11°. *Două drepte fixe, un punct mobil M:*

i) Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de două drepte paralele este un plan paralel cu cele două drepte, situat la egală depărtare de acestea și perpendicular pe planul format de acestea.

ii) Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de două drepte concurente este format din două plane perpendiculare pe planul celor două drepte și care conțin bisectoarele unghiului formate de aceste drepte.

iii) Locul geometric al punctelor ce aparțin dreptei care se sprijină pe o dreaptă (d) și paralel cu o dreaptă (Δ) ((d), (Δ) două drepte concurente date) este planul determinat de dreptele (d) și (Δ).

12°. *O sferă fixă (S), un punct fix A, un punct mobil:*

i) Locul geometric al tangentelor care se pot duce la o sferă, dintr-un punct fix exterior sferei, este un con de rotație. Aceste tangente sînt toate congruente între ele. Locul geometric al punctelor lor de contact cu sfera este un cerc mic al sferei.

Planele tangente la conul care este locul geometric al tangentelor duse dintr-un punct fix sînt tangente la sferă; acestea sînt singurele plane care se bucură de această proprietate și care pot fi duse prin punctul considerat.

ii) Locul geometric al tangentelor care pot fi duse dintr-un punct dat *A*, al suprafeței, la diversele curbe care se pot trasa pe această suprafață și care trec prin acest punct, este un plan. *Caz particular:* locul geometric al tangentelor care pot fi duse la o sferă, într-un punct al sferei, este un plan perpendicular pe raza dusă în acel punct și se numește plan tangent dus la sferă.

13°. *O sferă fixă (S), o dreaptă fixă, o dreaptă mobilă:*

Locul geometric al tangentelor duse la o sferă, paralele cu o dreaptă dată, este un cilindru de rotație. Planele tangente la cilindru sînt tangente la sferă. Acestea sînt singurele plane care se bucură de această proprietate și care sînt paralele cu dreapta dată. Locul geometric al punctelor de contact este cercul mare (ecuatorial) al cărui plan este perpendicular pe dreapta dată.

14°. *Două sfere fixe, două drepte variabile și un punct mobil M:*

Locul geometric al punctelor care au aceeași putere în raport cu două sfere date este un plan perpendicular pe linia centrelor sferelor numit planul radical al celor două sfere.

Dacă sferele sînt concentrice, planul radical este aruncat la infinit.

Modul de abordare a unei probleme de loc geometric

Nu există metode generale de lucru, problema trebuie să fie studiată cu atenție, alcătuind tabele de forma:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante

unde: — elementele fixe sînt ca: poziție, lungime, mărime, volum;

— elementele mobile ca: poziție, lungime, mărime, volum, adică elemente ce se modifică necontenit; cum ar fi de exemplu: un punct variabil își modifică poziția, un unghi cu laturile variabile își modifică mărimea etc.

— elemente constante ca: lungime, mărime, volum, adică elemente ce își modifică poziția, de exemplu translație, rotație etc., dar caracteristicile lor rămîn constante.

Evident că toate aceste elemente vor fi scrise în mod sistematizat într-un tablou ca acela mai sus menționat.

Concluzia finală, care va implica tipul locului geometric, va fi citită (obținută) din coloana „Elemente constante", care, evident, va fi încadrată în una dintre categoriile amintite mai sus.

Locul geometric al punctelor căutate va fi:

— *pentru geometria plană*

i) o dreaptă (sau un segment de dreaptă);

ii) o curbă, de exemplu, un cerc, un arc de cerc, două arce de cerc, o elipsă, o hiperbolă, o parabolă sau, mai general, porțiuni limitate din plan.

— *pentru geometria în spațiu*

i) un plan;

ii) o suprafață, de exemplu, o sferă, o calotă sferică, două calote sferice, un cilindru, un con sau, mai general, porțiuni limitate din spațiu.

OBSERVAȚIE: în cadrul problemelor cu loc geometric este indicat ca desenul să fie cît mai clar, iar pentru poziția elementelor mobile se va face numai un desen, evitînd eventualele poziții particulare (adică desenul va conține numai o poziție a elementelor mobile, fiind contraindicat ca pe desen să se figureze mai multe poziții ale elementelor mobile), care pot duce uneori la idei eronate, de determinare a locului geometric.

Exemple: **E1.** Să se determine locul geometric al centrului cercului înscris într-un triunghi, știind că vîrfurile B, C sînt fixe, iar vîrful A este mobil și se deplasează pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Modul de abordare al problemei:

Fie L centrul cercului înscris (punctul de intersecție al bisectoarelor interioare). Posibilitățile de alegere a locului geometric vor fi:

i) se calculează distanțele de la un punct fix cum ar fi $B, O, C, \ldots$ la punctul mobil L. Dacă una din ele ar fi constantă, atunci locul geometric este un cerc cu centrul în acel punct fix (conform 1°)

ii) Suma sau diferența pătratelor distanțelor de la punctul mobil la două puncte fixe, cum ar fi de exemplu:

$$LC^2 \pm LB^2, LC^2 \pm LO^2, LB^2 \pm LO^2 \text{ etc.}$$

Dacă una dintre aceste relații ar fi constantă, atunci locul geometric ar fi o dreaptă sau un cerc (conform 2° ii) sau 2° iv).

iii) Suma sau diferența distanțelor la două puncte fixe — conform 2°v) sau 2°vi).

iv) Se vor analiza cu răbdare și cu atenție toate celelalte cazuri prezentate în partea teoretică.

De fapt, după un anumit număr de probleme de locuri geometrice lucrate, se va putea intui tipul locului geometric, căutîndu-se direct cazul în care va putea fi încadrată problema.

Problema propusă, se încadrează în tipul 2°i, iar tabelul va fi:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O — centrul cercului. Punctele B și C. Segmentul BC. Arcul BC.	A, L	$m(\hat{A}) = \frac{m(\widehat{BC})}{2}$ $m(\hat{L}) = 180° - m(\hat{B}_2) - m(\hat{C}_2) = 180° - \frac{m(\hat{B}) + m(\hat{C})}{2} =$ $= 180° - \frac{180° - m(\hat{A})}{2} =$ $= 90° + \frac{m(\hat{A})}{2} =$ $=$ constant.

Deci locul geometric al punctului L este format din două arce de cerc, avînd extremitățile în punctele B, C numite arce capabile de unghiul $90° + \frac{m(\hat{A})}{2}$ (Fig. II.E1).

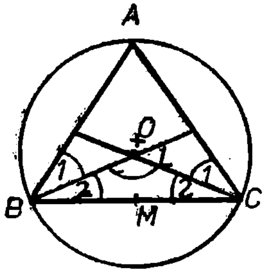


Fig. II.E.1

Două puncte fixe, un punct mobil

E 2. Fie M un punct mobil pe baza BC a triunghiului isoscel ABC, paralelele la laturile egale AB și AC duse prin M intersectează laturile AC și AB respectiv în P și N. Să se determine locul geometric al mijlocului L al segmentului NP.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
A, B, C — vîrfurile triunghiului AH înălțimea triunghiului.	$M \in BC$ P, N $PM \parallel AB$, $MN \parallel AC$ Q — proiecția punctului L pe BC	$APMN$ — paralelogram $PL \equiv LN$ și $AL \equiv LM$ $LQ \parallel AH$ și $LQ = \frac{1}{2} AH$ = constant

Deci locul geometric al punctului L este linia mijlocie a triunghiului ABC (deci o paralelă la BC) (fig. II.E2).

E 3. Prin vîrfurile fixe B, C ale unui triunghi ABC se duce un cerc care intersectează laturile AB, AC în D și E, astfel ca cercul ce trece prin A, D, E să fie egal cu cercul ce trece prin B, C, D, E. Să se determine:

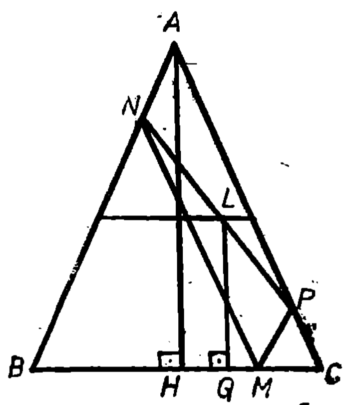


Fig. II.E.2

i) locul geometric al punctelor D şi E.

ii) locul geometric al centrului cercului ce trece prin A, D, E, ştiind că A parcurge cercul fix care trece prin B şi C.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
B, C, BC $\widehat{BC}$. O — centrul cercului circumscris $\triangle ABC$.	O_1 — centrul cercului ce trece prin B, C, D, E. O_2 — centrul cercului ce trece prin A, D, E. M — mijlocul segmentului variabil DE	Cercurile $(BCED)$ şi (ADE) fiind egale $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ arcele $\widehat{DE}$ sînt congruente deoarece subîntind coarda DE, deci $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{DCE}) =$ $= m(\hat{A}) = \dfrac{m(\widehat{BC})}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{BDC}) =$ $= m(\hat{A}) \Rightarrow D, E$ aparţin unui cerc fix ce trece prin O. $DM \equiv ME \Rightarrow$ $O_1M \equiv MO_2$

Deci locul geometric al punctelor D, E este un cerc care trece prin punctele B, C, O, iar locul geometric al punctului O_2 este un cerc concentric (fig. II.E3).

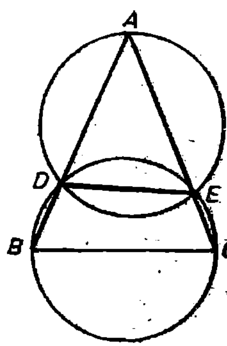


Fig. II.E.3

E 4. Un triunghi ABC are punctele fixe B_1, C_1 — (picioarele înălţimilor care pleacă din B şi C), iar segmentul BC este de lungime constantă. Să se determine locul geometric al vîrfurilor triunghiului ABC.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
B_1, C_1, $\overset{\frown}{B_1C_1}$ segmentul BC	A, B, C H — ortocentrul	BC, $m(\widehat{BC_1C}) = m(\widehat{BB_1C}) = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow BCB_1C_1$ este un patrulater inscriptibil Analog, patrulaterul AC_1HB_1. Deci, $m(\widehat{B_1HC_1}) = 180° - \hat{A} =$ constant

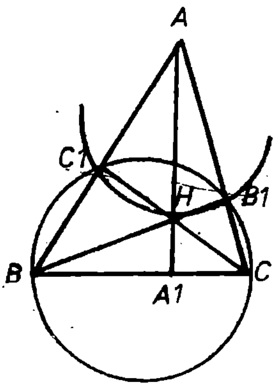


Fig. II.E.4

Deci locul geometric al punctelor B, C este cercul de diametru BC, iar locul geometric al punctului A este un arc de cerc care trece prin punctele B_1 și C_1 (fig. II.E4).

O dreaptă fixă, un punct fix, un punct mobil

E 5. Două cercuri variabile, tangente între ele și tangente fiecare la o dreaptă fixă într-un punct fix. Să se determine locul geometric al punctului lor M de contact.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
Dreapta (Δ) $A, B \in (\Delta)$. $AN \equiv NM \equiv NB$ deoarece dintr-un punct exterior unui cerc se duc tangente egale, deci N—fix	M — punctul de tangență MN — tangenta comună.	$NM = \frac{AB}{2} =$ constant cu N punct fix.

Deci locul geometric al punctului M este cercul de diametru AB și centru punctul N (fig. II.E5).

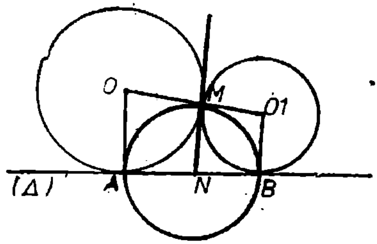


Fig. II.E.5

E 6. Pe o dreaptă (Δ) se consideră un punct fix A și un punct mobil M. Fie B un punct exterior dreptei (Δ). Se consideră simetrica dreptei (MB) față de (Δ) și simetrica dreptei (MB) față de (AB). Să se determine locul geometric al punctului comun acestor două simetrice.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
(Δ), $A \in (\Delta)$ $B \notin (\Delta)$ $A_1 \in (\Delta)$ segmentul BA_1	$M \in (\Delta)$ P, BP P — punctul comun celor două drepte simetrice	$m(\widehat{M}_1) = m(\widehat{M}_2)$ $m(\widehat{B}_1) = m(\widehat{B}_2) \Rightarrow$ în $\triangle PMB$ — AB, AM sînt bisectoare exterioare $\Rightarrow PA$ bisectoare interioară $\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{P}_1) = m(\widehat{P}_2)$. Fie A_1B bisectoarea unghiului $\widehat{MBP} \Rightarrow$ $\Rightarrow PA_1$ este bisectoarea exterioară în $P \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{APA_1}) = 90°$

Deci locul geometric al punctului P este un cerc de diametru AA_1 (fig. II.E6).

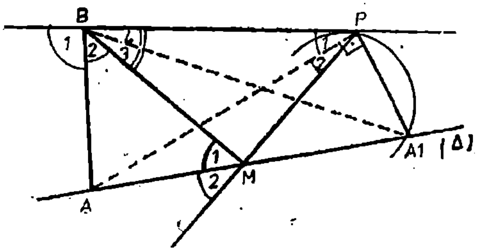


Fig. II.E.6

E 7. Pe două segmente consecutive AB, BC de lungime fixă, situate pe o dreaptă fixă se descriu două cercuri variabile, dar egale între ele. Aceste cercuri se intersectează în B și L. Să se determine locul geometric al punctului L.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
A, B, C $AE \equiv EB$ $BF \equiv FC$ $OE \perp AB$ $O_1F \perp BC$ $MN \perp AC$ $LP \perp AC$	O, O_1 — centrele cercurilor. $\{M\} = (OO_1) \cap$ $\cap (BL)$ $\mathcal{C}(O, r)$ $\mathcal{C}(O_1, r)$. L — al doilea punct de intersecție al cercurilor variabile	$O_1M \equiv MO$, $BM \equiv$ $\equiv ML$ și în trapezul EFO_1O, MN este linie mijlocie $\Rightarrow EN \equiv NF \Rightarrow$ $\Rightarrow MN$ este constantă ca poziție, dar în $\triangle LBP$, MN este linie mijlocie $\Rightarrow PL$ este constantă ca poziție și trece printr-un punct fix P.

Deci locul geometric al punctului L este dreapta (PL) care este perpendiculară pe dreapta (AC) (fig. II.E7).

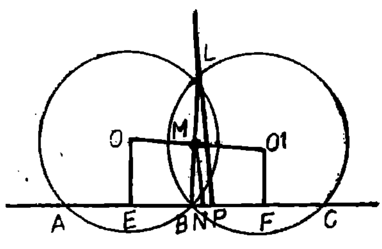


Fig. II.E.7

E 8. Se consideră două cercuri variabile, tangente la aceeași dreaptă fixă în două puncte fixe A, B ale acestei drepte și în plus tangente între ele. Aceste două cercuri au încă o tangentă comună $A'B'$. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $A'B'$.

R.

Elemente fixe	**Elemente mobile**	**Elemente constante**
dreapta (Δ) $A, B \in (\Delta)$ $I \in (\Delta)$	T — punctul de contact al cercurilor. I, K — punctele de intersecție ale tangentei comune în punctul T cu tangentele AB și $A'B'$.	$IA \equiv IT \equiv IB$ $KA' \equiv KT \equiv KB'$ $IT \equiv KT \Rightarrow IK \equiv$ $\equiv AB$ = constant Deci $IK \doteq$ const. cu punctul I fix.

Deci locul geometric al punctului K este cercul de centru I și de rază AB (fig. II.E8).

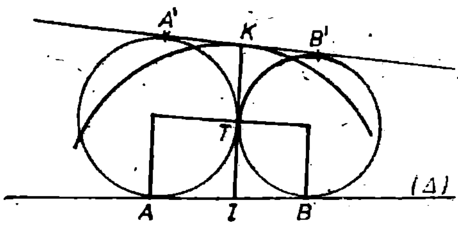


Fig. II.E.8

Un cerc fix, un punct fix, un punct mobil. Un cerc fix, o dreaptă variabilă, un punct mobil

E 9. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor tangente la două drepte.

R: Se vor analiza cazurile:

i) drepte concurente:

Elemente fixe	**Elemente mobile**	**Elemente constante**
O — punctul de intersecție al dreptelor	M — centrul cercului	$AM \equiv MB$ $AM \perp OA$ $MB \perp OB$

Deci locul geometric al punctului M este bisectoarea unghiului format de cele două drepte.

ii) drepte paralele:
Locul geometric al punctului M este o paralelă echidistantă dreptelor paralele.

E 10. Să se determine locul geometric al extremității unei tangente de lungime constantă, dacă punctul de tangență descrie cercul.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O — centrul cercului	M — punctul curent. $M \in \mathcal{C}(O, R)$ L — punctul din care se duce tangenta	$m(\widehat{OML}) = 90°$ ML = constant R — raza cercului $\Rightarrow$ $OL = \sqrt{ML^2 + R^2} =$ = constant.

Deci locul geometric al punctului L este un cerc concentric cu cercul dat și de rază OL.

E 11. Să se determine locul geometric al mijloacelor segmentelor care unesc un punct fix P, cu un punct mobil M situat pe un cerc.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
P, O — centrul cercului O_1 — mijlocul segmentului PO.	$M \in \mathcal{C}(O, R)$ $L \notin \mathcal{C}(O, R)$	$R = MO$ — rază LO_1 linie mijlocie în $\triangle POM$, deci $LO_1 = \frac{R}{2}$ = const. cu punctul O_1 fix.

Deci locul geometric al punctului L este un cerc de rază LO_1 și centru O_1.

E 12. Să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor duse într-un cerc printr-un punct fix M (se vor analiza cazurile: M interior, exterior, pe cerc).

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O — centrul cercului. M — punct interior.	L, A, B AB — coardă	$AL \equiv LB, OL \perp AB \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{MLO}) = 90^0$, cu punctul M, O fixe.

Deci locul geometric al punctului L este un cerc de diametru OM.

E 13. Să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor unui cerc, care au o lungime constantă.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O — centrul cercului $\mathcal{C}(O, R)$	M, $M_1 \in \mathcal{C}(O, R)$ L — mijlocul unei coarde.	$MM_1 = l$ $ML \equiv LM_1 = \frac{l}{2}$ $OL = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} =$ $=$ const. cu punctul O fix.

Deci locul geometric al punctului L este un cerc concentric cu cel inițial, de rază OL și centru O.

E 14. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor de rază dată, tangente la un cerc fix.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O — centrul cercului $\mathcal{C}(O, R)$	O_1 — centrul cercului $\mathcal{C}_1(O_1, r)$.	R, r $OO_1 = R + r$ sau $OO_1 = \mid R - r \mid =$ $=$ const. cu punctul O fix.

Deci locul geometric al punctului O_1 este format din două cercuri concentrice, cu cel dat și de rază $R + r$ și $|R - r|$.

E 15. Printr-un punct mobil M situat pe un cerc fix, ducem segmente paralele cu o dreaptă dată și congruente între ele. Să se determine locul geometric al extremităților M_1 ale acestor segmente.

R: — Se aplică o teoremă referitoare la translație și anume, dacă prin toate punctele unei figuri, ducem segmente congruente, paralele și de același sens, extremitățile acestora formează o figură congruentă cu cea inițială.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
dreapta (Δ) O, O_1 $OO_1 = l$, $OO_1 \parallel (\Delta)$	M, M_1 segmentul MM_1	$MM_1 = l$ $MM_1 \overset{\parallel}{=} OO_1$, deci patrulaterul MM_1OO_1 este un paralelogram.

Deci locul geometric al punctului M_1 este un cerc cu centrul în O_1 și egal cu cel dat (fig. II.E.15).

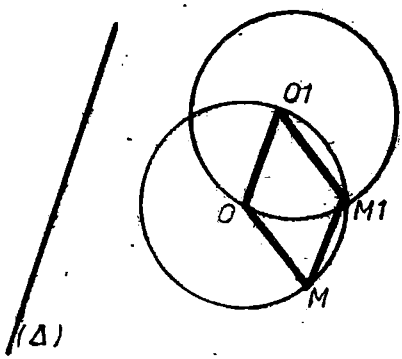


Fig. II.E.15

E 16. Pe o rază mobilă a unui cerc, luăm plecînd de la centrul cercului, o lungime egală cu distanța extremității acestei raze la un diametru fix. Să se determine locul geometric al extremităților segmentelor astfel obținute.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O — centrul cercului AA', BB' diametre.	M — punct pe rază P — proiecția punctului C pe AA'	$OC = R, OM \equiv OP$ $m(\widehat{BMO}) = 90^\circ$ din $\triangle OCP \equiv \triangle OBM$ cu punctele B, O, B' fixe.

Deci locul geometric al punctului M este format din două cercuri, avînd ca diametru pe OB respectiv OB' (fig. II.E16).

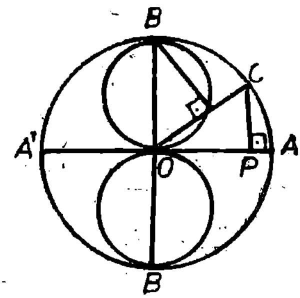


Fig. II.E16

E 17. Fie OA și OB două raze perpendiculare, mobile ale unui cerc $\mathscr{C}(O, r)$. Prin punctele A, B ducem respectiv paralele la două direcții fixe și perpendiculare. Să se determine locul geometric al punctului de intersecție ale acestor două drepte.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
XX', YY' două drepte perpendiculare date. O — centrul cercului. M — intersecția paralelor. C — mijlocul segmentului AB.	OA, OB	$m(\widehat{OAB}) = 90^\circ$ $AM \parallel XX'$ $BM \parallel YY'$ $AC \equiv CB$ $m(\widehat{AMO}) = m(\widehat{ABO}) = 45^\circ$. Patrulaterul $OABM$ este inscriptibil în cercul de centru C, iar $OM \leqslant AB$ deoarece OM este coardă, iar AB este diametru.

Deci locul geometric al punctului M este un segment de măsură $2AB$ și mijloc O, segment aparținînd dreptei care este paralelă cu bisectoarea unghiului format de XX' și YY' și care trece prin centrul cercului O (fig. II.E17).

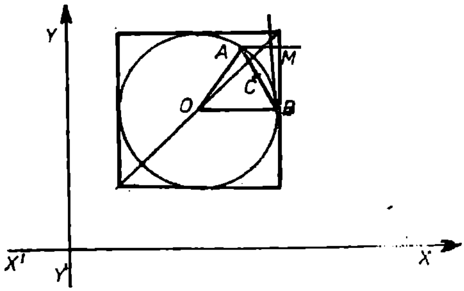
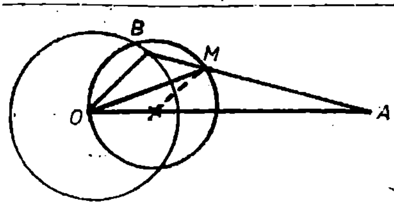


Fig. II.E.17

E 18. Se consideră un punct fix A și un punct mobil B situat pe cercul fix $\mathcal{C}(O, R)$. Să se determine locul geometric al intersecției dreptei (AB) cu bisectoarea unghiului AOB.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
A, O segmentul $AO=l$	B, $m(\widehat{AOB})$ M — piciorul bisectoarei	$OB = R$. În $\triangle AOB$ aplicăm teorema bisectoarei interioare și vom obține: $\frac{AM}{MB}=\frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{OA}{OA+OB} = \frac{l}{l+R} =$ constant.



Deci locul geometric al punctului M este un cerc omotetic cu cel dat. (fig. II.E18).

Fig. II.E.18

E 19. Se consideră un cerc și o coardă fixă AB a acestui cerc. Fie CD o coardă mobilă, dar de lungime constantă. Să se determine:

i) locul geometric al punctului de intersecție I al dreptelor (AC), (BD).

ii) locul geometric al punctului K de intersecție al dreptelor (AD) și (BC).

R.

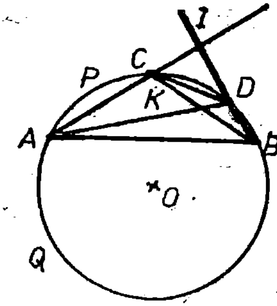
Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O — centrul cercului A, B, AB, $\overparen{AB}$, $m(\widehat{AOB}) = \alpha$	C, D, I, K	$CD = l$ $m(\widehat{COD}) = \beta$ $m(\widehat{AIB}) = \dfrac{m(\overparen{AQB}) - m(\overparen{CD})}{2} = \dfrac{360^\circ - \alpha - \beta}{2} =$ $=$ constant cu punctele A și B fixe.

Deci locul geometric al punctului I este un arc de cerc care trece prin punctele A și B cu $m(\widehat{AIB}) = \dfrac{360^\circ - \alpha - \beta}{2}$ dacă I este deasupra segmentului AB și $m(\widehat{AIB}) = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ dacă I este sub AB.

ii) analog cazului i),

$$m(\widehat{AKB}) = \frac{m(\overparen{AQB}) + m(\overparen{CD})}{2} = \frac{360^\circ - \alpha + \beta}{2},$$

deci locul geometric al punctului K este un arc de cerc, deoarece $m(\widehat{AKB}) = \dfrac{360^\circ - \alpha + \beta}{2}$ dacă K este deasupra segmentu-



lui AB şi $m(\widehat{AKB}) = \frac{\alpha - \beta}{2}$ dacă K este sub segmentul AB (fig. II.E19).

E 20. Fie A, B două puncte fixe, M punct mobil, situate pe un acelaşi cerc fix. Prelungim dreapta (MA) cu lungimea $MN \equiv MB$. Să se determine locul geometric al punctului N.

Fig. II.E19

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
A, B, $\widehat{AB}$ segmentul AB	M, N AM, BM AN, BN	$MN \equiv MB$ $m(\widehat{ANB}) =$ $= m(\widehat{MBN}) =$ $= \frac{1}{2} \cdot m(\widehat{AMB}) =$ $= \frac{1}{4} \cdot m(\widehat{AB})$.

Punctul N se află ca şi punctul B, de aceeaşi parte a tangentei AN_0, deci locul geometric al punctului N este format din două arce de cerc: $\widehat{BNN_0} \cup \widehat{BN'N_0'}$ (fig. II.E20)

E 21. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$ fix, în care se înscrie triunghiul ABC, cu latura BC fixă, iar A este mobil.

i) Să se determine locul geometric al punctelor descrise de

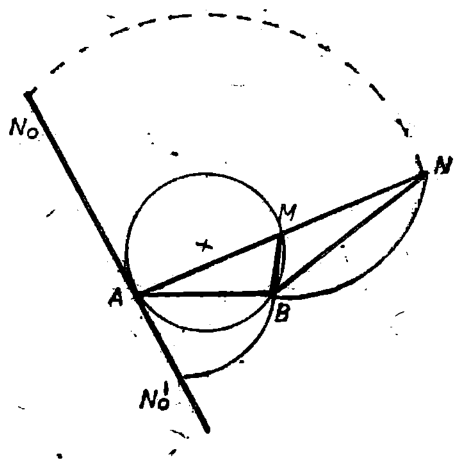


Fig. II.E.20

punctele de intersecţie ale bisectoarelor exterioare, luate două cîte două.

ii) Bisectoarele unghiului A intersectează cercul în D şi E, iar latura BC în G şi F. Să se determine locul geometric al intersecţiei dreptelor (DF) şi (EG).

iii) Să se determine locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul ABC.

iv) Să se determine locul geometric al picioarelor înălţimilor duse din B şi C.

v) Să se determine locul geometric al ortocentrului triunghiului.

R. i)

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
B, C, BC $\widehat{BC}$	L_a, L_b, L_c punctele de intersecţie ale bisectoarelor exterioare.	$m(\hat{A}) = \frac{m(\widehat{BC})}{2}$ $\hat{L}_a = 180° - m(\hat{B}_2) - m(\hat{C}_2) = 180° - \frac{180° - m(\hat{B}_1)}{2} - \frac{180° - m(\hat{C}_1)}{2} = \frac{m(\hat{B}_1) + m(\hat{C}_1)}{2} = \frac{180° - m(\hat{A})}{2} = 90° - \frac{m(\hat{A})}{2} =$ constant. $m(\widehat{CL_cB}) =$ constant $m(\widehat{BL_bC}) =$ constant

Deci locul geometric al punctelor L_a, L_b, L_c sînt perechi de arce de cerc ce subîntind coarda fixă BC (fig. II.E21i).

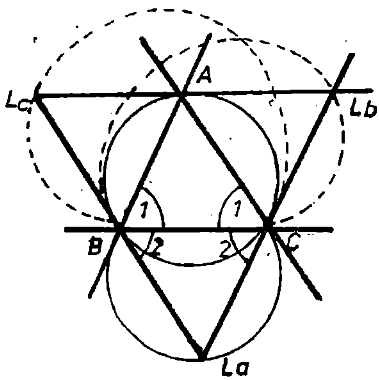


Fig. II.E.21 i)

R: ii)

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
$B, C, \widehat{BC}, BC$, O — centrul cercului	A, G, D, E, F, L	$m(\hat{A}_1) = m(\hat{A}_2)$ $m(\hat{A}_3) = m(\hat{A}_4) \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{DAE}) = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow DE$ diametru $\Rightarrow$ $\Rightarrow DE \perp BC$. În $\triangle DEF$, DG și FG sînt înălțimi $\Rightarrow EG$ înălțime $\Rightarrow m(\widehat{DLE}) =$ $= 90°$

Deci locul geometric al punctului L va fi chiar cercul dat (fig. II.E21,ii).

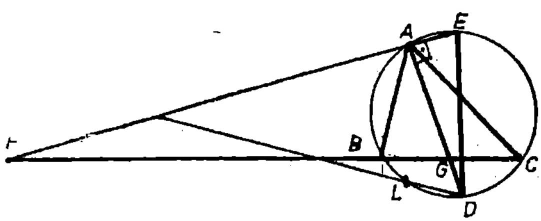


Fig. II.E.21 ii)

R. iii)

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
$B, C, BC, \overset{\frown}{BC}$	$A \in \mathcal{C}(O, r)$ L — punctul de intersecţie al bisectoarelor.	$m(\hat{A}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$ $m(\hat{L}) = 180° - m(\hat{B}_2) - m(\hat{C}_2) = 180° - \dfrac{m(\hat{B}) + m(\hat{C})}{2} = 180° - \dfrac{180° - m(\hat{A})}{2} = 90° + \dfrac{m(\hat{A})}{2} =$ constant.

Deci locul geometric al punctului L este format din două arce capabile de unghiurile $90° + \dfrac{m(\hat{A})}{2}$; $180° - \dfrac{m(\hat{A})}{2}$ în care coarda BC este comună (fig. II.E21,iii).

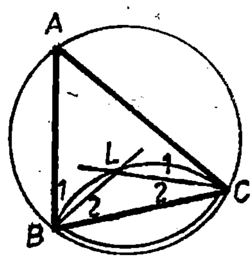


Fig. II.E.21. iii)

R: iv)

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
$B, C, BC, \overset{\frown}{BC}$	$A \in \mathcal{C}(O, r)$ M, N — picioarele înălţimilor	$m(\hat{M}) = 90°$ $m(\hat{N}) = 90°$

Deci locul geometric al punctului M (respectiv N) este cercul de diametru BC (fig. II.E21,iv).

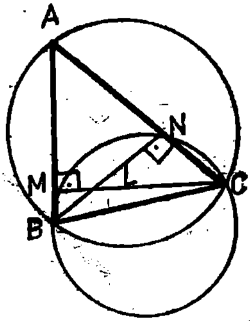


Fig. II.E.21iv)

R: v)

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
$B, C, BC,$ $\overset{\frown}{BC}$	M, N — picioarele înălțimilor L — ortocentrul	În patrulaterul inscriptibil $LMAN$ $m(\hat{L}) = 360° - m(\hat{M}) - m(\hat{N}) - m(\hat{A}) = 360° - 90° - 90° - \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2} = 180° - \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2} =$ constant

Deci locul geometric al punctului L este un cerc (simetric cercului circumscris $\triangle ABC$, față de coarda BC) (fig. II.E21,iv)

E 22. Să se determine locul geometric al punctelor care au tangentele duse la un cerc dat, egale cu distanța pînă la un punct fix A.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O, A, OA	T, M	$MT = MA$ $OM^2 = MT^2 + R^2$ $AM^2 - OM^2 = R^2 =$ $=$ constant.

Deci locul geometric al punctului M este o perpendiculară pe segmentul OA (fig. II.E22).

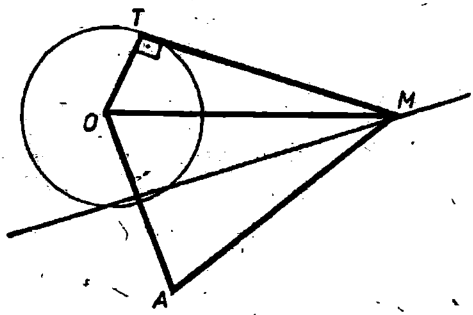


Fig. II.E.22

E 23. Să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor dintr-un cerc dat:

i) egale cu o coardă dată, ii) paralele cu o coardă dată.

R: i)

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
A, B, AB, $\widehat{AB}$ O — centrul cercului	$M, N, \in \mathcal{C}(O, R)$ mijlocul segmentului MN	$MN \equiv AB$ $ML \equiv LN$ $OL = \sqrt{R^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} =$ $=$ constant cu punctul O fix.

Deci locul geometric al punctului L este un arc concentric cu cercul dat şi de rază OL.

R: ii)

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
A, B, AB, $\widehat{AB}$ O — centrul cercului	M, N, L	$MN \parallel AB$ $OM \equiv ON = R$

Deci locul geometric al punctului L este diametrul perpendicular pe AB.

E 24. Pe un cerc $\mathscr{C}$ $(O; r)$ se iau un punct fix A și un punct mobil M. Bisectoarea unghiului $\widehat{AOM}$ intersectează cercul variabil care trece prin punctele M, A, O în L. Să se determine locul geometric al punctului L.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O, A, segmentul OA	M, OL — bisect. $m(\widehat{AOM})$ L	$m(\widehat{AOL}) = m(\widehat{LOM})$ $OL \perp AM$ ca mediatoare $\Rightarrow LA \perp AO$

Deci locul geometric al punctului L este o dreaptă perpendiculară în A pe OA (fig. II.E24).

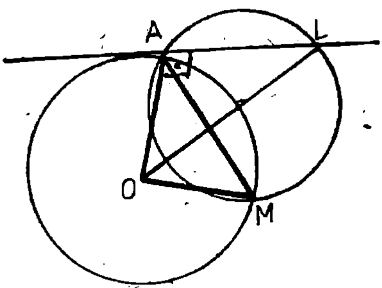


Fig. II.E 24

E 25. Pe un cerc $\mathscr{C}$ (O, r) se iau un punct fix A și un punct mobil M. Prin A se duce o dreaptă variabilă care face cu dreapta (AM) un unghi α — constant. Perpendiculara dusă în M pe AM, intersectează cealaltă latură a unghiului constant în L. Să se determine locul geometric al punctului L.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O, A, B AB — diametru	AM, AL	$m(\widehat{LAM}) = \alpha$ $LM \perp AM$. $m(\widehat{ALB}) = 90° +$ $+ \alpha =$ constant

Deci locul geometric al punctului L este format din două arce capabile de unghiul $90° + \alpha$, care trec prin extremitățile coardei AB (fig. II.E25).

E 26. Se dă cercul $\mathcal{C}(O, r)$, un punct fix A pe cerc și unghiul $\widehat{MAN}$ înscris, de mărime constantă și cu laturile variable. Să se determine locul geometric al intersecției dreptei (AN) cu perpendiculara ridicată în M pe AM.

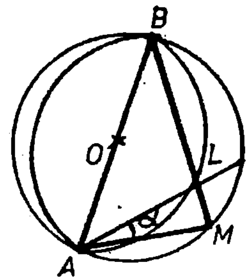


Fig. II.E25

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O — centrul cercului A, B diametral opuse	M, N, L $\{L\} = (AN) \cap \cap (MB)$	$m(\hat{A}) = \alpha$ $m(\widehat{AML}) = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{ALM}) = 90° - \alpha = \text{constant}$

Deci locul geometric al punctului L este format din două arce de cerc care au diametrul AB drept coardă comună (fig. II.E26).

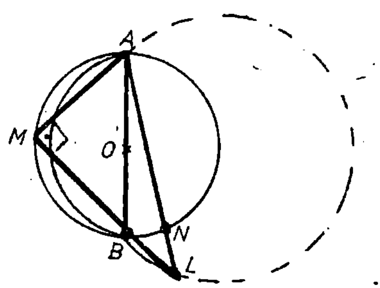


Fig. II.E.26

E 27. Să se determine locul geometric al simetricului unui punct fix de pe un cerc, față de un punct M mobil pe cerc.

R.

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O — centrul cercului. A, B diametral opuse. C — simetricul punctului A față de B.	M. L — simetricul punctului A față de M.	$m(\widehat{AMB}) = 90°$. Cum $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AL} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta ACL \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{ALC}) = 90°$ Punctele A și C fixe.

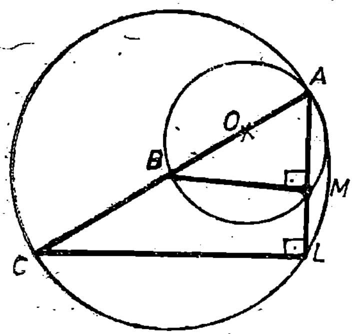


Fig. II.E.27

Deci locul geometric al punctului L este cercul de diametru AC (fig. II.E27).

E 28. Pe latura AC a triunghiului fix ABC se ia un punct fix O. O secantă mobilă ce trece prin O, intersectează laturile AB și BC în D și D'. Să se determine locul geometric al celui de al doilea punct comun L al cercurilor circumscrise ΔAOD și $\Delta COD'$.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
ABC $O \in AC$	D, D', L	$m(\widehat{ALC}) = 180° -$ $- m(\hat{A}_1) - m(\hat{C}_1) -$ $- m(\hat{C}_2) = 180° -$ $- (180° - m(\hat{A}_1) -$ $- m(\hat{A}_2) - m(\hat{B})) -$ $- m(\hat{A}_1) - m(\hat{C}_2) =$ $= m(\hat{B}) = \text{constant} \Rightarrow$ $\Rightarrow ABLC$ patrulater inscriptibil.

Deci locul geometric al punctului L este un cerc (cercul circumscris $\triangle ABC$) (fig. II.E28).

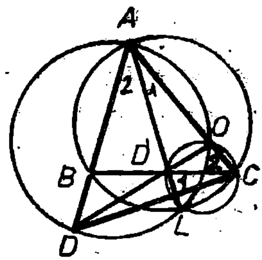


Fig. II.E.28

E 29. Fie AB o coardă fixă a unui cerc. Prin A ducem o coardă AC și luăm pe această coardă de o parte și de alta a punctului C, $CM \equiv CM' \equiv CB$. Să se determine locul geometric al punctelor M și M' cînd C descrie arcul $\overset{\frown}{ACB}$.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
AB, $\overset{\frown}{AB}$	C, M, M'	$CM' \equiv CM \equiv CB$ $m(\hat{C}_1) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$ $\triangle BCM$ este isoscel $\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\hat{C}_1) = m(\hat{M}) +$ $+ m(\hat{B}_1) = 2m(\hat{M}) \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\hat{M}) = \frac{m(\hat{C}_1)}{2} =$ $= \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{4} =$ constant. $\triangle M'CB$ este isoscel $\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\hat{C}_1) = 180° -$ $- m(\hat{M}') - m(\hat{B}_2) =$ $= 180° - m(\hat{M}') -$ $- m(\hat{B}_2) = 180° -$ $- 2m(\hat{M}') \Rightarrow m(\hat{M}') =$

(continuare)

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
		$= 90° - \frac{m(\hat{C}_1)}{2} =$ $= 90° - \frac{m(\widehat{AB})}{4} =$ $=$ constant.

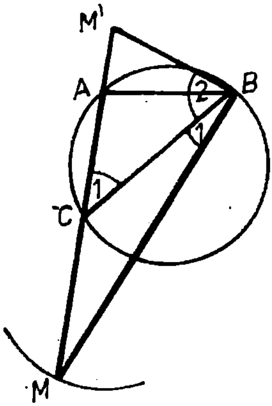


Fig. II.E.29

Deci locul geometric al punctului M este un arc capabil de unghiul $\frac{\hat{C}}{2}$, iar locul geometric al punctului M' este un arc capabil de unghiul $90° - \frac{m(\hat{C})}{2}$ (fig. II.E29).

E 30. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor variabile ce trec prin două puncte date.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
A, B, AB	L — centrul cercului	$LA \equiv LB$ cu punctele A și B fixe.

Deci locul geometric al punctului L este mediatoarea segmentului AB.

E 31. Fiind dată o dreaptă (Δ) să se determine locul geometric al centrelor cercurilor de rază R care determină pe (Δ) un segment de lungime constantă l. Este posibilă întotdeauna problema?

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
(Δ) $AB = l$	L — centrul cercului. M — proiecția punctului L pe (Δ).	$ML = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(R - \frac{l}{2}\right)\left(R + \frac{l}{2}\right)} =$ constant.

Deci locul geometric al punctului L este format din două drepte paralele cu dreapta (Δ). Problema are soluție numai dacă $R - \frac{l}{2} > 0 \Rightarrow R > \frac{l}{2}$.

E 32. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor tangente la un cerc dat, într-un punct dat al aceluiași cerc.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O — centrul cercului $A \in \mathcal{C}(O, r)$	L — centrul cercului variabil.	O, A, L — coliniare

Deci locul geometric al punctului L este dreapta care trece prin punctele fixe A și O (indiferent de pozițiile cercurilor tangente interior sau exterior).

E 33. Un unghi de mărime constantă cu vîrful pe un cerc are laturile variabile și intersectează cercul în B și C. Să se determine locul geometric al mijlocului coardei BC.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O — centrul cercului	B, C, AB, AC L — mijlocul coardei BC	$BL \equiv LC$ $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ BC, $m(\widehat{BC})$ $OL = \sqrt{R^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} =$ $=$ constant.

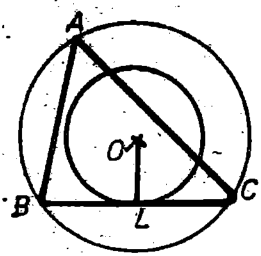


Fig. II.E.33

Deci locul geometric al punctului L este un cerc concentric cu cel dat și de rază OL (fig. II.E33).

E 34. Din punctul M se duc tangentele PM și RM la cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Să se determine locul geometric al punctului M cînd unghiul format de cele două tangente este constant.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O — centrul cercului	P, R, M $\{S\} = (OM) \cap$ $\cap (PR)$	$m(\widehat{PMR}) = 2\alpha$ $m(\widehat{POR}) = 180° - 2\alpha$ $\Rightarrow PR$, $\widehat{PR}$ constant $OS = \sqrt{OP^2 - \left(\frac{PR}{2}\right)^2}$ $MS = PS \cdot \text{ctg}\ \alpha$ $OM = OS + SM =$ $=$ constant.

Deci locul geometric al punctului M este un cerc de rază OM (fig. II.E34).

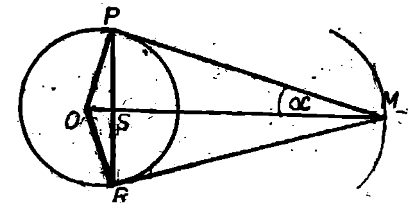


Fig. II.E.34

E 35. Într-un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ se duc două diametre perpendiculare AB și CD. O dreaptă variabilă care trece prin punctul C intersectează diametrul AB (sau prelungirea lui) în M și cercul în N. Să se determine locul geometric al intersecției paralelei la CD dusă prin M, cu tangenta la cerc dusă în N.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
A, B, C, D O — centrul cercului	M, N, L	$\triangle OMN \equiv \triangle LMN \Rightarrow$ $\Rightarrow ML = ON = R$

Deci locul geometric al punctului L este tangenta în D la cercul dat (fig. II.E35).

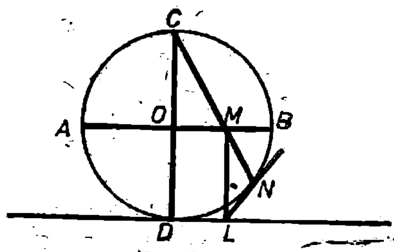


Fig. II.E.35

Două drepte fixe, un punct mobil

E 36. Să se determine locul geometric descris de vîrful unghiului drept al unui triunghi dreptunghic invariabil, dacă vîrfurile ascuțite alunecă pe două drepte fixe perpendiculare.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O. OX; OY $OX \perp OY$	A; B; C; M	$AM \equiv MB$ $m(\hat{C}) = \text{const.}$ și $m(\hat{O}) + m(\hat{C}) = 180°$, deci patrulaterul $OBCA$ este inscriptibil în cercul $\mathcal{C}\left(M, \frac{AB}{2}\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{COB}) = m(\widehat{CAB})$ dar $m(\widehat{CAB})$ = constant și $m(\widehat{CBA})$ = = constant $\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{COB})$ = constant

Deci locul geometric al punctului C este un segment de dreaptă, care formează cu OX un unghi de mărime constantă, iar acest segment este de lungime $2\,AB$ al cărui mijloc este punctul O (fig. II.E36).

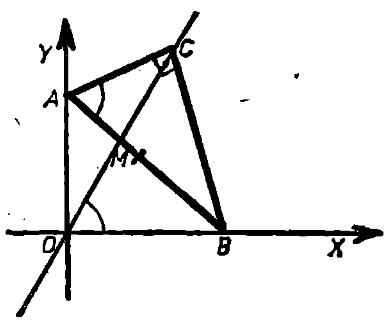


Fig. II.E.36

E 37. Pe două drepte fixe, luăm pornind din două puncte fixe, A, B, situate respectiv pe cele două drepte, două segmente AM, BN, care variază proporțional între ele, iar prin punctele M, N se duc paralele la două direcții date. Să se determine locul geometric al intersecției acestor două drepte paralele.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
$A, B, X'X''$, $Y'Y''$ AO, $B'O$ — paralele cu două direcții date. Construim $OX \parallel X'X''$, $OY \parallel Y'Y''$	M, N, AM, BN $\{C_1\} = (M_1P_1) \cap \cap (N_1Q_1)$ $\{C\} = (MP) \cap \cap (QN)$	Patrulaterele $AOPM$, AOP_1M_1, $BOQN$, BOQ_1N_1 sînt paralelograme $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{OC}{OC_1} = \frac{OP}{OP_1} = = \frac{OQ}{OQ_1} \Rightarrow QC \parallel Q_1C_1 \parallel \parallel OB$

Deci locul geometric al punctului C este dreapta care trece prin OC_1 (fig. II.E37).

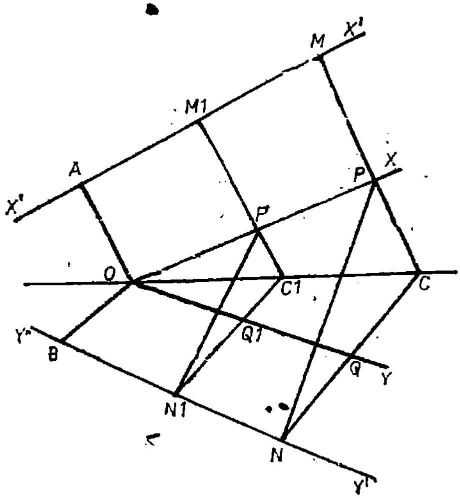


Fig. II.E37

E 38. Să se determine locul geometric al punctelor care împart într-un raport dat m(m $\in$ **R**) segmentele formate de laturile unui unghi dat pe paralelele la o direcție dată.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
AB, AC $m(\widehat{BAC})$	$\{M\} = (AM_1) \cap$ $\cap (BC)$ BC, B_1C_1 M_1B_1, M_1C_1 MB, MC	$B_1C_1 \parallel BC \parallel$ cu o direcție dată $\frac{M_1B_1}{M_1C_1} = m \Rightarrow$ $\frac{B_1M_1}{C_1M_1} = \frac{BM}{CM} = m$

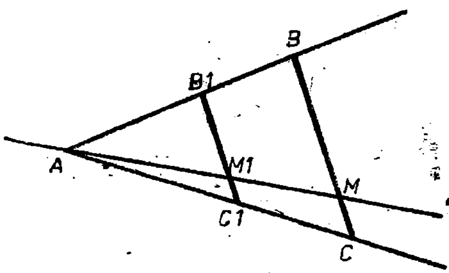


Fig. II.E.38

Deci locul geometric al punctelor M este o dreaptă care trece prin punctul A astfel încît $\frac{BM}{CM} = m$ (fig. II.E38).

E 39. Pe latura Ox a unui unghi dat xOy, luăm un punct mobil M și pe OM ca diametru se descrie un cerc. Construim apoi un cerc tangent la primul și la laturile unghiului. Să se determine locul geometric al punctului de contact al celor două cercuri.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
Ox, Oy $m(\widehat{xOy})$ Oz — bisectoarea unghiului xoy $m(\widehat{zox}) =$ $= m(\widehat{yoz})$ A, B, L	M, O_1, O_2 $\mathcal{C}\left(O_1, \frac{OM}{2}\right)$ $\mathcal{C}(O_2, R_2)$, iar O_2 aparține bisectoarei $\widehat{xoy}$. L — punctul de tangență al celor două cercuri.	O_1O_2 are direcție constantă $\frac{O_1L}{LO_2} = \frac{R_1}{R_2} =$ constant

Deci locul geometric al punctului L este o dreaptă ce trece prin punctul O astfel încît $\frac{O_1L}{LO_2} =$ constant. (fig. II.E39).

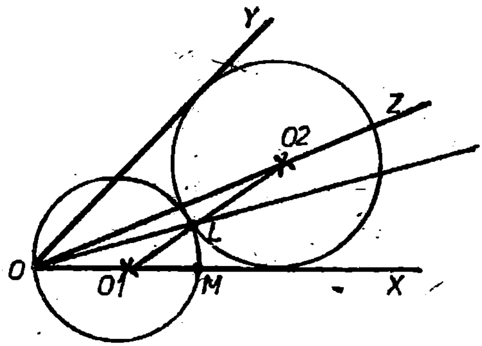


Fig. II.E29.

E 40. Se dau două drepte paralele și un punct O în planul lor. Din acest punct ducem o secantă mobilă care intersectează dreptele în A și A'. Să se determine locul geometric al extremității A'', al unei perpendiculare ridicate pe secantă din punctul A' și avînd lungimea egală cu AO.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O, (D_1), (D_2) P, P' — picioarele perpendicularelor duse din O pe (D_1) și (D_2)	(D_3) — secantă ce trece prin A, A', A'', P''	$\frac{OA'}{OA} = \frac{OP'}{OP}$ și $OA \equiv A'A'' \Rightarrow \frac{OA'}{A'A''} = \frac{OP'}{OP} \Rightarrow \triangle OA'A''$ dreptunghic în A', are raportul catetelor constant, deci rămîne asemenea cu el însuși.

Deci locul geometric al punctului A'' este format din două drepte (depinzînd de sensul segmentului $A'A''$). (fig. II.E40).

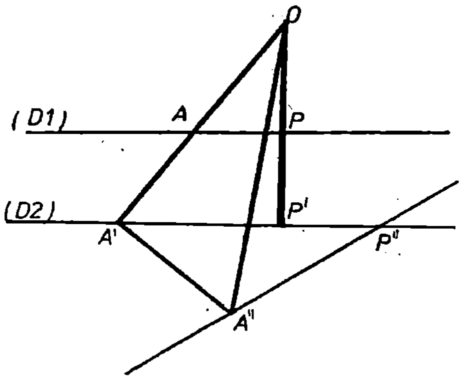


Fig. II.E.40

E 41. Fie două drepte paralele (Δ) și (Δ') și A un punct fix pe (Δ). Prin A se duce o dreaptă variabilă ce intersectează dreapta (Δ') în A'. Din A' se ridică perpendiculara $A'B$ pe AA' $(B \in (\Delta))$. Se unește B cu simetricul punctului A față de A' notat cu C. Să se determine locul geometric al punctului L, de proiecție a punctului A pe BC.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
$(\Delta) \parallel (\Delta')$ $A \in (\Delta)$ $AH = l$ — distanța între paralele.	A', C, B, L	$\triangle ABC$ este isoscel deoarece $BA' \perp AC$ și $AA' \equiv A'C$, $AL \equiv$ $\equiv CM$ ca înălțimi, iar $CM = 2AH = 2l \Rightarrow$ $\Rightarrow AL = 2l =$ $=$ constant.

Deci locul geometric al punctului L este un cerc cu centrul în A şi de rază AL (fig. II.E41).

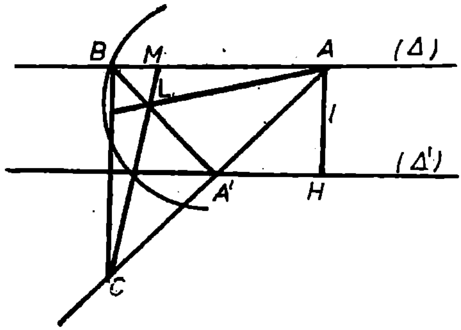


Fig. II.E41

E 42. Un segment MN de lungime constantă se deplasează rezemîndu-şi extremităţile pe două drepte perpendiculare Ox şi Oy. Să se determine locul geometric al mijlocului L al segmentului MN.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
Ox, Oy	M, L, N OM, ON	$ML = LN$, MN, $OL = \frac{MN}{2}$ = constant cu punctul O fix.

Deci locul geometric al punctului L este un cerc de centru O şi de rază $\frac{MN}{2}$.

Două cercuri fixe, un punct mobil

E 43. Printr-un punct A, comun la două cercuri fixe, ducem o secantă mobilă, care intersectează cercurile în M şi M_1. Să se determine locul geometric al punctului P, care împarte segmentul MM_1, într-un raport k dat.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
$A, B, AB.$	M, M_1, N, N_1 $Q, P.$	$\frac{MP}{PM_1} = k$ $\frac{NQ}{QN_1} = k \Rightarrow$ $\Rightarrow MN \parallel M_1N_1 \parallel PQ.$ Patrulaterul $ABQP$ este inscriptibil, deoarece unghiurile sale sînt congruente cu cele ale patrulaterului inscriptibil $ABNM$.

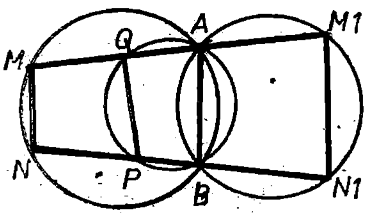


Fig. II.E43

Deci locul geometric al punctului P este cercul circumscris patrulaterului $ABPQ$. (fig. II.E43).

E 44. Să se determine locul geometric al punctului M din care vedem două cercuri date sub același unghi. (Unghiul sub care se vede o curbă dintr-un punct, este unghiul format de tangentele duse la curbă din acel punct).

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O, O_1 — centrele cercurilor $\mathcal{C}(O, r), \mathcal{C}(O_1, r_1)$	M, tangentele duse la cerc prin M: AM, A_1M_1, BM, B_1M	$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{A_1MB_1})$ $m(\widehat{AMO}) = m(\widehat{A_1MO_1})$ $\triangle AMO \sim \triangle A_1MO_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{MO}{MO_1} = \frac{AO}{A_1O_1} =$ $= \frac{r}{r_1} =$ constant.

Deci locul geometric al punctului M este un cerc, care are ca diametru segmentul mărginit de picioarele bisectoarelor interioare și exterioare duse în M pentru $\triangle MOO_1$, intersectate cu linia centrelor OO_1 (fig. II.E44).

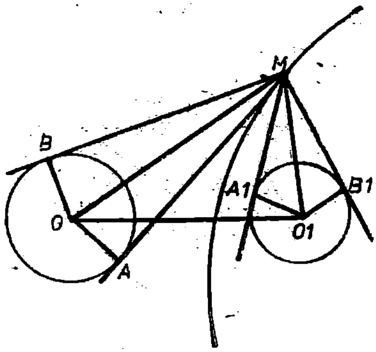


Fig. II.E44

E 45. Se dau două cercuri fixe $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ și un cerc $\mathcal{C}_3$ mobil, care intersectează cercurile date. Segmentele comune între $(\mathcal{C}_3)$ și fiecare din cercurile $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ se intersectează în M. Să se determine locul geometric al punctului M cînd cercul $(\mathcal{C}_3)$ este variabil și ca poziție și ca mărime. (Exemplu de existență a unui loc geometric, deși problema are doi parametri variabili).

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O_1, O_2, O_1O_2	$O_3 \in \mathcal{C}_3$ O_1O_3, O_2O_3 A_1, $B_1 \in$ $\in (\mathcal{C}_1) \cap (\mathcal{C}_3)$ A_2, $B_2 \in (\mathcal{C}_2) \cap$ $\cap (\mathcal{C}_3)$ $\{M\} = (A_1B_1) \cap$ $\cap (A_2B_2)$	$A_1B_1 \perp O_1O_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow MB_1$ — axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_3$ $A_2B_2 \perp O_2O_3$, MB_2 — axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_2$ și $\mathcal{C}_3 \Rightarrow M$ — — centrul radical al celor trei cercuri, deci M se află și pe axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$

Deci locul geometric al punctului M este o dreaptă și anume axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ (fig. II.E45).

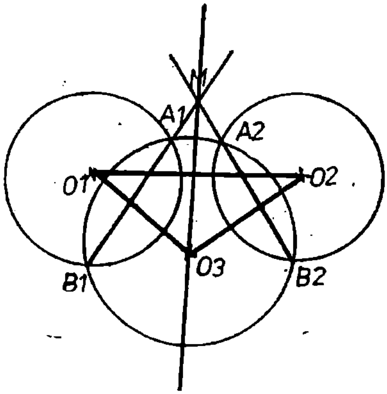


Fig. II.E45

E 46. Să se determine locul geometric al punctelor care au diferența puterilor față de două cercuri date, constantă. Caz particular: constanta este egală cu zero.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O_1, O_2 — centrele cercurilor	M, MO_1, MO_2	$\rho_1 - \rho_2 = K \Rightarrow$ $\Rightarrow MO_1^2 - r_1^2 - MO_2^2 +$ $+ r_2^2 = K \Rightarrow MO_1^2 -$ $- MO_2^2 = r_1^2 - r_2^2 +$ $+ K =$ constant

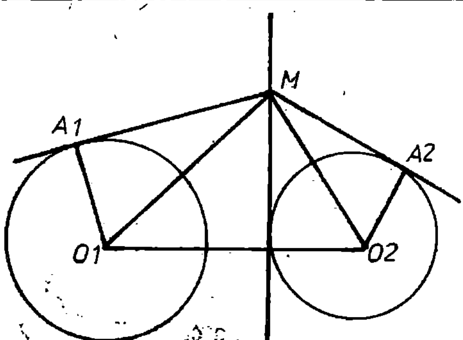


Fig. II.E46

Deci locul geometric al punctului M este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor. Dacă $K = 0$ atunci locul geometric este axa radicală a celor două cercuri (fig. II.E46).

E 47. Se dau două cercuri tangente exterioare. Prin punctul de tangență se duc două secante variabile care se intersectează sub un unghi constant α. Să se determine locul geometric al mijloacelor bazelor trapezelor în care secantele sînt diagonale, cînd ele se rotesc în jurul punctului de tangență.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O, O_1 — centrele cercurilor T — punctul de tangență.	M, L, AB, DC	$DO \equiv OA \equiv OT = R$ $BO_1 \equiv O_1C \equiv O_1T = R_1$, $m(\widehat{BTC}) = m(\widehat{DTA}) = \alpha$. $\triangle DOT$ este isoscel, cu $m(\widehat{ODT}) = m(\widehat{DTO}) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow DT = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$. $MT = 2R \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = R \sin \alpha$. $OM = OT - MT = R(1 - \sin \alpha) =$ constant. Analog, se calculează: $O_1L = R_1(1 - \sin \alpha) =$ constant.

Deci locul geometric al punctului M este un cerc concentric cu cercul $\mathcal{C}(O, OT)$ și de rază OM, iar locul geometric al punctului L este un cerc concentric cu cercul $\mathcal{C}_1(O_1, O_1T)$ și de rază O_1L (fig. II.E47).

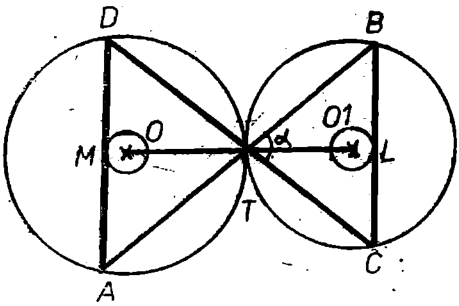


Fig. II.E47

E 48. Două cercuri tangente fiecare la o dreaptă fixă, în cîte un punct fix, sînt variabile rămînînd mereu tangente între ele. Să se determine locul geometric al punctului lor de contact.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
A, B punctele de tangență ale cercurilor cu dreapta fixă.	O, O_1 centrele cercurilor. C — punctul de tangență. M — proiecția punctului C pe AB. $m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{ACM})$. $m(\widehat{O_1BC}) = m(\widehat{BCM})$ ca unghiuri alterne interne	$\triangle AOC$ isoscel $m(\widehat{OAC}) = 90° - \frac{m(\widehat{AOC})}{2}$. $\triangle O_1BC$ isoscel $\Rightarrow m(\widehat{CBO_1}) = 90° - \frac{m(\widehat{CO_1B})}{2}$. $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{OAC}) + m(\widehat{CBO_1}) = 180° - \frac{m(\widehat{AOC})+m(\widehat{CO_1B})}{2} = 90° =$ constant cu punctele A și B fixe

Deci locul geometric al punctului C este un cerc de diametru AB (fig. II.E48).

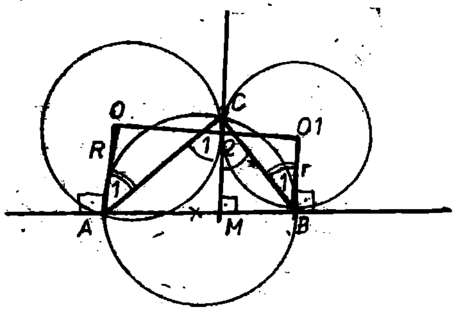


Fig. II.E48

E 49. Două cercuri egale se intersectează în punctele A și B. O secantă variabilă dusă prin A, intersectează cele două cercuri în punctele M și N. Să se determine locul geometric al mijlocului L al segmentului MN.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
A, B, AB	M, N, MN, L BL, LA	$ML \equiv LN$ $m(\hat{M}) = m(\hat{N}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle BMN$ isoscel $BL \perp MN$ deci $m(\widehat{ALB}) = 90°$

Deci locul geometric al punctului L este cercul de diametru AB (fig. II.E49).

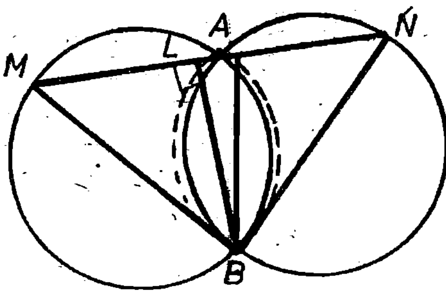


Fig. II.E49

E 50. Se dau două cercuri secante $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}'(O', r')$. Fie S unul dintre punctele lor comune. Se duc prin S două secante perpendiculare, mobile (ASA') și (BSB'). Să se determine locul geometric al intersecției dreptelor (AB) și $(A'B')$.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O, O' centrele cercurilor. S, P punctele lor de intersecție.	AA', BB' $m(\widehat{OSB}) = \alpha$, $m(\widehat{O'SB'}) = \alpha'$, $\{L\} = (AB) \cap \cap (A'B')$	$(ASA') \perp (BSB')$ $OS \equiv OB$, $O'S \equiv O'B'$ $m(\widehat{ASB}) = 90° \Rightarrow \Rightarrow AB$ — diametru. $m(\widehat{A'SB'}) = 90° \Rightarrow \Rightarrow A'B'$ — diametru, $m(\widehat{ALB'}) = 180° - - m(\widehat{ABS}) - - m(\widehat{A'B'S}) = 180° - - \alpha - \alpha' \Rightarrow \Rightarrow m(\widehat{OLO'}) = \alpha + \alpha'$ dar $\alpha = m(\widehat{OBS}) = = \dfrac{m(\widehat{AS})}{2}$; $\alpha' = m(\widehat{O'B'S}) = = \dfrac{m(\widehat{A'S})}{2} \Rightarrow \alpha + \alpha' = = \dfrac{m(\widehat{AS}) + m(\widehat{A'S})}{2} = = 90° \Rightarrow m(\widehat{OLO'}) = = 90°$

Deci locul geometric al punctului L este arcul capabil de unghiul dat $\alpha + \alpha'$, dar cum $m(\widehat{OLO'}) = 90°$ înseamnă că locul geometric este un cerc de diametru OO' (fig. II.E50).

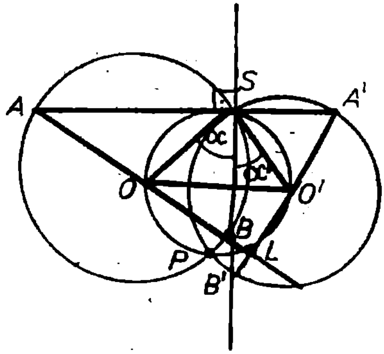


Fig. II.E50

E51. Două cercuri $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ se intersectează în A și A'. Pe primul cerc luăm punctul B, pe al doilea punctul C, astfel încît $m(\widehat{BAC})=90°$. Să se determine locul geometric al mijlocului L al ipotenuzei BC.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
A, O, O_1, OO_1	B, C, L	$m(\widehat{BAC}) = 90°$ $OL \perp AB, O_1L \perp AC,$ $BL \equiv LC \Rightarrow AMNL$ este un dreptunghi $\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{OLO_1}) = 90°$

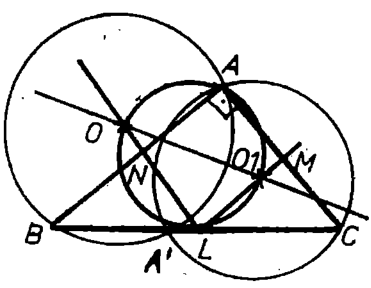


Fig. II.E51

Deci locul geometric al punctului L este cercul de diametru OO_1 (fig. II.E51).

E 52. Se dau două cercuri $\mathcal{C}_1(O, r)$, $\mathcal{C}_2(C, r_1)$, al doilea trecînd prin O; M este un punct mobil pe $\mathcal{C}_2$ iar A, B punctele comune cercurilor. Dreptele (MA), (MB) intersectează cercul $\mathcal{C}_1(O, r)$ în A' și B'. Să se arate că $AA' \equiv BB'$ și să se determine locul geometric al punctului L, de intersecție al dreptelor $(A'B')$ și (MO), cînd M descrie cercul $\mathcal{C}_2(C, r_1)$.

R:

Elemente fixe	Elemente mobile	Elemente constante
O, A, B, AB, $\widehat{AB}$	M, L, A', B'	$m(\widehat{AMO}) = m(\widehat{OMB})$ $AA' \equiv BB'$. $AB'BA$ este trapez isoscel.

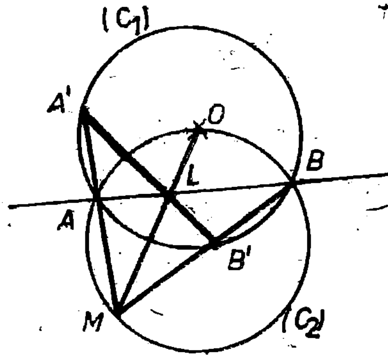


Fig. II.E52

Deci locul geometric al punctului L este dreapta care trece prin A, B, mai precis, dacă M aparține arcului $\widehat{AB}$ exterior cercului $\mathcal{C}_2(O, r_1)$, locul geometric este segmentul AB, iar dacă M se află pe arcul $\widehat{AB}$ interior cercului $\mathcal{C}_2(O, r_1)$, locul geometric este restul dreptei (AB) (fig. II.E52).

EXERCIŢII PROPUSE

1. Se dau trei puncte fixe A, B, C şi un punct mobil în planul determinat de punctele date. Să se determine locul geometric al punctului M astfel ca raportul dintre ariile triunghiurilor MBC şi ABC să fie egal cu o constantă reală dată K.

2. Se dă un unghi AOB. Să se determine locul geometric al punctului M astfel ca perimetrul paralelogramului $AOBM$ să fie constant.

3. Fie triunghiul ABC cu latura AB fixă şi a cărei mediană dusă prin A face cu AB un unghi α constant. Să se determine locul geometric al vîrfului C al triunghiului cînd AC se roteşte în jurul vîrfului B, mediana AA' rămînînd fixă.

4. Se dă un triunghi ABC. Dacă $DE \parallel AB$, să se determine locul geometric al punctului de intersecţie I al dreptelor (DB) şi (AE) cînd dreapta (DE) se deplasează paralel cu ea însăşi.

5. Se dă triunghiul ABC a cărui bază BC este fixă. Să se determine locul geometric descris de vîrful A astfel încît diferenţa pătratelor medianelor CC' şi BB' duse din vîrfurile C şi B să fie egală cu o constantă K.

6. Într-un triunghi ABC se duce linia mijlocie $MN \parallel AB$ şi fie P mijlocul segmentului MN. Să se determine locul geometric al punctului P cînd AB este latură fixă şi unghiul C de măsură constantă.

7. Pe latura BC a unui triunghi oarecare ABC se consideră un punct M astfel ca triunghiul AMB să fie asemenea cu triunghiul ABC. Să se determine locul geometric al punctului M cînd dreapta (AB) este fixă, iar vîrful C descrie un cerc care trece prin punctele A şi B.

8. În triunghiul ABC latura BC este fixă, iar unghiul A este constant.

Bisectoarele unghiului A intersectează cercul circumscris triunghiului în D şi E, iar latura BC respectiv în G şi F. Să se determine locul geometric al intersecţiei dreptelor (DF) şi (EG).

9. Fie ABC triunghiul dreptunghic în care $m(\hat{A}) = 90°$. Pe AC şi AB ca laturi se construiesc respectiv pătratele $AEDC$ şi $AGFB$, în exteriorul triunghiului ABC.

Ştiind că punctele B, C sînt fixe, iar A este mobil, să se determine locul geometric al punctului de intersecţie al dreptelor (ED) şi (FG).

10. Un triunghi ABC are fixe punctele B_1 şi C_1 picioarele înălţimilor duse din B şi C, iar dreapta (BC) este de lungime constantă. Să se determine locul geometric al vîrfurilor A, B şi C.

11. Într-un cerc de centru O se consideră un diametru AB pe care se aleg punctele C şi D astfel încît $OC \equiv OD$.

i) Să se arate că oricare două coarde paralele duse prin punctele C şi D au aceeaşi lungime.

ii) Dacă cele două coarde duse prin punctele C şi D intersectează unul din semicercurile determinate de diametrul AB respectiv în punctele E şi F, să se arate că $CE \cdot DF =$ constant.

iii) Dacă poziţia coardelor paralele este variabilă atunci să se determine locul geometric al mijloacelor lor.

12. Să se determine locul geometric al centrului de greutate G al triunghiului MBC, M fiind un punct fix, iar B şi C proiecţiile acestuia pe laturile unui unghi de 60°, care se roteşte în jurul vîrfului său fix A.

13. Fie AA_1 şi AA' mediana şi bisectoarea unui triunghi coborîte din vîrful A. Pe latura BC luăm $A_1A' \equiv A_1A''$, prin A'' ducem o paralelă la latura AC care intersectează mediana AA_1 în D. În ipoteza BC constantă şi fixă şi unghiul A constant, să se determine locul geometric al intersecţiei dreptelor (AA') şi (BD).

14. Să se determine locul geometric al centrelor dreptunghiurilor înscrise într-un triunghi dat.

15. Se dau punctele O, A și B coliniare. Prin A și B se duc două drepte paralele cu o direcție dată. O dreaptă mobilă în jurul punctului O intersectează dreptele duse prin A și B în punctele P și Q. Fie P' și Q' simetricele punctelor P și Q în raport cu punctele A și B. Să se determine locul geometric al proiecției punctului O pe dreptele (PQ') și (QP').

16. Se dă un punct fix P aparținînd bisectoarei unui unghi fix XOY. O dreaptă mobilă (Δ) intersectează dreptele (OX) și (OY) în două puncte.

Să se determine locul geometric al punctului de intersecție dintre perpendiculara dusă din P pe (Δ) cu o dreaptă care unește vîrful O al unghiului XOY cu mijlocul segmentului dreptei (Δ) cuprins între laturile unghiului XOY.

17. Se dau două drepte paralele (D), (D') și un punct fix A pe (D). Prin A se duce o dreaptă variabilă care intersectează pe (D') în A'. În acest punct se ridică perpendiculara pe AA' care intersectează dreapta (D) în B. Se unește B cu simetricul A_1 al punctului A față de A'. Să se determine locul geometric al proiecției M a punctului A pe dreapta (BA_1) cînd dreapta (AA') se rotește în jurul punctului A.

18. Se dă un unghi de măsură $60°$ care se rotește în planul determinat de laturile sale în jurul vîrfului său fix A. Din punctul fix B situat la distanța $2l$ de punctul A se coboară perpendicularele BC și BD pe laturile acestui unghi. Se unește mijlocul O al segmentului AB cu punctele C și D. Se cere:

i) Să se arate că unghiurile OCD și ODC sînt de măsură $30°$.

ii) Să se determine locul geometric al punctului de concurență al medianelor triunghiului OCD.

19. Pe laturile AB și AD ale unui dreptunghi dat $ABCD$ se construiesc spre exterior pătratele $ABGH$ și $ADEF$.

i) Să se arate că punctele E, A și G sînt coliniare.

ii) Notînd cu M mijlocul segmentului EG, să se arate că acest punct se află pe cercul de diametru BD.

iii) În construcția precedentă, presupunînd vîrfurile D și B ale dreptunghiului $ABCD$ fixe, iar vîrfurile A și C variabile, să se determine locul geometric al punctului M.

20. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC. Pe cateta AB se ia un punct M astfel ca $AC^2 = AM \cdot AB$ şi se notează cu P proiecţia punctului M pe ipotenuza BC. Se cere:

i) Să se determine locul geometric al punctului P, cînd vîrful B al triunghiului se deplasează pe dreapta (AB);

ii) Să se arate că dreapta (MP) trece printr-un punct fix.

21. Se consideră un trapez isoscel $ABCD$, în care vîrfurile A şi B ale bazei AB sînt fixe, iar C şi D se deplasează într-un plan care trece prin AB astfel încît $CD = BC + AD$.

i) Să se determine locul geometric al punctelor C şi D.

ii) Bisectoarea unghiului BCD intersectează într-un punct M, perpendiculara în B la BC. Să se determine locul geometric al punctului M.

22. Se consideră toate paralelogramele $ABCD$, de perimetru constant, care au vîrful A fix şi laturile AB, AD de-a lungul dreptelor fixe Ax, Ay. Să se determine locul geometric al vîrfului C. *Discuţie.*

23. Se consideră trapezul $ABCD\ (AD \parallel BC)$. Luăm pe CD un punct variabil M şi construim prin C şi D paralele respectiv la (MA) şi (MB). Să se determine locul geometric al intersecţiei acestor drepte.

24. La capetele unui segment AB se duc, de aceeaşi parte a segmentului, două paralele pe care se iau punctele C şi D. Din mijlocul E al segmentului AB se duce perpendiculara EM pe CD. Să se determine locul geometric al punctului M cînd lungimile segmentelor AC şi BD sînt variabile astfel încît aria trapezului $ACDB$ să fie constantă.

25. Pe un cerc de centru O se consideră punctul fix A şi punctul variabil M. Dacă B este simetricul punctului O faţă de A şi C este simetricul punctului A faţă de M, să se determine locul geometric al intersecţiei dreptelor (BM) şi (OC).

26. Fie ABC un triunghi oarecare. Prin vîrfurile B şi C se duc două drepte paralele (D_1) şi (D_2). Fie M intersecţia bisectoarelor unghiurilor formate de (D_1) cu AB şi respectiv (D_2) cu AC. Să se determine locul geometric al punctului M cînd dreptele (D_1) şi (D_2) se rotesc în jurul punctelor B, respectiv C, iar A descrie cercul circumscris triunghiului ABC.

27. Fie $ABCD$ un paralelogram și E un punct variabil pe latura AB.

i) Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor DAE și ECB se intersectează a doua oară într-un punct F situat pe latura CD a paralelogramului.

ii) Fie I intersecția dreptei (EC) cu cercul circumscris triunghiului DAE, iar J intersecția dreptei (FA) cu cercul circumscris triunghiului ECB. Să se arate că triunghiurile AID și BJC sînt asemenea și să se demonstreze relația: $EF^2 = AI \cdot CJ = \text{constant}$.

iii) Să se determine locurile geometrice descrise de punctele I și J.

28. Fie ABC un triunghi fix și M un punct variabil pe dreapta (AB). Cercul care trece prin punctele A și M și este tangent în A dreptei (AC) intersectează cercul care trece prin B și M și este tangent în B dreptei (BC) în punctul N.

i) Să se determine locul geometric al punctului N.

ii) Să se arate că dreapta (MN) trece printr-un punct fix.

29. Se dă un triunghi oarecare ABC, avînd $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ și P un punct pe dreapta (BC). Paralela dusă din P la AB intersectează dreapta (AC) în C' și paralela dusă din P la (AC) intersectează dreapta (AB) în B'. Notăm cu M mijlocul segmentului $B'C'$.

Se cere:

i) să se determine locul geometric al punctului M cînd punctul P descrie dreapta (BC);

ii) să se calculeze perimetrul și aria paralelogramului $AB'PC'$ în funcție de a, b, c și de raportul $\dfrac{BP}{PC} = r$;

iii) să se arate că raportul dintre aria paralelogramului $AB'PC'$ și aria triunghiului ABC depinde numai de r.

30. Fie triunghiul isoscel $ABC(AB \equiv AC)$, M un punct mobil pe BC; B', C' proiecțiile ortogonale ale lui M pe AC, respectiv AB și O mijlocul segmentului AM.

i) Să se arate că $OB' \equiv OC' \equiv OH$, unde H este mijlocul laturii BC.

ii) Să se arate că punctele A, C', M, H, B' sînt conciclice.

iii) Să se determine locul geometric al centrului cercului de la punctul ii) cînd M se deplasează pe BC.

iv) Să se arate că suma $MB' + MC'$ este egală cu una din înălțimile egale ale triunghiului ABC.

31. Fie date dreptele (Δ_1) și (Δ_2) concurente în O și punctele A pe (Δ_1) și B pe (Δ_2). Perpendiculara în A pe (Δ_1), intersectează pe (Δ_2) în A', iar perpendiculara în B pe (Δ_2) intersectează (Δ_1) în B'. Se cere să se arate că:

i) patrulaterul $AA'BB'$ este inscriptibil;

ii) $OA \cdot OB' = OB \cdot OA'$;

iii) segmentul $A'B'$ este constant atunci cînd A și B se deplasează astfel încît $AB = K$ = constant;

iv) să se determine locul geometric al punctului M de intersecție a dreptelor (AA'), (BB') în condițiile de la punctul iii).

32. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC înscris într-un cerc dat.

Ipotenuza BC rămîne fixă, iar vîrful A este mobil pe cerc.

Fie B' și C' punctele unde bisectoarele unghiurilor B și C intersectează cercul.

Se cere:

i) locul geometric al mijlocului segmentului $B'C'$;

ii) să se arate că perpendiculara dusă din punctul A pe $B'C'$ trece printr-un punct fix.

33. Să se determine locul geometric al punctelor astfel ca suma distanțelor la două drepte concurente să fie constantă.

34. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului OM, cînd O este fix, iar punctul M descrie o dreaptă dată (xy).

35. În patrulaterul $ABCD$ vîrfurile A, B, C sînt fixe, iar vîrful D descrie o dreaptă. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului MN care unește mijlocul segmentului AB cu mijlocul segmentului CD.

36. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare. Notăm cu M și N picioarele perpendicularelor coborîte din D și C pe dreptele paralele (Δ_1) și (Δ_2) se trec respectiv prin punctele A și B.

Să se determine locul geometric al mijlocului P al segmentului MN, cînd dreptele (Δ_1) și (Δ_2) se rotesc în jurul punctelor A și B.

37. Să se determine locul geometric al punctelor de intersecție ale laturilor neparalele ale trapezelor isoscele înscrise într-un cerc dat, care au ca diagonale o coardă dată a cercului.

38. Ox și Oy fiind două drepte perpendiculare se consideră toate dreptunghiurile $ABCD$ care au vîrful A pe Ox, vîrful C pe Oy și raportul laturilor $\frac{AB}{BC} = k$. Să se determine:

i) locul geometric al vîrfurilor B și D;

ii) locul geometric al centrelor dreptunghiurilor.

39. În trapezul $ABCD$ ($BC \parallel AD$), fie $AD = a$, $BC = b$ și H punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD. Să se determine locul geometric al punctului H atunci cînd trapezul se deformează una din laturile paralele rămînînd fixă.

40. Se rotește un pătrat $ABCD$ în jurul punctului A și fie $AB'C'D'$ noua poziție, iar α unghiul de rotație. Se cere:

i) locul geometric al intersecției dreptelor (BB'), (DD') cînd α este variabil;

ii) să se arate că dreptele (BB'), (CC') și (DD') sînt concurente.

41. Se dă un triunghi echilateral ABC. Să se determine locul geometric al punctelor M pentru care $MA = MB + MC$.

42. Se unește un punct variabil M al unei drepte (D) cu un punct fix O și se ia pe OM un punct N astfel încît $ON : NM = k$. Să se determine locul geometric descris de punctul N.

43. Se împart laturile CA, AB ale unui triunghi ABC, în același sens, în același raport k, prin punctele M, N. Dacă P este un punct fix al planului, să se determine locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MNP, cînd k este variabil.

44. Să se determine locul geometric al punctelor M din planul triunghiului ABC, astfel ca să avem:

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k^2,$$

α, β, γ, k, fiind constante reale.

45. Se consideră un triunghi isoscel OAB $(OA \equiv OB)$ în care latura OA rămîne fixă. Să se determine locurile geometrice ale centrelor cercurilor exînscrise în unghiurile A şi B şi care sînt tangente segmentelor OB respectiv OA.

46. Pe un segment fix AB se ia un punct variabil C (cuprins între punctele A şi B). Prin acest punct se duce o dreaptă variabilă (Δ) pe care se iau în acelaşi sens segmentele $CD \equiv AC$ şi $CE \equiv BC$. Să se determine locul geometric al punctului M de intersecţie a dreptelor (AD) şi (BE).

47. Să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor paralele cu o direcţie dată, într-un cerc dat.

48. Să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor congruente cu o coardă dată, într-un cerc dat.

49. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor care trec prin două puncte date.

50. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor tangente la un cerc dat, într-un punct dat al acestui cerc.

51. Fie A un punct fix, P un punct mobil pe cercul (O). Să se determine locul geometric al mijlocului M al segmentului AP.

52. Într-un cerc se duc două diametre perpendiculare AB şi CD. O dreaptă variabilă care trece prin punctul C intersectează diametrul AB (sau prelungirea lui) în punctul M şi cercul în N. Să se determine locul geometric al intersecţiei paralelei la CD, dusă prin M, cu tangenta la cerc în N.

53. Se dau două cercuri secante. Prin punctele lor de intersecţie se duc două secante paralele, care formează un paralelogram cu vîrfurile pe cele două cercuri. Să se determine locul geometric al mijloacelor laturilor acestui paralelogram şi al punctului de intersecţie al diagonalelor lui, cînd secantele, rămînînd paralele, trec prin punctele de intersecţie a cercurilor date.

54. Să se determine locul geometric al vîrfurilor unghiurilor drepte ale căror laturi sînt tangente la un cerc.

55. Să se determine locul geometric al vîrfurilor unghiurilor de mărime constantă ale căror laturi sînt tangente la un cerc.

56. Un segment de lungime constantă se deplasează rezemîndu-şi extremităţile pe două drepte perpendiculare Ox şi Oy. Să se determine locul geometric al mijlocului M al segmentului.

57. Pe o dreaptă (D) se dă un punct fix A şi altul mobil M. Fie B un alt punct fix, exterior dreptei (D). Se ia simetrica dreptei (MB) faţă de (D) şi simetrica aceleaşi drepte (MB) faţă de (AB). Să se determine locul geometric al punctului P comun acestor două drepte simetrice.

58. Se dau două cercuri (O) şi (C), al doilea trecînd prin O; M este un punct mobil pe (C), iar A, B punctele comune cercurilor. Dreptele (MA), (MB) intersectează cercul (O) în A' şi B'. Să se arate că $AA' \equiv BB'$ şi să se determine locul geometric al punctului P comun dreptelor $(A'B')$ şi (MO), cînd M descrie cercul (C).

59. Se dă un cerc (O), o dreaptă (Δ) şi un punct D în interiorul cercului. Să se determine locul geometric al ortocentrului H al triunghiului ABC, care are vîrfurile B şi C pe cercul (O), vîrful A pe dreapta (Δ) şi în care D este piciorul înălţimii coborîte din A pe BC.

60. Perpendiculara dusă din vîrful B pe diametrul CC' al cercului circumscris triunghiului ABC intersectează latura AC în D, iar perpendiculara în D pe AC intersectează cercul descris pe AC ca diametru în punctele P şi Q.

Să se determine locul geometric al punctelor P şi Q cînd vîrfurile B şi C rămîn fixe, iar A se deplasează pe cercul circumscris triunghiului ABC. *Discuţie.*

61. Se dă un triunghi dreptunghic ABC înscris într-un cerc dat. Ipotenuza BC rămîne fixă, iar vîrful A se deplasează pe cerc. Fie B' şi C' punctele unde bisectoarele unghiurilor B şi C intersectează cercul. Se cere:

i) locul geometric al mijlocului segmentului $B'C'$;

ii) să se arate că perpendiculara dusă din A pe $B'C'$ trece printr-un punct fix.

62. Fie un cerc de centru O şi de diametru AB. Într-un punct C fix al acestui diametru ducem o perpendiculară. O secantă variabilă ce trece prin A intersectează perpendiculara în N şi cercul în M. Se cere:

i) locul geometric al cercului circumscris patrulaterului $CNMB$;

ii) locul geometric al punctelor de contact ale tangentelor duse din A la aceste cercuri;

iii) locurile geometrice i) și ii) intersectează diametrul AB respectiv în R și P. Să se arate că segmentul PR este congruent cu diferența dintre media aritmetică și cea geometrică a segmentelor AB și AC.

63. Se dă un cerc și un punct fix A. Dreapta mobilă dusă prin A intersectează cercul în punctele B și C. Pe mijlocul M al coardei BC se duce perpendiculara MP congruentă cu MA. Să se determine locul geometric al punctului P.

64. Se dă cercul $\mathscr{C}(O,R)$, punctul A pe cerc, diametrul NM și dreapta (D) perpendiculară pe MN în punctul B. Dreapta (AN) intersectează dreapta (D) în C. Să se determine locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului ABC:

i) cînd punctul A este mobil pe cerc, iar dreapta (D) este fixă;

ii) cînd punctul A este fix, iar (D) se deplasează paralel cu ea însăși.

65. Se dă un cerc $\mathscr{C}(O,R)$, un punct fix A și un unghi constant $\widehat{MAN}$ înscris. Să se determine locul geometric al intersecției dreptei (AN) cu perpendiculara ridicată în punctul M pe dreapta (AM).

66. În triunghiul ABC latura BC este fixă, iar vîrful A este mobil pe cercul $\mathscr{C}(O,R)$ circumscris triunghiului ABC. Bisectoarele unghiului A intersectează cercul în punctele D și E, iar latura BC respectiv în punctele G și F. Să se determine locul geometric al intersecției dreptelor (DF) și (EG).

67. Se dă un cerc $\mathscr{C}(O,R)$, pe el un punct fix A și un alt punct fix P în planul cercului. Fie (D) o dreaptă variabilă ce trece prin P. Perpendiculara dusă din punctul A pe (D) intersectează cercul $\mathscr{C}(O,R)$ a doua oară în M. Să se determine locul geometric al simetricului punctului M față de dreapta (D).

68. Să se determine locul geometric al punctelor de contact al tangentelor paralele la o direcție fixă, duse la cercurile tangente la două drepte date (Ox), (Oy).

69. Într-un triunghi ABC latura BC este fixă, iar unghiul A constant. $A'B'C'$ fiind triunghiul ortic, să se determine locul geometric al ortocentrului triunghiului ortic.

70. Se dă cercul $\mathscr{C}(O,R)$ și punctul exterior P. Fie A un punct mobil pe cercul dat $\mathscr{C}(O,R)$. Cercul $\mathscr{C}(K,R_1)$ ce trece prin P și A intersectează a doua oară cercul (O) în B.
Dreapta (AB) intersectează tangenta în P la cercul (K) în punctul M. Să se determine locul geometric al punctului M.

71. Să se determine locul geometric al proiecției ortocentrului unui triunghi ABC pe mediana corespunzătoare vîrfului A, știind că punctele B și C sînt fixe și că suma pătratelor medianelor triunghiului este constantă.

72. Să se determine locul geometric al punctului M astfel încît puterea lui în raport cu un cerc $\mathscr{C}(O,R)$ să fie egală cu pătratul distanței sale la un punct dat A.

73. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor care trec printr-un punct fix A și sînt ortogonale unui cerc dat.
Reamintesc: două cercuri de raze R și r și distanța centrelor d, care se intersectează sub un unghi drept (adică raza unuia este tangenta celuilalt în punctul de contact) se numesc ortogonale și satisfac relația:

$$d^2 = R^2 + r^2.$$

Puterea centrului cercului de rază R, la cercul ortogonal lui este R^2 și reciproc.

74. Fie cercul $\mathscr{C}(O,R)$, coarda BC fixă și punctul A mobil pe cerc. Bisectoarele unghiurilor B și C ale triunghiului ABC intersectează cercul în B' și C'. Să se determine locul geometric al mijlocului coardei $B'C'$ și să se arate că perpendiculara dusă din A pe $B'C'$ trece printr-un punct fix.

75. Se dă un cerc cu centrul în O și două diametre perpendiculare AA' și BB'. Din punctul A ducem o secantă variabilă care intersectează cercul în C, iar diametrul BB' în I. Tangenta în C la cerc și perpendiculara în I pe diametrul BB' se intersectează în M. Să se determine locul geometric al punctului M cînd secanta dusă prin A este variabilă.

76. În paralelogramul $ABCD$, fie M un punct variabil pe latura AD, punctele B',C' simetricele punctului M față de B și respectiv C. Dreptele, $(B'D)$ și $(C'A)$ se intersectează în P.

i) Să se determine locul geometric al punctului P.
ii) Să se arate că dreapta (MP) trece printr-un punct fix.

77. În triunghiul ABC, fie D un punct situat pe latura BC, P un punct situat pe AD și M mijlocul segmentului BC. Paralela pe P la BC intersectează laturile AB și AC în punctele E și F. Notăm $\{Q\} = (BF) \cap (CE)$, $\{R\} = (DQ) \cap (PM)$.

i) Să se determine locul geometric al punctului Q cînd punctul P este mobil pe AD.

ii) Să se arate că dreapta (PQ) trece printr-un punct fix.

iii) Să se determine locul geometric al punctului R.

78. Fie $ABCD$ și $AB'C'D'$ două pătrate egale. Dreptele (BB') și (DD') se intersectează în punctul M.

i) Să se arate că dreptele (BB'), (CC') și (DD') sînt concurente.

ii) Să se determine locul geometric al punctului M cînd pătratul $AB'C'D'$ este variabil, iar $ABCD$ rămîne fix.

79. Fie A un punct fix pe un cerc $\mathcal{C}(O,R)$, BC o coardă variabilă astfel încît $AB^2 + AC^2 =$ constant. Să se determine locul geometric al mijlocului M al coardei AB.

80. Să se determine locul geometric al punctului M astfel încît între distanțele MA, MB la două puncte fixe A, B să avem relația:

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = K^2;\ \alpha, \beta \in [0, \infty),\ K \in \mathbf{R}.$$

81. Să se determine locul geometric al punctului M, așa ca să avem între distanțele la două puncte fixe A, B relația:

$$\alpha MA^2 - \beta MB^2 = K^2,\ \alpha,\ \beta,\ K \in \mathbf{R}.$$

82. Să se arate că două tangente la un cerc și coarda de contact împart în două părți congruente perpendiculara dusă dintr-un punct oarecare al coardei de contact pe diametrul care trece prin acel punct.

83. În triunghiul ABC, B' și C' sînt mijloacele laturilor AC și AB. Fie M un punct pe latura BC; paralelele prin M la AB și AC intersectează pe AC, respectiv AB, în P și N.

i) Să se determine locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor (NB'), (PC').

ii) Să se demonstreze că dreptele (NP), (AM), $(B'C')$ sînt concurente.

84. În triunghiul ABC ($AB \equiv AC$) perpendiculara în A pe AB intersectează pe BC în B', iar I este piciorul perpendicularei B' pe AC. Fie M un punct pe segmentul BB' şi fie P, Q, R picioarele perpendicularelor din M pe AB, AC, AB'.

i) Să se arate că BB' este bisectoarea unghiului $AB'I$.

ii) Să se arate că $AP + AQ = AI$.

iii) Fie E, F, G simetricele punctului M faţă de P, Q, R. Să se arate că punctele A, E, G sînt coliniare şi că dreptele (EF) şi (GF) sînt perpendiculare.

iv) Dacă înălţimea AD a triunghiului ABC este fixă, să se determine locul geometric al punctului I.

85. Pe laturile egale AB, AC ale triunghiului isoscel ABC se consideră punctele variabile P, Q, astfel ca $BP \equiv AQ$.

i) Să se arate că distanţa de la mijlocul O al segmentului PQ la latura BC este constantă.

ii) Să se determine locul geometric al punctului O.

iii) Să se arate că aria trapezului format de punctele P, Q şi de proiecţiile acestora pe BC este constantă.

iv) Să se calculeze aria triunghiului APQ în funcţie de $AB = a$ şi $AQ = x$.

v) Să se determine poziţia segmentului PQ pentru care aria triunghiului APQ este maximă.

86. Se dă un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ şi un punct P exterior cercului. Din punctul P se duc tangentele la cerc. Fie A şi B punctele de contact.

i) Să se arate că ortocentrul triunghiului PAB este simetric cu centrul cercului, faţă de dreapta (AB).

ii) Să se afle lungimea tangentei din P cînd ortocentrul se află pe cerc.

iii) Să se determine locul geometric al punctului P astfel ca tangenta să fie congruentă cu raza.

87. Se dă un cerc, cu AB un diametru al său, C un punct variabil pe cerc şi D punctul unde dreapta AC intersectează tangenta în B la cerc. Pe BC în sensul de la B la C luăm un punct E astfel ca $BE \equiv BD$ şi prin E ducem paralela la AB care intersectează pe AC în F. Să se determine locul geometric al punctului F cînd C descrie cercul dat.

88. Două cercuri $\mathcal{C}(O, R)$ şi $\mathcal{C}(O', R')$ sînt tangente exterioare în M. Un unghi drept BMA se roteşte în jurul punctului M, laturile sale intersectînd respectiv cercurile în punctele B şi A.

i) Să se demonstreze că dreapta (BA) trece printr-un punct fix.

ii) Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului BA.

89. Se dau două cercuri inegale de centre O și O' tangente exterioare în A $(OA > O'A)$. De aceeași parte a liniei centrelor construim din A la cele două cercuri două coarde variabile AB, AB' astfel ca $\frac{AB}{AB'} = \frac{AO}{AO'}$.

i) Să se determine locul geometric al punctului de intersecție al razelor OB, $O'B'$.

ii) Să se determine locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului ABB'.

90. Se consideră un cerc fix $\mathscr{C}(O, R)$ un punct fix A în planul său și un diametru variabil MM' al cercului. Dreapta $(M'A)$ intersectează cercul în Q' și în P' paralela la OA dusă prin M.

i) Să se arate că segmentul PP' are mijlocul său I fix. Să se determine locul geometric al punctelor P și P'.

ii) Să se arate că suma $MP^2 + M'P'^2$ este constantă.

91. Pe un cerc dat $\mathscr{C}(O, R)$ se consideră două puncte fixe A și B și un punct variabil M. Să se determine locul geometric descris de centrul cercului care trece prin A și este tangent în M la dreapta (BM).

92. Se dă un cerc $\mathscr{C}(O, R)$ și un cerc $\mathscr{C}(O', R')$ interior primului cerc. O tangentă variabilă la cercul $\mathscr{C}(O, R)$ intersectează cercul $\mathscr{C}(O', R')$ în M și N. Să se determine locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului $MO'N$.

93. Se consideră cercul $\mathscr{C}(O, R)$.

i) Să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor cercului care trec printr-un punct dat P.

ii) Să se determine locul geometric al punctelor din plan de unde cercul se vede sub un unghi drept.

94. Se consideră cercul cu centrul în O și de rază R și două drepte, din planul său. Se cere:

i) locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de cercul dat cu distanța d. *Discuție.*

ii) Să se determine punctele din plan aflate la distanța d de cerc și egal depărtate de cele două drepte. *Discuție.*

95. Considerăm dreptunghiul $ABCD$ cu $DC < AD$ şi notăm cu I punctul de intersecţie al diagonalelor lui, AC şi BD. Cercul $\mathcal{C}_1$ circumscris triunghiului IDC se intersectează cu laturile AD şi BC respectiv în E şi F, iar cercul $\mathcal{C}_2$ circumscris triunghiului AID intersectează prelungirile laturilor AB şi CD respectiv în G şi H.

i) Să se arate că BD este bisectoarea unghiului $\widehat{CDG}$ şi că punctele G, I şi F sînt coliniare.

ii) Să se arate că GD şi FD sînt respectiv tangente cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ şi că L fiind intersecţia dreptei (GF) cu (AD), BL este perpendiculară pe GD.

iii) M fiind un punct mobil pe cercul $\mathcal{C}_2$, dreapta (MI) intersectează cercul $\mathcal{C}_1$ în N. Să se determine locul geometric al punctului în care se intersectează (MG) şi (CN).

iv) Notăm cu O_1 şi O_2 centrele cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$; să se arate că patrulaterele $GBFD$ şi O_1IO_2D sînt inscriptibile, iar centrele cercurilor circumscrise lor sînt coliniare cu D.

96. Se consideră segmentul AB. Prin A şi B ducem perpendicularele Ax şi By pe AB. O dreaptă care trece prin punctul I, mijlocul segmentului AB, intersectează dreapta (Ax) în P şi dreapta (By) în N. Perpendiculara prin I pe dreapta (PN) intersectează dreptele (Ax), (By) în M şi Q.

i) Să se arate că $MN = MA + NB$.

ii) Dacă L este punctul pe MN aşa încît $LM \equiv MA$, să se arate că triunghiul ALB este dreptunghic în L.

iii) Să se arate că dreapta (MN) este tangentă la un cerc fix, cînd dreapta (PN) se roteşte în jurul punctului I.

iv) Să se determine locul geometric al punctului J, simetricul punctului I, în raport cu dreapta (MN).

97. Se consideră un cerc de centru O, de rază R şi un diametru fix Ox al acestuia. Un segment AB, de lungime egală cu raza R, se deplasează în aşa fel, ca A să descrie axa Ox, iar B cercul O. În punctul A se duce perpendiculara pe Ox, care intersectează pe OB în M. Se cere:

i) să se calculeze AM în funcţie de $OA = 2u$;

ii) fie N punctul de pe AB, situat între A şi B la distanţa b de A, iar P şi Q punctele unde perpendiculara din N pe Ox intersectează pe Ox şi OB. Să se calculeze raportul $\frac{PQ}{PN}$, arătînd că este constant cînd AB este variabil ca poziţie, păstrînd însă lungimea constantă R;

iii) să se determine locul geometric al punctului Q şi al punctului M;

iv) se poate deduce locul geometric al punctului N din cunoaşterea locului geometric al punctului Q?

98. Se înscrie într-un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ un triunghi ABC.

i) Să se determine pe arcul BC, care nu conţine punctul A, un punct A', astfel încît, luînd intersecţiile A_b, A_c ale tangentei în A' la cercul (O) cu laturile AB şi respectiv AC, triunghiul AA_bA_c să fie isoscel cu vîrful în A.

ii) Se consideră analog punctele B' şi C' şi triunghiurile isoscele BB_aB_c, CC_aC_b obţinute prin permutarea circulară a literelor A, B, C. Să se calculeze unghiurile triunghiului $A'B'C'$ în funcţie de unghiurile $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ ale triunghiului ABC.

iii) Să se calculeze de asemenea unghiurile triunghiului $A''B''C''$, format din intersecţiile dreptelor (A_bA_c), (B_cB_a), (C_aC_b).

iv) Punctele B şi C fiind fixe şi A mobil pe cercul fix $\mathcal{C}(O, R)$, să se determine locul geometric al punctului A''.

99. Triunghiul ABC are unghiul $\hat{A}$ de măsură $60°$. Înălţimile BD, CE formează cu bisectoarea AI triunghiul $A_1B_1C_1$, unde $\{A_1\} = (BD) \cap (CE)$, $\{B_1\} = (AI) \cap (CE)$, $\{C_1\} = (BD) \cap (AI)$. Fie S un punct pe latura A_1C_1, între A_1 şi C_1. Din S ducem perpendiculara SQ pe A_1B_1 care se intersectează cu prelungirea segmentului B_1C_1 în T.

i) Să se arate că triunghiul SC_1T este isoscel.

ii) Fie M mijlocul segmentului ST. Să se arate că:

$$2(A_1Q + MC_1) = A_1B_1.$$

iii) Să se determine locul geometric al punctului M cînd punctul S descrie interiorul segmentului A_1C_1.

100. Fie A şi B două puncte fixe ale unui cerc de rază R, pentru care $AB = 2d < 2R$ şi M un punct mobil pe acelaşi cerc. Pe prelungirea segmentului AM, în sensul de la A la M, în afara cercului, luăm $MN \equiv MB$. Din M se duce perpendiculara MQ pe BN. Similar pe MA, de la M spre A, luăm segmentul $MP \equiv MB$, iar din M ducem perpendiculara MS pe BP. Să se arate că:

i) locul geometric al punctului N este format din două arce de cerc, $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ ortogonale în B, după cum M descrie o porţiune a cercului dat sau alta;

ii) locul geometric al punctului Q este format din două arce de cerc $\mathcal{C}_3$ și $\mathcal{C}_4$ ortogonale în B, după cum M descrie o porțiune sau alta din cercul dat;

iii) arcele $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_3$ respectiv $\mathcal{C}_2$ și $\mathcal{C}_4$ sînt tangente în B;

iv) locul geometric al punctului P este porțiunea de cerc $\mathcal{C}'_2$ care completează pe $\mathcal{C}_2$, respectiv $\mathcal{C}'_1$ care completează pe $\mathcal{C}_1$;

v) locul geometric al punctului S este o porțiune de cerc $\mathcal{C}'_4$ care completează pe $\mathcal{C}_4$, respectiv $\mathcal{C}'_3$ care completează pe $\mathcal{C}_3$.

vi) Să se calculeze razele cercurilor ca locuri geometrice în funcție de R și d.

101. Fie cercul fix (O) și punctul fix C exterior lui. Ducem secanta (CBA) și o tangentă CD la cercul (O). Cercul (CBD) intersectează pe AD în E. Să se arate că:

i) dreapta (CE) este tangentă cercului (ABE);

ii) segmentele CD și CE sînt congruente;

iii) să se determine locul geometric al punctului E;

iv) să se determine locul geometric al punctului M de intersecție al dreptelor (AO) și (CE).

102. Se dă paralelogramul $ABCD$, în care $AB \equiv DC = a$, $AD \equiv BC = b$; se duc bisectoarele interioare AEG, BFG, CFH, DEH ale unghiurilor A, B, C, D. Se cere:

i) să se demonstreze că patrulaterul $EHFG$, format din cele patru bisectoare, este un dreptunghi;

ii) dacă vîrfurile C și D sînt fixe, lungimile a și b constante, iar unghiurile $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ variabile în propriul lor plan, să se determine locurile geometrice descrise de punctele E, F, G, H, I, J, unde I și J sînt punctele de intersecție ale laturii AB respectiv cu bisectoarele DEH și CFH;

iii) dacă $ABCD$ este un dreptunghi, $EHFG$ este un pătrat; în acest caz, să se calculeze aria sa.

103. Pe diagonala BD a pătratului $ABCD$ considerăm punctul M mobil. Perpendiculara în M pe AM intersectează latura CD în punctul E. Să se arate că:

i) $AM \equiv ME$;

ii) cercurile care trec prin D, A, M respectiv B, A, M sînt egale;

iii) cercurile de la punctul precedent sînt ortogonale;

iv) perpendiculara din B pe tangenta în A la cercul care trece prin A, M, E intersectează dreapta (AM) în N.

Să se determine locul geometric al punctului N, cînd M este variabil.

(Fac. de Matematică)

104. Fie cercul de centru O, coarda BC fixă și punctul A mobil pe cerc. Bisectoarele unghiurilor $\hat{B}$ și $\hat{C}$ ale triunghiului ABC intersectează cercul în B', C'.

i) Să se determine locul geometric al mijlocului coardei $B'C'$.

ii) Să se arate că perpendiculara din vîrful A pe coarda $B'C'$ trece printr-un punct fix.

105. Se dă un trapez isoscel ortodiagonal $ABCD$ cu bazele $AB = 2a$ și $CD = 2b$. Se cere:

i) să se arate cum se poate construi un astfel de trapez cînd se cunosc măsurile a și b;

ii) să se demonstreze că suma ariilor pătratelor, construite pe cele două baze, este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe laturile oblice ale trapezului;

iii) fie $ADD'A'$ pătratul construit pe latura AD în exteriorul trapezului. Să se determine locul geometric al vîrfului D' al pătratului, cînd baza CD a trapezului se deplasează paralel cu AB, care rămîne fixă.

106. Se dau două cercuri de centre O și O' secante în punctele A și B. Se duce prin A o secantă arbitrară care intersectează cercul (O) în P și cercul (O') în P'. Pe mijlocul segmentului de dreaptă (PP') se ridică o perpendiculară care intersectează coarda comună AB în I. Dreptele (IP) și (IP') mai intersectează cercurile date (O) și (O') în punctele Q și Q'.

i) Să se demonstreze că $IQ \equiv IQ'$.

ii) Să se deducă de aici că dreapta (QQ') este paralelă cu (PP').

iii) Dreapta (QQ') mai intersectează cercul (O) în R și cercul (O') în R'. Să se demonstreze relațiile:

$$PQ \equiv AR \equiv P'Q' \equiv AR';$$

$$Q'R \equiv AP';\ QR' \equiv AP.$$

iv) Să se determine locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului BPP', cînd secanta (PP') se rotește în jurul punctului A.

v) Să se determine locul geometric al punctului comun bisectoarelor interioare ale aceluiași triunghi.

(Fac. de matematică)

107. Se consideră punctele fixe și distincte A și B și dreapta fixă (D) perpendiculară pe AB.

Fie $M \in (D)$ un punct variabil. Să se determine locul geometric al punctului L, diametral opus punctului M în cercul circumscris triunghiului ABM.

108. Două cercuri se intersectează în punctele A și B. O secantă variabilă trecînd prin A intersectează cercurile a doua oară în punctele M și N.

Să se determine locul geometric al mijlocului P al segmentului MN.

109. Fie AB un diametru fix al unui cerc cu centrul în O și de rază R, iar punctul M variabil pe cerc. Se ia pe raza OM un punct P astfel ca segmentul OP să fie congruent cu distanța de la punctul M la dreapta (AB). Să se determine locul geometric al punctului P.

110. Fie AB o coardă fixă a unui cerc, iar PQ o coardă variabilă ca poziție, dar de lungime fixă. Să se determine locurile geometrice ale punctelor $\{N\} = (AP) \cap (BQ)$ și $\{M\} = (AQ) \cap (BP)$.

111. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și $D \in (BC)$ un punct fix. Paralela prin D la AB intersectează pe AC în E. Fie punctul variabil M pe segmentul AE și $\{N\} = (AB) \cap (DM)$. Cercurile circumscrise triunghiurilor CDM și AMN se intersectează a doua oară în P. Să se determine locul geometric al punctului P.

112. Fie A un punct fix și P un punct variabil al unui cerc. Să se determine locul geometric al punctului M de intersecție a bisectoarei unghiului $\widehat{POA}$ cu cercul circumscris triunghiului POA.

113. Vîrfurile B și C ale triunghiului ABC sînt fixe și $m(\widehat{BAC})$ este constantă. Să se determine locul geometric al proiecției M a ortocentrului triunghiului ABC pe mediana AD.

114. Fie triunghiul ABC, înscris într-un cerc cu vîrfurile B și C fixe, iar vîrful A mobil pe cerc. Să se determine locul geometric descris de: i) ortocentru, ii) centrul cercului înscris,

iii) centrul de greutate, iv) centrul cercului exînscris triunghiului ABC. v) Dacă punctul A este în poziție particulară astfel încît triunghiul ABC este isoscel, cu $AB = AC > BC$, se construiește înălțimea AD, $D \in (BC)$ și bisectoarea BE, $E \in (AC)$, $\{F\} = (AB) \cap (DE)$. Să se arate că:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{AB - BC}{AB + BC}.$$

115. Se dă un segment de dreaptă AB și pe acest segment un punct P oarecare. De aceeași parte a segmentului AB construim semicercurile de diametru AP și PB. Construim tangenta lor comună MN, M aparținînd semicercului de diametru AP.

i) Să se demonstreze că tangenta în punctul P la cele două cercuri se intersectează cu segmentul MN într-un punct O la mijlocul acestuia.

ii) Dreptele (AM) și (BN) se intersectează în punctul I. Să se determine locul geometric al punctului I, cînd punctul P se deplasează pe AB.

iii) Segmentul AB fiind dat și egal cu a, să se determine printr-o construcție grafică punctul P, astfel ca tangenta comună MN să aibă o lungime dată l. Care este valoarea maximă pe care o poate avea l?

(Fac. de Matematică)

116. Considerăm punctele fixe A, B și două puncte mobile P, Q situate pe o paralelă la dreapta (AB). Notăm cu M și N intersecțiile dreptelor (AP), (BQ) respectiv a dreptelor (AQ), (BP).

i) Să se arate că dreapta (MN) trece printr-un punct fix.

ii) Să se determine locul geometric al punctelor M și N, dacă segmentul PQ are o lungime constantă $2l$.

iii) Presupunînd $MN \perp AB$ să se determine l în funcție de $AB = 2a$ și distanța d dintre paralele, cînd N este centrul cercului înscris triunghiului MAB.

117. Fie A, B puncte fixe distincte și L variabil, puncte aparținînd cercului de centru O și rază R. Notăm cu M mijlocul liniei poligonale ALB. Dacă $AL \geqslant LB$ atunci punctul M aparține segmentului AL astfel încît $AM = ML + LB$. Să se determine locul geometric al punctului M.

118. În cercul $\mathscr{C}(O, R)$ se consideră înscris patrulaterul $ABCD$, care are latura AB fixă, iar latura CD de lungime constantă. Se cere:

i) locul geometric al intersecției diagonalelor.

ii) locul geometric descris de punctul de intersecție al dreptelor ce unesc mijloacele laturilor opuse.

119. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor văzute din două puncte date A și B sub unghiurile date 2α și 2β.

120. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor care trec printr-un punct dat A și sînt văzute dintr-un punct fix P sub un unghi dat 2α.

121. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor care se văd dintr-un punct fix A sub un unghi 2α și care intersectează o dreaptă fixă sub un unghi β.

122. Pe o dreaptă se consideră punctele consecutive A, B, C, D, astfel ca $AB \equiv BC \equiv CD$. Fie M un punct mobil pe cercul de diametru AD.

Să se determine locul geometric al celui de-al doilea punct N comun cercurilor circumscrise triunghiurilor MAC și MBD.

123. Se dau punctele coliniare A, B, C. Să se determine locul geometric al punctelor de contact al tangentelor duse din A la cercurile ce trec prin punctele B și C.

124. Se dă cercul de centru O și tangenta AB din punctul A exterior la cerc. Să se determine locul geometric al proiecției centrului O, pe bisectoarea unghiului OAB cînd punctul A se deplasează pe un diametru.

125. Se dă triunghiul ABC și cercul de centru O circumscris triunghiului. Din vîrful A se duce coarda variabilă AD. Să se determine locul geometric al centrului de greutate G al triunghiului BCD cînd coarda AD este variabilă.

126. Se dă un punct fix A pe un cerc de centru O. Din A se duce o secantă variabilă care intersectează a doua oară cercul în M. Tangenta în M la cerc intersectează paralela la AM dusă prin O într-un punct P. Să se determine locul geometric al punctului P.

127. Prin două puncte fixe A şi B se duc cercurile variabile de centre O_1 şi O_2. Să se determine locul geometric al punctelor A_1, A_2 şi B_1, B_2 diametral opuse punctelor A şi B în cercurile de centre O_1 şi O_2.

128. Fiind date două cercuri de centre O, O' şi de raze r, r' se consideră două raze OA, $O'A'$ paralele şi de acelaşi sens. Să se determine locul geometric al mijlocului M al segmentului AA', cînd direcţia comună a razelor este variabilă.

129. Să se determine locul geometric al punctului de pe linia centrelor OO' care are aceeaşi putere în raport cu un cerc fix O şi cu un cerc variabil O' care trece prin două puncte fixe.

130. Punctele A, B şi C nefiind coliniare, prin A şi B respectiv A şi C se duc două cercuri ortogonale care se intersectează în P. Să se determine locul geometric al punctului P.

131. Fie (O) şi (O') două cercuri egale în aşa fel ca fiecare din ele să treacă prin centrul celuilalt. Dacă centrul O este fix, iar O' se deplasează pe o dreaptă ce trece prin O, să se determine locul geometric al punctelor de intersecţie ale celor două cercuri.

132. Se dă cercul de centru O şi două puncte A şi B. Prin A se duce o secantă care intersectează cercul în C şi D. Se uneşte B cu mijlocul E al corzii CD. Să se determine locul geometric al mijlocului F al segmentului BE cînd secanta (ACD) este variabilă.

133. În trapezul isoscel $ABCD$, $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 45°$, fie E mijlocul diagonalei AC şi EM perpendiculara dusă din punctul E, pe diagonala BD. Să se determine locul geometric al punctului M cînd CD se deplasează paralel cu AB.

134. Să se determine locul geometric al vîrfului C al unui triunghi isoscel ABC $(AB \equiv AC)$, cînd vîrful A este fix, iar B descrie un cerc.

135. Două cercuri de centru O şi O', se intersectează în A şi B. O secantă dusă prin A intersectează cercurile în punctele C şi C'. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului CC' cînd secanta este variabilă.

136. i) Fie O_1 și O_2 centrele a două cercuri tangente, T punctul de tangență și o secantă variabilă care trece prin T, intersectînd cercurile (O_1) și (O_2) respectiv în punctele M și N. Să se determine locul geometric al punctului P, mijlocul segmentului MN.

ii) Dacă considerăm cercurile exterioare și o secantă variabilă care intersectează cele două cercuri în punctele A, B, C, D și axa lor radicală în E, să se demonstreze că:

$$\frac{EA}{EB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DA}{DB}.$$

137. Fie A_1, B_1, C_1 met cele unui punct P din planul unui triunghi ABC în raport cu mijloacele laturilor BC, CA, AB.

i) Să se arate că dreptele (AA_1), (BB_1), (CC_1) sînt concurente într-un punct I.

ii) Să se determine locul geometric descris de punctul I cînd P descrie cercul circumscris triunghiului ABC.

iii) Cum trebuie să varieze punctul P pentru ca I să descrie cercul înscris triunghiului ABC?

138. Pe cercul circumscris triunghiului ABC se consideră un punct variabil P. Dacă H', H'', H''' sînt ortocentrele triunghiurilor PAB, PBC, PAC, să se determine locul geometric al ortocentrului triunghiului $H'H''H'''$.

139. Se consideră în semicercul descris pe AB ca diametru o coardă MN de poziție variabilă, congruentă cu latura pătratului înscris în cercul corespunzător.

i) Să se calculeze unghiurile formate de dreptele: (AM) cu (NB) și de (AN) cu (BM).

ii) Să se determine locurile geometrice ale punctelor de intersecție ale acestor perechi de drepte. Aceste locuri geometrice sînt porțiuni de cercuri trecînd prin A și B. Să se determine unghiul sub care se intersectează aceste două cercuri.

iii) Se consideră coarda MN în poziția particulară paralelă cu AB. Să se calculeze în funcție de AB lungimile AN, AM, BM și BN.

iv) Să se determine poziția coardei MN, astfel ca raportul laturilor opuse ale patrulaterului $AMNB$ să fie aceleași.

(Institutul Politehnic)

140. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC = a$ şi $m(\widehat{ABC}) = x$, unde $x < 45°$. Pe cateta AB şi pe prelungirea ei se consideră respectiv segmentele AD şi AE congruene cu AC. Fie P simetricul punctului C în raport cu A. Dreptele (PD) şi (PE) intersectează ipotenuza BC şi prelungirea ei, respectiv în punctele M şi N. Se cere:

i) să se calculeze în funcţie de a şi x lungimile segmentelor BM şi BN;

ii) să se arate geometric că produsul $BM \cdot BN$ nu depinde de x;

iii) să se determine locul geometric al punctului P, cînd $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ şi punctele B şi C rămîn fixe.

iv) pentru ce valori ale parametrului m ($m \in \mathbf{R}$), raportul dintre aria laterală a corpului obţinut prin rotirea segmentului DE în jurul dreptei (BC) şi aria triunghiului AMN este egal cu πm.

(Academia militară)

141. Se dă triunghiul înscris în cercul de centru O. Pe tangenta în C la cerc se consideră un punct oarecare P ale cărui proiecţii pe AC şi BC sînt M respectiv N. Se cere:

i) să se arate că $MN \perp AB$;

ii) considerînd punctele B, C şi P fixe, iar A mobil pe cercul dat, să se determine locul geometric al punctului de intersecţie I dintre dreptele (AB) şi (MN) cînd A descrie cercul dat.

iii) să se arate că există relaţia

$$NB^2 \cdot PC^2 = PM^2 \cdot NB^2 + IB^2 \cdot PC^2.$$

(Institutul Politehnic)

142. Se dă paralelogramul $ABCD$ şi un punct E pe latura AB. Trei drepte paralele duse prin A, B şi C intersectează dreapta (DE) în M, N şi P.

i) Să se demonstreze că $MN \equiv DP$.

ii) Fie Q intersecţia paralelei duse din N la AD cu dreapta (CP); să se arate că $PQ \equiv AM$.

iii) Să se determine locul geometric descris pe punctul Q, cînd dreptele (AM), (BN), (CP) se rotesc în jurul punctelor A, B, C rămînînd paralele între ele.

(Institutul Politehnic)

143. Se dă un pătrat $ABCD$ și un punct mobil M pe diagonala BD. Proiecțiile lui M pe AD se notează cu E, respectiv F.

Să se arate că:

i) $MF + ME =$ constant;

ii) Segmentele CF și DE sînt congruente și perpendiculare între ele;

iii) Să se determine locul geometric al punctului $\{N\} = (CF) \cap (DE)$;

iv) Segmentele CM și EF sînt congruente și perpendiculare între ele;

v) Dreptele (CM), (BF) și (DE) sînt concurente.

144. Se consideră un plan (P) și punctele M și N care nu aparțin planului. Să se determine locul geometric al punctelor din planul (P) egal depărtate de punctele M și N.

145. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de trei plane care se intersectează după trei drepte paralele.

146. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane secante.

147. Se consideră două plane perpendiculare. Să se determine locul geometric al punctelor P din spațiu pentru care suma distanțelor la cele două plane să fie constantă.

148. Se consideră în spațiu două drepte (D_1) și (D_2) cu dreapta (D_1) fixă, iar dreapta (D_2) mobilă în jurul unui punct A al său. Să se determine locul geometric al piciorului perpendicularei comune între cele două drepte, pe dreapta mobilă.

149. Se dau două drepte perpendiculare nesituate în același plan. Să se determine locul geometric al mijlocului unui segment de dreaptă de lungime constantă, ale cărui extremități se sprijină pe dreptele date.

150. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de trei plane care se intersectează după trei drepte paralele.

151. Să se determine locul geometric al punctelor egale depărtate de fețele unui triedru.

152. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de trei drepte paralele necoplanare.

153. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de muchiile unui triedru.

154. Se dau două drepte (D), (D_1) nesituate în același plan. Să se determine locul geometric al punctelor care împart într-un raport dat segmentul de dreaptă, care unește un punct oarecare M aparținînd dreptei (D) cu un punct oarecare M_1 aparținînd dreptei (D_1).

155. Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 4$ m și $BC = 2$ m. Pe planul dreptunghiului se ridică perpendicularele: $AA_1 = 3$ m, $BB_1 = 8$ m, $CC_1 = 1$ m și $DD_1 = 2$ m. Notăm cu M și N mijloacele segmentelor A_1C_1 și respectiv B_1D_1.

i) Să se calculeze lungimea segmentului MN.

ii) Să se determine locul geometric al mijloacelor segmentelor EF formate, unind orice punct E de pe segmentul AA_1, cu orice punct F de pe segmentul BC.

156. Se consideră dreptele (D_1) și (D_2) în spațiu și o dreaptă (d) mobilă care se reazemă pe (D_1) și (D_2) în punctele A, B. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului AB.

157. Să se determine locul geometric al punctelor M din spațiu avînd proprietatea că proiecțiile lor pe laturile unui triunghi dat ABC sînt coliniare.

158. Să se determine locul geometric al punctelor cu proprietatea că raportul distanțelor la un punct dat și la un plan care trece prin acest punct este constant.

159. Se dau șase puncte în spațiu $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Să se determine locul geometric al punctelor M care satisfac relațiile:

$$MA_1^2 + MA_2^2 = MA_3^2 + MA_4^2 = MA_5^2 + MA_6^2.$$

Caz particular: $A_1A_2 \equiv A_3A_4 \equiv A_5A_6$.

160. Dacă dreptele care unesc vîrfurile A cu A', B cu B', C cu C' a două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ sînt ~~congruente~~, concurte atunci laturile $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$; $(AB, A'B')$ se intersectează în trei puncte coliniare. (Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se numesc omologice.)

161. Un unghi triedru este intersectat de un plan variabil (P) în punctele A, B, C.

i) Să se determine locul geometric al centrului de greutate G al triunghiului ABC, cînd punctul A rămîne fix.

ii) Să se determine locul geometric al punctului G cînd latura BC rămîne fixă.

162. Se consideră două drepte oarecare (D_1) și (D_2) în spațiu. Să se determine locul geometric al punctelor care se proiectează într-un punct dat O_1 pe (D_1) și în alt punct dat O_2 pe (D_2).

163. Se consideră perpendiculara în A pe planul rombului $ABCD$ și M un punct oarecare pe această perpendiculară. Fie E, F, G, H mijloacele segmentelor MB, BC, CD, MD.

i) să se arate că perpendiculara în M pe planul (MBD) este concurentă cu perpendiculara în C dusă pe planul rombului.

ii) Să se determine locul geometric al punctului de intersecție a diagonalelor patrulaterului $EFGH$, cînd M este mobil.

164. Se dau dreptele paralele (D_1) și (D_2) și punctele exterioare lor A și B. Planele variabile (P_1) și (P_2) sînt paralele și conțin respectiv dreptele (D_1) și (D_2). Fie AN perpendiculară pe planul (P_1), unde $N \in (P_1)$ și BM perpendiculară pe (P_2) unde $M \in (P_2)$. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului MN.

165. Fie A, B, C, D patru puncte fixe în spațiu, iar (P_1) și (P_2) două plane paralele ce trec respectiv prin A și B. Se notează cu M și N proiecțiile punctelor C și D respectiv pe (P_1) și (P_2). Să se determine locul geometric al mijlocului P al segmentului MN.

166. Se consideră tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$. Vîrfurile A_1 și A_2 sînt fixe, punctele A_3 și A_4 se mișcă în spațiu astfel încît raportul ariilor $A_1A_3A_4$ și $A_2A_3A_4$ este constant, iar unghiul dreptelor (A_1A_2) și (A_3A_4) rămîne constant și egal cu φ.

i) Să se demonstreze că dreapta (A_3A_4) rămîne tangentă unei sfere fixe.

ii) Să se determine locul geometric al centrului de greutate G al tetraedrului considerat, cînd în plus dreapta (A_3A_4) rămîne paralelă cu ea însăși.

167. Să se determine locul geometric al punctelor M din spaţiu astfel încît suma pătratelor distanţelor la două puncte fixe A, B să fie constantă.

168. Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu astfel încît diferenţa pătratelor distanţelor la două puncte fixe A, B să fie constantă.

169. Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată cu muchia bazei de lungime a şi înălţimea piramidei $VO = a$. Pe muchia VC se consideră un punct oarecare M. Planul (ABM) intersectează muchiile VD, VE, VF respectiv în punctele N, P şi Q. Să se arate că:

i) Dreptele (AN), (BP), (MQ) şi (VO) sînt concurente.

ii) Patrulaterele $ABMQ$ şi $MNPQ$ sînt trapeze isoscele.

iii) Să se determine locul geometric al punctului L de intersecţie al dreptelor (AM) şi (BP) cînd punctul M descrie muchia VC.

iv) În cazul cînd punctul M este mijlocul segmentului VC, să se determine raportul ariilor suprafeţelor $MNPQ$ şi $ABMQ$.

170. Să se demonstreze că suma pătratelor distanţelor oricărui punct din spaţiu la două vîrfuri opuse ale unui paralelipiped dreptunghic este egală cu suma pătratelor distanţelor aceluiaşi punct faţă de oricare alte două vîrfuri opuse ale aceluiaşi paralelipiped. Să se determine locul geometric al punctelor pentru care suma de mai sus este egală cu suma pătratelor dimensiunilor paralelipipedului.

171. Se consideră piramida triunghiulară $IABC$ şi sfera variabilă care conţine punctele A, B şi C.

Sfera intersectează a doua oară muchiile IA, IB, IC respectiv în punctele M, N şi P.

Să se determine locurile geometrice ale punctelor L_1, L_2 şi L_3 care satisfac relaţiile:

$$\frac{L_1M}{L_1N} = \frac{IB}{IA}; \quad \frac{L_2N}{L_2P} = \frac{IC}{IB} \quad \text{şi} \quad \frac{L_3P}{L_3M} = \frac{IA}{IC}.$$

172. Fie cercul (C) şi A un punct aparţinînd acestui cerc. Din A ducem perpendiculara AB pe planul cercului. Să se determine locul geometric al proiecţiei N a punctului A pe dreapta (BM) unde M este un punct mobil pe cercul dat.

173. Considerăm un triedru tridreptunghic şi o dreaptă fixă (D). Un plan (P) care trece prin (D), se intersectează cu muchiile triedrului în A, B, C. Să se determine locul geometric al ortocentrului triunghiului ABC cînd planul (P) se roteşte în jurul dreptei (D).

Aceeaşi problemă cînd planul (P) trece printr-un punct fix.

174. Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu avînd proprietatea că proiecţiile lor pe laturile unui triunghi sînt coliniare.

175. Într-o sferă se înscrie un tetraedru oarecare $ABCD$. Să se arate că tangentele duse în punctul D la cercurile circumscrise triunghiurilor DAB, DBC, DCA intersectează muchiile AB, BC, CA în trei puncte coliniare.

176. Dintr-un punct M exterior la două sfere se duc conurile circumscrise sferelor; fie (P) şi (P') planele cercurilor de contact ale conurilor cu sferele. Să se determine locul geometric al punctului M, astfel ca:

i) planele (P) şi (P') să fie paralele

ii) planele (P) şi (P') să fie perpendiculare. *Discuţie.*

177. Fie un tetraedru $ABCD$ avînd feţele ABC şi ABD triunghiuri echilaterale. Fie M un punct pe muchia BC şi N un punct pe muchia AD astfel ca $AN \equiv BM$. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului MN cînd unghiul diedru corespunzător muchiei AB se deplasează între $0°$ şi $180°$, iar punctul M se deplasează pe segmentul BC, faţa ABC rămînînd fixă şi faţa ABD fiind mobilă.

178. Se consideră o sferă (S) de centru O şi de rază R şi un segment fix de lungime AB. Din punctul M mobil pe (S) se duce dreapta (d) paralelă cu AB pe care se consideră punctul N, astfel încît $MN \equiv AB$. Să se determine locul geometric al punctului N.

179. Fie cercul (C) şi A un punct aparţinînd acestui cerc.

Din A ducem perpendiculara AB pe planul cercului. Să se determine locul geometric al proiecţiei N a punctului A pe dreapta (BM), unde M este un punct mobil pe cercul dat.

180. Să se determine locul geometric al punctelor care au puteri egale în raport cu trei sfere date.

181. Să se demonstreze că există un singur punct care să aibă puteri egale în raport cu patru sfere date.

182. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor determinate pe o sferă (O) de planele care trec printr-o dreaptă dată (D).

183. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor determinate pe o sferă (O) de planele care trec printr-un punct fix A.

184. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor care intersectează două sfere date, de centru (O) și (O') de rază R, R', după cercuri mari.

185. Se dau trei sfere. Să se determine locul geometric al vîrfului comun a trei conuri circumscrise sferelor, avînd același unghi la vîrf.

186. Fie AA' perpendiculara comună a dreptelor necoplanare (D), (D') și $M \in (D)$, $M' \in (D')$ astfel ca $AM \equiv A'M'$. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului MM'.

187. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor care trec prin: i) două puncte date; ii) trei puncte date.

188. Fie o piramidă cu baza un poligon regulat cu $2n$ laturi, iar suma pătratelor muchiilor laterale este constantă. Să se determine locul geometric al vîrfului V al piramidei.

189. Considerăm globul pămîntesc ca o sferă. Să se determine:

i) locul geometric al proiecției pe planul Ecuatorului al punctelor M de pe Pămînt care au latitudinea egală cu longitudinea.

ii) locul geometric generat de dreapta (AM), unde punctul A este punctul de longitudine nulă.

190. Într-un plan se dau două puncte A, B și două drepte oarecare (D) și (Δ). Se cere:

i) Să se determine în acest plan un punct M, care să fie echidistant față de punctele A, B și de dreptele (D) și (Δ);

ii) Fie $AB = 2l$; $MA = a$, se cere să se calculeze aria şi volumul născut de triunghiul AMB, prin rotirea acestuia în jurul segmentului AB;

iii) Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu echidistante de punctele A, B şi dreptele (D) şi (Δ).

191. Într-un plan se dau două puncte A, B şi două drepte oarecare (D) şi (D'). Se cere:

i) să se determine în acest plan un punct M care să fie echidistant de punctele A, B şi de dreptele (D), (D').

ii) notînd $AB = 2a$, $MA = b$, se cere să se calculeze aria şi volumul născut de triunghiul AMB, prin rotirea acestuia în jurul dreptei (AM);

iii) să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu echidistante de punctele A, B şi M.

192. Într-un plan (π) se dau două puncte fixe A, B şi un punct variabil M. Fie un punct P din spaţiu astfel încît din A şi B segmentul MP este văzut sub un unghi de 90°. Să se determine locul geometric al punctului P dacă:

i) M este fix;

ii) M descrie un cerc care trece prin punctele A şi B;

iii) M descrie o dreaptă perpendiculară pe dreapta (AB).

193. Se consideră într-un plan (π) dreptele (d_1) şi (d_2) paralele şi punctele $A_1 \notin (\pi)$ şi $A_2 \notin (\pi)$ astfel încît $d(A_1, A_2) \cap (\pi) = \{A_0\}$.

i) Să se arate că dacă (α) este un plan mobil care conţine dreptele $(A_1 A_2)$ şi dacă $\{B_1\} = (d_1) \cap (\alpha)$ şi $\{B_2\} = (d_2) \cap \cap (\alpha)$, atunci dreapta $(B_1 B_2)$ trece printr-un punct fix.

ii) Mulţimea punctelor $\{P\} = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$ este o dreaptă paralelă cu planul (π).

iii) Să se rezolve problema dacă $(d_1) \cap (d_2) = \{B_0\}$ şi să se arate că mijloacele segmentelor B_0A_1, B_0A_2, B_1A_1 şi B_1A_2 sînt coplanare şi formează un paralelogram.

194. Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$; $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ fiind două feţe opuse. Se cunosc lungimile muchiilor acestui paralelipiped: $AB = a$, $BC = b$, $BB' = c$, M fiind mijlocul muchiei $A'B'$. Se cere:

i) distanţa de la vîrful C' la dreapta (BM);

ii) distanţa de la vîrful B' la planul (BMC');

iii) locul geometric al proiecţiei punctului C' pe dreapta (BM) cînd punctul M descrie muchia $A'B'$.

195. Se consideră un triunghi ABC cu $m(\hat{A}) = 90°$. Pe laturile AB, AC se construiesc în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele ABD şi ACE, avînd aceste laturi ca ipotenuze. Să se demonstreze că:

i) punctele D, A, E sînt coliniare;

ii) dreptele (BD) şi (EC) sînt paralele;

iii) bisectoarele unghiurilor D şi E şi dreapta (BC) sînt trei drepte concurente.

196. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC. Pe cateta AB se ia un punct M astfel încît $AC^2 = AM \cdot AB$ şi se notează cu P proiecţia punctului M pe ipotenuza BC. Se cere:

i) să se determine locul geometric al punctului P, cînd vîrful B al unghiului se deplasează pe dreapta (AB).

ii) să se arate că dreapta (MP) trece printr-un punct fix.

197. Fiind dat un trapez $ABCD$ de baze AB şi CD, fie E şi F mijloacele laturilor BC şi DA; H intersecţia bisectoarelor unghiurilor A şi D; K intersecţia bisectoarelor unghiurilor B şi C.

Să se demonstreze că:

i) HK este paralelă cu bazele;

ii) $FH = \dfrac{AD}{2}$, $\quad EK = \dfrac{BC}{2}$;

iii) să se găsească condiţia ca cele patru bisectoare să fie concurente.

198. Se consideră cercul cu centrul în O şi de diametru $AB = 2R$. Dintr-un punct M, de pe cerc se coboară perpendiculara MH pe AB şi se ia pe ea un punct P astfel încît $\dfrac{HP}{HM} = K < 1$. Pe diametrul AB se ia punctul O_1 la distanţa $OO_1 = R\sqrt{1-K^2}$ şi se notează cu O_2 conjugatul său armonic în raport cu A şi B.

i) Să se demonstreze că oricare ar fi poziţia punctului M pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$ avem $\dfrac{PO_1}{HO_2} = \sqrt{1-K^2}$;

ii) Dacă O_1' este simetricul punctului O_1 în raport cu O, să se demonstreze: $PO_1 + PO_1' = 2R$.

iii) să se determine locul geometric al punctului P.

Reamintesc: două puncte M și N care împart segmentul AB în același raport se numesc puncte conjugate armonic față de extremitățile segmentului și spunem că punctele A, B, M, N formează pe dreaptă o diviziune armonică.

Schimbînd sensul segmentelor putem spune că și punctele A și B sînt conjugate armonic față de M și N și putem scrie: $\frac{MA}{MB}+\frac{NA}{NB}=0$ sau $\frac{AM}{AN}+\frac{BM}{BN}=0$, relații care se mai pot scrie:

$$\frac{MA}{MB}:\frac{NA}{NB}=-1 \quad \text{sau} \quad \frac{AM}{AN}:\frac{BM}{BN}=-1.$$

199. Fie mulțimea de puncte A, B, C, D, iar M, N, P, Q, R, S mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA, AC și BD.

i) Să se studieze patrulaterul $MNPQ$ și să se deducă de aici că segmentele MP, NQ, RS au același mijloc I.

ii) Considerînd că D este ortocentrul triunghiului ABC, ce devine patrulaterul $MNPQ$? Ce rezultă despre segmentele MP, NQ, RS și care este locul geometric al punctelor M, N, P, Q, R și S?

200. Într-un plan se consideră triunghiul oarecare ABC și un punct P, tot oarecare. Se notează cu A', B', C', simetricele punctului P în raport cu mijloacele laturilor BC, CA, și AB pe care le notăm cu X, Y, Z.

i) Să se demonstreze că dreptele (AA'), (BB'), (CC') sînt concurente într-un punct M.

ii) Să se arate că dreapta (PM) trece printr-un punct fix, cînd P este variabil.

iii) Să se determine locul geometric descris de punctul M cînd P descrie o dreaptă fixă.

201. Se dă un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ și în interiorul lui punctul I. Se consideră toate triunghiurile ABC înscrise în cerc pentru care I este intersecția bisectoarelor interioare. Se cere:

i) locul geometric descris de centrele celor trei cercuri care trec prin două din vîrfurile triunghiului ABC și prin punctul I;

ii) locul geometric descris de vîrfurile triunghiului format de centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC.

202. i) Un unghi drept al cărui vîrf A este fix, se rotește în jurul acestui vîrf într-un plan în care sînt duse două axe rectangulare fixe, Ox și Oy. Laturile mobile ale unghiului intersectează axa Ox și axa Oy în punctele B și C.

Să se determine locul geometric al mijlocului I, al segmentului BC și locul geometric descris de proiecția ortogonală H a punctului A pe BC.

ii) Un unghi drept cu vîrful A_1 fix, se rotește în jurul acestui vîrf într-un plan în care este trasat un cerc fix de centrul O_1. Cercul (O_1) este intersectat de laturile mobile ale unghiului drept în punctele B_1 și C_1. Să se determine locul geometric al punctului I_1, mijlocul segmentului B_1C_1 și cel al proiecției ortogonale H_1 a punctului A_1 pe B_1C_1.

203. Pe un cerc cu diametrul AB, rază R și centrul O, se consideră un punct variabil C. Notînd cu D și E centrele cercurilor (AOC) și (OBC) se duc dreptele (AD) și (BE) care se intersectează în M.

i) Să se determine locul geometric al punctului M, cînd punctul C parcurge cercul cu centrul în O.

ii) Să se arate că punctele O, C, D, E, M, sînt conciclice.

204. Într-un cerc cu centrul O și rază R se duce un diametru AB și o coardă CD perpendiculară pe acest diametru în punctul E. Se descrie cercul avînd pe CD ca diametru și din punctul A se duc tangentele AT și AT' la acest cerc. Fie I punctul de intersecție al segmentelor AB și TT'.

i) Să se arate că punctul E este mijlocul segmentului IB.

ii) Scriind că $BE = x$, să se exprime aria triunghiului ATT' în funcție de R și x.

iii) Să se studieze variația acestor arii cînd punctul E se deplasează pe AB. Să se traseze curba corespunzătoare, luînd raza de măsură unu.

iv) Să se determine locul geometric al centrului de greutate al triunghiului BIC.

205. Fie BC diametrul unui cerc dat și A un punct fix pe acesta, exterior cercului, astfel încît A și B să fie de aceeași parte a centrului O, al cercului. Fie M un punct variabil al cercului.

i) Să se determine locul geometric al punctului P de intersecție a dreptei (AM) cu perpendiculara în B la BM, precum şi al celui de-al patrulea vîrf Q al dreptunghiului construit pe BM în BP (se va arăta că dreapta (QP) intersectează dreapta (ABC) într-un punct fix I).

ii) Alegînd pe cerc punctul M astfel ca să avem $AB^2 = AP \cdot AM$, să se determine măsura unghiului OMA.

iii) Pe BM ca latură, se construieşte pătratul $MBP'Q'$. Să se determine locul geometric al vîrfurilor P' şi Q' cînd M parcurge cercul dat.

206. Se dă un cerc de rază R. Se consideră un triunghi ABC înscris în acest cerc, vîrful A fiind fix pe cerc şi unghiul A de măsură constantă. Se notează cu x unghiul variabil făcut de diametrul AA' cu bisectoarea AF a unghiului A.

i) Să se calculeze în funcţie R, unghiurile A şi x, laturile triunghiului ABC, aria S şi raza r a cercului înscris.

ii) Să se calculeze maximul S_1 al ariei S, cînd x este variabil, apoi maximul S_2 al ariei S cînd A este variabil.

iii) Să se arate că înălţimile triunghiului ABC, coborîte din vîrfurile B şi C, trec fiecare printr-un punct fix situat pe cerc, cînd x este variabil. Să se determine locul geometric al picioarelor acestor înălţimi.

iv) Fie I centrul cercului înscris triunghiului ABC şi F punctul de intersecţie al dreptei (AI) cu cercul. Să se arate că $FI \equiv FB \equiv FC$ şi că perpendiculara la AI, dusă prin I rămîne tangentă la un cerc fix de centru A', cînd x este variabil.

207. Prin vîrfurile A, B, C, ale unui triunghi echilateral se duc dreptele $(B'C')$, $(C'A')$, $(A'B')$ care fac unghiul α respectiv cu laturile AB, BC şi CA (unghiul α fiind măsurat în sens trigonometric).

i) Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral şi la fel orientat ca şi triunghiul ABC.

ii) Să se determine locul geometric al vîrfurilor A', B', C', cînd α este variabil.

iii) Să se arate că dreptele care unesc mijloacele laturilor triunghiului $A'B'C'$, cînd α este variabil, trec printr-un punct fix.

iv) Să se calculeze raportul de asemănare al celor două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$ şi să se studieze variaţia lui pentru $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

208. Se consideră un semicerc de diametru $AB = 2R$. Pe semicerc se consideră o coardă variabilă CD de lungime R.

i) Să se afle unghiurile și laturile patrulaterului $ABCD$ în funcție de unghiul $\alpha = m(\widehat{BAC})$.

ii) Notînd cu F punctul de intersecție al dreptelor (AC) și (BD) să se afle: unghiurile, laturile și raza cercului circumscris triunghiului CDF.

iii) Să se determine și să se construiască locul geometric al punctului F.

iv) Să se examineze și să se construiască figura în cazul cînd $AC = 3CF$.

209. Se consideră dreptunghiul $OABC$ avînd laturile OA și OC pe două axe fixe Ox, Oy și diagonala OB constantă. Prin B ducem o perpendiculară pe diagonala AC și pe această perpendiculară purtăm spre exterior segmentul $BM = AC$. Coborîm din M, $MP \perp Ox$.

i) Să se calculeze în funcție de unghiul $\widehat{AOB}$ de măsura α volumul V generat de trapezul $ABPM$ precum și volumul V_1 generat de triunghiul ABC, cînd figura face o rotație în jurul axei Ox.

ii) Notînd $\text{tg}\alpha = t$, să se exprime în funcție de t raportul $\frac{V}{V_1}$ și să se studieze variația sa cînd vîrful B parcurge sfertul de cerc DE.

iii) Să se determine locul geometric al punctului M.

210. Se consideră într-un plan, un triunghi ABC ale cărui vîrfuri B și C sînt fixe ($BC = a$), iar vîrful A este variabil dar de măsură constantă. Notăm cu I_1 și I_2 centrele cercurilor exînscrise triunghiului, în unghiurile B și C.

i) Să se calculeze în funcție de măsura unghiului A, măsurile unghiurile BI_1C și BI_2C.

ii) Să se determine locul geometric al punctelor I_1 și I_2 cînd vîrful A se deplasează.

iii) Să se calculeze în funcție de a și de unghiurile A, B, C laturile și diagonalele patrulaterului BCI_1I_2 și să se verifice relația: $BI_1 \cdot CI_2 \cdot = BC \cdot I_1I_2 + CI_1 \cdot BI_2$.

211. În planul (P) se dau două cercuri concentrice de raze r şi R. Se cere:

i) în planul (P) să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de cele două cercuri şi de două drepte din acest plan. *Discuţie.*

ii) să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de cele două cercuri şi de cele două drepte. *Discuţie.*

iii) dacă A este o extremitate a unui diametru al cercului de rază R şi B este una dintre intersecţiile acestuia cu cercul de rază r, să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu al căror raport al distanţelor este $\frac{AM}{MB} = K \in (0, \infty)$.

iv) în cazul particular $R = 2r$, ce devin locurile geometrice căutate?

212. Fie triunghiul ABC. Să se determine:

i) locul geometric al punctelor din plan de unde cercul înscris în triunghi se vede sub un unghi de $60°$;

ii) locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de vîrfurile triunghiului;

iii) raza sferei care trece prin vîrfurile triunghiului şi printr-un punct P situat pe perpendiculara pe planul triunghiului dusă în centrul O al cercului circumscris triunghiului.

213. i) Fiind dată sfera de centru O, de rază R şi M un punct fix, să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor sferei care trec prin M. *Discuţie.*

ii) Să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor sferei care sînt paralele cu dreapta care trece prin centrul sferei şi prin M.

iii) Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de sfera (O) cu distanţa d. *Discuţie.*

iv) Se să determine locul geometric al punctelor din spaţiu, de unde o sferă (O), poate fi văzută sub un unghi dat, de măsură 2α.

214. În planul (P) se dau două cercuri de centre O_1 şi O_2 şi de raze R_1 şi R_2, iar distanţa centrelor lor d. Se cere:

i) să se determine locul geometric al punctelor din planul (P) care au puteri egale faţă de cele două cercuri. *Discuţie.*

ii) cînd cele două cercuri se rotesc în jurul liniei centrelor lor, se obţin două sfere. Să se determine locul geometric al punctelor din spațiu care au puteri egale față de cele două sfere.

iii) dacă punctele A și B sînt exterioare planului (P) să se determine locul geometric al punctelor din spațiu care au puteri egale față de cele două sfere și sînt egal depărtate de punctele A și B.

iv) să se determine locul geometric al punctelor din spațiu care au puteri egale față de cele două sfere și de unde segmentul AB se vede sub un unghi drept.

v) să se determine locul geometric al punctelor din spațiu de unde distanța centrelor se vede sub un unghi α și sînt egal depărtate de punctele A și B.

215. Un triunghi variabil ABC înscris într-un cerc dat (cu centrul O și raza R) are ca ortocentru punctul fix H. Să se determine locul geometric descris de mijloacele laturilor acestui triunghi.

216. Se intersectează laturile AB, AC ale unui triunghi ABC, printr-o paralelă DE la latura BC (D și E fiind respectiv pe AB și AC). Din punctele D și E construim tangentele DT și ES la cercul circumscris triunghiului ABC. Să se demonstreze că dreptele (BS) și (CT) se intersectează într-un punct aflat pe bisectoarea unghiului A.

217. În planul (P) se dau două cercuri oarecare (C_1) și (C_2) care sînt bazele a două conuri drepte, de aceeași înălțime h și vîrfurile S_1, S_2.

Se intersectează cele două conuri cu un plan variabil (Q) care este paralel cu planul (P), generîndu-se astfel două cercuri (γ_1) și (γ_2).

i) Să se determine locul geometric al centrelor de omotetie a celor două cercuri (γ_1) și (γ_2), cînd planul (Q) este variabil.

ii) Presupunînd că cercurile (C_1) și (C_2) se intersectează să se determine regiunea spațiului în care se poate deplasa planul (Q) pentru ca cercurile (γ_1) și (γ_2) să aibă puncte comune. Se notează cu M unul dintre aceste puncte.

Să se determine locul geometric descris de proiecția punctului M (notată cu W) pe planul (P) cînd planul (Q) este variabil.

iii) În planul (P) se duce dreapta (Δ) paralelă cu linia centrelor cercurilor (C_1) și (C_2) și care intersectează în punctul E_1 arcul de pe cercul (C_1) cuprins în cercul (C_2) și în E_2 arcul de pe cercul (C_2) cuprins în cercul (C_1). Generatoarele S_1E_1 şi S_2E_2 se intersectează în N. Să se determine locul geometric descris de proiecţia V, a punctului N pe planul (P), cînd dreapta (Δ) este variabilă.

218. Se dau două puncte A, B şi un plan (P) şi se consideră dreapta mobilă (Δ) dusă prin B paralelă cu planul P. Să se determine:

i) locul geometric al proiecţiei C a punctului A pe (Δ);

iii) locul geometric descris de centrul cercului circumscris triunghiului ABC;

iii) locul geometric al mijlocului M al segmentului BC;

iv) locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABC;

v) locul geometric al centrului G al distanţelor proporţionale al punctelor A, B, C, multiplicate de coeficienţii α, β, $\gamma \in \mathbf{R}$ a căror sumă $\mu = \alpha + \beta + \gamma \neq 0$. *Caz particular*: $\alpha = \beta = \gamma$;

vi) intersecţia conului generat de AC şi a conului descris de mediana dusă din punctul B al triunghiului ABC.

Care sînt proiecţiile acestei intersecţii pe planul (P) şi pe planul dus prin AB perpendicular pe planul (P)?

219. În planul (P) se consideră două cercuri concentrice, de raze R şi r, cu centrul O. Să se determine:

i) locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de cele două cercuri şi de două plane date. *Discuţie.*

ii) locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de cele două cercuri şi la distanţa d_1 de o dreaptă (Δ).

iii) locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de cele două cercuri şi la distanţa d_2 de o sferă (S). *Discuţie.*

220. Se dau sferele de centre O_1 şi O_2 şi de raze R_1 şi R_2, iar distanţa centrelor d. Să se determine:

i) locul geometric al punctelor din spaţiu de unde sfera de centru O_1 se vede sub un unghi drept şi care mai au proprietatea că suma distanţelor la centrele celor două sfere este constantă şi egală cu d_1.

ii) locul geometric al punctelor din spaţiu de unde sfera de centru O_2 se vede sub un unghi drept şi care mai au proprietatea că diferenţa distanţelor la centrele celor două sfere să fie constantă şi egală cu d_2.

iii) locul geometric al punctelor din spaţiu care au proprietatea că raportul distanţelor lor la centrele celor două sfere este o constantă k şi se află egal depărtate de două plane date. *Discuţie.*

221. Se dă un plan fix (P) şi două puncte fixe A şi B, aşezate de aceeaşi parte a planului (P) şi se presupune dreapta (AB) neparalelă cu planul. Se consideră mulţimea sferelor (S) care trec prin A şi B şi care sînt tangente planului (P). Se cere:

i) să se determine locul geometric descris de punctul de contact dintre sfera (S) şi planul (P);

ii) să se determine locul geometric descris de centrul sferei (S);

iii) să se determine mulţimea sferelor care au raza de măsură externă (maximă sau minimă).

222. Două sfere concentrice au centrul în O şi razele $R_1 < R_2$.

i) Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de cele două sfere.

ii) Dacă A, B sînt două puncte oarecare să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de cele două sfere şi de cele două puncte. *Discuţie.*

iii) Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare, să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de cele două sfere şi de cele trei puncte necoliniare.

iv) Care este condiţia ca în sfera cu raza R_2 să se înscrie un con circular drept, în care sfera de rază R_1 să fie înscrisă. Să se determine aria şi volumul conului, în funcţie de R_1 şi R_2.

REZOLVĂRI ŞI RĂSPUNSURI

1. Cele două triunghiuri au latura BC comună. Dacă se ia AB ca bază şi se notează cu h şi h_1 înălţimile celor două triunghiuri, se obţine $\dfrac{\text{aria } \triangle MBC}{\text{aria } \triangle ABC} = \dfrac{h_1}{h} = K$, $h_1 = Kh =$ $=$ const. Deci M este la o distanţă constantă faţă de BC şi locul geometric al punctului M este o dreaptă paralelă cu BC.

2. Din M se duce perpendiculara pe bisectoarea unghiului AOB şi se formează triunghiul isoscel OCD în care $AM \equiv OB$ şi $BM \equiv BD$ şi $C \in (OA)$, $D \in (OB)$. Deci suma $OA + AM + MB + BD = 2 \cdot OD$ care este constantă. Deci locul geometric al punctului M este o perpendiculară pe bisectoarea unghiului AOB.

3. (Fig. II.3) Fie C_1 o poziţie a vîrfului mobil intersectată de mediana AA' în A'_1. În triunghiul CBC_1 mediana $A'A'_1$ fiind linie mijlocie trebuie ca $CC_1 \parallel AA'$. Deci locul geometric al punctului C este o dreaptă care trece prin C şi este paralelă cu mediana AA'.

4. (Fig. II.4) Prin punctul I se construieşte $MN \parallel AB$. Conform teoremei lui Tales se poate scrie:

$$\frac{DM}{DA} = \frac{EN}{EB}.$$

Considerînd triunghiurile BAE asemenea cu EIN şi BAD asemenea cu DMI rezultă

$$\frac{IN}{AB} = \frac{EN}{EB} \text{ şi } \frac{IM}{AB} = \frac{DM}{DA}.$$

Avînd în vedere relaţiile precedente rezultă că $IN \equiv IM$ şi prin urmare locul geometric al punctului I este mediana corespunzătoare laturii AB.

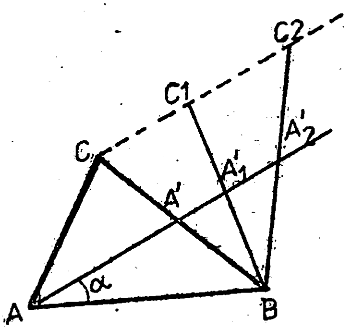


Fig. II.3

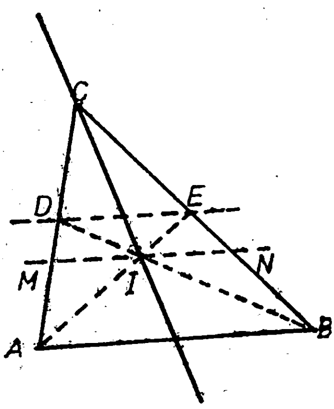


Fig. II.4

5. Dacă se notează cu B' și C' mijloacele laturilor AC și BC se pot scrie relațiile (aplicînd lungimea medianei):

$$BC^2 + AB^2 = 2BB'^2 + \frac{1}{2}AC^2; \; BC^2 + AC^2 = 2CC'^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

pe care scăzîndu-le între ele obținem:

$$AB^2 - AC^2 = 2(B'B^2 - C'C^2) + \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}(AB^2 - AC^2) = 2(B'B^2 - C'C^2) = K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB^2 - AC^2 = \frac{4}{3}K = \text{const.}$$

Deci locul geometric al punctului A îndeplinind condiția ca diferența pătratelor distanțelor sale la două puncte fixe să fie constantă este o perpendiculară pe BC în punctul D astfel că dacă A' este mijlocul segmentului BC, avem $A'D' = = \frac{4}{3} \cdot \frac{K^2}{BC}$.

6. (Fig. II.6) Deoarece $m(\hat{C}) = \text{const.}$, vîrful C descrie un arc de cerc. Se notează cu O centrul acestui arc de cerc, ce aparține cercului circumscris triunghiului ABC. Se consideră triunghiul COC_1 unde $\{C_1\} = (CP) \cap (AB)$. Din acest triunghi rezultă $O_1P = \frac{1}{2}OC = \text{const.}$ Deci locul geometric este un arc de cerc cu centrul în O_1 și raza O_1P. Deoarece raza OB a cercului circumscris triunghiului ABC este mai mare ca OC_1, locul geometric este numai un arc din cercul O_1.

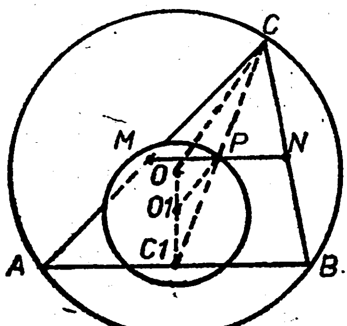


Fig. II.6

7. Din asemănarea celor două triunghiuri AMB și ABC cu unghiul B comun, rezultă că unghiurile MAB și ACB sînt congruente. Locul geometric al punctului M este o dreaptă care trece prin A și face cu AB

un unghi congruent cu unghiul sub care se vede segmentul AB din punctul C.

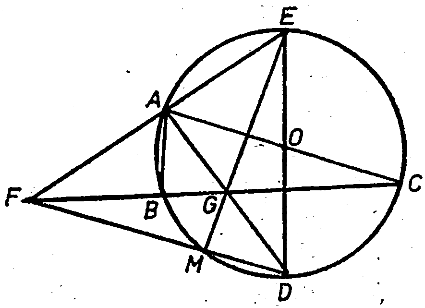


Fig. II.8

8. (Fig. II.8) Bisectoarele (interioară și exterioară) unghiului A fiind perpendiculare, iar D mijlocul arcului BC, dreapta (DE) este un diametru al cercului perpendicular pe latura BC.

În triunghiul DEF, DA și FG sînt înălțimi, G ortocentru, deci EG este înălțime.

Dreptele (EG) și (DF) fiind perpendiculare punctul lor de intersecție M descrie cercul dat.

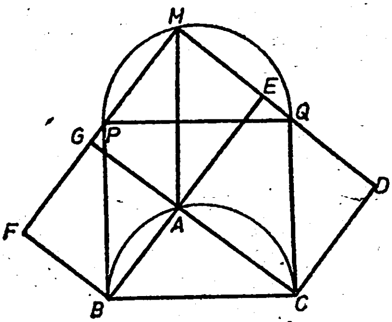


Fig. II.9

9. (Fig. II.9) Perpendicularele ridicate în B, C pe BC intersectează dreptele (FG), (EG) în punctele P, Q; patrulaterul $BCPQ$ este un pătrat deci P, Q sînt fixe și triunghiurile MPQ, ABC sînt congruente.

Locul geometric al punctului M, comun dreptelor (ED) și (FG) este semicercul de diametru PQ, avînd aceeași concavitate cu semicercul BAC, și simetricul acestui semicerc față de BC.

Cum triunghiul MGA este congruent cu triunghiul ABC rezultă că dreapta (MA) este perpendiculară pe BC și $MA \equiv BC$. Locul geometric al punctului M se obține din locul geometric al punctului A printr-o translație de vector de mărime BC, după direcția perpendiculară pe BC și în sensul convexității arcului BAC.

10. Patrulaterul ACB_1C_1 este înscris în cercul de diametru BC. Mijlocul O al laturii BC este fix, fiind intersecția cercurilor de rază $\frac{BC}{2}$ și centre B_1, C_1.

Locul geometric al punctelor B şi C este cercul de centru O şi rază $\frac{1}{2}BC$.

Deoarece $m(\hat{A}) = \frac{1}{2}[\pi - m(\widehat{C_1B_1})] = \alpha \mp$ const., vîrful A descrie arcul unui cerc care trece prin punctele fixe B_1, C_1, capabil de unghiul α.

Simetricele cercului de centru O şi al arcului B_1AC_1 faţă de dreapta (C_1B_1) aparţin locurilor geometrice ale punctelor B, C şi A.

11. i) Fie M şi N proiecţiile punctului O pe cele două coarde EE' şi FF', atunci $\triangle OMC \equiv \triangle OND$, deci $MO \equiv ON$. Cum coardele sînt situate la aceeaşi distanţă faţă de centrul cercului, sînt congruente.

ii) Cum $\triangle ACE \sim \triangle E'CB$ şi $\triangle BDF' \sim \triangle FDA$ rezultă:

$$\frac{AE}{E'B} = \frac{AC}{E'C} = \frac{CE}{BC} \text{ şi } \frac{BD}{FD} = \frac{DF'}{AD} = \frac{BF'}{AF}.$$

Cum $AC \equiv BD$, $BC \equiv AD$, $E'C \equiv DF$, $F'D \equiv CE$ şi înlocuind în cele două şiruri de rapoarte, obţinem

$$CE \cdot DF = AB \cdot CB = \text{constant}.$$

iii) Locurile geometrice sînt două cercuri.

12. Punctele B şi C sînt situate pe cercul fix de diametru AM. Coarda BC este latura triunghiului echilateral înscris în cerc. Mijlocul ei N descrie un cerc concentric cercului de diametru AM şi cu raza jumătate din raza acestui cerc.

Centrul de greutate G este situat pe MN astfel ca $\frac{MG}{MN} = \frac{2}{3}$. Locul geometric al punctului G este omoteticul cercului descris de punctul N, în omotetia de centru M şi raport $\frac{2}{3}$.

13. (Fig. II.13) Fie F punctul de intersecție al dreptelor (AA'), (BD). Dreapta (AA') trece printr-un punct fix P, mijlocul arcului inferior BC al cercului circumscris triunghiului ABC. Dreapta $(A''D)$ este paralelă cu AC, deci

$$\frac{A_1A''}{A_1C} = \frac{A_1D}{A_1A} = \frac{A_1A'}{A_1B}$$

și triunghiul $A'DA''$ este asemenea cu triunghiul ABC, iar DE paralelă cu bisectoarea AA', (E situat pe BC) este și ea bisectoarea unghiului $A'DA''$.

Avem rapoartele:

$$\frac{EA}{EA''} = \frac{DA}{DA''} = \frac{AB}{AC} = \frac{A'B}{A'C} = \frac{A'B}{A''B}.$$

Din egalitatea celui de al doilea raport și al ultimului raport, rezultă că dreapta (BD) este bisectoarea exterioară a unghiului $A'DA''$; BD este perpendiculară pe bisectoarea interioară și deci și pe paralela cu ea, AA'.

Locul geometric al punctului F este deci cercul cu diametrul BP.

14. (Fig. III.14) Fie ABC triunghiul dat și dreptunghiul $DEFG$ înscris în triunghi, ale cărui diagonale se intersectează în L. Trebuie să determinăm locul geometric descris de punctul L cînd dreptele (DE) sau (EF) se deplasează paralel cu ele însele. Pentru aceasta se vor considera soluțiile sin-

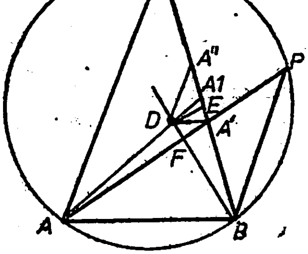


Fig. II.13

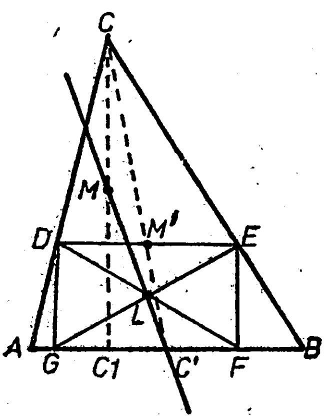


Fig. II.14

gulare (cazurile limită) cînd DE se deplasează astfel încît tinde către AB; în acest caz centrul L al dreptunghiului tinde către C' care este mijlocul laturii AB. Dacă se presupune că EF se deplasează astfel încît să tindă către înălţimea CC_2, atunci L tinde către M, mijlocul acestei înălţimi. Cum variaţia uneia dintre cele două laturi ale dreptunghiului implică variaţia celeilalte, locul geometric este dreapta (MC').

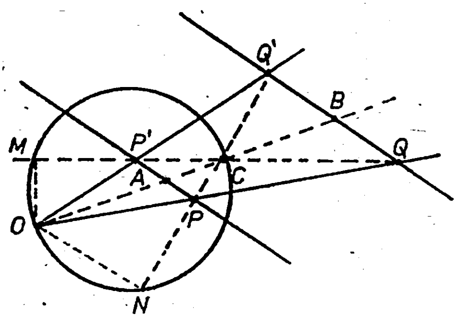


Fig. II.15

15. (Fig. II.15) Diagonalele PQ' şi QP' ale trapezului $PP'Q'Q$ se intersectează în punctul C pe mediana OAB a trapezului. Din asemănarea triunghiurilor $AP'C$ şi BQC rezultă $\frac{AP'}{BQ} = \frac{AC}{CB}$ dar prin construcţie $AP' \equiv AP$ şi relaţia de mai sus devine $\frac{AP}{BQ} = \frac{AC}{CB}$; AP şi BQ fiind paralele din asemănarea triunghiurilor POA şi $QOB \Rightarrow \frac{AP}{BQ} = \frac{AO}{BO} = \text{const.}$ sau $\frac{CA}{CB} = \frac{AO}{BO} = \text{const.}$ Deci P este punct fix şi locul geometric al proiecţiilor M şi N ale punctului O pe QC şi PC este cercul cu diametru OC.

16. (Fig. II.16) Prin P se duc dreptele $(PP') \perp (OY)$ şi $(PP'') \perp (OX)$. Considerăm că dreapta (Δ) trece prin P', deoarece oricare ar fi poziţia ei se poate duce prin P' o paralelă la (Δ), iar perpendiculara pe această dreaptă, ca şi dreapta care uneşte O cu mijlocul segmentului cuprins între laturile unghiului sînt aceleaşi.

Fie $(P'A)$ o dreaptă paralelă cu (Δ) care trece prin punctul P', M mijlocul segmentului $P'A$ şi $\{C\} = (AP') \cap (OP)$. Dreapta (PP') intersectează dreapta (OP) în punctul D, mijlocul segmentului $P'P''$. În triunghiul $CP'P$, $P'D$ este înălţime şi dacă E este intersecţia dintre $P'P''$ şi înălţimea dusă prin P pe CP', OM va trece prin punctul E. Într-adevăr, $DM \parallel OX$ pentru că unește mijloacele laturilor $P'P''$ și AP'; de asemenea, $CE \parallel OP'$ deoarece $CE \perp PP'$. Deci în triunghiul DOP', $CE \parallel OP'$, iar dreapta (DM) trece prin mijloacele paralelelor CE și OP'. De aici rezultă că OE și CP' inter-

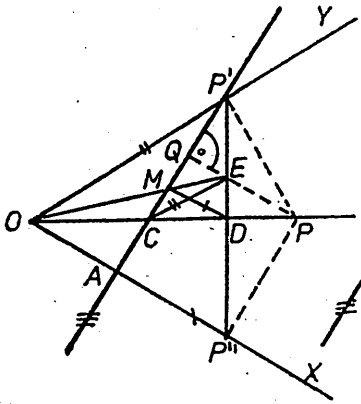


Fig. II.16

sectează pe DM în punctul M. Deci E este un punct al locului geometric și pentru că E aparține dreptei $(P'P'')$ locul geometric căutat este dreapta $(P'P'')$.

17. (Fig. II.17) Simetricele punctului A față de punctul mobil A' de pe dreapta (D') sînt situate pe simetrica (D'') a dreptei (D) față de dreapta (D). Înălțimea AM a triunghiului isoscel ABA_1 este congruentă cu înălțimea din A_1, care are ca mărime distanța dintre dreptele (D) și (D'').

Locul geometric al punctului M este cercul de centru A și rază $2a$, a fiind distanța dintre dreptele date (D) și (D').

18. (Fig. II.18) i) Triunghiul COD este isoscel, pentru că triunghiurile dreptunghice ACB și ADB sînt înscrise în același semicerc cu centrul O și de diametru AB; de unde deducem că: $OC \equiv OA \equiv OB \equiv OD = l$.

Dacă notăm $m(\widehat{OCA}) = m(\widehat{OAC}) = \alpha$ și cum în patrulaterul inscriptibil $ABCD$ avem $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ABD}$, rezultă $m(\widehat{OCD}) = m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{OCA}) = m(\widehat{ABD}) + \alpha = 90° \rightarrow$

$- m(\widehat{BAD}) + \alpha$ sau $m(\widehat{OCD}) = 90° - (60° + \alpha) + \alpha = 30°$.
Triunghiul COD fiind isoscel, avem: $m(\widehat{OCD}) = m(\widehat{ODC}) = 30°$.

ii) Centrul de greutate G al triunghiului OCD se află pe perpendiculara OI dusă pe latura CD la $2/3$ din această

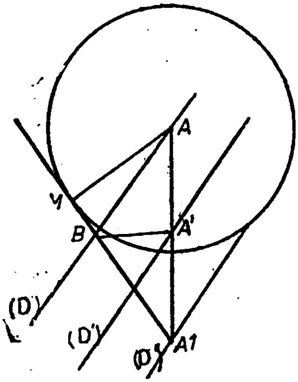


Fig. II.17

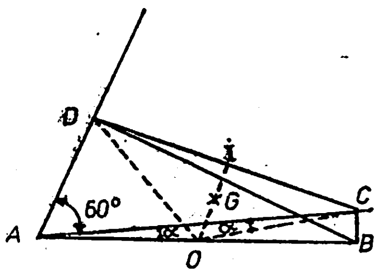


Fig. II.18

distanță de punctul O. Conform punctului i) triunghiul DOC își păstrează laturile OC și OD cu lungimea constantă l și unghiurile OCD, ODC de cîte 30°; deci și OI rămîne de lungime constantă. Rezultă că punctul G descrie un cerc cu centrul în O și cu raza $\frac{2}{3}OI$.

19. (Fig. II.19) i) Suma unghiurilor de aceeași parte a dreptelor (GA), (EA) fiind egală cu $m(\widehat{GAB}) + m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAE}) = 45° + 90° + 45° = 180°$ demonstrează afirmația.

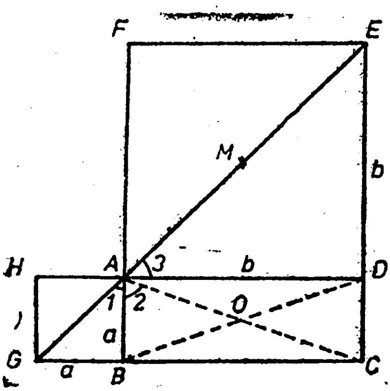


Fig. II.19

ii) Aplicînd teorema medianei în triunghiurile GDE și GBE rezultă $2MD^2 = GD^2 + DE^2 - \frac{GE^2}{2}$ și $2MB^2 = BE^2 + BG^2 - \frac{GE^2}{2}$.

Ținînd seama că $GD^2 = (a + b)^2 + a^2$, $BE^2 = (a + b)^2 + b^2$, $DE^2 = b^2$, $BG^2 = a^2$, $GE^2 = 2(a + b)^2$ deducem $MB^2 + MD^2 = a^2 + b^2 = BD^2$ ceea ce arată că M se află pe cercul de diametru BD.

Deoarece $m(\widehat{BMD}) = 90°$, cu punctele B și D fixe, locul geometric al punctului M este cercul de diametru BD.

20. (Fig. II.20) i) Relația dată se mai poate scrie sub forma $\frac{AM}{AC} = \frac{AC}{AB}$, ceea ce demonstrează că triunghiurile dreptunghice CAM și BAC sînt asemenea. Rezultă că unghiurile AMC și ACB sînt congruente. În patrulaterul inscriptibil $AMPC$ avem $m(\widehat{AMC}) = m(\widehat{APC})$ de unde deducem $\widehat{APC} \equiv \widehat{ACB}$. Triunghiul PAC, avînd două unghiuri congruente, este isoscel, deci $PA \equiv CA = \text{const}$, deci locul geometric al punctului P este un cerc cu centrul în A și raza PA egală cu lungimea catetei AC.

ii) Prelungim MP pînă la intersecția ei cu AC în punctul C'. Unghiurile ABC și $PC'C$ sînt congruente ca avînd laturi perpendiculare, iar $\widehat{ABC} \equiv \widehat{MCA}$, triunghiurile ABC și ACM fiind asemenea. Rezultă că triunghiul $C'MC$ este isoscel și prin urmare $AC' \equiv AC$. Dreapta variabilă (MP) trece prin punctul fix C' simetricul punctului C față de A.

21. (Fig. II.21) i) Fie O și E mijloacele celor două baze AB și DC. Cum $EC \equiv CB$, rezultă că locul geometric al punctului C este parabola cu focarul în B, directoarea EM

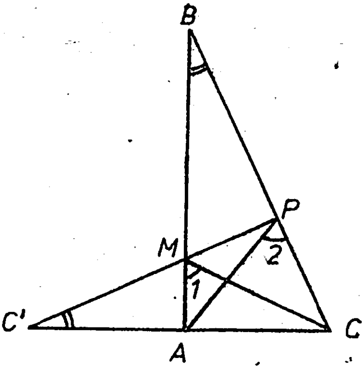


Fig. II.20

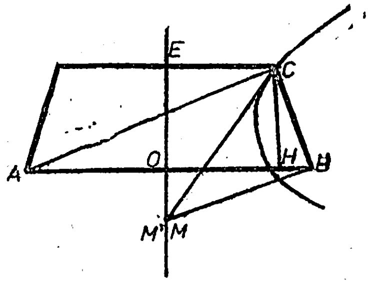


Fig. II.21

și axa OB. Locul geometric al punctului D este parabola simetrică față de EM.

ii) Fie M' punctul în care CM intersectează pe OE. Vrem să arătăm că M și M' coincid, ceea ce rezultă din faptul că $\triangle ECM \equiv \triangle CMB$, deoarece sînt dreptunghice, au o catetă și un unghi ascuțit respectiv congruent.

22. Pozițiile extreme ale vîrfului sînt în punctele M și N de pe dreptele (Ox) și (Oy) situate la o distanță de A egală cu semiperimetrul paralelogramului. Locul geometric căutat este segmentul MN, căci dacă punctul C aparține acestui segment, perimetrul paralelogramului este egal cu $2AM$ și diferit de acesta dacă M este în afara segmentului.

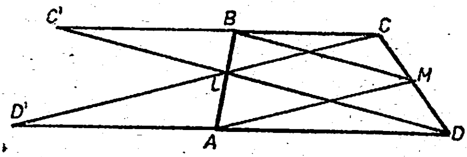


Fig. II.23

23. (Fig. II.23) Fie C' punctul în care paralela la MB intersectează pe BC și D' punctul unde paralela la MA intersectează pe AD și $\{L\} = (C'D) \cap (CD')$. Aplicînd teorema lui Tales paralelelor AM și CD' intersectate de secantele DA, DC și paralelele DC', MB intersectate de secantele CD, CB avem:

$$\frac{AD}{AD'} = \frac{MD}{MC} = \frac{BC'}{BC}$$

și deci dreptele (DC') și $(D'C)$ se intersectează pe dreapta (AB). Deci locul geometric este dreapta (AB).

24. Cum distanța dintre paralele este constantă, din faptul că aria trapezului este constantă rezultă că $AC + BD = \text{const}$. Dacă D coincide cu B, punctul C se deplasează în C_1, așa că $AC_1 = AC + DB$. Notînd cu $\{F\} = (CD) \cap (C_1B)$, acesta este la mijlocul segmentului fix C_1B. Locul geometric al punctului M este cercul cu diametrul EF.

25. Deoarece $AC = 2AM$, C descrie un cerc cu centrul A' și rază AA'. A' fiind diametral opus lui A în cercul dat Teorema lui Menelaus aplicată triunghiului ACO intersectat de transversala (BMP), P fiind intersecția dreptelor (BM) și (OC), ne dă $OP = 2/3 \cdot OC$ și prin urmare punctul P descrie un cerc, omoteticul celui descris de punctul C în omotetia de centru O și raport $2/3$.

26. Se constată că $m(\widehat{BMC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BAC})$. Rezultă că punctul M descrie două arce de cerc care trec prin punctele B și prin C.

27. i) Fie F punctul în care cercul circumscris triunghiului DAE reintersectează dreapta (DC). A arăta că cercul circumscris triunghiului ECB trece prin F revine la a arăta că patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil. Aceasta rezultă din egalitățile: $m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{EFC})$ și $m(\widehat{EAD}) + m(\widehat{EBC}) = 180°$.

ii) Cum $m(\widehat{AOI}) = m(\widehat{AEI}) = m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{BJC})$ și $m(\widehat{AID}) = m(\widehat{CFJ}) = m(\widehat{JBC})$ și prin urmare triunghiurile ADI și CJB sînt asemenea. Din această asemănare rezultă: $\frac{AD}{CJ} = \frac{AI}{BC}$. Deoarece un trapez inscriptibil este trapez isoscel rezultă $AD \equiv EF \equiv BC$ și relația anterioară devine $EF^2 = AI \cdot CJ = AD^2 =$ constant.

iii) Din patrulaterul inscriptibil $IDEF$ deducem că $m(\widehat{DIE}) = m(\widehat{DFE}) = m(\widehat{DAB}) =$ constant. Analog $m(\widehat{BJF}) = m(\widehat{BCD}) =$ constant.

Rezultă că punctul I descrie un cerc care trece prin punctele C și D și este capabil de unghiul de măsură egală cu măsura unghiului $\widehat{DAB}$, iar punctul J descrie un arc de cerc care trece prin punctele A și B și capabil de un unghi de aceeași măsură.

28. i) Să considerăm că punctul M se află între punctele A și B. $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ANM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AM})$, $m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{BMN}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BM})$. Rezultă că suma unghiurilor ACB și ANB este $180°$ și patrulaterul $ACNB$ este inscriptibil. Această afirmație se menține și dacă, punctul M nu se află între A și B. Prin urmare locul geometric al punctului N este cercul circumscris triunghiului ABC.

ii) Fie D punctul în care dreapta (MN) reintersectează cercul circumscris triunghiului ABC. Deoarece $m(\widehat{BDN}) =$

$= m(\widehat{CBA})$ rezultă că arcele AC şi BD sînt congruente. Cum D este simetricul punctului C faţă de mediatoarea segmentului AB este deci un punct fix.

29. i) Se construieşte $PB' \parallel AC$ şi $PC' \parallel AB$ şi din paralelogramul format, rezultă că locul geometric este linia mijlocie paralelă cu BC; ii) Perimetrul $= \frac{2}{r+1}(br+c)$; aria paralelogramului este $\frac{2rS}{(r+1)^2}$ unde S este aria triunghiului ABC; iii) Raportul este $\frac{2r}{(r+1)^2}$.

30. i) Segmentele $OB' \equiv OC' \equiv OH = \frac{AM}{2}$; ii) cele patru puncte se află pe cercul cu diametrul AM (concluzia punctului i); iii) linia mijlocie paralelă cu BC; iv) construind $MM' \parallel AC$ se formează triunghiul isoscel $BM'M$ în care înălţimile $MC' \equiv BN'$ şi deci $MC' + MB' = BP$ unde $BP \perp AC$.

31. i) Patrulaterul $AA'B'B$ are $m(\widehat{AA'B}) = m(\widehat{BB'A})$; ii) Puterea punctului O faţă de cercul care circumscrie patrulaterul $AA'B'B$; iii) măsura unghiul fix $\widehat{A'OB'} = \frac{m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{A'B'})}{2}$; $\overset{\frown}{A'B'}$ rămîne constant odată cu AB şi deci coarda $A'B'$ = constant; iv) $m(\widehat{A'MB'}) = \frac{m(\overset{\frown}{A'B'}) + (\overset{\frown}{AB})}{2}$ = constant, de unde rezultă că locul geometric al punctului M este arcul capabil al unghiului $A'MB'$, suplementul unghiului constant format de dreptele (D_1) şi (D_2).

32. (Fig. II.32) i) $m(\widehat{B'AC'}) = \frac{2\alpha + 2\beta}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$. Rezultă că $B'C'$ este latura pătratului înscris în cerc, iar locul geometric al mijlocului segmentului $B'C'$ este cercul concentric cu cel dat, avînd ca rază apotema pătratului înscris. ii) triunghiul DAE este isoscel pentru că $m(\hat{D}) = m(\hat{E}) = \frac{\alpha^\circ + \beta^\circ}{2}$. Așadar, înălțimea lui este și bisectoarea unghiului A. Cum $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și o latură trece prin punctul C, a doua trebuie să treacă prin F, $m(\widehat{CF}) = 90^\circ$.

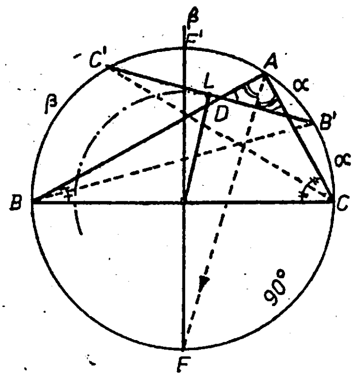


Fig. II.32

33. Se folosește proprietatea sumei distanțelor de la un punct variabil de pe baza triunghiului isoscel la laturile egale și anume: fie triunghiul isoscel ABC (cu $AB \equiv AC = l$), punctul M variabil aparținînd laturii BC și punctele D și E proiecțiile punctului M pe laturile AB respectiv AC.

$$\sigma[ABC] = \sigma[ABM] + \sigma[AMC] \Rightarrow \sigma[ABC] =$$

$$= \frac{DM \cdot l}{2} + \frac{EM \cdot l}{2} \Rightarrow MD + ME = \frac{2}{l} \cdot \sigma[ABC] = \text{constant}.$$

Locul geometric este un dreptunghi.

34. Dacă punctul O este situat pe xy, locul geometric este dreapta xy. Dacă O nu este pe xy, locul geometric este o dreaptă paralelă cu xy, dusă prin mijlocul distanței dintre punctul O și dreapta xy.

35. Locul geometric al punctului N este o dreaptă paralelă cu cea dată. M fiind fix, mijlocul segmentului MN descrie și el o paralelă la dreapta dată.

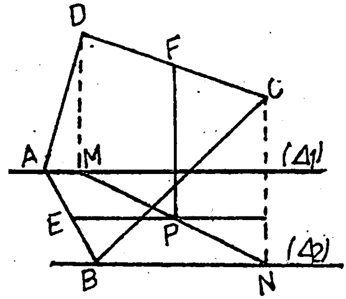


Fig. II.36

36. (Fig. II.36) Dacă notăm cu E și F mijloacele laturilor AB şi CD atunci paralela prin E la (Δ_1), (Δ_2) şi perpendiculara prin F pe (Δ_1), (Δ_2) trec prin P, iar $m(\widehat{EPF}) = 90°$. Locul geometric este cercul de diametru EF.

37. AD, BC sînt bazele, I punctul de intersecţie al laturilor neparalele AB, DC. Avem $m(\widehat{AID}) = 180° - 2m(\widehat{ADC}) = 180° - m(\widehat{AOC})$, O fiind centrul cercului. Patrulaterul $IAOC$ este inscriptibil. Locul geometric este arcul AIC din cercul (AOC).

38. i) Avem $m(\widehat{CDA}) = 90°$, iar $\dfrac{CD}{DA} = k$, deci triunghiurile ACD rămîn asemenea între ele.

Patrulaterele $OADC$ şi $OACB$ sînt inscriptibile.

$m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{BAC})$; $m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{ACD}) =$ constant.

Rezultă că locul geometric al vîrfurilor B şi D sînt respectiv dreptele (OB) şi (OD).

ii) Ipotenuza AC este constantă dacă măsurile segmentelor OA şi OB sînt date. $OM = \dfrac{AC}{2} =$ constant, deci locul geometric al punctului M este cercul de centru O şi de rază $\dfrac{1}{2}AC$.

39. (Fig. II.39) Notăm cu P punctul de intersecţie al laturilor neparalele AB şi CD. Avem:

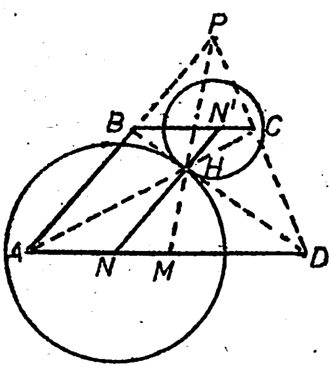


Fig. II.39

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AP}{BC} \text{ sau } \frac{AP - AB}{AP} = \frac{BC}{AD}$$ din care rezultă că

$$AP = \frac{ac}{a-b} = \text{constant}.$$

Considerăm cazul cînd (AD) este o dreaptă fixă.

Segmentul PH intersectează (prin prelungire) latura fixă

AD în punctul M. Ţinînd seama că $\frac{CD}{CP} \cdot \frac{BP}{BA} = 1$, relaţia lui Ceva $\frac{MA}{MD} \cdot \frac{CD}{CP} \cdot \frac{BP}{BA} = -1$ devine $\frac{MA}{MD} = -1$ şi astfel M este un punct fix, mijlocul laturii fixe AD.

Prin H ducem paralela HN la AP. Din relaţia:

$$\frac{HP}{HM} = \frac{BP}{BA} + \frac{CP}{CD} = 2 \cdot \frac{BP}{BA}$$

obţinem:

$$\frac{NA}{NM} = \frac{2BP}{BA};$$

relaţie care arată că punctul N este fix.

Cum triunghiul PAM şi triunghiul HNM sînt asemenea, avem $NH = \frac{ac}{a+b} =$ const. şi locul geometric al punctului H este un cerc de centru N şi rază $NH = \frac{ac}{a+b}$.

Observaţie: În cazul cînd latura BC este fixă obţinem analog un cerc de centru N' şi rază $N'H$. Cercurile (N) şi (N') sînt tangente în H. $(\{N'\} = (HN) \cap (BC))$.

40. i) Triunghiurile congruente ABB', ADD', pot fi privite ca rezultînd unul din celălalt printr-o rotaţie de $90°$, de unde rezultă că $BB' \perp DD'$. Deoarece B, D sînt fixe, locul geometric este cercul circumscris patrulaterului $ABCD$.

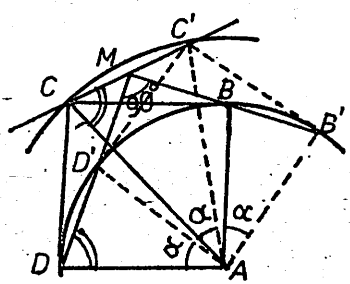


Fig. II.40

ii) Fie $\{M\} = (BB') \cap (CC')$, $m(\widehat{MCA}) = m(\widehat{MDA})$, iar din triunghiurile isoscele ACC' şi ADD' avînd unghiurile din A congruente, rezultă $m(\widehat{C'CA}) = m(\widehat{D'DA})$, deci punctul M aparţine segmentului CC'.

41. Fie D un punct în interiorul triunghiului, astfel încît

$AD \equiv CM$ şi că $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{BCM})$. Se deduce că triunghiul BDM este echilateral, şi pentru că $AM = AD + DM$ punctul D aparţine segmentului AM. Locul geometric al punctului M este arcul BC.

42. O dreaptă paralelă cu (D).

43. Paralela prin N la AC intersectează pe BC în D. $DM \parallel AB$ (teorema lui Tales). Fie E intersecţia diagonalelor paralelogramului $ANDM$. Locul geometric al punctului E este o paralelă (D) la BC. Centrul de greutate G al triunghiului PNM aparţine segmentului PE astfel că $\frac{PG}{GE} = 2$. Locul geometric al punctului G este o paralelă (D') la (D), deci la BC.

44. Pe BC se ia punctul N astfel că $\frac{NB}{NC} = \frac{\gamma}{\beta}$ şi pe AN se ia punctul O astfel ca $\frac{OA}{ON} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$. Aplicînd relaţia lui Stewart triunghiului MBC şi punctului N şi apoi triunghiului MAN şi punctului O, avem egalităţile:

$$\beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\beta + \gamma) MN^2 + \beta\gamma BC^2 : (\beta + \gamma);$$

$$\alpha MA^2 + (\beta + \gamma) MN^2 = (\alpha + \beta + \gamma) MO^2 + \frac{\alpha(\beta + \gamma) AN^2}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Adunînd şi ţinînd seama de enunţ, se determină locul geometric al punctului M care este un cerc cu centrul în O.

45. Fie M şi N centrele acestor cercuri. Se observă că $OM \parallel AB$ şi $ON \parallel AB$. Cum AN, BM sînt bisectoarele exterioare ale unghiurilor A şi B avem:

$$m(\widehat{OAN}) = m(\widehat{ONA}) \text{ şi } m(\widehat{OBM}) = m(\widehat{OMB}).$$

Deci, triunghiurile OAN, OAM sînt isoscele, iar M şi N descriu acelaşi cerc cu centrul O şi raza OA.

46. Deoarece $AC \equiv DC$ şi $BC \equiv CE$, triunghiurile ACD şi BEC sînt isoscele. Deci avem:

$$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ADC}) \text{ şi } m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{CEB}).$$

$$\text{Dar } m(\widehat{DCA}) + m(\widehat{ECB}) = 180°.$$

Deci $2m(\widehat{DAC}) + 2m(\widehat{EBC}) = 180°$ sau $m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{EBC}) = 90°$, de unde rezultă că $m(\widehat{AMB}) = 90°$, adică locul geometric al punctului M' este cercul descris pe AB ca diametru.

47. Diametrul perpendicular pe acea direcţie (diametrul fiind perpendicular pe mijlocul coardei variabile).

48. Un cerc concentric cu cel dat şi de rază $r^2 = R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$, unde R este raza cercului dat şi l este măsura coardei.

49. Mediatoarea segmentului determinat de acele puncte.

50. Dreapta care trece prin punctul dat şi prin centrul cercului. Se va separa pe această dreaptă, porţiunea care corespunde cercurilor tangente exterior, de aceea care corespunde cercurilor tangente interior sau cuprind în interior cercul dat. Centrul cercului dat nu face parte din locul geometric.

51. Un cerc cu centrul în mijlocul segmentului AO şi cu raza jumătate din raza cercului dat.

52. Fie P un punct al cărui loc geometric se caută: Triunghiurile OMN şi PMN sînt congruente, deci $MP = ON =$ constant. Locul geometric este tangenta în D la cerc.

53. (Fig. II. 53) Fie MN şi PQ cele două secante. Punctele M, P aparţin cercului (O_1), iar N, Q cercului (O_2). Mijloacele coardelor MP şi NQ descriu cercuri concentrice cu cercurile (O_1) şi (O_2). $MP = NQ = AB$ coarda comună cercurilor (O_1) şi (O_2). E, F fiind mijloacele segmentelor MN

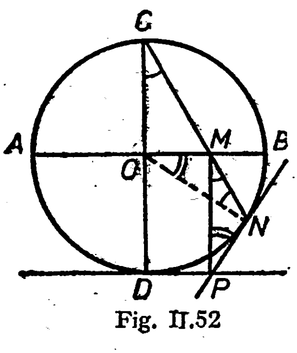


Fig. II.52

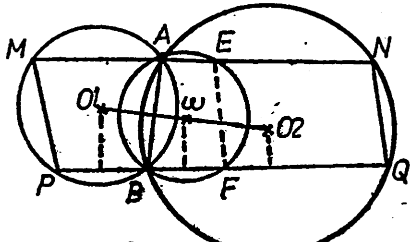


Fig. II.53

şi PQ, avem $EF \parallel MP$, deci $ABFE$ este trapez isoscel; mijlocul lui BF este şi proiecţia mijlocului lui O_1O_2, deci centrul cercului circumscris trapezului $ABFE$ este mijlocul ω al segmentului O_1O_2. E şi F se deplasează pe cercul (ω). Intersecţia diagonalelor se află la mijlocul segmentului EF; locul geometric este un cerc concentric cu cercul (ω).

54. Un cerc concentric cu cel dat şi de rază $R\sqrt{2}$, R fiind raza cercului dat.

55. Un cerc concentric cu cel dat şi de rază $\dfrac{R}{\sin \alpha}$; R fiind raza cercului dat şi 2α măsura unghiului constant.

56. OM este jumătate din AB, deci constant. Locul geometric este un cerc.

57. (Fig. II. 57) În triunghiul BMP dreptele (MA) şi (AB) sînt bisectoarele exterioare ale unghiurilor din M şi B, deci PA este bisectoarea interioară dusă din P. Ducem bisectoarea unghiului MBP pînă intersectează pe MA, în A_1; PA_1 este bisectoarea exterioară în P. Locul geometric al punctului P este cercul descris pe AA_1 ca diametru.

58. MO este bisectoarea unghiului AMB, deci $AA' \equiv BB'$ fiind coarde egal depărtate pe centru. Figura $AB'BA'$ este un trapez isoscel, deci locul geometric al punctului P este dreapta (AB). Dacă M aparţine arcului AB exterior cercului (O), locul geometric este segmentul AB. Dacă punctul M aparţine arcului AB interior cercului (O), locul geometric este restul dreptei (AB).

59. (Fig. II. 59) Vom aplica o teoremă: ortocentrul unui triunghi şi punctul în care o înălţime intersectează cercul circumscris sînt simetrice în raport cu piciorul înălţimii.

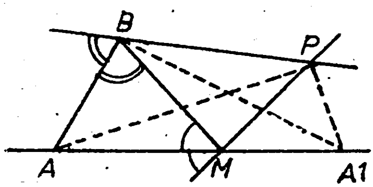


Fig. II.57

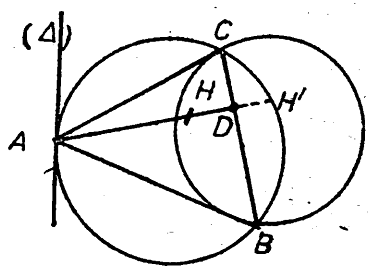


Fig. II.59

Deci, dacă H' este punctul în care AD intersectează cercul circumscris triunghiului ABC, atunci $DH' \equiv DH$. Scriind puterea punctului D față de cercul (ABC) obținem: $DH' \cdot DA = -DH \cdot DA = DB \cdot DC =$ constant $=$ puterea punctului D față de cercul (O).

Relația $DH \cdot DA =$ constant, demonstrează că punctul H descrie figura inversă dreptei (Δ), deci un cerc care trece prin punctul D și al cărui diametru dus prin acest punct este perpendicular pe (Δ).

Reamintesc: se numește polară, o dreaptă, loc geometric al punctului conjugat armonic cu un punct dat, numit polul dreptei, în raport cu cele două puncte în care o secantă mobilă, ce trece prin punctul dat, intersectează o conică. Polara unui punct exterior față de conică trece prin punctele de contact ale tangentelor duse din punct la conică. Polara unui punct interior conicei este a treia diagonală, exterioară, a patrulaterului complet, format cu prelungirile, pînă la intersecție, ale laturilor opuse ale patrulaterului ce are vîrfurile în extremitățile a două coarde duse prin punctul dat. *Caz particular:* locul geometric al conjugatelor unui punct M, pe o secantă mobilă ce trece prin M, în raport cu capetele unei coarde determinate într-un cerc, este o dreaptă numită polara punctului M și este perpendiculară pe diametrul punctului M. Punctul M este numit polul dreptei. Polul unei tangente este punctul de contact. Polul unei secante este intersecția tangentelor în punctele de intersecție cu cercul. Polarele a trei puncte coliniare sînt trei drepte concurente. Dacă o dreaptă (D_1) trece prin polul unei drepte (D_2) și reciproc, dreptele (D_1) și (D_2) se numesc drepte conjugate.

Observație: oricărei figuri formate din puncte și drepte îi corespunde o figură numită duală, formată din drepte (polarele punctelor) și din puncte (polii dreptelor).

Fie în planul (P) un punct O și $K \in R \setminus \{O\}$. Se numește inversiune de pol O și putere K, o transformare $I:(P)\setminus\{O\} \rightarrow (P)\setminus\{O\}$ care asociază fiecărui punct $M \neq O$ punctul $N \in (OM)$ astfel că $OM \cdot ON = K$. Pentru $K < 0$ avem punctul O interior segmentului MN. Pentru $K > 0$ avem punctul M este interior segmentului ON sau N interior segmentului OM, după cum pătratul distanței de la O la M este mai mic decît K sau mai mare decît K. Dacă pătratul distanței de la O la M este egal cu K atunci M se confundă cu N. Dacă M descrie o dreaptă, atunci N descrie inversa acestei drepte. Inversa unui cerc este un cerc, linia centrelor trecînd prin pol. Dacă cercul trece prin pol, inversa este o dreaptă perpendiculară pe diametrul polului. Inversa unei drepte este un cerc, care trece prin pol cu diametrul corespunzător perpendicular pe dreaptă. Unghiul a două direcții se păstrează prin inversiune.

Dacă punctele M' și N' sînt inversele punctelor M și N, atunci între segmentele MN și $M'N'$ există relația:

$$M'N' = K \cdot \frac{MN}{OM \cdot ON}.$$

Deci ca proprietăți avem: fie I o inversiune de pol O, (D) o dreaptă, (C) un cerc atunci:

i) $I(D)$ este o dreaptă sau un cerc după cum $O \in (D)$ sau $O \notin (D)$.

ii) $I(C)$ este o dreaptă sau un cerc după cum $O \in (C)$ sau $O \notin (C)$.

60. Notînd cu E piciorul perpendicularei din B pe diametrul CC', din triunghiul dreptunghic CBC' avem

$$CB'^2 = CE \cdot CC'.$$

Din triunghiurile dreptunghice CPA și CQA deducem

$$CP^2 = CQ^2 = CD \cdot CA.$$

Dar, cum patrulaterul $ADEC'$ este inscriptibil, rezultă

$$CD \cdot CA = CE \cdot CC'$$

și deci din relațiile de mai sus avem

$$CP^2 = CQ^2 = CB^2 \Rightarrow CP \equiv CQ \equiv CB, \text{ deci}$$

punctele P și Q aparțin cercului de centru C și rază CB!

Discuție. Punctele P și Q sînt reale, cînd cercurile C și cercul de diametru AC se intersectează, adică atunci cînd $CA \geqslant CB$, sau cu alte cuvinte cînd A se deplasează pe arcul $BC'B'$ exterior cercului C.

Pentru precizarea locului geometric, notăm cu A_1 și Q_1; A_2 și P_2 punctele de contact ale tangentelor comune cercurilor de centre O și C.

Cînd A descrie arcul $BA_1C'A_2B'$ punctul P descrie arcul $BB'P_2$, apoi arcul P_2B', iar Q descrie arcul BQ_1 apoi arcul Q_1BB'.

Rezultă că locul geometric al punctului P este arcul $BB'P_2$ şi al punctului Q este arcul Q_1BB', avînd arcul BB' comun, locul geometric căutat este arcul $Q_1BB'P_2$.

61. (Fig. II.61). i) Avem $m(\widehat{B'C'}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2} + \frac{m(\widehat{AB})}{2} = 90^\circ \Rightarrow B'C' = \frac{l_4}{OE} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, deci locul geometric al punctului E este un cerc concentric cu cercul dat, de rază $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

ii) Fie $AS \perp B'C'$, iar M intersecţia dreptei (AS) cu cercul.

$$m(\widehat{ASB'}) = 90^\circ = \frac{m(\widehat{AC}) + m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BM})}{2} \Rightarrow m(\widehat{ASC'}) = \frac{m(\widehat{AC}) + m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CM})}{2} \Rightarrow m(\widehat{BM}) = (\widehat{MC}) = 90^\circ.$$

Deci punctul M este intersecţia diametrului perpendicular pe BC cu cercul dat.

62. (Fig. II. 62) i) Patrulaterul $CNMB$ este inscriptibil şi centrul său O' este mijlocul ipotenuzei comune NB. Din O' coborîm perpendiculara $O'R$ pe AC. Triunghiurile $OO'R$ şi ACN sînt asemenea şi deci

$$\frac{OR}{AC} = \frac{OO'}{AN}.$$

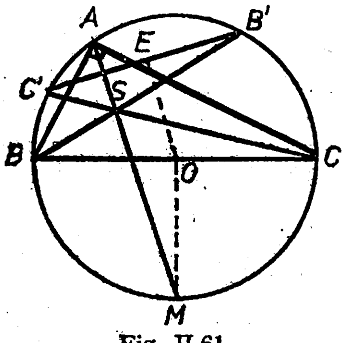


Fig. II.61

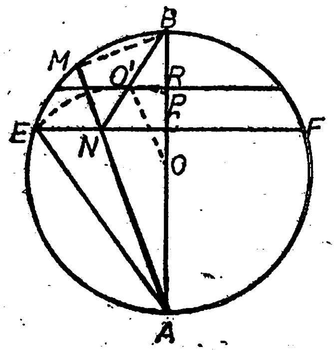


Fig. II.62

Dar $AN = 2 \cdot OO'$; OO' fiind linie mijlocie în triunghiul ABN. Așa că relația precedentă devine:

$$\frac{OR}{AC} = \frac{OO'}{2 \cdot OO'} = \frac{1}{2} \Rightarrow OR = \frac{AC}{2}.$$

Cum OR este fix, atunci locul geometric al centrelor este perpendiculara din O' pe AB.

ii) Fie E și F respectiv punctele unde perpendiculara în C intersectează cercul (O). Dacă notăm cu T punctul de contact al tangentei, avem:

$$AT^2 = AB \cdot AC; \text{ dar și } AE^2 = AC \cdot AB,$$

și deci $AT = AE =$ constant. Cum punctul A este fix, rezultă că locul geometric este cercul cu centrul în A și raza $AE = \sqrt{AB \cdot AC}$.

iii) Deci $AP = \sqrt{AB \cdot AC}$, iar $AR = AO + OR = AC + \frac{AC}{2} = \frac{AB + AC}{2}$.

Avem evident $AP < AR$, și prin urmare:

$$PR = AR - AP = \frac{AB + AC}{2} - \sqrt{AB \cdot AC}.$$

63. (Fig. II.63) Triunghiul dreptunghic AMP fiind isoscel, $m(\widehat{APM}) = 45°$ și cum MP trece prin punctul O, centrul cercului dat, rezultă că locul geometric al punctului P este format din două arce de cerc descrise pe AO drept coardă, capabile de unghiul $APO = 45°$ și simetrice față de AO.

64. (Fig. II.64) i) Cum patrulaterul $ABCM$ este inscriptibil și deci cum A este variabil, MB coardă în cercul (ABC) rămîne fixă. Prin urmare centrul cercului (ABC) este mobil pe mediatoarea segmentului MB.

ii) În cazul cînd punctul A este fix, coarda AM din cercul (ABC) rămîne fixă și locul geometric al centrului este mediatoarea segmentului AM.

65. (Fig. II.65) Fie punctul A' diametral opus punctului A pe cercul (O) și P punctul al cărui loc geometric se cere. MP trece prin A', iar $m(\widehat{MPA}) = 90° - m(\widehat{MAN}) =$ const. Segmentul AA' se vede din punctul P fie sub unghiul

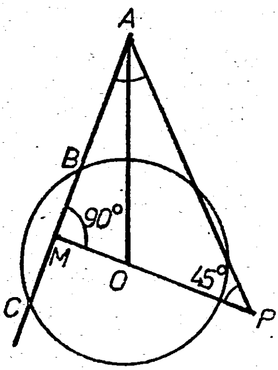


Fig. II.63

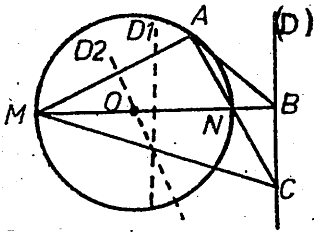


Fig. II.64

$90° - m(\widehat{MAN})$, fie sub unghiul suplementar. Locul geometric este un cerc.

66. DE este diametrul cercului (O) perpendicular pe BC, DG și FG sînt înălțimi în triunghiul DEF, iar EG va fi a treia înălțime. Dacă L este piciorul ei, unghiul DLE este drept și locul geometric este chiar cercul (O).

67. (Fig. II.67) Notăm cu N simetricul punctului M față de dreapta (Δ); luăm B diametral opus punctului A pe cercul dat și C simetricul punctului B față de P. Avem $m(\widehat{BMA}) = 90°$, deci $BM \parallel (\Delta)$; rezultă $CN \parallel (\Delta)$. Locul geometric cerut este cercul cu diametrul AC. El trece prin punctul de intersecție al cercului (O) cu dreapta (BPC).

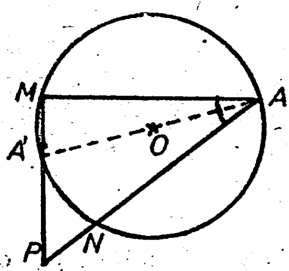


Fig. II.65

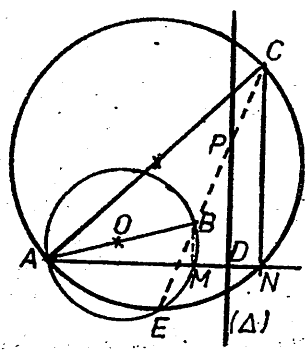


Fig. II.67

68. Locul geometric se compune din reuniunea a patru drepte concurente în O.

69. Fie H' ortocentrul triunghiului $AB'C'$, O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, M mijlocul laturii BC. Avem: $\frac{AH'}{AH} \quad \frac{AB'}{AB} = \text{constant}$. Dar $AH = 2 \cdot OM \Rightarrow$ $\Rightarrow AH = \text{constant}$ şi $AH' = OA - AH = \text{const}$. Deci locul geometric este un cerc concentric cu cercul circumscris.

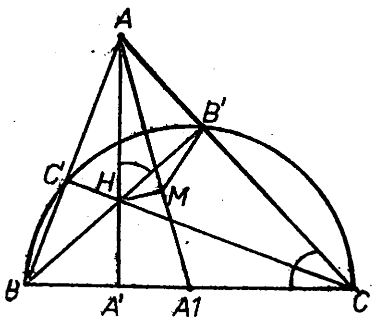


Fig. II.71

70. Puterea faţă de cele două cercuri este egală, deci $MP^2 = MO^2 - r^2$ sau $MO^2 - MP^2 = r^2 = \text{const}$. Locul geometric este o perpendiculară pe OP.

71. (Fig. II.71) Rezultă că $AB^2 + BC^2 + CA^2 = \text{constant}$, dar cum BC este constant $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB^2 + CA^2 = \text{constant}$. B' fiind piciorul perpendicularei din B pe AC şi M proiecţia ortocentrului H pe mediana AA_1 avem $\frac{AM}{AC} \quad \frac{AB'}{AA_1}$;

$$AM \cdot AA_1 = AC \cdot AB' = AA_1^2 - \frac{a^2}{4AA_1}; \quad AM = A\ _1 -$$

$- \frac{a^2}{4AA_1} = \text{const.}$, deci AM este constant. Locul geometric al punctului M este un cerc cu centrul în A.

72. Din $MO^2 - R^2 = MA^2$, rezultă $OM^2 - MA^2 = R^2$; locul geometric este o dreaptă perpendiculară pe OA.

73. O_1 fiind centrul unui cerc ce trece prin A şi intersectează ortogonal cercul $\mathcal{C}(O, R)$ rezultă $OO_1^2 - O_1A^2 = R^2$. Locul geometric este o dreaptă perpendiculară pe OA.

74. Notăm cu D şi E mijloacele celor două arce BC, $\{M\} = (AB) \cap (B'C')$, $\{N\} = (AC) \cap (B'C')$, $m(\widehat{BEC}) = \alpha$, $m(\widehat{BDC}) = 2\pi - \alpha$. Deoarece perechile de arce BC', $C'A$ şi AB', $B'C$ sînt congruente, putem scrie:

$$m(\widehat{C'A}) + m(\widehat{AB'}) = \pi - \frac{\alpha}{2} = \text{constant}.$$

Atunci şi coarda $B'C'$ este constantă ca mărime şi mijlocul ei P descrie o parte din cercul concentric cu cel dat şi raza OP.

Triunghiul AMN este isoscel deoarece $m(\widehat{AMN}) = m(\widehat{ANM}) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$. Perpendiculara din A pe $B'C'$ este bisectoarea unghiului BAC şi trece prin E care este punct fix.

Delimitarea locului geometric descris de P. Cînd A se apropie de B pe arcul BDC, C' se apropie de B, B' de D, iar cînd A coincide cu B, coarda $C'B'$ ia poziţia limită BD. Cînd A coincide cu C, coarda $C'B'$ ia poziţia limită BD. Cînd A se deplasează pe arcul BDC, P descrie arcul de cerc KPL unde K şi L sînt mijloacele coardelor BD şi CD, centrul acestui arc de cerc fiind O. Cum OK şi OL împart arcele BD şi DC în părţi congruente avem $m(\widehat{KPL}) = \pi - \frac{\alpha}{2}$.

Analog se arată că, atunci cînd punctul A se deplasează pe arcul de cerc BEC, mijlocul coardei $B'C'$ descrie arcul de cerc $K'P'L'$ de centru O şi raza OL', iar $m(\widehat{K'P'L'}) = \frac{\alpha}{2}$. În acest caz, perpendiculara din A pe $B'C'$ trece prin punctul fix D.

Deci locul geometric căutat se compune din două arce de cerc, KPL şi $K'P'L'$, concentrice cu cercul dat, de raze diferite şi în general astfel încît $m(\widehat{KPL}) + m(\widehat{K'P'L'}) = \pi$.

Dacă $BC = l_3$ atunci arcele de cerc KPL şi $K'P'L'$ au razele $OL' = a_6$, $OL = a_3$ şi mărimile în radiani $\frac{\pi}{6}$ şi $\frac{5\pi}{6}$.

Dacă BC este diametrul cercului atunci avem altă problemă.

În acest caz, locul geometric este format din arcele KPL şi $K'P'L'$ care fac parte din acelaşi cerc concentric cu cel dat, cu rază egală cu a_4 avînd fiecare $\frac{\pi}{2}$ radiani, unde a_6 este apotema hexagonului regulat; a_3 este apotema triunghiului echilateral şi a_4 este apotema pătratului.

75. Deoarece $IM \perp BB'$ deci $IM // AA'$ avem $m(\widehat{CIM}) = m(\widehat{CAA'})$; încă $OA \equiv CO$ deci $m(\widehat{CAA'}) = m(\widehat{ACO})$.

Rezultă că $m(\widehat{ACO}) = m(\widehat{CIM})$. Deoarece $m(\widehat{CIO}) = 90° + m(\widehat{CIM})$ şi $m(\widehat{ICM}) = 90° + m(\widehat{ACO})$ avem şi $m(\widehat{CIO}) = m(\widehat{ICM})$.

Ţinînd seama de egalităţile precedente şi de faptul că în triunghiurile ICM şi ICO latura IC este comună, deducem că triunghiurile ICM şi ICO sînt congruente. Deci $IM \equiv CO \equiv OA'$.

Rezultă că locul geometric al punctului M este tangenta în punctul A' la cercul dat.

76. i) Dreapta $(B'C')$ este fixă şi $2 \cdot AD = B'C'$; rezultă că distanţele punctului P la dreptele (AD) şi $(B'C')$ se află în raportul $\frac{1}{2}$ şi prin urmare P descrie o dreaptă paralelă cu (AD).

ii) Fie R punctul în care MP intersectează latura BC. Cum $CR \equiv AM$ atunci MP trece prin centrul paralelogramului $ABCD$.

77. i) Deoarece $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{EA}{EB} = 1$, rezultă că punctul Q aparţine medianei AM; cînd P descrie dreapta (AD), punctul Q descrie mediana AM.

ii) Fie E punctul de intersecţie al dreptelor (BC) şi (PQ). Teorema lui Menelaus aplicată triunghiului AMC intersectat de transversala (BQF) ne dă: $\frac{BA}{BC} \frac{FC}{FA} \cdot \frac{QA}{QM} = 1$, adică $\frac{1}{2} \frac{FC}{FA} \cdot \frac{QA}{QM} = 1$. Aceeaşi teoremă aplicată triunghiului ADM intersectat de transversala (GQP) ne dă $\frac{GM}{GD} \frac{PD}{PA} \cdot \frac{QA}{QM} = 1$ şi deoarece $\frac{PD}{PA} = \frac{FC}{FA}$ din cele două relaţii obţinem $\frac{GM}{GD} = \frac{1}{2}$ adică G este simetricul punctului D faţă de M.

iii) Fie H intersecţia dreptelor (AR) şi (BC). Atunci $\frac{HM}{HD} \cdot \frac{PD}{PA} \cdot \frac{AQ}{QM} = 1$ şi deci $\frac{HM}{HD} = \frac{1}{2}$; în consecinţă H este un punct fix, conjugatul armonic al punctului G în raport cu punctele M şi D. Deci locul geometric al punctului R este dreapta (AH).

78. i) Cum unghiul $D'MB$ este drept, rezultă că patrulaterele $ABDM$ și $AB'MD'$ sînt inscriptibile, deci unghiurile BMC și $C'MD'$ sînt egale fiecare cu 45° și deci dreapta (CC') trece prin punctul M.

ii) Din cele demonstrate la punctul precedent rezultă că atunci cînd pătratul $AB'C'D'$ este variabil în plan, punctul M descrie cercul circumscris pătratul $ABCD$.

79. Se aplică teorema medianei și se deduce că $MA^2 - MO^2 =$ constant. Deci locul geometric al punctului M este o dreaptă perpendiculară pe OA.

80. Fie O un punct între A și B astfel încît $OA : OB = \frac{\beta}{\alpha}$, se aplică relația lui Stewart: $MA^2 \cdot OB + MB^2 \cdot AO - MO^2 \cdot AB = OA \cdot OB \cdot AB$, dar $OA = AB \cdot \beta : (\alpha + \beta)$, $OB = AB \cdot \alpha : (\alpha + \beta)$; înlocuind, obținem: $\alpha \cdot MA^2 + \beta \cdot MB^2 = K^2 = (\alpha + \beta) \cdot MO^2 + AB \cdot \alpha\beta^2 : (\alpha + \beta) \Rightarrow OM^2 = \frac{(\alpha + \beta)K^2 - \alpha\beta^2 AB}{(\alpha + \beta)^2} =$ constant. Deci locul geometric al punctului M este un cerc cu centrul în O și de rază OM.

81. Soluția este analoagă cu cea precedentă, punctul O însă va fi situat pe prelungirea segmentului AB și relația lui Stewart va fi modificată în consecință. Locul geometric este un cerc.

82. Fie T punctul exterior, A și B punctele de tangență, O centrul cercului, $\{N\} = (BT) \cap (AO)$, $C \in (AB)$, $\{M\} = (NC) \cap (AT)$, $OC \perp MN$, dreapta (MN) intersectează cercul în punctele R și Q. Patrulaterul $OAMC$ este inscriptibil deoarece $m(\widehat{OAM}) = m(\widehat{OCM}) = 90°$. În consecință $m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{OMC})$.

Patrulaterul $OCBN$ este inscriptibil deoarece $m(\widehat{OCN}) = m(\widehat{OBN}) = 90°$ (avînd ON diametrul cercului circumscris). Deci $m(\widehat{ONC}) = m(\widehat{OBC})$. Dar în triunghiul OAB, $m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBC})$. Rezultă că triunghiul OMN este isoscel, iar înălțimea OC este mediana laturei MN. Deci $CM \equiv CN$.

Observație. Deoarece $CM \equiv CN$ rezultă că $MQ \equiv NR$, fiindcă $CQ \equiv CR$ ca jumătăți ale coardei QR. Se mai observă că punctul C este centrul cercului circumscris triunghiului AMN.

83. i) Se observă că $\frac{CP}{PA} = \frac{AN}{NB}$. Fie Q punctul în care $B'N$ intersectează dreapta (BC).

Conform teoremei lui Menelaus rezultă:
$\frac{QB}{QC} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$, adică $\frac{QB}{QC} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$ care se poate scrie, conform egalității de mai sus,
$\frac{QB}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$, de unde, conform reciprocei teoremei lui Menelaus, rezultă că dreapta (PC') trece prin Q. Astfel dreptele (NB') și (PC') se intersectează pe dreapta (BC); cînd M descrie dreapta (BC), punctul Q descrie aceeași dreaptă.

ii) Dreptele (NP) ca și $(B'C')$ trec prin mijlocul segmentului AM.

84. i) În triunghiul ABB', unghiul $AB'B$ este complementul unghiului ABB', iar în triunghiul $IB'C$ unghiul $IB'C$ este complementul unghiului ICB'. Deoarece $m(\widehat{ABB'}) = m(\widehat{ICB'})$, rezultă că BB' este bisectoarea unghiului $AB'I$.

ii) $AP \equiv MR$. Fie N proiecția punctului M pe dreapta $(B'I)$. Atunci $MN \equiv QI$; dar $MN = MR$ conform punctului i). Prin urmare $AP + AQ = AQ + QI \equiv AI$.

iii) Întrucît $m(\widehat{EAP}) = m(\widehat{MAP}) \Rightarrow m(\widehat{GAR}) = m(\widehat{MAR})$, rezultă că $m(\widehat{EAG}) = 180°$ deci punctele E, A, G sînt coliniare. Din construcție $AE \equiv AM \equiv AF \equiv AG$ și deci punctele E, M, F, G aparțin cercului de diametru EG; rezultă în particular că EF și GF sînt perpendiculare.

iv) Fie A' punctul în care dreapta $(B'I)$ intersectează înălțimea AD; deoarece BB' este bisectoarea unghiului $AB'I$ rezultă $AD \equiv A'D$, deci A' este simetricul punctului A față de D. În ipoteza dată punctele A, A' sînt fixe și cum $m(\widehat{AIA'}) = 90°$ rezultă că locul geometric al punctului I este cercul de diametru AA'.

85. i), ii) Notînd cu AA' înălţimea dusă din A şi cu L proiecţia lui Q pe această înălţime se formează triunghiul ALQ congruent cu BPP' (P', Q' proiecţiile punctelor P, Q pe baza BC) pentru că triunghiul ABC este isoscel şi BP congruent cu AQ.

Din trapezul $PP'Q'Q$ rezultă $OM = \dfrac{PP' + QQ'}{2}$ (M proiecţia lui O pe BC) şi prin urmare $OM = \dfrac{AL + QQ'}{2} = \dfrac{AL + LA'}{2} = \dfrac{AA'}{2} =$ constant. Rezultă că locul geometric este segmentul de pe linia mijlocie paralelă cu BC şi cuprins între laturile AB, AC atunci cînd punctele P, Q parcurg laturile AB, AC.

iii) Aria trapezului $PP'Q'Q$ este egală cu $\dfrac{PP' + QQ'}{2} \cdot P'Q = OM \cdot P'Q'$. Ţinînd seama că $BP' \equiv LQ \equiv A'Q'$, rezultă $P'Q' = BC - (BP' + Q'C) = BC - (A'Q' + Q'C) = BC - A'C = \dfrac{BC}{2}$ astfel că aria trapezului devine

$$OM \cdot P'Q' = \frac{AA'}{2} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{AA' \cdot BC}{4} = \frac{2 \text{ aria } \triangle ABC}{4} = \frac{\text{aria } \triangle ABC}{2}.$$

iv) Din relaţia cunoscută

$$\frac{\text{aria } \triangle APQ}{\text{aria } \triangle ABC} = \frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} = \frac{(a - x)x}{a \cdot a} = \frac{x(a - x)}{a^2}$$

rezultă că aria $\triangle APQ = \dfrac{\text{aria } \triangle ABC}{a^2} x(a - x)$.

v) Aria triunghiului APQ este maximă atunci cînd $x = a - x \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$ adică în cazul în care PQ este așezat pe dreapta care unește mijloacele laturilor AB și AC, de fapt se poate considera funcția de gradul doi:

$$\text{aria } \triangle APQ = \sigma[x] = \frac{x(a-x)}{a^2} = -\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{a}x, \text{ cu}$$

$$x_{max} = \frac{a}{2} \text{ și } \sigma_{max} = \frac{1}{4}.$$

86. i) Notăm cu O centrul cercului, cu $\{I\} = (AB) \cap \cap (OP)$ și cu H intersecția perpendicularei din A pe BP cu OP. Deoarece OB și AH sînt perpendiculare pe BP rezultă AH paralelă cu OB, la fel $BH \parallel OA$ și cum avem $OA \equiv OB$, rezultă că $OAHB$ este un romb și prin urmare H este simetricul centrului O față de AB.

ii) Cînd H aparține cercului avem $OH = R$ și deci $OI = \frac{R}{2}$.

Din relația $OA^2 = OI \cdot OP$ deducem $OP = \frac{OA^2}{OI} = 2R$ și apoi $AP = R\sqrt{3}$.

iii) Locul geometric este un cerc concentric cu $\mathcal{C}(O, R)$ avînd raza $r = R\sqrt{2}$.

87. (Fig. II.87) În triunghiul BDE, F este ortocentru. $\triangle EBD \sim \triangle FAB$ deoarece au laturile respectiv perpendiculare, deci cum $\triangle EBD$ este isoscel rezultă că și $\triangle FAB$ este isoscel, deci $AF \equiv AB$. Cum A este punct fix și măsura segmentului AB este constantă înseamnă că punctul F descrie un cerc cu centrul în A și de rază AB. Cînd C descrie cercul, dreapta (AC) se rotește cu 180° în jurul punctului A, iar punctul F descrie semicercul de centru A și rază AB limitat de perpendiculara în A pe segmentul AB.

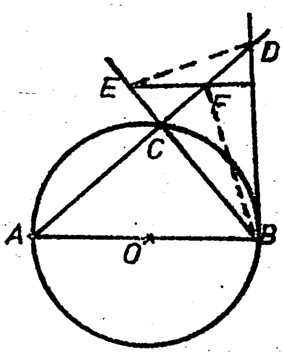


Fig. II.87

88. (Fig. II.88) i) Cum $\mu(\widehat{BMA}) = \frac{\pi}{2}$ rezultă că $\widehat{MOB}$ și $\widehat{MOA}$ sînt

suplementare, deci $OB \parallel O'A \Rightarrow \triangle OBP \sim \triangle O'AP \Rightarrow \frac{O'P}{OP} =$
$= \frac{R'}{R} \Rightarrow \frac{O'P}{OP - O'P} = \frac{R}{R - R'} \Rightarrow O'P = \frac{R + R'}{R - R'} \cdot R =$ constant
şi cum O' este un punct fix $\Rightarrow P$ este un punct fix.

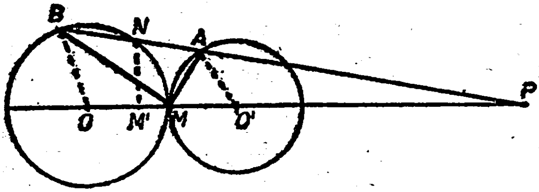


Fig. II.88

ii) Fie N şi M' mijloacele segmentelor AB şi OO'; $M'N$ este linie mijlocie în trapezul $ABOO' \Rightarrow M'N = \frac{R + R'}{2}$.
Cum $M'N$ este segment constant, rezultă că N se deplasează pe un cerc cu centrul în M' şi cu raza $\frac{R + R'}{2}$.

89. (Fig. II.89) i) $\triangle AOB \sim \triangle AO'B'$ deoarece au laturile proporţionale $\Rightarrow m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{B'OA'})$. Fie $\{M\} = (OB) \cap \cap (O'B')$, $m(\widehat{MOA}) = m(\widehat{MO'A}) \Rightarrow \triangle MOO'$ isoscel, deci conform definiţiei mediatoarei ca loc geometric, locul geometric al punctului M este mediatoarea segmentului OO'.

ii) Fie P centrul cercului circumscris triunghiului ABB', deci OP şi $O'P$ sînt mediatoarele segmentelor AB şi AB' şi cum $m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{B'AO'}) \Rightarrow m(\widehat{POA}) = m(\widehat{PO'A}) \Rightarrow \triangle POO'$ isoscel. Cum O şi O' sînt puncte fixe, atunci conform defini-

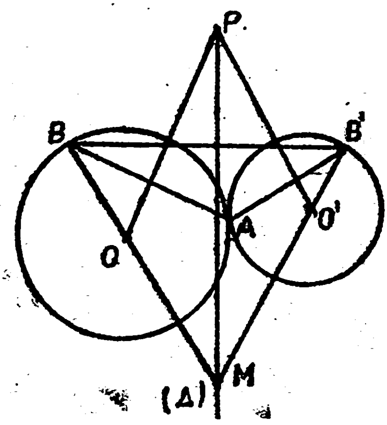


Fig. II.89

ției mediatoarei ca loc geometric, locul geometric al punctului P este mediatoarea segmentului OO'.

90. (Fig. II.90) i) Fie A aparținînd exteriorului cercului $\mathcal{C}(O, R)$. Patrulaterul $MPP'M'$ este un paralelogram, iar mijlocul I se află pe dreapta care trece prin punctele fixe O și A. Dar cum $OA \equiv AI$, rezultă că I este punct fix.

Cum I este punct fix și $IP' \equiv IP = R =$ const., atunci conform definiției cercului ca loc geometric, locul geometric al punctului P, respectiv P', este cercul cu centrul în I și de rază R.

ii) Aplicînd teorema medianei în triunghiul $MM'P$ respectiv în triunghiul $M'MP'$ avem:

$$M'A^2 = \frac{M'P^2 + MM'^2}{2} - \frac{MP^2}{4},$$

$$MA^2 = \frac{MP'^2 + MM'^2}{2} - \frac{M'P'^2}{4},$$ dar $MP = 2 \cdot MA$ și

$M'P' = 2 \cdot M'A$, $MP' \equiv M'P = 2 \cdot OA$. Efectuînd înlocuirile și însumînd obținem $MP^2 + M'P'^2 = 8(OA^2 + OM^2) =$ $=$ constant.

91. (Fig. II. 91) Fie O_1 centrul cercului al cărui loc geometric urmează să-l determinăm.

Triunghiul COA este isoscel deoarece $OA \equiv OC = R$, deci $m(\widehat{ACO}) = m(\widehat{CAO})$ și cum $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AMB}) =$

$$= \frac{m(\widehat{AB})}{2} = \text{constant} \Rightarrow m(\widehat{AOC}) = 180° - 2m(\widehat{ACO}) =$$

$=$ constant, deci punctul C este fix. $m(\widehat{MO_1I}) = m(\widehat{AMB}) =$ $=$ constant avînd laturile perpendiculare. Deci patrulaterul

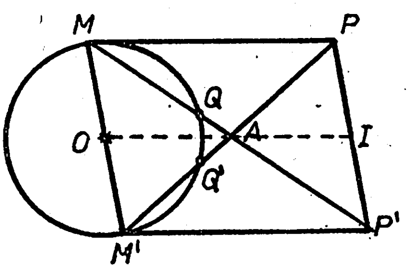


Fig. II.90

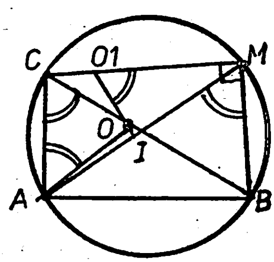


Fig. II.91

AOO_1C este inscriptibil și punctele A,O,C sînt fixe, deci locul geometric al punctului O_1 este cercul care trece prin punctele fixe A,O,C.

92. (Fig. II. 92) Fie L centrul cercului circumscris triunghiului $MO'N$, P proiecția lui O' pe OL și Q mijlocul segmentului MN. În $\triangle LMO$ și $\triangle LOO'$ aplicînd teorema lui Pitagora generalizată obținem:

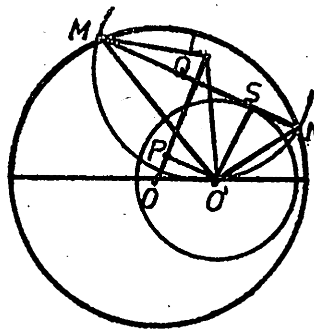


Fig. II.92

$$LM^2 = LO^2 + OM^2 - 2 \cdot LO \cdot OQ$$
$$LO'^2 = LO^2 + OO'^2 - 2 \cdot LO \cdot OP.$$

Cum $LM \equiv LO'$ notînd cu R raza OM și cu d segmentul OO' avem: $R^2 - 2 \cdot OL \cdot OQ = d^2 - 2 \cdot OL \cdot OP \Rightarrow$ $\Rightarrow R^2 - d^2 = 2 \cdot OL \cdot (OQ - OP) = 2 \cdot OL \cdot PQ$.

Fie S punctul de tangență la cercul de centru O', $PQ \equiv \equiv O'S$, iar relația precedentă va fi:

$OL = \dfrac{R^2 - d^2}{2O'S} = \left| \dfrac{R^2 - d^2}{2R'} \right|$, relație independentă de poziția cercului $\mathcal{C}(O', R')$ în raport cu $\mathcal{C}(O, R)$, deci punctul L se deplasează pe un cerc care are centrul în O și de rază $\left| \dfrac{R^2 - d^2}{2R'} \right|$.

93. i) Se vor analiza cazurile P punct interior, punct exterior și punct aparținînd circumferinței cercului dat. Cum $\triangle OLP$ este dreptunghic în L, iar punctele O și P sînt fixe, înseamnă că locul geometric al mijloacelor coardelor este porțiunea interioară cercului de centru O, porțiune ce aparține cercului de diametru OP.

ii) Patrulaterul $OALB$ este un pătrat de diagonală $OL = R\sqrt{2}$, deci locul geometric al punctului L este un cerc cu centrul în O și de rază OL.

94. Dacă $d > R$ locul geometric este un cerc concentric cu cel dat și cu raza $R + d$, dacă $d = R$ locul geometric este un cerc concentric cu cel dat și cu raza $R + d$ și centrul cercului, dacă $d < R$, locul geometric este format din două cercuri concentrice cu cel dat și de raze $R + d$ și $R - d$.

ii) Punctele se află la intersecția locului gemetric determinat mai sus, cu bisectoarele unghiurilor formate cu dreapta paralelă cu cele două drepte date și situată la mijlocul distanței dintre ele, dacă sînt paralele.

95. i) Patrulaterul $AIDG$ fiind înscris $m(\widehat{GDI}) = m(\widehat{IAB}) = m(\widehat{IDC})$, deci DB este bisectoarea unghiului CDG. Din cele două cercuri $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$, $\widehat{DIF}$ suplementar cu $\widehat{DCF}$ este drept, iar $m(\widehat{DIG}) = m(\widehat{DAG}) = 90°$. Deci dreptele (IF) și (IG) sînt perpendiculare pe dreapta (BD).

ii) Cele două cercuri sînt ortogonale în punctul I, deci și în punctul D. Dar centrele cercurilor, O_1 și O_2 sînt și centrele dreptunghiurilor $CDEF$, $ADHG$ deci situate pe diagonalele DF și DG. Rezultă că DF este perpendiculară pe diametrul cercului $\mathcal{C}_2$ în D și analog pentru DG.

În triunghiul BDG, $DA \perp BG$, $GI \perp BD$ și deoarece înălțimile unui triunghi sînt concurente, atunci și $BL \perp DG$.

iii) Fie P intersecția dreptelor (GM) și (CN). Cum $m(\widehat{IMP}) = m(\widehat{GDI}) =$ constant, $m(\widehat{INP}) = m(\widehat{IDG}) =$ constant, deci și $m(\widehat{MPN})$ este constant. Rezultă că P descrie un cerc care trece prin punctele C și G.

iv) $\widehat{O_1DO_2}$ este drept. Deci patrulaterul $GBFD$ este inscriptibil, cercul avînd centrul în mijlocul segmentului GF. De asemenea $\widehat{O_1IO_2}$ este drept, deci și patrulaterul IO_1DO_2 este inscriptibil cu centrul în mijlocul segmentului O_1O_2. Dar $GF \perp DI$, $O_1O_2 \perp DI$ (coarda comună cercurilor, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$) deci $O_1O_2 \parallel GF$. Deci mijloacele segmentelor O_1O_2, FG sînt situate pe mediana vîrfului D.

96. i) Cum $AM \equiv BQ$, $AP \equiv NB$ atunci $MNPQ$ este un paralelogram; deoarece are diagonalele perpendiculare, acest paralelogram este un romb; atunci $MN \equiv MP = MA + NB$.

ii) Diagonalele rombului sînt și bisectoarele unghiurilor; am luat $ML \equiv AM$, deci triunghiul AML este isoscel, adică $AL \perp MI$. Deoarece $MN = AM + NB$ avem și $NL \equiv NB$, deci și $BL \perp IN$. Cum $\widehat{MIN}$ este drept, rezultă că și unghiul ALB este drept.

iii) Triunghiul ALB fiind dreptunghic, mijlocul I al ipotenuzei este centrul cercului circumscris triunghiului (ALB), iar unghiul MLI, simetric cu unghiul MAI este drept. Deci dreapta (MN), perpendiculară pe raza IL, este tangentă cercului de diametru AB.

iv) Deoarece punctul L descrie cercul de diametru AB, punctul I descrie un cerc concentric, de rază dublă.

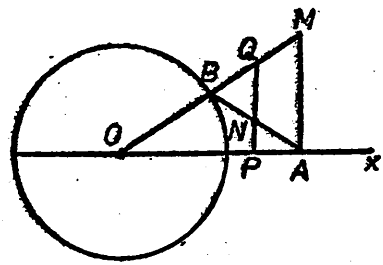


Fig. II.97

97. i) $AM = 2\sqrt{R^2 - u^2}$;

ii) $\frac{PQ}{PN} = \frac{2R - b}{b}$;

iii) (Fig. II.97) Avînd $AB \equiv BO = R$, triunghiul ABO este isoscel şi deci $\widehat{BOA} \equiv \widehat{BAO}$. Complementele acestor unghiuri $\widehat{OMA}$, respectiv $\widehat{BAM}$ sînt de asemenea congruente, deci triunghiul ABM este isoscel. Cum $MB \equiv BA$ şi $MO = AB + BO = 2R$, atunci locul geometric al punctului M este cercul cu centrul în O şi rază $2R$.

Triunghiul QBN este isoscel, fiind asemenea cu triunghiul BMA; deci $QB \equiv BN = R - b$ şi prin urmare $QO = QB + BO = R - b + R = 2R - b$.

Deci locul geometric al punctului Q este cercul cu centrul O şi rază $2R - b$.

iv) Deoarece avem $\frac{PQ}{PN} = \frac{2R - b}{b} =$ constant, iar Q descrie cercul cu centrul O, atunci N descrie o elipsă cu centrul O, axa mare egală cu diametrul cercului O descris de Q şi axa mică $2b$. Aceasta este consecinţă a teoremei cercului principal, teoremă care se enunţă: elipsa este proiecţia cercului său principal, cerc de diametru congruent cu axa mare a elipsei, aşezat într-un plan care face cu planul elipsei unghiul α, dat de relaţia: $\cos \alpha = \frac{b}{a}$ (a fiind măsura semiaxei mari, iar b măsura semiaxei mici).

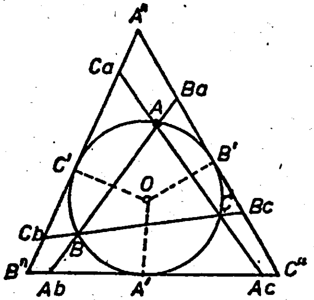


Fig. II.98

98. (Fig. II.98) i) Punctul A' se află la intersecția dreptei duse prin O paralelă cu bisectoarea unghiului A, cu arcul BC.

ii) $m(\hat{A}') = 45° + \dfrac{m(\hat{A})}{4}$; $m(\hat{B}') = 45° + \dfrac{m(\hat{B})}{4}$; $m(\hat{C}') = 45° + \dfrac{m(\hat{C})}{4}$.

iii) $m(\hat{A}'') = 90° - \dfrac{m(\hat{A})}{2}$, $m(\hat{B}'') = 90° - \dfrac{m(\hat{B})}{2}$; $m(\hat{C}'') = 90° - \dfrac{m(\hat{C})}{2}$.

iv) Locul geometric al punctului A'' este un arc de cerc situat pe un cerc concentric cu cercul (O).

99. i) $m(\widehat{C_1B_1A_1}) = 90° - m(\widehat{EAB_1}) = 60°$, $m(\widehat{B_1A_1C_1}) = m(\widehat{BAC}) = 60°$ (cu laturi perpendiculare) deci triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral. Atunci $m(\widehat{C_1TS}) = 90° - m(\widehat{TB_1Q}) = 30°$, $m(\widehat{C_1ST}) = m(\widehat{A_1SQ}) = 90° - m(\widehat{C_1A_1B_1}) = 30°$. Deci triunghiul SC_1T este isoscel.

ii) Dreapta (C_1M) este perpendiculară pe (ST), triunghiul TC_1S fiind isoscel, deci paralelă cu A_1B_1. Paralela din C_1 la dreapta (ST) trece prin mijlocul D_1 al segmentului A_1B_1. Atunci $A_1Q + C_1M = A_1D_1 = \dfrac{1}{2}A_1B_1$.

iii) Deoarece $m(\widehat{C_1TS}) = 30°$, dreapta (TS) este paralelă cu ea însăși, deci mediana C_1M are o direcție fixă, perpendiculară pe AB.

100. (Fig. II. 100) i) Fie $m(\widehat{AMB}) = 2\alpha$; din triunghiul isoscel NMB avem $m(\widehat{ANB}) = \alpha$, deci descrie un arc de cerc $\mathscr{C}_1$, corespunzător coardei AB, capabil de unghiul α. Cînd M descrie arcul suplementar al cercului dat, α se înlocuiește cu $90° - \alpha$; obținem un arc $\mathscr{C}_2$ din care aceeași coardă este văzută sub unghiul $90° - \alpha$. Centrele cercurilor $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ sînt mijloacele I şi J ale arcului AB; atunci unghiul IAJ este drept. Cele două arce de cerc $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ sînt deci ortogonale în punctele A şi B.

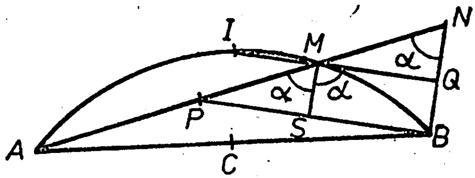


Fig. II.100

ii) Dreapta (MQ) este bisectoarea exterioară a unghiului AMB deci trece prin mijlocul I al arcului AB. Deoarece unghiul IQB este drept, Q descrie un arc $\mathcal{C}_3$ descris pe IB ca diametru exterior cercului dat. Cînd punctul M descrie arcul suplementar, dreapta (MQ) trece prin punctul J, diametral opus punctului I, deci punctul Q descrie un arc $\mathcal{C}_4$, descrie pe BJ ca diametru exterior cercului. Diametrele BI, BJ fiind perpendiculare atunci arcele $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ sînt ortogonale în B.

iii) Arcele $\mathcal{C}_1$,$\mathcal{C}_3$ au centrele pe coarda BI, deci sînt tangente în B; analog, arcele $\mathcal{C}_2$,$\mathcal{C}_4$, au centrele pe BJ.

iv) Din triunghiul isoscel MPB, $m(\widehat{APB}) = 90° + \alpha$, deci P descrie un arc de cerc $\mathcal{C}_2'$ de coardă AB, capabil de unghiul $90° + \alpha$, suplementar unghiului sub care aceeaşi coardă este văzută din punctul cercului $\mathcal{C}_2$. Arcele $\mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}_2'$ se completează astfel. Cînd M descrie arcul suplementar, înlocuind α cu $90° - \alpha$, $m(\widehat{APB}) = 180° - \alpha$, suplementar cu $m(\widehat{ANB}) = \alpha$; punctele P şi N descriu deci arce complementare ale aceluiaşi cerc, care trece prin punctele A şi B.

v) Dreapta (MS), perpendiculară pe dreapta (MI), trece prin punctul J, deci S descrie un semicerc de diametru BJ care completează pe $\mathcal{C}_4$. Analog pentru punctul M situat pe arcul suplementar.

vi) Dacă punctul C este mijlocul coardei AB avem

$$AI^2 = 2R \cdot IC, \quad AJ^2 = 2R \cdot JC$$

deci cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ au razele

$$R_1^2 = 2R(R - \sqrt{R^2 - d^2}), \quad R_2^2 = 2R(R + \sqrt{R^2 - d^2}),$$

iar cercurile $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ au ca raze, jumătate din razele R_1, R_2.

Observaţie: Notînd $\sin 2\alpha = \frac{d}{R}$ avem $R_1 = \frac{d}{\sin \alpha}$, $R_2 = \frac{d}{\cos \alpha}$.

101. (Fig. II. 101) i) Din congruenţa unghiurilor $\widehat{CEB} \equiv \widehat{CDB} \equiv \widehat{BAD}$ rezultă că CE este tangentă la cercul (ABE) în punctul E.

ii) Avem în cercul (O) relaţia $CD^2 = CB \cdot CA$, iar în cercul (ABE) relaţia $CE^2 = CB \cdot CA$, deci $CE \equiv CD$.

iii) Din relaţia $EC \equiv DC$ rezultă că locul geometric al punctului E este un cerc cu centrul în C şi raza DC.

iv) Patrulaterul $CEBD$ fiind inscriptibil, avem $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{BDA}) = m\left(\frac{\widehat{ALB}}{2}\right)$. Dar cum şi $m(\widehat{MAC}) = \frac{180° - m(\widehat{ALB})}{2}$ rezultă $m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{MAC}) = 90°$ deci $AM \perp EC$. Deducem că locul geometric al punctului M este cercul de diametru OC, pentru că din punctul M, segmentului fix OC se vede sub un unghi drept.

102. (Fig. II. 102) i) Se calculează măsurile unghiurilor E, F, G, H în funcţie de unghiurile paralelogramului $ABCD$, şi se găseşte $\hat{E} \equiv \hat{F} \equiv \hat{G} \equiv \hat{H} = 90°$.

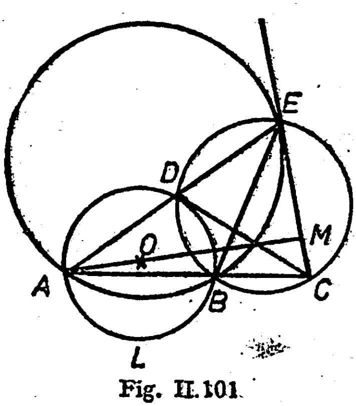


Fig. II.101

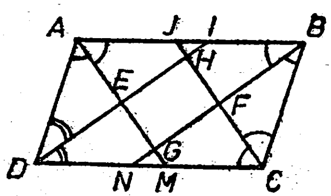


Fig. II.102

ii) Notăm cu M şi N punctele de intersecţie ale bisectoarelor AEG şi BFG cu latura DC. Aceste puncte sînt fixe deoarece $DM \equiv DA = b =$ constant şi $CN \equiv CB = b =$ $=$ constant. Unghiurile DEM, NFC, NGM, DHC fiind drepte, rezultă că locurile geometrice ale punctelor E, F, G, H sînt cercuri de diametru DM, NC, NM, DC. Din congruentele $MI \equiv DA = b$ şi $NJ \equiv CB = b$ rezultă că punctele I şi J descriu cercuri de rază b şi cu centrele respectiv în punctele M şi N.

iii) Se calculează $EG \equiv GF = \dfrac{a-b}{2}\sqrt{2}$. Aria pătratului este deci $\dfrac{(a-b)^2}{2}$.

103. i) Patrulaterul $ADEM$ cu două unghiuri drepte în D şi M este inscriptibil, deci $m(\widehat{EAM}) = m(\widehat{EDM}) =$ $= m(\widehat{MDA}) = m(\widehat{AEM})$ adică triunghiul AME este isoscel cu vîrful în M.

ii) Coarda AM subîntinde unghiuri congruente de măsură $45°$ în ambele cercuri, deci cercurile sînt egale.

iii) Fie I, J centrele cercurilor (DAM), (BAM). Avem $m(\widehat{MAI}) = 90° - \dfrac{1}{2} m(\widehat{AIM}) = 90° - m(\widehat{ADM}) = 45°$.

Analog $m(\widehat{MAJ}) = 45°$.

iv) Dreapta (BN) este paralelă cu dreapta (AI), deci $m(\widehat{ANB}) = 45°$; punctul N descrie arcul de cerc din care coarda AB este văzută sub unghiul de $45°$.

104. i) Punctele B' şi C' sînt mijloacele arcelor AC şi AB deci $m(\widehat{B'AC'}) = \dfrac{1}{2} \cdot m(\widehat{BAC}) =$ constant; coarda $B'C'$ are o mărime constantă, perpendiculara OP pe ea este constantă, deci punctul P descrie un arc de cerc concentric.

Fie punctul D mijlocul arcului BAC. Cînd A tinde către B, $B'C'$ tinde către BD şi cînd A tinde către C, $B'C'$ tinde către DC. Deci arcul de cerc loc geometric este cuprins între mijloacele coardelor BD, CD. Analog cînd punctul A descrie arcul suplementar al cercului.

ii) Dreapta $(B'C')$ intersectează laturile AB, AC în punctele M și N. Unghiul AMN este congruent cu ANM avînd măsuri egale, deci triunghiul AMN este isoscel și perpendiculara pe $B'C'$ este bisectoarea unghiului BAC. Ea trece deci prin mijlocul arcului suplementar. Analog, cînd punctul A descrie arcul suplementar, perpendiculara trece prin D.

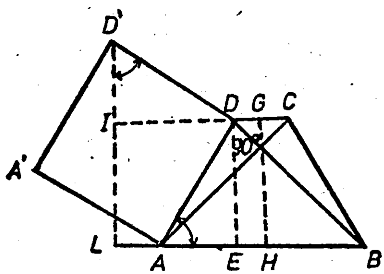


Fig. II.105

105. (Fig. II. 105) i) Pe o dreaptă se iau punctele M, N, P astfel ca $MN = a$; $NP = b$. Se construiesc cercurile cu centrele în punctele M și P și de raze a și b. Se duce diametrul AMB perpendicular pe MP. Dreptele (AN) și (BN) intersectează cercul cu centrul P în punctele C și D. Trapezul $ABCD$ este cel căutat.

ii) Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice DNC; ANB; INA și CNB. Obținem:

$$AB^2 + DC^2 = AD^2 + CB^2.$$

iii) Fie I și L proiecțiile punctului D' respectiv pe prelungirile bazei mici și a bazei mari, iar E proiecția punctului D pe baza mare. Triunghiurile dreptunghice $D'ID$ și DAE sînt congruente avînd ipotenuzele congruente $(D'D \equiv DA)$ și $\widehat{D'DI} \equiv \widehat{ADE}$. Rezultă $D'I \equiv AE = \dfrac{2a - 2b}{2} = a - b$.

Triunghiurile dreptunghice DFC și AFB fiind isoscele, distanțele FG și FH ale punctului F la baze sînt congruente cu jumătățile ipotenuzelor corespunzătoare, astfel că avem

$$IL \equiv GH \equiv GF + FH = \frac{DC}{2} + \frac{AB}{2} = a + b.$$

Rezultă $D'L = D'I + IL = a - b + a + b = 2a =$ $=$ const., ceea ce demonstrează că D' descrie o paralelă la baza mare, dusă la o distanță egală cu lungimea bazei mari.

106. i) Notăm cu K mijlocul segmentului de dreaptă (PP'), cu L centrul cercului circumscris triunghiului BPP', cu L' centrul cercului înscris în același triunghi, cu M, M' mijloacele arcelor AB din cercurile O și O'.

Punctul I avînd aceeași putere față de cercurile O și O', rezultă:

$$IP \cdot IQ = IP' \cdot IQ'.$$

Triunghiul IPP' este isoscel, pentru că dreapta (IK) este mediană și înălțime, deci $IP \equiv IP'$. Relația precedentă se reduce la $IQ \equiv IQ'$.

ii) Relațiile $IP \equiv IP'$, $IQ \equiv IQ' \Rightarrow \frac{IP}{IQ} = \frac{IP'}{IQ'}$ deci dreapta (QQ') este paralelă cu dreapta (PP').

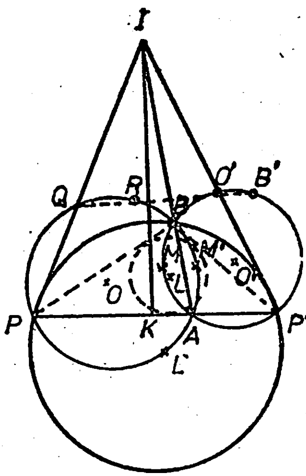


Fig. II.106

iii) Triunghiul IPP' fiind isoscel și (QQ') paralelă cu (PP'), urmează că patrulaterul $PP'Q'Q$ este un trapez isoscel, deci

$$PQ \equiv P'Q'.$$

Din patrulaterele inscriptibile $APQR$, $AQ'R'P'$, care sînt trapeze isoscele rezultă că

$$PQ \equiv AR \equiv P'Q' \equiv AR'.$$

Din faptul că patrulaterele $APQR'$, $AP'Q'R$ sînt paralelograme avem

$$AP' \equiv OR', \ Q'R' \equiv AP'.$$

iv) Notăm $\mathrm{m}(\widehat{AMB}) = a$, $\mathrm{m}(\widehat{AM'B}) = a'$. Centrul L al cercului circumscris triunghiului BPP' se află la intersecția perpendicularelor duse din O și O' pe BP și BP', deci $\widehat{OLO'} \equiv \widehat{PBP'}$. Rezultă $\mathrm{m}(\widehat{OLO'}) = \frac{a + a'}{2} =$ constant.

Locul geometric al punctului L este arcul de cerc trecînd prin O și O', capabil de unghiul $\frac{a + a'}{2}$.

v) Punctele M și M' rămînînd fixe, avem

$$\mathrm{m}(\widehat{ML'M'}) = (\widehat{PL'P'}) = 180° - \frac{a + a'}{4} = \text{const.}$$

Deci, locul geometric al punctului L' este arcul de cerc care trece prin punctele M şi M' şi este capabil de unghiul $180° - \frac{a + a'}{4}$.

107. (Fig. II.107) Fie punctul $\{C\} = (D) \cap (AB)$ şi C' intersecţia dreptei cu cercul, $\{F\} = (MO) \cap (AD)$, D punctul de intersecţie dintre AB şi perpendiculara coborîtă din L pe coarda AB, E mijlocul segmentului AB şi punctul E' mijlocul segmentului $C'L$. Cum patrulaterul $CDLC'$ este un dreptunghi atunci cum $C'E' \equiv E'L \Rightarrow CE \equiv ED$, deci $\Delta MCE \equiv \Delta EDM' \Rightarrow ME \equiv EM'$, deci punctul M' este simetricul punctului M faţă de punctul fix E, mijlocul segmentului fix AB şi cum M descrie o dreaptă, atunci şi M' descrie o dreaptă (D') perpendiculară pe coarda AB şi simetrică dreptei (D) faţă de mijlocul E al segmentului AB. Dar cum punctul L aparţine dreptei (D'), locul geometric al punctului L este dreapta (D') mai puţin punctul E.

108. (Fig. II.108) Fie O şi O_1 centrele celor două cercuri, punctele Q şi Q_1 proiecţiile centrelor pe dreapta (MN), M fiind situat pe cercul de centru O şi N pe cercul de centru O_1. Dar $QQ_1 \equiv \frac{1}{2} MN \equiv PM$, deci $QA \equiv PQ_1$ şi segmentele QQ' şi AP au acelaşi mijloc R (deoarece dacă considerăm trei puncte coliniare A, B, C şi mijloacele D, E, F ale segmentelor AB, BC, AC, atunci segmentele DE şi BF au acelaşi mijloc).

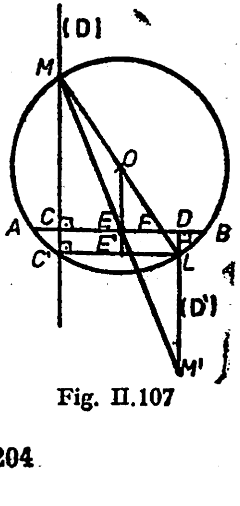


Fig. II.107

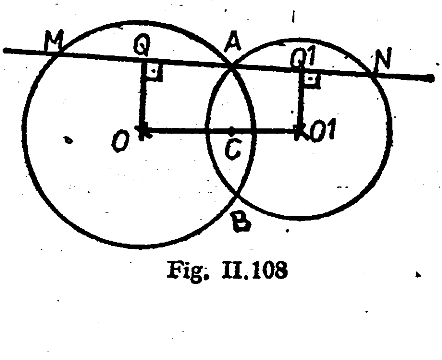


Fig. II.108

Fie C mijlocul segmentului OO_1, atunci segmentul CR este linia mijlocie în trapezul OQQ_1O_1, deci $CR \perp AP$ şi $CP \equiv CA$.

Cum CA este un segment constant ca măsură şi C este un punct fix, atunci locul geometric al punctului P este cercul cu centrul în C şi de rază AC.

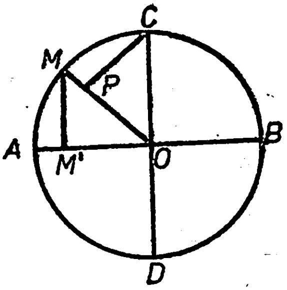


Fig. II.109

109. (Fig. II.109) Fie CD diametrul perpendicular pe AB, M' proiecţia punctului M pe AB. Dacă M aparţine arcului ACB mai puţin punctul C, $\triangle OMM' \equiv \triangle COP$ (conform cazului L.U.L.) $\Rightarrow m(\widehat{OPC}) = 90°$, deci punctul P descrie un cerc de diametru OC. Analog, dacă M aparţine arcului ADB mai puţin punctul D, P descrie un cerc de diametru OD. Deci locul geometric al punctului P este format din reuniunea celor două cercuri.

110. Vom considera cazurile:

i) P, Q aparţin arcului mare AB.

ii) punctele P, Q aparţin arcului mic AB, dacă $PQ < AB$.

iii) punctul P aparţine arcului mare AB şi Q arcului mic AB. Fie $\alpha = m(\widehat{AB})$ şi $\beta = m(\widehat{PQ})$.

Pentru i) $m(\hat{N}) = \frac{\beta - \alpha}{2}$ = constant şi cum unghiul N se sprijină pe două puncte fixe A, B, locul geometric este un arc de cerc.

$m(\hat{M}) = \frac{\alpha + \beta}{2}$ = constant şi cum unghiul M se sprijină pe două puncte fixe A, B, locul geometric este un arc de cerc. Analog pentru ii) şi iii).

În concluzie se obţin arce capabile de $\alpha° + \beta°$, $|\alpha° - \beta°|$, $180° - (\alpha° + \beta°)$, $180° - |\alpha° - \beta°|$, care arce reunite formează două cercuri care trec prin A şi B.

111. (Fig. II.111) Patrulaterul $AMPN$ este inscriptibil deci $m(\widehat{ANM}) = m(\widehat{APM})$. Patrulaterul $MPCD$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{MPC}) = m(\widehat{MDB})$.

Cum $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{APC}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{APM}) +$ $+ (\widehat{MPC}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{AND}) + m(\widehat{MDB}) = 180°$ (suma unghiurilor în $\triangle BDN$), aturci patrulaterul $ABCP$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{APC}) = 180° - m(\hat{B})$ = constant și cum

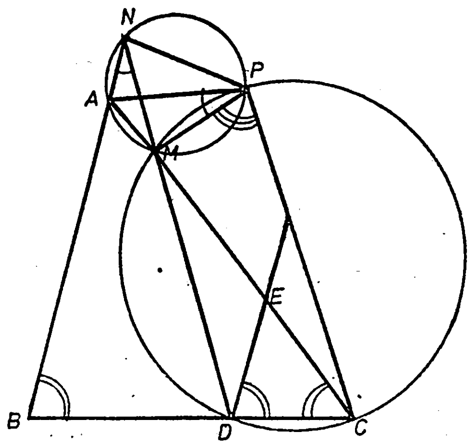


Fig. II.111

punctele A și C sînt fixe, locul geometric al punctului P este un arc de cerc și anume arcul mic descris de $\widehat{AC}$ al cercului circumscris triunghiului ABC.

Reciproc: pentru a arăta că orice punct P al acestui arc aparține locului geometric se va demonstra că există un punct $M \in AE$ astfel ca patrulaterul $DCPM$ să fie inscriptibil.

Fie $\{N\} = (DM) \cap (AB)$ și se demonstrează că patrulaterul $AMPN$ este inscriptibil.

112. (Fig. II.112) i) Fie punctul A exterior cercului. Triunghiul OPN este isoscel (OQ este bisectoare deci este și înălțime) $\Rightarrow$ triunghiul PMN isoscel, deci $MN = x$, $AM =$ $= x$ implică $\triangle NMA$ isoscel și cum $MN \equiv MA = x$ atunci conform definiției mediatoarei ca loc geometric, M aparține mediatoarei segmentului NA.

ii) Fie punctul A aparținînd circumferinței. Triunghiul OPA este isoscel și triunghiul APN este isoscel, deci

$m(\widehat{OMA}) + m(\widehat{MOA}) = m(\widehat{PMO}) + m(\widehat{POM}) \Rightarrow \widehat{OAM} \equiv \widehat{OPM} \Rightarrow \widehat{OAM} \equiv \widehat{OPM} = 90° \Rightarrow$ triunghiul OAM dreptunghic în A şi cum punctele O, A sînt fixe atunci locul geometric al punctului M este tangenta în A la cercul dat.

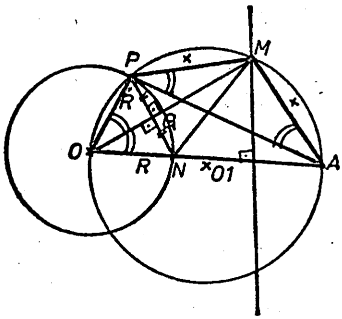


Fig. II.112 i

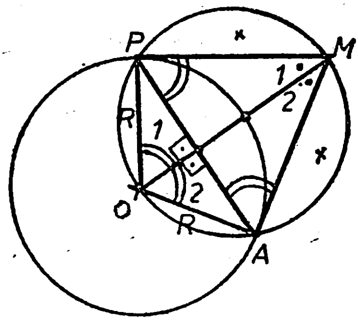


Fig. II.112 ii

iii) Fie punctul A situat în interiorul cercului. Triunghiul OPN este isoscel $\Rightarrow OT$ este şi mediană şi înălţime deci triunghiul PMN este isoscel $\Rightarrow PM \equiv MA \equiv MN = x$. Cum $AM \equiv MN = x$ conform definiţiei mediatoarei ca loc geometric, M aparţine mediatoarei segmentului AN.

113. (Fig. II.113). Se construieşte punctul A' simetricul punctului A faţă de punctul D (mijlocul laturii BC) obţinînd para-

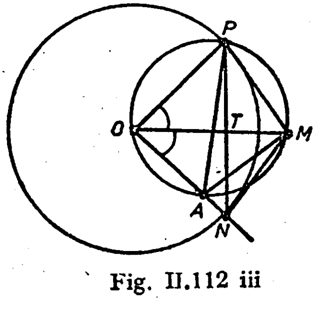


Fig. II.112 iii

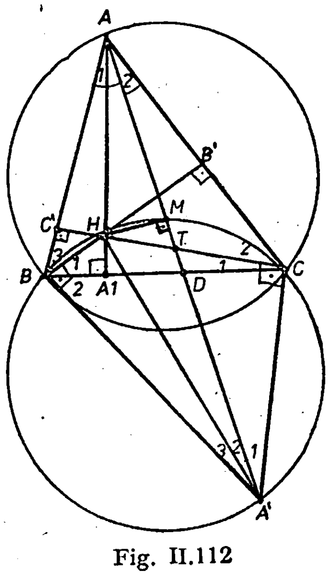


Fig. II.112

lelcgramul $ABA'C$, deci $\triangle ABC \equiv \triangle A'BC$ şi punctul A' va descrie un cerc congruent cu cel dat.

În triunghiul AHA': $m(\widehat{CHA'}) + m(\widehat{AA'C}) + m(\widehat{HA'A}) =$

$$= m(\widehat{ATH}) + m(\widehat{AA'C}) = \frac{m(\widehat{AC'}) + m(\widehat{MC})}{2} + m(\hat{A}_1) =$$

$$= \frac{m(\widehat{AC'}) + m(\widehat{MC}) + m(\widehat{BM})}{2} = \frac{m(\widehat{AC'}) + m(\widehat{BC})}{2} =$$

$= m(\widehat{HCA}) + m(\hat{A}) = m(\widehat{AC'C}) = 90°$ (în $\triangle ACC'$), deci $m(\widehat{HCA'}) = 90°$ şi cum $m(\widehat{HMA'}) = 90°$, atunci M aparţine cercului ce trece prin punctele H, B, A', C, cerc de diametru HA'. (unde $\{T\} = (AD) \cap (CC')$).

Analog: $m(\widehat{HBA'}) = m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{HBC}) = m(\widehat{BB'C}) =$ $= 90°$ (în triunghiul $BB'C$), deci şi punctul B aparţine cercului de diametru HA'. Locul geometric al punctului M este cercul de diametru $A'H$ cerc care trece şi prin punctele A', C, H, B.

114. i) Cerc simetric cu cercul dat, din care lipsesc punctele B şi C.

ii) Fie I centrul cercului înscris, atunci $m(\widehat{BIC}) =$ $= \frac{1}{2} \cdot m(\widehat{BAC}) + 90°$, deci locul geometric al punctului I se compune din două arce de cerc deschise, cu capetele B şi C.

iii) Fie M mijlocul segmentului BC şi $D \in (OM), OD =$ $= 2 \cdot DM$. Atunci $DG = \frac{1}{3} OA$, deci locul geometric al punctului G este un cerc cu centrul în D şi de rază $\frac{1}{3}$ din raza cercului dat.

iv) Fie I_a centrul cercului exînscris triunghiului ABC şi tangent laturii BC, atunci în triunghiul $\widehat{BI_aC}$ avem $m(\widehat{BI_aC}) =$

$$= 180° - m(\widehat{BI_aC}) - m(\widehat{BCI_a}) = 180° - \frac{180° - m(\widehat{ABC})}{2} -$$

$$= \frac{180° - m(\widehat{ACB})}{2} = \frac{m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB})}{2} - \frac{180° - m(\hat{A})}{2} =$$

$= 90° - \frac{m(\hat{A})}{2} =$ constant. Locul geometric al punctului I_a este format din reuniunea a două arce de cerc ce subîntind coarda BC.

v) Construim $MN \parallel BC$, paralelă dusă prin D.

Fie $AE = x$, $EC = y$, $AB \equiv AC = a$, $BM \equiv BD \equiv DC = m \cdot BE$ bisectoare în $\triangle BAC \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{a}{2m} \Rightarrow x = \frac{a^2}{a+2m}$ (conform teoremei bisectoare).

BI este bisectoare în $\triangle BAD \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{a}{m}$. Cum AI este bisectoare în $\triangle ABE \Rightarrow \frac{BI}{IE} = \frac{a}{x}$. Din asemănarea triunghiurilor AIE și $ADN \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{IE}{DN} \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{IE}{DN - IE} = \frac{IE}{\frac{BE}{2} - IE} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{BE}{IE} - 1}$ (deoarece DN este linie mijlocie în $\triangle BCE$) $\Rightarrow \frac{BE}{IE} = 2 \cdot \frac{a+m}{a}$. (1)

Din asemănarea triunghiurilor AIB și $AMD \Rightarrow \frac{BI}{MD} = \frac{a}{a+m}$ (2). Înmulțind (1) cu (2) $\Rightarrow \frac{BI}{IE} \cdot \frac{BE}{MD} = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{MD}{BE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BI}{IE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{x} = \frac{a+2m}{2a}.$$

Din asemănarea triunghiurilor FMD și FBE avem

$$\frac{FM}{MB} = \frac{MD}{BE - MD} = \frac{1}{\frac{BE}{MD} - 1} \Rightarrow FM = \frac{m(a+2m)}{a-2m}.$$

Cum AD este bisectoare în $\triangle AFE$, conform teoremei bisectoarei avem

$$\frac{DE}{DF}=\frac{AE}{AF}=\frac{x}{a+m+FM}=$$

$$=\frac{a^2}{(a+2m)\left(a+m+\frac{m(a+2m)}{a-2m}\right)}=\frac{a-2m}{a+2m}=\frac{AB-BC}{AB+BC}.$$

115. i) Tangentele dintr-un punct exterior la același cerc fiind egale, avem $QM \equiv QP \equiv QN$. Rezultă că M, P, N sînt pe un cerc de centru Q, deci unghiul MPN este drept.

ii) Cum $\widehat{MAP} \equiv \widehat{MPQ}$, $\widehat{NBP} \equiv \widehat{NPQ}$, atunci $m(\widehat{MAP}) + m(\widehat{NBP}) = 90°$ sau $m(\widehat{AIB}) = 90°$. Deci punctul I descrie cercul de diametru AB.

iii) Figura $IMPN$ fiind dreptunghi, $IP \equiv MN = l$. Problema revine la a determina pe arcul de cerc de diametru AB, punctul I. Purtăm pe perpendiculara în A pe AB un segment $AC = l$. Paralela prin C la AB intersectează semicercul în I și I'. Fiind cunoscut I este determinat P, deci toată figura. Cele două soluții sînt evident, simetrice față de mediatoarea lui AB. Maximul lui l este $\frac{a}{2}$.

116. i) Dreapta (MN) unind intersecțiile laturilor neparalele și ale diagonalelor trapezului $ABQP$ trece prin mijloacele laturilor. Deci (MN) trece prin mijlocul O al segmentului AB.

ii) Fie h și k distanțele punctelor M și N la AB. Avem

$$\frac{h-d}{h}=\frac{l}{a};\quad \frac{d-h}{h}=\frac{l}{a}\quad \text{deci } h=\frac{ad}{a-l};\quad k=\frac{ad}{a+l}$$

rezultă că punctele M, N descriu drepte paralele cu (AB).

iii) Cînd N este centrul cercului înscris triunghiului AMB avem

$$\frac{PA}{PM}=\frac{AB}{MB},\quad \frac{d}{h-d}=\frac{2a}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Înlocuind pe h și k rezultă că l este o rădăcină a ecuației:

$$3l^2+2\,al-a^2-d^2=0.$$

117. Fie $AL \geqslant LB$ şi punctul C aparţinînd segmentului AL, L fiind între punctele A şi C astfel încît $LC \equiv LB$. Atunci $m(\widehat{LBC}) = m(\widehat{LCB})$ şi $m(\widehat{ALB}) = m(\widehat{LCB}) + m(\widehat{LBC})$ deoarece unghiul ALB este unghi exterior triunghiului LBC, deci $m(\widehat{LCB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ALB})$.

Fie D mijlocul segmentului AB. Atunci $m(\widehat{AMD}) = m(\widehat{ACB})$, deoarece punctul M este mijlocul segmentului AC. Rezultă că $m(\widehat{AMD}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ALB})$.

Deci pentru punctul K situat de aceeaşi partea segmentului AB avem $m(\widehat{ALB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AEB}) \Rightarrow m(\widehat{AMD}) = \text{const.}$ ceea ce înseamnă că punctul M aparţine arcului de cerc în care segmentul AD subîntinde un arc a cărui măsură este $\frac{1}{2}$ $(\widehat{AEB})$. *Reciproc*: orice punct M situat pe arcul cercului menţionat, arc avînd extremităţile în punctele P şi D, unde punctul P este mijlocul arcului ALB, determină un punct L aparţinînd cercului astfel încît punctul M este mijlocul liniei poligonale ALB. Dacă $AL \leqslant LB$, $K \in \overset{\frown}{APB}$ atunci locul geometric este arcul simetric celui obţinut faţă de segmentul PD. Analog se va analiza cazul în care punctul L aparţine semiplanului opus, determinat de AB.

118. (Fig. II.118) i) Fie $\{M\} = (AC) \cap (BD)$, $m(\widehat{AMB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} + \frac{m(\widehat{DC})}{2} = \text{const.}$, deci locul geometric este un arc de cerc de unde segmentul AB se vede sub un acelaşi unghi, constant.

ii) Dacă E, F, G, H sînt mijloacele segmentelor AB, BC, CD şi DA ale patrulaterului şi $\{N\} = (EG) \cap (FH)$, patrulaterul $EFGH$ este un paralelogram $\left(EF \overset{\parallel}{=} HG \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2} AC\right)$.

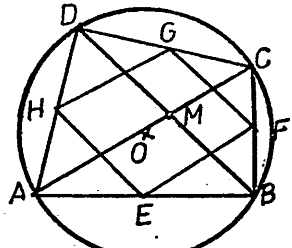


Fig. II.118

Dreptele (EG) şi (FH) sînt diagonalele paralelogramului care se înjumătăţesc în punctul N. Punctul G descrie un cerc cu centrul în punctul O (centrul cercului dat) şi cu raza constantă şi egală cu distanţa de la O la una din coardele CD. Punctul N este omoteticul lui G în raport cu centrul de omotetie E şi raportul $\frac{1}{2}$.

Deci N descrie cercul care are ca centru mijlocul segmentului EO, notat cu P, deci $PN' = \frac{1}{2} EO$. Dacă C coincide cu B, punctul D ocupă poziţia D' şi G_1 este mijlocul lui BD', dacă D coincide cu A, punctul C ocupă poziţia C' şi G_2 este mijlocul arcului $C'A$. Cînd G descrie arcul $\widehat{G_1GG_2}$, punctul N mijlocul lui EG descrie cercul omotetic în raport cu E.

119. (Fig. II.119). Fie cercul cu centrul în C şi rază R care se vede din punctele A şi B sub unghiurile 2α şi 2β. Atunci $AC = \frac{R}{\sin\alpha}$, $BC = \frac{R}{\sin\beta}$ şi $\frac{CA}{CB} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} =$ constant. Dacă D şi D' sînt punctele de pe dreapta (AB) care împart segmentul AB în raportul $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} =$ constant, atunci locul geometric al punctelor ale căror distanţe la două puncte fixe sînt într-un raport dat $\neq 1$, este un cerc cu centrul pe dreapta (AB) şi de diametru DD'.

120. (Fig. II.120). Fie punctul C centrul cercului care trece prin punctul A şi se vede din P sub un unghi 2α. Avem $CA = CT = CP \cdot \sin\alpha$, deci C aparţine locului geo-

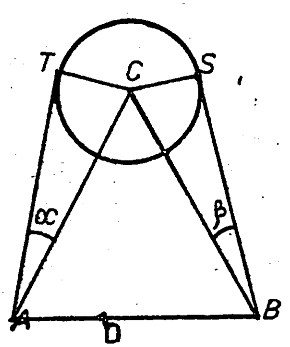


Fig. II.119

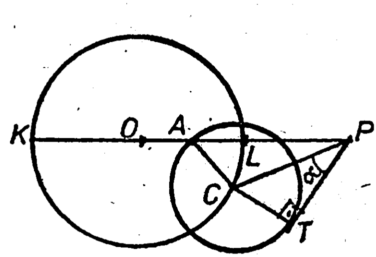


Fig. II.120

metric al punctelor al căror raport al distanțelor la două puncte fixe este constant. Dar acesta este un cerc cu centrul în O situat pe OP și care o intersectează în două puncte K, L conjugate armonic cu O și P în raportul sin α. Se construiesc atunci punctele K și L. Mijlocul segmentului KL este centrul O al cercului căutat.

121. (Fig. II.121) Fie cercul cu centrul în O și care este văzut din punctul A sub unghiul 2α și care intersectează dreapta, sub unghiul β. Notăm cu I proiecția punctului O pe (D), iar din triunghiurile OAT și OIM dreptunghice obținem relația: $\frac{OA}{OI} = \frac{R}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{R\cos\beta} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} =$ const. Deci locul geometric al punctului O este o conică avînd directoarea (D), focarul A și excentricitatea $e = \frac{OA}{OI}$. Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$ și $\beta = 0$, locul geometric este o parabolă, dar cum în rest raportul este supraunitar, locul geometric este o hiperbolă.

Reamintesc definiția unitară a conicelor: locul geometric al punctelor din plan astfel ca raportul distanțelor la un punct fix, numit focar și la o dreaptă fixă numită directoare să fie o constantă e, numită excentricitate, este: elipsă pentru $e < 1$, parabolă pentru $e = 1$, hiperbolă pentru $e > 1$.

122. (Fig. II.122). Notăm cu N cel de al doilea punct de intersecție al celor două cercuri. Coarda comună MN intersectează dreapta dată în P.

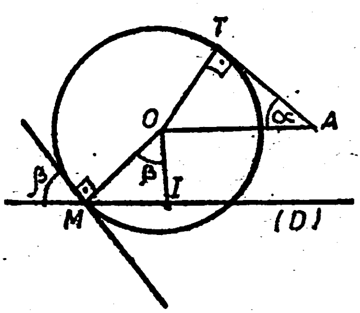


Fig. II.121

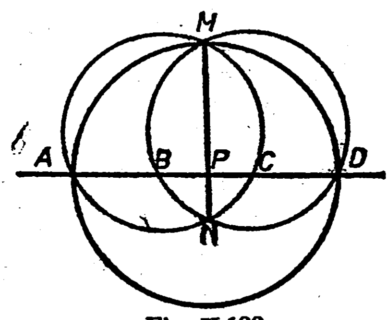


Fig. II.122

Punctul P are puteri egale față de cercurile circumscrise triunghiurilor MAC și MBD. Din relațiile

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD = PM \cdot PN,$$

și ținîndu-se seamă de congruența segmentelor din enunț se obține că P este mijlocului segmentului BC. Cum $PM \equiv PA \equiv PD$ rezultă că $PN \equiv PB \equiv PC$. Deci locul geometric al punctului N este cercul de diametru BC.

123. Puterea punctului A față de toate cercurile care trec prin B și C fiind $AB \cdot AC = \text{const}$, rezultă că locul geometric căutat este un cerc cu centrul în A și cu raza egală cu tangenta AM dusă din A.

124. (Fig. II.124). Se duce perpendiculara în O pe diametrul care intersectează cercul în D și fie M proiecția centrului O pe bisectoare. Se observă că: $m(\widehat{MBO}) = m(\widehat{MOB}) = m(\widehat{DOM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{OAB})$, deci $\triangle BOM \equiv \triangle DOM$ ca avînd un unghi congruent cuprins între două laturi congruente, de unde rezultă $m(\widehat{MOD}) = m(\widehat{ODM})$. Deci punctul M se găsește la egală distanță de punctele O și D; deci locul geometric al punctului M este o dreaptă perpendiculară (Δ) pe mijlocul razei OD.

125. (Fig. II.125). Fie F mijlocul laturii BC și D punctul variabil. Centrul de greutate G al triunghiului CDB este la intersecția medianelor, deci este situat pe mediana DF la $\frac{2}{3}$ de vîrful D. Paralela la OD dusă prin punctul G inter-

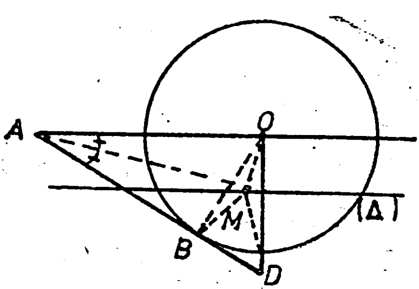


Fig. II.125

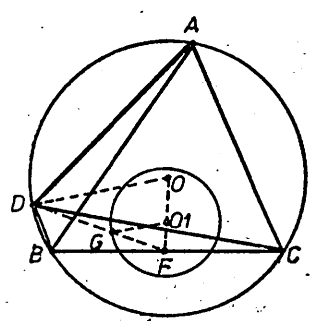


Fig. II.124

sectează OF în O_1, astfel ca $\frac{O_1O}{OF} = \frac{2}{3}$. Rezultă că O_1 este un punct fix. Deoarece $O_1G = \frac{OD}{3}$, OD raza cercului $(O) \Rightarrow$ $\Rightarrow O_1G = \text{const.}$ Deci locul geometric căutat este un cerc cu centrul în O_1 cu raza O_1G care este $\frac{1}{3}$ din raza cercului circumscris triunghiului ABC.

126. (Fig. II.126). Din P se duce a doua tangentă PN la cerc. Deoarece triunghiul AOM este isoscel, iar $OP \parallel AM$, rezultă $m(\widehat{MOA}) = m(\widehat{OMA}) = m(\widehat{MOP}) = \alpha$. Unind O cu N se obține că și $m(\widehat{PON}) = \alpha$, deci $m(\widehat{MON}) = 2\alpha$. Cum triunghiul AOM este isoscel atunci $m(\widehat{AOM}) + 2\alpha = 180°$ sau $m(\widehat{AOM}) + m(\widehat{MON}) = 180°$, adică ON este prelungirea lui AO și prin urmare N este diametral opus punctului A. Deci oricare ar fi secanta variabilă (AM), a doua tangentă dusă prin punctul P, trece prin punctul fix N, diametral opus punctului A și locul geometric al punctului P, este tangenta la cerc în N punctul diametral opus punctului fix A.

127. (Fig. II.127) Cum triunghiurile A_1BA și A_2BA sînt dreptunghice în B și prin urmare A_1B cu A_2B sînt în prelungire, iar punctele A, B, A_2 sînt coliniare. Deci locul geometric căutat este o dreaptă perpendiculară în B pe AB. Analog și pentru punctele B_1, A, B_2.

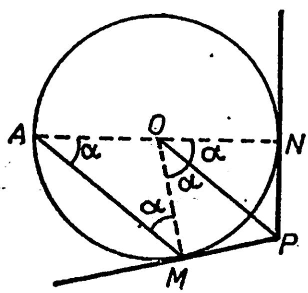


Fig. II.126

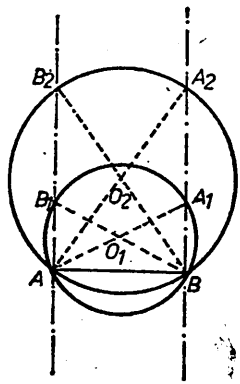


Fig. II.127

128. Notăm cu I mijlocul segmentului OO'; din trapezul $OAA'O'$, $IM = \frac{r+r'}{2}$ = const. Locul geometric al punctului M este cercul de centru I şi rază $\frac{r+r'}{2}$ · Dacă razele $OA, O'A'$ sînt paralele şi de sensuri contrare locul geometric al punctului M este un cerc concentric de rază $\frac{r-r'}{2}$ presupunînd $r > r'$; pentru $r = r'$ locul geometric se reduce la un cerc de rază nulă, adică mijlocul segmentului OO'.

129. Prin punctele fixe A şi B ducem un cerc oarecare care intersectează cercul fix în punctele C şi D.

Dreptele (AB) şi (CD) se intersectează în punctul E, situat pe axa radicală a cercului fix şi a oricăruia din cercurile O', deci este punct fix.

Linia centrelor a două cercuri fiind perpendiculară pe axa lor radicală, din punctele locului geometric segmentul OE este văzut sub un unghi drept, deci locul geometric este cercul de diametru OE.

130. (Fig. II.130) Unghiurile formate de tangentele în P la cele două cercuri ortogonale, cu dreptele (PB) şi (PC) sînt respectiv congruente cu unghiurile PAB şi PAC. Ştiind că suma unghiurilor formate în jurul punctului P este de 360° se obţine:

$$\mathrm{m}(\widehat{BPC}) = \frac{3\pi}{2} - \mathrm{m}(\widehat{BAC}) = \alpha = \text{const.}$$

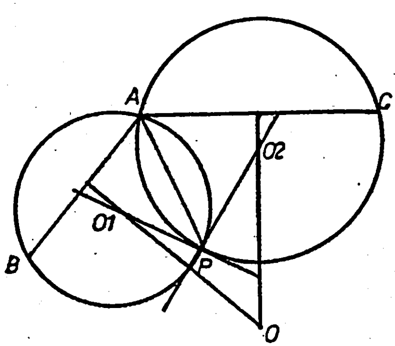


Fig. II.130

Locul geometric al punctului P este arcul din care segmentul BC se vede sub unghiul α, situat de partea laturii BC, opusă vîrfului A.

Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, atunci

$$2\alpha = 180° + \mathrm{m}(\widehat{BOC}).$$

Punctul O fiind situat pe mediatoarea segmentului

BC, în baza relației dintre unghiuri, rezultă că BO și BC sînt tangente la cercul căruia aparține arcul loc geometric al punctului P.

131. (Fig. II.131). Fie (d) dreapta pe care se deplasează centrul O', iar M și N punctele de intersecție ale celor două cercuri. Triunghiurile OMO' și ONO' sînt echilaterale, avînd toate laturile congruente cu raza cercurilor.

Locul geometric este format din două drepte care trec prin O și formează unghiul de $60°$ cu dreapta (D).

132. (Fig. II.132). Se duce secanta (ACD) și fie E mijlocul coardei CD. Se caută întîi locul geometric al punctului E

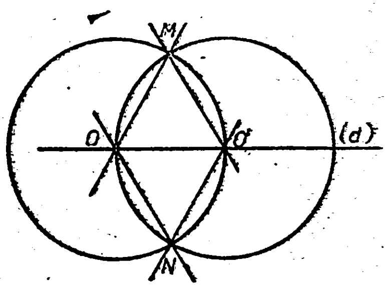


Fig. II.131

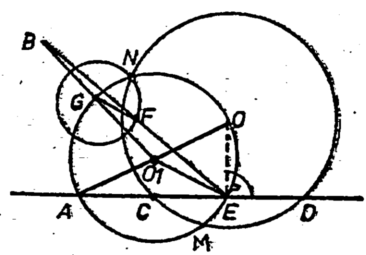


Fig. II.132

cînd secanta este variabilă, trecînd prin A. Unind O cu E, triunghiul OED este dreptunghic și cum OA este fixă, locul geometric al punctului E este arcul MON al cercului de centru O_1 cu diametrul OA. Locul geometric al mijlocului F al segmentului BE se determină observînd că B fiind fix, iar E descriind arcul de cerc MON al cercului O_1, rezultă că mijlocul F al arcului BE descrie arcul omotetic corespunzător cercului de centru G; cercurile (G) și (O_1) au centrul de omotetie în B, iar raportul de omotetie $1/2$. Centrul G este mijlocul segmentului O_1B.

133. (Fig. II.133). Laturile neparalele AD și BC se intersectează prin prelungire în punctul H ce rămîne fix, în timp ce baza mică CD

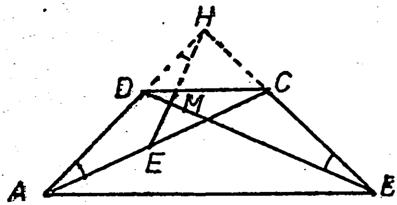


Fig. II.133

se deplasează. Unind mijlocul E cu punctul H obținem: $m(\widehat{EAH}) = m(\widehat{EHD}) = m(\widehat{DBH})$.

Rezultă că EH este perpendiculară pe diagonala BD, în punctul M. Cum punctele B și H sînt fixe, locul geometric al punctului M este cercul de diametru BH.

Observație: În cazul cînd CD se deplasează dincolo de punctul H segmentele AH și BH devin diagonale în trapezul $ABCD$.

Cînd CD se deplasează dincolo de baza AB, atunci $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 135°$.

134. Fie O centrul cercului descris de B. Construim un punct O_1 astfel ca $OA \equiv O_1A$ și $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{OAO_1})$.

Deoarece $OA \equiv O_1A$, $AB \equiv AC$ și $m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{O_1AC})$, rezultă că $\triangle OAB \equiv \triangle O_1AC$, deci $OB \equiv O_1C$, OB este raza cercului descris de B. Cum O este punct fix rezultă că O_1 este punct fix și cum $O_1C = \text{const.}$, înseamnă că punctul descrie un cerc de rază congruentă cu raza cercului descris de B. Dacă punctul C se află în partea cealaltă a laturii AB, prin construirea unghiului OAO_2, la fel ca mai sus, obținem un al doilea cerc descris de C. Locul geometric al punctului C este format din două cercuri obținute din cercul descris de punctul B printr-o rotație de unghi CAB în jurul punctului fix A, în ambele sensuri.

135. (Fig. II.135). Fie C_1C_1' o altă poziție a coardei și punctele M și M_1 mijloacele coardelor CC', respectiv C_1C_1'. Triunghiurile BCC' și BC_1C_1' sînt asemenea, deoarece

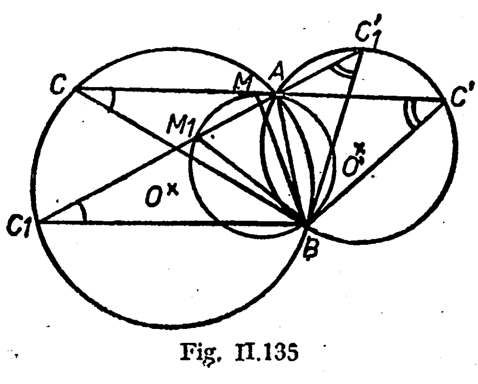


Fig. II.135

$m(\hat{C}) = m(\hat{C}_1)$ şi $m(\hat{C}') = m(\hat{C}'_1)$. Deducem că şi triunghiurile BMC' şi $BM_1C'_1$ sînt asemenea şi deci avem: $m(\widehat{BMC'}) = m(\widehat{BM_1C'_1})$ sau $m(\widehat{BMA}) = m(\widehat{BM_1A})$. Locul geometric al punctului M este un cerc care trece prin A şi B.

136. i) Se consideră întîi cazul cercurilor tangente exterioare (de raze diferite) deoarece altfel locul geometric al punctului P se reduce la punctul T (fig. II.136).

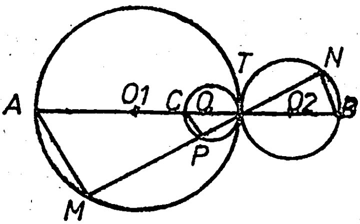


Fig. II.136

Notăm cu A şi B punctele de intersecţie dintre cele două cercuri cu dreapta centrelor (O_1O_2) şi cu C mijlocul segmentului AB, care este un punct al locului.

Unghiurile AMT şi BNT fiind drepte, înseamnă că dreptele (AM) şi (BN) sînt paralele, ca perpendiculare pe aceeaşi dreaptă (MN).

Punctele P şi C împărţind segmentele MN şi AB în rapoarte egale $\frac{MP}{PN} = \frac{AC}{CB} = 1$, iar dreptele (AM) şi (BN) fiind paralele, înseamnă că şi dreapta (CP) este paralelă cu ele, adică este perpendiculară pe MN. Triunghiul TPC este astfel dreptunghic şi deci punctul P aparţine cercului de diametru TC.

Orice punct al acestui cerc aparţine locului geometric, deoarece este mijlocul unui segment MTN, acela dus prin punctul luat pe cerc.

Analog se demonstrează pentru cazul cercurilor tangente interioare, cu aceeaşi concluzie. De remarcat că în primul caz locul geometric căutat este un cerc tangent exterior cercului cel mic şi tangent interior pentru cercul cel mare, iar în cazul al doilea locul geometric este un cerc tangent interior ambelor cercuri date.

ii) Scriind puterea punctului E faţă de cele două cercuri şi aplicînd o proprietate a proporţiilor derivate obţinem:

$$EA \cdot EB = EC \cdot ED \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{ED}{EB} = \frac{AE + ED}{EC + EB} = \frac{AD}{BC};$$

$\frac{EB}{EC}=\frac{ED}{EA}=\frac{EB+ED}{EC+EA}=\frac{BD}{AC}$. Împărțind cele două șiruri de rapoarte obținem:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{BC};\quad \frac{BD}{AC}=\frac{CA}{CB}\cdot\frac{DA}{DB}.$$

137. (Fig. II.137) i) Punctul P descriind cercul circumscris triunghiului ABC, de centru O, punctul A_1 simetricul său față de M va descrie cercul (A_1BC) de centrul O_1 simetricul lui O față de BC, cercurile (O) și (O_1) fiind congruente. Rezultă că punctul I mijlocul segmentului AA_1 va descrie cercul cu centrul în mijlocul lui AO_1 și de rază egală cu $\frac{1}{2}OA=$ $=\frac{1}{2}R$, R fiind raza cercului (ABC). Acest cerc este cercul lui Euler și ω este mijlocul segmentului OH, H fiind ortocentrul triunghiului ABC.

ii) Locul geometric al punctului I fiind cercul înscris triunghiului ABC, locul geometric al punctului A_1 este cercul (O_1) de rază $O_1A_1=2\cdot OI$, unde $AO\equiv OO_1$, iar locul geometric al punctului P este cercul cu centrul în simetricul O_2 al lui O_1 față de mijlocul M al segmentului BC și de rază $O_2P\equiv O_1A_1=2\cdot OI=2r$.

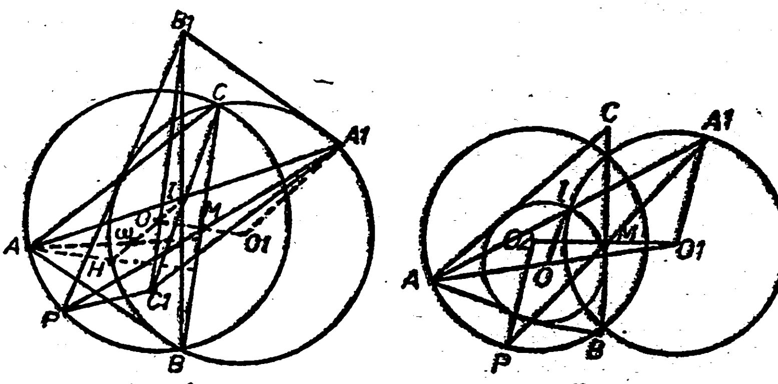


Fig. II.137

138. (Fig. II.138) Fie G', G'' centrele de greutate ale triunghiurilor PAB, PBC. Este cunoscut faptul că O, G', H' și O, G'', H'' sînt coliniare (Dreptele lui Euler în triunghiurile PAB și PBC).

Dreapta lui Euler este dreapta care trece prin ortocentrul, centrul de greutate și centrul cercului circumscris unui triunghi dat.) și că $\frac{OG'}{OH'} = \frac{OG''}{OH''} = \frac{1}{3}$ deci, $G'G'' \parallel H'H''$. Fie punctele A_1, C_1 mijloacele laturilor BC, AB. Cum $\frac{PA_1}{PG''} = \frac{PC_1}{PG'} = \frac{3}{2}$ atunci $G'G'' \parallel A_1C_1$ și cum $A_1C_1 \parallel AC$, rezultă că $H'H'' \parallel AC$.

Analog se arată că $H''H''' \parallel AB$, $H'H'' \parallel BC$. Rezultă că $PH' \perp H''H'''$; $PH''' \perp H'H''$, $PH''' \perp H'H''$, deci P este ortocentrul triunghiului $H'H''H'''$.

Deci locul geometric al ortocentrului triunghiului $H'H''H'''$ este chiar cercul circumscris triunghiului ABC.

139. (Fig. II.139) i) Fie $\{Q\} = (AM) \cap (BN)$ și $\{P\} = (AN) \cap (BM)$. Unghiul Q fiind în afara cercului, are ca măsură diferența semiarcelor cuprinse între laturi, deci $m(\hat{Q}) = 90° - 45° = 45° \Rightarrow m(\hat{P}) = \frac{180° + 90°}{2} = 135°$.

ii) Deoarece unghiurile P și Q sînt constante, locurile geometrice descrise de punctele Q și P vor fi arcele capabile de unghiurile de 45° și 135°, iar cele două cercuri se intersectează sub un unghi de 135°—45° = 90°, deci sînt cercuri ortogonale.

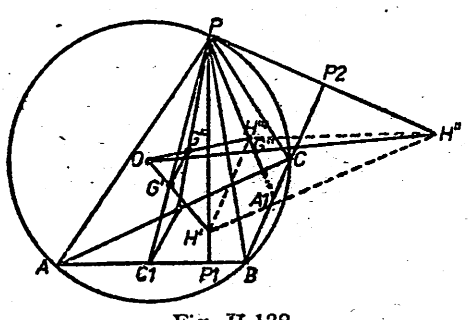


Fig. II.138

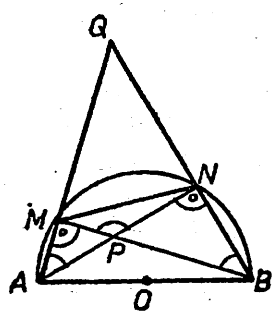


Fig. II.139

iii) Fie coarda $MN \parallel AB$, iar C şi D picioarele perpendicularelor duse din M şi N pe diametrul AB. Rezultă relaţiile:

$$(a)\ AM^2 = BN^2 = AC^2 + MC^2;\ (b)\ AC \equiv DB = \frac{AB-CD}{2};$$

$$(c)\ CD \equiv MN = AB\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Introducînd relaţia (c) în (b) se obţine:

$$(d)\ AC = \frac{1}{2}\left(AB - AB\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}\cdot AB;$$

$$(e)\ MC = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}AB.$$

Introducînd (d) şi (e) în relaţia (a) rezultă:

$$AM^2 = \left(\frac{AB}{4}\right)^2(2-\sqrt{2})^2 + \frac{AB}{16}(\sqrt{2})^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}AB^2, \text{ sau}$$

$$AM \equiv BN = AB\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Pentru obţinerea lungimilor AN şi BN care sînt congruente se foloseşte unul dintre triunghiurile dreptunghice ANB sau AMB:

$$AN^2 = BM^2 = AB^2 - AM^2 = AB^2 - AB^2\cdot\frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2}{4}$$

sau

$$AN \equiv BN = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot AM.$$

iv) Dacă presupunem problema rezolvată, din enunţ trebuie ca

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AM}{BN} = \sqrt{2},$$

iar $\triangle ACM \sim \triangle BPN$, cu raportul de asemănare $\frac{AM}{BN} = \sqrt{2}$, acelaşi raport este şi pentru laturile AP şi PB. Fie E

un punct pe AB care împarte acest segment astfel ca $\frac{AE}{EB} = \frac{AP}{PB}$. Punctul P aparţine bisectoarei unghiului P. Se prelungeşte această bisectoare, iar intersecţia ei cu cercul se notează cu F, care divide în părţi congruente arcul AFB. De aici rezultă următoarea construcţie: se uneşte E cu F, obţinîndu-se $\frac{AE}{EB} = \sqrt{2}$. Se uneşte E cu F, iar intersecţia cu cercul AFB este punctul P. Se uneşte P cu A şi B şi pe prelungirile acestor drepte, se găsesc punctele M şi N la intersecţia cu semicercul descris pe AB ca diametru. Problema admite două soluţii, după cum luăm pe E în apropierea punctului A sau a punctului B.

140. i) $BM = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} a$ şi $BN = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} a$.

ii) Dacă se circumscrie triunghiul MPN cercul respectiv, atunci (BMN) este o secantă a acestui cerc, iar produsul $BM \cdot BN$ este independent de unghiul x şi este egal cu puterea punctului B în raport cu cercul circumscris triunghiului MPN care este pătratul tangentei din B la acest cerc, adică a^2.

iii) Locul geometric descris de punctul P este arcul de cerc cu centrul B şi raza a.

iv) $m \in (0, 2)$.

141. i) Prin construcţia $m(\widehat{PNC}) = m(\widehat{PMC}) = 90°$ rezultă că patrulaterul $PMCN$ este inscriptibil. Deci $m(\widehat{CNM}) = m(\widehat{CPM})$ şi $m(\widehat{MCP}) + m(\widehat{PMC}) = 90°$, însă $m(\widehat{MCP}) = m(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AC})$ astfel că egalitatea precedentă se poate scrie: $m(\widehat{CNM}) + m(\widehat{ABC}) = 90°$, adică triunghiul BIN este dreptunghic şi $IN \perp AB$ $(IN \equiv MN)$ sau $MN \perp AB$.

ii) Punctele B, C, P, N sînt fixe, iar A este variabil, pe cercul de centru O. Triunghiul BIN fiind dreptunghic în I şi ipotenuza BN fixă, rezultă că locul geometric descris de punctul I este cercul cu diametrul BN.

iii) Din triunghiul MPC, dreptunghic în M rezultă:

$$PC^2 = MP^2 + MC^2$$

iar din asemănarea triunghiurilor MPC şi BIN rezultă:

$$\frac{PC}{BN}=\frac{MP}{IN}=\frac{MC}{BI}.$$

Din relaţia a doua obţinem $PC^2 \cdot BI^2 = BN^2 \cdot MC^2$. Dacă se înmulţeşte prima relaţie cu BN^2 şi se înlocuieşte $BN^2 \cdot MC^2$ prin egalul său se obţine relaţia cerută.

142. i) Triunghiurile CPD, AME şi EBN sînt asemenea deoarece au cîte două unghiuri congruente:

$$m(\widehat{MAE}) = m(\widehat{NBE}) = m(\widehat{PCD}) \text{ şi } m(\widehat{BEN}) = m(\widehat{MEA});$$
$$m(\widehat{BNE}) = m(\widehat{CPD}),$$

de unde rezultă:

$$\frac{ME}{AE}=\frac{EN}{EB}=\frac{ME+EN}{AE+EB}=\frac{MN}{AB}, \text{ iar } \frac{ME}{AE}=$$
$$=\frac{DP}{CD} \text{ şi } AB \equiv CD,$$

prin urmare:

$$\frac{MN}{AB}=\frac{DP}{CD} \text{ sau } MN \equiv DP.$$

ii) Analog

$$\frac{ME}{AM}=\frac{EN}{BN}=\frac{MN}{AM+BN}; \quad \frac{ME}{AM}=\frac{DP}{CP} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{MN}{AM+BN}=\frac{DP}{CP}.$$

Cum $MN \equiv DP$ se deduce că $AM + BN = CP = CQ + QP = BN + QP$ deci $AM \equiv QP$.

iii) Patrulaterul $CBNQ$ fiind paralelogram, $NQ \parallel BC$ şi $NB \equiv QC$. Cînd dreptele paralele (BN), (CP) se rotesc, atunci NQ are o mişcare de translaţie şi deci locul geometric descris de punctul Q este o paralelă la dreapta fixă (DE).

143. i) Deoarece $ABCD$ este pătrat, avem $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADB}) = 45°$. Dar din ipoteză, $ME \perp AB$, $MF \perp AD$.

Rezultă că patrulaterul $AEMF$ este dreptunghi, iar triunghiurile DFM, MEB sînt dreptunghice şi isoscele. Prin urmare $AF \equiv ME \equiv EB$ şi $AE \equiv FM \equiv FD$. Adunînd aceste congruenţe avem: $MF + ME = FD + AF = AD = $ constant.

ii) Triunghiurile DAE, DCF sînt dreptunghice şi au catetele congruente: $AD \equiv DC$, $AE \equiv DF$, prin urmare sînt congruente. Rezultă că ipotenuzele sînt congruente $CF \equiv DE$ şi că $m(\widehat{DCF}) = m(\widehat{ADE})$. Deci $m(\widehat{BDC}) + m(\widehat{DCF}) = m(\widehat{EDC}) + m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ADC}) = 90°$. În triunghiul DNC, $m(\widehat{DNC}) = 90°$ pentru că $m(EDC) + m(\widehat{DCF}) = 90°$ şi astfel $CF \perp DE$.

iii) Deoarece $m(\widehat{DNC}) = 90°$ rezultă că punctul N aparţine cercului de diametru CD şi anume pe arcul cuprins între D şi punctul de intersecţie al diagonalelor pătratului deoarece poziţiile extreme ale lui N sînt $N \equiv D$, cînd $M \equiv D$ şi $N = DB \perp AC$ cînd $M \equiv B$. Reciproc, unind un punct N situat pe acest arc de cerc cu punctele D, C obţinem drepte perpendiculare care intersectează pe AB în E, iar pe DA în F. Perpendicularele punctelor E şi F pe AB respectiv pe DA intersectează diagonala DB într-un punct M. Pentru a justifica această afirmaţie vom arăta că patrulaterul $FME'D$ este un pătrat. Pentru aceasta observăm că $\triangle DCF \equiv \triangle DAE$ deoarece $m(\widehat{DCF}) = m(\widehat{ADE})$. Deci $DF \equiv AE \equiv FM \equiv DE'$. De aici rezultă că patrulaterul $FME'D$ este pătrat şi că $M \in BD$.

Locul geometric este sfertul de cerc de mai sus.

Observaţie. Dacă punctul M ar parcurge dreapta (DB), atunci locul geometric ar fi întreg cercul de diametru DC.

iv) Fie M' proiecţia punctului M pe BC. Triunghiurile FME, $MM'C$ sînt dreptunghice şi au catetele congruente şi perpendiculare deoarece $FM \equiv FD \equiv M'C$ şi $ME \equiv MM' (M \in BD)$. Rezultă că sînt congruente şi perpendiculare şi ipotenuzele $CM \equiv EF$, $CM \perp EF$.

v) Vom arăta că dreptele (BF), (CM), (DE) sînt înălţimile triunghiului CEF. Conform rezultatelor punctelor ii) şi iv) avem $DE \perp CF$ şi $CM \perp EF$. Triunghiurile AFB, CBE sînt congruente şi au catetele perpendiculare pentru că $AF \equiv EB$, $AB \equiv CB$. Rezultă că şi ipotenuzele sînt perpendiculare, $FB \perp CE$.

144. Se construiește planul (Q) mediator segmentului MN. Toate punctele situate în acest plan sînt egal depărtate de M și N. Planul (Q) intersectat cu planul (P) va genera o dreaptă, care este locul geometric cerut.

145. Se exclud diedrele exterioare, atunci locul geometric este o dreaptă obținută prin intersecția planelor bisectoare ale celor trei unghiuri diedre.

146. Locul geometric este format din reuniunea planelor bisectoare (plane perpendiculare) a celor două unghiuri diedre suplementare.

147. Cum suma distanțelor este constantă și cum cele două distanțe determină un plan (R) perpendicular pe planele inițiale, atunci locul geometric căutat este for~~mat dintr-o~~ dreaptă perpendiculară în P pe planul (R).

148. Fie MN perpendiculara comună celor două direcții. Prin A se duce planul (XOY) perpendicular pe (Δ_1) și se proiectează punctul N pe acest plan în N'. Triunghiul MNA este dreptunghic în N și are latura MN paralelă cu planul (XOY), deci proiecția pe (XOY) a unghiului MNA este unghiul $AN'A$, care este drept deoarece este proiecția unui unghi drept care are latura MN paralelă cu planul (XOY).

Cum punctele O și A sînt fixe și $m(\hat{N'}) = 90°$ atunci punctul N' descrie cercul cu diametrul OA. Cum $NN' \parallel (\Delta_1)$, atunci locul geometric este cilindrul de generatoare NN' și secțiunea dreaptă cercul cu diametrul OA.

149. (Fig. II.149) Fie (d) și (d_1) cele două drepte, MN perpendiculara comună, AA_1 segmentul de lungime constantă care se sprijină pe cele două drepte, iar punctul B mijlocul său. Cum $(d) \perp (d_1)$ și prin construcție $(d) \perp MN$, rezultă că (d) este perpendiculară pe planul acestor două drepte, deci și pe $(NA_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle AMA_1$ este dreptunghic în M, iar MB este mediană și congruentă cu $\frac{AA_1}{2}$. Cum punctul B

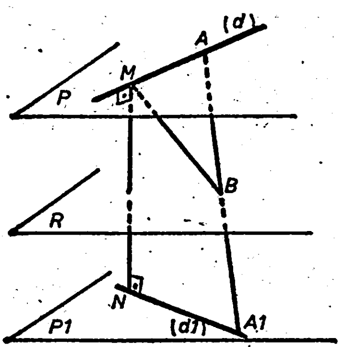


Fig. II.149

este situat în planul (R), echidistant de cele două plane, şi MB este constant, atunci locul geometric al punctului B este un cerc în planul (R).

150. Fie (P) un plan perpendicular pe intersecţiile planelor date, care le intersectează după un triunghi ABC. Locul geometric cerut se compune din perpendicularele pe planul (P), duse în centrul cercului înscris şi în centrele cercurilor exînscrise.

151. Se va arăta că cele trei plane bisectoare ale diedrelor interioare se intersectează după o dreaptă care este o parte a locului geometric, apoi că planele bisectoare a două diedre exterioare şi planul bisector al diedrului al treilea trec iarăşi printr-o dreaptă a locului. Locul geometric se compune din reuniunea a patru drepte.

152. Se duce un plan perpendicular pe cele trei drepte care le intersectează în punctele A, B, C. Perpendiculara dusă pe planul (ABC) în centrul cercului circumscris triunghiului ABC este locul geometric cerut.

153. Locul geometric se compune din patru drepte, intersecţii ale planelor duse prin bisectoarele fiecărei feţe a triedrului şi perpendiculare pe acele feţe.

154. Fie segmentul AA_1 unde $A \in D$ şi $A_1 \in D_1$, iar M_2 şi A_2 punctele care împart segmentele AM_1 şi respectiv AA_1 într-un raport dat. Punctele A_2 şi M_2 se află într-un plan (P) paralel cu cele două drepte (D) şi (D_1). Reciproc, prin orice punct M_2 al planului (P) putem duce o dreaptă care să intersecteze atît dreapta (D) cît şi dreapta (D_1).

155. (Fig. II.155) i) $MN = IN - IM = \dfrac{DD_1 + BB_1}{2} -$

$$-\frac{AA_1 + CC_1}{2} = \frac{2+8}{2} - \frac{3+1}{2} = 5 - 2 = 3 \text{ m}.$$

ii) Avem $AA' \parallel BC$; $BB' \parallel AA_1$; planul $(AA'A_1) \parallel$ planul $(BB'C)$, iar $(AB) \perp$ panul $(BB'F)$. Deoarece $EP \equiv PF$, punctul P se află în planul mediator al segmentului AB.

Delimitarea locului geometric. Dacă $F \equiv B$, iar $E \in AA_1$, atunci P descrie segmentul

$$A_2A_3 = \frac{AA_1}{2} = 1{,}5 \text{ m}.$$

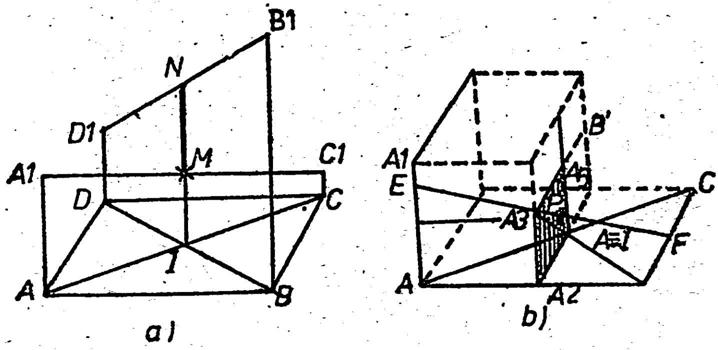


Fig. II.155

Dacă $F \equiv C$ şi $E \in (AA_1) \Rightarrow P$ descrie segmentul $A_4A_5 = 1{,}5$ m.

Dacă $E \equiv A$ şi $F \in (BC) \Rightarrow P$ descrie segmentul $A_2A_4 = 1$ m.

Reciproc. Orice punct P din interiorul dreptunghiului $A_2A_3A_4A_5$ unit cu un punct $E \in AA_1$ intersectează pe BF şi invers.

Dreptunghiul $A_2A_3A_4A_5$ are dimensiunile $A_2A_4 \equiv A_3A_5 = \frac{BC}{2} = 1{,}5$ m; iar $A_2A_3 \equiv A_4A_5 = \frac{AA_1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ m.

156. Perpendiculara comună dreptelor (D_1), (D_2) intersectează dreptele în O_1 şi O_2. Fie O mijlocul segmentului O_1O_2 şi P mijlocul lui AB. Notăm cu C şi D mijloacele segmentelor OA_2 şi OB_1. Figura $OCPD$ este un paralelogram aflat în planul mediator al segmentului O_1O_2.

Dacă A este fix şi B mobil pe (D_2), punctul P descrie o dreaptă paralelă cu (D_2) aflată în planul mediator al segmentului O_1O_2. Analog dacă B este punct fix.

Reciproc: Fie P un punct din planul mediator segmentului O_1O_2. Prin P se pot duce drepte care să se rezeme pe (D_1) şi (D_2) (dacă $PA \equiv PB$ locul geometric este o singură dreaptă).

157. Fie M_1 proiecţia lui M pe planul (ABC). Proiecţia lui M_1 pe BC coincide cu proiecţia lui M pe aceeaşi dreaptă conform teoremei celor 3 perpendiculare.

La fel dacă proiectăm pe laturile AB şi AC.

Proiecţiile punctului M pe laturile AB, BC, CA fiind coliniare şi proiecţiile lui M_1 sînt coliniare şi reciproc. Ţinînd seama de teorema lui Simson (Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC atunci proiecţiile punctului M pe laturile triunghiului sînt trei puncte coliniare), rezultă că punctul M_1 se află pe cercul circumscris triunghiului ABC, iar locul geometric al punctului M este cilindrul circular drept care are ca bază cercul circumscris triunghiului ABC.

158. Fie un plan (P) şi un punct A din plan, M un punct al locului geometric cerut şi M_1 un alt punct arbitrar al aceluiaşi loc geometric. Notăm cu AO perpendiculara în A pe plan, iar cu N şi N_1 proiecţiile punctelor M şi M_1 pe plan. Triunghiurile MAN şi M_1AN_1 sînt asemenea.

$m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{M_1AN_1}) \Rightarrow m(\widehat{MAO}) = m(\widehat{M_1AO})$ sau $m(\widehat{MAO}) = 180° - m(\widehat{M_1AO})$ şi reciproc. Rezultă că locul geometric cerut este un con de rotaţie cu vîrful în A avînd ca axă dreapta (AO) şi trecînd prin unul din punctele M.

159. Fie M_1, M_2, M_3 mijloacele segmentelor A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6. Aplicînd lungimea medianei avem:

$$MA_1^2 + MA_2^2 = 2\,MM_1^2 + \frac{A_1A_2^2}{2}.$$

Din enunţ rezultă:

$$MM_1^2 - MM_2^2 = \frac{A_3A_4^2 - A_1A_2^2}{4} = \text{const.} \qquad (1)$$

Locul geometric este un plan perpendicular pe M_1M_2 pentru punctele care satisfac relaţia. Însă avem:

$$MM_2^2 - MM_3^2 = \frac{A_5A_6^2 - A_3A_4^2}{4} = \text{const.} \qquad (2)$$

deci alt plan perpendicular pe M_2M_3.

Cele două plane se intersectează după o dreaptă (Δ) perpendiculară planului $(M_1M_2M_3)$. Ultima relaţie

$$MM_3^2 - MM_1^2 = \frac{A_1A_2^2 - A_5A_6^2}{4} \qquad (3)$$

arată că punctul M se află într-un plan perpendicular pe M_3M_1. Acest plan însă trece prin (Δ) deoarece (3) este verificată de punctele de pe (Δ), ea deducîndu-se prin adunarea relaţiilor (1) şi (2).

În cazul particular, cînd $A_1A_2 \equiv A_3A_4 \equiv A_5A_6$, cele trei plane sînt planele mediatoare ale laturilor triunghiului $M_1M_2M_3$ și locul geometric este perpendiculara pe planul $(M_1M_2M_3)$ dusă prin centrul cercului circumscris.

160. Fie ABC, $A_1B_1C_1$ două triunghiuri într-un plan; dreptele (AA_1), (BB_1), (CC_1) se intersectează în O'. Se unește un punct T din spațiu cu A_1, B_1, C_1 și O'. Fie O un punct arbitrar pe TO'. OA intersectează pe (TA_1) în a, OB intersectează pe (TB_1) în b, OC intersectează pe (TC_1) în c. Dreptele (BC), (B_1C_1), (bc) se intersectează în punctul de intersecție A' al planelor (OBC), (TB_1C_1) și (ABC), deoarece sînt dreptele de intersecție ale acestor plane, două cîte două. În același mod obținem B' și C'.

Aplicînd observația că dacă se unește un punct O din spațiu cu vîrfurile A, B, C ale unui triunghi situat în planul (P), un plan (Q) intersectează muchiile OA, OB, OC în punctele U, V, W atunci punctele A'_1, B'_1, C'_1 sînt coliniare unde $\{A'_1\} = (BC) \cap (VW)$, $\{B'_1\} = (CA) \cap (UW)$, $\{C'_1\} = (AB) \cap$ $\cap (UV)$, deoarece dreapta ce trece prin punctele A'_1, B'_1, C'_1 este intersecția planelor (P) și (Q). Deci punctele A', B', C' sînt coliniare.

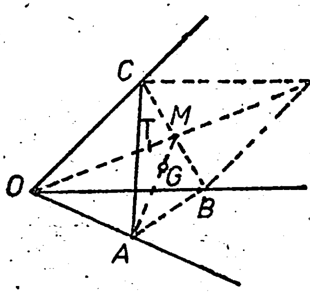


Fig. II.161

161. (Fig. II.161) Punctul M este fix, punctul A se deplasează pe muchia OA, $MG = \frac{1}{3} \cdot MA$. Locul geometric este o dreaptă paralelă cu OA, trecînd printr-un punct T situat pe MO, deci $MT = \frac{1}{3} MO$.

162. Locul geometric este o dreaptă: intersecția planelor perpendiculare pe (D_1) și (D_2) respectiv în O_1 și O_2. Această dreaptă este perpendiculară și pe (D_1) și pe (D_2), deci paralelă cu perpendiculara lor comună.

163. i) Fie K un punct pe dreapta perpendiculară în M pe planul (MBD), iar P un punct pe dreapta perpendiculară în C pe planul $(ABCD)$. Avem $KM \perp$ planul (MBD), $MO \perp BD$ și conform teoremei celor trei perpendiculare avem $KO \perp BD$ deci $KB \equiv KD$ și totodată $MB \equiv MD$ și deci MK se află în planul mediator (MAC) al segmentului BD. $\triangle PCB \equiv \triangle PCD \Rightarrow PB \equiv PD$, deci CP se află în planul mediator (MAC) al segmentului BD. Aflîndu-se în același plan (MAC) și nefiind paralele, dreptele (MK) și (CP) au un punct comun.

ii) Patrulaterul $EFGH$ este paralelogram, deoarece $EH \parallel BD \parallel GF$ și $EH \equiv GF = \frac{BD}{2}$. Fie T intersecția diagonalelor și fie $NE \perp AB$. Evident, $AN \equiv NB$ deoarece $ME \equiv EB$. Deoarece $AN \equiv NB$ și $DG \equiv GC$ rezultă că $NG \parallel BC \parallel AD$ și deci NG trece prin centrul O. În $\triangle GEN$ avem $GT \equiv TE$ și $GO \equiv ON$, deci TO este linie mijlocie $TN \parallel EN$ dar $EN \perp$ planul $(ABCD)$ deci și $TO \perp$ planul $(ABCD)$, deci locul geometric al punctului T este dreapta perpendiculară în punctul O pe planul $(ABCD)$.

164. Dreptele (d_1) și (d_2) fiind paralele determinăm un plan (α). Fie (Q) planul paralel și echidistant cu planele (P_1) și (P_2). Planul (Q) intersectează planul (α) după o dreaptă (d). Rezultă că dreptele (d), (d_1) și (d_2) sînt paralele echidistante și deci dreapta (d) este fixă. Punctul L, mijlocul segmentului MN, se află în planul (Q). Fie E mijlocul segmentului AB. Trapezul $ANMB$ are segmentul EL ca linie mijlocie, deci dreapta (EL) este perpendiculară pe planele (P_1), (P_2) și (Q). Punctul E fiind fix, rezultă că dreapta (EL) generează planul (β), deoarece trece prin E și rămîne perpendiculară pe dreapta fixă (d).

Planul (β) intersectează dreapta (d) în F.

Deoarece $EL \perp LF$, segmentul fix EF se vede din punctul L sub un unghi de 90°. Locul geometric al punctului L este deci cercul de diametru EF situat în planul (β).

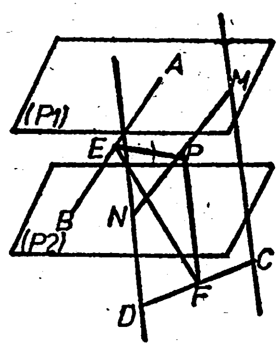


Fig. II.165

165. (Fig. II.165) Se notează cu E și F mijloacele segmentelor AB și CD. Se observă că segmentul PF este perpendicular, iar segmentul PE este paralel cu planele (P_1) și (P_2). De aici se deduce că segmentul EF se vede din punctul P sub un unghi drept, deci locul geometric al punctului P este sfera de diametru EF.

Observații: a) Centrul O al sferei loc geometric coincide cu centrul de greutate G al tetraedrului $ABCD$.

b) În cazul mai general, cînd P aparține segmentului MN astfel încît $\frac{MP}{PN} = k$, locul geometric al punctului P este sfera de diametru $E'F'$, E' și F' fiind două puncte situate respectiv pe AB și CD, astfel încît:,

$$\frac{AE'}{E'B} = \frac{CF'}{F'D} = k.$$

166. (Fig. II.166) i) Se face notația:

$$\frac{\sigma[A_1A_3A_4]}{\sigma[A_2A_3A_4]} = k$$

și se consideră planele bisectoare (P_1) și (P_2) ale unghiurilor diedre formate de fețele $A_1A_3A_4$ și $A_3A_2A_4$.

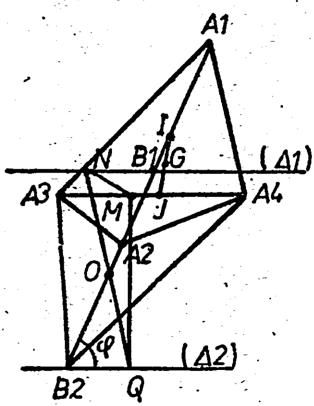


Fig. II.166

Fie B_1 și B_2 punctele în care muchia A_1A_2 înțeapă aceste plane.

Planele (P_1) și (P_2) sînt perpendiculare.

Cum $\frac{B_1A_1}{B_1A_2} = \frac{B_2A_1}{B_2A_2} = k$, rezultă că punctele B_1 și B_2 sînt fixe. Fie O mijlocul segmentului B_1B_2, (Δ_1) și (Δ_2) două drepte paralele cu dreapta (A_3A_4), trecînd respectiv prin punctele B_1 și B_2, iar (P) un plan ce trece prin O și este perpendicular pe dreapta (A_3A_4).

Se notează cu M, N, Q punctele în care dreptele (A_3A_4), (Δ_1), (Δ_2) înțeapă planul (P). Se observă că triunghiul MNQ este dreptunghic $(ON \equiv OQ \equiv OM)$ și că dreapta (OM) este perpendiculară pe dreapta (A_3A_4).

Din triunghiul dreptunghic OB_1N rezultă:

$$ON = OB_1 \sin\varphi = \frac{B_1B_2 \cdot \sin\varphi}{2} = \text{const.}$$

deci și

$$OM = \frac{B_1B_2 \cdot \sin\varphi}{2} = \text{const.}$$

Se stabilește afirmația enunțului: dreapta (A_3A_4) rămîne tangentă sferei fixe de centru O și de rază

$$R = \frac{B_1B_2 \cdot \sin\varphi}{2}$$

ii) Fie I și J mijloacele segmentelor A_1A_2 și A_3A_4. Centrul de greutate G al tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ se găsește în mijlocul segmentului IJ. În condițiile punctului ii) dreapta (A_3A_4) generează o suprafață cilindrică circulară (C), a cărei axă de simetrie (D) trece prin punctul O. Aceeași suprafață o generează și punctul J. Rezultă că punctul G va descrie o suprafață cilindrică (C') omotetică cu (C), avînd ca centru de omotetie punctul I, iar raportul de omotetie egal cu $1/2$. Axa de simetrie (D') a suprafeței (C') trece prin mijlocul segmentului OI.

Observație. (Vezi figurile II.166i), ii), iii), iv)) Dreptele (D) și (D') sînt paralele cu direcția fixă pe care o păstrează dreapta (A_3A_4).

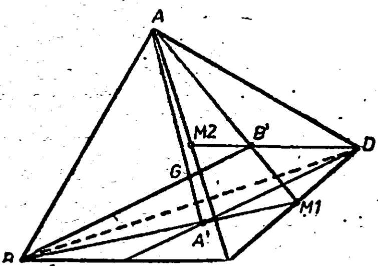


Fig. II.166 i)

Reamintesc două proprietăți ale centrului de greutate al unui tetraedru: fie $ABCD$ un tetraedru și A', B', C', D' centrele de greutate ale fețelor BCD, CDA, DAB, ABC.

i) Dreptele (AA'), (BB'), (CC'), (DD') trec prin centrul de greutate G al tetraedrului, care le împarte în raportul de $\frac{1}{4}$ față de bază și $\frac{3}{4}$ față de vîrf.

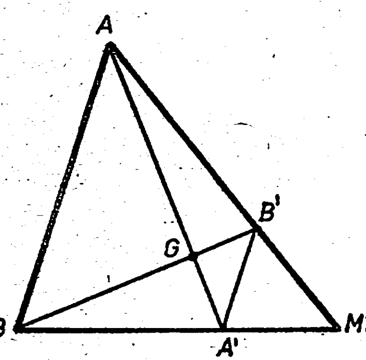


Fig. II.166 ii)

ii) Centrul de greutate G este la mijlocul segmentelor care unesc mijloacele muchiilor opuse.

Demonstrație: i) Fie planul de secțiune (ABM_1) unde M_1 este mijlocul segmentului CD. Cum A' și B' sînt centre de greutate atunci: $\frac{A'M_1}{BM_1} = \frac{1}{3}$ și $\frac{B'M_1}{AM_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A'M}{BM_1} = \frac{B'M_1}{AM_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow A'B' \parallel AB$ și $\triangle GA'B' \sim \triangle GAB$ și au raportul de

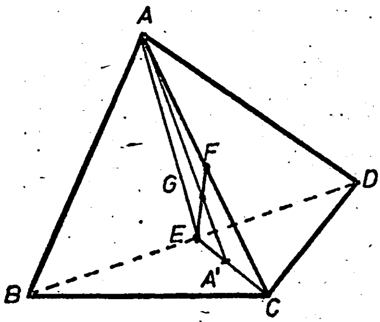


Fig. II.166 iii)

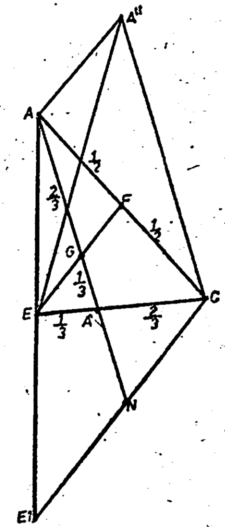


Fig. II.166 iv)

asemănare $\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{3}$ și $\frac{GA'}{GA} = \frac{1}{3}$, deci punctul G se află la $\frac{1}{4}$ de bază și la $\frac{3}{4}$ de vîrf.

ii) Fie $BE \equiv ED$, $AF \equiv FC$ și construim $E_1C \parallel EF$, $E_1 \in (AE)$, atunci EF este linie mijlocie în $\triangle AE_1C$, dar în același triunghi, A' este centrul de greutate, deci AN este mediană în $\triangle AE_1C$ și în $\triangle AEF$, deci AG este mediană în $\triangle AEF$ și $EG \equiv GF$.

167. Aplicînd teorema medianei în $\triangle MAB$ obținem $MO^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \text{const.}$, deci locul geometric este o sferă cu centrul în mijlocul O al segmentului AB.

168. Locul geometric este un plan perpendicular pe dreapta AB. Acest plan se numeşte planul radical al sferelor de centru A, respectiv B.

169. i) Fie $\{A_1\} = (VO) \cap (BP)$, $\{B_1\} = (VO) \cap (AN)$, $\{C_1\} = (BP) \cap (AN)$ şi dreptele necoplanare.

Dacă $A_1 \in (AN) \Rightarrow \{A_1\} = (VO) \cap (BP) \cap (AN)$

Dacă $A_1 \notin (AN) \Rightarrow B_1 \neq A_1$ sau $C_1 \neq A_1 \Rightarrow$ punctele A_1, B_1, C_1 necoliniare $\Rightarrow (VO), (BP), (ANC) \subset (ABC)$, fals. Fie $\{A_2\} = (VO) \cap (QM)$, $\{B_2\} = (VO) \cap (AN)$, $\{C_2\} = (AN) \cap (QM)$. Dacă $A_2 \in (AN) \Rightarrow \{A_2\} = (VO) \cap (QM) \cap (AN) \Rightarrow$ punctele A_1 şi A_2 coincid. Punctul de concurenţă al celor patru drepte îl notăm cu S.

ii) $AB \parallel MQ \parallel FC$, $MC \equiv QF$ şi $\triangle BMC \equiv \triangle AQF \Rightarrow BM \equiv AQ$ deci $ABMQ$ este un trapez isoscel. $PN \parallel QM \parallel AB$, $VM \equiv VQ$ (ca diferenţă de segmente congruente), $VN \equiv VP$ şi $\triangle VMN \equiv \triangle VPQ \Rightarrow MN \equiv PQ$ deci $PNMQ$ este un trapez isoscel.

iii) Fie U mijlocul segmentului AC, punctul L aparţine dreptei de intersecţie a planelor (VBE) şi (VAC), dreaptă ce trece prin punctele fixe V şi U.

iv) Cum QM este linie mijlocie în triunghiul VCF, atunci $QM = a$ şi patrulaterul $ABMQ$ este un dreptunghi (conform teoremei celor trei perpendiculare).

Fie h_1 înălţimea dreptunghiului $ABMQ$ şi h_2 înălţimea trapezului isoscel $QMNP$, atunci

$$K = \frac{\sigma[QMNP]}{\sigma[ABMQ]} = \frac{1}{2}\frac{h_1}{h_2}\left(1 + \frac{PN}{a}\right).$$

Dreapta (VO) este bisectoare în triunghiul dreptunghic BVP şi aplicînd teorema bisectoarei interioare obţinem:

$$\frac{SP}{SB} = \frac{VP}{VB} \text{ deci } \frac{h_2}{h_1} = \frac{SP}{SB} = \frac{VP}{VB} = \frac{PN}{a}. \text{ Cum } VB \equiv VE \equiv$$

$$\equiv VD \text{ şi } VP \equiv VN \Rightarrow \frac{VP}{VB} = \frac{VP}{VE} = \frac{VN}{VD}.$$

De fapt patrulaterul $ABMQ$ este un pătrat cu latura a, deoarece latura BM este mediană în $\triangle VBC$ şi aplicînd teorema medianei, vom obţine:

$$BM^2 = \frac{(a\sqrt{2})^2 + a^2}{2} - \frac{(a\sqrt{2})^2}{4} = a^2 \Rightarrow BM = a.$$

Cum dreptele (VO) și (AN) sînt concurente în punctul S, atunci unind punctul H, mijlocul segmentului AB cu S, vom obține triunghiul dreptunghic în O, SOH cu $m(\widehat{OHS}) = 30°$, deci planul de secțiune este înclinat față de planul bazei cu $30°$. Prelungind dreapta (SH), pînă înțeapă planul (VED) vom obține punctul $\{W\} = (NP) \cap (SH)$, punct care se proiectează pe dreapta (DE) în punctul H', obținînd triunghiul $WH'H$ cu $HH' = a\sqrt{3}$, $m(\hat{H}) = 30°$, $m(\widehat{WH'H}) = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (care este de fapt chiar măsura unghiului diedru dintre planul bazei și planul feței laterale).

Aplicînd teorema sinusului în triunghiul $WH'H$ și ținînd cont că: $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ și $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ vom obține:

$$WH' = \frac{a\sqrt{3}}{\sin\left(180° - 30° - \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)} \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{7}}{3}a.$$

Dar $\triangle VWN \sim \triangle VH'D \Rightarrow \frac{VW}{VH'} = \frac{VN}{VD} \Rightarrow \frac{VN}{VD} =$

$$= \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}a - \frac{\sqrt{7}}{3}a}{\frac{\sqrt{7}}{2}a} = \frac{1}{3}, \text{ atunci raportul cerut este:}$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}.$$

170. Fie AC', BD', CA' și DB' diagonalele paralelipipedului care sînt congruente și concurente în punctul O. Fie P un punct oarecare din spațiu. În triunghiul PAC', PO este mediană și aplicînd lungimea medianei obținem:

$$AP^2 + C'P^2 = 2PO^2 + \frac{AC'^2}{2}.$$

În triunghiul PDB', avem analog:

$$DP^2 + B'P^2 = 2PO^2 + \frac{DB'^2}{2}.$$

La fel şi în celelalte două triunghiuri PCA' şi $PD'B$. Dar cum $AC' \equiv DB' \equiv BD' \equiv A'C$, rezultă $AP^2 + C'P^2 = DP'^2 + B'P^2 = \ldots$

Cum $2PO^2 + \frac{AC'^2}{2} = L^2 + l^2 + h^2$, unde L, l şi h sînt dimensiunile paralelipipedului şi cum

$$\frac{AC'^2}{2} = \frac{L^2 + l^2 + h^2}{2}, \text{ rezultă}$$

$$PO^2 = \frac{L^2 + l^2 + h^2}{4} = \frac{AC'^2}{4} = \left(\frac{AC'}{2}\right)^2 = \text{constant}.$$

Deci locul geometric este sfera circumscrisă paralelipipedului.

171. Planul determinat de punctele I, A şi B intersectează sfera după un cerc.

Patrulaterul $ABNM$ este înscris în acest cerc şi atunci (MN) este antiparalelă cu (AB) faţă de unghiul AIB. Atunci (MN) îşi păstrează direcţia şi avem $\triangle IAB \sim \triangle IMN$. Rezultă că $\frac{IB}{IA} = \frac{IM}{IN}$, sau ţinînd seama de ipoteză avem $\frac{IM}{IN} = \frac{L_1M}{L_1N}$. Punctul L_1 este situat pe bisectoarea unghiului AIB.

Asemănător demonstrăm că punctul L_2 respectiv punctul L_3 descriu bisectoarele unghiurilor BIC şi AIC.

Deci locurile geometrice sînt bisectoarele feţelor laterale care trec prin vîrful I.

Reciproc: constatăm că din locul geometric determinat trebuie exclus punctul I pentru care L_1M, L_1N, L_2N, L_2P şi L_3P, L_3M se anulează.

172. Triunghiurile ABM, AMN şi ANB sînt dreptunghice. Punctul N este pe sfera de diametru AB dar şi pe suprafaţa conică generată de dreapta (BM). Planul (AMN) este perpendicular pe planul cercului (C). Cercul cu diametrul AM este conţinut în sfera care are ca cerc mare cercul (C) şi conține punctul N, de unde rezultă că locul geometric al punctului N este intersecția celor două sfere. *Reciproc:* orice punct al intersecției celor două sfere aparține locului geometric căutat.

173. Fie V vîrful triedrului și H proiecția lui pe planul (ABC). Avem $BV \perp SC$, $BV \perp SA$ de unde $BV \perp AC$. Din $AC \perp BV$, $AC \perp VH$ rezultă $AC \perp BH$, deci BH este înălțime. Analog $CH \perp AB$, $AH \perp BC$, deci H este ortocentrul triunghiului ABC. Fie (R) planul dus prin V, perpendicular pe (D). Cum $VH \perp (D)$, $VH \subset (R)$ și notăm $\{L\} = (R) \cap (D)$. Avem $H \in (R)$, $LH \perp HV$, deci H descrie în planul (R) cercul de diametru LV.

În cazul al doilea locul geometric este sfera de diametru LV.

174. Fie triunghiul ABC, M un punct din spațiu, M' proiecția punctului M pe planul (ABC). Proiecția punctului M pe o latură a triunghiului coincide cu proiecția pe această latură a punctului M' (conform teoremei celor trei perpendiculare). Înseamnă că dacă proiecțiile punctului M pe laturile triunghiului sînt coliniare și proiecțiile punctului M' sînt coliniare. Dar locul geometric al punctelor din planul triunghiului ABC, ale căror proiecții pe cele trei laturi ale triunghiului sînt coliniare este cercul circumscris triunghiului. Rezultă că locul geometric al punctelor M din spațiu este cilindrul de rotație avînd ca bază cercul circumscris triunghiului ABC.

175. Notăm cu A', B', C' centrele cercurilor (DCB), (DAC), (DAB), cu (t), (t'), (t'') tangentele în D la aceste cercuri, cu O centrul sferei circumscrise tetraedrului. Atunci dreapta (OB') este perpendiculară pe planul (ACD), (t') este perpendiculară pe $B'D$ și aparține planului (ACD). Aplicînd teorema celor trei perpendiculare rezultă că (t') este perpendiculară pe OD. Analog se demonstrează că tangentele (t) și (t'') sînt perpendiculare pe OD. Înseamnă că cele trei tangente aparțin aceluiași plan perpendicular pe OD, plan tangent în punctul D la sferă. Dreptele (AB), (AC), (BC), aparținînd planului (ABC), intersecțiile lor cu cîte una din tangente vor fi trei puncte situate atît în planul (ABC) cît și în planul tangent determinat mai înainte. Prin urmare aceste puncte sînt coliniare. Dacă avem una din congruențele $DA \equiv DB$ sau $DA \equiv DC$ sau $DB \equiv DC$ una din cele trei tangente devine paralelă cu latura considerată. Dacă tetraedrul este regulat toate tangentele sînt respectiv paralele cu laturile cerute.

176. (Fig. II.176) Conurile circumscrise fiind conuri de rotaţie, dreptele care unesc vîrful cu centrul cercului de contact (MA) respectiv (MA') sînt perpendiculare pe planele (P), (P'). Deci aceste drepte trec şi prin centrele celor două sfere.

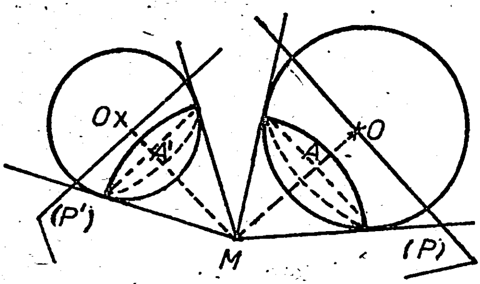


Fig. II.176

i). Dacă planele (P) şi (P') sînt paralele atunci şi dreptele (MO) şi (MO') trebuie să fie paralele. Acest lucru se poate întîmpla numai dacă punctul M este coliniar cu punctele O şi O'. Deci locul geometric căutat este linia centrelor.

ii) Dacă planele (P) şi (P') sînt perpendiculare atunci şi dreptele (MO) şi (MO') sînt perpendiculare. Înseamnă că segmentul fix OO' este văzut din punctul M sub un unghi drept. Locul geometric căutat este sfera cu diametrul OO'.

Discuţie. Ca problema să aibă sens (conurile să fie reale), punctul M trebuie să fie exterior ambelor sfere, deci în cazul i) locul geometric este linia centrelor fără segmentele din interiorul sferelor, în cazul ii) locul geometric este suprafaţa sferică exterioară sferelor date.

177. (Fig. II.177) Avem $AB \equiv AD \equiv BD \equiv BC \equiv \equiv AC = a$, $NP \parallel AB$ cu $P \in BD$, $MR \parallel AB$ cu $R \in AC$. Fie $AN \equiv MB \equiv AR \equiv BP = x$ de unde $MR \underline{\parallel} PN$ deci $PMRN$ este un paralelogram. Deoarece (MR), (PN), (AB) sînt drepte paralele şi (RN), (MP), (CD) drepte paralele între ele, rezultă că $PMRN$ este într-un plan paralel cu AB şi CD. Fie acum B_1 şi C_1 respectiv mijloacele muchiilor CD şi AB, atunci $DC_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AB$ deci $m(\widehat{DC_1C}) = \alpha$ măsura unghiului diedru corespunzător muchiei AB. Notăm cu B_2 și C_2 mijloacele segmentelor MP și MR. Din motive de simetrie diagonalele MN și PR sînt congruente, deci figura $MPNR$ este un dreptunghi și fie S intersecția diagonalelor lui.

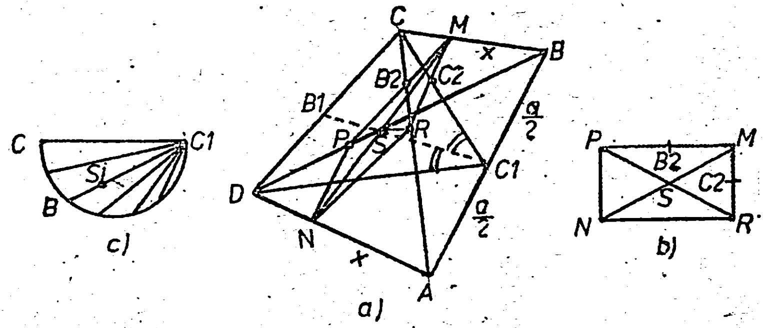


Fig. II.177

Considerînd diedrul α fix, iar punctul M mobil, avem:
a) $B_2S \perp PM$ dar $BB_1 \perp PM$, deci planul $((BB_1), (B_2S)) \perp$ $\perp$ planul (BCD) și deci $S \in$ planului (AB_1B).

b) $C_2S \perp MR$ dar și $CC_1 \perp MR$, deci planul $((C_2S), (CC_1)) \perp$ planul (ABC) și deci $S \in$ planului (CC_1D), deci $S \in$ planul $(ABB_1) \cap$ planul (CC_1D) = dreapta (C_1B_1). Deoarece $CC_1 \equiv DC_1$ și $CB_1 \equiv DB_1$, rezultă că $C_1B_1 \perp CD$, deci $m(\widehat{CB_1C_1}) = 90°$.

Dacă α este variabil, B_1 aparține semicercului de diametru CC_1 din planul fix (CC_1D), $S \in C_1B_1$. Cum B_1C_1 acoperă semicercul, locul geometric al punctului S este mulțimea punctelor din planul (CC_1D) perpendicular pe AB în mijlocul său C_1 situate în interiorul semicercului de diametru CC_1, din planul (ABD). Dacă $M \equiv C$, $S \equiv B_1$ atunci S aparține semicercului considerat.

Observație: Se poate considera mai întîi punctul M fix și α variabil obținînd același rezultat.

178. Ducem prin centrul sferei un segment $OC \equiv AB$ și paralel. Fie $M \in (S)$ și $MN = OC$ și paralel. Figura $OMNC$ este paralelogram, deoarece $MN \equiv OC$ și paralel. Astfel cum $CN \equiv OM = R$, C fiind fix, rezultă că locul geometric al punctului N este o sferă egală cu (S), de centru C. Dacă MN este de sens opus segmentului AB, locul geometric este sfera egală cu (S) de centrul C', simetricul punctului C față de O.

179. Triunghiurile ABM, AMN şi ANB sînt dreptunghice. Punctul N este pe sfera de diametru AB, dar şi pe suprafaţa conică generată de dreapta (BM). Planul (AMN) este perpendicular pe planul cercului (C). Cercul cu diametrul AM este conţinut pe sfera care are ca cerc mare cercul (C) şi conţine punctul N, de unde rezultă că locul geometric al punctului N este intersecţia celor două sfere.

Reciproc: orice punct al intersecţiei celor două sfere aparţine locului geometric căutat.

180. Locul geometric este o dreaptă perpendiculară pe planul centrelor care se numeşte axa radicală a celor trei sfere date.

181. Este intersecţia planelor radicale ale sferelor luate două cîte două, sau a axelor radicale ale sferelor luate cîte trei. Punctul acesta se numeşte centrul radical al sferelor.

182. Fie A proiecţia lui O pe dreapta (D). Locul geometric este o parte din cercul descris pe OA ca diametru în planul dus prin punctul O perpendicular pe (D), partea din acest cerc interioară sferei date.

183. Porţiunea interioară sferei (O) din sfera descrisă pe OA ca diametru, deoarece $m(\widehat{OLA}) = 90°$ cu punctele O şi A fixe.

184. Fie O_1 centrul uneia dintre sferele mobile. Pătratul razei acestei sfere este $O_1O^2 + R^2$ sau $O_1O'^2 + R^2$, deci $O_1O^2 - O_1O'^2 = R'^2 - R^2$. Locul geometric este un plan (probl. 168).

185. În cazul a două sfere locul geometric al vîrfurilor conurilor din enunţ este sfera, care are ca diametru segmentul de dreaptă cuprins între centrele de asemănare a celor două sfere. Locul geometric cerut este un cerc.

186. Vom nota cu O, P, N şi Q mijloacele segmentelor AA', MM', AM' şi $A'N$. Patrulaterul $ONPQ$ este romb, iar planul este planul mediator segmentului AA', deoarece $OQ \parallel (D)$, $ON \parallel (D')$ şi $AA' \perp (D)$, $AA' \perp (D')$ (unde planul mediator al unui segment AB este locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de punctele distincte A şi B, este un plan perpendicular pe AB şi care trece prin mijlocul segmentului AB). Deci locul geometric al punctului P este pe bisectoarea unghiului NOQ, unde (OQ) este proiecţia dreptei (D) pe planul mediator şi (ON) proiecţia dreptei (D') pe planul mediator.

Reciproc: Să arătăm că orice punct de pe bisectoarea (B_1) sau (B_2) a unghiului NOQ are proprietatea că este mijlocul unui segment MM', cu extremităţile pe dreptele (D) şi (D') şi $AM \equiv A'M'$.

Fie $P \in (B_1)$. Ducem prin punctul P, la planul mediator al segmentului AA' paralele la OQ şi ON. Atunci patrulaterul $ONPQ$ este romb şi dacă $\{M\}=(A'Q)\cap(D)$, $\{M'\}=(AN)\cap(D')$ atunci $AM \equiv A'M'$. Deci locul geometric este format din reuniunea dreptelor (B_1) şi (B_2).

187. i) Cum centrul fiecărei sfere care trece prin punctele fixe A, B este egal depărtat de extremităţile segmentului AB, atunci locul geometric al centrului este planul mediator al segmentului AB.

ii) Cum centrul fiecărei sfere care trece prin punctele fixe A, B, C este egal depărtat de cele trei puncte, atunci locul geometric al centrului este o dreaptă perpendiculară dusă prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC pe planul ce include triunghiul ABC.

188. Fie O centrul poligonului $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ de bază. Dar aplicînd teorema medianei în $\triangle VA_iA_{n+i}$ obţinem
$$\sum_{i=1}^{n}(VA_i^2 + VA_{n+i}^2) = \sum_{i=1}^{n}(VO^2 + OA_i^2 + VO^2 + OA_{n+i}^2) =$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n}(VO^2 + OA_i^2) = 2\sum_{i=1}^{n}(VO^2 + R^2) = 2n(VO^2 + R^2) =$$
$$= K = \text{constant} \Rightarrow VO = \sqrt{\frac{K}{2n} - R^2}.$$
Deci locul geometric al vîrfului este o sferă cu centrul în punctul O.

189. i) Fie B intersecţia dintre planul meridian şi ecuator. Din punctele A şi M coborîm perpendicularele în M'' şi M' pe dreapta OB.

Din triunghiurile dreptunghice OMM' şi AOM'' rezultă $OM' \equiv OM''$, deci punctele M' şi M'' coincid. Cum punctele A şi O sînt fixe şi $m(\widehat{AM'O}) = 90°$, atunci locul geometric al punctului M' este format din reuniunea a două cercuri de diametru egal cu raza Pămîntului, cel de al doilea cerc trecînd prin punctele O şi A' (A' este simetricul punctului A faţă de O).

ii) $m(\widehat{MOA}) = 45°$, deci fiind dată dreapta (D) perpendiculară pe ecuator în A, dreapta (D) rămîne fixă, iar dreapta (AM) rămîne înclinată față de (D) cu $45°$.

190. (Fig. II.190) i) Se intersectează mediatoarea segmentului AB cu cele două bisectoare ale unghiului format de dreptele (D) și (Δ).

ii) $S = 2\pi a\sqrt{a^2-l^2}$,

$$V = \frac{2}{3}\pi(a^2-l^2)l.$$

iii) Locul geometric al punctelor este format din dreptele de intersecție dintre planul mediator al segmentului AB și planele perpendiculare pe planul (D, Δ) trecînd prin bisectoarele unghiului format de dreptele (D) și (Δ).

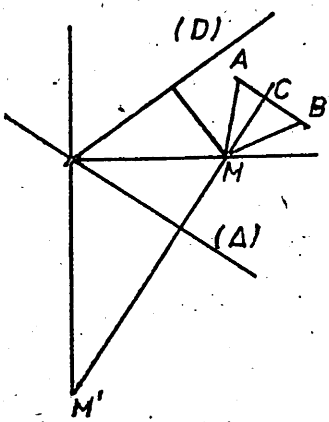


Fig. II.190

191. i) Punctul se află la intersecția mediatoarei segmentului AB cu una dintre bisectoarele dreptelor (D), (D').

$$\text{ii) } A = \frac{2\pi a}{b}(2a+b)\sqrt{b^2-a^2},\quad V = \frac{4\pi a^2}{3b}(b^2-a^2).$$

iii) Locul geometric este format de intersecția planului mediator al segmentului AB cu planul perpendicular pe planul mediator al segmentului AM.

192. i) Toate dreptele perpendiculare în A pe AM aparțin unui plan (π_1) perpendicular pe AM deci într-un plan perpendicular pe (π), iar dreptele perpendiculare în B pe BM sînt situate într-un plan (π_2) perpendicular pe planul (π). Planele (π_1) și (π_2) se intersectează cu (π) după dreptele (AM), (BM) care se intersectează într-un punct N. Dreapta (d) de intersecție a planelor (π_1) și (π_2) trece prin punctul N și este perpendiculară pe planul (π). Punctul P aparține planului (π_1) și planului (π_2) deci se află pe dreapta de intersecție a acestor plane.

Dacă M este punct fix atunci N este punct fix, deci locul geometric al punctului P este dreapta (d).

ii) Dacă M descrie un cerc ce trece prin punctele A şi B atunci N descrie acelaşi cerc (O); $m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{MBN}) = 90°$, iar locul geometric al punctului P este cilindrul circular drept care are ca bază cercul (O) şi generatoarele perpendiculare pe planul (π).

iii) Dacă M descrie o dreaptă (d) perpendiculară pe AB, fie M' intersecţia lui (d) cu AB, iar N' proiecţia lui N pe AB. $MM'NN'$ este un trapez, iar dreapta (OR) care uneşte mijloacele diagonalelor MN şi $M'N'$ este paralelă cu MM' şi NN' deci $OR \perp AB$. Q este centrul cercului circumscris patrulaterului $MANB$ deci R este proiecţia sa pe AB (mijlocul lui AB). Deci N' este simetricul punctului M' faţă de punctul fix Q deci este punct fix. Locul geometric al punctului N va fi o dreaptă (d') simetrica dreptei (d) faţă de Q. Cînd N descrie (d'), (d) generează un plan pe (π) şi care intersectează planul (π) după dreapta (d'), plan care va fi locul geometric al punctului P.

193. i) Rezultă că $A_0 \in \pi \cap \alpha = d(B_1, B_2)$.

ii) Punctul P aparţine planelor determinate de (d_1, A_1) şi (d_2, A_2) adică pe dreapta lor de intersecţie. Aceste plane trecînd prin dreptele paralele (d_1) şi (d_2), dreapta lor de intersecţie este paralelă cu (d_1) şi cu (d_2) şi deci şi cu planul (π).

iii) În cazul general $(d_1) \cap (d_2) = \{B_0\}$ mulţimea punctelor P este o dreaptă care conţine punctul B_0. Punctele B_0, B_1, A_1, A_2 formează un patrulater strîmb. Demonstraţia rezultă folosind proprietăţile liniei mijlocii într-un triunghi.

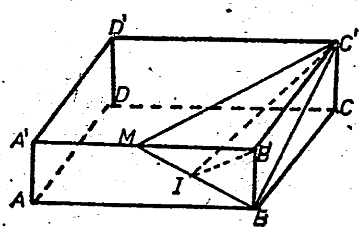


Fig. II.194

194. (Fig. II.194) i) Dreapta $(C'B')$ este perpendiculară pe planul $(MB'B)$. Ducem $B'I \perp BM$; conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $C'I \perp MB$.

Avem

$$C'I^2 = C'B^2 + B'I^2 = b^2 + \frac{a^2c^2}{a^2 + 4c^2}$$

deci

$$C'I = \sqrt{\frac{a^2b^2 + 4b^2c^2 + a^2c^2}{a^2 + 4c^2}}.$$

ii) Fie h distanța de la vîrful B' la planul (BMC') atunci:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{B'C'^2} + \frac{1}{B'M^2}$$

sau

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}}$$

de unde

$$h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + 4b^2c^2 + a^2c^2}}.$$

iii) Din punctul I segmentul BB' se vede sub un unghi drept.

Locul geometric al punctului I este arcul din semicercul de diametru BB' delimitat de B' și de intersecția semicercului cu diametrul $A'B$.

195. (Fig. II.195) i) $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAE}) = 180°$.

ii) $BD \parallel CE$, ambele drepte fiind perpendiculare pe $\widehat{DAE}$.

iii) Cum $\triangle ADB$ și $\triangle AEC$ sînt dreptunghice isoscele DP și EQ sînt mediatoarele laturilor AB și AC.

Dar cum $\triangle CQM \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow$ $\Rightarrow CM = \frac{1}{2}BC$, deci cum

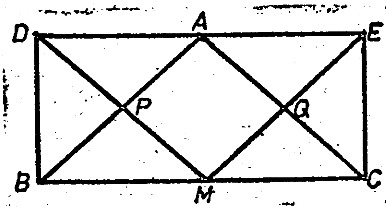


Fig. II.195

M este mijlocul segmentului BC, atunci concurența este demonstrată.

196. i) Relația dată este echivalentă cu:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \triangle CAM \sim \triangle BAC \Rightarrow m(\widehat{AMC}) = m(\widehat{ACB}).$$

În patrulaterul inscriptibil $AMPC$ avem $m(\hat{M}_1) = m(\hat{P}_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\hat{P}_2) = m(\widehat{ACB})$. Cum $\triangle PAC$ are două unghiuri congruente este isoscel, deci $PA \equiv CA$ = constant, deci locul geometric al punctului P este un cerc cu centrul în A și raza PA de aceeași măsură ca și a catetei AC.

ii) (Fig. II.196 ii) $(MP) \cap (AC) = \{C\}$. $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{PC'C})$ deoarece au laturile perpendiculare, iar $\widehat{ABC} \equiv \widehat{MCA} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ACM$, deci $\triangle C'MC$ este isoscel și deci $AC' \equiv AC$. Dreapta (MP) este variabilă, trece prin punctul fix C' simetricul punctului C față de A.

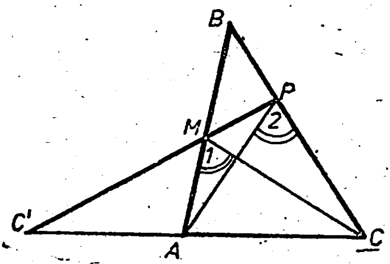


Fig. II.196 ii

197. (Fig. II.197) i) Cum H este punctul de intersecție al bisectoarelor, atunci conform definiției bisectoarei ca loc geometric este egal depărtat de laturile unghiului deci:

$HM \equiv HN$ și $HM \equiv HL$, deci H este situat la egală depărtare de baze; analog pentru K, deci dreapta ce trece prin H și K este paralelă cu bazele.

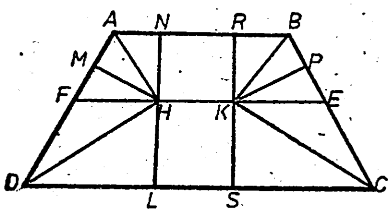


Fig. II.197

ii) Triunghiurile AHD și BKC fiind dreptunghice, medianele lor FH și KE sînt respectiv congruente cu jumătățile ipotenuzelor, deci $FH = \frac{AD}{2}$ și $KE = \frac{BC}{2}$.

iii) Calculăm măsura segmentului HK:

$$HK = FE - (FH + KE) = \frac{AB + DC}{2} - \frac{AD + BC}{2},$$

iar pentru ca cele patru bisectoare să fie concurente trebuie să avem $HK = 0$, deci condiția cerută este:

$$AB + DC = AD + BC.$$

198. (Fig. II.198). $PO_1^2 = PH^2 + HO_1^2 = K \cdot HM^2 + (OO_1 - OH)^2 = K^2 \cdot (R - OH)^2 + OO_1^2 + OH^2 - 2 \cdot OO_1 \cdot OH = K^2 (R - OH)^2 + R^2(1 - K^2) + OH^2 -$

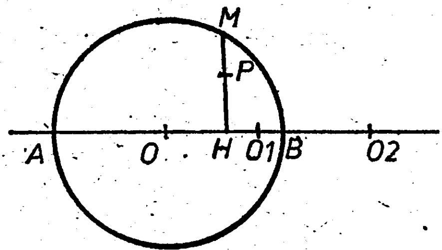


Fig. II.198

$- 2 \cdot OO_1 \cdot OH = R^2 + OH^2(1 - K^2) - 2 \cdot OH \cdot OO_1$, iar $OO_2 = \dfrac{R^2}{OO_1} = \dfrac{R}{\sqrt{1 - K^2}}$; $HO_2^2 = (OO_2 - OH)^2 = OO_2^2 + OH^2 - 2 \cdot OO_2 \cdot OH = \dfrac{R^2}{1 - K^2} + CH^2 - 2 \cdot OH \cdot OO_2$. Cum punctele O_1 si O_2 sînt conjugate armonic cu punctele A și B înseamnă că $OO_1 \cdot OO_2 = R^2 \Rightarrow \dfrac{PO_1^2}{HO_2^2} = 1 - K^2$.

ii) Fie O_2' simetricul punctului O_2 față de O, atunci

$$\frac{PO_1'}{HO_2'} = \sqrt{1 - K^2},\ PO_1 = HO_2 \cdot \sqrt{1 - K^2},$$

$$PO_1' = HO_2'\sqrt{1 - K^2} \Rightarrow PO_1 + PO_1' = (HO_2 + HO_2')\sqrt{1 - K^2} = 2 \cdot OO_2 \cdot \sqrt{1 - K^2} = 2R.$$

iii) Cum punctele O_1 și O_1' sînt fixe, și din punctul ii) $PO_1 + PO_1' = 2R =$ constant, atunci conform definiției elipsei ca loc geometric, punctul P va descrie o elipsă cu axa mare $2R$ și cu focarele O_1 și O_1'.

Reamintesc: se numește elipsă locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanțelor la două puncte fixe numite focare este constantă.

199. (Fig. II.199). Patrulaterele $MNPQ$ și $RNSQ$ sînt două paralelograme care au diagonala NQ comună. Prin mijlocul I al ei trec și celelalte două diagonale RS și MP.

ii) Considerînd D ortocentrul triunghiului ABC, $NP \parallel BD$ deci $NP \perp AC$ şi cum $PQ \parallel AC$ rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este un dreptunghi. Deci segmentele MP, NQ, RS sînt congruente şi au mijloacele în punctul I, deci punctele M, N, P, Q, R, S se află pe un acelaşi cerc cu centrul I, care este cercul lui Euler (sau cercul celor 9 puncte).

200. (Fig. II.200) i) Segmentele BA' şi AB' sînt paralele şi congruente cu PC, deci sînt paralele şi congruente între ele, deci BB' şi AA' se intersectează în punctul M, care este mijlocul lor. Analog se arată că CC' şi AA' se intersectează în mijlocul lor, şi cum mijlocul unui segment este unic, intersecţia se realizează tot în punctul M, deci cele trei segmente trec prin punctul M.

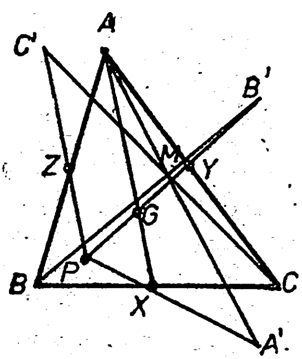


Fig. II.200

ii) Segmentele AX şi PM sînt mediane în triunghiul APA', dreapta (PM) intersectează mediana AX a triunghiului ABC în punctul G, centrul de greutate al triunghiului, care este un punct fix cînd P este variabil.

iii) Relaţia $\frac{GM}{GP} = -\frac{1}{2}$ arată că atunci cînd punctul P descrie o curbă oarecare, punctul M descrie curba omotetică cu prima, faţă de centrul G şi în raportul $-\frac{1}{2}$. Cînd P descrie o dreaptă fixă (Δ), punctul M descrie dreapta (Δ') omotetica lui (Δ) faţă de centrul G şi în raportul $-\frac{1}{2}$.

201. (Fig. II.201) i) Dacă se consideră triunghiul $A_1B_1C_1$ format de bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC, acesta are ca ortocentru punctul I şi ca cerc cercul lui Euler, cercul O în care este înscris triunghiul ABC. Se deduce că punctele A', B', C', mijloacele ipotenuzelor IA_1 (în $\triangle IBA_1$), IB_1 (în $\triangle ICB_1$), IC_1 (în $\triangle IAC_1$) sînt pe cercul circumscris triunghiului ABC, cu centrul în O. Punctele A', B', C' sînt centrele cercurilor (IBA_1C), (ICB_1A), (IAC_1B), adică cercurile cerute în enunţ, deci atunci cînd triunghiul ABC este variabil, dar rămîne înscris în cercul O, centrele cerute descriu în întregime cercul de centru O.

ii) Pentru că punctul O este centrul cercului lui Euler pentru triunghiul $A_1B_1C_1$ și I este ortocentrul acestui triunghi, rezultă că O_1, simetricul lui I în raport cu O, este centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ și acest cerc are raza de două ori mai mare decît raza cercului cu centrul în punctul O.

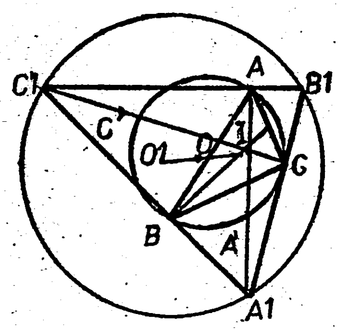
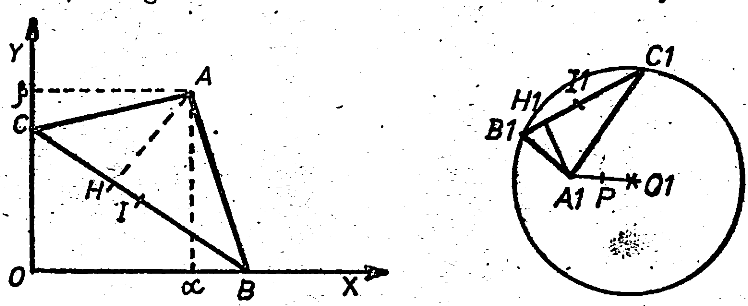


Fig. II.201

202. (Fig. II.202). i). Pentru locul geomtric descris de punctul I, patrulaterul $OBAC$ este inscriptibil în cercul cu diametrul BC și are centrul în I. Acest cerc trece prin două puncte fixe O și A, așa că centrul cercului se deplasează pe mediatoarea segmentului OA.

Pentru locul geometric descris de punctul H: Cum proiecțiile unui punct A, de pe cercul circumscris triunghiului OBC pe cele trei laturi ale triunghiului sînt coliniare (dreapta lui Simson), atunci punctul H descrie dreapta care unește proiecțiile punctului A pe Ox și Oy, notate cu α și β adică dreapta $(\alpha\beta)$.

ii) Pentru locul geometric descris de punctul I_1: pentru că în $\triangle A_1B_1C_1$ dreptunghic, avem $I_1A_1 \equiv I_1B_1 \equiv I_1C_1$, iar dacă R este raza cercului (O_1), putem scrie $R^2 = O_1B_1^2 = O_1I_1^2 + B_1I_1^2 = I_1O_1^2 + I_1A_1^2$, deci punctul I_1 are proprietatea că suma pătratelor distanțelor la două puncte fixe O_1 și A_1 este constantă, locul geometric este deci un cerc cu centrul în mijlocul P



i) ii)

Fig. II.202

al segmentului O_1A_1, raza lui fiind $r = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$, unde d este distanța dintre O_1 și A_1. Pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca $d < R\sqrt{2}$. Cînd $d = R$, punctul A_1 este pe cercul dat, deci cercul se reduce la un punct, punctul O_1. Cînd A_1 este pe cercul O_1, locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la cercul (O_1), deci este de rază $R\sqrt{2}$, locul geometric al punctului I_1 se reduce la un punct, mijlocul segmentului O_1A_1. Pentru locul geometric al punctului H_1: pentru că dreptele (A_1H_1) și $(O_1 I_1)$ sînt perpendiculare pe B_1C_1, punctul P, mijlocul lui O_1A_1 este egal depărtat de H_1 și de I_1 deci H_1 descrie cercul de la punctul precedent.

203. (Fig. II.203) i). Fie $\{F\} = (BC) \cap (AD)$, $m(\widehat{ACF}) = m(\widehat{ACB}) = 90°$, deci F aparține cercului care trece prin A, O, C și are centrul în D. Cum $m(\widehat{AOF}) = 90°$ și O este mijlocul segmentului AB, rezultă că în triunghiul FAB, FO este înălțime și mediană, deci este triunghi isoscel. Același triunghi mai are înălțimea AC și ele se intersectează în ortocentrul H. Punctul H aparține cercului circumscris triunghiului OBC deoarece patrulaterul $OBCH$ este inscriptibil (Unghiurile din O și C sînt drepte), diametrul său fiind BH, deci cercul ce trece prin OBC trece și prin punctul H. Deci dreapta (BE) trece prin H, ceea ce înseamnă că este a treia înălțime a triunghiului FAB. Cum

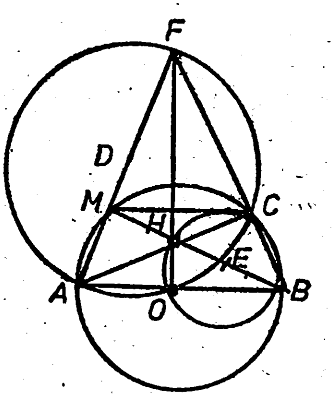


Fig. II.203

$m(\widehat{AMB}) = 90°$, atunci locul geometric al punctului M este cercul cu diametrul AB.

Mai observăm că triunghiul FAB fiind isoscel $\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle ABM$ deci $MC \parallel AB$.

ii) În triunghiul BHA, dreapta (OE) unește mijloacele a două laturi deci este paralelă cu AHC, analog în $\triangle ABF$ dreapta (OD) este paralelă cu $BF \Rightarrow OE \perp OD$. Cum $m(\widehat{DME}) = 90° \Rightarrow$ punctele M și O aparțin cercului de diametru DE.

Punctele O și C, de intersecție a cercurilor cu centrele în E și D, sînt simetrice față de linia centrelor, deci punctul C aparține cercului $(OEDM)$.

204. (Fig. II.204) i) În triunghiul ABC avem $CE^2 = AE \cdot EB = (2R - x)x$ unde $EB = x$. Din $\triangle ATE$ dreptunghic avem $TE^2 = EI \cdot EA = EI \cdot (2R - x)$. Cum $TE \equiv CE$ ca fiind raze în aceleași cerc, rezultă că $EI = x$, deci $EI \equiv EB$.

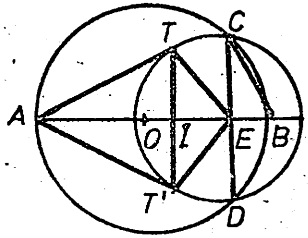


Fig. II.204

ii) Din $\triangle ATE$, avem $TI^2 = AI \cdot IE = 2x(R - x)$, deci aria $\triangle ATT'$ este $f(x) = \sigma[ATT'] = 2(R - x)\sqrt{2x(R-x)}$.

iii) $x \in [0, R]$ și $f(0) = f(R) = 0$ și cum $f'(x) = -\dfrac{2(R-x)(R-4x)}{\sqrt{2x(R-x)}}$ avem un maxim pentru $x = \dfrac{R}{4}$, avînd valoarea de $\dfrac{3\sqrt{6}}{8}R^2$.

iv) Centrul de greutate G al triunghiului CIB aparține înălțimii CE, deci $GE = \dfrac{1}{3}CE$. Cum punctul C descrie cercul cu centrul O și rază R, notînd $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, avem $GE = CE \cdot \cos\alpha$, deci punctul G descrie o elipsă (conform proprietății că proiecția unui cerc de rază a pe un plan ce face cu planul cercului un unghi ascuțit α, astfel încît $b = a\cos\alpha$ este o elipsă de semiaxe a și b, iar cercul de rază a se numește cerc principal al elipsei) cu semiaxele în raportul $\dfrac{1}{3}$ și anume R și $\dfrac{1}{3}R$.

205. (Fig. II.205) i) $\triangle ABP \sim \triangle ACM$,

$$\triangle AIP \sim \triangle ABM \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AM} \text{ și } \frac{AP}{AM} = \frac{AI}{AB}$$

deci $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AI}{AB}$ așa că $AC \cdot AI = AB^2$ și cum segmentele

AC și AB sînt fixe rezultă că punctul I este fix. Din $\triangle IBP$ și $\triangle IQC$ dreptunghice, rezultă că P și Q descriu două cercuri cu diametrele IB, respectiv IC.

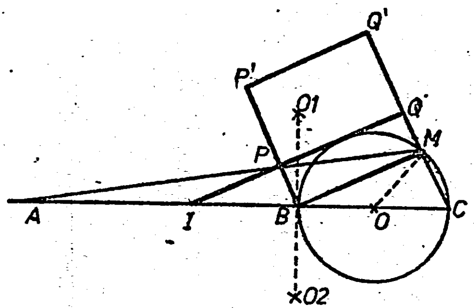


Fig. II.205

ii) Cum $m(\widehat{PBM}) = 90°$, din relația $AB^2 = AP \cdot AM$, rezultă că dreapta (AB) este tangenta dusă din A la cercul care trece prin punctele P, B, M și are ca diametru segmentul PM. Cum OB și OM sînt raze ale cercului inițial, rezultă că OM și OB sînt tangente la cercul (PMB), deci OM este perpendiculară pe diametrul PM, deci $m(\widehat{OMA}) = 90°$.

iii) Pe BM ca latură putem construi două pătrate $MBP'Q'$ în care vîrfurile se succed în sens invers trigonometric și un altul simetric față de BM. Este suficient să studiem, de exemplu, numai primul caz.

Cum $BP' \equiv BM$, punctul P' se deduce din punctul M printr-o rotație în jurul lui B de unghi drept în sens direct cu 90°. Locul geometric al punctului P' se deduce din locul geometric al punctului M, prin rotație în jurul lui B de unghi drept, deci este format de cercurile cu centrele O_1 și O_2 și de diametre congruente cu BC. Locul geometric al punctului Q', cînd punctul M descrie semicercul BMC și cum $m(\widehat{BQ'M}) = m(\widehat{MQ'C}) = \frac{\pi}{4}$; Q' este pe arcul de cerc capabil de unghiul $\frac{\pi}{4}$, descris pe BC ca bază. Analog se obține în cazul cînd punctul M descrie cealaltă jumătate a cercului dat. În cazul cînd se consideră al doilea pătrat, locul geometric este simetricul celui precedent față de BM.

206. (Fig. II.206) i) Din $\triangle AA'B$ și $\triangle AA'C$ dreptunghice avem $AB = 2R\cos\left(x - \frac{A}{2}\right)$; $AC = 2R\cos\left(x + \frac{A}{2}\right)$ și din teorema sinusului $BC = 2R\sin A$. Aria $\triangle ABC$ este $S = \frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2} = R^2 \sin A\,(\cos 2x + \cos A)$. Cum $2p = AB + AC + BC = 4R\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \cos x\right)$, avem $r = \frac{S}{p} =$

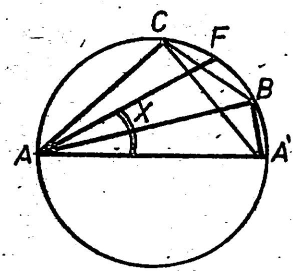


Fig. 206 i)

$$= \frac{R\sin\frac{A}{2}(\cos 2x + \cos A)}{\sin\frac{A}{2} + \cos x} = 2R\sin\frac{A}{2}\left(\cos x - \sin\frac{A}{2}\right).$$

ii) Cum $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, pentru $x = 0$ se realizează valoarea maximă a ariei S, care este $S_1 = R^2\sin A\cdot(1 + \cos A)$. Cum A este variabil, valoarea S_1 este maximă dacă $\mu(\hat{A}) = \frac{\pi}{3}$, iar valoarea ariei este $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

iii) Construim înălțimile CDE ș BGH, unde D și H aparțin laturilor AB, respectiv AC, iar punctele E și G aparțin cercului dat. Din triunghiul dreptunghic ACD avem $\mu(\widehat{ACD}) = \frac{\pi}{2} - \mu(\hat{A}) =$ constant, deci și arcul subîntins AE este constant. Cum A este punct fix atunci și E este punct fix, deci înălțimea din C a triunghiului ABC, trece prin punctul fix E. Analog, din triunghiul dreptunghic ABH rezultă că $\mu(\widehat{ABG}) = \frac{\pi}{2} - \mu(\hat{A})$ și că punctul G de pe înălțimea BGH este fix. Cum $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ABG}$ rezultă că arcele AE și ACG sînt congruente, deci E și G sînt puncte simetrice față de diametrul AA'. Locul geometric al picioarelor D şi H ale celor două înălţimi sînt cercurile cu diametrele AE, respectiv AG.

iv) Centrul I al cercului înscris triunghiului ABC este la intersecţia bisectoarelor AF şi CJ (J fiind pe cercul dat). Cum AF este bisectoarea unghiului A, arcele CF şi BF sînt

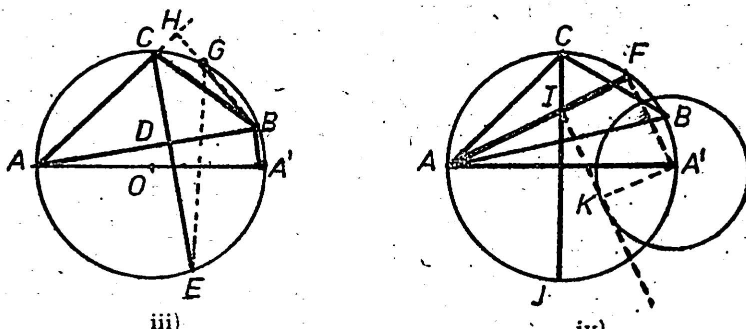


Fig. II.206

congruente. Măsurile unghiurilor JCF şi CIF sînt $\frac{\overset{\frown}{JB} + \overset{\frown}{BF}}{2}$ respectiv $\frac{\overset{\frown}{CF} + \overset{\frown}{AJ}}{2}$. Cum $\overset{\frown}{AJ} \equiv \overset{\frown}{BJ}$, deoarece măsoară unghiurile congruente ACI şi ICF (CJ este bisectoarea unghiului C), rezultă că $\widehat{JCF} \equiv \widehat{CIF}$ şi $\triangle CFI$ este isoscel, deci $IF \equiv CF \equiv FB$.

Perpendiculara în I pe AI este paralelă cu FA', deoarece $m(\widehat{AFA'}) = 90°$. Cum $\hat{A} =$ constant, rezultă că $\overset{\frown}{CF} =$ constant şi $CF \equiv IF =$ constant, deci distanţa punctului A' la dreapta IK este constantă şi egală cu IF, prin urmare dreapta (IK) rămîne tangentă la cercul cu centrul în A' şi raza $CF = 2R \sin \frac{A}{2}$.

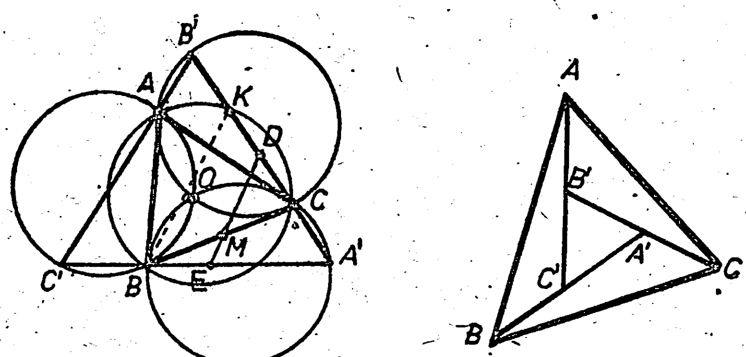
207. (Fig. II.207) i) Triunghiurile ABC', BCA' şi CAB' sînt congruente, ca avînd latura şi unghiurile alăturate respectiv congruente. Rezultă atunci că $B'C' = B'A + AC' = C'B + BA' = C'A'$, analog $A'B' \equiv B'C'$.

ii) Cum unghiurile triunghiului $A'B'C'$ sînt de $60°$, cele trei vîrfuri descriu trei cercuri simetrice față de laturile $\triangle ABC$ ale cercului circumscris acestui triunghi.

iii) Dacă punctele D, E sînt mijloacele laturilor $A'B'$, $A'C'$, dreapta (DE) este paralelă cu $(B'C')$. Prin B construim o paralelă (BK) la (DE) $(K \in A'B')$. Avem $KB' \equiv BC'$. Cum $\triangle ABC' \equiv \triangle ACB'$, avem $KB' \equiv BC' \equiv CA'$. Punctul D, mijlocul segmentului $A'B'$ este și mijlocul segmentului CK. Deci în $\triangle KCB$ dreapta (DE) dusă prin mijlocul D al segmentului KC și paralelă cu BK, intersectează latura BC în mijlocul M al ei. Deci (DE) trece prin punctul fix M.

iv) Cum $B'C' = C'A + C'B$, din triunghiul $AC'B$ avem:

$$\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{BC'}{\sin\alpha} = \frac{AC'}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{A'B'}{\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}$$



iii) iv)

Fig. II.207

deoarece $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, deci avem $\frac{AB}{A'B'} =$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}.$$ Cînd $\alpha = -\frac{\pi}{6}$

raportul $\frac{A'B'}{AB} = 0$, deci $\triangle A'B'C'$ degenerează într-un punct.

Cînd α creşte pînă la $\frac{\pi}{3}$, raportul creşte de la 0 la 2 şi apoi descreşte de la 2 la 0 cînd α creşte pînă la $\frac{5\pi}{6}$. Deci maximul este 2 şi este atins pentru $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

208. i) Cum triunghiul OCD este echilateral şi cum suma măsurilor unghiurilor patrulaterului $ABCD$ este 360°, avem $m(\hat{C}) = 60° + \alpha$, $m(\hat{D}) = 180 - \alpha$, $m(\hat{B}) = 120° - \alpha$, $AC = 2R\cos\alpha$, $BD = R(-\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)$.

ii) Unghiurile din C şi D ale triunghiului CDF sînt respectiv congruente cu unghiurile patrulaterului din B şi A, iar unghiul din F este 60°. Din teorema sinusului, avem $CF = \frac{2R}{\sqrt{3}}\sin\alpha$, $FD = R\left(\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\right)$, iar raza cercului circumscris este egală cu $\frac{\sqrt{3}}{3}R$.

iii) Cum $m(\hat{F}) = 60°$ şi cum laturile lui trec prin punctele fixe A şi B, locul geometric al punctului F este un cerc de pe care segmentul AB se vede sub unghiul constant de 60°.

iv) Din $AC = 3CF$ rezultă că $m(\hat{\alpha}) = 30°$. Unghiul B este atunci drept, deci OD coincide cu OB.

209. Notăm $OB = R$, $AB = R\sin\alpha = BF = AP$. Cum $BM \equiv AC \equiv OB = R$ şi $m(\widehat{BMF}) = m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{BOA}) = \alpha$ atunci $\triangle BOA \equiv \triangle OAC \equiv \triangle BMF$. Deci $OA = MF = R\cos\alpha$. $V = \frac{\pi AP}{3}(AB^2 + MP^2 + AB \cdot MP) =$

$$= \frac{\pi R\sin\alpha}{3} \cdot R^2[\sin^2\alpha + (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + \sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)] = \frac{\pi R^3}{3}\sin\alpha(3\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha).$$

$$V_1 = \pi \cdot AB^2 \cdot OA - \frac{\pi OC^2 \cdot DA}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot AB^2 \cdot OA = \frac{2}{3}R^3\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

ii) $\frac{V}{V_1} = \frac{3\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} =$

$= \frac{3\,\mathrm{tg}^2\alpha + 3\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, adică pentru $\mathrm{tg}\,\alpha = t$ avem

$y = \frac{V}{V_1}(t) = \frac{3t^2 + 3t + 1}{2t}$. Cum $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ atunci

$t \in (0, \infty)$; $y' = \left[\frac{V}{V_1}(t)\right]' = \frac{3t^2 - 1}{2t^2}$, $y'' = \left[\frac{V}{V_1}(t)\right]'' = \frac{1}{t^3}$.

Punctele $t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ sînt puncte de extrem, graficul nu admite puncte de inflexiune şi are asimptotele

$$t = 0 \text{ verticală şi } y = \frac{3}{2}(t+1) \text{ oblică.}$$

Tabloul de variaţie este:

α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
y'	∞	$-$	0	$+$	$\frac{3}{2}$
y	∞	$\searrow$	$\frac{3+2\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}232$	$\nearrow$	∞
y''	$+$		$+$	$+$	$+$

Graficul funcţiei este prezentat în figura II.209 ii.

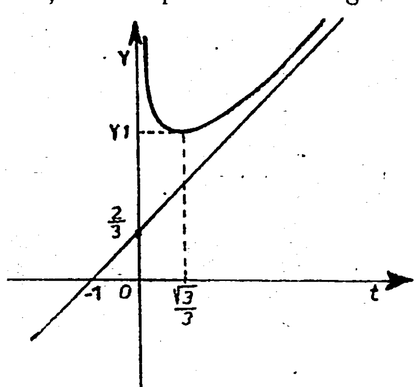


Fig. II.209 ii

iii) Coordonatele punctului M sînt $x_M = OP = R(\cos\alpha + \sin\alpha)$ şi $y_M = MP = R(\cos\alpha + \sin\alpha)$, deci locul geometric al punctului M este bisectoarea unghiului xOy şi dacă α creşte de la 0 la $\frac{\pi}{4}$ sau descreşte de la $\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{4}$, distanţa OM creşte de la $R\sqrt{2}$ la $2R$.

210. (Fig. II.210). i) Centrul cercului I_1 este la intersecţia bisectoarelor BI_1 şi CI_1 ale unghiurilor B şi ACB'. Deci

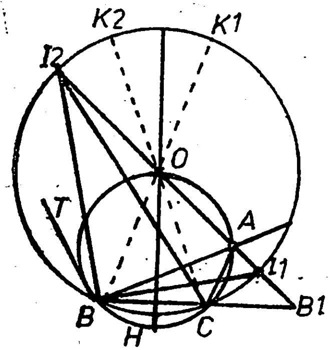


Fig. II.210

$m(\widehat{CBI_1}) = \frac{m(\hat{B})}{2}$, $m(\widehat{CBI_1}) = \pi - m(\widehat{B'CI_1}) = \frac{\pi + m(\hat{C})}{2}$.

Din $\triangle BCI_1$ deducem $m(\widehat{BI_1C}) = \pi - m(\widehat{CBI})_1 - m(\widehat{BCI_1}) = \frac{m(\hat{A})}{2}$ şi de asemenea din triunghiul BCI_2 deducem $m(\widehat{BI_2C}) = \pi - m(\widehat{BCI_2}) - m(\widehat{CBI_2}) = \frac{m(\hat{A})}{2}$.

ii) Locul geometric al punctului I_2 (ca şi al punctului I_1 pentru un raţionament analog) este arcul, capabil de unghiul $\frac{\hat{A}}{2}$, care trece prin punctele B şi C şi al cărui centru O este la intersecţia arcului capabil de unghiul A care trece prin B şi C şi mediatoarea segmentului BC. Cînd A se deplasează din C în B, I_1 se deplasează pe locul său geometric din C în K_1, la intersecţia acestuia cu bisectoarea BOK_1, a unghiului CBT a laturii BC cu tangenta BT în B. Locul geometric al punctului I_2 este simetric cu cel precedent.

iii) $m(\widehat{CBI_1}) = \frac{m(\hat{B})}{2}$ înscris în cercul circumscris triunghiului ABC, este jumătatea unghiului la centru $\widehat{I_1OC}$

deci $\frac{m(\widehat{I_1OC})}{2} = \frac{m(\hat{B})}{2}$ și cum $m(\widehat{COB}) = m(\hat{A}) \Rightarrow m(\widehat{COH}) =$
$= \frac{1}{2} m(\hat{A})$ și $OC = \frac{HC}{\sin(\widehat{COH})} = \frac{a}{2\sin\frac{A}{2}}$ (unde H este mijlocul segmentului BC). Din triunghiul I_1OC deducem

$$CI_1 = 2 \cdot OC \cdot \sin\frac{\widehat{I_1OC}}{2} = \frac{a\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Analog obținem $BI_2 = \frac{a\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$ și $m(\widehat{I_1OI_2}) = 2\pi -$
$- m(\widehat{BOC}) - m(\widehat{I_1OC}) - m(\widehat{BOI_2}) = 2\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C} = \pi$, deci I_1, O, I_2 sînt puncte coliniare și $I_1I_2 = 2 \cdot OI_1 =$
$= 2 \cdot OC = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}}$.

În triunghiul BCI_1 avem $\frac{BI_1}{\sin(BCI_1)} = \frac{BC}{\sin(BI_1C)} \Rightarrow$
$\Rightarrow BI_1 = a \cdot \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$ și analog $CI_2 = a\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$.

Cum $BI_1 \cdot BI_2 = \frac{a^2}{\sin^2\frac{A}{2}} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$ și $BC \cdot I_1I_2 +$
$+ CI_1 \cdot BI_2 = \frac{a^2}{\sin^2\frac{A}{2}} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$ rezultă relația cerută care este cea dată de teorema lui Ptolemeu pentru

patrulatere inscriptibile (şi anume: în orice patrulater inscriptibil, produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse).

211. i) Locul geometric al punctelor egal depărtate de cele două cercuri este un cerc C concentric cu cercurile date şi cu raza $\frac{R+r}{2}$. Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte paralele este o paralelă (D) cu ele dusă la mijlocul distanţei dintre ele. Dacă cercul C şi dreapta (D) sînt secante, avem două puncte care au aceeaşi proprietate, dacă cercul este tangent la dreaptă avem un singur punct, cînd dreapta este exterioară cercului nu avem nici un punct comun care să aibă această proprietate. Cînd cele două drepte sînt concurente, locul geometric al punctelor, egal depărtate de ele sînt cele două bisectoare ale lor. Dacă cercul C este secant la cele două bisectoare avem patru puncte care au proprietatea cerută, deci putem avea trei, două, unul sau nici un punct.

ii) Punctele egal depărtate de cele două cercuri aparţin cilindrului cu generatoarele perpendiculare pe planul cercurilor şi care are cercul cu raza $\frac{R+r}{2}$ ca şi curbă directoare. Punctele egal depărtate de două drepte paralele sînt aşezate pe planul perpendicular pe planul celor două drepte şi care trece prin dreapta echidistantă de ele. Punctele căutate sînt la intersecţia cilindrului cu planul.

Cînd dreptele sînt concurente, punctele egal depărtate de ele sînt aşezate pe planele perpendiculare pe planul dreptelor şi care trec prin bisectoarele dreptelor. Punctele căutate sînt la intersecţia cilindrului cu cele două plane. Acest loc geometric poate fi o elipsă, două drepte paralele sau o dreaptă.

iii) Locul geometric al punctelor al căror raport al distanţelor la două puncte fixe este constant, este o sferă cu diametrul egal cu segmentul determinat de punctele conjugate armonic cu punctele A şi B.

212. i) Locul geometric căutat este un cerc concentric cu cel dat şi cu raza dublă cu a acestuia.

ii) Locul geometric este dreapta perpendiculară pe planul triunghiului şi care trece prin centrul cercului circumscris triunghiului.

iii) Se calculează cu ajutorul teoremei lui Pitagora distanța de la un vîrf al triunghiului pînă la punctul P și aceasta fiind o coardă a sferei este medie proporțională între diametrul sferei și proiecția ei pe diametrul ce trece prin P și O. Dacă R este raza sferei avem

$$R = \frac{AP^2}{2 \cdot OP} = \frac{AO^2 + OP^2}{2 \cdot OP}.$$

213. i) Pentru că perpendiculara pe coardă, dusă din centrul sferei, împarte coarda și arcul subîntins de ea în două părți congruente, segmentul care unește centrul sferei cu punctul prin care trec coardele, se vede sub un unghi drept.

Locul geometric căutat este sfera de diametru congruent cu segmentul care unește centrul sferei cu punctul fix, dacă acesta este în interiorul ei sau pe sferă; dacă punctul este exterior sferei, locul geometric este format de calota sferei cuprinsă în interiorul sferei date.

ii) Locul geometric este cercul mare al sferei al cărui plan este perpendicular pe direcția dreptei cu care sînt paralele coardele.

iii) Locul geometric căutat este o sferă concentrică cu cea dată și cu raza $R + d$, dacă $d > R$; dacă $d < R$ avem două sfere concentrice cu cea dată, una cu raza $R + d$ și alta cu raza $R - d$; dacă $d = R$, locul geometric este format din sfera cu raza $R + d$ și centrul sferei date.

iv) Locul geometric este o sferă, concentrică cu sfera dată, cu raza $\rho = \dfrac{R}{\sin \alpha}$.

214. i) Axa radicală. ii) Planul radical. iii) Punctele căutate sînt la intersecția planului radical cu planul mediator al segmentului determinat de cele două puncte; în general locul geometric căutat este o dreaptă; poate fi un plan dacă planul mediator coincide cu planul radical și nici un punct dacă aceste plane sînt paralele.

iv) Locul geometric al punctelor de unde segmentul se vede sub un unghi drept este sfera care are acest segment ca diametru. Locul geometric căutat este intersecția planului radical cu sfera, deci este un cerc, un punct sau nu există puncte care să aibă proprietatea cerută, conform poziției planului radical față de sferă.

v) Locul geometric este la intersecția planului mediator al segmentului AB cu calota sferică ce reprezintă locul geometric al punctelor de unde segmentul format de centrele sferelor se vede sub unghiul α; în general este un arc de cerc, un punct sau nu există puncte care au această proprietate.

215. Deoarece triunghiul este înscris în cercul dat de centru punctul fix O și are ortocentrul fix în H, rezultă că centrul cercului lui Euler, aflat la mijlocul segmentului OH, este un punct fix (cercul lui Euler sau cercul celor 9 puncte este un cerc ce conține mijloacele laturilor, picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor care unesc ortocentrul cu vîrfurile triunghiului).

Raza cercului lui Euler este jumătate din raza cercului circumscris. Locul geometric al mijloacelor laturilor triunghiului este deci cercul lui Euler.

Discuție. i) dacă ortocentrul H este în afara cercului circumscris și dacă cercul lui Euler nu intersectează cercul circumscrs nu există nici un triunghi ABC care să fie înscris în cerc și avînd ortocentrul H.

ii) dacă cercul lui Euler intersectează cercul circumscris triunghiului, locul geometric este format numai din cele 9 puncte ale cercului lui Euler, interioare cercului circumscris.

216. (Fig. II.216) Cum $\triangle DTA \sim \triangle BDT \Rightarrow \frac{TA}{TB} = \frac{DA}{DT} = \frac{DT}{DB} \Rightarrow \frac{TA^2}{TB^2} = \frac{DA}{DB}$ și $\triangle ESA \sim \triangle ESC \Rightarrow \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{EA}{EC}$.

Cum DE este paralelă cu BC atunci $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$ și deci

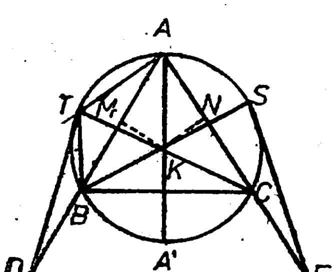


Fig. II.216

$\frac{TA}{TB} = \frac{SA}{SC}$ sau $\frac{TA}{SA} = \frac{TB}{SC}$.

Fie $\{K\} = (BS) \cap (CT)$, $\triangle KBT \sim \triangle KCS \Rightarrow \frac{TB}{SC} = \frac{KB}{KC} = \frac{TA}{SA}$ sau $KB \cdot SA = KC \cdot TA$. Proiectînd ortogonal pe K în punctele M și N ($M \in AB$, $N \in AC$) avem $MK = KB \cdot \sin(\widehat{ABK}) = \frac{KB \cdot AS}{2R}$; $NK = KC \cdot \sin(\widehat{ACK}) = \frac{KC \cdot AT}{2R}$, R fiind raza cercului circumscris triunghiului ABC. Rezultă că $MK = NK$, deci K aparține bisectoarei unghiului A (conform definiției bisectoarei ca loc geometric). Dacă unghiurile ADT, ADS sînt de sens contrar, punctele S și T aparțin arcului de cerc cu coarda BC și K aparține bisectoarei interioare a unghiului BAC. Dacă unghiurile ADT și AES sînt de același sens, unul din punctele T și S este pe arcul BAC, iar celălalt pe restul cercului și punctul K aparține bisectoarei exterioară a unghiului BAC.

217. (Fig. II.217) i) Fie (γ_1), (γ_2) cercurile de secțiune ale conurilor cu planul (Q), deci centrele lor sînt γ_1 și γ_2, iar A' și B' sînt centrele lor de omotetie directă respectiv in-

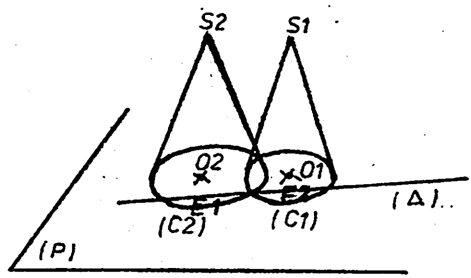


Fig. II.217 i)

versă (*Reamintesc omotetia*: față de un punct fix O numit centrul de omotetie și un număr $K \in \mathbf{R}$, numit raport de omotetie, două puncte M și M' de pe aceeași dreaptă ce trece prin O, sînt transformate prin omotetie, dacă avem $\frac{OM}{OM'} = K$. Dacă $K < 0$ se numește omotetie inversă, iar punctele omoloage M și M' sînt de o parte și de alta a centrului. Dacă $K = 1$, orice punct este propriul lui omolog prin omotetie. Dacă $K > 0$ se numește omotetie directă, iar puntele omoloage M și M' sînt de aceeași parte a centrului de omotetie Deci, printr-o omotetie lungimile segmentelor se înmulțesc cu K, iar unghiurile se păstrează în cazul omotetiei directe și își schimbă sensul în cazul omotetiei inverse. Două figuri se numesc omotetice, dacă există o omotetie care transformă punctele unei figuri în punctele celeilalte). Punctele A' și B' împart segmentul $\gamma_1\gamma_2$ în raportul razelor cercurilor (γ_1) și (γ_2). Razele cercurilor (γ_1) și (γ_2) se obțin ținînd seama că, dacă R_1 și R_2 sînt razele cercurilor (C_1) și (C_2) atunci

$$r_1 = \frac{S_1\gamma_1}{S_1O_1}\cdot R_1,\ r_2 = \frac{S_2\gamma_2}{S_2O_2}\cdot R_2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A'\gamma_1}{A_1\gamma_2} = \frac{\gamma_1B'}{\gamma_2B'} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{BO_1}{BO_2};$$

unde prin A și B am notat centrele de omotetie ale cercurilor (C_1) și (C_2). Cum $\gamma_1\gamma_2 \equiv O_1O_2$ rezultă că $A'\gamma_1 \equiv AO_1$, $\gamma B' \equiv O_1B$, iar punctele A' și B' descriu perpendicularele ridicate în punctele A și B pe planul (P). Cînd planul (Q) se deplasează numai între planul (P) și planul paralel cu el, dus prin vîrfurile conurilor S_1 și S_2, A' și B' descriu segmentele AA'' și BB''.

ii) Dacă cercurile (C_1) și (C_2) le presupunem secante, atunci planul $(S_1S_2O_2O_1)$, perpendicular pe planul (P) intersectează conurile după generatoarele S_1x_1, S_1y_1, S_2x_2, S_2y_2. Cînd conul cu vîrful în S_1, are unghiul generatoarelor

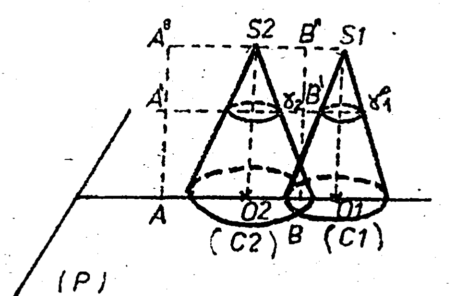


Fig. II.217 ii)

cel mai mare, generatoarea S_1x_1 intersectează generatoarea S_2y_2 în K și generatoarea S_2x_2 în K'. Cercurile (γ_1) și (γ_2) vor avea puncte comune, dacă urma planului (Q) pe planul $(S_1S_2O_2O_1)$ pe care o notăm cu (L) este cuprinsă între paralele la S_1S_2Ky și $K'y'$. Cînd (L) este cuprinsă între S_1S_2 și KY, cercurile (γ_1) și (γ_2) sînt exterioare. Cînd (L) este sub $K'J'$ față de S_1S_2 cercul (γ_2) este interior cercului (γ_1). Cînd cele două conuri se mărginesc la bazele lor (C_1) și (C_2), atunci cercurile (γ_1) și (γ_2) vor fi secante dacă (L) este între KJ și O_1O_2, dacă M este un punct comun cercurilor (γ_1) și (γ_2) avem: $\frac{M\gamma_1}{M\gamma_2} = \frac{R_1}{R_2}$, iar proiecțiile punctelor γ_1, γ_2 și M pe planul (P) vor fi în O_1, O_2 și W, deci $\frac{mO_1}{mO_2} = \frac{R_1}{R_2}$; deci punctul W descrie cercul care este loc geometric al punctelor al căror raport al distanțelor la punctele O_1 și O_2 este constant și egal cu $\frac{R_1}{R_2}$, care este tocmai cercul de diametru AB, care trece prin intersecțiile cercurilor (C_1) și (C_2) presupuse secante.

iii) Punctul N de intersecție al generatoarelor S_1E_1 și S_2E_2 este o poziție particulară a punctului M, deci locul

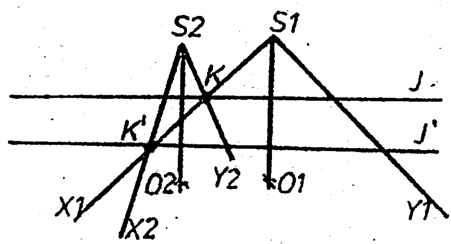


Fig. II.217 iii)

geometric descris de proiecția V a punctului N este tocmai cercul descris de punctul W. Se observă că punctul V nu descrie decît arcul de pe (C_2) interior cercului (C_1).

218. (Fig. II.218) i) Dreapta (Δ) descrie un plan (Q), paralel cu planul (P). Fie A_1 proiecția punctului A pe planul (Q). Punctele A_1, A, B sînt fixe. Cum $AA_1 \perp (Q)$ și $AC \perp BC$ (din planul Q), pe baza unei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare A_1C este perpendiculară pe BC. Cum dreapta (D) este variabilă, punctul C descrie cercul (Γ) din planul (Q), cu diametrul BA_1.

ii) Triunghiul ABC este dreptunghic în C, deci cercul său circumscris are diametrul AB. Cînd dreapta (D) este variabilă acest cerc descrie sfera de diametru AB.

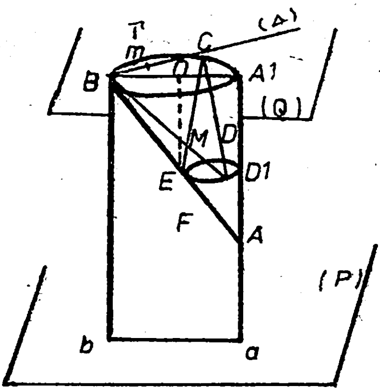


Fig. II. 218

iii) Mijlocul M al segmentului BC este omoteticul punctului C față de centrul de omotatie B, în raportul $\frac{1}{2}$, deci el descrie cercul (Γ_1), omotetic în raportul $\frac{1}{2}$ față de B, al cercului (Γ).

iv) Centrul de greutate M al triunghiului ABC se află la $\frac{1}{3}$ de E din lungimea medianei EC, deci el este omoteticul punctului C față de punctul fix E, în raportul $\frac{1}{3}$.

Prin urmare, punctul M descrie un cerc într-un plan paralel cu Q şi care intersectează latura AB la $\frac{2}{3}$ din ea, calculînd din A către B.

v) Să presupunem că F este punctul de pe AB astfel încît $\alpha FB + \beta FA = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ constante date. Punctul F este fix și este centrul distanțelor proporționale la punctele A şi B multiplicate de coeficienții α și β. Centrul G al distanțelor proporționale la A, B, C, multiplicate de coeficienții α, β, γ, este centrul distanțelor proporționale al punctelor F şi C, multiplicate de coeficienţii $\alpha + \beta$ şi γ, deci centrul G este aşa ca $(\alpha + \beta) \cdot GF + \gamma \cdot GC = 0$, care se poate scrie: $\frac{FG}{GC} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$ sau $\frac{FG}{FC} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$. Dacă $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, punctul G descrie cercul omotetic al cercului (Γ) în raportul $\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$. Dacă $\alpha = \beta = \gamma$ se obține centrul de greutate al $\triangle ABC$ (punctul iv).

vi) Fie BD mediana dusă din vîrful B în triunghiul ABC. Muchiile AC și BD ale celor două conuri se intersectează în D. Locul geometric descris de acest punct va fi curba de intersecție a celor două conuri. Dar D este omoteticul punctului C față de A, în raportul $\frac{1}{2}$, deci el descrie cercul (Γ_1) cu diametrul ED_1. În plus cele două conuri au în comun dreapta (AB). Proiecţia cercului (Γ_1) pe planul (P) este un cerc cu acelaşi diametru, deoarece (Γ) este într-un plan paralel cu (P), trebuie reunită dreapta (ab), proiecţia dreptei (AB). Planul care trece prin (AB) şi este perpendicular pe planul (P), este planul (AA_1B). Proiecţia căutată se compune din diametrul ED_1 şi dreapta (AB).

219. i) Locul geometric al punctelor din spaţiu ega depărtate de cele două cercuri este format din suprafaţa laterală a unui cilindru de rotaţie, cu generatoarele perpendiculare pe planul (P) şi avînd ca cerc director cercul concentric cu cele date şi cu raza egală cu semisuma razelor. Locul geometric al punctelor din spaţiu, egal depărtate de două plane, presupuse paralele, este un plan paralel cu planele date şi dus la mijlocul distanţei dintre ele. Deci, locul geometric căutat este intersecţia cilindrului de rotaţie cu planul. În general este o elipsă; cînd planul este perpendicular pe generatoarele cilindrului, este un cerc; cînd planul este paralel cu o generatoare a cilindrului poate să nu intersecteze cilindrul, să fie tangent după o dreaptă sau să intersecteze cilindrul după două generatoare paralele.

Dacă planele sînt presupuse concurente, locul geometric al punctelor egal depărtate de ele este format din planele bisectoare ale diedrelor formate la intersecţia lor. Locul geometric căutat este format de intersecţia cilindrului cu planele bisectoare. Cînd ambele plane bisectoare intersectează cilindrul avem, în general, două elipse sau o elipsă şi un cerc; o elipsă şi două drepte paralele, o elipsă şi o generatoare a cilindrului sau numai o elipsă, drepte paralele pot fi în număr de 4, 3, 2, 1, 0.

ii) Locul geometric al punctelor egal depărtate cu distanţa d_1 de (Δ) este un cilindru de rotaţie în jurul dreptei (Δ), cu raza d_1; punctele căutate sînt pe curba de intersecţie dintre cei doi cilindri; cînd cei doi cilindri sînt tangenţi avem un singur punct; cînd cei doi cilindri nu se intersectează, nu avem puncte care să satisfacă condiţiile impuse.

iii) Locul geometric al punctelor egal depărtate de sfera (Σ) cu distanţa (d_2) este format din una sau două sfere concentrice, cu (Σ) şi avînd razele $R + d_2$ sau $R - d_2$;

punctele căutate sînt la intersecția cilindrului cu sferele concentrice cu (Σ). Dacă sferele sînt exterioare cilindrului, nu avem puncte care satisfac condițiile impuse.

220. i) Locul geometric căutat este la intersecția sferei concentrice cu cea dată și cu rază $R_1\sqrt{2}$, cu elipsoidul de rotație în jurul liniei centrelor, cu focarele în O_1 și O_2 (elipsoidul fiind locul geometric al punctelor din spațiu pentru care suma distanțelor lor la două puncte fixe numite focare, este constantă și se obține din rotația unei elipse în jurul axei mari).

ii) Locul geometric căutat este la intersecția sferei concentrice cu sfera dată și cu raza $R_2\sqrt{2}$, cu hiperboloidul de rotație, în jurul liniei centrelor sferelor, cu focarele în O_1 și O_2.

iii) Locul geometric căutat este la intersecția sferei cu diametrul egal cu segmentul care unește punctele de pe linia centrelor ce împarte segmentul O_1O_2 în raportul K, cu planul paralel cu planele date și echidistant de ele, cînd planele, sînt paralele; cînd planele sînt concurente sfera trebuie intersectată de planele bisectoare ale diedrelor formate. În primul caz avem un cerc, un punct sau nu avem nici un punct, în al doilea caz putem avea două cercuri, un cerc și un punct, un cerc, două puncte, un punct sau nici un punct, după poziția planelor bisectoare ale diedrelor, față de sferă.

221. i) Dreapta (AB) înțeapă planul (P) în punctul fix C. Puterea punctului C față de sferă este $CT^2 = CA \cdot CB =$ $=$ constant. Dacă punctul de contact dintre sferă și planul (P), descrie un cerc (C_1) cu centrul în punctul fix C și de rază CT.

ii) Centrul sferei aparține planului mediator al segmentului AB și de asemenea aparține normalei în T la planul (P), deci centrul sferei se găsește la intersecția cilindrului cu generatoarele perpendiculare pe planul (P) și directoarea (Γ), cu planul mediator al segmentului AB. Deci locul geometric este o elipsă. (*Reamintesc*: se numește suprafață cilindrică, suprafața descrisă de o dreaptă, numită generatoare, care în deplasarea sa rămîne paralelă cu o direcție fixă și care intersectează o curbă fixă numită directoare; directoarea poate fi o curbă închisă, iar suprafața cilindrică se numește tubulară indefinită în ambele sensuri sau poate fi o curbă deschisă).

iii) Planul mediator al segmentului AB se intersectează cu planul (P) după o dreaptă (Δ). Paralela dusă din C la (Δ) conține proiecția pe planul (P) a axei mici a elipsei. Perpendiculara dusă din C la (Δ) intersectează cercul descris de punctul T în două puncte T_1 și T_2. Segmentul T_1T_2 este proiecția axei mari a elipsei. În planul (ACT_1), dacă în punctul T_1 ridicăm o perpendiculară pe planul (P) această perpendiculară intersectează mediatoarea segmentului AB în centrul sferei care are raza minimă; perpendiculara ridicată în punctul T_2 intersectează mediatoarea segmentului AB în centrul sferei de rază maximă.

222. Locul geometric al punctelor egal depărtate de cele două sfere este o sferă (S), concentrică cu ele și de rază $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$.

ii) Locul geometric este intersecția sferei (S) cu planul mediator al segmentului dat (cerc, elipsă, punct dublu).

iii) Locul geometric este intersecția dreptei care trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC, perpendiculară pe planul triunghiului, cu sfera (S), care poate fi format din 2, 1, 0 puncte.

iv) Înălțimea conului este $R_1 + R_2$, condiția cerută este $2R_1^2 = R_2^2 - R_1R_2$, diametrul bazei conului este $2\sqrt{R_2^2 - R_1^2}$ și conul este echilater (generatoarea fiind congruentă cu diametrul bazei).

GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN PLAN

CAPITOLUL III

PUNCT FIX. PUNCTE COLINIARE. DREPTE CONCURENTE. DIRECȚIE FIXĂ. PUNCTE CONCICLICE. LOCURI GEOMETRICE

EXERCIȚII PROPUSE

1. i) Să se determine punctul fix al fasciculului de drepte:

$$(a-1)x+(a-2)y-a+3=0.$$

ii) Să se determine dreapta din fascicul care intersectează axele Ox, Oy, respectiv în punctele A și B astfel ca $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=10$.

2. Se dau punctele: $A(a\cos^2 t,\ a\cos t\sin t)$; $B(-b\sin^2 t,\ b\cos t\sin t)$, t fiind parametru real variabil. Să se arate că dreapta (AB) trece printr-un punct fix.

3. Se dau două drepte $x=1$, $x=3$ și un punct $A(0, 4)$. Ducem prin punctul A o dreaptă variabilă care intersectează dreptele date în B și C; prin B se duce altă dreaptă variabilă paralelă cu OC, care intersectează dreapta $x=3$ în N.

i) Să se arate că dreapta (BN) trece printr-un punct fix F (să se determine coordonatele punctului).

ii) Să se arate că aria tiunghiului OBC nu depinde de poziția secantei (ABC).

4. O dreaptă variabilă care trece printr-un punct fix A intersectează axele de coordonate Ox, Oy, respectiv în puntele M și N. Paralela dusă prin M la prima bisectoare intersectează axa Oy în M', iar paralela dusă prin N la a doua bisectoare intersectează axa Ox în N'. Să se arate că dreapta $(M'N')$ trece printr-un punct fix.

5. Pe axele de coordonate Ox, Oy se iau respectiv punctele variabile A și B, astfel ca $OA + OB = k =$ constant. Fie C al patrulea vîrf al dreptunghiului construit pe OA și OB. Să se arate că perpendiculara din C pe AB trece printr-un punct fix.

6. Pe axele Ox și Oy se iau punctele fixe A și B și segmentele variabile $AA' \equiv BB'$. Să se arate că mediatoarea segmentului $A'B'$ trece printr-un punct fix.

7. Se dau punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(3a, 3b)$, $D(4a, 2b)$. Se ia pe segmentul BC punctul M astfel ca $\frac{BM}{MC} = k$, iar pe segmentul DA punctul N, astfel ca $\frac{DN}{NA} = \frac{k-1}{2}$ Să se demonstreze că dreapta (MN) trece printr-un punct fix.

8. Se consideră un punct M mobil pe latura Ox a unghiului fix xOz și un alt punct fix N în același plan. Fie P proiecția punctului M pe Oz și Q proiecția punctului O pe dreapta (MN). Să se arate că dreapta (PQ) trece printr-un punct fix.

9. Față de un sistem de coordonate carteziene ortogonale se consideră triunghiul AOB și un punct fix C. Prin C se duce o dreaptă variabilă pe care se iau punctele M și N. În M și N se duc perpendiculare pe OA respectiv OB, care intersectează laturile opuse în M' și N'. Să se arate că dreapta $(M'N')$ trece printr-un punct fix C' cînd dreapta (MN) se rotește în jurul punctului C.

10. Să se arate că dacă între coeficienții din ecuația unei drepte variabile $Ax + By + C = 0$ există relația $Al + Bm + Cn = 0$, unde l, m, n sînt numere reale date, atunci dreapta sau trece printr-un punct fix sau este paralelă cu o direcție fixă.

11. Se dau n puncte fixe $M_1, M_2, \ldots, M_n$ și o dreaptă mobilă (Δ). Se presupune că între distanțele $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ale acestor puncte la dreapta (Δ) există o relație de forma:

$$k_1d_1 + k_2d_2 + \ldots + k_nd_n = 0,$$

unde $k_1, k_2 \ldots k_n$ sînt numere reale date. Să se arate că dreapta (Δ) sau trece printr-un punct fix sau este paralelă cu o dreaptă fixă.

12. Se dă sistemul de axe ortogonale xOy, dreapta (D) de ecuaţie $x = 2$, dreapta (D') de ecuaţie $x = -4$, punctele $A(8, 0)$, $A'(-8, 0)$ şi punctul P variabil pe axa Oy. Se cere:

i) să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului PAA';

ii) fie M intersecţia dreptei (AP) cu dreapta (D) şi M' intersecţia dreptei (PA') cu dreapta (D'). Să se arate că dreapta (MM') trece printr-un punct fix şi să se determine coordonatele acestui punct.

13. Punctul variabil M este situat pe cercul (O). Tangenta în M intersectează o rază prelungită în punctul B. Dacă în B se duce (în partea tangentei) $BC \perp OB$ şi $BC \equiv BM$, să se arate că dreapta (CM) trece printr-un punct fix.

14. Prin extremitatea A a axei mari a unei elipse se duc coardele perpendiculare variabile AM, AN. Să se arate că dreapta (MN) trece printr-un punct fix.

15. În raport cu un sistem de coordonate carteziene, în plan, se consideră dreapta (D) definită de ecuaţia:

$$(D) \quad 2x \sin^2 \frac{a}{2} + 2y \cos^2 \frac{a}{2} + \cos a - 1 = 0$$

unde a este un parametru real variabil.

i) Să se arate că oricare ar fi valoarea parametrului a dreapta (D) trece printr-un punct fix A ale cărui coordonate se cer.

ii) Să se scrie ecuaţia parabolei care are focarul în punctul A şi directoarea reprezentată de ecuaţia $y + 2 = 0$ şi să se traseze graficul acestei parabole.

(Facultatea de Matematică)

16. Se consideră o dreaptă fixă şi trei puncte fixe A, B, C, ultimul aparţinînd dreptei. Fie M, M' două puncte mobile pe dreaptă, simetrice în raport cu C. Se duc din B tangente la cercul circumscris triunghiului AMM'. Să se arate că dreapta care uneşte punctele de contact trece printr-un punct fix.

17. Se dă paralelogramul $ABCD$. O paralelă oarecare la latura AB intersectează laturile AD şi BC, respectiv în M şi N, iar o paralelă la AD intersectează laturile AB şi CD, respectiv în P şi Q. Fie $\{E\} = (MP) \cap (NQ)$. Să se arate că punctele D, B, E sînt coliniare.

18. Se dau punctele $A(6, 0)$, $B(0, 4)$, $C(1, 5)$.

i) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

ii) Dreapta (AC) intersectează axa Oy în E, iar (BC) intersectează axa Ox în F.

Să se arate că mijloacele segmentelor OC, BA, EF sînt coliniare şi să se determine ecuaţia dreptei lor (D).

iii) Să se arate că bisectoarele interioare ale unghiurilor AEO, BFO sînt perpendiculare şi se intersectează pe dreapta (D).

19. Fie triunghiul ABC oarecare în plan. Dintr-un punct O se duc perpendiculare pe dreptele (OA), (OB) şi (OC) care intersectează laturile BC, CA şi AB în punctele M, N, P. Să se demonstreze că aceste puncte sînt coliniare.

20. Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin origine şi prin punctele $A(1, 0)$, $B(0, 2)$. Să se scrie apoi ecuaţiile tangentelor în punctele O, A, B şi să se verifice că aceste tangente intersectează laturile opuse ale triunghiului OAB în trei puncte coliniare.

21. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare, ortocentrul H, centrul de greutate G şi centrul O al cercului circumscris sînt coliniare şi că punctul G împarte segmentul OH în raportul $-\frac{1}{2}$ (dreapta se numeşte *dreapta lui Euler*.)

22. Faţă de un sistem de coordonate carteziene se consideră cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

Dacă A şi B sînt punctele de intersecţie ale cercului cu Ox, o dreaptă (d) perpendiculară pe (AB) intersectează pe (AB) în C, simetricul lui B în raport cu A. Prin punctul A se duce o secantă variabilă care intersectează dreapta (d) în P, iar cercul în Q. Dreapta (BQ) intersectează dreapta (d) în R, iar dreapta (AR) intersectează cercul în L. Prin punctele P şi R se duc paralele la (AB) care intersectează pe (AR) în M şi pe (AP) în N. Să se demonstreze că:

i) $CP \cdot CR =$ constant.

ii) punctele P, L, B şi M, P, N sînt coliniare.

iii) dreapta (NL) trece printr-un punct fix.

23. Se consideră un triunghi ABC dreptunghic în A. Printr-un punct P situat pe ipotenuză se duc paralele cu AB, AC care intersectează pe AC, AB în punctul N, respectiv M. Perpendiculara în P pe BC intersectează pe AB, AC în D, respectiv E. Dreptele (BE), (CD) se intersectează în F; paralelele din B, C la AC, AB intersectează dreptele (CM), (BN) în G, respectiv H. Să se arate că punctele G, H, A, F sînt coliniare.

24. Să se arate că tangentele la cercul circumscris unui triunghi în vîrfurile triunghiului intersectează laturile opuse în trei puncte coliniare.

25. Pe o elipsă se consideră punctele M și N; paralela prin M la axa mică BB' intersectează paralela din N la axa mare AA' în punctul I. Fie punctul P intersecția normalei în M cu AA' și Q intersecția normalei în N cu BB'. Să se arate că punctele P, Q, I sînt coliniare.

(Facultatea de Matematică)

26. Se dă un punct M pe axa mare AA' a unei elipse și un punct N conjugat armonic cu M față de A și A'. O dreaptă oarecare dusă prin M intersectează elipsa dată în punctele P și Q și perpendiculara din N pe AA' în R. Să se arate că punctele M și R sînt conjugate armonic față de punctele P și Q.

(Facultatea de Matematică)

27. Să se determine parametrul real λ astfel ca dreapta $4x + 3y + \lambda = 0$ să treacă prin intersecția dreptelor $3x + y = 0$; $9x + 2y + 6 = 0$.

28. Pentru ce valoare a parametrului real a dreptele $x + y - 3 = 0$; $2x + y - 4 = 0$; $ax + 3y - 7 = 0$ sînt concurente?

Înlocuind pe a cu valoarea aflată, pentru ce valoare a lui λ dreapta rezultată aparține fasciculului

$$2x + y - 4 + \lambda(x + y - 3) = 0?$$

29. Fie $A'B'C'$ simetricul triunghiului ABC față de o dreaptă (Δ). Să se demonstreze că perpendicularele duse din A', B', C', respectiv pe BC, CA, AB sînt concurente.

30. Pe catetele AB și AC ale unui triunghi dreptunghic se construiesc, în afară, pătrate în care vîrfurile opuse lui A sînt respectiv D și E. Să se demonstreze că dreptele (CD), (BE) și înălțimea AH a triunghiului sînt concurente.

31. Se dă unghiul drept xOy, o dreaptă (D) care trece prin O și un punct A care se proiectează în B și C pe Ox și Oy. Paralela dusă prin A la (D) intersectează axa Ox în punctul D. Fie D_1 și O_1 proiecțiile punctelor D și O, respectiv pe (D) și AD. Să se arate că (D_1O_1), paralela dusă prin C la (D) și perpendiculara dusă din B pe (D) sînt trei drepte concurente.

32. Se dau punctele $A(1, 0)$, $B(4, 3)$, $C(0, 5)$.

i) Să se determine coordonatele punctelor D, E, F, știind că D împarte latura BC în raportul $-\frac{1}{2}$, E împarte latura CA în raportul $-\frac{4}{3}$ și F împarte latura AB în raportul $-\frac{3}{2}$.

ii) Să se arate că dreptele (AD), (BE), (CF) sînt concurente.

iii) Să se arate că punctele E, F și D', conjugatul lui D față de B și C, sînt coliniare.

33. Se proiectează vîrfurile A, B, C ale triunghiului ABC pe o dreaptă (Δ) în A', B', C'. Să se demonstreze că perpendicularele duse din punctele A', B', C' respectiv pe BC, CA, AB sînt concurente într-un punct M (teorema ortopolului).

34. Se dau triunghiurile ABC și $A'B'C'$. Să se demonstreze că dacă perpendicularele duse din vîrfurile A, B, C pe laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ sînt concurente, atunci și perpendicularele duse din vîrfurile A', B', C' pe laturile BC, CA, AB sînt concurente. (Teorema triunghiurilor ortologice.)

35. Să se arate că dreptele care unesc mijloacele laturilor unui triunghi cu mijloacele înălțimilor corespunzătoare sînt concurente.

36. Se dau două axe ortogonale Ox, Oy și un punct A aparținînd primei bisectoare a unghiului axelor. Fie A_1 și A_2 proiecțiile punctului A respectiv pe Ox și Oy, iar M și N punctele în care o dreaptă variabilă ce trece prin A întîlnește aceleași axe. Să se arate că dreptele (MA_2), (NA_1) și perpendiculara din O pe dreapta (MN) sînt concurente.

(Facultatea de matematică)

37. Se dă un triunghi echilateral ABC. Pe laturile BC, CA, AB se iau punctele A', B', C' astfel ca:

$$\frac{A'B}{A'C} = k, \quad \frac{B'C}{B'A} = -k, \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{1}{k^2}, \quad k \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}.$$

i) Să se demonstreze că dreptele (AA'), (BB'), (CC') sînt concurente într-un punct M.

ii) Să se determine locul geometric al punctului M cînd k este variabil.

iii) Să se determine k astfel ca punctul M să aparțină cercului circumscris triunghiului ABC.

38. Să se determine condiția ca normalele în trei puncte ale unei elipse să fie concurente.

39. Într-o hiperbolă echilateră se înscrie un triunghi oarecare. Să se demonstreze că perpendicularele ridicate pe laturi, în punctele lor de intersecție cu una din asimptote, sînt concurente.

40. Se dă un punct fix A pe axa Ox și o dreaptă (D). Prin punctul A se duce o dreaptă variabilă (Δ) și fie $\{M\} = (\Delta) \cap (D)$, $\{N\} = (\Delta) \cap (Oy)$. Să se determine locul geometric al intersecției perpendicularei pe Oy în N cu dreapta (OM).

41. Se dă dreapta (D) $2x + 3y - 12 = 0$. Un punct M mobil aparținînd dreptei (D) se proiectează în P pe Ox și în Q pe dreapta $x - y + 2 = 0$. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului PQ.

42. Se dau punctele $A(0, 1)$, $B(4, 2)$, $C(2, 3)$ și se cere:

i) locul geometric al punctelor M care satisfac relația:

$$MA^2 + MB^2 - MC^2 = 20;$$

ii) locul geometric al punctelor M care satisfac relația:

$$MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 7;$$

iii) să se cerceteze dacă există puncte în plan care să satisfacă simultan ambele relații.

43. Se dă triunghiul ABC şi fie α, β, γ trei numere variabile a căror sumă este nulă. Să se arate că locul geometric al punctului M, astfel ca $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = 0$ este o dreaptă care trece printr-un punct fix.

44. Se dau două drepte (Δ), (Δ') şi un punct fix A. O dreaptă variabilă care trece prin A intersectează pe (Δ) şi (Δ'), respectiv în M şi N. Să se determine locul geometric al punctului $P \in (MAN)$, care satisface relaţia:

$$\frac{a}{AM} + \frac{b}{AN} = \frac{c}{AP}$$

a, b, c fiind constante. Caz particular $c = a + b$. Se va cerceta cazul cînd P este conjugatul punctului A faţă de M şi N.

45. Fie P şi Q punctele de intersecţie ale unei drepte variabile cu laturile OA şi OB ale unui unghi dat AOB. În punctele P şi Q se ridică perpendiculare pe OA şi OB care se intersectează în M.

Să se determine locul geometric al punctului M, cînd secanta fiind variabilă, avem $OP + OQ = K$ (K fiind o constantă reală).

46. Dintr-un punct P se coboară perpendicularele PM, PN pe laturile OM, ON ale unui unghi. Să se determine locul geometric al punctului P ştiind că $OM + ON =$ const.

47. Să se arate că locul geometric al punctelor pentru care raportul distanţelor la două drepte fixe concurente este constant, se compune din două drepte care formează un fascicul armonic împreună cu dreptele date. Să se cerceteze şi cazul particular cînd dreptele date sînt paralele.

48. Să se arate că locul geometric al punctelor pentru care suma distanţelor la două drepte fixe concurente este constantă, se compune din patru drepte care formează un dreptunghi. Caz particular cînd dreptele date sînt paralele.

49. Un punct M descrie latura BC a triunghiului fix ABC; fie N, P proiecţiile punctului M pe laturile AB, AC. Să se arate că locul geometric al mijlocului segmentului NP este o dreaptă.

50. Se consideră un punct fix M_0 şi două drepte fixe (D_1), (D_2). O dreaptă mobilă dusă prin M_0 intersectează cele două drepte respectiv în M_1, M_2. Să se arate că locul geometric al punctului M, conjugatul armonic al punctului M_0 în raport cu M_1, M_2, este o dreaptă care trece prin punctul de concurență al dreptelor (D_1), (D_2), numită polara punctului M_0 față de unghiul format din cele două drepte. Dacă cele două drepte sînt paralele, locul geometric este o dreaptă paralelă cu ele.

51. Se consideră un punct fix M_0 și n drepte fixe (D_1), (D_2), ..., (D_n). O dreaptă mobilă dusă prin M_0 intersectează cele n drepte în punctele M_1, M_2, ..., M_n. Se ia pe această dreaptă mobilă punctul M, astfel ca:

$$\frac{n}{M_0M} = \frac{1}{M_0M_1} + \frac{1}{M_0M_2} + \dots + \frac{1}{M_0M_n}.$$

Să se arate că locul geometric al punctului M este o dreaptă numită polara punctului M_0 față de dreptele date.

52. Fie $OABC$ un dreptunghi și (d) o dreaptă variabilă care trece prin O; dreapta (d) intersectează pe AB în N și pe BC în M. Simetrica dreptei (d) față de OA intersectează pe AB în Q și pe BC în P. Să se determine locul geometric al intersecției dreptelor (PN) și (QM).

53. Se dau două axe ortogonale Ox și Oy și un punct $P(a, b)$. Prin acest punct se duc două drepte perpendiculare variabile; una întîlnește pe Ox în punctul A și cealaltă întîlnește pe Oy în punctul B. Să se arate că locul geometric al proiecției punctului P pe AB este o dreaptă.

(Facultatea de Matematică)

54. Se dau două axe rectangulare XOY și un punct A aparținînd primei bisectoare a unghiului axelor. Fie A_1 și A_2 proiecțiile lui A respectiv pe Ox și Oy, iar M și N puncte în care o dreaptă variabilă care trece prin A intersectează axele carteziene.

i) Să se arate că dreptele (MA_2), (NA_1) și perpendiculara din O pe dreapta (MN) sînt concurente.

ii) Perpendicularele duse în M și N pe dreapta (MN) intersectează respectiv axele Oy și Ox în punctele N' și M'. Să se determine locul geometric al intersecției dreptei $(M'N')$ cu perpendiculara dusă din O pe (MN). Să se studieze și cazul cînd punctul A este așezat oriunde în plan și să se explice geometric rezultatul.

55. Se dau punctele $A(-a, 0)$ şi $B(a, 0)$. Prin A se duce o dreaptă de coeficient unghiular m variabil, iar din B se duce perpendiculara pe dreapta dusă din A.

i) Să se determine locul geometric al punctului M în care se intersectează dreptele de mai sus.

ii) Dreapta (AM) intersectează pe Oy în punctul C. Să se scrie ecuaţia locului geometric al punctului P în care paralela dusă din C la Ox intersectează pe (BM).

iii) Fie T proiecţia punctului P pe Ox. Să se deducă geometric (folosind asemănarea triunghiurilor AOC şi BTP), relaţia dintre coordonatele x şi y ale punctului P.

56. Se dă o dreaptă (D) şi un punct fix A pe această dreaptă. Fie B un punct variabil pe o dreaptă (D_1) fixă, perpendiculară pe (D).

i) Să se determine locul geometric al intersecţiei perpendicularei pe mijlocul segmentului AB cu paralela dusă prin B la dreapta (D).

ii) Să se arate că locul geometric este o parabolă tangentă la mediatoarea segmentului AB.

57. Se dă un triunghi isoscel şi să se determine locul geometric al punctelor care au produsul distanţelor la laturile egale, egal cu pătratul distanţei pînă la bază.

58. În triunghiul isoscel ABC $(AB \equiv AC)$, fie D piciorul înălţimii din A pe BC.

i) Să se arate că perpendiculara din D pe AC este tangentă în D la cercul (ABD).

ii) Dacă M este un punct variabil pe cercul (ABD), să se determine locul geometric al centrului G de greutate al triunghiului ABM.

iii) Să se explice geometric aceste rezultate.

59. Într-un triunghi isoscel ABC $(BC \equiv AC)$ se duce o paralelă (variabilă) la baza AB, care intersectează laturile AC şi BC în P şi Q, iar înălţimea CO în H. Să se determine locul geometric al intersecţiei dreptei (OP) cu (AH), al dreptelor (OP) şi (AQ), al dreptelor (OQ) şi (AH).

60. Să se determine locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente cu lungimea de 6 unităţi la cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$.

61. Să se determine locul geometric al punctului M care satisface relația

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k^2$$

A, B fiind două puncte fixe, iar α, β, k coeficienți reali constanți.

62. Să se determine locul geometric al punctelor care satisfac relația $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$, $k \in \mathbf{R}$, și A, B, C fiind trei puncte fixe. Generalizare în cazul a n puncte fixe.

63. Să se determine locul geometric al punctelor care au raportul distanțelor la două puncte fixe constant.

64. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor care trec printr-un punct fix A și sînt ortogonale unui cerc dat (C).

65. Să se determine locul geometric al punctului M care are puterile față de două cercuri date într-un raport constant.

66. Să se determine locul geometric al punctelor care au suma puterilor față de două cercuri egală cu suma puterilor față de alte două cercuri. *Generalizare.*

67. Se dau punctele P, Q și un cerc fix cu centrul pe dreapta (PQ). Fie M, N capetele unui diametru variabil al cercului. Să se determine locul geometric al intersecției dreptelor (MP) și (NQ).

68. Se dă un cerc (O) și un punct fix A în planul cercului. Fie MN un diametru al cercului.

i) Să se scrie ecuația cercului determinat de punctele M, N, A.

ii) Să se determine locul geometric al intersecției dreptei (MN) cu tangenta în A la cercul (MNA), cînd diametrul MN se rotește în jurul centrului.

69. Se dă un cerc și un diametru fix al său. Să se determine locul geometric al punctului M care are suma dintre pătratul distanței la diametrul fix și puterea punctului față de cerc, constantă.

70. Se dă un cerc cu raza r și un diametru (D) al său, fix. Să se determine locul geometric al punctului M care are raportul dintre puterea sa față de cerc și pătratul distanței pînă la diametrul (D) constant și egal cu k.

Se vor examina cazurile $k < 1$; $k = 1$; $k > 1$ reprezentînd grafic locurile geometrice și interpretînd rezultatele.

71. Se dă un cerc și o dreaptă (D). Să se determine locul geometric al punctului M astfel ca tangentele duse din punctul M la cercul dat să fie egal cu distanța de la M la dreapta (D). *Particularizări.*

72. Se dau două axe perpendiculare Ox, Oy și punctele A, B pe axa Ox. Se duce cercul fix (C) descris pe OA ca diametru, iar prin punctele date A, B un cerc variabil (C_1), care intersectează cercul (C) în punctul fix A și în punctul mobil P.

Să se determine locul geometric al punctului al doilea de intersecție M, al dreptei (OP) cu cercul (C_1), cînd acest cerc este variabil.

73. i) Să se scrie ecuația familiei de cercuri tangente la axele de coordonate, cuprinse în cadranele I sau III.

ii) Dintre aceste cercuri să se determine acelea care trec printr-un punct dat $A(a, b)$. Caz particular $A(2, 9)$.

iii) Fie M punctul de contact al unuia din cercuri cu axa Ox. O dreaptă care trece prin M și are o direcție fixă intersectează din nou cercul în M'. Să se determine locul geometric al punctului M'.

iv) Dintre cercurile familiei de mai sus să se determine acelea care trec prin punctul $(\lambda - 2, \lambda^2 - 2)$, λ fiind raza cercului.

74. Să se demonstreze că locul geometric al centrelor dreptunghiurilor circumscrise unui patrulater dat este un cerc.

75. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia un punct mobil M. Să se arate că raportul razelor cercurilor circumscrise triunghiurilor AMB și AMC este constant și să se determine locul geometric al intersecției tangentelor în B, C la cele două cercuri.

76. Un triunghi ABC are latura BC fixă, iar vîrful A mobil pe o perpendiculară la BC. Se ia punctul A' diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului ABC. Să se determine locul geometric al punctului A'.

77. Pe axa Ox se ia punctul fix A şi punctul mobil M, iar pe axa Oy se ia punctul fix B. Cercul de diametru OM intersectează cercul care trece prin M şi este tangent dreptei (AB) în A, într-un al doilea punct, N. Să se determine locul geometric al punctului N.

78. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia un punct mobil M şi se consideră cercurile care trec prin M şi sînt tangente laturilor AB, AC respectiv în B, C. Să se determine locul geometric al celui de-al doilea punct de intersecţie al acestor cercuri.

79. Într-un cerc O se iau razele perpendiculare OA, OB fixe şi fie M un punct mobil pe cerc. Dreapta (MA) intersectează pe OB în K, iar perpendiculara în K pe OB intersectează pe MB în I. Să se determine locul geometric al punctului I.

80. Pe o dreaptă fixă se iau două puncte fixe A şi B, apoi se consideră două cercuri mobile tangente dreptei, respectiv în A şi B şi tangente între ele. Să se determine locul geometric al punctului lor de contact.

81. Faţă de un sistem de coordonate carteziene ortogonale se consideră punctele $A(3, 0)$, $B(0, \lambda)$, λ fiind un parametru real. Perpendiculara pe dreapta (AB) în mijlocul C al segmentului AB, intersectează axa în punctul D. Să se determine:

i) ecuaţia cercului care trece prin punctele B, C şi D.

ii) locul geometric al centrului cînd B se deplasează pe Oy.

iii) să se arate că directoarea parabolei $y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3x$ este tangentă cercurilor determinate la punctul i).

82. Se dă un cerc (C_1) cu centrul în origine şi de rază R şi un cerc (C_2) cu centrul pe dreapta $y = \frac{R}{2}$, şi de rază $= \frac{R}{2}$. Fie M punctul de intersecţie al coardei comune al celor două cercuri cu perpendiculara dusă din centrul cercului (C_2) pe diametrul cercului (C_1). Se cere:

i) să se scrie ecuaţia axei radicale a cercurilor (C_1) şi (C_2).

ii) locul geometric al punctului M.

83. Se dau două cercuri tangente în O. Prin O se duce coarda OM în primul cerc și coarda ON perpendiculară pe prima, în al doilea cerc. Presupunînd că aceste coarde se rotesc în jurul punctului O, rămînînd perpendiculare, să se determine:

i) locul geometric al proiecției punctului O pe MN;

ii) locul geometric al punctului L, mijlocul segmentului MN;

iii) locul geometric al centrului de greutate al triunghiului OMN.

84. Considerăm două cercuri (c_1) și (c_2) tangente în originea axei Oy, așezate la dreapta axei Oy, avînd razele r_1 și r_2. Se cere:

i) coordonatele punctelor M și N unde o dreaptă mobilă care trece prin origine intersectează respectiv cercurile (c_1) și (c_2).

ii) să se arate că tangentele în M și N la cercurile respective sînt paralele.

iii) locul geometric al mijlocului segmentului MN.

(Facultatea de Matematică)

85. În planul a două axe rectangulare xOy se dau dreptele $x = a$ și $x = —a$ care intersectează axa Ox respectiv în A și B; pe aceste drepte se mișcă două puncte A' și B' așa fel că produsul $AA' \cdot BB' = AB^2$.

i) Să se determine locul geometric al punctului M de intersecție al dreptelor (AB'), (BA').

ii) Să se arate că tangenta dusă în punctul M la locul geometric trece prin punctul P, intersecția dreptei $(A'B')$ cu axa Ox.

86. Se consideră un cerc cu centrul în origine; o tangentă mobilă la cerc intersectează pe Ox, Oy în M, N. Axa radicală a cercului dat și a cercului de diametru MN intersectează pe Ox, respectiv Oy în M', N'.

Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $M'N'$.

87. Să se determine locul geometric al punctelor pentru care suma pătratelor distanțelor la laturile unui triunghi echilateral este constantă.

88. Din vîrfurile unui triunghi luate drept centre se descriu cercuri de raze variabile proporționale cu trei lungimi date. Să se determine locul geometric al centrului radical al celor trei cercuri.

89. Se consideră un cerc cu centrul în origine; o tangentă mobilă la cerc intersectează pe Ox, respectiv Oy, în M, N. Axa radicală a cercului dat și a cercului de diametru MN intersectează pe Ox, respectiv Oy, în M', N'. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $M'N'$.

90. Se dau cercurile $x^2 + y^2 - 4x = 0$ și $x^2 + y^2 + 2x = 0$ cu centrele C_1 și C_2. O secantă dusă prin origine intersectează curbele respectiv în M_1 și M_2; să se scrie ecuațiile dreptelor (M_1C_2) și (M_2C_1). Să se determine locul geometric al intersecției acestor drepte cînd secanta se rotește în jurul originii.

91. Se consideră un sistem de coordonate în plan și un paralelogram variabil, ale cărui laturi trec respectiv prin cîte un punct fix; una, prin punctul $A(-2, 0)$; a doua prin punctul $B(0, 0)$; a treia prin $C(1, 0)$, iar a patra prin $D(4, 0)$, astfel încît punctele A, C să fie situate pe laturi opuse ale paralelogramului.

i) Să se arate că fiecare diagonală a acestui paralelogram trece printr-un punct fix: una printr-un punct fix M, iar cealaltă printr-un punct fix N.

ii) Să se arate că punctele M și N sînt situate pe dreapta $(ABCD)$ (adică axa Ox).

iii) Se consideră cercurile care trec prin punctele fixe B, C și tangentele din M și N la aceste cercuri. Să se determine locul geometric al punctelor de contact al acestor cercuri cu tangentele.

92. Considerăm punctul $A(2a, 0)$ și cercul de diametru OA. O secantă mobilă, dusă prin origine intersectează cercul în punctul M; tangentele duse în O și M se intersectează în punctul T.

i) Să se arate că:

$$\frac{4}{OM^2} - \frac{1}{OT^2} = \frac{1}{a^2}.$$

ii) Perpendiculara din M pe OA intersectează din nou cercul în N. Să se determine locul geometric al intersecției dreptelor (OM), (ON).

(Facultatea de Matematică)

93. Considerăm un punct M, mobil pe segmentul AB și cercurile de diametru AM și MB.

i) Să se determine locul geometric al punctelor L și L' de intersecție ale tangentelor comune exterioare cu tangenta comună interioară a celor două cercuri.

ii) Să se arate că locul geometric închide o arie egală cu minimul sumei ariilor cercurilor mobile.

94. Se consideră cercul: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ și punctul $M(R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ situat pe acest cerc. Fie AA' și BB' diametrele situate pe axele Ox și Oy. Dreptele (MA) și (MA') intersectează axa Oy în punctele C și D, iar dreptele (MB) și (MB') intersectează axa Ox în punctele E și F.

i) Să se demonstreze că punctele C, D, E, F sînt conciclice, adică sînt așezate pe același cerc și să se scrie ecuația acestui cerc.

ii) Să se determine locul geometric al centrului acestui cerc, presupunînd că punctul M se deplasează pe cercul dat. Să se reprezinte grafic ecuația locului geometric.

95. Se dă un cerc de rază R cu centrul în origine și care intersectează direcția pozitivă a axei absciselor în punctul A. Cu vîrful în acest punct, se înscrie în cerc un triunghi echilateral ABC.

i) Să se determine coordonatele vîrfurilor acestui triunghi.

ii) Fie M intersecția laturii AB cu axa ordonatelor; în M se duce o perpendiculară pe AB. R fiind rază variabilă, să se determine locurile geometrice ale intersecțiilor acestei perpendiculare cu celelalte două laturi ale triunghiului.

iii) În ipoteza $R = 1$, punctele A, B, C fiind considerate afixele numerelor complexe z_1, z_2, z_3 să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sînt z_1, z_2, z_3 și să se arate că $z_2 = z_3^2$ și $z_3 = z_2^2$.

96. Să se determine locul geometric al punctelor pentru care puterile lor în raport cu n cercuri date sînt legate printr-o relație liniară.

97. Se dau cercurile:

$$x^2 + y^2 - 2kx + 2y + 3 = 0, \quad x^2 + y^2 + kx + y + 1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0.$$

i) Să se arate că linia centrelor primelor două cercuri trece printr-un punct fix atunci cînd k este variabil.

ii) Să se determine locul geometric al centrului radical al celor trei cercuri.

98. Să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor unui cerc, care se văd dintr-un punct dat sub un unghi drept.

99. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor ortogonale unui cerc fix și tangente unei drepte fixe.

100. Fie xOy un sistem de axe rectangulare. Pe axa Ox se consideră punctul fix A, iar pe axa Oy punctul mobil M.

i) Să se determine locurile geometrice ale vîrfurilor N și P ale pătratului $AMNP$ și al centrului acestui pătrat. ii) Să se arate că cercurile circumscrise pătratelor $AMNP$, cînd M este variabil, formează un fascicul de cercuri. Să se determine cercul de rază minimă al fasciculului. iii) Cercul $(AMNP)$ intersectează axa Ox în punctul M', diferit de A, și axa Oy în punctul A' diferit de M. Să se determine locul geometric al punctului $\{Q\} = (AM) \cap (A'M')$. iv) Dreapta (OQ) intersectează cercul $(AMNP)$ în punctele U și V. Să se arate că punctele O, U, Q, V formează o diviziune armonică. v) Tangentele în punctele A și M la cercul $(AMNP)$ se intersectează în T. Să se determine locul geometric al punctului T.

101. Pe o dreaptă (d) se iau punctele A și B fixe. De aceeași parte a dreptei (d) se consideră cercuri tangente în A și B dreptei (d) și tangente între ele, avînd centrele în O_a și O_b.

i) Să se arate că dreapta (O_aO_b) rămîne tangentă unui cerc fix.

ii) Să se determine locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor (AP_b) și (BO_a).

iii) Să se determine locul geometric al punctului de tangență al celor două cercuri.

102. Se dă cercul $x^2 + y^2 - x - y + 2 = 0$ și dreapta $2x + y - 1 = 0$.

i) Să se scrie ecuația familiei de cercuri care, împreună cu cercul dat, au ca axă radicală dreapta dată.

ii) Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor de la punctul i).

iii) Locul geometric va fi o dreaptă. Această dreaptă este tangentă la un cerc în punctul $A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, cerc care mai trece și prin punctul $B(1, 2)$. Să se scrie ecuația acestui cerc.

103. i) Să se construiască curbele:

(C) $\quad x^2 + y^2 - 2ax = 0 \quad (a > 0)$

(C') $\quad x^2 + y^2 + 2bx = 0 \quad (b > 0)$.

ii) O dreaptă dusă prin origine, de coeficient unghiular m, mai intersectează curba (C) în punctul M. Perpendiculara pe această dreaptă, dusă prin origine, mai intersectează curba (C') în punctul N. Să se arate că tangenta la curba (C) în punctul M este paralelă cu tangenta la curba (C') în punctul N.

iii) Să se determine locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului OMN cînd m este variabil și să se construiască curba aflată.

104. Considerăm un cerc de centru O și două diametre perpendiculare Ox, Oy. Fie M un punct mobil pe cerc. Tangenta în M intersectează axa Oy în Y. Construim pe axa Ox într-un sens determinat, segmentul $ON \equiv OY$ și proiectăm punctul N în P pe tangentă.

i) Să se arate că dreapta (NP) este tangentă cercului (O) și că aria triunghiului OMN este constantă.

ii) Să se determine locul geometric al punctului P.

iii) Să se determine locul geometric al proiecției punctului N pe raza OM.

105. În planul raportat la axele perpendiculare Ox, Oy considerăm punctele fixe $A(a, 0)$, $B(0, b)$ și punctul mobil $P(0, p)$. Fie M mijlocul segmentului AP și N punctul de intersecție al axei Ox cu dreapta (BM). Să se determine:

i) locul geometric al punctului Q de intersecție a dreptei (OM) cu paralela dusă prin N la axa Oy;

ii) locul geometric al punctului R de intersecție a dreptei (NP) cu dreapta (OM);

iii) ecuația cercului care trece prin origine și este tangent în punctul A dreptei (AP);

iv) fie E al doilea punct unde acest cerc intersectează axa Oy. Să se determine locul geometric al punctului de intersecție al tangentei în origine la cerc cu paralela dusă prin E la axa Ox.

(Facultatea de Matematică)

106. Se consideră un sistem de axe xOy în plan și două cercuri (C_1), (C_2) cu centrele în originea axelor de coordonate, de raze $R_1 = 2$ și $R_2 = 3$.

O semidreaptă cu originea O intersectează cercul (C_1) în punctul P_1 și cercul (C_2) în punctul P_2. Se consideră perpendiculara din P_2 pe Ox și simetricul M al punctului P_1 față de această perpendiculară.

i) Să se scrie ecuația locului geometric (L), descris de punctul M cînd semidreapta se rotește în jurul punctului O.

ii) Fie S un punct al locului geometric (L) și T un punct care împarte segmentul OS într-un raport dat k. Să se determine locul geometric al punctului T cînd punctul S descrie locul geometric (L).

iii) Să se scrie ecuațiile tangentelor la curba (L) în punctele sale de intersecție cu cercurile (C_1) și (C_2).

iv) Fie A și B două puncte de pe curba (L), astfel încît OA și OB să fie perpendiculare; fie u unghiul pe care-l face OA cu axa Ox. Să se calculeze valoarea expresiei

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

(se va vedea că este independentă de u).

107. Considerăm un cerc mobil $(\mathscr{C})$, tangent axei Oy și avînd centrul C pe parabola $y^2 = 2px$, de focar F. Fie T unul dintre punctele de contact ale tangentei duse din F la cercul $(\mathscr{C})$ și (J) cercul cu centrul în F și cu raza FT.

i) Să se determine raza cercului $(\mathscr{C})$ care este văzut din focarul F sub un unghi drept.

ii) Să se determine locul geometric al intersecției tangentei în punctul C la parabolă cu axa radicală a cercurilor $(\mathscr{C})$ și $(\mathscr{I})$.

iii) Să se arate că toate cercurile $(\mathscr{C})$ sînt tangente unui cerc.

108. Capetele A și B ale unui segment de lungime constantă alunecă pe două drepte perpendiculare. Fie M un punct fix al acestui segment. Să se determine locul geometric al punctului M.

109. Fie MN ordonata unui punct variabil pe un cerc cu centrul în origine și Q punctul care împarte această ordonată într-un raport constant $\frac{MQ}{QN} = k$. Să se determine locul geometric al punctului Q.

110. O tangentă variabilă intersectează în punctele M și M' tangentele duse la extremitățile axei mari ale unei elipse. Să se determine locul geometric L al intersecției dreptelor (MA') și $(M'A)$.

111. O elipsă are axa mare $AA' = 2BB'$. O tangentă variabilă intersectează tangenta din B în punctul N și tangenta din B' în punctul N'. Să se determine locul geometric al intersecției perpendicularelor duse din N și N', respectiv pe BN' și $B'N$.

112. Să se determine locul geometric al punctelor L care împart ordonatele punctelor unei elipse într-un raport dat. Aceeași problemă pentru abscise.

113. Un punct M descrie o elipsă; fie N proiecția lui M pe una din directoarele elipsei. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului MN.

114. Să se determine locul geometric al intersecției perpendicularei dusă din focarul unei elipse pe o tangentă mobilă, cu dreapta care unește centrul elipsei cu punctul de contact al tangentei.

115. Să se determine locul geometric al proiecției centrului unei elipse pe o tangentă variabilă.

116. O tangentă variabilă a unei elipse intersectează axele elipsei respectiv în punctele M, N. Paralelele duse prin M, N la axe se intersectează în punctul P. Să se determine locul geometric al punctului P.

117. Într-o elipsă se duce o coardă BC paralelă cu axa mare AA' și fie T proiecția vîrfului A pe dreapta (BC).

i) Să se arate că:

$$b^2 \cdot TB \cdot TC = a^2 \cdot TA^2,$$

unde a, b sînt semiaxele elipsei.

ii) Să se determine locul geometric al intersecției dreptelor $(A'B)$, (AM) unde M este mijlocul coardei BC.

(Facultatea de Matematică)

118. Se consideră o elipsă și cercul principal al ei (descris pe axa mare ca diametru). Fie M un punct variabil pe curbă; perpendiculara din M pe axa mare intersectează cercul principal în punctele P și Q.

i) Normala în punctul M la elipsă intersectează dreptele (OP) și (OQ) respectiv în punctele P' și Q'. Să se arate că punctul M este mijlocul segmentului $P'Q'$.

ii) Să se determine locurile geometrice ale punctelor P' și Q'.

iii) Tangenta în M la elipsă intersectează axa mare în T. Să se arate că patrulaterul $OQ'TP'$ este inscriptibil.

119. Se consideră elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ și punctul $P(2a, 0)$.

i) Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul P la elipsă și să se determine punctele de tangență T și T'.

ii) O dreaptă variabilă care trece prin punctul P intersectează elipsa în punctele R și Q.

Să se determine locul geometric al intersecției tangentelor duse în R și Q la elipsă.

iii) Să se verifice dacă locul geometric obținut conține și punctele T și T'.

120. Considerăm elipsa de centru O și axa AA'. Fie M un punct mobil pe elipsă. Dreapta (AM) intersectează în N tangenta elipsei în vîrful A'. Să se determine locul geometric al intersecției paralelei din N la axa AA' cu dreapta $(A'M)$.

(Facultatea de Matematică)

121. Fie cercul cu centrul $C(0, b)$ cu $b > 0$, care intersectează axa absciselor în punctul $A(a, 0)$. Se consideră familia de elipse raportate la axele de simetrie, care au ca semiaxă segmentul OA.

i) Să se determine elipsa din familie pentru care tangenta dusă în punctul din cadranul I unde prima bisectoare a axelor intersectează elipsa, este perpendiculară pe tangenta la cerc în punctul A.

ii) Să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor determinate prin intersecția elipsei de la punctul i) cu o dreaptă mobilă care trece prin centrul cercului.

iii) Să se demonstreze că locul geometric aflat la punctul ii) este o parte dintr-o elipsă.

122. Se consideră elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ și hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Prin vîrful comun A al celor două conice se duce o secantă variabilă care le intersectează a doua oară, respectiv în M și N. Să se determine locul geometric al intersecției tangentelor: în M la elipsă și în N la hiperbolă.

123. Se dau punctele fixe A, B și fie O mijlocul segmentului AB. Să se determine locul geometric al punctului M, astfel ca:

$$OM^2 = MA \cdot MB.$$

124. Se consideră un fascicul de cercuri; să se determine locul geometric al punctelor de contact ale acestor cercuri cu tangentele paralele cu linia centrelor lor.

125. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor care determină pe axele de coordonate coarde de lungimi constante.

126. Se dă hiperbola echilateră $x^2 - y^2 - 4 = 0$ și o dreaptă variabilă paralelă cu Ox în plan, care intersectează hiperbola în punctele A și B.

Fie M punctul de intersecție al dreptelor (AO) și (BD) unde C și D sînt vîrfurile hiperbolei. Se cere:

i) locul geometric al punctului M;

ii) fie N punctul de intersecție al dreptelor (BO) și (AC).

Să se determine locul geometric al punctului N;

iii) să se precizeze poziția celor două locuri geometrice determinate față de cercul $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

127. Să se determine locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la o hiperbolă.

128. Se dau două axe rectangulare Ox, Oy și punctele fixe $A(a, 0)$, $B(b, 0)$. Două drepte variabile trec respectiv prin A și B și intersectează axa Oy în punctele C și D, astfel ca valoarea algebrică a segmentului CD să fie egală cu o constantă h. Se cere:

i) locul geometric al punctului de intersecție al celor două drepte;

ii) acest loc fiind o hiperbolă (H) care trece prin punctele A și B, să se determine locul geometric al punctului de intersecție al tangentelor în A și B la hiperbola (H), cînd h este variabil;

iii) considerînd B fix, h constant și A variabil pe Ox, să se determine locul geometric al punctelor de pe (H) unde tangența este paralelă cu Ox.

129. Triunghiul ABC are latura BC fixă, iar suma sau diferența celorlalte două laturi este constantă. Să se determine locul geometric al centrului de greutate al triunghiului.

130. Să se determine locul geometric al proiecțiilor centrului unei hiperbole pe tangentele sale. Caz particular: hiperbola este echilateră.

131. Printr-un punct P se duc paralele la asimptotele unei hiperbole date, care intersectează curba în M și N.

i) Găsiți ecuația dreptei (MN) cît și panta ei.
Să se determine valoarea raportului distanțelor de la punctul P la dreapta (MN) și la polara punctului P.

ii) Să se determine locul geometric al punctului P, astfel ca dreapta (MN) să treacă prin centrul hiperbolei.

iii) Se coboară din centrul O perpendiculara OH pe MN. Să se determine locul geometric al punctului H cînd vîrfurile A și A' rămîn fixe, iar unghiul asimptotelor este variabil.

iv) Să se determine locul geometric al punctului P astfel ca dreapta (MN) să rămînă tangentă elipsei care are aceleași axe ca și hiperbola dată, aceasta fiind invariabilă.

132. Considerăm o hiperbolă de semiaxe a, b; o secantă paralelă cu axa AA', intersectează curba în punctele M şi N, M fiind pe aceeaşi ramură a curbei, ca şi vîrful A. Fie P mijlocul segmentului MN şi T intersecţia dreptei (MN) cu tangenta în A.

i) Să se arate că avem relaţia

$$b^2 \cdot TM \cdot TN + a^2 \cdot AT^2 = 0.$$

ii) Să se determine locul geometric al intersecţiei dreptelor (AP), $(A'T)$, cînd secanta este mobilă.

iii) Să se determine locul geometric al intersecţiei dreptelor (AM), $(A'T)$.

(Facultatea de Matematică)

133. Într-o hiperbolă de semiaxe a, b, centrul O şi focare F, F', directoarea d corespunzătoare focarului F intersectează axa în D.

i) Să se arate că

$$\frac{OD}{DF} = \frac{a^2}{b^2}.$$

ii) Fie M un punct mobil pe hiperbolă şi P proiecţia lui pe axa Oy. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului MP.

iii) Să se determine locul geometric al intersecţiei dreptei (OM) cu polara punctului P.

134. Se dă hiperbola $\frac{x^2}{4} - y^2 - 1 = 0$ şi un punct $M(\alpha, \beta)$ aparţinînd hiperbolei.

Se cere:

i) ecuaţia tangentei la hiperbolă în punctul M, ecuaţia perpendicularei pe Ox dusă prin punctul unde tangenta intersectează axa Ox şi ecuaţia dreptei (OM).

ii) locul geometric al punctului de intersecţie al perpendicularei cu (OM) cînd punctul M se deplasează pe hiperbolă.

iii) rezolvînd ecuaţia locului geometric în raport cu y şi luînd rezultatul cu semnul plus, să se studieze variaţia funcţiei obţinute şi să se reprezinte grafic. Prin simetrie se va completa reprezentarea grafică a locului geometric de la punctul ii).

135. Pe o parabolă se consideră un punct M variabil şi simetricul său M' faţă de axa de simetrie. A fiind un punct fix pe axa parabolei, să se determine locul geometric al intersecţiei dreptei (MA) cu paralela dusă prin M' la axă.

136. Se dă parabola $y^2 - 2px = 0$. Să se determine locul geometric al punctului M, astfel ca tangentele duse din M la parabolă să determine pe tangenta la vîrf un segment de lungime dată a.

137. Să se determine parabola $y^2 - 2px = 0$, ortogonală cercului cu centrul în $A(-2, 0)$ şi cu raza 5.

Aceeaşi problemă pentru un cerc cu acelaşi centru, dar cu raza r.

Să se determine locul geometric al punctelor comune celor două curbe, cînd raza cercului este variabilă.

138. Fie M un punct pe o parabolă şi M' simetricul său faţă de axa de simetrie. Să se determine locul geometric al intersecţiei perpendicularei în punctul M pe tangentă (numită normală), cu paralela dusă prin punctul M' la axă.

139. Fie A punctul unde directoarea unei parabole date intersectează axa ei de simetrie. Se duce cercul cu centrul în A, tangent exterior parabolei. O secantă variabilă care trece prin vîrful parabolei intersectează cercul în punctul N şi parabola în M. Să se determine locul geometric al intersecţiei tangentelor în punctele M şi N la parabolă şi la cerc.

140. i) Să se arate că pentru ca patru puncte, aşezate pe parabola $y^2 - 2px = 0$ să fie conciclice, ordonatele lor trebuie să verifice relaţia

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0.$$

ii) Fie A şi B două puncte fixe pe o parabolă. Un cerc variabil care trece prin A şi B mai intersectează parabola în punctele M şi N.

Ţinînd seama de relaţia de la i) să se determine locul geometric al intersecţiei tangentelor duse în M şi N la parabolă.

141. Să se determine locul geometric al proiecţiilor vîrfului unei parabole pe tangentele sale.

142. Să se determine locul geometric al proiecţiilor piciorului directoarei unei parabole raportate la axa Ox pe tangentele sale duse într-un punct mobil aparţinînd parabolei.

143. Se dau parabolele $y^2 = 2px$, $y^2 = 2qx$; o dreaptă mobilă dusă prin O intersectează cele două parabole în punctele M şi N. Să se arate că tangentele duse în M, N la cele două parabole sînt paralele şi să se determine locul geometric al mijlocului segmentului MN.

144. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor care trec printr-un punct fix şi sînt tangente unei drepte fixe.

145. Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor care trec printr-un punct fix şi determină pe o dreaptă fixă o coardă de mărime constantă.

146. Triunghiul ABC are vîrfurile B, C fixe, iar vîrful A este mobil pe o dreaptă paralelă cu BC. Să se determine locul geometric al ortocentrului triunghiului.

147. Printr-un punct fix A din planul unei parabole se duce o secantă mobilă care intersectează parabola în punctele M şi N. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului MN.

148. Să se determine locul geometric al punctelor de unde se pot duce la o parabolă două tangente care fac un unghi de mărime constantă.

149. Două drepte perpendiculare variabile duse prin vîrful O al unei parabole intersectează curba în punctele M şi N. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului MN.

150. Tangenta într-un punct M al unei parabole intersectează directoarea în punctul T. Să se determine locul geometric al simetricului punctului M în raport cu T.

151. Se consideră triunghiurile înscrise într-o parabolă şi avînd acelaşi centru de greutate. Să se determine locul geometric al mijloacelor laturilor acestor triunghiuri.

152. Prin focarul parabolei $y^2 - 2px = 0$ se duce o coardă AB care face unghiul α cu axa Ox. i) Să se demonstreze relaţia $AB \sin^2 \alpha = 2p$. ii) Dacă prin focar se mai duce şi coarda CD perpendiculară pe AB să se arate că $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{2p}$. iii) Dacă (CD) și (AB) sînt două drepte variabile care trec prin focar, să se determine locul geometric al intersecției dreptelor (AD) și (BC).

153. În sistemul rectangular xOy se dau punctele fixe $A(a, 0)$, $B(b, 0)$. Pe axa Oy se consideră punctul variabil M. i) Prin A se duce paralela la (BM), iar prin B paralela la (AM), care se intersectează în N. Să se arate că dreapta (MN) trece printr-un punct fix. ii) Perpendiculara în A pe (AM) și perpendiculara în B pe (BM) se intersectează în L. Să se determine locul geometric al punctului L.

154. Se consideră punctul M variabil pe parabola $y^2 = 2px$. Tangenta și normala în M la parabolă intersectează axa Ox, respectiv în T și N. Se cere:

i) să se arate că punctele T și N sînt simetrice față de focarul F al parabolei.

ii) dreapta (MF), paralela prin N la (MT) și paralela prin T la (MN) sînt drepte concurente.

iii) să se determine locul geometric al punctului de intersecție a perpendicularei din F pe (MT) cu dreapta care unește vîrful O al parabolei cu punctul M.

155. Se dă dreapta $4x - y - 4 = 0$ și o curbă

$$y^2 = (a + 5)x + a - 3, \quad a \in \mathbf{R}.$$

i) Să se determine a astfel încît dreapta să intersecteze curba în punctul de abscisă 2.

ii) Fie D punctul unde directoarea curbei intersectează axa Ox. Să se arate că tangenta la curbă în punctul de abscisă 2 trece prin punctul D, pentru $a = 3$.

iii) Fie P punctul unde tangenta într-un punct M, variabil la parabolă, intersectează axa Oy. Din P ducem o paralelă la Ox, care intersectează dreapta (OM) în N. Să se determine locul geometric al punctului N, cînd punctul M descrie parabola.

156. Să se determine locul geometric al punctelor care au proprietatea că tangentele duse din ele la o parabolă, determină pe tangenta dusă în vîrful parabolei un segment de lungime dată.

157. Considerăm parabola de ecuație $y^2 = 2px$ și fie $M(\alpha, \beta)$ un punct oarecare pe această parabolă. Fie P proiecția ortogonală a lui M pe axa Oy, Q proiecția ortogonală a lui P pe dreapta (OM) și R simetricul punctului P față de (OM). Să se determine:

i) coordonatele punctului R în funcție de parametrii α și β.

ii) ecuația dreptei care unește punctul M cu punctul de intersecție al directoarei parabolei cu axa Ox.

iii) locul geometric al punctului Q, cînd M descrie parabola.

(Facultatea de Matematică)

158. Tangenta într-un punct M al unei parabole intersectează axa curbei în N. Să se determine locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului OMN; să se construiască locul geometric.

159. O secantă variabilă dusă prin focarul F al unei parabole intersectează directoarea în punctul M. Să se determine locul geometric al intersecției acestei secante cu perpendiculara în O pe (OM).

160. O secantă variabilă care trece printr-un punct fix A, intersectează un cerc în punctele M și N. Să se determine locul geometric al punctului L, conjugatul armonic al punctului A față de M și N (acest loc geometric este o dreaptă care se numește polara punctului A față de cerc).

161. Se dă un triunghi dreptunghic ABC. Să se determine locul geometric al punctului M, astfel ca perpendicularele ridicate în A, B, C, respectiv pe MA, MB, MC să fie concurente.

162. Să se determine locul geometric al punctelor M care au polarele față de două cercuri date perpendiculare.

163. Într-un cerc se duc două diametre perpendiculare AB și CD. O dreaptă variabilă care trece prin C intersectează diametrul AB în M și cercul în N. Să se determine locul geometric L al intersecției paralelei la CD, dusă prin M, cu tangenta la cerc dusă în punctul N.

164. Normala într-un punct M al elipsei intersectează axele Ox şi Oy respectiv în punctele P şi Q. Să se determine locul geometric al punctului de intersecţie al paralelelor duse la axe prin punctele P şi Q cînd M descrie elipsa.

165. Normala într-un punct M al hiperbolei intersectează axele Ox şi Oy respectiv în punctele P şi Q. Să se determine locul geometric al punctului comun paralelelor la axe duse prin punctele P şi Q, cînd M descrie hiperbola.

166. Fie F focarul unei parabole, M un punct mobil pe ea şi A un punct fix aparţinînd axei de simetrie.

Să se determine locul geometric al intersecţiei dreptei (MF) cu paralela dusă prin A la tangenta în M.

Să se determine şi o soluţie geometrică.

167. i) Să se determine hiperbola $x^2 - y^2 - a^2 = 0$, ortogonală cercului cu centrul în punctul $O(0, 0)$ şi cu raza 5.

Aceeaşi problemă pentru un cerc cu acelaşi centru, dar cu raza r.

ii) Să se determine locul geometric al intersecţiilor celor două curbe, cînd raza cercului este variabilă.

168. Notăm cu M, N punctele de intersecţie ale polarei unui punct S în raport cu o parabolă dată.

Să se determine locul geometric al punctului S astfel ca aria triunghiului SMN să fie constantă.

169. Se dau patru puncte A, B, C, D într-un plan orientat şi să determine locul geometric al punctului M astfel ca să avem relaţia între arii: $\sigma[MAB] + \sigma[MCD] = \sigma[MBC] + \sigma[MDA]$.

170. Se dau axele carteziene Ox, Oy. Un triunghi dreptunghic isoscel, variabil, are vîrful A fix pe axa Ox şi vîrful B al triunghiului drept mobil pe Oy. Să se determine locul geometric al vîrfului C.

171. O dreaptă se deplasează în plan păstrîndu-şi aceeaşi direcţie. Ea intersectează axele perpendiculare Ox şi Oy respectiv în P şi Q. Fie R punctul pe axa Ox astfel ca $PR = d =$ constant. Să se determine locul geometric al intersecţiei perpendicularelor ridicate în P şi R respectiv pe QP şi QR.

172. Se dă unghiul drept xOy, o dreaptă oarecare (D) și un punct mobil M pe această dreaptă. Fie P și Q proiecțiile punctului M, respectiv pe Ox și Oy. Să se determine:

i) locul geometric al intersecției paralelei dusă prin punctul P la (D) cu perpendiculara dusă din punctul Q pe (D);

ii) locul geometric al intersecției paralelei dusă prin Q la (D) cu perpendiculara dusă din P pe (D);

iii) unghiul celor două locuri geometrice.

(Facultatea de Matematică)

173. Punctul $C(a, b)$ este un punct fix din planul axelor ortogonale Ox și Oy, iar A și B proiecțiile acestui punct pe axe. Prin C trece o dreaptă mobilă, pe care se proiectează punctele A și B în C' și C'', ale căror proiecții pe AC sînt respectiv A' și A''. Tot punctele C' și C'' se proiectează pe BC în B' și B''. Toate proiecțiile fiind ortogonale se cere:

i) să se arate că, oricum s-ar roti dreapta mobilă în jurul punctului C, dreapta $(A''B')$ are o direcție fixă;

ii) să se determine locul geometric descris de mijlocul segmentului $A'B''$;

iii) să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $A''B'$.

174. Se dau două axe perpendiculare Ox, Oy și punctele A, B pe axa Ox. Se duce cercul fix (C) descris pe OA ca diametru, iar prin punctele date A și B se duce un cerc variabil (C') care intersectează cercul (C) în punctul fix A și în punctul mobil P.

Să se determine locul geometric al punctului de intersecție P, al cercului (C) cu cercul (C'), cînd acest cerc este variabil.

175. Se dau două cercuri (C_1) și (C_2) tangente în originea axei Oy, avînd razele r_1 și r_2. Se cere:

i) coordonatele punctelor M și N unde o dreaptă variabilă care trece prin origine intersectează respectiv cercurile (C_1) și (C_2);

ii) să se arate că tangentele în M și N la cercurile respective sînt paralele;

iii) locul geometric al mijlocului segmentului MN;

iv) să se cerceteze dacă există pe axa Oy un punct P, astfel ca tangentele duse prin P la cercurile (C_1) și (C_2) (afară de axa Oy) să facă un unghi de 45°.

176. Fie dată ecuaţia $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

i) Să se determine λ şi să se rezolve ecuaţia, ştiind că are două rădăcini egale şi de semn contrar;

ii) Cele două rădăcini egale şi de semn contrar, sînt ordonatele a două puncte B şi C de pe axa Oy, iar rădăcina mai mică din celelalte două este abscisa unui punct A de pe axa Ox. O dreaptă variabilă ce trece prin O intersectează pe AB în P şi pe AC în R. Să se calculeze coordonatele mijlocului M al segmentului RP;

iii) Să se determine locul geometric al punctului M cînd dreapta (OP) se roteşte în jurul punctului O şi să se construiască graficul locului geometric.

177. Să se determine locul geometric al centrului cercului tangent la cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 - 1 = 0$ şi la axa Oy.

178. Pe o dreaptă (D) se dă segmentul $AB = a$ şi un punct variabil M. Pe perpendiculara în M pe (D) se iau segmentele constante $MP = p$ şi $MQ = q$.

i) Să se determine locul geometric al intersecţiei dreptelor (AP) şi (BQ), apoi să se reprezinte grafic.

ii) Să se determine locul geometric (Γ) al intersecţiei tangentelor duse în A şi B respectiv la cercurile (AMP) şi (BMP).

Se va reprezenta grafic locul geometric determinat pentru cazul $p = \frac{a}{3}$.

iii) Să se studieze cu ajutorul teoremei lui Rolle în cîte puncte este intersectată curba loc geometric (Γ) de către un cerc oarecare (AMP). Se va face tabloul de discuţie $\left(\text{se poate face discuţia şi în cazul particular } p = \frac{a}{3}\right)$.

179. Să se determine locul geometric al punctelor de unde se pot duce la o parabolă trei normale, din care două să fie perpendiculare.

180. Să se determine locul geometric al punctelor M, astfel ca, ducînd din el tangente la o parabolă, produsul sinusurilor sau produsul tangentelor unghiurilor formate de cele două tangente cu axa parabolei să fie constant.

181. Aceeaşi problemă, presupunînd că suma sau diferența cotangentelor aceloraşi unghiuri este constantă.

182. Să considerăm o dreaptă fixă (D) şi un punct fix O; un unghi de mărime constantă însă cu laturile mobile are vîrful O. Fie M, N intersecţiile laturilor unghiului cu dreapta (D). Să se determine locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului OMN.

183. Se dă ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2+m}+\frac{y^2}{b^2+m}-1=0,$$

în care m este un parametru real variabil. Să se arate că:

i) această ecuaţie reprezintă elipse sau hiperbole; să se precizeze fiecare din aceste cazuri;

ii) prin fiecare punct al planului trec două curbe din familie, una este elipsă şi alta hiperbolă. Cele două curbe se intersectează sub un unghi drept. (Aceste curbe se numesc *curbe omofocale*, deoarece au aceleaşi focare);

iii) să se determine locul geometric al punctelor de contact ale tangentelor duse la curbele precedente, printr-un punct fix de pe axa Ox.

184. Prin originea O a axelor de coordonate, se duce o dreaptă variabilă (D). Din $A(a, 0)$ se coboară o perpendiculară pe (D), care intersectează axa Oy în B. Prin B se duce o paralelă la Ox, care intersectează dreapta (D) în M. Să se determine:

i) locul geometric al punctului M, cînd dreapta (D) se roteşte în jurul originii;

ii) locul geometric căutat fiind o conică şi M un punct pe ea, se cere să se arate că distanţa de la focarul F al curbei la tangenta în M este $\sqrt{\overline{OF}\cdot\overline{MD}}$, D fiind piciorul perpendicularei dusă din M pe directoare;

iii) locul geometric al punctului de intersecţie a normalei în M cu perpendiculara dusă din focar pe coarda OM.

185. Considerăm axele ortogonale Ox, Oy. Prin punctul $P(\alpha, \beta)$ ducem o secantă mobilă care intersectează axa Ox în M şi axa Oy în N. Se uneşte M cu punctul $B(0, 1)$, iar N cu punctul $A(1, 0)$:

i) Să se arate că locul geometric al intersecției dreptelor (NA) și (MB) este o conică (Γ).

ii) Să se discute natura și genul conicelor (Γ).

iii) Să se arate că oricare ar fi punctul P, conicele (Γ) trec prin trei puncte fixe. Fie (k) acea conică (Γ) care mai trece prin $K(2, 2)$. Să se afle genul acestor conice și locul geometric al centrelor lor.

186. Se dau parabolele (P_1) și (P_2) de ecuații: $y^2 = 4x$ și $y^2 = 12x$. Prin originea O a axelor de coordonate se duce o dreaptă (d) care intersectează cele două parabole în două puncte M și N diferite de origine. Se cere:

i) să se arate că mijlocul segmentului MN se deplasează pe parabola (P) de ecuație $y^2 = 8x$, cînd dreapta (d) se rotește în jurul punctului O;

ii) ce unghi face dreapta (d) cu semiaxa Ox dacă aria porțiunii de plan delimitată de conturul format din arcele de parabolă ON, OM și segmentul MN este egală cu $\frac{64}{3}$ unități de arie?

iii) să se determine funcția y și să se construiască graficul ei, știind că verifică ecuația diferențială $y'' = 12x - 38$, iar graficul ei intersectează axa $x'Ox$ în punctele A și B de abscise $x = \frac{3}{2}$ și $x = 4$.

(Bacalaureat)

187. Se consideră cercul (C) cu centrul pe semiaxa Ox, tangent axei $y'Oy$ și avînd diametrul egal cu 4. Pe arcul (C_1) al cercului (C), situat în cadranul întîi al axelor, se ia un punct mobil M și fie N proiecția lui M pe axa $x'Ox$. Se cere:

i) să se scrie ecuația cercului (C) și să se determine poziția punctului M, astfel încît aria triunghiului OMN să fie maximă; să se calculeze maximul acestei arii și unghiurile triunghiului OMN;

ii) să se determine poziția punctului M astfel încît volumul corpului generat de suprafața mărginită de arcul de cerc (C) și coarda OM, prin rotația ei în jurul lui Ox, să fie egal cu 6π unități de volum;

iii) Se consideră sistemul format din ecuația cercului (C) și ecuația $x^3 + y^2 - 5x + m = 0$. Să se elimine y între aceste două ecuații și să se determine m astfel încît ecuația obținută prin eliminare să admită o rădăcină dublă întreagă. Să se calculeze în acest caz soluțiile sistemului.

(Bacalaureat)

188. Fie (P_m) familia de parabole

$$y = x^2 - \frac{3}{2}mx + m^2 + m, \quad m \in \mathbf{R}$$

şi fiecărei valori m îi corespunde o parabolă din familie.

i) Să se arate că două parabole (P_{m_1}) şi (P_{m_2}) corespunzînd lui $m = m_1$ şi $m = m_2$, au un punct comun şi numai unul. Să se arate că prin O trec două parabole: P şi P'. Să se traseze graficele parabolelor (P) şi (P').

Fie (D) o dreaptă care trece prin O. Ea intersectează parabolele (P) şi (P') în punctele O, A şi B.

Să se afle panta dreptei (D) din condiţia ca originea O să fie mijlocul segmentului AB.

ii) Să se determine locul geometric al punctului de intersecţie al parabolelor (P_{m_1}) şi (P_{m_2}), cînd:

1) $m_1 + m_2 = a$, a — număr real dat; să se construiască acest loc geometric L.

2) $m_1 m_2 = b$, b — număr real dat. Să se construiască locul geometric L' corespunzător.

3) $\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_1 m_2} = \dfrac{1}{c}$; c — număr real dat; să se construiască locul geometric L'', respectiv.

Ce relaţie trebuie să existe între a, b, c pentru ca L, L' şi L'' să aibă un punct comun?

iii) Fie $M(X, Y)$ un punct din plan. Ce inegalitate verifică X şi Y, dacă prin M trec două parabole (P_m)?

Să se determine locul geometric al punctelor M din plan prin care trece o singură parabolă (P_m).

REZOLVĂRI ŞI RĂSPUNSURI

1. i) Scriind ecuaţia fasciculului obţinem:

$$(x + y - 1)a + (-x - 2y + 3) = 0,$$

egalitatea este verificată pentru $\forall a \in \mathbf{R}$, dacă

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

ii) Intersectînd ecuaţia fasciculului cu axele carteziene obţinem:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{a-3}{a-2}, \quad y = 0 \Rightarrow x = \frac{a-3}{a-1}.$$

Deci

$$A\left(\frac{a-3}{a-1}, 0\right) \text{ şi } B\left(0, \frac{a-3}{a-2}\right) \Rightarrow OA = \left|\frac{a-3}{a-1} - 0\right| =$$

$$= \left|\frac{a-3}{a-1}\right| \text{ şi } OB = \left|0 - \frac{a-3}{a-2}\right| = \left|\frac{a-3}{a-2}\right|.$$

Înlocuind în relaţia din ipoteză, obţinem:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \left(\frac{a-1}{a-3}\right)^2 + \left(\frac{a-2}{a-3}\right)^2 = \frac{2a^2 - 6a + 5}{a^2 - 6a + 9} =$$

$$= 10 \Rightarrow 8a^2 - 54a + 85 = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2} \text{ şi } a = \frac{17}{4},$$

deci există două drepte de ecuaţii:

$$3x + y + 1 = 0 \text{ şi } 15x + 9y - 5 = 0.$$

2. Ecuaţia dreptei (AB):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a \cdot \cos^2 t & a \cos t \cdot \sin t & 1 \\ -b \cdot \sin^2 t & b \cos t \cdot \sin t & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (a - b) \sin t \cdot \cos t \cdot x - (a \cos^2 t + b \sin^2 t)y + ab \cdot \sin t \cdot$
$\cdot \cos t = 0 \Rightarrow \dfrac{a-b}{2} \cdot \sin 2t \cdot x - (a \cos^2 t + b \sin^2 t)y +$
$+ \dfrac{ab}{2} \cdot \sin 2t = 0$, iar ecuaţia fasciculului este:

$$\left(\frac{a-b}{2} x + \frac{ab}{2}\right) \sin 2t - (a \cos^2 t + b \sin^2 t)y = 0.$$

Coordonatele punctului fix se află rezolvînd sistemul format din dreptele reprezentative:

$$\begin{cases} \dfrac{a-b}{2} x + \dfrac{ab}{2} = 0 \\ ay = 0 \\ by = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{ab}{a-b} \\ y = 0 \end{cases}.$$

3. i) $(AC): y - 4 = \lambda x$; se determină $B(1,\ 4 + \lambda)$,

$$C(3,\ 4 + 3\lambda),\ m_{OC} = \frac{4 + 3\lambda}{3};$$

$(BN): 3x\lambda + (4x - 3y + 8) = 0$; punctul fix $F\left(0,\ 2\frac{2}{3}\right)$.

$$\text{ii) } S_{OBC} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 + \lambda & 1 \\ 3 & 4 + 3\lambda & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

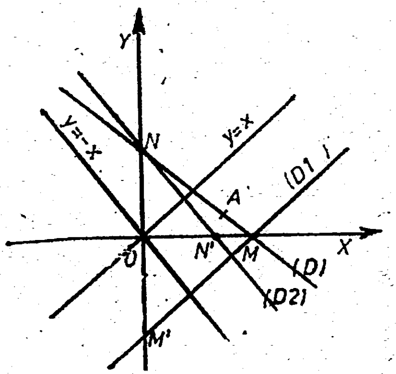


Fig. III.4

4. (Fig. III.4) Fie $A(a, b)$. Ecuația dreptei variabile (D) este $y - b = \lambda(x - a)$ (unde panta $\lambda \in \mathbf{R}$), care intersectată cu axele de coordonate va da: $x = 0 \Rightarrow y = b - \lambda a$; $y = 0 \Rightarrow x = a - \frac{1}{\lambda}b \Rightarrow$ $\Rightarrow M\left(a - \frac{b}{\lambda},\ 0\right)$ și $N(0,\ b - \lambda a)$. $(D1)$ fiind paralelă cu prima bisectoare $\Rightarrow m_{D_1} = 1$ deci are ecuația: $y = 1\left(x - a + \frac{b}{\lambda}\right) \Rightarrow x - y - a + \frac{b}{\lambda} = 0$, iar coordonatele punctului M' sînt: $x = 0,\ y = -a + \frac{b}{\lambda}$.

$(D2)$ fiind paralelă cu a doua bisectoare $\Rightarrow m_{D_2} = -1$, deci are ecuația $y - (b - \lambda a) = -1 \cdot x \Rightarrow x + y - b + \lambda a = 0$, iar coordonatele punctului N' sînt: $y = 0,\ x = b - \lambda a$. Ecuația dreptei $(M'N')$ este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -a + \frac{b}{\lambda} & 1 \\ b - \lambda a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(-a + \frac{b}{\lambda}\right)x + (b - \lambda a)y +$$

$$+ \left(a - \frac{b}{\lambda}\right)(b - \lambda a) = 0 \Rightarrow (-\lambda a + b)x + (b\lambda - \lambda^2 a)y +$$

$$+ \lambda ab - \lambda^2 a^2 - b^2 + \lambda ab = 0,$$

iar ecuaţia fasciculului este:

$$(-ay - a^2)\lambda^2 + (-ax + by + 2ab)\lambda + (bx - b^2) = 0.$$

Coordonatele punctului fix, le determinăm rezolvînd sistemul format din dreptele reprezentative:

$$\begin{cases} -ay - a^2 = 0 \\ -ax + by + 2ab = 0 \Rightarrow \\ bx - b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = b \\ y = -a \end{cases} \Rightarrow \text{punctul fix este } A'(b, -a).$$

5. Ecuaţia perpendicularei este: $y - b = \frac{a}{b}(x - a)$, a, b fiind abscisa şi ordonata punctelor A şi B. Această ecuaţie se mai scrie $ax - by + k(b - a) = 0$ (deoarece $a + b = k$) sau împărţind cu a şi notînd $\frac{b}{a} = \lambda$, obţinem $x - \lambda y + k(\lambda - 1) = 0$. Dreapta trece prin punctul fix $x = k$, $y = k$.

6. Fie $A(a, 0)$ şi $B(0, b)$. Cum $AA' + BB' = \lambda \Rightarrow A'(a + \lambda, 0)$ şi $B'(0, b + \lambda)$. Coordonatele mijlocului segmentului $A'B'$ sînt: $x_M = \frac{a + \lambda}{2}$ şi $y_M = \frac{b + \lambda}{2}$, iar panta dreptei $(A'B')$ este $m = \frac{b + \lambda}{a + \lambda}$. Ecuaţia mediatoarei este: $y - y_M = -\frac{1}{m}(x - x_M)$ (unde dreptele fiind perpendiculare, produsul pantelor lor este egal cu -1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y - \frac{b + \lambda}{2} = -\frac{a + \lambda}{b + \lambda}\left(x - \frac{a + \lambda}{2}\right).$$

Scriind ecuaţia fasciculului şi rezolvînd sistemul format din dreptele reprezentative, vom obţine coordonatele punctului fix $\left(\frac{a - b}{2}; \frac{b - a}{2}\right)$.

7. Fie $M(x_M, y_M)$ şi $N(x_N, y_N)$. Cum $\frac{BM}{MC} = k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x_M - 0}{3a - x_M} = k \text{ şi } \frac{y_M - b}{3b - y_M} = k \Rightarrow x_M = \frac{3ak}{1+k},$$

$$y_M = \frac{b + 3bk}{1+k}.$$

Cum $\frac{DN}{NA} = \frac{k-1}{2} \Rightarrow \frac{x_N - 4a}{a - x_N} = \frac{k-1}{2}$ şi $\frac{y_N - 2b}{0 - y_N} = \frac{k-1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_N = \frac{4a + \frac{k-1}{2}a}{1 + \frac{k-1}{2}} = \frac{7a + ka}{1+k} \text{ şi } y_N = \frac{2b}{1 + \frac{k-1}{2}} =$$

$= \frac{4b}{1+k}$. Ecuaţia dreptei (MN) este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{3ak}{1+k} & \frac{b+3bk}{1+k} & 1 \\ \frac{7a+ka}{1+k} & \frac{4b}{1+k} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{3bk - 3b}{1+k}x -$$

$$- \frac{2ak - 7a}{1+k}y + \frac{-8abk - 7ab - 3abk^2}{(1+k)^2} = 0.$$

Ecuaţia fasciculului este: $(3bx - 2ay - 3ab)k^2 + (5ay - 10ab)k + (-3bx + 7ay - 7ab) = 0$. Punctul fix F al fasciculului se află rezolvînd sistemul format din ecuaţiile dreptelor reprezentative:

$$\begin{cases} 3bx - 2ay - 3ab = 0 \\ 5ay - 10ab = 0 \\ -3bx + 7ay - 7ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3}a \\ y = 2b \end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{7}{3}a,\ 2b\right).$$

8. (Fig. III.8) Dreapta (OZ) are ecuaţia $y = \lambda x$. Fie $N(a, b)$ şi $M(\alpha, 0)$.

Ecuaţia dreptei (MN) este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -bx - (\alpha - a)y + \alpha b = 0 \Rightarrow$$

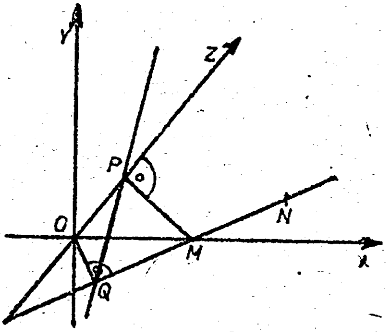


Fig. III.8

$$\Rightarrow y = -\frac{b}{\alpha - a}x + \frac{\alpha b}{\alpha - a}.$$

Coordonatele punctului Q le determinăm rezolvînd sistemul format din: Condiţia de perpendicularitate: $m_{OQ} \cdot m_{MN} = -1$ şi din condiţia ca punctul $Q \in (MN)$, adică $\frac{y_Q}{x_Q} \cdot \frac{b}{a - \alpha} = -1$ şi $y_Q = \frac{b}{\alpha - a} \cdot x_Q + \frac{\alpha b}{\alpha - a}$. Coordonatele punctului P le determinăm rezolvînd sistemul format din condiţia de perpendicularitate: $m_{OZ} \cdot m_{PM} = -1$ şi din condiţia că $P \in (OZ)$, adică $\lambda \cdot \frac{y_P}{\alpha - x_P} = -1$ şi $y_P = \lambda x_P$. Scriind ecuaţia dreptei (PQ) şi rezolvînd ecuaţia fasciculului de drepte pentru $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, prin formarea sistemului de drepte reprezentative, vom obţine coordonatele punctului fix:

$$\left(\frac{a - \lambda b}{1 + \lambda^2}, \quad \frac{\lambda a + b}{1 + \lambda^2}\right).$$

9. Fie punctele $A(a_1, 0)$, $B(b_1, kb)$, $C(c_1, c_2)$, dreapta variabilă ce trece prin C de ecuaţie $y = \lambda(x - c_1) + c_2$ şi pe ea punctele $M(m, \lambda(m - a) + c_2)$, şi $N(n, \lambda(n - c_1) + c_2)$. Perpendiculara în M pe OA, dreapta (NM') are ecuaţia $y = 0$ şi intersectează dreapta (OB) de ecuaţie $y = kx$ în $M'(m, km)$. Perpendiculara în N pe (OB), dreapta (NN') are ecuaţia $y = -\frac{1}{k}(x - n) + \lambda(n - c_1) + c_2$ şi intersectează pe OA în punctul $N'(n + k\lambda(n - a) + kb, 0)$. Dreapta $(M'N')$ are ecuaţia: $(x - m)km = (km - y)[n + k\lambda(n - a) + kb - m]$

sau $(x-m)km-(km-y)(n+kb-m)+\lambda k(a-n)(km-$ $-y)=0 \Rightarrow$ punctul fix C' va avea coordonatele $x=m$, $y=km$.

10. Relaţia se scrie $A\left(\frac{1}{n}\right)+B\left(\frac{m}{n}\right)+C=0$, deci dreapta trece prin punctul fix $x=\frac{1}{n}$; $y=\frac{m}{n}$. Dacă $n=0$, avem relaţia $Al+Bm=0$, care exprimă că dreapta este paralelă cu o direcţie fixă.

11. Dacă $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ este ecuaţia dreptei (Δ), avem $k_1(x_1\cos\alpha+y_2\sin\alpha-p)+\dots+k_n(x_n\cos\alpha+$ $+y_n\sin\alpha-p)=0$ unde $(x_1, y_1),\dots,(x_n, y_n)$ sînt coordonatele punctelor date. Dacă suma $k=k_1+k_2+\dots+k_n$ este diferită de zero, condiţia precedentă scrisă sub forma
$$\frac{k_1x_1+\dots+k_nx_n}{k_1+\dots+k_n}\cos\alpha+\frac{k_1y_1+\dots+k_ny_n}{k_1+\dots+k_n}\sin\alpha-p=0$$
arată că dreapta (Δ) trece prin punctul fix ale cărui coordonate sînt cele două fracţii. Dacă $k=k_1+\dots+k_n=0$, avem relaţia $\left(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\right)\cos\alpha+\left(\sum_{i=1}^{n}k_iy_i\right)\sin\alpha=0$ ceea ce arată că dreapta este paralelă cu o direcţie fixă.

12. (Fig. III. 12) i) Dacă notăm $P(0, \alpha)$ atunci ecuaţia cercului (PAA') este $\alpha(x^2+y^2)-(\alpha^2-64)y-64\alpha=0$.

ii) Coordonatele punctelor M, M' sînt:
$$M\left(2, \frac{3\alpha}{4}\right) \text{ și } M'\left(-4, \frac{\alpha}{2}\right).$$

Rezultă ecuaţia dreptei (MM'):

$\alpha x-24y+16\alpha=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\alpha(x+16)-24y=0.$

Această ultimă formă a ecuaţiei dreptei (MM') demonstrează că ea aparţine unui fascicul care trece prin punctul fix $I(-16;0)$.

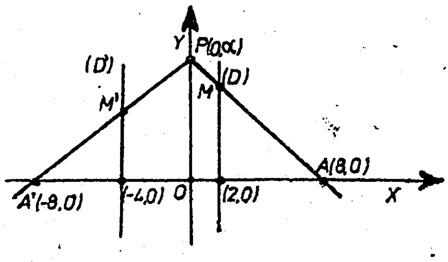


Fig. III.12

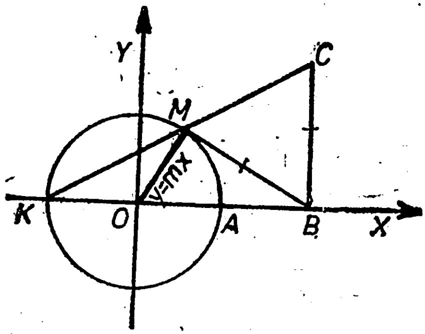


Fig. III.13

13. (Fig. III.13) Vom considera cercul cu centrul în originea axelor și fie dreapta (OM) $y = mx$. Atunci

$$M\left(\frac{r}{\sqrt{1+m^2}};\ \frac{mr}{\sqrt{1+m^2}}\right);$$

apoi tangenta în punctul M este:

$$x + my - r\sqrt{1+m^2} = 0 \text{ și } B(r\sqrt{1+m^2};\ 0),\ MB = mr,$$

$$C(r\sqrt{1+m^2};\ mr).$$

Ecuația dreptei (CM): $(x^2 + 2rx + r^2 - y^2)m^2 - (2xy + 2ry)m = 0$ duce la punctul fix: $F(-r,\ 0)$. (r = raza cercului, m = panta razei OM).

14. (Fig. III.14) Ecuațiile dreptelor sînt:

$$(AM) : y = \lambda(x - a)$$

$$(AN) : y = -\frac{1}{\lambda}(x - a),\quad \lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

Coordonatele punctelor M și N se determină intersectînd elipsa cu cele două drepte, deci

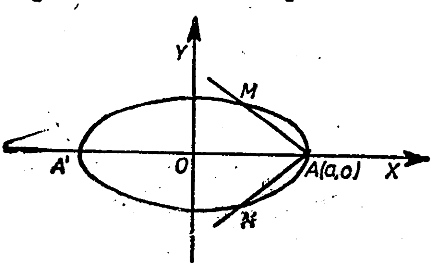


Fig. III.14

$$M: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = \lambda(x - a) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a(a^2\lambda^2 - b^2)}{a^2\lambda^2 + b^2} \\ y = -\dfrac{2ab^2\lambda}{a^2\lambda^2 + b^2} \end{cases}$$

$$N: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = -\dfrac{1}{\lambda}(x - a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a(a^2 - b^2\lambda^2)}{a^2 + \lambda^2 b^2} \\ y = \dfrac{2ab^2\lambda}{a^2 + \lambda^2 b^2}. \end{cases}$$

Ecuaţia dreptei (MN) este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \dfrac{a(a^2\lambda^2 - b^2)}{a^2\lambda^2 + b^2} & -\dfrac{2ab^2\lambda}{a^2\lambda^2 + b^2} & 1 \\ \dfrac{a(a^2 - \lambda^2 b^2)}{a^2 + b^2\lambda^2} & \dfrac{2ab^2\lambda}{a^2 + b^2\lambda^2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ordonînd după puterile descrescătoare ale parametrului λ, obţinem ecuaţia fasciculului. Coordonatele punctului fix al fasciculului, punct situat pe axa AA', se află rezolvînd sistemul format din ecuaţiile dreptelor reprezentative.

15. (Fig. III.15) i) Substituind $\cos^2\dfrac{a}{2} = 1 - \sin^2\dfrac{a}{2}$ şi $\cos a - 1 = -2\sin^2\dfrac{a}{2}$, ecuaţia dreptei (D) devine:

$$2x\sin^2\frac{a}{2} + 2y\left(1 - \sin^2\frac{a}{2}\right) - 2\sin^2\frac{a}{2} = 0$$

sau

$$(D)\quad 2y + 2(x - y - 1)\sin^2\frac{a}{2} = 0.$$

Se constată astfel că (D) formează un fascicul de drepte care trece prin intersecţia dreptelor

$y = 0$ şi $x - y - 1 = 0$

adică prin punctul fix $A(1, 0)$. ii) Scriind că distanţa de la un punct oarecare $M(x, y)$ de pe parabolă pînă la focarul $A(1, 0)$ este egală cu distanţa aceluiaşi punct pînă la directoarea $y + 2 = 0$; obţinem ecuaţia

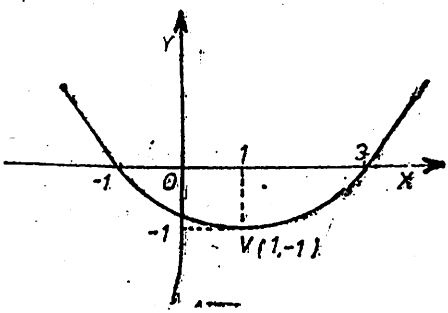


Fig. III.15

$$y = \frac{1}{4}(x^2 - 2x - 3)$$ a cărei grafic este o parabolă.

16. (Fig. III.16) Se va lua dreapta dată ca axa Ox, iar originea axelor în C.

Fie $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $M(\lambda, 0)$ și $M'(-\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Ecuația cercului circumscris triunghiului AMM' se determină ținînd cont că punctele aparțin cercului de ecuație:

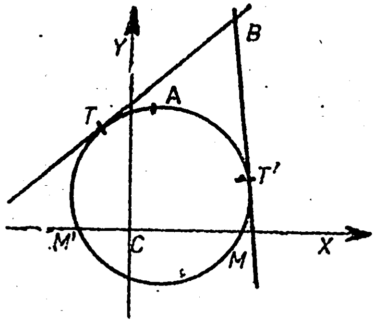


Fig. III.16

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + ma_1 + na_2 + p = 0 \\ \lambda^2 + m\lambda + p = 0 \\ \lambda^2 - n\lambda + p = 0 \end{cases}$$

unde centrul cercului este de coordonate $\left(-\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ iar raza

$$R^2 = \frac{m^2 + n^2}{4} - p \Rightarrow p = \frac{(a_1 - a_2)\lambda^2 - (a_1^2 + a_2^2)\lambda}{\lambda + a_2 - a_1}$$

$$m = \frac{\lambda^2 - (a_1^2 + a_2^2)}{\lambda + a_2 - a_1}, \quad n = \frac{\lambda^2 - (a_1^2 + a_2^2)}{\lambda + a_2 - a_1},$$

iar ecuația cercului este:

$$x^2 + y^2 - \frac{\lambda^2 - (a_1^2 + a_2^2)}{\lambda + a_2 - a_1}x + \frac{\lambda^2 - (a_1^2 + a_2^2)}{\lambda + a_2 - a_1}y +$$

$$+ \frac{(a_1 - a_2)\lambda^2 - (a_1^2 + a_2^2)\lambda}{\lambda + a_2 - a_1} = 0.$$

Punctele de tangență T și T' se vor determina intersectînd cercul cu dreapta variabilă ce trece prin B : $y - b_2 = \alpha(x - b_1)$ și impunînd condiția de tangență, adică discriminantul ecuației de gradul doi în x să fie zero. O dată determinate, vom scrie ecuația dreptei care trece prin punctele T și T', apoi o vom ordona după puterile descrescătoare ale parametrului real λ, obținînd ecuația fasciculului de drepte. Punctul fix, îl vom determina, rezolvînd sistemul format din ecuațiile dreptelor reprezentative ale fasciculului.

17. (Fig. III.17) Fie $A(0, 0)$, $B(b, 0)$, $C(c, c_1)$, $D(d, c_1)$, $P(\alpha, 0)$, $R(0, \beta)$. Cum $(AD) \parallel (PQ)$, atunci ecuaţia dreptei (PQ) este $y = \frac{c_1}{d}(x - \alpha)$, iar $\{Q\} = (PQ) \cap \cap (CD) \Rightarrow x_Q = \alpha + d$, $y_Q = c_1$.

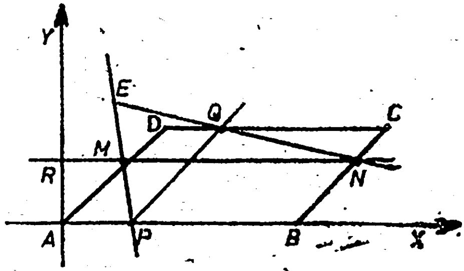


Fig. III.17

Cum $(MN) \parallel (AB)$, atunci ecuaţia dreptei (MN) este $y = \beta$, deci M are coordonatele:

$x_M = \frac{\beta d}{c_1}$, $y_M = \beta$, iar N are coordonatele:

$x_N = b + \frac{\beta c_1}{d}$, $y_N = \beta$. Ecuaţia dreptei (NQ) este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ b + \frac{\beta c_1}{d} & \beta & 1 \\ \alpha + d & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

iar ecuaţia dreptei (MP) este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{\beta d}{c_1} & \beta & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Coordonatele punctului E, le determinăm rezolvînd sistemul format din ecuaţiile dreptelor (MP) şi (NQ). Pentru ca punctele E, D, B să fie coliniare trebuie ca:

$$\begin{vmatrix} x_E & y_E & 1 \\ x_D & y_D & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

18. (D): $x + 5y - 18 = 0$; bisectoarele au ecuaţiile:

$(1 + \sqrt{2})x + y - 6 = 0$ şi $x - (1 + \sqrt{2})y + 4 = 0$.

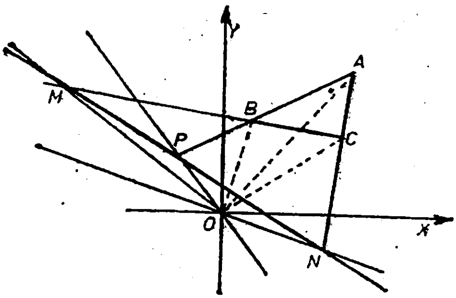


Fig. III.19

19. (Fig. III.19). Fie $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$. Ecuația dreptei (OA) este:

$$y = \frac{a_2}{a_1} x;$$

$$(OB): y = \frac{b_2}{b_1} x;$$

$$(OC): y = \frac{c_2}{c_1} x.$$

Dreapta (BC) are ecuația:

$$\frac{x - b_1}{c_1 - b_1} = \frac{y - b_2}{c_2 - b_2}.$$

Intersectînd dreptele (BC) și perpendiculara în O pe dreapta (OA) obținem coordonatele punctului M:

$$x_1 = -\frac{a_2(b_1c_2 - c_1b_2)}{a_1(b_1 - c_1) + a_2(b_2 - c_2)},$$

$$y_1 = \frac{a_1(b_1c_2 - c_2b_1)}{a_1(b_1 - c_1) + a_2(b_2 - c_2)}.$$

Analog, prin permutări circulare determinăm: pentru

$$N : x_2 = \frac{b_2(c_1a_2 - a_1c_2)}{b_1(c_1 - a_1) + b_2(c_2 - a_2)}$$

$$y_2 = \frac{b_1(c_1a_2 - a_1c_2)}{b_1(c_1 - a_1) + b_2(c_2 - a_2)};$$

pentru

$$P : x_3 = \frac{c_2(a_1b_2 - b_1a_2)}{c_1(a_1 - b_1) + c_2(a_2 - b_2)}$$

$$y_3 = \frac{c_1(a_1b_2 - b_1a_2)}{c_1(a_1 - b_1) + c_2(a_2 - b_2)}.$$

Calculînd determinantul

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

obţinem $D = 0$ ceea ce arată că punctele sînt coliniare.

20. Ecuaţia generală a cercului este $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ unde centrul $C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$ iar raza $R^2 = \frac{m^2 + n^2}{4} - p$. Impunînd condiţia ca cele trei puncte să aparţină cercului, vom obţine sistemul:

$$\begin{cases} p = 0 \\ 1 + m + p = 0 \\ 4 + 2n + p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \\ p = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - x - 2y = 0.$$

Ecuaţiile tangentelor vor fi scrise prin dedublarea ecuaţiei cercului, deoarece punctele aparţin cercului, deci: tangenta în $O : x + 2y = 0$, tangenta în $A : x - 2y - 1 = 0$, tangenta în $B : x - 2y + 4 = 0$.

Ecuaţia dreptei (AB):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (AB): 2x + y - 2 = 0,$$

iar punctele de intersecţie de pe laturi sînt:

$$M\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right); \; N\left(0, -\frac{1}{2}\right), \; P(-4, 0).$$

$$\text{Cum} \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

rezultă că punctele M, N, P sînt coliniare.

21. Pentru ușurarea calculului vom considera vîrful A în centrul axelor de coordonate și punctul B situat pe abscisă. Coordonatele centrului de greutate sînt:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Fie ortocentrul $H(x', y')$ și centrul cercului circumscris $O\ (x'', y'')$. Coordonatele ortocentrului H sînt:

$$x' = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i y_i(x_{i+1} - x_{i+2}) + \sum_{i=1}^{3} y_i^2(y_{i+1} - y_{i+2})}{\sum_{i=1}^{3} y_i(x_{i+1} - x_{i+2})}$$

$$y' = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i^2(x_{i+1} - x_{i+2}) + \sum_{i=1}^{3} x_i y_i(y_{i+1} - y_{i+2})}{\sum_{i=1}^{3} x_i(y_{i+1} - y_{i+2})},$$

iar coordonatele centrului cercului circumscris sînt:

$$x'' = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i(x_{i+1}^2 - x_{i+2}^2) + \sum_{i=1}^{3} y_i(y_{i+1}^2 - y_{i+2}^2)}{2\sum_{i=1}^{3} y_i(x_{i+1} - x_{i+2})}$$

$$y'' = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i(x_{i+1}^2 - x_{i+2}^2) + \sum_{i=1}^{3} x_i(y_{i+1}^2 - y_{i+2}^2)}{2\sum_{i=1}^{3} x_i(y_{i+1} - y_{i+2})}$$

unde x_i, y_i obținîndu-se prin permutări circulare, avem: $x_A = x_1 = x_4$, $x_B = x_2 = x_5$, $y_A = y_1 = y_4$, $y_B = y_2 = y_5$. Ținînd cont de formula care dă coordonatele unui punct ce împarte un segment într-un raport dat, problema se reduce la verificarea identităților: $x' + 2x'' = x_A + x_B + x_C = 3x_G$, $y' + 2y'' = y_A + y_B + y_C = 3y_G$.

22. i) (Fig. III.22) Dreapta (d) are ecuaţia $x = 2$. Fie $y = mx$ secanta variabilă (AP), deci $P(4, 4m)$. Intersectînd dreapta (AP) cu cercul, deci rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

obţinem

$$Q\left(\frac{-4}{1+m^2}, \frac{-4m}{1+m^2}\right).$$

Dreapta (BQ) are ecuaţia:

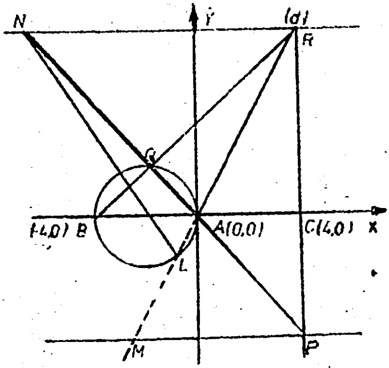


Fig. III.22

$$y = -\frac{x+4}{m} \text{ de unde rezultă } R\left(4, -\frac{8}{m}\right).$$

Avem $CP \cdot CR = 32$.

ii) Dreapta (AR) are ecuaţia $y = -\frac{2}{m}x$, dreaptă care intersectată cu cercul dat va da punctul $L\left(\frac{-4m^2}{4+m^2}, \frac{8m}{4+m^2}\right)$.

Determinantul format din coordonatele punctelor P, L, B este:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4m & 1 \\ \frac{-4m^2}{4+m^2} & \frac{8m}{4+m^2} & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Avem $(RN): y = -\frac{8}{m}$ şi $(PM): y = 4m$.

Deci $N\left(\frac{-8}{m^2}, \frac{-8}{m}\right)$ şi $M(-2m^2, 4m)$ de unde

$$\begin{vmatrix} -2m^2 & 4m & 1 \\ 4 & 4m & 1 \\ -\frac{8}{m^2} & -\frac{8}{m} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

iii) Dreapta (NL) are ecuația:

$$(4m^3 + 8m)x + (m^4 - 2m^2 - 8)y + 8(m^3 + 2m) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ym + 4(x + 2)m^3 - 2m^2y + 8(x + 2)m - 8y = 0$$

care este verificată de punctul fix $(-2, 0)$ oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$.

23. Pentru simplificarea calculului vom considera ca axe pe AB și mediatoarea.

24. Fie triunghiul ABC cu vîrfurile $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ și cercul circumscris triunghiului de ecuație $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p = 0$. Tangentele duse la cerc în punctele A, B, C se obțin prin dedublarea ecuației cercului:

$$(T_A) : (x_1 - a)x + (y_1 - b)y - ax_1 - by_1 + p = 0$$
$$(T_B) : (x_2 - a)x + (y_2 - b)y - ax_2 - by_2 + p = 0$$
$$(T_C) : (x_3 - a)x + (y_3 - b)y - ax_3 - by_3 + p = 0.$$

Ecuațiile dreptelor sînt:

$$(AB): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0,$$
$$(BC) : (y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + x_2y_3 - x_3y_2 = 0$$
$$(CA) : (y_3 - y_1)x - (x_3 - x_1)y + x_3y_1 - x_1y_3 = 0.$$

Fie $\{M\} = (T_A) \cap (BC)$ și rezolvînd sistemul format din cele două ecuații, vom determina coordonatele punctului $M: x_M, y_M$. În mod analog vom determina punctul $\{N\} = (T_B) \cap (AC)$ avînd coordonatele x_N, y_N și punctul $\{P\} = (T_C) \cap (AB)$ avînd coordonatele x_P, y_P. Condiția de coliniaritate fiind

$$\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

25. Considerăm elipsa raportată la axele ei, avînd ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Normala în punctul $M(x_1, y_1)$ intersectează axa (AA') în punctul $P\left(\frac{c^2 \cdot x_1}{a^2}; 0\right)$, iar normala în $N(x_2, y_2)$ intersectează axa BB' în punctul $Q\left(0, -\frac{c^2 \cdot y_2}{b^2}\right)$. Ecuația dreptei (PQ) este deci:

$$(PQ): \frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_2} - c^2 = 0, \quad (c^2 = a^2 - b^2)$$

care este verificată de coordonatele punctului $I(x_1, y_2)$ ceea ce demonstrează că punctele P, Q, I sînt coliniare.

26. Presupunem elipsa raportată la axe, avînd ecuația: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Dacă $M \in (A'A)$ are coordonatele $(x_0, 0)$ atunci N, conjugatul armonic al lui M are coordonatele $\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$. Punctul R are coordonatele $\left(\frac{a^2}{x_0} \cdot y_0\right)$, unde y_0 este un număr oarecare. Pentru determinarea coordonatelor punctelor P, Q notăm distanța de la un punct oarecare L de pe dreapta M_0R pînă la M_0 cu ρ. Coordonatele punctului L sînt $(x_0 + \rho\cos\alpha, \ \rho\sin\alpha)$, unde α este unghiul dreptei $(M_0 R)$ cu axa Ox, dat de $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_0y_0}{a^2 - x_0^2}$. Scriind că punctul L aparține elipsei determinăm valorile $\rho_1 = M_0P$, $\rho_2 = M_0Q$ corespunzătoare punctelor P, Q de pe elipsă. Ecuația care dă aceste valori este:

$$\frac{(x_0 + \rho\cos\alpha)^2}{a^2} + \frac{\rho^2\sin^2\alpha}{b^2} - 1 = 0 \text{ sau}$$

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\rho^2 + \frac{2x_0\cos\alpha}{a^2}\rho + \frac{x_0^2 - a^2}{a^2} = 0.$$

Pentru a demonstra că punctele M_0, R sînt conjugate armonic față de punctele P și Q trebuie să avem relația:

$$\frac{1}{M_0P} + \frac{1}{M_0Q} = \frac{2}{M_0R} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{M_0R}.$$

Din ecuaţia care dă distanţa ρ avem:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{2x_0 \cos \alpha}{a^2 - x_0^2} =$$

$$= 2 \cos \alpha \cdot \frac{tg\, \alpha}{y_0} = \frac{2}{y_0 \sin \alpha} = \frac{2}{M_0 R}.$$

27. Coordonatele punctului de intersecţie al celor două drepte se determină rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 9x + 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}.$$

Acest punct aparţine şi celei de a treia drepte, deci:

$$4(-2) + 3 \cdot 6 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -10.$$

28. Dreptele sînt concurente dacă:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ a & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Dreapta are ecuaţia $x + 3y - 7 = 0$, iar ecuaţia fasciculului o putem scrie:

$$(2 + \lambda)\, x + (1 + \lambda)\, y - 4 - 3\lambda = 0$$

şi prin identificare obţinem:

$$\frac{2 + \lambda}{1} = \frac{1 + \lambda}{3} = \frac{-4 - 3\lambda}{-7} \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{2}.$$

29. Dreptele date prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \\ A''x + B''y + C'' = 0 \end{cases} \text{sînt concurente dacă} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Deci vom considera dreapta (Δ) ca axă Ox şi o perpendiculară oarecare pe Oy. Perpendiculara din A' are ecuaţia:

$$(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y - x_1(x_2 - x_3) + y_1(y_2 - y_3) = 0.$$

Analog, prin permutări circulare, vom obţine ecuaţiile perpendicularelor din B' şi C'. Apoi vom verifica condiţia de concurenţă cu ajutorul determinantului.

30. (Fig. III.30) Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(d_1, d_2)$, $E(e_1, e_2)$ unde $AC \equiv CE$, $AB \equiv BD$, $AC \perp CE$ și $AB \perp BD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2} = \sqrt{(x_3-e_1)^2+(y_3-e_2)^2},$$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-d_1)^2+(y_2-d_2)^2},$$

$$\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{y_3-e_2}{x_3-e_1} = -1 \text{ și } \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2-d_2}{x_2-d_1} = -1 \quad (R).$$

Ecuația dreptei (CD):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y_2-d_2)x-(x_3-d_1)y+ + x_3d_2-y_3d_1 = 0.$$

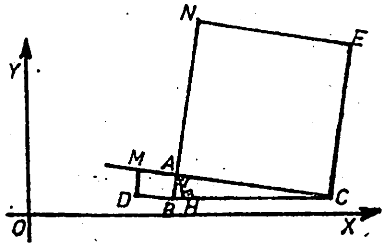


Fig. III.30

Ecuația dreptei (BE):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \\ e_1 & e_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_1-e_2)x-(x_2-e_1)y+x_2e_2-y_1e_1 = 0.$$

Ecuația dreptei (AH):

$$y-y_1 = -\frac{x_3-x_2}{y_3-y_2}(x-x_1) \Rightarrow (x_3-x_2)x-(y_3-$$

$$-y_1)y-y_1(y_3-y_1)+x_1(x_3-x_2) = 0.$$

Condiția de concurență a celor trei drepte este

$$\begin{vmatrix} y_3-d_2 & -x_3+d_1 & x_3d_2-y_3d_1 \\ y_1-e_2 & -x_2+e_1 & x_2e_2-y_1e_1 \\ x_3-x_2 & -y_3+y_1 & -y_1(y_3-y_1)+x_1(x_3-x_2) \end{vmatrix} = 0,$$

iar în calcule se va ține cont de cele patru relații (R).

31. (Fig. III.31) Fie dreapta (D) de ecuație $y = mx$ și punctele $A(a, b)$, $B(a, 0)$, $C(0, b)$.

Cum $(D_1) \parallel (D)$ și $A \in (D_1)$, atunci (D_1) are ecuația $y - b = m(x-a)$ și punctul $\{D\} = (D_1) \cap (Ox) \Rightarrow D\left(a-\frac{b}{m}, 0\right)$.

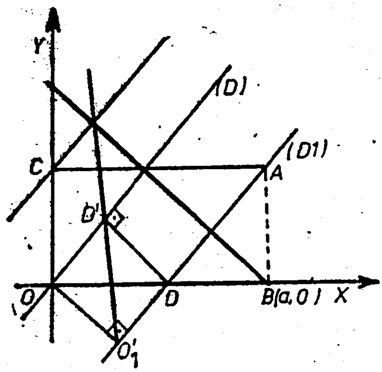


Fig. III.31

Vom determina coordonatele punctului D': fie α şi β. Cum $D' \in (D) \Rightarrow$ coordonatele punctului verifică ecuaţia dreptei, deci $\beta = m\alpha$, cum $(DD') \perp (D) \Rightarrow$ produsul pantelor este egal cu $-1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{\beta}{\alpha - a + \frac{b}{m}} = -1.$$

Deci rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} \beta = m\alpha \\ m\beta = -\alpha + a - \frac{b}{m} \end{cases} \Rightarrow$$

Coordonatele punctului D' sînt:

$$\alpha = \frac{am - b}{m(m^2 + 1)} \text{ şi } \beta = \frac{ma - b}{m^2 + 1}.$$

Vom determina coordonatele punctului O_1: fie p şi q. $O_1 \in (D_1) \Rightarrow q - b = m(p - a)$ şi dreptele (D_1) şi (OO_1) sînt perpendiculare, deci $\frac{q}{p} \cdot m = -1.$

Deci rezolvînd sistemul $\begin{cases} qm = -p \\ q - b = m(p - a) \end{cases} \Rightarrow$

coordonatele punctului O_1 sînt:

$$p = \frac{m(am - b)}{m^2 + 1} \text{ şi } q = \frac{b - am}{m^2 + 1}.$$

Ecuaţia dreptei (O_1D') este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{am - b}{m(m^2 + 1)} & \frac{ma - b}{m^2 + 1} & 1 \\ \frac{m(am - b)}{m^2 + 1} & \frac{b - am}{m^2 + 1} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2(am - b)}{m^2 + 1} x + \frac{(am - b)(1 - m^2)}{m(m^2 + 1)} y - \frac{(am - b)^2}{m(m^2 + 1)} = 0.$$

Ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta (D) este: $y - b = m \cdot x$.

Ecuația dreptei (BT) este $y = -\frac{1}{m}(x - a)$.

Condiția de concurență a celor trei drepte este:

$$\begin{vmatrix} \frac{2(am-b)}{m^2+1} & \frac{(am-b)(1-m^2)}{m(m^2+1)} & -\frac{(am-b)^2}{m(m^2+1)} \\ m & -1 & b \\ \frac{1}{m} & 1 & \frac{-a}{m} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{am-b}{m^2+1} \begin{vmatrix} 2 & \frac{1-m^2}{m} & -\frac{am-b}{m} \\ m & -1 & b \\ \frac{1}{m} & 1 & \frac{-a}{m} \end{vmatrix} = 0.$$

32. i) Coordonatele punctului M care împarte segmentul M_1M_2 în raportul dat K, sînt:

$$x_M = \frac{x_1 - Kx_2}{1-K}; \quad y_M = \frac{y_1 - Kx_2}{1-K};$$

$K > 0$ dacă punctul este exterior segmentului M_1M_2 iar $K < 0$ dacă punctul este interior segmentului M_1M_2. Aplicînd acest raționament obținem $D\left(\frac{8}{3}; \frac{11}{6}\right)$; $E\left(\frac{4}{7}; \frac{15}{7}\right)$; $F\left(\frac{14}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

ii) Ecuația dreptei (AD):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{8}{6} & \frac{11}{6} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 11x - 5y - 11 = 0$$

Ecuaţia dreptei (BE):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ \frac{4}{7} & \frac{15}{7} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 4y + 8 = 0.$$

Ecuaţia dreptei (CF):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ \frac{14}{5} & \frac{9}{5} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16x - 14y + 70 = 0,$$

iar dreptele sînt concurente deoarece:

$$\begin{vmatrix} 11 & -5 & -11 \\ 1 & -4 & 8 \\ 16 & -14 & 70 \end{vmatrix} = 0.$$

iii) Punctul D' este conjugatul punctului D faţă de punctele B şi C dacă

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} \Rightarrow \frac{x_B - x_D}{x_C - x_D} = \frac{x_B - x_D'}{x_D' - x_C} \Rightarrow x_D' = 8 \text{ şi}$$

$$\frac{y_B - y_D}{y_C - y_D} = \frac{y_B - y_D'}{y_D' - y_C} \Rightarrow y_D' = 1.$$

Punctele E, F, D' sînt coliniare deoarece:

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{7} & \frac{15}{7} & 1 \\ \frac{14}{5} & \frac{9}{5} & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

33. Se va lua dreapta (Δ) ca una din axele de coordonate.

34. Pentru simetrie se vor lua axele aşezate oricum, se vor scrie condiţiile de concurenţă pentru fiecare grup de perpendiculare şi se va constata că sînt echivalente.

35. Se vor lua ca axe de coordonate o latură a triunghiului şi înălţimea corespunzătoare.

36. $A(a, a)$; atunci o dreaptă variabilă care trece prin A are ecuaţia

$$y - a = \lambda(x - a)$$

(λ este un parametru real). Această dreaptă intersectează axele Ox, Oy în punctele $M\left(a\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right), 0\right)$ şi $N(0, a(1-\lambda))$.

Ţinînd seama că $A_1(a, 0)$ şi $A_2(0, a)$, ecuaţiile dreptelor (MA_2), (NA_1) sînt:

$$(MA_2): \frac{\lambda x}{a(\lambda - 1)} + \frac{y}{a} = 1 = 0, \ (NA_1): \frac{x}{a} + \frac{y}{a(1-\lambda)} - 1 = 0.$$

Perpendiculara din O pe (MN), care are ecuaţia $x + \lambda y = 0$, intersectează dreapta (NA_1) în punctul $P\left(x = \frac{a\lambda(\lambda - 1)}{\lambda^2 - \lambda + 1}, y = -\frac{a(\lambda - 1)}{\lambda^2 - \lambda + 1)}\right)$ ale cărui coordonate verifică ecuaţia dreptei (MA_2), deci cele trei drepte sînt concurente.

37. i) Considerăm $A(0, 0)$, $B(a, 0)$ deci $C\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, a fiind latura triunghiului echilateral. Notînd $A'(x, y)$ avem:

$$x = \frac{a - k\frac{a}{2}}{1 - k} = \frac{a(2 - k)}{2(1 - k)}, \ y = \frac{0 - k\frac{a\sqrt{3}}{2}}{1 - k} = \frac{ak\sqrt{3}}{2(k - 1)}$$

deci $A'\left(\frac{a(k-2)}{2(k-1)}, \frac{ak\sqrt{3}}{2(k-1)}\right)$. Analog se obţine

$$B\left(\frac{a}{2(1+k)}, \frac{a\sqrt{3}}{2(1+k)}\right).$$

Dreptele (AA'), (BB') şi (CC') au ecuaţiile:

$$(AA'): \sqrt{3}\,kx + (2 - k)y = 0$$

$$(BB'): a\sqrt{3}x + (a - 2k)y - a^2\sqrt{3} = 0$$

$$(CC'): 2\sqrt{3}(1 - k^2)x + 2(1 + k^2)y - 2\sqrt{3}a = 0.$$

Cum

$$\begin{vmatrix} k\sqrt{3} & 2-k & 0 \\ a\sqrt{3} & a-2k & -a^2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}(1-k^2) & 2(1+k^2) & -2\sqrt{3}a \end{vmatrix} = 0$$

cele trei drepte sînt concurente. Intersectînd două dintre ele obținem coordonatele punctului

$$M\left(\frac{a(k-2)}{2(k^2+k-1)},\ \frac{ak\sqrt{3}}{2(k^2+k-1)}\right).$$

ii) Notăm $x = \dfrac{a(k-2)}{2(k^2+k-1)}$, $y = \dfrac{ak\sqrt{3}}{2(k^2+k-1)}$

de unde $\dfrac{x}{y} = \dfrac{k-2}{k\sqrt{3}}$ iar $k = \dfrac{2y}{y-\sqrt{3}x}$, expresie care înlocuită în x sau y ne dă ecuația locului geometric:

$$5y^2 - 3x^2 = a\sqrt{3}(y - \sqrt{3}x).$$

iii) Ecuația unui cerc care trece prin origine este $x^2 + y^2 + mx + ny = 0$. Punînd condiția ca punctele B și C să aparțină cercului găsim $m = -a$, $n = -\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, deci cercul circumscris triunghiului ABC are ecuația

$$x^2 + y^2 - ax - \frac{a\sqrt{3}}{3}y = 0.$$

Punînd condiția ca punctul M să aparțină cercului găsim ecuația în k:

$$k(k^2 - k - 1) = 0,\ k \neq 0$$

cu soluțiile $k = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

38. Normala este dreapta perpendiculară pe tangentă la curbă, în punctul de contact.

Fie elipsa $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} - 1 = 0$ cu originea în punctul (x_0, y_0) și fie $M(x_M, y_M)$ un punct aparținînd elipsei. Ecuaţia tangentei în M se determină prin dedublarea ecuaţiei curbei, deci:

$$\frac{(x_M - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(y_M - y_0)(y - y_0)}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_M - x_0}{y_M - y_0}\cdot x + \frac{b^2}{y_M - y_0}\left[\frac{(x_M - x_0)x_0}{a^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(y_M - y_0)y_0}{b^2} - 1\right],$$ iar ecuaţia normalei în punctul M este:

$$y = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_M - y_0}{x_M - x_0}\cdot x + \frac{b^2}{y_M - y_0}\left[\frac{(x_M - x_0)x_0}{a^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(y_M - y_0)y_0}{b^2} - 1\right].$$

Scriind ecuaţiile celor trei normale în punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ şi condiţia de concurenţă a celor trei drepte, ajungem la concluzia că centrul elipsei este chiar centrul de greutate al triunghiului ABC, adică

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Problema se mai poate rezolva folosind coordonatele parametrice ale elipsei:
$x = a\cos\varphi$, $y = b\cos\varphi$, $\varphi \in (0, 2\pi)$ sau ţinînd cont de relaţiile trigonometrice:

$$\cos\varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{unde } t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2};$$

atunci obţinem o nouă reprezentare parametrică a elipsei, iar cele două funcţii de t fiind raţionale, obţinem:

$$x = a\cdot\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = b\cdot\frac{2t}{1 + t^2}.$$

39. Ecuaţia hiperbolei echilatere este $x^2 - y^2 - a^2 = 0$ (unde în ecuaţia redusă a hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ presupunem $a = b$), iar asimptotele sînt dreptele $y = \pm x$, adică tocmai bisectoarele axelor de coordonate. În calcule se poate folosi și ecuația hiperbolei echilatere cu centrul în punctul de coordonate (x_0, y_0):

$(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - a^2 = 0$. În demonstrația acestei probleme, vom putea folosi ecuația hiperbolei echilatere $xy = K$. Triunghiul $M_1 M_2 M_3$ este înscris în hiperbolă, atunci coordonatele celor trei vîrfuri ale triunghiului sînt:

$$M_1\left(\alpha, \frac{K}{\alpha}\right), \quad M_2\left(\beta, \frac{K}{\beta}\right), \quad M_3\left(\gamma, \frac{K}{\gamma}\right).$$

$$\text{Ecuația dreptei } (M_1M_2): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \frac{K}{\alpha} & 1 \\ \beta & \frac{K}{\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Ecuația dreptei } (M_2M_3): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \beta & \frac{K}{\beta} & 1 \\ \gamma & \frac{K}{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Ecuația dreptei } (M_1M_3): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \frac{K}{\alpha} & 1 \\ \gamma & \frac{K}{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

iar în cazul hiperbolei $xy = K$, asimptotele sînt tocmai axele carteziene. Punctele de intersecție cu abscisa sînt:

$$\{A\} = (M_1M_2) \cap (y = 0) \Rightarrow A(\alpha + \beta, 0),$$

$$\{B\} = (M_2M_3) \cap (y = 0) \Rightarrow B(\beta + \gamma, 0)$$

$$\{C\} = (M_1M_3) \cap (y = 0) \Rightarrow C(\alpha + \beta, 0).$$

Ecuaţiile perpendicularelor sînt:

în $A : y = \frac{\alpha\beta}{K}(x - \alpha - \beta)$, în $B : y = \frac{\beta\gamma}{K}(x - \beta - \gamma)$,

în C : $y = \frac{\alpha\gamma}{K}(x - \alpha - \gamma)$. Condiţia de concurenţă este:

$$\begin{vmatrix} \alpha\beta & -K & -(\alpha+\beta)\alpha\beta \\ \beta\gamma & -K & -(\beta+\gamma)\beta\gamma \\ \alpha\gamma & -K & -(\alpha+\gamma)\alpha\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha\beta & K & (\alpha+\beta)\alpha\beta \\ \beta(\alpha-\gamma) & 0 & (\alpha+\beta)\alpha\beta - (\beta+\gamma)\beta\gamma \\ \alpha(\beta-\gamma) & 0 & (\alpha+\beta)\alpha\beta - (\alpha+\gamma)\alpha\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= -K \begin{vmatrix} \beta(\alpha-\gamma) & (\alpha+\beta)\alpha\beta - (\beta+\gamma)\beta\gamma \\ \alpha(\beta-\gamma) & (\alpha+\beta)\alpha\beta - (\alpha+\gamma)\alpha\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

40. Fie $A(a, 0)$ şi $y = mx + n$ ecuaţia dreptei (D). Locul geometric cerut este $(am + n)x - ay + an = 0$, adică o dreaptă.

41. Cum $M(\alpha, \beta) \in (D) \Rightarrow$ Coordonatele sale verifică ecuaţia dreptei, deci $2\alpha + 3\beta - 12 = 0$. Se calculează coordonatele punctelor P şi Q, apoi ale lui N, mijlocul segmentului $PQ : x = \frac{1}{4}(3\alpha + \beta - 2)$, $y = \frac{1}{4}(\alpha + \beta + 2)$.

Se elimină α şi β între cele trei ecuaţii. Locul geometric este dreapta de ecuaţie $x - 7y + 10 = 0$.

42. i) Fie $M(x, y)$, $MA^2 + MB^2 - MC^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (x - 4)^2 + (y - 2)^2 - (x - 2)^2 - (y - 3)^2 = 20 \Rightarrow$ locul geometric căutat este cercul de ecuaţie:

$$x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0.$$

ii) $MA^2 + MB^2 - 2 \cdot MC^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (x - 4)^2 + (y - 2)^2 - 2(x - 2)^2 - 2(y - 3)^2 = 7 \Rightarrow$ locul geometric căutat este dreapta de ecuaţie $y = 2$.

iii) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 8 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$.

Punctele care satisfac simultan ambele relaţii au coordonatele

$$(2(1 + \sqrt{3}), 2), \quad (2(1 - \sqrt{3}), 2).$$

43. Fie $M(x, y)$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$.

Relația din enunț se poate scrie:

$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = \alpha[(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2] + \beta[(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2] + \gamma[(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2] = (\alpha + \beta + \gamma)(x^2 + y^2) - 2(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma)x - 2(a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma)y + \alpha(a_1^2 + a_2^2) + \beta(b_1^2 + b_2^2) + \gamma(c_1^2 + c_2^2) = 0$, și cum din ipoteză $\alpha + \beta + \gamma = 0$ atunci ecuația locului geometric este o dreaptă.

Coordonatele punctului fix vor fi determinate rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} -2a_1x - 2a_2y + a_1^2 + a_2^2 = 0 \\ -2b_1x - 2b_2y + b_1^2 + b_2^2 = 0 \\ -2c_1x - 2c_2y + c_1^2 + c_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-a_2(b_1^2 + b_2^2) + b_2(a_1^2 + a_2^2)}{2(a_1b_2 - b_1a_2)} \\ y = \dfrac{a_1(b_1^2 + b_2^2) - b_2(a_1^2 + a_2^2)}{2(a_1b_2 - b_1a_2)} \end{cases}$$

soluții care în mod evident vor verifica și a treia ecuație, obținînd astfel și o relație între coordonatele celor trei vîrfuri ale triunghiului.

44. Relația se scrie: $a\dfrac{AP}{AM} + b\dfrac{AP}{AN} = c$. Se observă că $\dfrac{MP}{MA} = \dfrac{MA \pm AP}{MA} = 1 \pm \dfrac{AP}{AM}$; $\dfrac{NP}{NA} = \dfrac{NA \pm AP}{NA} = 1 \pm \pm \dfrac{AP}{AN}$ și relația devine $a\dfrac{MP}{MA} + b\dfrac{NP}{NA} = a + b - c$. Se ia una din dreptele date ca Ox, cealaltă fiind $y = mx$. Se notează $A(x_0, y_0)$ și $P(x, y)$ și se ține seama că rapoartele în care dreptele date împart segmentul AP sînt tocmai cele de mai sus. Locul geometric este dreapta $a\dfrac{y}{y_0} + b\dfrac{mx - y}{mx_0 - y_0} = a + b - c$.

Pentru punctul P conjugat cu A avem $a = b = 1$, $c = 2$. Se va scrie ecuația locului geometric și în cazul general cînd ecuațiile dreptelor date sînt oarecare.

45. (Fig. III.45). Notăm $P(\alpha, 0)$, $m(\widehat{AOB}) = \theta$, $OQ = \rho$. Cum $\{M\} = (MP) \cap (MQ)$ conduce la $\alpha = x$, $\rho = x\cos\theta + y\sin\theta$ care introduse în $\alpha + \rho = K$ dau locul geometric $(1 + \cos\theta)x + y\sin\theta - K = 0$.

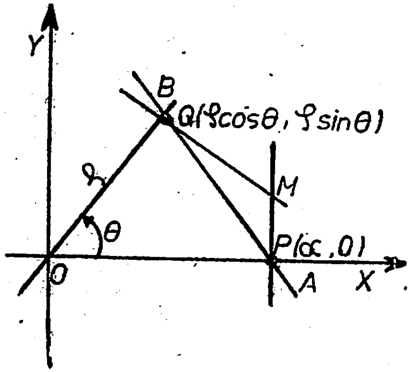


Fig. III.45

46. Fie $P(\alpha, \beta)$, (ON): $y - mx = 0$; din $(P) \in (NP) \cap (ON)$ rezultă $N\left[\frac{\alpha + \beta m}{1 + m^2}; \frac{m\alpha + \beta m}{1 + m^2}\right]$. Exprimarea analitică $OM + ON = K$ conduce la ecuația locului $(1 + m^2 + \sqrt{1 + m^2})\,x + my\sqrt{1 + m^2} - K(1 + m^2) = 0$, dreaptă perpendiculară pe bisectoarea unghiului dat, care simplificată devine:

$$(\sqrt{1 + m^2} + 1)x + my - K\sqrt{1 + m^2} = 0.$$

47. Două puncte M și M' care împart unul interior și altul exterior, un segment AB în același raport aritmetic se numesc conjugate armonic față de A și B, dacă: $\frac{MA}{MB} = -\frac{M'A}{M'B} \Leftrightarrow \frac{AM}{AM'} = -\frac{BM}{BM'}$, deci și punctele A, B sînt conjugate armonic față de punctele M și M'. Cele patru puncte A, B, M, M' formează o diviziune armonică și se mai notează cu $(ABMM') = \frac{MA}{MB} : \frac{M'A}{M'B}$ numit raport anarmonic. Cînd acest raport este egal cu -1, el se numește raport armonic. Dacă considerăm un fascicul de patru drepte (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) și o dreaptă (D) arbitrară, care intersectează cele patru drepte în punctele M_1, M_2, M_3, M_4, raportul anarmonic $K = (M_1M_2M_3M_4)$ nu depinde de poziția dreptei (D), valoarea lui fiind egală cu raportul anarmonic al pantelor dreptelor numit raportul anarmonic al fasciculului de patru drepte, cînd $K = -1$ fasciculul se numește armonic.

Fie (D_1) : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și (D_2) : $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ atunci locul geometric este format din dreptele $D_1 \pm$

$\pm KD_2 = 0$ deoarece dreptele $D_1 + KD_2 = 0$ şi $D_1 - KD_2 = 0$ ($K \in \mathbf{R}$ parametru variabil) formează un fascicul armonic împreună cu dreptele date, adică se verifică relaţia:

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\right)\left(\frac{a_1 + Ka_2}{b_1 + Kb_2} + \frac{a_1 - Ka_2}{b_1 - Kb_2}\right) = $$

$$= 2\left(\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} + \frac{a_1^2 - K^2 a_2^2}{b_1^2 - K^2 b_2^2}\right).$$

48. Ecuaţia normală a dreptei sub forma lui Hesse este $x \cos\alpha + \sin\alpha - p = 0$, unde p este pozitiv fiind o distanţă, $\alpha \in (0, 2\pi)$, iar ecuaţia dreptei prin tăieturi este $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$. Prin identificare obţinem:

$$a = \frac{p}{\cos\alpha} \text{ şi } b = \frac{p}{\sin\alpha}$$

Luînd ecuaţiile normale ale dreptei date, locul geometric este $\pm(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1) \pm (x\cos\beta + y\sin\beta - p_2) = K$. Se observă că semnele se pot asocia în 4 moduri şi că dreptele obţinute sînt două cîte două paralele, respectiv perpendiculare.

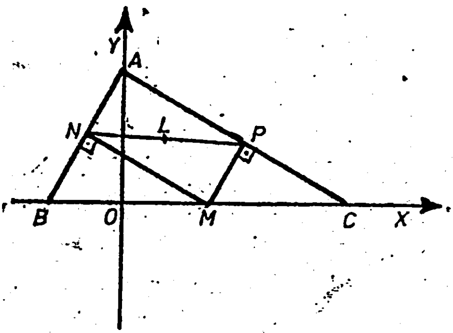


Fig. III.49

49. (Fig. III.49). Fie punctele $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$, $M(\lambda, 0)$ şi fie dreptele de ecuaţii:

$$(AC) : \frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1 = 0$$

$$\text{şi } (AB) : \frac{x}{b} + \frac{y}{a} - 1 = 0.$$

Vom determina coordonatele punctelor P şi N, adică:

$$\{P\} = (AC) \cap (PM) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1 = 0 \\ y = \frac{c}{a}(x - \lambda) \end{cases} \Rightarrow$$

$$P\left(x_p = \frac{c(a^2 + c\lambda)}{a^2 + c^2},\ y_p = -\frac{ac(c - \lambda)}{a^2 + c^2}\right).$$

Analog se vor determina coordonatele punctului N:

$$N\left(x_N = \frac{b(a^2 + b\lambda)}{a^2 + b^2},\ y_N = -\frac{ab(b - \lambda)}{a^2 + b^2}\right),$$

iar coordonatele punctului L sînt:

$$x_L = \frac{x_P + x_N}{2},\quad y_L = \frac{y_P + y_N}{2}$$

şi eliminînd parametrul λ între cele două coordonate vom obţine ecuaţia locului geometric, care este dreapta: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, unde α, β, γ sînt constante reale ce depind de a, b şi c.

50. (Fig. III.50). Între coordonatele carteziene ale punctului M (x, y) şi coordonatele polare (ρ, θ) ale aceluiaşi punct, există relaţiile care se deduc din triunghiul dreptunghic OMA: $x = \rho\cos\theta$ şi $y = \rho\sin\theta$ sau invers: putem determina coordonatele polare cînd avem coordonatele carteziene: deci

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

sau $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

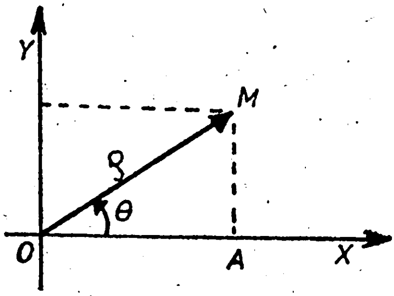


Fig. III.50

$\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ relaţii care determină în mod unic unghiul θ.

Se consideră mai întîi originea în M_0; fie $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ecuaţiile celor două drepte. Se foloseşte relaţia:

$$\frac{2}{M_0M} = \frac{1}{M_0M_1} + \frac{1}{M_0M_2}.$$

Trecînd la coordonatele polare, ecuaţiile celor două drepte se scriu:

$$\rho = -\frac{C_1}{A_1\cos\theta + B_1\sin\theta};\quad \rho = -\frac{C_2}{A_2\cos\theta + B_2\sin\theta}.$$

Aici ρ înseamnă M_0M_1, respectiv M_0M_2, deci înlocuind în relaţia precedentă, se obţine:

$$\frac{2}{\rho} = -\frac{A_1 \cos\theta + B_1 \sin\theta}{C_1} - \frac{A_2 \cos\theta + B_2 \sin\theta}{C_2}.$$

Înmulţind prin ρ şi revenind la coordonate carteziene, se determină uşor ecuaţia

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{C_1} + \frac{A_2x + B_2y + C_2}{C_2} = 0.$$

Dacă $M_0(x_0, y_0)$ nu este în origine, se mută prin translaţie originea în M_0 şi se aplică rezultatul precedent, apoi se revine la vechiul sistem de axe. Se găseşte ecuaţia polarei sub forma:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1} + \frac{A_2x + B_2y + C_2}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2} = 0.$$

Mai simplu se poate observa că locul geometric (polara) este dreapta conjugată armonic dreptei (M_0I) (I punctul de intersecţie al dreptelor date) în raport cu dreptele date. (Se foloseşte problema 47).

51. Se procedează ca şi în exerciţiul precedent, utilizînd coordonatele polare. Ecuaţia locului geometric are aceeaşi formă ca şi în acest caz.

52. Fie $A(a, 0)$, $B(a, b)$ şi $y = mx$ ecuaţia dreptei (d). Atunci $N(a, ma)$, $M\left(\frac{b}{m}, b\right)$. Simetrica dreptei (d) în raport cu OA este de ecuaţie $y = -mx$. Se obţine $Q(a, -ma)$, $P\left(-\frac{b}{m}, b\right)$. Ecuaţia dreptei (NP) se scrie sub forma $y(ma + b) - (m^2a - mb)x - 2mab = 0$ (1), iar ecuaţia dreptei (MQ) este $y(ma - b) + (m^2a + mb)x - 2mab = 0$ (2). Eliminăm parametrul m între (1) şi (2) adunînd cele două egalităţi; obţinem după simplificare, $bx + ay - 2ab = 0$; ecuaţie care reprezintă o dreaptă paralelă cu diagonala AC dusă prin punctul B.

53. Fie $A(\alpha, 0)$ și $B(0, \beta)$. Ținînd seama de faptul că $(AP) \perp (BP)$, trebuie să avem:

$$\frac{b}{a-\alpha} \cdot \frac{b-\beta}{a} = -1 \quad \text{sau} \quad a\alpha + b\beta = a^2 + b^2. \qquad (1)$$

Locul geometric al proiecției I a punctului P pe dreapta (AB) se obține eliminînd parametrii α, β din relația (1) și ecuațiile dreptelor:

$$(AB): \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0 \qquad (2)$$

$$(PI): y - b = \frac{\alpha}{\beta}(x - a) \qquad (3)$$

Din relațiile (2) și (3) determinăm parametrii reali α, β:

$$\alpha = x + \frac{y(y-b)}{x-a} \quad \text{și} \quad \beta = y + \frac{x(x-a)}{y-b}$$

ale căror expresii le introducem în (1), obținînd o ecuație scrisă sub forma:

$$a(\alpha - a) + b(\beta - b) = 0.$$

Efectuînd calculele obținem:

$$a\left[x - a + \frac{y(-y-b)}{x-a}\right] + b\left[y - b + \frac{x(x-a)}{y-b}\right] = 0$$

ecuație care se scrie sub forma:

$$(x-a)\left(a + \frac{bx}{y-b}\right) + (y-b)\left(b + \frac{ay}{x-a}\right) = 0$$

sau

$$(bx + ay - ab)\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(x-a)(y-b)} = 0.$$

Aceasta demonstrează că locul geometric căutat este dreapta de ecuație: $bx + ay - ab = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0$, dreaptă care trece prin proiecțiile punctului P pe axele Ox, Oy.

54. i) Fie punctele $A(a, a)$, $A_1(a, 0)$, $A_2(o, a)$ și dreapta variabilă (D) de ecuație $y - a = m(x - a)$ care intersectată cu axele de coordonate va genera punctele $M\left(x_M = a - \frac{a}{m}, 0\right)$ şi $N(0, y_N = (1 - m)a)$. Ecuaţia perpendicularei dusă din origine pe (D) este $y = -\frac{1}{m}x$.

Ecuaţia dreptei (MA_2):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{m-1}{m}a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + \frac{m-1}{m}y - \frac{m-1}{m}a = 0.$$

Ecuaţia dreptei (NA_1):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & (1-m)a & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-m)x + y - (1-m)a = 0.$$

Condiţia de concurenţă este asigurată dacă:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{m} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{m-1}{m} & -\frac{m-1}{m}a \\ 1-m & 1 & -(1-m)a \end{vmatrix} = 0.$$

ii) Locul geometric este un cerc.

Explicarea rezultatului prin geometrie sintetică: fie punctele P şi Q intersecţiile cu dreptele (MN) şi $(M'M')$ ale perpendicularei duse din origine pe dreapta (MN).

Ţinînd cont de proprietăţile trapezului $MNM'N'$ rezultă că punctele P şi Q sînt simetrice faţă de origine şi deci punctul Q descrie simetricul cercului, descris de punctul P.

55. i) Locul geometric al punctului M este cercul $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, care are centrul în origine şi raza a;

ii) Dacă (AM) are ecuaţia $y = \lambda(x + a)$, atunci punctul C are coordonatele $(0, a\lambda)$. Locul geometric al punctului P se obţine eliminînd parametrul λ între ecuaţiile:

$$y = a\lambda \quad \text{şi} \quad y = -\frac{1}{\lambda}(x - a).$$

Ecuaţia locului geometric al punctului P este deci parabola $y^2 = -a(x-a)$ cu parametrul $-\frac{a}{2}$ şi vîrful în punctul $B(a, 0)$.

iii) Dacă notăm $P(x, y)$ şi scriem că triunghiurile BPT şi AOC sînt asemenea, avem

$$\frac{TB}{OC} = \frac{TP}{AO} \quad \text{sau} \quad \frac{a-x}{y} = \frac{y}{a}$$

adică $y^2 = a(a-x)$ care este ecuaţia stabilită la punctul ii).

56. i) Luînd (D) ca axă Ox şi (D_1) ca axă Oy, avem $A(a, 0)$ şi $B(0, \beta)$ a fiind o constantă şi β un parametru. Ecuaţia dreptei paralele duse prin B la (D) este $y = \beta$, iar ecuaţia mediatoarei segmentului AB este:

$$(\Delta): \; y - \frac{\beta}{2} = \frac{a}{\beta}\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Locul geometric al intersecţiei dreptelor (D) şi (Δ) se determină eliminînd parametrul β între ecuaţiile celor două drepte. Se determină ecuaţia locului geometric care este parabola de ecuaţie:

$$y^2 = 2a\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

ii) Dacă notăm cu M intersecţia mediatoarei segmentului AB cu paralela dusă prin B la dreapta (D) şi ţinînd seama că triunghiul MAB este isoscel, avem $MA \equiv MB$, ceea ce demonstrează că locul geometric determinat este o parabolă cu focarul în A şi directoare dreapta (D_1).

Intersectînd dreapta (Δ) cu parabola, obţinem ecuaţia ordonatelor punctelor de intersecţie:

$$y^2 - 2\beta y + \beta^2 = 0$$

care are o rădăcină dublă, (adică este îndeplinită condiţia de tangenţă).

57. Considerăm baza triunghiului isoscel ca axă Ox, iar înălţimea perpendiculară pe această bază cu axă Oy. Ecuaţiile scrise sub formă normală, ale laturilor congruente, sînt:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0, \quad -x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Dacă M (x_0, y_0) este un punct al locului geometric, trebuie să avem conform enunţului:

$$(x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p)(-x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p) = y_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + \frac{2p \sin\alpha}{\cos^2\alpha} y_0 - \frac{p^2}{\cos^2\alpha} = 0,$$

de unde se constată că locul geometric cerut este cercul cu centrul

$$C\left(0, -\frac{p \sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right) \text{ şi raza } R = \frac{p}{\cos^2\alpha}.$$

58. i) Luînd D (0, 0), $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$ şi $A(o, p)$, ecuaţia cercului (ABD) este $x^2 + y^2 + ax - py = 0$, iar ecuaţia tangentei în D este $ax - py = 0$. Scriind ecuaţia perpendicularei (DE) din D pe (AC), găsim tot $ax - py = 0$.

ii) Locul geometric căutat este cercul de ecuaţie:

$$9(x^2 + y^2 + ax - py) + 2(a^2 + p^2) = 0.$$

iii) Se arată că dreapta (DE) este perpendiculară pe dreapta care uneşte mijlocul segmentului AB cu D.

Pentru determinarea locului geometric se observă că una din poziţiile centrului G de greutate se află la distanţa $\frac{1}{3}$ pe mediana vîrfului D, de mijlocul segmentului AB.

59. Luăm AB ca axă Ox, înălţimea triunghiului ca Oy, $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $C(0, h)$, $H(0, \lambda)$. Locurile geometrice sînt: $2hx + ay - ah = 0$, $3hx + ay - ah = 0$, $y - h = 0$.

60. (Fig. III.60) Fie L (x_0, y_0) un punct în exteriorul cercului şi ecuaţia cercului (C): $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$. Expresia puterii punctului L faţă de cercul (C) şi centrul O (înlocuind coordonatele punctului în ecuaţia cercului) este:

$$\rho = LT^2 = LO^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 \text{ şi}$$

$\rho > 0$ dacă punctul este exterior cercului,

$\rho = 0$ dacă punctul este pe cerc,

$\rho < 0$ dacă punctul este interior cercului, T fiind punctul de tangenţă.

Deci, în cazul problemei de faţă $O(4, 0)$ şi $r = \sqrt{10} \Rightarrow \Rightarrow \rho = 36 \Rightarrow 36 = (x_0 - 4)^2 + (y_0 - 0)^2 - 10 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 - 30 = 0$ care reprezintă ecuaţia locului geometric al punctului L, adică cercul de ecuație $x^2 + y^2 - 8x - 30 = 0$.

61. Fie $M(x_0, y_0)$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2) \Rightarrow \alpha[(x_0 - a_1)^2 + (y_0 - a_2)^2] + \beta[(x_0 - b_1)^2 + (y_0 - b_2)^2] = K^2 \Rightarrow (\alpha + \beta)x_0^2 + (\alpha + \beta)y_0^2 - 2(a_1\alpha + b_1\beta)x - 2(a_2\alpha + b_2\beta)y + \alpha(a_1^2 + a_2^2) + \beta(b_1^2 + b_2^2) - K^2 = 0$, ecuație care reprezintă ecuația unui cerc.

62. i) Fie punctele $M(x_0, y_0)$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ necoliniare. Atunci relația din enunțul problemei se poate scrie: $(x_0 - a_1)^2 + (y_0 - a_2)^2 + (x_0 - b_1)^2 + (y_0 - b_2)^2 + (x_0 - c_1)^2 + (x_0 - c_2)^2 = K^2 \Rightarrow 3(x_0^2 + y_0^2) - 2(a_1 + b_1 + c_1)x - 2(a_2 + b_2 + c_2)y + a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 - K^2 = 0$. Cum punctul este ales arbitrar, atunci ecuația locului geometric o putem scrie:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} x - 2 \cdot \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} y + p = 0$$

care reprezintă ecuația unui cerc cu centrul în centrul de greutate al triunghiului ABC.

ii) Dacă punctele sînt coliniare, atunci locul geometric este un cerc dacă

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

63. Fie $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ două puncte fixe și $M(x_0, y_0)$ un punct mobil. Cum

$$\frac{MA}{MB} = K \Rightarrow \frac{(x_0 - a_1)^2 + (y_0 - a_2)^2}{(x_0 - b_1)^2 + (y_0 - b_2)^2} = K^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (K^2 - 1)x_0^2 + (K^2 - 1)y_0^2 - 2(b_1K^2 + a_1)x_0 - 2(b_2K^2 + a_2)y + (b_1^2 + b_2^2)K^2 + a_1^2 + a_2^2 = 0.$$

Locul geometric este deci un cerc dacă $K^2 - 1 \neq 0$. Dacă $K = \pm 1$, cercul degenerează într-o dreaptă și anume în mediatoarea segmentului AB.

64. Cercurile se numesc ortogonale, dacă ele se intersectează sub un unghi drept (adică în punctul comun tangentele lor sînt perpendiculare) sau altfel spus, puterea centrului unui cerc faţă de al doilea, trebuie să fie dată de pătratul razei lui, relaţie care analitic se poate scrie:

$$(C_1) \qquad x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0$$

$$(C_2) \qquad x^2 + y^2 + 2m_1x + 2n_1y + p_1 = 0$$

şi primul cerc are centrul $(-m, -n)$ şi raza $r^2 = m^2 + n^2 - p$ şi deci scriind că pătratul razei este egal cu puterea centrului, obţinem:

$$2mm_1 + 2nn_1 = p + p_1$$

ceea ce reprezintă condiţia ca cele două cercuri să fie ortogonale.

Fie $M(x_0, y_0)$ centrul cercului variabil, $A(a_1, a_2)$ în cercul dat (C) $x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0$. Relaţia geometrică este $MA^2 = \rho$. Locul geometric este o perpendiculară pe diametrul care trece prin A. Problema o mai putem rezolva şi astfel: locul geometric este axa radicală a cercului (C) şi cercul cu centrul în A şi raza zero, deci este o perpendiculară pe linia centrelor.

65. Relaţia geometrică este $\frac{\rho}{\rho'} = k$ sau $\rho = k\rho'$. Alegem ca axe de coordonate linia centrelor cercurilor date (Ox) şi axa lor radicală (Oy). În acest caz avem $n = n' = 0$ şi $p = p'$ deoarece originea are puteri egale faţă de cele două cercuri. Cercurile au deci ecuaţiile:

$$x^2 + y^2 + 2mx + p = 0 \text{ şi } x^2 + y^2 + 2m'x + p = 0 \qquad (1)$$

Dacă $M(x_0, y_0)$ este punctul al cărui loc geometric se cere, relaţia geometrică se transformă astfel în relaţia analitică:

$$x_0^2 + y_0^2 + 2mx_0 + p = k(x_0^2 + y_0^2 + 2m'x_0 + p). \qquad (2)$$

Trecînd totul într-un membru, împărţind cu $1 - k \neq 0$ (pentru $k = 1$ se obţine axa radicală) şi ştergînd indicii, se obţine ecuaţia locului geometric:

$$x^2 + y^2 + 2\frac{m - km'}{1 - k}x + p = 0 \qquad (3)$$

care este un cerc aparţinînd fasciculului determinat de cercurile date (se vede din (2)). Dacă C şi C' sînt centrele cercurilor date, ecuaţia (3) arată că centrul locului geometric este punctul care împarte segmentul CC' în raportul k.

Observație. Dacă se modifică enunțul și se cere ca tangentele din M la cele două cercuri să aibă raportul constant, atunci în cazul cercurilor secante în A și B trebuie scos din locul geometric arcul de cerc cuprins între punctele A și B, deoarece din punctele acestui arc, interioare cercurilor date, nu se pot duce tangente.

66. Fie
$$(C_1)\quad x^2 + y^2 + 2m_1x + 2n_1y + p_1 = 0$$
$$(C_2)\quad x^2 + y^2 + 2m_2x + 2n_2y + p_2 = 0$$
$$(C_3)\quad x^2 + y^2 + 2m_3x + 2n_3y + p_3 = 0$$
$$(C_4)\quad x^2 + y^2 + 2m_4x + 2n_4y + p_4 = 0$$
și $M(x_0, y_0)$. Cum $\rho_1 + \rho_2 = \rho_3 + \rho_4$ (vezi problema 60), atunci termenii x_0^2, y_0^2 se reduc, obținînd ecuația locului geometric care este dreapta $2(m_1 + m_2 - m_3 - m_4)x + + 2(n_1 + n_2 - n_3 - n_4)y + p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0$.

67. Vom considera originea în centrul cercului, $P(a, 0)$, $Q(b, 0)$, $M(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$.

$N(-r \cos \alpha, -r \sin \alpha)$. Locul geometric este cercul:
$$\left(x - \frac{2ab}{a+b}\right)^2 + y^2 - r^2\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = 0.$$

68. *Reamintesc:* fiind date două cercuri:
$$(C_1)\qquad x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0$$
$$(C_2)\qquad x^2 + y^2 + 2m_1x + 2n_1y + p_1 = 0,$$
ecuația $(C_1) + \lambda(C_2) = 0$ cu $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ reprezintă un cerc variabil din cauza parametrului λ, și această ecuație se numește ecuația fasciculului de cercuri determinat de cercurile de bază (C_1) și (C_2), iar cercurile unui fascicul au aceeași axă radicală. Determinarea unui cerc al fasciculului se obține impunînd condiția ca fasciculul $(C_1) + \lambda (C_2) = 0$ să treacă printr-un punct $M(x_0, y_0)$; iar ecuația cercului este perfect determinată dacă punctul M nu aparține nici unuia din cercurile de bază.

Toate cercurile fasciculului trec prin punctele de intersecție ale cercurilor (C_1) și cu (C_2), puncte care pot fi reale sau nu, iar printr-un punct al planului trece un singur cerc al fasciculului.

Evident, un fascicul de cercuri poate avea ca elemente de bază un cerc şi o dreaptă proprietăţile rămînd aceleaşi ca la fasciculele de cercuri.

Considerăm dreapta (OA) ca axă Ox. i) Se scrie fasciculul determinant de cercul dat şi diametrul $y = mx$, apoi se impune condiţia să trecă prin $A(a, 0)$. ii) Locul geometric este o perpendiculară pe OA.

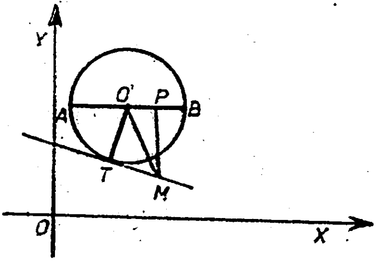


Fig. III.69

69. (Fig. III.69) Fie cercul (C) $x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0$ şi punctul $M(x_0, y_0)$ exterior cercului. Fie conform enunţului problemei: $MP^2 + \rho = K$ şi folosind exprimarea analitică a puterii ρ obţinem că locul geometric este o elipsă.

70. Din enunţul problemei $\frac{\rho}{MP^2} = k$ şi se foloseşte exprimarea analitică a puterii punctului (conf. problemei 60), obţinînd: Pentru $k < 1$, elipsă] aşezată între dreptele $x = \pm r$; pentru $k = 1$, dreptele $x = \pm r$; pentru $k > 1$, hiperbolă. Pentru $k < 0$ elipsa este interioară cercului dat.

71. Fie $M(x_0, y_0)$ un punct exterior cercului. Ecuaţiile tangentelor la un cerc, duse din punctul exterior M sînt:

$$y - y_0 = m_1(x - x_0), \quad y - y_0 = m_2(x - x_0)$$

unde pantele m_1, m_2 le determinăm din ecuaţia cercului intersectată cu ecuaţia dreptei ce trece prin punctul M şi are panta variabilă m şi impunînd condiţia ca dreapta să fie tangentă cercului, adică discriminantul ecuaţiei de gradul doi în x să fie nul. Obţinem:

$$[r^2 - (x_0 - a)^2]m^2 + 2(x_0 - a)(y_0 - b) \cdot m - (y_0 - b)^2 = 0$$

unde r este raza cercului, iar punctul de coordonate (a, b) reprezintă centrul cercului.

Se ia (D) cu axa Oy şi perpendiculara din centrul ω al cercului ca Ox. Locul geometric este parabola $y^2 = 2ax - (a^2 - r^2)$. Cazuri particulare: 1) $a = r$; 2) $-a = r$; 3) $r = 0$

72. Fie $A(a, 0)$, $B(b, 0)$. Ecuaţia cercului cu diametrul M_1M_2 unde $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ este: $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)\cdot(y - y_2) = 0$. Această ecuaţie se obţine observînd că cercul cu diametrul M_1M_2 este locul geometric al punctelor $M(x, y)$ astfel ca unghiul M_1MM_2 să fie drept, deci ecuaţia lui se scrie exprimînd că pantele dreptelor (MM_1) şi (MM_2) verifică condiţia de ortogonalitate:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1}\cdot\frac{y - y_2}{x - x_2} = -1.$$

Ecuaţia cercului care trece prin trei puncte $M_1(x_1, y_1)$ $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ se determină rezolvînd determinantul:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Deci ecuaţia cercului (C) este

$$(x - 0)(x - a) + (y - 0)(y - 0) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Fie $P \in (C)$, deci P are coordonatele

$$x_p = \lambda,\ y_p = \sqrt{a\lambda - \lambda^2}.$$

Ecuaţia cercului variabil (C_1) este:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a^2 & a & 0 & 1 \\ b^2 & b & 0 & 1 \\ a\lambda & \lambda & \sqrt{a\lambda - \lambda^2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

care intersectată cu dreapta (OP) de ecuaţie $y = \dfrac{\sqrt{a\lambda - \lambda^2}}{\lambda}\cdot x$, obţinem coordonatele punctului mobil M, adică

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{\lambda}x^2 & x & \frac{\sqrt{a\lambda - \lambda^2}}{\lambda}x & 1 \\ a^2 & a & 0 & 1 \\ b^2 & b & 0 & 1 \\ a\lambda & \lambda & \sqrt{a\lambda - \lambda^2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Eliminînd parametrul λ între coordonatele punctului M obţinem: $(x^2 + y^2 - ax)(y - b) = 0$.

Ecuaţia locului geometric se va desface în $x^2 + y^2 - ax = 0$ şi $y - b = 0$, deci locul geometric cerut este dreapta de ecuaţie $y = b$.

73. i) Fie cercul $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + \lambda^2 = 0$, cu punctul de coordonate (λ, λ) centrul şi λ raza. ii) $\lambda = a + b + \sqrt{2ab}$; iii) $2m^2x - (m + 1)^2y = 0$. iv) Ecuaţia care dă pe λ este $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$, cu rădăcina întreagă $\lambda_1 = 2$ şi o rădăcină iraţională $\lambda_2 \approx 2{,}38$.

74. În patrulaterul $ABCD$ se notează cu M_1, M_2 mijloacele diagonalelor BD, AC. Se iau drept axe de coordonate dreapta (M_1M_2) şi mediatoarea segmentului M_1M_2.

75. Se iau ca axe înălţimea din A şi latura BC; raportul razelor este egal cu raportul laturilor AB, AC, iar locul geometric este cercul circumscris triunghiului ABC.

76. (Fig. III. 76). Fie punctele $A(0, \lambda)$, $B(-b, 0)$, $C(c, 0)$ şi cercul (C) de ecuaţie: $x^2 + y^2 - (b + c)x + bc = 0$. Punctul A' fiind diametral opus punctului A va avea coor-

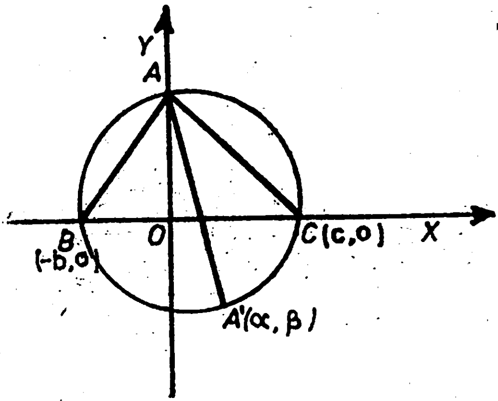


Fig. III.76

donatele: $\dfrac{b+c}{2} = \dfrac{0+\alpha}{2}$ şi $0 = \dfrac{\lambda+\beta}{2}$ adică $\alpha = b + c$ şi $\beta = -\lambda$. Impunînd condiţia ca punctul să aparţină cercului obţinem: $\lambda^2 + bc = 0$ (unde $b < 0$ şi $c > 0$). Pentru a determina coordonatele punctului A' vom intersecta ecuaţia cercului cu ecuaţia dreptei (AA'):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (b + c)x + bc = 0 \\ \lambda x + \dfrac{b+c}{2} y - \dfrac{b+c}{2}\lambda = 0. \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul şi eliminînd parametrul λ între coordonatele punctului A', vom determina ecuaţia locului geometric care este o dreaptă perpendiculară pe BC.

77. Fie a, λ abscisele punctelor A şi M, iar b ordonata lui B. Cercurile din enunţ au ecuaţiile: $x^2 + y^2 - \lambda x = 0$, $x^2 + y^2 - (a + \lambda)x + \dfrac{a^2 - a\lambda}{b} y + a\lambda = 0$.

Eliminînd parametrul λ se determină ecuaţia cercului circumscris triunghiului OAB.

78. (Fig. III.78) Fie punctele $A(0, a)$, $B(-b, 0)$, $C(c, 0)$, $M(\lambda, 0)$. Ecuaţia cercului (C_1) tangent dreptei (AB) în punctul B o vom determina astfel: fie cercul de ecuaţie: $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, tangenta în punctul B o determinăm prin dedublare: $\left(-b + \dfrac{m}{2}\right)x + \dfrac{n}{2} y - \dfrac{m}{2} b + p = 0$, ecuaţie care o identificăm cu ecuaţia dreptei (AB), ecuaţie determinată prin tăieturi:

$$\frac{x}{-b} + \frac{y}{a} - 1 = 0$$

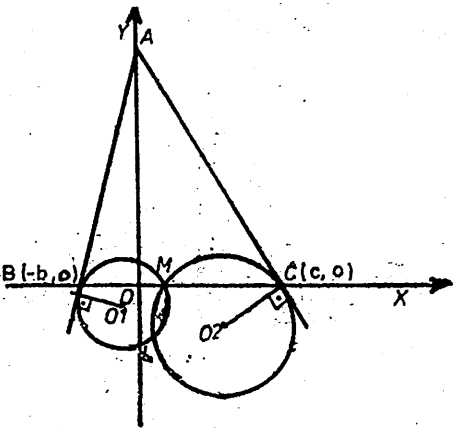


Fig. III.78

şi obţinem:

$$\frac{-b + \dfrac{m}{2}}{a} = \frac{\dfrac{n}{2}}{b} = \frac{-\dfrac{m}{2} b + p}{-1} \Rightarrow \begin{cases} an + mb = 2b^2 \\ mb^2 - 2pb = -n^2 \\ \lambda^2 + m\lambda + p = 0, \end{cases}$$

unde a treia ecuaţie a fost determinată ţinînd cont că punctul $M \in (C)$, adică coordonatele punctului M verifică ecuaţia cercului. Rezolvînd sistemul, vom determina valorile m, n, p în funcţie de b şi λ, astfel obţinem ecuaţia cercului (C_1).

Analog, prin înlocuirea abscisei b cu abscisa c, vom obţine ecuaţia (C_2) a cercului tangent dreptei (AC) în punctul C.

Din intersecţia ecuaţiilor celor două cercuri vom determina şi coordonatele punctului L în funcţie de parametrul λ, parametru care eliminat între coordonatele x_L şi y_L va genera ecuaţia locului geometric, care este cercul circumscris triunghiului ABC.

79. Se iau OA, OB pe axele carteziene Ox, Oy; fie R raza cercului, iar $y = m(x - R)$ ecuaţia dreptei (AM). Rezultă coordonatele punctului M:

$$x = R\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}; \quad y = -\frac{2mR}{m^2 + 1}.$$

Ecuaţia dreptei este $(m + 1)x + (m - 1)y - R(m - 1) = 0$, iar ordonata lui K este $-mR$. Se elimină m între ecuaţia precedentă şi $y = -mR$. Locul geometric este dreapta de ecuaţie $x + y + R = 0$, adică simetrica dreptei (AB) în raport cu originea axelor.

80. Se ia AB ca axă Ox, originea în mijlocul segmentului $AB = 2a$; fie $(x - a)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$; $(x + a)^2 + (y - \beta)^2 = \beta^2$ ecuaţiile celor două cercuri. Condiţia de tangenţă este de $4a^2 + (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2$ sau efectuînd calculele: $\alpha\beta = a^2$.

Se elimină apoi parametrii α, β între această relaţie şi ecuaţiile cercurilor. Se găseşte $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, adică cercul de diametru AB.

81. i) Avem $C\left(\frac{3}{2}; \frac{\lambda}{2}\right)$ şi ecuaţia dreptei (AB) : $\frac{x}{3} + \frac{y}{\lambda} - 1 = 0$ deci ecuaţia dreptei (CD) va fi: $y - \frac{\lambda}{2} = \frac{3}{\lambda}\left(x - \frac{3}{2}\right)$, iar punctul $D\left(\frac{3}{2}; \frac{-\lambda^2}{6}\right)$; deci cercul care trece prin cele trei puncte va avea ecuaţia $x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{-\lambda^2}{6}\right) x - \lambda y = 0$.

ii) Centrul cercului determinat are coordonatele $\omega\left(\frac{9-\lambda^2}{12}, \frac{\lambda}{2}\right)$. Eliminînd parametrul λ între coordonatele sale găsim $y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3x$. Deci locul geometric este o parabolă cu vîrful în punctul $V\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ şi care are directoarea de ecuaţie $x = \frac{3}{2}$.

iii) Directoarea parabolei este dreapta $x = \frac{3}{2}$. Înlocuind în ecuaţia cercurilor obţinem $\left(y - \frac{\lambda}{2}\right)^2 = 0$ adică $y_1 = y_2 = \frac{\lambda}{2}$; deci dreapta este tangentă acestor cercuri.

82. i) Ecuaţiile celor două cercuri se scriu $(C_1) : x^2 + y^2 - R^2 = 0$; $(C_2) : x^2 + y^2 - 2\lambda x - Ry + \lambda^2 = 0$, unde coordonatele centrului cercului (C_2) sînt $\left(\lambda, \frac{R}{2}\right)$. Axa radicală a celor două cercuri are ecuaţia $2\lambda x + Ry + \lambda^2 - R^2 = 0$.

ii) Locul geometric al punctului M se obţine eliminînd parametrul λ între ecuaţiile:

$$\begin{cases} 2\lambda x + Ry + \lambda^2 - R^2 = 0 \\ x = \lambda \end{cases}$$

şi este arcul din parabola $Ry = R^2 - x^2$ situat deasupra diametrului considerat.

83. (Fig. III.83). Fie ecuaţiile cercurilor:

$(O_1) : x^2 + y^2 - 2ax = 0,$

$(O_2) : x^2 + y^2 - 2bx = 0.$

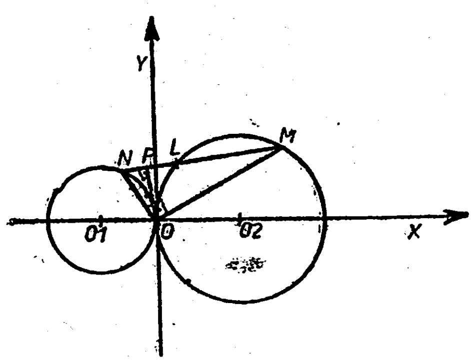


Fig. III.83

Ecuaţia dreptei (OM) este:

$y = \lambda x$, iar ecuaţia dreptei (ON) este: $y = -\frac{1}{\lambda} x$.

Coordonatele punctelor M şi N le determinăm intersectînd cercurile cu dreptele variabile, deci:

$$\{M\} = (OM) \cap (O_2) \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2bx = 0 \\ y = \lambda x \Rightarrow \end{cases}$$

$$M\left(x_M = \frac{2b}{1+\lambda^2};\ y_M = \frac{2b\lambda}{1+\lambda^2}\right);$$

$$\{N\} = (O_1) \cap (ON) \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax = 0 \\ y = -\frac{1}{\lambda} x \end{cases} \Rightarrow$$

$$N\left(x_N = \frac{2a\lambda^2}{1+\lambda^2};\quad y_N = \frac{-2a\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

i) Coordonatele punctului P, de proiecţie, se determină impunînd: ca punctul P să aparţină dreptei (MN) şi condiţia de perpendicularitate a dreptelor (MN) şi (OP):

$$\begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_M & y_M & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ şi } m_{MN} \cdot m_{OP} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)\lambda \cdot x_p + (a\lambda^2 - b) \cdot y_p - ab\lambda = 0 \\ \dfrac{(a+b)\lambda}{b - a\lambda^2} \cdot \dfrac{y_p}{x_p} = -1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$x_p = \frac{(a+b)ab\lambda^2}{(\lambda^2+1)(a\lambda^2+b)};\quad y_p = \frac{ab\lambda(a\lambda^2 - b)}{(\lambda^2+1)(a\lambda^2+b)}$$

şi eliminînd parametrul λ se obţine ecuaţia locului geometric care este ecuaţia unui cerc.

ii) Coordonatele punctului L sînt:

$$x_L = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{a\lambda^2 + b}{1+\lambda^2};\quad y_L = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{(b-a)\lambda}{1+\lambda^2}$$

şi eliminînd parametrul λ se obţine ecuaţia locului geometric care este ecuaţia unui cerc.

iii) Coordonatele centrului de greutate sînt

$$x_G = \frac{x_M + x_N + x_0}{3};\quad y_G = \frac{y_M + y_N + y_0}{3} \Rightarrow$$

$$x_G = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\lambda^2 + b}{1+\lambda^2},\quad y_G = \frac{2}{3}\cdot\frac{(b-a)\lambda}{1+\lambda^2}$$

şi eliminînd parametrul λ se obţine ecuaţia locului geometric care este un cerc.

84. i) Cercurile au ecuaţiile $x^2 + y^2 - 2r_1x = 0$ şi $x^2 + y^2 - 2r_2x = 0$. Ducem dreapta $y = mx$, obţinînd intersecţiile $M\left(x_1 = \frac{2r_1}{1+m^2},\ mx_1\right)$, $N\left(x_2 = \frac{2r_2}{1+m^2},\ mx_2\right)$.

ii) Tangenta în M la primul cerc are ecuaţia, prin dedublare: $xx_1 + yy_1 - r(x + x_1) = 0$ şi coeficientul unghiular $\frac{x_1 - r_1}{y_1} = \frac{1-m^2}{m(1+m^2)}$ deci acelaşi şi pentru punctul N.

iii) Pentru mijlocul segmentului MN, $P\left(x = \frac{r_1 + r_2}{1+m^2};\ y = mx\right)$ şi eliminînd parametrul real m, obţinem ecuaţia cercului $x^2 + y^2 - (r_1 + r_2)x = 0$.

85. i) Notăm $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $A'(a, \alpha)$, $B'(-a, \beta)$; (fig. III.85). Punctul M rezultă din intersecţia dreptelor: $-2ay = \beta(x - a)$; $2ay = \alpha(x + a)$ care înmulţite dau $-4a^2y = \alpha\beta(x^2 - a^2)$ şi rezultă (ţinînd seama de relaţia de condiţie) ecuaţia cercului $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

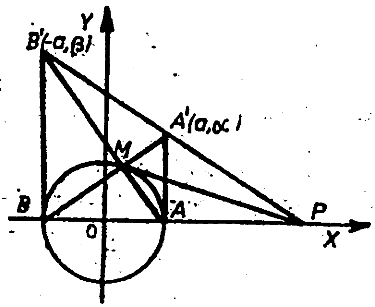


Fig. III.85

ii) $\{M\} = (A'B) \cap (AB')$ de unde $M\left[\frac{a(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta};\ \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right]$;
tangenta în M: $(\beta - \alpha)x + 4ay = a(\alpha + \beta)$; $P\left[\frac{a(\alpha+\beta)}{\beta-\alpha};\ 0\right]$;
$P'\left[\frac{a(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha};\ 0\right]$; coordonatele identice care arată că $P \equiv P'$.

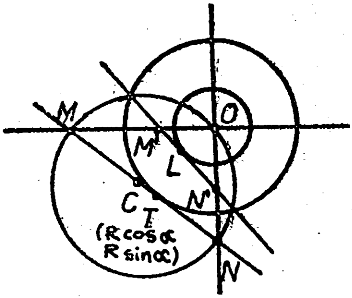


Fig. III.86

86. (Fig. III.86) $(O): x^2 + y^2 - R^2 = 0$; $T(R \cos \alpha, R \sin \alpha)$; ecuaţia tangentei: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - R = 0$; $M\left(\frac{R}{\cos \alpha}, 0\right)$; $N\left(0, \frac{R}{\sin \alpha}\right)$. Cercul $(C): x^2 + y^2 - \frac{Rx}{\cos \alpha} - \frac{Ry}{\sin \alpha} = 0$; $M'(R \cos \alpha, 0)$; $N'(0, R \sin \alpha)$. Locul geometric cerut este cercul de ecuaţie: $x^2 + y^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 0$.

87. Se iau ca axe una din laturile triunghiului şi înălţimea corespunzătoare. Locul geometric este un cerc cu centrul în centrul triunghiului.

88. Fie trei cercuri, de ecuaţii:

$$f_1(x, y) \equiv x^2 + y^2 + m_1x + n_1x + p_1 = 0$$
$$f_2(x, y) \equiv x^2 + y^2 + m_2x + n_2y + p_2 = 0$$
$$f_3(x, y) \equiv x^2 + y^2 + m_3x + n_3y + p_3 = 0$$

Celor trei cercuri li se pot asocia cîte două ecuaţii în trei feluri, obţinînd astfel ecuaţiile axelor lor radicale:

$$D_1 \equiv f_2(x, y) - f_3(x, y) \equiv (m_2 - m_3)x + (n_2 - n_3)y + p_2 - p_3 = 0$$
$$D_2 \equiv f_3(x, y) - f_1(x, y) \equiv (m_3 - m_1)x + (n_3 - n_1)y + p_3 - p_1 = 0$$
$$D_3 \equiv f_1(x, y) - f_2(x, y) \equiv (m_1 - m_2)x + (n_1 - n_2)y + p_1 - p_2 = 0$$

Se observă că avem identitatea $D_1 + D_2 + D_3 = 0$, deci axele radicale ale celor trei cercuri, luate două cîte două, sînt concurente într-un punct numit centrul radical al celor trei cercuri şi este un punct care are puteri egale faţă de cele trei cercuri. Dacă centrele celor trei cercuri sînt coliniare, atunci axele radicale sînt paralele sau mai putem spune că sînt concurente într-un punct aruncat la infinit.

Se pot lua axele oricum; se scriu ecuaţiile cercurilor, apoi a două din cele trei axe radicale şi eliminînd coeficientul de proporţionalitate se obţine ecuaţie locului geometric care este o dreaptă.

89. Fie R raza cercului: ecuația tangentei este următoarea: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - R = 0$. Coordonatele mijlocului segmentului $M'N'$ sînt: $x = \frac{1}{2} R \cos \alpha$; $y = \frac{1}{2} R \sin \alpha$.

Locul geometric este cercul cu centrul în O și rază $\frac{1}{2} R$, deoarece eliminînd parametrul α între cele două relații obținem $x^2 + y^2 - \left(\frac{1}{2} R\right)^2 = 0$.

90. Ecuația secantei, dusă din origine, este $y = mx$, unde m este un parametru real variabil. Secanta intersectează cercurile în afară de $O(0, 0)$ și în punctele de coordonate:

$$M_1\left(\frac{4}{1+m^2}; \frac{4m}{1+m^2}\right); \quad M_2\left(\frac{-2}{1+m^2}; \frac{-2m}{1+m^2}\right).$$

Ecuațiile dreptelor (M_1C_2), (M_2C_1) sînt respectiv:

$$(M_1C_2): y = \frac{4m}{m^2+5}(x+1); \quad (M_2C_1): y = \frac{m}{m^2+2}(x-2).$$

Eliminînd parametrul m, obținem ecuația locului geometric, care este cercul $x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0$ cu centrul $C(-4, 0)$ și raza 2.

În cazul cînd (M_1M_2) este chiar linia centrelor, orice punct de pe dreapta $y = 0$ poate fi punct comun al dreptelor (M_1C_2), (M_2C_1).

91. i) Dacă notăm vîrfurile paralelogramului cu P, Q, R, S, ale cărui laturi PS, PQ, QR, RS trec respectiv prin A, B, C, D, atunci ecuațiile acestor laturi sînt:

$(APS) \quad y = \alpha(x+2), \quad (PBQ) \quad y = \beta x$

$(QCR) \quad y = \alpha(x-1), \quad (DRS) \quad y = \beta(x-4)$;

unde α, β sînt parametrii variabili reprezentînd pantele laturilor paralelogramului $PQRS$.

Diagonala PR are ecuația $(4\beta - 3\alpha)y = \alpha\beta(x+8)$, ceea ce demonstrează că această dreaptă trece prin punctul fix $M(-8, 0)$, iar diagonala QS are ecuația $(3\alpha + 4\beta)y = \alpha\beta(7x - 4)$, de unde rezultă că QS trece prin punctul fix $N\left(\frac{4}{7}, 0\right)$.

ii) Deoarece punctele M, N au ordonata 0, rezultă că aceste puncte sînt situate pe dreapta $(ABCD)$.

iii) Cercurile care trec prin punctele B, C au ecuaţia

$$(C_1):\ x^2+y^2-x+\lambda y=0.$$

Aflăm, în general, locul geometric al punctelor de contact al tangentelor duse din $L(a, 0)$ la cercul (C_1), fiind locul geometric al intersecţiei dintre (C_1) şi polara (Δ) a punctului L, polară care are ecuaţia:

$$(\Delta):\ \lambda y+(2a-1)x-a=0.$$

Eliminînd pe λ între ecuaţiile (C_1) şi (Δ) obţinem locul geometric căutat, cercul: $x^2+y^2+16x-8=0$.

În cazul $L\equiv M$, locul geometric este cercul $x^2+y^2+16x-8=0$; dacă $L\equiv N$, nu există locul geometric cerut, pentru că $0<\frac{4}{7}<1$.

92. Fie $y=\lambda x$ ecuaţia secantei; intersecţia cu cercul considerat $x^2+y^2-2ax=0$ determină punctul

$$M\left(\frac{2a}{1+\lambda^2},\ \frac{2a\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

i) Obţinem $OT=\frac{a}{\lambda}$, $OM^2=\frac{4a^2}{1+\lambda^2}$ astfel că relaţia va fi verificată.

ii) Avem ecuaţiile dreptelor (OM), (AN) : $y=\lambda x$, $\lambda y=x-2a$, de unde locul geometric al lui N : $x^2-y^2-2ax=0$, adică o hiperbolă echilateră de centru $(a, 0)$ şi semiaxă a.

Observaţie: Fie N proiecţia lui T pe OM. Din triunghiul dreptunghic ONT şi triunghiurile asemenea OMA, NTO avem:

$$OT^2-ON^2=NT^2=\frac{OT^2OM^2}{OA^2}$$

care este relaţia cerută.

93. i) Fie $AB=2a$, $AM=2x$ — segment variabil. Lungimea tangentei comune a cercurilor de raze r, r' este dată de : $TT'^2=(r+r')^2-(r-r')^2=4rr'$. În cazul problemei

$r = \alpha, r' = a - \alpha$. Deci $TT'^2 = 4\alpha(a - \alpha)$ şi $LM = \frac{1}{2} TT'$.
În raport cu axa AB şi originea A, coordonatele punctului L sînt $x = 2\alpha$, $y = \sqrt{\alpha(a - \alpha)}$. Eliminînd pe α obţinem $x^2 + 4y^2 - 2ax = 0$, adică ecuaţia unei elipse de centru $(a, 0)$ şi semiaxe $a, \frac{a}{2}$.

ii) Aria elipsei de semiaxe a, b este πab, deci în cazul nostru $\frac{\pi a^2}{2}$. Pe de altă parte, suma ariilor cercurilor este

$$S = \pi [\alpha^2 + (a - \alpha)^2] = \pi\left[\frac{a^2}{2} + 2\left(\alpha - \frac{a}{2}\right)^2\right].$$

Minimul este realizat pentru $\alpha = \frac{a}{2}$ cînd aria devine egală cu aria precedentă.

94. (Fig. III.94 i) i) Ecuaţiile dreptelor (MA), (MA'), (MB), (MB') sînt respectiv:

(MA): $y(1 - \cos\alpha) = -(x - R)\sin\alpha$,

(MA'): $y(1 + \cos\alpha) = (x + R)\sin\alpha$,

(MB): $(y - R)\cos\alpha = -x(1 - \sin\alpha)$

(MB'): $(y + R)\cos\alpha = x(1 + \sin\alpha)$.

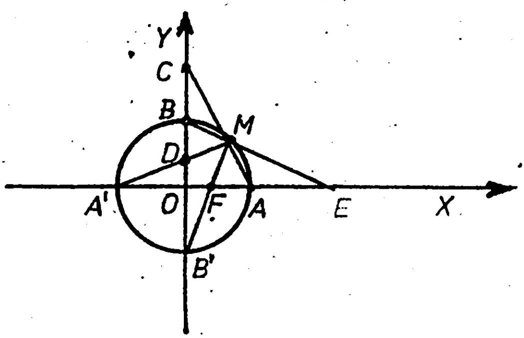


Fig. III.94 i

De aici deducem coordonatele punctelor C, D, E, F:

$$C\left(0, \frac{R \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}\right), \quad D\left(0, \frac{R \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}\right),$$

$$E\left(\frac{R \cos \alpha}{1 - \sin \alpha}, 0\right) \text{ şi } F\left(\frac{R \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}, 0\right)$$

Pentru a arăta că C, D, E, F sînt conciclice este suficient să demonstrăm că intersecţia I a mediatoarelor segmentelor CD şi EF se bucură de proprietatea:

$$IC \equiv IE.$$

În acest scop, determinăm coordonatele punctului I, care sînt:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{R \cos \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{R \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}\right) = \frac{R}{\cos \alpha}$$

şi

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{R \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{R \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}\right) = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Din calculul normei euclidiene a unui segment rezultă:

$$IC = R\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}$$

şi

$$IE = R\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}$$

ceea ce demonstrează afirmaţia din enunţ.

Ecuaţia cercului $(CDEF)$, după ce cunoaştem coordonatele centrului $I\left(\frac{R}{\cos \alpha}; \frac{R}{\sin \alpha}\right)$ şi raza $R = IC \equiv IE$, este:

$$x^2 + y^2 - \frac{2R}{\cos \alpha} x - \frac{2R}{\sin \alpha} y + R^2 = 0.$$

ii) Locul geometric al centrului cercului $(CDEF)$ se obține eliminînd parametrul α între ecuațiile $x \cos \alpha = R$ și $y \sin \alpha = R$, obținînd

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{R^2} \tag{1}$$

care este o curbă de gradul al patrulea.

Pentru reprezentare, determinăm $y = \pm \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - R^2}}$.

Ținînd seama că ecuația (1) este verificată de punctele $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ o dată cu (x, y) rezultă că graficul este o curbă care are pe Ox, Oy ca axe de simetrie, iar pe O ca centru de simetrie. De aceea este suficient să reprezentăm porțiunea de curbă corespunzătoare valorilor lui x luate în intervalul

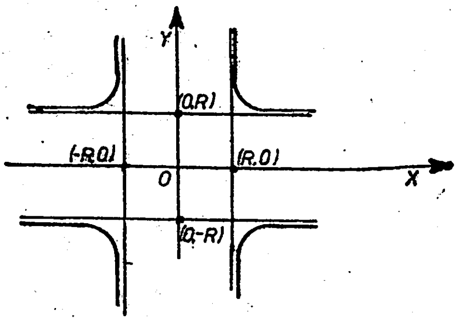


Fig. III.94 ii

$$x \in (R, +\infty),$$

apoi prin simetrie față de Ox, Oy să obținem curba în întregime.

Cu ajutorul derivatei funcției

$$y = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - R^2}}, \quad y' = -\frac{R^3}{(x^2 - R^2)^{3/2}}$$

alcătuim tabloul variației funcției pentru $x \in (R, +\infty)$:

x	R		$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	∞	$\searrow$	R

Curba respectivă a locului geometric determinat este prezentată în fig. III. 94 ii.

95. i) $A(R, 0)$, $B\left(-\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{R}{2}, -\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$

ii) Locurile geometrice sînt dreptele: $x - y\sqrt{3} = 0$ şi $2x - y\sqrt{3} = 0$.

iii) $(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$.

Presupunînd z_2, z_3 cele două rădăcini diferite de 1, se calculează z_2^2, z_3^2 de unde se constată $z_2^2 = z_3$ şi $z_3^2 = z_2$. Rădăcinile z_1, z_2, z_3 se numesc rădăcinile cubice ale unităţii.

96. Fie $x^2 + y^2 + A_i x + B_i y + C_i = 0$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ cele n cercuri date. Locul geometric este $(x^2 + y^2)\sum_{i=1}^{n} m_i^2 + x\sum_{i=1}^{n} m_i A_i + y\sum_{i=1}^{n} m_i B_i + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i C_i + k\right) = 0$; deci este un cerc sau o dreaptă, după cum $\sum_{i=1}^{n} m_i^2$ este diferită de 0 sau egală cu 0.

97. i) Cele trei cercuri, au centrele:

$$O_1(k, -1),\ O_2\left(-\frac{k}{2}, -\frac{1}{2}\right)\ O_3\left(-1, \frac{1}{2}\right).$$

Dreapta care trece prin punctele O_1, O_2 are ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ k & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$x + 3ky + 2k = 0 \Rightarrow x + k(3y + 2) = 0$, iar coordonatele punctului fix sînt $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$.

ii) Fie $M(x_0, y_0)$ centrul radical al celor trei cercuri, adică punctul care are aceeaşi putere faţă de cele trei cercuri, deci $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2kx_0 + 2y_0 + 3 = x_0^2 + y_0^2 + kx_0 + y_0 + 1 = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - y_0 - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3kx_0 - y_0 - 2 = 0 \\ (k - 2)x_0 + 2y_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

şi eliminînd parametrul k între cele două ecuaţii obţinem ecuaţia locului geometric: $x(6x - 7y + 4) = 0 \Rightarrow 6x - 7y + 4 = 0$ care reprezintă ecuaţia unei drepte.

98. Fiind dat un cerc de ecuaţie $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ şi dreapta dată, sub forma lui Hesse: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, condiţia ca segmentul MN determinat de cerc pe dreaptă să fie văzut din punctul (x_0, y_0) sub un unghi drept este $x_0^2 + y_0^2 - 2px_0 \cos \alpha - 2py_0 \sin \alpha + 2p^2 - R^2 = 0$. Locul geometric căutat este cercul de ecuaţie

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

99. Fiind date două cercuri de centru

$$O_1\left(-\frac{m_1}{2}, -\frac{n_1}{2}\right), \quad O_2\left(-\frac{m_2}{2}; -\frac{n_2}{2}\right);$$

$f_1(x, y) \equiv x^2 + y^2 + m_1x + n_1y + p_1 = 0$

$f_2(x, y) \equiv x^2 + y^2 + m_2x + n_2y + p_2 = 0$. Pentru a exprima că ele sînt ortogonale, presupunem că se intersectează în M şi N şi scriind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic O_1MO_2 obţinem condiţia de ortogonalitate:

$$mm_1 + nn_1 = 2(p + p_1).$$

Fie cercul fix (C) de ecuaţie $x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0$ şi cercul mobil $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$ unde raza r are o măsură constantă deoarece cercul mobil este tangent unei drepte fixe.

Pentru simplificarea calculelor se va considera dreapta ca fiind axa Ox. Locul geometric căutat este o parabolă.

100. i) Fie $A(a, 0)$ şi $M(0, m)$ cu m parametru real variabil. Atunci se găseşte că N are coordonatele $x = a + m$, iar P are coordonatele $x = a + m$, $y = a$. Rezultă că punctul N descrie dreapta $y = x + a$, iar P descrie dreapta $y = a$. Centrul C al pătratului are coordonatele $x_c = \dfrac{m + a}{2}$, $y_c = \dfrac{m + a}{2}$ şi prin urmare C descrie dreapta $y = x$ (prima bisectoare).

ii) Ecuaţia cercului circumscris pătratului $AMNP$ se scrie sub forma $x^2 + y^2 - ax - ay - m(x + y - a) = 0$.

De aici rezultă că cercurile $(AMNP)$, cînd m este variabil, formează un fascicul de cercuri, fasciculul generat de cercul: $x^2 + y^2 - ax - ay = 0$ şi de axa radicală de ecuaţie $x + y - a = 0$. Raza cercului este $r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + m^2}$ de unde se vede că raza minimă este $r_{min} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Cercul are ecuaţia $x^2 + y^2 - ax - ay = 0$.

iii) Se obţine $A'(0, a)$, $M'(m, 0)$. Ecuaţiile dreptelor (AM) şi $(A'M')$ sînt $mx + ay - am = 0$, respectiv $ax + my - am = 0$.

Eliminînd parametrul m se obţine $y = x$, deci Q descrie prima bisectoare.

iv) Condiţia ca patru puncte coliniare P_1, P_2, P_3, P_4 să formeze o diviziune armonică $\frac{P_1P_3}{P_1P_4} = -\frac{P_2P_3}{P_2P_4}$ (segmentele se consideră orientate) este echivalentă cu: $2(x_1x_2 + x_3x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, x_i fiind abscisa punctului $P_i(i = 1, 2, 3, 4)$. Abscisele punctelor U şi V se obţin din ecuaţia $2x^2 - 2ax - m(2x - a) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x(a + m) + am = 0$ şi notîndu-le prin x_3 şi x_4, avem $x_3 + x_4 = am$, $x_3x_4 = \frac{am}{2}$. Abscisele punctelor O şi Q sînt $x_1 = 0$ şi $x_2 = \frac{2m}{a + m}$ şi cu aceasta se verifică imediat relaţia de mai sus.

v) Ecuaţiile tangentelor în punctele A şi M se obţin prin dedublarea ecuaţiei cercului. Ele sînt $x(a - m) - y(a + m) - a^2 + am = 0$ şi respectiv $x(a + m) - y(m - a) - m^2 - am = 0$.

Eliminînd pe m între aceste ecuaţii se obţine ecuaţia locului geometric căutat: $x + y = 0$.

101. i) Să alegem sistemul de axe rectangulare xOy, O fiind mijlocul segmentului AB, A şi B să fie situate pe Ox, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$. Dacă r_a şi r_b sînt razele celor două cercuri din enunţ, atunci $r_ar_b = a^2$. Punctele O_a şi O_b au coordonatele $x = -a$, $y = r_a$, respectiv $x = a$, $y = r_b$. Ecuaţia dreptei (O_aO_b) este $x(r_b - r_a) - 2ay + a(r_a +$

$+ r_b) = 0$ de unde rezultă că distanța de la O la dreapta (O_aO_b) este $d = \frac{a(r_a + r_b)}{(r_b - r_a)^2 + 4a^2} = \frac{a(r_a + r_b)}{(r_b - r_a)^2 + 4r_ar_b} = a.$
Prin urmare dreapta (O_aO_b) rămîne tangentă cercului de diametru AB.

ii) Ecuațiile dreptelor (AO_b) și (BO_a) sînt $y = \frac{r_b}{2a}(x + a)$, respectiv $y = -\frac{r_a}{2a}(x - a)$. Eliminînd pe r_a, r_b între aceste relații și $r_ar_b = a^2$ se obține $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - 1 = 0.$

Intersecția dreptelor (AO_b), (BO_a) descrie semielipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - 1 = 0$, pentru $y \geqslant 0$.

iii) Coordonatele punctului de tangență al celor două cercuri sînt

$x = \frac{a(r_a - r_b)}{r_a + r_b}$, $y = \frac{2r_ar_b}{r_a + r_b}$. Eliminînd pe r_a, r_b între aceste relații și $r_ar_b = a^2$ se obține $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, deci punctul de tangență al cercurilor este semicercul

$$x^2 + y^2 = a^2, \text{ pentru } y \geqslant 0.$$

102. i) Fie $M(x_0, y_0)$ un punct arbitrar, aparținînd axei radicale; atunci coordonatele sale verifică ecuația dreptei și înlocuite în ecuația cercului vor da puterea punctului M față de cerc.

$$2x_0 + y_0 - 1 = 0 \text{ și } \rho = x_0^2 + y_0^2 - x_0 - y_0 + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - y + 2 + \lambda(2x + y - 1) = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (2\lambda - 1)x + (\lambda - 1)y - \lambda + 2 = 0.$$

ii) Centrul cercului este de coordonate:

$$x_c = -\frac{2\lambda - 1}{2} \text{ și } y_c = -\frac{\lambda - 1}{2}.$$

Eliminînd parametrul λ, vom obţine ecuaţia locului geometric care este o dreaptă de ecuaţie

$$2x - 4y + 1 = 0.$$

iii) Fie cercul (C) de ecuaţie: $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$. Ecuaţiile necesare determinării ecuaţiei cercului sînt:

$$B \in (C) \Rightarrow m + 2n + p + 5 = 0$$

$$A \in (C) \Rightarrow 6m + 4n + 4p + 13 = 0 \text{ şi}$$

identificarea dreptei loc geometric cu tangenta dusă la cerc prin dedublare, adică $2x - 4y + 1 = 0$ cu $2(3 + m)x + 2(2 + n)y + 3m + 2n + 4p = 0 \Rightarrow 3 + m = -\frac{2+n}{2} = 3m + 2n + 4p \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2m + n = -8 \\ 2m + 2n + 4p = 3. \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul format din 4 ecuaţii cu 3 necunoscute, vom obţine: $m = -\frac{5}{2}$, $n = -3$, $p = \frac{7}{2}$, deci ecuaţia cercului este: $2x^2 + 2y^2 - 5x - 6y + 7 = 0$.

103. i) Primul cerc are centrul $C(a, 0)$ şi raza a, iar al doilea centrul $C'(-b, 0)$ şi raza b.

ii) Se arată că cele două tangente în M, respectiv N au aceeaşi pantă $\frac{m^2-1}{2m}$.

iii) Locul geometric cerut este cercul de ecuaţie:

$$x^2 + y^2 + (b - a)x - ab = 0,$$

cerc care are centrul în $I\left(\frac{a-b}{2}, 0\right)$ şi raza $R = \frac{a+b}{2}$.

104. i) Fie $x^2+y^2-r^2=0$ ecuaţia cercului şi $M(\alpha, \beta)$ deci:

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0 \qquad (1)$$

Tangenta în M se determină prin dedublare:

$$\alpha x + \beta y - r^2 = 0$$

și intersectează axa Oy în $Y\left(0, \frac{r^2}{\beta}\right)$, deci $N\left(\frac{r^2}{\beta}, 0\right)$. Ecuația dreptei (NP) este $-\beta x + \alpha y + r^2 = 0$.

Distanța de la centrul cercului la dreapta (NP), ținînd seama de (1) este r, deci (NP) este tangentă cercului. Determinăm aria triunghiului

$$\sigma[OMN] = \pm \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ \frac{r^2}{\beta} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{r^2}{\beta} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} r^2.$$

ii) Din ecuațiile tangentei în M și a dreptei (MN) obținem:

$$\alpha = r^2 \frac{x-y}{x^2+y^2}; \quad \beta = r^2 \frac{x+y}{x^2+y^2};$$

înlocuind în (1) obținem ecuația cercului: $x^2 + y^2 - 2r^2 = 0$, deci un cerc concentric de rază $r\sqrt{2}$.

iii) Din ecuațiile dreptelor (OM), $(NQ) \perp (OM)$:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x, \; y = -\frac{\alpha}{\beta}\left(x - \frac{r^2}{\beta}\right),$$

obținem:

$$\alpha = \frac{r^2 x^2}{y(x^2+y^2)}; \quad \beta = \frac{r^2 x}{x^2+y^2}$$

înlocuind în (1) obținem curba de ecuație:

$$y^2(x^2+y^2) = r^2 x^2 \tag{Γ}$$

Ca să reprezentăm grafic curba, schimbăm rolul variabilelor x, y și avem pentru o ramură

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

domeniul de definiție al funcției fiind $-r < x < r$. Avem

$$y' = \frac{2r^2 - x^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}}$$

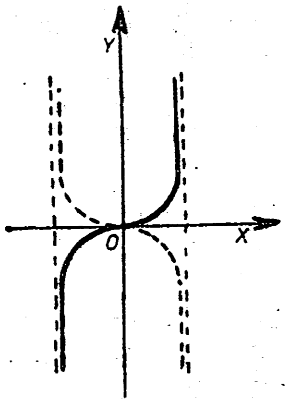


Fig. III.104

deci nu există extreme. Graficul este curba din fig. III.104, iar graficul funcției (Γ) este simetricul graficului precedent în raport cu bisectoarea, completat prin ramura simetrică în raport cu axa Ox. Curba se numeşte *curba kappa*.

Observații: a) Într-o rotație în jurul centrului, de un unghi drept, Y ajunge în N, iar M în M' pe cerc. Tangenta în M' trece prin N, omologul lui Y şi este perpendiculară pe tangenta omoloagă, din M. Deci dreapta (NP) este tangentă la cerc. Atunci distanța NQ de la N la raza OM este egală cu $OM' =$ raza r. Deci aria $\triangle OMN =$ $= \frac{1}{2}\, OM \cdot NQ = \frac{1}{2} r^2 =$ const.

b) Unghiul MPM' fiind drept, locul geometric al punctului P este cercul lui Monge, de centru O și raza $r\sqrt{2}$.

Reamintesc: Cercul lui Monge sau cercul ortoptic este cercul loc geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la o elipsă sau la o hiperbolă. Este concentric cu aceste conice și are raza egală cu $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ respectiv $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

105. i) Avem $M\left(\frac{a}{2}, \frac{p}{2}\right)$; $N\left(\frac{ab}{2b-p}, 0\right)$. Dreptele (OM) și paralela (NQ) la Oy au ecuațiile $y = \frac{p}{a}\, x$, $x = \frac{ab}{2b-p}$; eliminînd parametrul p, obținem $2bx - ay = ab$, care reprezintă o dreaptă care trece prin mijlocul segmentului OA și prin simetricul punctului B în raport cu O.

ii) Dreptele (OM), (NP) au ecuațiile:

$$y = \frac{p}{v}\, x, \quad \frac{x(2b-p)}{ab} + \frac{y}{p} - 1 = 0$$

şi eliminînd parametrul p, obţinem $3bx - ay = ab$, adică o dreaptă care trece prin simetricul punctului B faţă de O.

iii) Cercul trecînd prin origine, ecuaţia lui nu conţine termen liber; intersectînd cu axa Oy obţinem $x = a$. Deci $x^2 + y^2 - ax + \lambda y = 0$. Tangenta dusă în $A : ax + \lambda y - a^2 = 0$, intersectează axa Oy în P, deci $\lambda = \frac{a^2}{p}$ Avem deci ecuaţia:

$$x^2 + y^2 - ax + \frac{a^2}{p} y = 0.$$

iv) Rezultă $E\left(0, -\frac{a^2}{p}\right)$. Dreptele considerate au ecuaţiile $px = ay$, $y = -\frac{a^2}{p}$ şi, eliminînd pe p, obţinem $y^2 = -ax$, deci o parabolă de vîrf O, axă Ox, focar $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$.

Observaţii: a) Fie I mijlocul segmentului OA şi J intersecţia (OM), (BI). În trapezul $OIMB$ diagonala OM intersectează armonic celelalte diagonale BI şi NQ, deci Q este conjugatul punctului J faţă de punctele O şi M. Raza IQ este conjugata razei fixe IB faţă de razele fixe IO şi IM deci este fixă. Intersectînd cu axa OB, paralelă cu o rază a fasciculului, (QI) intersectează pe (OB) în B', astfel că $OB \equiv OB'$.

b) Fie K intersecţia dreptelor (AB), (OM) şi C mijlocul segmentului AB. În patrulaterul $OAMB$, diagonala OM le intersectează armonic pe celelalte două, AB şi PN, deci R este conjugatul lui K faţă de OM. Raza CR este conjugata razei fixe $CK \equiv AB$, faţă de razele fixe CO şi CI şi CR este o dreaptă fixă. Intersectînd cu secanta Oy paralelă cu CI; intersecţia B' cu raza CM este simetricul punctului B faţă de O.

106. i) Dacă notăm cu θ unghiul format de OP_1P_2 cu axa Ox, atunci coordonatele punctelor P_1, P_2 sînt:

$$P_1(x_1 = R_1 \cos\theta,\ y_1 = R_1 \sin\theta),$$
$$P_2(x_2 = R_2 \cos\theta,\ y_2 = R_2 \sin\theta).$$

Punctul M, simetricul punctului P_1 în raport cu perpendiculara dusă din P_2 pe Ox, are coordonatele:

$$x = 2x_2 - x_1 = (2R_2 - R_1)\cos\theta,\ y = y_1 = R_1 \sin\theta.$$

Eliminînd pe θ între cele două relații precedente, obținem ecuația locului geometric cerut:

$$(L): \frac{x^2}{(2R_2 - R_1)^2} + \frac{y^2}{R_1^2} - 1 = 0$$

sau, în cazul numeric dat,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

care este ecuația unei elipse.

ii) Dacă presupunem $S(x, y)$ și $T(X, Y)$, atunci avînd în vedere că $OT/TS = k$, rezultă:

$$X = \frac{kx}{1+k};\quad Y = \frac{ky}{1+k}.$$

Scriind că $S(x, y)$ verifică ecuația (L), obținem ecuația pe care o verifică coordonatele (X, Y) ale punctului T:

$$\frac{X^2}{\left[\frac{(2R_2 - R_1)k}{1+k}\right]^2} + \frac{Y^2}{\left[\frac{R_1 k}{1+k}\right]^2} - 1 = 0,$$

de unde rezultă că locul geometric al punctului T este, de asemenea, o elipsă.

iii) În cazul numeric dat, cercurile și elipsa avînd ecuațiile:

$$(C_1): x^2 + y^2 - 4 = 0,\ (C_2): x^2 + y^2 - 9 = 0 \text{ și}$$
$$(L): x^2 + 4y^2 - 16 = 0.$$

se intersectează astfel:

(C_1) cu (L) în punctele $T_1(0, 2)$, $T_2(0, -2)$;

iar (C_2) cu (L) în punctele

$$T_3\left(\frac{\sqrt{60}}{3}; \frac{\sqrt{21}}{3}\right);\ T_4\left(-\frac{\sqrt{60}}{3}, \frac{\sqrt{21}}{3}\right);$$

$$T_5\left(\frac{\sqrt{60}}{3}; -\frac{\sqrt{21}}{3}\right);\ T_6\left(-\frac{\sqrt{60}}{3}, -\frac{\sqrt{21}}{3}\right).$$

Aplicînd formula ecuației tangentei în punctul (x_0, y_0) (prin deduблare), punct aparținînd elipsei (L), obținem:

$$xx_0 + 4yy_0 - 16 = 0,$$

obținem ecuațiile tangentelor în punctele de intersecție indicate.

iv) Un punct A de pe elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, astfel încît (OA) să facă cu axa Ox un unghi u, are coordonatele:

$$A\left(\frac{\pm ab \cos u}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}}; \frac{\pm ab \sin u}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}}\right).$$

Punctul B, astfel încît dreapta (OB) să fie perpendiculară pe dreapta (OA), are coordonate care se obțin din cele precedente scriind în loc de u valoarea $90° + u$. Se găsește astfel:

$$B\left(\frac{\mp ab \sin u}{\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}}, \frac{\pm ab \cos u}{\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}}\right)$$

și prin urmare

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}{a^2b^2} +$$

$$+ \frac{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

107. i) Fie $C(\alpha, \beta)$ deci $\beta^2 = 2p\alpha$. Cercul $(\mathscr{C})$ are raza α. Dacă $m(\widehat{CFT}) = 45°$ avem $CF = CT \cdot \sqrt{2}$ adică $\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^2 +$ $+ \beta^2 = 2\alpha^2$, $\beta^2 = 2p\alpha$, deci $\alpha^2 - p\alpha - \frac{1}{4}p^2 = 0$, $\alpha = \frac{p}{2}(1 + \sqrt{2})$ ceea ce determină poziția punctului C.

ii) FT^2 este puterea focarul F față de cercul $(\mathscr{C})$, cercurile $(\mathscr{C})$ și (f) au ecuațiile:

$$(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \beta^2 = 0,$$

$$(f): x^2 + y^2 - px - \alpha p = 0$$

deci axa lor radicală este

$$\text{(a)} \qquad (p - 2\alpha)x - 2\beta y + 3p\alpha = 0,$$

iar tangenta în C la parabolă, prin dedublare: $\beta y = p(x + \alpha)$. Obținem din (a) și din ecuația tangentei în C:

$$\alpha = \frac{px}{p - 2x}; \quad \beta = \frac{2px(x - x)}{y(p - 2x)}$$

și înlocuind în relația $\beta^2 = 2p\alpha$ avem ecuația locului geometric

$$y^2 = \frac{2x(p - x)^2}{p - 2x}$$

care reprezintă o curbă de gradul al treilea, anume o strofoidă, care trece prin origine, cu o asimptotă verticală ce trece prin focar, cu punct dublu $(p, 0)$.

iii) Pentru ca cercurile ($\mathscr{C}$) să fie tangente unui cerc fix, acest cerc ar trebui, din cauza simetriei, să aibă centrul pe axa Ox. Fie $I(i, 0)$ centrul și r raza lui. Atunci $CI = r + \alpha$; deci:

$$(\alpha - i)^2 + 2p\alpha = (r + \alpha)^2 \Rightarrow 2\alpha(p - i - r) = r^2 - i^2.$$

Această relație va fi independentă de α, cînd $i = r = \frac{p}{2}$. Cercul are deci centrul în focar și trece prin origine.

Observație: Distanța de la C la directoare este $\alpha + \frac{p}{2}$, ceea ce explică rezultatul iii).

108. Se consideră OA ca axă Ox și se notează $AM = b$, $MB = a$. Locul geometric este elipsa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

(Proprietatea se folosește la construcția elipsografului).

Reamintesc: Elipsograful este un instrument care servește la desenarea elipselor, format dintr-o bară rigidă AB, articulată la extremitățile sale cu două cursoare, care alunecă în două glisiere rectangulare Ox și Oy și pe care se fixează într-un punct M un vîrf care lasă urmă.

109. Ecuația cercului este $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Fie $L(\lambda, \sqrt{r^2 - \lambda^2})$ deci $MN = \sqrt{r^2 - \lambda^2}$ și $\frac{MQ}{QN} = k \Leftrightarrow \frac{MN}{QN} =$

$= k + 1 \Leftrightarrow x_Q = \dfrac{x_N + kx_M}{1 + k}$; $y_Q = \dfrac{y_N + ky_M}{1 + k}$ și $MN^2 = (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 = r^2 - \lambda^2$ și $QN^2 = (x_M - x_Q)^2 + (y_N - y_Q)^2$. Locul geometric al punctului Q este o elipsă.

110. (Fig. III.110) Fie elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ și $T\left(\lambda, \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - \lambda^2}\right)$. Ecuația tangentei se determină prin

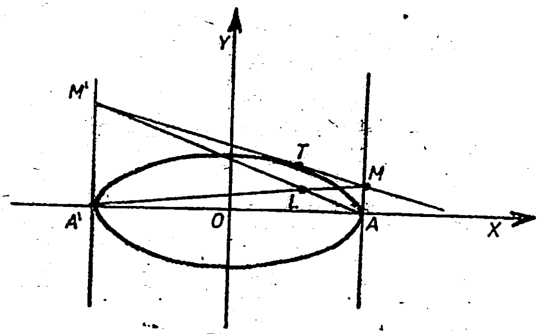


Fig. III.110

dedublarea ecuației elipsei, deoarece punctul aparține elipsei: $\dfrac{\lambda}{a^2}x + \dfrac{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}{ab}y - 1 = 0$. Coordonatele punctelor M și M' se determină intersectînd ecuația tangentei cu tangentele duse în A și A' deci

$$M\left(a, \frac{b(a - \lambda)}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}\right) \text{ și } M'\left(-a, \frac{b(a + \lambda)}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}\right).$$

Ecuația dreptei (MA'): $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & \dfrac{b(a - \lambda)}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}} & 1 \\ -a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Ecuația dreptei (AM'): $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -a & \dfrac{b(a + \lambda)}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}} & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Intersectînd cele două drepte obținem coordonatele punctului mobil L; eliminînd parametrul λ între cele două coordonate obținem ecuația locul geometric ca fiind elipsa cu axa mică jumătate decît a elipsei inițiale.

111. (Fig. III.111) Cum $AA = 2BB'$ și ecuația elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow a = 2b.$$

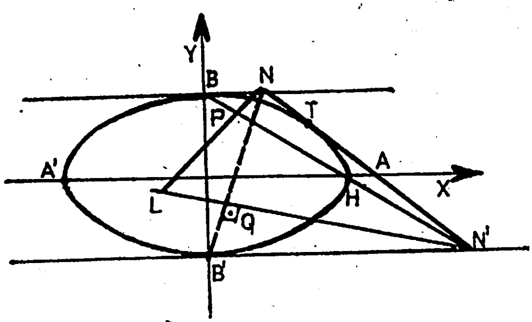


Fig. III.111

Tangenta în punctul $T\left(\lambda, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \lambda^2}\right)$ are ecuația $\frac{\lambda}{a^2}x + \frac{\sqrt{a^2-\lambda^2}}{ab}y - 1 = 0$. Tangentele la elipsă în punctele B și B' au ecuațiile $y = b$ și $y = -b$, deci coordonatele punctelor N și N' sînt:

$$N\left(\frac{a(a-\sqrt{a^2-\lambda^2})}{\lambda}, b\right) \text{ și } N'\left(\frac{a(a+\sqrt{a^2-\lambda^2})}{\lambda}, -b\right).$$

Panta dreptei (BN') este $m_1 = -\frac{2b\lambda}{a(a+\sqrt{a^2-\lambda^2})}$, iar panta dreptei $(B'N)$ este $m_2 = \frac{2b\lambda}{a(a-\sqrt{a^2-\lambda^2})}$.
Ținînd cont de condițiile de perpendicularitate, ecuația dreptei (PN) este:

$$y - b = -\frac{1}{m_1}\left(x - \frac{a(a-\sqrt{a^2-\lambda^2})}{\lambda}\right)$$

şi ecuaţia dreptei $(N'Q)$ este

$$y+b=-\frac{1}{m_2}\left(x-\frac{a(a+\sqrt{a^2-\lambda^2})}{\lambda}\right).$$

Intersectînd ecuaţiile celor două drepte, eliminînd parametrul λ între coordonatele punctului L şi ţinînd cont că $a=2b$ obţinem locul geometric care este cercul de ecuaţie $x^2+y^2-b^2=0$. Altă demonstraţie poate mai simplă, este de a scrie coordonatele punctului variabil T, ţinînd cont de ecuaţiile parametrice ale elipsei: $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, $\varphi\in(0,2\pi)$ şi astfel obţinem $T(x_0=a\cos\varphi,\ y_0=b\sin\varphi)$, coordonate care înlocuite în ecuaţia tangentei dusă în T, prin dedublare, obţinem:

$$\frac{\cos\varphi}{a}\cdot x+\frac{\sin\varphi}{b}y-1=0,$$

apoi raţionamentul continuă analog primei metode de lucru.

112. Fie punctul $M\left(x_0, \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}\right)$ aparţinînd elipsei de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ şi $A(\lambda,0)$ proiecţia punctului M pe abscisă. Conform enunţului:

$$\frac{ML}{LA}=k\Rightarrow\frac{y_M-y_L}{y_L-y_A}=k\Rightarrow\frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}-\lambda}{\lambda}=$$

$$=k\Rightarrow\lambda=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x_0^2}}{1+k}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{\lambda^2}{\left(\frac{b}{1+k}\right)^2}-1=0,$$

deci punctul $L(x_0,\lambda)$ descrie o familie de elipse, de semiaxe a şi $\frac{b}{1+k}$.

Analog se demonstrează că punctul $L'(\lambda, y_0)$ descrie o familie de elipse de semiaxe $\frac{a}{1+k}$ şi b.

113. Coordonatele celor două puncte sînt $M(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$; $N\left(\frac{a^2}{c},\ b\sin\alpha\right)$. Va trebui eliminat parametrul real

α între ecuațiile $2x = \frac{a^2}{c} + a\cos\alpha$; $y = b\sin\alpha$. Locul geometric este elipsa de ecuație: $\frac{\left(2x - \frac{a^2}{c}\right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, unde directoarele sînt dreptele de ecuații $x = \pm\frac{a^2}{c}$.

114. (Fig. III.114) Fie elipsa de ecuația $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

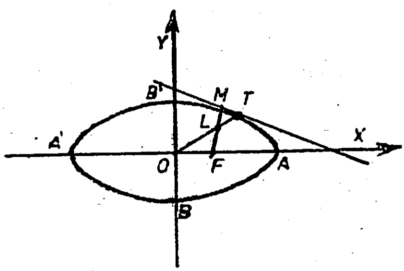


Fig. III.114

și $T\left(\lambda, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \lambda^2}\right)$, atunci ecuația tangentei în T o vom determina prin dedublare:

$$\frac{\lambda}{a^2}x + \frac{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}{ab}y - 1 = 0,$$

dreaptă ce are panta $m = -\frac{b\lambda}{a\sqrt{a^2 - \lambda^2}}$. Ecuația dreptei (FM) este $y = -\frac{1}{m}(x - c) \Rightarrow y = \frac{a\sqrt{a^2 - \lambda^2}}{b\lambda}(x - c)$. Ecuația dreptei (OT) este $y = \frac{b\sqrt{a^2 - \lambda^2}}{a\lambda}x$. Din coordonatele punctului L, obținut din intersecția dreptelor (FM) cu (OT), eliminînd parametrul λ obținem locul geometric care este directoarea corespunzătoare acelui focar, adică dreapta de ecuație $x = \frac{a^2}{c}$. Analog se obține: $x = -\frac{a^2}{c}$ (unde $c^2 = a^2 - b^2$, iar $F(c, 0)$ și $F'(-c, 0)$ fiind focarele elipsei).

115. Folosind ecuația tangentei dusă la elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ în punctul $T(x_0, y_0)$, prin dedublare, obţinem: $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y-1=0$. Folosind ecuaţiile parametrice ale elipsei $x=a\cos\alpha$, $y=b\sin\alpha$ cu $\alpha\in(0, 2\pi)$ şi cum T aparţine elipsei, obţinem: $x_0=a\cos\alpha$, $y_0=b\sin\alpha$, relaţii care înlocuite în ecuaţia tangentei, obţinem:

$$\frac{\cos\alpha}{a}\cdot x+\frac{\sin\alpha}{b}y-1=0.$$

Ecuaţia dreptei care trece prin origine şi este perpendiculară pe tangentă este: $y=\frac{a\sin\alpha}{b\cos\alpha}\cdot x$.

Se elimină unghiul α între ecuaţiile celor două drepte $\frac{x\cos\alpha}{a}+\frac{y\sin\alpha}{b}-1=0$; $y=\frac{a\sin\alpha}{b\cos\alpha}x$. Se vor determina $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, din aceste ecuaţii şi se vor înlocui în relaţia $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. Locul geometric are ecuaţia $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$. Construcţia acestei curbe se poate face observînd proprietăţile ei de simetrie faţă de axe, origine şi bisectoare; trecînd la coordonate polare calculul este mai simplu, unde $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ cu $\theta\in[0,2\pi)$, $\rho\in[0,\infty)$. Curba are forma unui oval, tangent elipsei în extremităţile axelor. Originea este un punct izolat, adică deşi coordonatele ei verifică ecuaţia curbei, totuşi ea nu trece prin acest punct. Propun trasarea curbei folosind metoda de trasare a unei curbe, învăţată la analiză matematică.

116. Ecuaţia tangentei fiind $\frac{x\cos\alpha}{a}+\frac{y\sin\alpha}{b}-1=0$, coordonatele punctului P sînt $x=\frac{a}{\cos\alpha}$, $y=\frac{b}{\sin\alpha}$ şi locul geometric este $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}-1=0$. Curba se construieşte uşor, rezolvînd ecuaţia în raport cu y: $y=\pm\frac{bx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

117. i) Considerăm elipsa raportată la axele ei:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Scriind $B(\alpha, \beta)$, rezultă $C(-\alpha, \beta)$, şi $T(a, \beta)$, iar între α şi β avem relaţia

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Pentru a demonstra relaţia, observăm:

$$b^2 \cdot TB \cdot TC = b^2 \cdot BT \cdot CT = b^2(a-\alpha)(a+\alpha) =$$

$$= b^2(a^2-\alpha^2)^4 = b^2 \cdot \frac{a^2\beta^2}{b^2} = a^2\beta^2,$$

sau $b^2 \cdot TB \cdot TC = a^2 \cdot AT^2$.

ii) Avem $M(0, \beta)$ şi ecuaţiile dreptelor:

$$(A'B)\colon y = \frac{\beta}{\alpha + a}(x+a), \quad (AM)\colon y = -\frac{\beta}{a}(x-a).$$

Din aceste ecuaţii deducem că $\alpha = \dfrac{2ax}{a-x}$ şi $\beta = \dfrac{ay}{a-x}$ care, substituite în $b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$, dau ecuaţia locului geometric:

$$3b^2x^2 - 2ab^2x + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Această ecuaţie se mai scrie:

$$\frac{\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^2}{\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{2b\sqrt{3}}{3}\right)^2} - 1 = 0,$$

de unde se vede că locul geometric este o elipsă cu centrul în punctul $I\left(-\dfrac{a}{3}, 0\right)$ şi cu măsura semiaxelor $\dfrac{2a}{3}$ şi $\dfrac{2b\sqrt{3}}{3}$.

118. i) Dacă $M(x_0, y_0)$, atunci

$$P'\left[\left(1+\frac{b}{a}\right)x_0, \left(1+\frac{a}{b}\right)y_0\right], \; Q'\left[\left(1-\frac{b}{a}\right)x_0, \left(1-\frac{a}{b}\right)y_0\right]$$

ceea ce demonstrează afirmaţia.

ii) Locul geometric al punctului P' este un cerc cu centrul O şi raza $a+b$, iar al punctului Q' un cerc cu acelaşi centru şi raza $a-b$.

iii) Se găseşte $T\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$ şi se arată că $m(\widehat{OQ'P'}) =$
$= m(\widehat{OTP'})$.

119. i) Ecuaţia tangentei paralelă cu direcţia m este $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$. Punînd condiţia ca dreapta să treacă prin $P(2a, 0)$ se obţine $m = \pm \frac{b}{a\sqrt{3}}$ şi ecuaţiile tangentelor duse din P sînt:

$$y = \frac{b}{a\sqrt{3}}x - \frac{2b}{\sqrt{3}} \text{ şi } y = -\frac{b}{a\sqrt{3}}x + \frac{2b}{\sqrt{3}}.$$

Punctele de tangenţă se obţin rezolvînd sistemele:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \; y = \frac{b}{a\sqrt{3}}x - \frac{2b}{\sqrt{3}} \text{ şi}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \; y = \frac{b}{a\sqrt{3}}x - \frac{2b}{\sqrt{3}};$$

deci $T\left(\frac{a}{2}, \frac{3b}{2\sqrt{3}}\right)$, $T'\left(\frac{a}{2}, -\frac{3b}{2\sqrt{3}}\right)$.

ii) O dreaptă variabilă care trece prin P are ecuaţia $y = m(x - 2a)$. Această dreaptă intersectează elipsa în R şi Q; fie $R(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$. Ecuaţiile tangentelor în R şi Q sînt $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$, $\frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} - 1 = 0$.

A determina locul geometric al intersecţiei acestor drepte revine la a elimina pe x_1, y_1, x_2, y_2 între acestre relaţii cu condiţia că punctele de coordonate(x_1, y_1), (x_2, y_2) sînt intersecţiile dreptei $y = m(x - 2a)$ cu elipsa. Din cele două relaţii avem

$$y = \frac{b^2(a^2 - xx_1)}{a^2y_1} = \frac{b^2(a^2 - xx_2)}{a^2y_2}$$

de unde

$$x = \frac{a^2(y_2 - y_1)}{x_1y_2 - x_2y_1} = \frac{a^2m(x_2 - x_1)}{mx_1(x_2 - 2a) - mx_2(x_1 - 2a)} = \frac{a}{2}.$$

În consecință locul geometric este format din semidreptele situate pe dreptele de ecuații $x = \frac{a}{2}$, în afara elipsei.

iii) Evident că punctele T și T' fac parte din locul geometric.

120. Fie $M(\alpha, \beta)$; obținem

$$N\left(-a, \frac{2\alpha\beta}{a-\alpha}\right), \quad (NP): y = \frac{2\alpha\beta}{a-\alpha}, \quad (A'M): y = \frac{\beta}{\alpha+a}(x+a),$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

Eliminînd parametrii α, β obținem:

$$\alpha = \frac{a(x-a)}{x+3a}, \quad \beta = \frac{2ay}{x+3a} \quad \text{deci } y^2 = 2\frac{b^2}{a}(x+a),$$

o parabolă de vîrf A', de parametru egal cu parametrul elipsei.

Observație: Între secantele $(A'M)$ și (NP) ale fasciculelor de vîrfuri A' și punctul ∞ de pe AA' există o corespondență omografică, deci intersecția lor descrie o conică ce trece prin A' și punctul de la infinit al axei, deci este o parabolă de vîrf A' și axă AA'.

Reamintesc: se numește omografie o funcție $f: \mathbf{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ cu $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

Mulțimea omografiilor formează un grup față de operația de compunere a funcțiilor.

Transformarea omografică păstrează coliniaritatea punctelor și gradul curbelor și al suprafețelor. În geometrie, omografia pune în corespondență două elemente geometrice din două mulțimi, unde poziția fiecărui element depinde de un singur parametru. De exemplu, omografie între punctele a două drepte, este o omografie care realizează o corespondență între un punct M de abscisă x, de pe o dreaptă (D) și punctul M' de abscisă x', de pe o dreaptă (D').

Reciproc: dacă între punctele a două drepte există o corespondență bijectivă realizată prin construcții cu rigla și compasul, această corespondență este o omografie.

121. i) Fie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2}-1=0$ o elipsă din familie. Intersecţia I cu prima bisectoare are coordonatele egale şi coeficientul unghiular al tangentei în punctul I este $-\frac{\lambda^2}{a^2}$; care trebuie să fie egal cu coeficientul $-\frac{c}{a}$ al dreptei (AC). Deci $\lambda^2=ac$.

ii) Avem elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{ac}-1=0$. O dreaptă dusă prin punctul C, $y=c+tx$, intersectează elipsa în două puncte M_1, M_2 ale căror abscise x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei:

$$(c+at^2)x^2+2actx+ac(c-a)=0.$$

Pentru mijlocul coardei avem $x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{act}{c+at^2}$; $y=c+tx$ şi eliminînd parametrul real t, obţinem ecuaţia $cx^2+ay^2-acy=0$.

iii) Scriem ecuaţia precedentă sub forma:

$$\frac{x^2}{\frac{ac}{4}}+\frac{\left(y-\frac{c}{2}\right)^2}{\frac{c^2}{4}}-1=0$$

care reprezintă o elipsă de centru $\left(0, \frac{c}{2}\right)$ şi semiaxe $\frac{\sqrt{ac}}{2}$; $\frac{c}{2}$. Elipsa trece prin punctele O şi C. Avem o ramură a curbei cuprinsă între punctele de contact ale tangentelor duse din punctul C la elipsa iniţială. Dacă ducem prin C o secantă exterioară, punctele de intersecţie M_1, M_2 sînt imaginare, dar mijlocul lor este real, deci putem să considerăm elipsa în întregime.

122. (Fig. III.122) Fie $F_1(c_1, 0)$, $F_1'(-c_1, 0)$ focarele elipsei cu $c_1=\pm\sqrt{a^2-b^2}$ şi $F_2(c_2, 0)$, $F_2'(-c_2, 0)$ focarele hiperbolei cu $c_2=\pm\sqrt{a^2+b^2}$. Secanta variabilă are ecuaţia $y=\lambda(x-a)$, $\lambda\in\mathbf{R}$. Coordonatele punctelor M şi N

se determină intersectînd ecuaţia secantei cu ecuaţia elipsei, respectiv cu ecuaţia hiperbolei:

$$M: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = \lambda(x - a) \end{cases} \quad \text{şi} \quad N: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = \lambda(x - a) \end{cases}$$

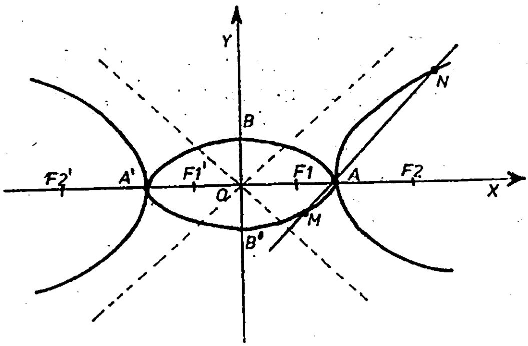


Fig. III.122

Scriind ecuaţiile tangentelor la curbe în punctele M şi N, folosind metoda dedublării, obţinem:

$$\begin{cases} (a^2\lambda^2 - b^2)x - 2a^2\lambda y - a(a^2\lambda^2 + b^2) = 0 \\ (a^2\lambda^2 + b^2)x - 2a^2\lambda y - a(a^2\lambda^2 - b^2) = 0. \end{cases}$$

Scăzînd cele două ecuaţii se elimină parametrul λ, obţinînd ecuaţia locului geometric care este tangenta în A', adică dreapta de ecuaţie $x = -a$.

123. Fie punctele $A(-a, 0)$ şi $B(a, 0)$ şi $M(x, y)$. Cum $OM^2 = MA \cdot MB \Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \Rightarrow -2a^2\left(x^2 - y^2 - \frac{a^2}{2}\right) = 0$. Deci ecuaţia locului geometric este hiperbola echilateră de ecuaţie: $x^2 - y^2 - \frac{a^2}{2} = 0$.

124. Se ia linia centrelor ca Oy şi axa radicală ca Ox; ecuaţia fasciculului este $x^2 + y^2 - 2\alpha x + k = 0$, unde α este variabil şi k o constantă; se intersectează cercurile cu dreapta $y = \alpha$. Locul geometric este o hiperbolă echilateră.

125. Se scrie ecuaţia cercului sub forma: $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + C = 0$, se intersectează cu $x = 0$, $y = 0$ şi se scrie pentru fiecare din ecuațiile obținute că diferența rădăcinilor este constantă. Se elimină apoi C; locul geometric este o hiperbolă echilateră.

126. i) Avem $(AO): y = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4}} x$, $C(2, 0)$, $D(-2, 0)$ și $(BD): \frac{y}{\lambda} = \frac{2 - x}{2 + \sqrt{\lambda^2 + 4}}$.

Locul geometric al punctului M se determină eliminînd parametrul λ între ecuațiile dreptelor (AO) și (BD). Se obține elipsa de ecuație: $\dfrac{\left(x - \frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} - 1 = 0$ și centru $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$.

ii) $(BO): y = \frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4}} x$, $(AC): \frac{y}{\lambda} = \frac{x + 2}{2 + \sqrt{\lambda^2 + 4}}$, iar locul geometric este elipsa de ecuație:

$$\frac{\left(x + \frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} - 1 = 0.$$

iii) Cele două elipse sînt simetrice față de Oy și sînt tangente interioare cercului $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

127. Locul geometric este $x^2 + y^2 - (\sqrt{a^2 - b^2})^2 = 0$, condiția de realitate fiind $a > b$.

128. i) (H): $hx^2 + (a - b)xy - h(a + b)x + hab = 0$ cu asimptotele Oy și $hx + (a - b)y - h(a + b) = 0$.

ii) Locul geometric al punctului de intersecție al tangentelor în A și B este paralela la ordonată:

$$x = \frac{2ab}{a + b}.$$

iii) Hiperbola echilateră $xy + by - hx + hb = 0$ cu asimptotele $x + b = 0$, $y - h = 0$.

129. Se vor lua ca axe BC şi mediatoarea; locul geometric este o elipsă sau o hiperbolă.

130. Fie hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, atunci ecuaţiile parametrice ale hiperbolei sînt $x=\frac{a}{\cos\alpha}$ şi $y=b\operatorname{tg}\alpha$. Fie $T(x_0, y_0)$ un punct aparţinînd hiperbolei, deci putem considera $x_0=\frac{a}{\cos\alpha}$, $y_0=b\operatorname{tg}\alpha$. Ecuaţia tangentei prin dedublare este: $\frac{x_0}{a^2}\cdot x-\frac{y_0}{b^2}\cdot y-1=0\Rightarrow\frac{1}{a\cos\alpha}\cdot x-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{b}y-1=0$. Ecuaţia dreptei care trece prin origine şi este perpendiculară pe tangentă: $y=-\frac{a\sin\alpha}{b}\cdot x$. Din cele două ecuaţii determinăm pe $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$ care substituite în ecuaţia $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, obţinem locul geometric care este $(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$. Această curbă are aceleaşi proprietăţi de simetrie ca şi cea de la exerciţiul 115, în plus ea trece prin origine şi are ca tangente în aceste puncte dreptele $a^2x^2-b^2y^2=0$. Dacă $a=b$, curba devine $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ şi se numeşte *lemniscata lui Bernoulli* (are forma unui 8 culcat). Propun trasarea grafică a lemniscatei.

131. i) Fie $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ecuaţia hiperbolei şi $M(\alpha, \beta)$; $(MN):2\left(\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}\right)-\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1=0$, dreapta este paralelă cu polara punctului P şi raportul cerut este $\frac{1}{2}$;

ii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0$; iii) $x^2+y^2-\frac{a^2+\alpha^2}{2\alpha}x-\frac{\beta}{2}y=0$;

iv) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{2y\sqrt{2}}{b}-1=0$.

132. Fie $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ecuaţia hiperbolei, $y=\lambda$ ecuaţia secantei.

i) Avem $T(a, \lambda)$, $M\left(\frac{a}{b}\sqrt{\lambda^2+b^2}, \lambda\right)$ deci $TM : TN =$ $=\left(a-\frac{a}{b}\sqrt{\lambda^2+b^2}\right)\left(a+\frac{a}{b}\sqrt{\lambda^2+b^2}\right)=-\frac{a^2\lambda^2}{b^2}$ astfel relaţia este verificată prin înlocuire.

ii) Avem ecuaţiile dreptelor (AP), $(A'T)$: $\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda}-1=0$, $y=\frac{\lambda}{2a}(x+a)$ şi eliminînd parametrul λ, obţinem $x=\frac{a}{3}$ adică o paralelă la Oy.

iii) Dreptele (AM) şi $(A'T)$ au ecuaţiile:

$$y\left(\frac{a}{b}\sqrt{\lambda^2+b^2}-a\right)=\lambda(x-a),\ y=\frac{\lambda}{2a}(x+a)$$

de unde $2b^2x(x-a)=a^2y^2$ sau altfel scrisă această ecuaţie obţinem:

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}}-\frac{y^2}{\frac{b^2}{2}}-1=0$$

care reprezintă ecuaţia unei hiperbole de centru $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ şi semiaxe $\frac{a}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Observaţie: ii) Între razele AP, $A'T$ există o corespondenţă omografică în care AA' este omoloagă ei însăşi, deci locul geometric al intersecţiei razelor este o dreaptă. Cînd secanta PT devine dreapta de la infinit, razele AP, $A'T$ devin paralele deci dreapta loc geometric este perpendiculară pe AA'.

iii) Între razele AM, $A'T$ există o corespondenţă omografică, deci locul geometric al intersecţiei lor este o conică ce trece prin A şi A', cu axele paralele, din cauza simetriei figurii (vezi problema 120).

133. i) Fie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ecuația hiperbolei. Polara focarului $F(c, 0)$ anume $\frac{cx}{a^2} = 1$ determină punctul $D\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$. Avem $\frac{OD}{DF} = \frac{a^2}{c} : \left(c - \frac{a^2}{c}\right) = a^2 : b^2$.

ii) Fie $M(\alpha, \beta)$ deci $\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0$. Pentru mijlocul N, avem $x = \frac{\alpha}{2}$, $y = \beta$ deci locul geometric al punctului N este o hiperbolă concentrică, cu axele paralele, de măsuri $\frac{a}{2}$, b.

iii) Dreapta (OM) și polara punctului P au ecuațiile $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}$, $y = -\frac{b^2}{\beta}$; eliminînd parametrii α și β obținem:

$$a^2y^4 = b^2(b^2x^2 - a^2y^2)$$

care reprezintă o cuartică cu punct dublu în origine, tangentele în origine fiind asimptotele hiperbolei.

134. i) Ecuația tangentei: $\alpha x - 4\beta y - 4 = 0$; ecuația perpendicularei: $\alpha x = 4$ și a dreptei (OM); $\beta x - \alpha y = 0$.
ii) Curba de gradul al patrulea: $4x^2 - 16y^2 - x^4 = 0$.
iii) Graficul variației funcției este o lemniscată.

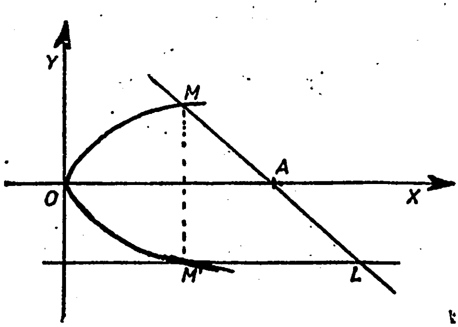


Fig. III.135

135. (Fig. III.135). Ecuația parabolei este $y^2 = 2px$, avînd focarul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ și dreapta directoare de ecuație $x = -\frac{p}{2}$. Ecuațiile parametrice ale parabolei sînt $x =$

$= \frac{t^2}{2p}$ şi $y = t$, $t \in \mathbf{R}$. Fie punctele variabile $M\left(x_0 = \frac{t^2}{2p},\ y_0 = t\right)$; $M'\left(\frac{t^2}{2p}, -t\right)$ şi punctul fix $A(a, 0)$. Ecuaţia dreptei (MA) este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{t^2}{2p} & t & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

şi ecuaţia dreptei $(M'L)$ este $y = -t$. Coordonatele punctului mobil L se află rezolvînd sistemul format din ecuaţiile celor două drepte, deci $y_L = -t$ şi

$$\begin{vmatrix} x_L & -t & 1 \\ \frac{t^2}{2p} & t & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Eliminînd parametrul t între coordonatele punctului L, obţinem

$$\begin{vmatrix} x_L & y_L & 1 \\ \frac{y_L^2}{2p} & -y_L & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

şi rezolvînd această ecuaţie obţinem ecuaţia locului geometric, care este parabola: $y^2 + 2p(x - 2a) = 0$.

136. (Fig. III.136). Fie $M(x_0, y_0)$. Exprimăm că o tangentă oarecare care are ecuaţia $y = mx + \frac{p}{2m}$ (unde m este o direcţie de pantă) trece prin punctul M, obţinînd ecuaţia $2x_0m^2 - 2y_0m + p = 0$, iar

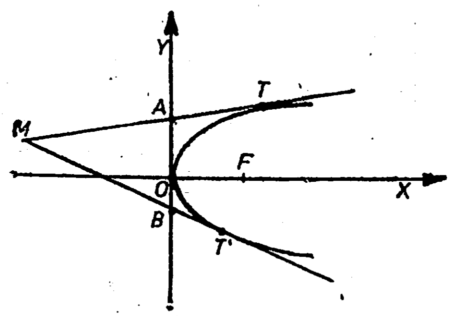


Fig. III.136

rădăcinile m_1, m_2 ale acestei ecuații sînt pantele celor două tangente care se pot duce din punctul M la parabolă, adică $y = m_1x + \frac{p}{2m_1}$, $y = m_2x + \frac{p}{2m_2}$. Cele două pante pot fi reale distincte, reale confundate sau imaginare după cum expresia $y_0^2 - 2px_0$ este pozitivă, nulă sau negativă, iar aceasta revine la a spune că punctul M se află în regiunea pozitivă a parabolei (cea exterioară), pe parabolă sau în regiunea negativă a parabolei (cea interioară parabolei). Coordonatele punctelor A și B se află intersectînd ecuațiile tangentelor cu $x = 0 \Rightarrow A\left(0, \frac{p}{2m_1}\right)$, $B\left(0, \frac{p}{2m_2}\right)$, iar $\left|\frac{p}{2m_1} - \frac{p}{2m_2}\right| = a \Rightarrow \left|\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right| = \frac{2a}{p}$. Eliminînd parametrul m între coordonatele punctului M, obținem ecuația locului geometric care este parabola $y^2 = 2px + a^2$ adică parabola inițială, dar translatată pentru $x = 0$ cu $y = \pm a$.

137. Ecuația cercului este $(x + 2)^2 + y^2 - 5^2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$. Cum cele două curbe sînt ortogonale, înseamnă că în punctul $M(x_0, y_0)$ de intersecție, tangentele la curbe sînt perpendiculare, adică produsul pantelor lor este egal cu -1. Fie M aparținînd cercului, deci: $M(x_0 = m, y_0 = \sqrt{21 - m^2 - 4m})$. Fie M aparținînd parabolei, deci $M(x_0 = m, y_0 = \sqrt{2pm})$.

Scriind ecuațiile tangentelor prin dedublare obținem:

$mx + \sqrt{21 - m^2 - 4m} \cdot y + 2(x + m) - 21 = 0 \Rightarrow$ $(m + 2)x + \sqrt{21 - m^2 - 4m} \cdot y + 2m - 21 = 0$ și respectiv $\sqrt{2pm} \cdot y - p(x + m) = 0 \Rightarrow px - \sqrt{2pm}y + pm = 0$. Condiția de ortogonalitate este:

$$-\frac{m+2}{\sqrt{21 - m^2 - 4m}} \cdot \frac{p}{\sqrt{2pm}} = -1.$$

În baza condițiilor inițiale se determină $x_0 = 2$ și $y_0 = \pm\sqrt{r^2 - 16}$. Ecuația locului geometric este dreapta $x = 2$.

138. Fie $M(x_0, y_0)$ un punct aparținînd parabolei $y^2 - 2px = 0$. Ecuația tangentei prin dedublare, este

$$y_0y - p(x - x_0) = 0 \Rightarrow px - y_0y - px_0 = 0.$$

Cum normala este dreapta perpendiculară pe tangentă, în punctul de contact, are ecuaţia $y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$ sau $y_0 x + py - py_0 - x_0 y_0 = 0$. Fie $M\left(x_0 = \frac{t^2}{2p}, y_0 = t\right)$, $M'\left(\frac{t^2}{2p}, -t\right)$.

Coordonatele punctului L, punct de intersecţie între normală şi paralelă se determină din:

$$\begin{cases} tx + py - pt - \frac{t^2}{2p} \cdot t = 0 \\ y = -t \end{cases}$$

şi eliminînd parametrul t, obţinem ecuaţia locului geometric care este parabola: $y^2 = 2px - 4p^2$.

139. (Fig. III.139). Ecuaţia parabolei este $y^2 = 2px$, ecuaţia directoarei $x = -\frac{p}{2}$, ecuaţia cercului $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{p^2}{4} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + px = 0$, ecuaţia dreptei variabile $y = mx$. Coordonatele punctelor M şi N se determină rezolvînd sistemele:

$$N: \begin{cases} x^2 + y^2 + \quad x = 0 \\ y = mx \end{cases} \qquad M: \begin{cases} x^2 = 2px \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N\left(-\frac{p}{m^2+1}, -\frac{mp}{m^2+1}\right), \quad M\left(\frac{2p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right).$$

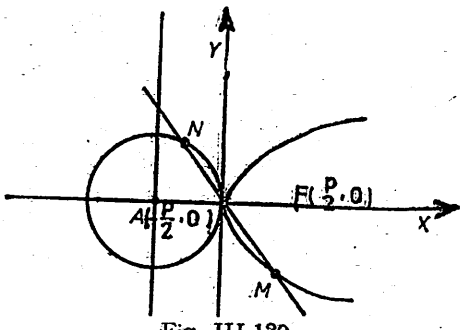


Fig. III.139

Ecuaţiile tangentelor în N şi M le determinăm prin dedublare:

$$-\frac{p}{m^2+1}x-\frac{mp}{m^2+1}y+\frac{p}{2}\left(-\frac{p}{m^2+1}+x\right)=0 \text{ şi}$$

$\frac{2p}{m}y=p\left(x+\frac{2p}{m^2}\right)$. Eliminînd parametrul m între cele două ecuaţii, obţinem ecuaţia locului geometric care este o paralelă la Oy, de ecuaţie $x=-3p$.

140. i) Fie punctele $M\left(x_i=\frac{t_i^2}{2p}, y_i=t_i\right)$, cu $i\in\{1,2,3,4\}$.

Punctele sînt conciclice, dacă M aparţine cercului x^2+ $+y^2+mx+ny+p=0$. Eliminînd pe x între ecuaţia parabolei şi ecuaţia cercului, obţinem o ecuaţie incompletă în y, de gradul IV, fără termenul de gradul III, şi deci conform relaţiilor lui F. Viète avem:

$$y_1+y_2+y_3+y_4=0.$$

ii) Fie $A\left(\frac{a^2}{2p}, a\right)$, $B\left(\frac{b^2}{2p}, b\right)$, $M\left(\frac{\alpha^2}{2p}, \alpha\right)$, $N\left(\frac{\beta^2}{2p}, \beta\right)$. Avem $\alpha+\beta+a+b=0$. Se găseşte ecuaţia locului geometric. $y=\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{a+b}{2}$, care este o paralelă cu Ox.

141. Fie $M\left(x_0=\frac{t^2}{2p}, y_0=t\right)$ un punct aparţinînd parabolei $y^2=2px$. Tangenta în M este: $ty=p\left(x+\frac{t^2}{2p}\right)\Rightarrow$ $px-ty+\frac{t^2}{2}=0$. Ecuaţia dreptei care trece prin origine şi este perpendiculară pe tangentă este: $y=-\frac{t}{p}\cdot x$. Coordonatele punctului L, de intersecţie al celor două drepte, care de altfel este şi punctul de proiecţie al originii pe tangentă, se determină rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{t}{p}x \\ px-ty+\dfrac{t^2}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{pt^2}{2(p^2+t^2)} \\ y=\dfrac{t^3}{2(p^2+t^2)} \end{cases}.$$

Ecuaţia locului geometric se află eliminînd parametrul t între cele două coordonate, obţinînd curba de gr. III, numită *cisoida lui Diocles*. Propun spre rezolvare, reprezentarea grafică a cisoidei, conform regulilor studiate la analiză matematică.

142. (Fig. III.142). Fie parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$, directoarea fiind dreapta de ecuaţie $x = -\frac{p}{2}$ şi un punct $M(\lambda, \sqrt{2p\lambda})$ mobil pe parabolă. Coordonatele punctului L,

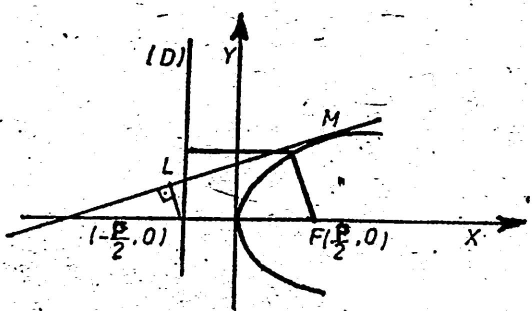


Fig. III.142

proiecţia piciorului directoarei pe tangenta dusă din M, se determină rezolvînd sistemul format din: condiţia ca punctul L să aparţină tangentei şi condiţia de perpendicularitate dintre dreptele (OL) şi (LM), deci:

$$\begin{cases} p \cdot x_L - \sqrt{2p\lambda} \cdot y_L + px_0 = 0 \\ \dfrac{y_L}{x_L + \dfrac{p}{2}} \cdot \dfrac{p}{\sqrt{2p\lambda}} = -1. \end{cases}$$

$$\text{Deci } x_L = -\frac{4p\lambda}{2\lambda + p} \text{ şi } y_L = -\sqrt{2p\lambda} \cdot \frac{p - 2\lambda}{2\lambda + p}.$$

Eliminînd parametrul λ între coordonatele punctului L, obţinem ecuaţia locului geometric, care este o curbă de gradul III, numită *strofoida dreaptă* şi anume: $y^2 = \frac{px(x+p)}{x+2p}$. Propun trasarea graficului funcţiei.

143. i) (Fig. III.143). Fie dreapta mobilă de ecuaţie: $y = \lambda x$, atunci punctele de intersecţie ale dreptei cu parabolele au coordonatele:

$$M\left(\frac{2p}{\lambda^2}, \frac{2p}{\lambda}\right); \quad N\left(\frac{2q}{\lambda^2}, \frac{2q}{\lambda}\right).$$

Ecuaţiile tangentelor se determină prin dedublare:

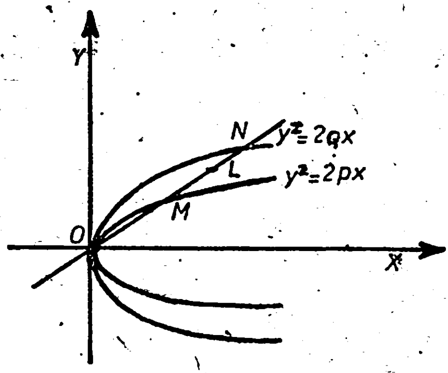


Fig. III.143

$$\frac{2p}{\lambda}y = p\left(x + \frac{2p}{\lambda^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{\lambda}{2}x + \frac{p}{\lambda};$$

$$\frac{2q}{\lambda}y = q\left(x + \frac{2q}{\lambda^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{\lambda}{2}x + \frac{q}{\lambda}$$

deci tangentele au aceeaşi pantă $\frac{\lambda}{2}$.

ii) Coordonatele punctului L, mijlocul segmentului MN sînt:

$$x_L = \frac{p+q}{\lambda^2} \text{ şi } y_L = \frac{p+q}{\lambda}.$$

Eliminînd parametrul λ între cele două coordonate, obţinem ecuaţia locului geometric, care este o parabolă de ecuaţie $y^2 = (p+q)x$.

144. Fie cercul (C) de centru variabil (α, β) şi rază variabilă R, punctul fix $A(x_0, y_0)$ şi dreapta fixă de ecuaţie $ax + by + c = 0$.

Pentru a determina locul geometric al centrului cercului va trebui să eliminăm parametrii variabili α, β din ecuaţiile:

i) $(x_0 - \alpha)^2 (y_0 - \beta)^2 - R^2 = 0$ (condiţia ca punctul A să aparţină cercului).

ii) condiţia de tangenţă, obţinută din intersecţia cercului variabil cu dreapta fixă şi impunînd condiţia ca discriminantul ecuaţiei de gradul doi obţinute să fie nul. Locul geometric al centrului este o parabolă avînd ca focar punctul dat şi ca dreaptă directoarea, dreapta dată.

145. Se ia ca axă Ox dreapta fixă şi ca Oy perpendiculara din punctul fix pe ea. Locul geometric este o parabolă.

146. O parabolă.

147. Fie parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$ şi punctul fix $A(x_0, y_0)$. Ecuaţia dreptei variabile este $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$. Coordonatele punctelor M şi N se determină rezolvînd sistemul format din ecuaţia parabolei şi ecuaţia dreptei variabile:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y - y_0 = \lambda(x - x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 x^2 + 2[\lambda(y_0 - \lambda x_0) - p]x + (y_0 - \lambda x_0)^2 = 0 \text{ şi}$$

$$\lambda y^2 - 2py + 2p(y_0 - \lambda x_0) = 0$$

ecuaţii ale căror rădăcini sînt x_M, x_N respectiv y_M, y_N. Coordonatele mijlocului segmentului sînt:

$$x_L = \frac{x_M + x_N}{2} = -\frac{\lambda(y_0 - \lambda x_0) - p}{\lambda^2}$$

$$y_L = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{p}{\lambda}.$$

Eliminînd parametrul λ între cele două coordonate, obţinem ecuaţia locului geometric, care este o parabolă de ecuaţie:

$$y^2 - y_0 \cdot y = p(x - x_0).$$

148. O hiperbolă.

149. Fie parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$ şi dreptele de ecuaţie:

$$y = \lambda x \text{ şi } y = -\frac{1}{\lambda} x.$$

Coordonatele punctelor M şi N sînt:

$$M\left(\frac{2p}{\lambda^2}, \frac{2p}{\lambda}\right); \quad N(2p\lambda^2, -2p\lambda).$$

Coordonatele mijlocului L al segmentului sînt:

$$x_L = \frac{p(1+\lambda^4)}{\lambda^2} \text{ și } y_L = \frac{p(1-\lambda^2)}{\lambda}$$

Eliminînd parametrul λ între cele două coordonate vom obține ecuația locului geometric, care este o parabolă de ecuație:

$$y^2 = p^2\left(\frac{1+\lambda^4}{\lambda^2} - 2\right) = p^2\left(\frac{x}{p} - 2\right) \Rightarrow y^2 = px - 2p^2.$$

150. Fie parabola $y^2 = 2px$, punctul $M(\lambda, \sqrt{2p\lambda})$, tangenta în M are ecuația:
$px - \sqrt{2p\lambda}\cdot y + p\lambda = 0$. Coordonatele punctului T sînt: $x_T = -\frac{p}{2}$, $y_T = \frac{2p\lambda - p^2}{2\sqrt{2p\lambda}}$, iar coordonatele punctului simetric L sînt:

$$x_T = \frac{x_L + x_M}{2} \text{ și } y_T = \frac{y_L + y_M}{2} \Rightarrow x_L = -p - \lambda,$$

$$y_L = -\frac{p^2}{\sqrt{2p\lambda}}.$$

Eliminînd parametrul λ între cele două coordonate, determinăm ecuația locului geometric, care este curba de ecuație:

$$y^2 = -\frac{p^3}{2(x+p)}.$$

151. Fie parabola de ecuație $y^2 = 2px$ și punctele $A_i(\lambda_i, \sqrt{2p\lambda_i}), i \in \{1, 2, 3\}$ cu $x_G = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} = a =$ constant și $y_G = \frac{\sqrt{2p}(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3})}{3} = b =$ constant (G fiind centrul de greutate). Coordonatele mijlocului unui segment sînt:

$$x_L = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \text{ și } y_L = \frac{\sqrt{2p}(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})}{2},$$

$$\text{adică } x_L = \frac{3a - \lambda_3}{2} \text{ și } y_L = \frac{\sqrt{2p}\left(\frac{3b}{\sqrt{2p}} - \sqrt{\lambda_3}\right)}{2}.$$

Eliminînd parametrul λ_3 între coordonatele x_L şi y_L vom determina ecuaţia locului geometric care este o parabolă de ecuaţie:

$$\frac{2y}{\sqrt{2p}}-\frac{3b}{\sqrt{2p}}=-\sqrt{3a-2x}\Rightarrow 4y^2-12by=$$

$$=-4px+6ap-9b^2\Rightarrow x=\frac{-4y^2+12by+6ap-9b^2}{4p}.$$

152. i) Fie $y=m\left(x-\frac{p}{2}\right)$ ecuaţia coardei dusă prin focar, unde $m=\operatorname{tg}\alpha$. Această dreaptă intersectează parabola $y^2-2px=0$ în punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ unde x_1, x_2 se obţin din ecuaţia $4m^2x^2-4px(m^2+2)+m^2p^2=0$. Deoarece $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$
$=\sqrt{(x_2-x_1)^2(1+m^2)}=\sqrt{[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2](1+m^2)}$, ţinînd seama de formulele lui Viète:

$$x_1+x_2=\frac{p(m^2+2)}{m^2},\quad x_1x_2=\frac{p^2}{4}\text{ rezultă}$$

$$AB=\frac{2p(1+m^2)}{m^2};\text{ dar }\sin^2\alpha=\frac{m^2}{1+m^2}$$

şi deci $AB\sin^2\alpha=2p$.

ii) $\frac{1}{AB}=\frac{\sin^2\alpha}{2p}$; $\frac{1}{CD}=\frac{\cos^2\alpha}{2p}$ şi deci $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{2p}$.

iii) Locul geometric este directoarea parabolei.

153. i) Punctul fix este mijlocul segmentului AB.
ii) Locul geometric este o dreaptă paralelă cu axa Ox.

154. i) Dacă $M(x_0, y_0)$ atunci $T(-x_0, 0)$ şi $N(x_0+p, 0)$, ceea ce justifică afirmaţia.

ii) (MF) are ecuaţia $y_0(2x-p)=y(2x_0-p)$.
$(NP):yy_0=p(x-x_0-p)$ şi
(TP): $py+y_0(x+x_0)=0$, care formează un sistem compatibil, cu

$$\begin{vmatrix} 2y_0 & -2x_0 & 1\\ p & -y_0 & 1\\ y_0 & p & 1\end{vmatrix}=0$$

iii) Locul geometric este elipsa $2x^2+y^2-px=0$.

155. i) $\begin{cases} y = 4x - 4 \\ y^2 = (a+5)x + a - 3 \end{cases} \Rightarrow 16x^2 - (37+a)x + 19 - a = 0,$

iar condiția ca dreapta să intersecteze curba este ca $\Delta > 0$, adică $a^2 + 291a + 153 > 0$. Înlocuind pe $x = 2$ în ecuația de gradul doi în x, obținem $9 - 3a = 0$ adică $a = 3$.

ii) Ecuația parabolei este $y^2 = 8x$, iar punctul $D(-2,0)$ va verifica ecuația tangentelor $y = \pm(x + 2)$ în punctele de abscisă 2, $M(2, 4)$ și $M'(2, -4)$, unde ecuația tangentelor s-a determinat prin dedublare.

iii) Fie $M(\lambda, \sqrt{(a+5)\lambda + a - 3})$, iar tangenta în punctul M o determinăm prin dedublare;

$$\frac{a+5}{2}x - \sqrt{(a+5)\lambda + a - 3} \cdot y + \frac{a+5}{2}\lambda = 0.$$

Dreapta (OM) are ecuația: $y = \dfrac{\sqrt{(a+5)\lambda + a - 3}}{\lambda} \cdot x$

și paralela dusă la Ox prin punctul P are ecuația:

$$y = \frac{a+5}{2\sqrt{(a+5)\lambda + a - 3}} \cdot \lambda.$$

Prin intersecția celor două drepte (OM) și (ON), vom determina coordonatele punctului N:

$$x_N = \frac{a+5}{2[(a+5)\lambda + a - 3]} \cdot \lambda^2 \text{ și}$$

$$y_N = \frac{a+5}{2\sqrt{(a+5)\lambda + a - 3}} \lambda.$$

Eliminînd parametrul λ între cele două coordonate vom obține ecuația locului geometric, care este parabola de ecuație: $y^2 = \dfrac{a+5}{2} \cdot x$.

Pentru valoarea particulară $a = 3$, locul geometric este parabola $y^2 = 4x$.

156. Fie parabola $y^2 = 2px$. Tangenta în vîrf este dreapta $x = 0$. Fie punctul $P(\alpha, \beta)$. Ecuația unei tangente din P la parabolă este $y = mx + \dfrac{p}{2m}$ unde $\beta = m\alpha + \dfrac{p}{2m}$.

Segmentul determinat pe axa Oy de cele două tangente duse din P are lungimea $l = \frac{p}{2}\left|\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right|$ unde m_1 şi m_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $2m^2\alpha - 2m\beta + p = 0$. Cum

$$|m_1 - m_2| = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2} = \left[\frac{\beta^2 - 2p\alpha}{\alpha^2}\right]^{1/2} \text{ şi}$$

$|m_1m_2| = \frac{p}{2|\alpha|}$ rezultă $l = [\beta^2 - 2p]^{1/2}$ adică $\beta^2 - 2p\alpha = l^2$.

Locul geometric al punctului O' este o parabolă de ecuaţie $y^2 = 2p\,x + l^2$.

157. i) $R\left(\frac{2\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2},\quad \beta\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right)$.

ii) $2\,\beta x - y(2\,\alpha + \beta) + \beta p = 0$.

iii) $x^2 + y^2 - 2\,px = 0$ deci un cerc de centru $(p, 0)$, rază p. De altfel, dreapta (PQ) trece printr-un punct fix $A(2p, 0)$ şi unghiul OQA este drept.

158. (Fig. III.158). Fie parabola de ecuaţie: $y^2 = 2px$, punctul $M\left(x_0 = \frac{t^2}{2p},\ y_0 = t\right)$; tangenta în M avînd ecuaţia prin dedublare:

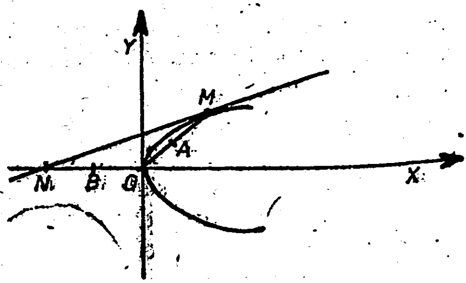


Fig. III.158

$$ty = p\left(x + \frac{t^2}{2p}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow px - ty + \frac{t^2}{2} = 0$, coordonatele punctului $N\left(-\frac{t^2}{2p},\ 0\right)$. Centrul cercului circumscris unui triunghi se află la intersecţia mediatoarelor laturilor, fie A mijlocul segmentului OM, deci de coordonate $\left(\frac{t^2}{4p},\ \frac{t}{2}\right)$ şi B mijlocul segmentului ON, deci de coordonate $\left(-\frac{t^2}{4p},\ 0\right)$. Ţinînd seama de proprietatea de perpendicularitate a două drepte, obţinem ecuaţiile: mediatoarea segmentului OM: $y-\frac{t}{2}=-\frac{t}{2p}\left(x-\frac{t^2}{4p}\right)$, şi mediatoarea segmentului ON: $x=-\frac{t^2}{4p}$. Eliminînd parametrul t între cele două ecuaţii, obţinem ecuaţia locului geometric care este curba $y^2=-\frac{4}{p}x^3+4px^2-p^2x$, a cărei reprezentare grafică o propun spre rezolvare conform metodei învăţate la analiză matematică.

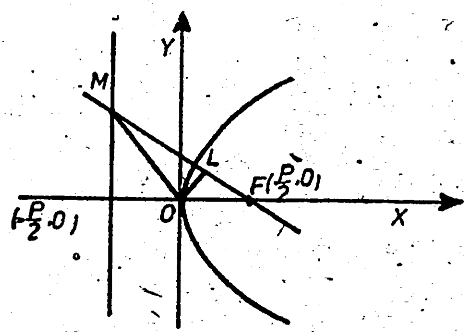


Fig. III.159

159. (Fig. III.159). Fie parabola de ecuaţie $y^2=2px$, secanta variabilă: $y=\lambda\left(x-\frac{p}{2}\right)$, iar coordonatele punctului M le determinăm din intersecţia directoarei cu secanta, deci $x_M=-\frac{p}{2}$ şi $y_M=-p\lambda$. Dreapta (OM) are ecuaţia: $y=2\lambda x$. Coordonatele punctului L le determinăm rezolvînd sistemul format din condiţia de perpendicularitate a dreptelor (MF) şi (OL) şi din condiţia ca punctul L să verifice ecuaţia dreptei (MF):

$$\begin{cases}\lambda\cdot\frac{y_L}{x_L}=-1\\ \lambda\cdot x_L-y_L-\frac{p\lambda}{2}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$x_L=\frac{p\lambda^2}{2(1+\lambda^2)}\quad \text{şi}\quad y_L=-\frac{p\lambda}{2(1+\lambda^2)}.$$

Eliminînd parametrul λ între coordonatele punctului L, vom determina ecuaţia locului geometric, care este un cerc de ecuație $x^2 + y^2 - \frac{p}{2} x = 0$, avînd centrul $C\left(\frac{p}{4}, 0\right)$ și raza $R = \frac{p}{4}$.

160. Punctele A și Q care împart segmentul MN în rapoarte egale și de semn contrar se numesc conjugate armonic față de A și B deci: $\frac{AM}{AN} = -\frac{QM}{QN}$, iar relația între abscisele celor patru puncte este: $\frac{m-a}{n-a} = -\frac{m-q}{n-q} \Leftrightarrow 2\,mn - (m+n) \cdot (a+q) + 2\,aq = 0.$

Fie cercul cu centrul în originea axelor, iar axa Ox diametrul ce trece prin punctul A. Fie punctele $A(a, o)$, $M(m, y_1)$, $N(n, y_2)$, $Q(q, p)$. Abscisele m și n sînt date de sistemul format din ecuația cercului și ecuația dreptei variabile:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 \text{ și } y = \lambda(x - a) \Rightarrow$$

$$(1 + \lambda^2)x^2 - 2a\,\lambda^2 x + \lambda^2 a^2 - R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 = 2a\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2};\ x_1 x_2 = \frac{\lambda^2 a^2 - R^2}{1+\lambda^2}.$$

Aceste valori substituie în relația dată de abscisele punctelor conjugate armonic, ne dă:

$$\frac{2(\lambda^2 a^2 - R^2)}{1+\lambda^2} - \frac{2a\,\lambda^2(a+q)}{1+\lambda^2} + 2aq = 0 \Rightarrow q = \frac{R^2}{a};$$

deci cum abscisa punctului Q este constantă, locul geometric al punctului Q este o dreaptă perpendiculară pe OA. Dacă $a > R$ punctul A este exterior cercului, iar $q < R$ deci polara intersectează cercul și trece prin punctele de contact ale tangentelor duse din A la cerc.

Dacă $a = R$, punctul A este pe cerc iar $q = R$, deci polara se confundă cu tangenta.

Dacă $a < R$, punctul A este interior cercului, iar $q > R$ deci polara este exterioară cercului.

161. Cercul circumscris triunghiului.

162. Fie $M(x_0, y_0)$ şi secantele variabile $(S_1): y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ şi $(S_2): y - y_0 = \mu(x - x_0)$. Ecuaţiile cercurilor date sînt: (C_1) $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ şi (C_2) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Intersectînd cercul (C_1) cu secanta (S_1) vom obţine punctele M_1 şi M_2, iar intersecţia cercului (C_2) cu secanta (S_2) vom obţine punctele M'_1 şi M'_2. Vom determina coordonatele punctului $P(x_p, y_p)$ conjugatul armonic al punctului M în raport cu punctele M_1 şi M_2, şi prin eliminarea parametrului λ, vom obţine ecuaţia unei drepte, care este polara punctului M în raport cu cercul (C_1). Analog, vom determina ecuaţia polarei punctului M în raport cu cercul (C_2).

Impunînd condiţia de perpendicularitate a celor două polare, vom obţine ecuaţia locului geometric a punctului M care este cercul de ecuaţie $\left(x + \frac{m}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2}\right) + \left(y + \frac{n}{2}\right)\left(y + \frac{b}{2}\right) = 0$, cerc cu diametrul congruent cu distanţa centrelor cercurilor.

163. (Fig. III.163). Fie cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Ecuaţia dreptei variabile: $y = \lambda(x + R)$. Coordonatele punctelor M şi N sînt:

$$M(0, \lambda R),\ N\left(x_N = \frac{-\lambda^2 + \sqrt{(R^2+1)\lambda^4 - R^2}}{1+\lambda^2};\right.$$

$$\left. y_N = \frac{R + \lambda^2(R-1) + \sqrt{(R^2+1)\lambda^4 - R^2}}{1+\lambda^2}\right).$$

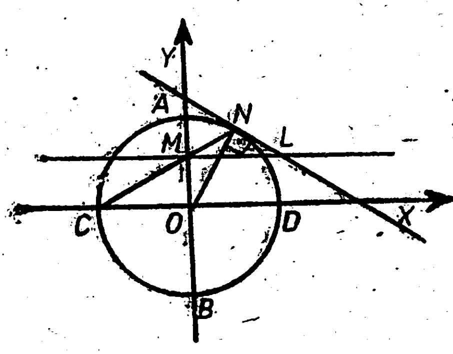


Fig. III.163

Ecuaţia dreptei paralele este $y = \lambda R$, iar ecuaţia tangentei o determinăm prin dedublare (deoarece punctul aparţine curbei):

$$x_N \cdot x + y_N \cdot y - R^2 = 0.$$

Deci coordonatele punctului L sînt:

$$x_L = \frac{R^2 - \lambda R y_N}{x_N}$$

şi $y_L = \lambda \cdot R$.

Eliminînd parametrul λ, între x_L și y_L, vom determina ecuația locului geometric, care este:

$$x = \frac{R(R^2+y^2)-\dfrac{R^2}{y}\left[y^2+R^2-R+R\sqrt{(R^2+1)R^2-y^4}\right]}{-R+\sqrt{(R^2+1)R^2-y^4}}.$$

164. (Fig. III.164). Fie elipsa de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

și

$$M\left(\lambda,\ \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\lambda^2}\right).$$

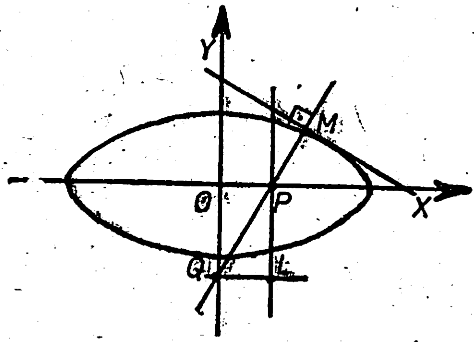


Fig. III.164

Cum normala este perpendiculară pe tangentă în punctul de contact atunci va avea ecuația:

$$y-y_M=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_M}{x_M}(x-x_M).$$

Coordonatele punctelor de intersecție ale normalei cu axele carteziene sînt:

$$P\left(x_M-\frac{a^2}{b^2}x_M,\ 0\right) \text{ și } Q\left(0,\ y_M-\frac{a^2}{b^2}\cdot y_M\right),$$

deci punctul L va avea coordonatele:

$$x_L=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)x_M=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\lambda \quad \text{și}$$

$$y_L=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y_M=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\lambda^2}.$$

Eliminînd parametrul λ între coordonatele punctului L vom obține ecuația locului geometric, care este elipsa de ecuația: $a^2x^2+b^2y^2-c^4=0$, unde $c=\pm\sqrt{a^2-b^2}$ reprezintă abscisele focarelor.

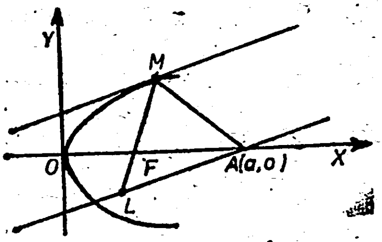


Fig. III.166

165. Hiperbola $a^2x^2 - b^2y^2 - c^4 = 0$, unde $c = \pm\sqrt{a^2+b^2}$ reprezintă abscisele focarelor.

166. (Fig. III.166). Fie parabola

$$y^2 = 2px,\ M(\lambda, \sqrt{2p\lambda}).$$

Ecuaţia tangentei dusă în punctul M, o determinăm prin dedublare:

$$y = \frac{p}{\sqrt{2p\lambda}}(x+\lambda),$$

iar ecuaţia dreptei paralele care trece prin punctul A este:

$$y = \frac{p}{\sqrt{2p\lambda}}(x-a).$$

Ecuaţia dreptei (MF) este:

$$\begin{vmatrix} x & \lambda & y \\ \lambda & \sqrt{2p\lambda} & 1 \\ \frac{p}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $\sqrt{2p\lambda}\,x - \left(\lambda - \frac{p}{2}\right)y - \frac{p}{2}\cdot\sqrt{2p\lambda} = 0.$

Coordonatele punctului L le determinăm rezolvînd sistemul format din ecuaţiile dreptelor (MF) şi (AL):

$$x_L = \frac{\sqrt{2p\lambda}(p.\sqrt{2p\lambda} - 2a\lambda + ap)}{2p\lambda + p^2},\ y_L = \frac{p}{\sqrt{2p\lambda}}(x_L + \lambda).$$

Eliminînd parametrul λ între coordonatele punctului L, vom determina ecuaţia locului geometric, care este un cerc cu centrul în F şi cu raza FA.

167. i) Se consideră punctul $M(x_0, y_0)$ situat pe cerc şi pe hiperbolă şi se scrie că tangentele la cele două curbe sînt-perpendiculare. unde $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + a^2}$, $y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - a^2}$.

ii) Eliminînd parametrul r între x_0 şi y_0, determinăm locul geometric care este hiperbola de ecuaţie $x^2 - y^2 - \frac{a^2}{2} = 0$.

168. (Fig. III.168). Fie parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$ şi $S(x_0, y_0)$. Dreapta variabilă care trece prin punctul S are ecuaţia $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ şi intersectează parabola în punctele A, B.

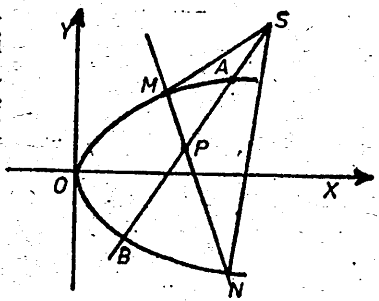


Fig. III.168

Determinăm coordonatele punctului P, conjugatul armonic al punctului M faţă de punctele A şi B şi eliminînd parametrul λ între x_p şi y_p, vom determina ecuaţia unei drepte şi anume polara punctului M. Intersectînd polara cu parabola, vom determina coordonatele punctelor M şi N, iar aria triunghiului SMN va fi:

$$\pm \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \end{vmatrix} = K.$$

Ecuaţia locului geometric este parabola: $y_0^2 - 2px_0 = 2K$, iar cum punctul S este variabil, vom renunţa la indice 0, obţinînd ecuaţia: $y^2 = 2px + 2K$.

169. Fie punctele $M(x_0, y_0)$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, $D(d_1, d_2)$. Aria unui triunghi se calculează:

$$\sigma[MAB] = \pm \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2}[(a_2 - b_2)x_0 - (a_1 - b_1)y_0 + a_1b_2 - a_2b_1].$$

Analog determinăm celelalte trei arii şi înlocuind în egalitatea din enunţ, obţinem ecuaţia locului geometric care este o dreaptă.

170. $A(a, 0)$. Locul geometric este $x - y + a = 0$.

171. Fie m coeficientul unghiular al dreptei (PQ). Locul geometric este dreapta de ecuație:

$$my + d = 0.$$

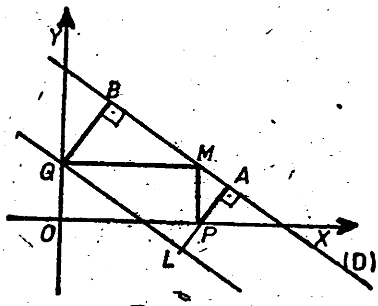


Fig. III.172

172. (Fig. III.172). Fie dreapta (D) de ecuație $y = mx + n$ și $M(\lambda, m\lambda + n)$ deci proiecțiile punctului pe axele de coordonate sînt $P(\lambda, 0)$, și $Q(0, m\lambda + n)$. Paralela dusă prin punctul Q la dreapta (D) are ecuația $(P_1): y - m\lambda - n = mx$, iar paralela dusă prin punctul P la dreapta (D) are ecuația $(P_2): y = m(x - \lambda)$. Fie A și B picioarele perpendicularelor duse din punctele P și Q pe dreapta (D), puncte ce vor avea coordonatele drept soluții ale sistemelor:

$$A \begin{cases} \dfrac{y_A}{x_A} \cdot m = -1 \\ y_A = mx_A + n \end{cases} \text{ și } B \begin{cases} \dfrac{y_B - m \cdot \lambda - n}{x_B} \cdot m = -1 \\ y_B = mx_B + n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(x_A = \frac{\lambda - mn}{1 + m^2},\ y_A = \frac{m\lambda + n}{1 + m^2}\right) \text{ și}$$

$$B\left(x_B = \frac{m^2\lambda}{1 + m^2};\ y_B = \frac{m^3\lambda + m^2 n + n}{1 + m^2}\right).$$

Fie $\{L\} = (P_2) \cap (QB)$ și $\{L_1\} = (P_1) \cap (PA) \Rightarrow$

$$\Rightarrow L \begin{cases} y = m(x - \lambda) \\ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ 0 & m\lambda + n & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \text{ și } L_1 \begin{cases} y - m\lambda - n = mx \\ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Eliminînd parametrul λ între coordonatele punctului L, respectiv ale punctului L_1, determinăm ecuațiile locurilor geometrice, care sînt două drepte perpendiculare, de ecuații:

i) $(1-m^2)x+2my-mn=0.$

ii) $2mx+(m^2-1)y+n=0.$

Observație. Fie R, S punctele de intersecție considerate și I proiecția punctului O pe dreapta (Δ). Punctele O, M, P, Q, R, S, I sînt situate pe un cerc de diametru $OM \equiv PQ \equiv RS$. Atunci (RI) formează cu dreapta (Δ) un unghi egal cu cel făcut de (Δ) cu Ox, deci (RI) este o dreaptă fixă. Analog (SI) este o dreaptă fixă. Locurile geometrice sînt dreptele (IR), (IS) care sînt perpendiculare, punctele R și S fiind diametrale.

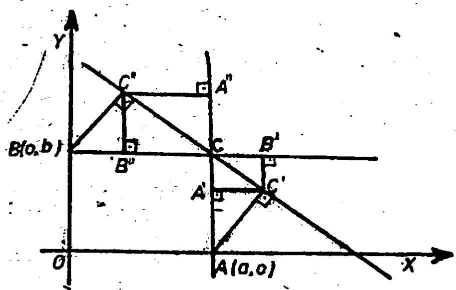


Fig. III.173

173. (Fig. III.173). Ecuația dreptei mobile, care trece prin punctul C, are ecuația $y-b=\lambda(x-a)$. Coordonatele punctelor $C'(x_1, y_1)$ și $C''(x_2, y_2)$ sînt soluțiile sistemelor:

$$\begin{cases} y_1-b=\lambda(x_1-a) \\ \dfrac{y_1}{x_1-a}\cdot\lambda=-1 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} y_2-b=\lambda(x_2-a) \\ \dfrac{y_2-b}{x_2}\cdot\lambda=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'\left(x_1=\frac{(1+\lambda^2)a-\lambda b}{1+\lambda^2},\ y_1=\frac{b}{1+\lambda^2}\right) \text{ și}$$

$$C''\left(x_2=\frac{a\lambda^2}{1+\lambda^2};\quad y_2=\frac{b\lambda^2-a\lambda+b}{1+\lambda^2}\right).$$

$$\text{Deci } A'\left(a,\ y_1=\frac{b}{1+\lambda^2}\right),\ A''\left(a,\ y_2=\frac{b\lambda^2-a\lambda+b}{1+\lambda^2}\right),$$

$$B'\left(x_1=\frac{a\lambda^2-b\lambda+a}{1+\lambda^2};\ b\right),\ B''\left(x_2=\frac{a\lambda^2}{1+\lambda^2};\ b\right).$$

i) Ecuaţia dreptei $(A''B')$ este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & y_2 & 1 \\ x_1 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_2 - b)x - (a - x_1)y + ab - x_1 y_2 = 0,$$

adică

$$\frac{-a\lambda}{1+\lambda^2} \cdot x - \frac{b\lambda}{1+\lambda^2} y + \frac{\lambda(a^2+b^2)(1+\lambda^2) - ab\lambda^2(\lambda^2+2)}{(1+\lambda^2)^2} =$$

$$= 0 \Rightarrow a(1+\lambda^2)x + b(1+\lambda^2)y - (a^2+b^2)(1+\lambda^2) +$$

$$+ ab\lambda^3 + 2ab\lambda = 0,$$

iar direcţia dreptei este $m = -\frac{a}{b}$, care este fixă, deoarece nu depinde de parametrul λ.

ii) Coordonatele mijlocului M al segmentului $A'B''$ sînt:

$$x_M = \frac{a}{2} \cdot \frac{1+2\lambda^2}{1+\lambda^2} \text{ şi } y_M = \frac{b}{2} \cdot \frac{2+\lambda^2}{1+\lambda^2}.$$

Eliminînd parametrul λ, între cele două coordonate, vom determina ecuaţia locului geometric, care este dreapta de ecuaţie $\frac{2}{3a} x + \frac{2}{3b} y - 1 = 0$.

iii) Coordonatele mijlocului N al segmentului $A''B'$ sînt:

$$x_N = \frac{2a\lambda^2 - b\lambda + 2a}{2(1+\lambda^2)} \text{ şi } y_N = \frac{2b\lambda^2 - a\lambda + 2b}{2(1+\lambda^2)}.$$

Eliminînd parametrul λ, vom determina ecuaţia locului geometric, care este dreapta $ax - by = a^2 - b^2$, iar cele două drepte loc geometric sînt drepte perpendiculare.

174. Fie punctele $A(a, 0)$ şi $B(b, 0)$, $a > b$ şi ecuaţiile cercurilor (C) şi (C') : $(x-0)(x-a) + (y-0)(y-0) = 0$ $\Rightarrow x^2 + y^2 - ax = 0$ şi $x^2 + y^2 - (a+b)x + \lambda y + ab = 0$

unde ecuaţia cercului (C') s-a determinat astfel:

$$\begin{aligned} &\text{fie } (C'): x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0\\ &A \in (C') \Rightarrow a^2 + am + p = 0\\ &B \in (C') \Rightarrow b^2 + bm + p = 0 \end{aligned} \qquad \begin{cases} m = -(a+b)\\ p = ab\\ n = \lambda. \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul format din ecuaţiile celor două cercuri vom determina coordonatele punctului P:

$$x_P = \frac{ab^2}{\lambda^2 + b^2}, \quad y_P = -\frac{ab\lambda}{\lambda^2 + b^2}.$$

Eliminînd parametrul λ, între coordonatele punctului P, vom determina ecuaţia locului geometric, care este ecuaţia cercului: $x^2 + y^2 - ax = 0$.

175. i) $M\left(\frac{2r_1}{1+m^2}, \frac{2mr_1}{1+m^2}\right)$, $N\left(\frac{2r_2}{1+m^2}, \frac{2mr_2}{1+m^2}\right)$

ii) Au acelaşi coeficient unghiular: $\frac{m^2-1}{2m}$.

iii) Cercul $x^2 + y^2 - (r_1 + r_2)x = 0$. iv) Tangentele la cele două cercuri sînt $(\lambda^2 - r_1^2)x + 2r_1\lambda(y - \lambda) = 0$ şi $(\lambda^2 - r^2)x + 2r_2\lambda(y - \lambda) = 0$.

Între coeficienţii unghiulari m_1 şi m_2 trebuie să avem relaţia $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \pm 1$.

Notînd: $r_1 - r_2 = a$ şi $r_1 r_2 = b$ se obţin ecuaţiile $\lambda^4 + \pm 2a\lambda^3 - (a^2 - 2b)\lambda^2 \pm 2ab\lambda + b^2 = 0$. care se rezolvă punîndu-le sub forma $(\lambda^2 + a\lambda + b)^2 = 2a^2\lambda^2$.

Dacă cercurile sînt de o parte şi de alta a axei Oy, atunci r_2 se înlocuieşte cu $-r_2$.

176. i) $\lambda = -12$; ii) $B(0, 2)$, $C(0, -2)$, $A(1, 0)$, $M\left(\frac{4}{4-\lambda^2}, \frac{4\lambda}{4-\lambda^2}\right)$; iii) $y = \lambda x$ fiind ecuaţia dreptei care trece prin origine, ecuaţia locului geometric al punctului M este: $4x^2 - y^2 - 4x = 0$.

177. Fie centrul cercului variabil $I(\alpha, \beta)$, cerc care are ecuaţia $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \beta^2 = 0$.

Intersectînd cele două cercuri şi impunînd condiţia de tangenţă obţinem:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \beta^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 4\alpha(1 + \beta^2)x + (1 + \beta^2)^2 - 4\beta^2 = 0$ şi $\Delta = -16\beta^2(\beta^2 + 2\alpha - 1)(\beta^2 - 2\alpha - 1)$. Cum $\Delta = 0$ atunci $\beta^2 = \pm 2\alpha + 1$. Deci ecuaţia locului geometric este formată din reuniunea a două parabole: $y^2 = \pm 2x + 1$.

178. Fie dreapta (D): $y = mx + n$ şi punctele $A(x_1, mx_1 + n)$, $B(x_2, mx_2 + n)$, $M(\lambda, m\lambda + n)$, $P(x_p, y_p)$, $Q(x_q, y_q)$ unde $AB = \sqrt{(x_1 - x)^2 + m^2(x_1 - x^2)^2} = a \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{a}{\sqrt{1 + m^2}}$, $MP = \sqrt{(\lambda - x_p)^2 + (m\lambda + n - y_p)^2} = p$ şi $MQ = \sqrt{(\lambda - x_q)^2 + (m\lambda + n - y_q^2)} = q$, iar coordonatele punctelor P şi Q, verifică ecuaţia dreptei perpendiculare în M pe (D), dreaptă de ecuaţie: $y - (m\lambda + n) = -\frac{1}{m}\cdot(m - \lambda)$. Scriind ecuaţiile dreptelor (AP) şi (BQ) şi rezolvînd sistemul format, determinăm coordonatele punctului de intersecţie şi eliminînd parametrul λ, vom obţine ecuaţia locului geometric, care este dreapta de ecuaţie $(p - q)x + ay - aq = 0$.

ii) Locul geometric este parabola de ecuaţia $y = \frac{1}{p}x^2 - \frac{a}{p}x$.

iii) Înlăturînd soluţia $x = 0$, obţinem ecuaţia:

$$x^3 - 2ax^2 + a^2x + (a - \lambda)p^2 = 0.$$

Formăm şirul lui Rolle:

$$\text{fie } f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x + (a - \lambda)p^2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4ax + a^2,\ f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$x_1 = a$ şi $x_2 = \frac{a}{3}$. $f(a) = (a - \lambda)p^2$ şi $f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{4a^3}{27} + (a - \lambda)p^2$.

Şirul lui Rolle este:

x	$-\infty$	$\frac{a}{3}$	a	$+\infty$	
f'/f		$\frac{4a^3}{27}+(a-\lambda)p^2$	$(a-\lambda)p^2$		*Numărul punctelor de intrsecție exceptînd punctul* $x=0$.
$\lambda\in(-\infty, a)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$x_1\in\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$
$\lambda=a$	$-$	$+$	0	$+$	$x_1\in\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$ $x_2=x_3=a$
$\lambda\in\left(a,\frac{4a^3+27ap^2}{27p^2}\right)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1\in\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$ $x_2\in\left(\frac{a}{3}, a\right)$ $x_3\in(a,\infty)$
$\lambda=\frac{4a^3+27ap^2}{27p^2}$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1\in(a,\infty)$ $x_2=x_3=\frac{a}{3}$
$\lambda\in\left(\frac{4a^3+27ap^2}{27p^2},\infty\right)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1\in(a,\infty)$

179. Fie trei puncte aparținînd parabolei

$$M_i\left(x_i=\frac{t_i^2}{2p},\ y_i=t_i\right),\ i\in\{1, 2, 3\}.$$

Ecuația normalei în punctul M_i este:

$y-t_i=-\frac{t_i}{p}\left(x-\frac{t_i^2}{2p}\right)$. Fie punctul $L(x_0, y_0)$ de unde se duc cele trei normale, deci el aparține fiecărei drepte în parte, deci $y_0 - t_i = -\frac{t_i}{p}\left(x_0 - \frac{t_i^2}{2p}\right)$ cît şi faptul că două normale sînt perpendiculare, adică

$$\frac{t_1}{p} \cdot \frac{t_2}{p} = -1.$$

(Se cunoaşte faptul, sau se poate demonstra cu multă uşurinţă, că dacă m_1, m_2, m_3 sînt pantele acelor normale şi impunînd condiţia ca dreapta $y - y_0 = m(x - x_0)$ să fie normală parabolei se obţine ecuaţia de gradul III în m cu rădăcinile m_1, m_2, m_3, iar locul geometric al punctului L pentru care $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}$ = constant, adică conform relaţiilor lui Viète:

$$\frac{m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}{m_1m_2m_3} = \text{constant, este o dreaptă.)}$$

Eliminînd parametrii t_1, t_2, t_3, obţinem ecuaţia locului geometric care este o parabolă.

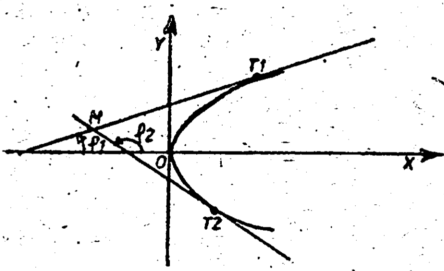


Fig. III.180

180. (Fig. III.180). Fie $M(x_0, y_0)$ şi parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$. Scriind ecuaţia unei tangente paralelă cu o direcţie dată, de pantă m, $y = mx + \frac{p}{2m}$ şi impunînd condiţia ca punctul $M(x_0; y_0)$ să aparţină acestei tangente, obţinem o ecuaţie de gradul doi: $2x_0m^2 - 2y_0m + p = 0$ ale cărei rădăcini m_1, m_2 sînt pantele celor două tangente care se pot duce din M la parabolă, iar ecuaţiile tangentelor le putem scrie $y - y_0 = m_i(x - x_0)$ cu $i \in \{1, 2\}$. Tangentele la parabolă au pantele $m_i = \operatorname{tg} \varphi_i$.

Fie $\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}} =$

$$= \frac{m_1}{\pm\sqrt{1 + m_1^2}} \cdot \frac{m_2}{\pm\sqrt{1 + m_2^2}} =$$

$$= \frac{m_1m_2}{\pm\sqrt{(m_1+m_2)^2 - 2m_1m_2 + (m_1m_2)^2 + 1}}$$

Cum $\begin{cases} m_1 + m_2 = \dfrac{y_0}{x_0} \\ m_1 m_2 = \dfrac{p}{2x_0} \end{cases}$ şi substituind în ecuaţia precedentă obţinem:

$$\frac{p}{\sqrt{4y_0^2 + 4x_0^2 - 4px_0 + p^2}} = K.$$

Deci ecuaţia locului geometric este curba $y^2 = -x^2 + px + \frac{p^2(1-k^2)}{4k^2}$ care este ecuaţia unei conice care admite axa Ox, ca axă de simetrie.

Fie $\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = m_1 m_2 = \frac{p}{2x_0}$, deci ecuaţia locului geometric este o dreaptă.

181. O dreaptă, o parabolă.

182. Ecuaţia generală a conicelor este $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ în care coeficienţii sînt cunoscuţi şi $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

i) Dacă $A = C$, $B = 0$, ecuaţia reprezintă un cerc.

ii) Dacă $AC > 0$, $B = 0$, elipsă cu axele paralele cu axele de coordonate, în particular dacă $D = E = 0$ se obţine ecuaţia redusă a elipsei.

iii) Dacă $AC < 0$, $B = 0$, hiperbolă cu axele paralele cu axele de coordonate, în particular dacă $D = E = 0$ se obţine ecuaţia redusă a hiperbolei.

iv) Dacă $B = 0$ şi unul dintre coeficienţii A, C este nul se obţine o parabolă cu axa paralelă cu una din axele de coordonate.

v) Dacă ecuaţia iniţială este produsul a două polinoame de gradul I: $(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1)$ ecuaţia reprezintă două drepte.

De altfel, se poate stabili o nouă apropiere între aceste curbe, conform teoremei lui Dandelin: secţiunea plană într-o suprafaţă conică de rotaţie este un cerc, o elipsă, o hiperbolă, o parabolă sau este formată din două drepte reale, imaginare sau confundate. De asemenea o conică poate fi definită ca locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanţelor la un punct fix numit focar şi la o dreaptă fixă numită directoare este o constantă e numită excentricitate (pentru $e < 1$ conica este o elipsă, pentru $e = 1$ conica este o parabolă, pentru $e > 1$ conica este o hiperbolă). Cînd se cunosc la o conică cu centru, unul dintre focare (x_0, y_0), directoarea corespunzătoare $ax + by + c = 0$ și excentricitatea e a conicei, ecuația conicei se scrie:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = e^2 \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}$$

care se numește ecuația focală a conicei. Pentru fiecare focar avem cîte o ecuație focală, iar în cazul parabolei avem o singură ecuație focală, iar dacă efectuăm calculele obținem:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Ecuația locului geometric este o conică avînd focarul O și directoarea (D).

183. i) Avem elipsă dacă $(a^2 + m)(b^2 + m) > 0$, adică m se află în afara intervalului $(-a^2, -b^2)$; avem hiperbolă în caz contrar. Exprimînd că trece prin punctul (x_0, y_0), avem

$$\frac{x_0^2}{a^2 + m} + \frac{y_0^2}{b^2 + m} - 1 = 0.$$

Avem o ecuație de gradul II în m, deci două curbe. Se arată că o rădăcină este în intervalul $(a^2, -b^2)$ și cealaltă în afară.

ii) Se va observa că ortogonalitatea se traduce prin relația

$$\frac{x_0^2}{(a^2 + m_1)(a^2 + m_2)} + \frac{y_0^2}{(b^2 + m_1)(b^2 + m_2)} = 0,$$

m_1, m_2 fiind rădăcinile ecuației în m. Această relație se demonstrează imediat, scăzînd relațiile:

$$\frac{x_0^2}{a^2 + m_1} + \frac{y_0^2}{b^2 + m_1} - 1 = 0;$$

$$\frac{x_0^2}{a^2 + m_2} + \frac{y_0^2}{b^2 + m_2} - 1 = 0.$$

iii) Se elimină parametrul m între ecuația dată și ecuația polarei punctului fix în raport cu acele curbe, obținînd ecuația locului geometric care este un cerc.

Reamintesc definiția polarei unui punct în raport cu o conică: Fie M_0 un punct fix în planul unei conice, o secantă mobilă dusă prin M_0, intersectează conica în punctele M_1 și M_2.

Locul geometric al punctului P, conjugatul armonic al punctului M_0 în raport cu punctele M_1 și M_2 este o dreaptă numită polara punctului M_0 în raport cu conica.

Ecuația polarei este analoagă ecuației tangentei dusă dintr-un punct al conicei și deci se obține prin dedublare.

Reciproc: dacă se dă dreapta $ax + by + c = 0$, punctul $M_0(x_0, y_0)$, a cărui polară față cu o conică este dreapta precedentă, se numește polul dreptei față de conică.

Coordonatele polului se determină scriind că polara punctului M_0 coincide cu dreapta dată (prin șirul de rapoarte egale, generate de coeficientul lui x, al lui y și de termenul liber).

Relațiile care există între abscisele și ordonatele punctelor M_0 și P, conjugate armonic față de punctele M_1 și M_2 se obțin din:

$$\frac{M_0M_1}{M_0M_2} = -\frac{PM_1}{PM_2} \Rightarrow \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} = -\frac{x_1 - x_p}{x_2 - x_p}$$

și respectiv

$$\frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0} = -\frac{y_1 - y_p}{y_2 - y_p}.$$

184. i) Parabola $y^2 = ax$ cu focarul $F\left(\frac{a}{4}, 0\right)$.

ii) Notînd ordonata punctului M cu λ, atunci distanța FI pînă la tangentă este egală cu $\frac{1}{4}\sqrt{a^2 + 4\lambda^2}$; $OF = \frac{a}{4}$ și $MD = \frac{a^2 + 4\lambda^2}{4a}$, deci $FI^2 = OF \cdot MD$.

iii) Locul geometric este curba de ecuație.

$$64x^3 - 80ax^2 + 28a^2x - 3a^3 = 128ay^2.$$

185. i) Fie punctele $M(\mu, 0)$, $N(0, \nu)$ cu condiția

$$\frac{\alpha}{\mu} + \frac{\beta}{\nu} - 1 = 0. \qquad (1)$$

Dreptele (MB) și (NA) au ecuațiile

$$\frac{x}{\mu} + y - 1 = 0, \quad x + \frac{y}{\nu} - 1 = 0. \qquad (2)$$

Trebuie să eliminăm parametrii μ, ν din ecuațiile precedente: Avem din (2) $\frac{1}{\mu} = \frac{1-y}{x}$; $\frac{1}{\nu} = \frac{1-x}{y}$ și înlocuind în (1) obținem ecuația

$$\beta x^2 + xy + \alpha y^2 - \beta x - \alpha y = 0$$

care reprezintă o conică.

ii) Avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\beta \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\alpha \\ -\frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\alpha & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\alpha\beta(1-\alpha-\beta),$$

deci conica este degenerată cînd $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha + \beta = 1$, adică, atunci cînd punctul P este situat pe axele Ox, Oy sau pe dreapta (AB). În caz contrar, conica (Γ) este oarecare.

De asemenea

$$\delta = \begin{vmatrix} \beta & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\beta - \frac{1}{4}.$$

Dacă punctul P este situat pe hiperbola (H), $xy - \frac{1}{4}$ avem $\delta = 0$ și conica (Γ) este o parabolă. Cînd P este în domeniul limitat de hiperbola (H), care conține și originea, deci $xy = -\frac{1}{4} < 0$, avem $\delta < 0$ și conica este o hiperbolă. Dacă P este situat în domeniul complementar, conica (Γ) este o elipsă (fig. III.185).

iii) Conicele (Γ) trec prin punctele comune curbelor obținute, anulînd coeficienții lui α, β și termenul liber:

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y^2 - y = 0, \ xy = 0. \end{cases}$$

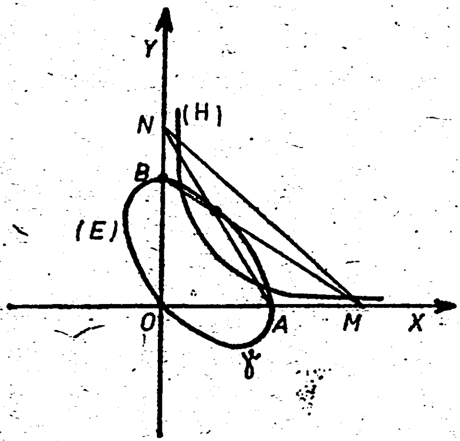


Fig. III.185

Rezultă cele trei puncte fixe $O(0; 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$. Cînd conica (Γ) trece prin $K(2, 2)$ avem relația între α și β:

$$\alpha + \beta + 2 = 0.$$

Eliminînd pe β, avem

$$-(\alpha + 2)x^2 + xy + \alpha y^2 + (\alpha + 2)x - \alpha y = 0. \quad (3)$$

Obținem

$$\delta = -\left(\alpha^2 + 2\alpha + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} - (\alpha + 1)^2$$

și conicele sînt elipse pentru

$$-1-\frac{\sqrt{3}}{2}<\alpha<-1+\frac{\sqrt{3}}{2};$$

parabolă pentru

$$\alpha=-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2};$$

hiperbolă în afara intervalului.

Pentru determinarea centrului, anulăm derivatele parțiale ale ecuației (3) în raport cu x și y:

$$f'_x=-2(\alpha+2)x+y+\alpha+2=0,\quad f'_y=x+2\alpha y-\alpha=0.$$

Eliminînd parametrul α obținem ecuația:

$$2x^2-8xy+2y^2+3x+3y-2=0$$

care reprezintă o hiperbolă cu centrul în $\left(\frac{3}{4};\ \frac{3}{4}\right)$ cu axele pe bisectoarele unghiului axelor de coordonate.

Observații; a) Razele AN și BM corespund omografic. Deci locul geometric al intersecției lor este o conică ce trece prin A, B și evident, originea, pentru secanta $AN\equiv AO$.

b) Genul conicei depinde de natura razelor paralele AN, BM. Renunțăm provizoriu la condiția că dreapta (MN) să treacă prin P. Atunci punctele M, N de pe axele Ox, Oy pentru care $AN \parallel BM$ corespund omografic. Deci dreapta (MN) înfășoară o conică (H), tangentă axelor Ox, Oy în omoloagele punctului O. Dar cînd $M=0$ avem $N\to\infty$ și reciproc. Deci conica (H) admite axele Ox, Oy ca asimptote; avînd asimptotele perpendiculare, (H) este o hiperbolă echilateră.

Cînd punctul P este situat pe conica (H), există o secantă (MN) ce trece prin P, anume tangenta în P la (H) și conica (Γ), este o parabolă. Cînd P aparține domeniului care conține originea putem să ducem două tangente prin P și există două poziții ale secantelor paralele corespunzătoare, Conica este o hiperbolă. Cînd P este în domeniul complementar, nu avem poziții de raze astfel ca dreapta (MN) să treacă prin P şi conica (Γ) este o elipsă.

c) Conicele care trec prin punctele fixe O, A, B, K formează un fascicul; locul geometric al centrelor lor este conica ce trece prin mijloacele laturilor şi diagonalelor patrulaterului şi intersecția diagonalelor.

186. (Fig. III. 186). iii) Integrăm succesiv de două ori şi găsim

$$y = 2x^3 - 19x^2 + C_1x + C_2.$$

Din condițiile $y\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ şi $y(4) = 0$; $C_1 = 56$; $C_2 = -48$; Deci y are ecuația: $y = 2x^3 - 19x^2 + 56x - 48$.

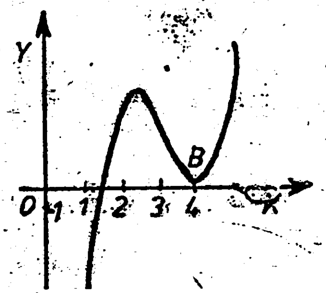


Fig III.186

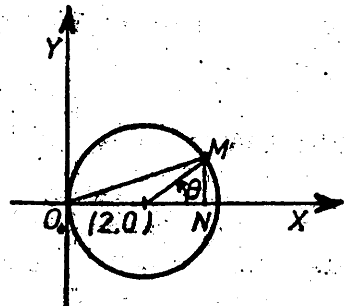


Fig. III.187

187. i) Ecuația cercului (C) este $(x-2)^2 + y^2 - 4 = 0$. Fie $M \in (C_1)$. Vom lua $x_M = 2 + 2\cos\theta$, $y_M = 2\sin\theta$; $\theta \in [0, \pi]$. Aria $\triangle OMN = \frac{1}{2} \cdot ON \cdot NM = 2[\sin\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta]$. Pentru a calcula aria maximă, calculăm derivata ariei şi găsim $\sigma[OMN]' = 2[\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1]$. Deci pentru $m(\hat{\theta}) = 60°$, adică pentru $x_M = 3$ şi $y_M = \sqrt{3}$, triunghiul OMN are aria maximă $3\sqrt{3}/2$.

ii) $V = \frac{2\pi x^2}{3}$ şi poziția punctului M coincide cu poziția punctului M în care aria $\triangle OMN$ era maximă.

iii) Prin adunare deducem ecuația $P(x) \equiv x^3 - x^2 - x + m = 0$

Condiţia necesară şi suficientă ca $x = a$ să fie rădăcină dublă a lui $P(x)$ este $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$, $P''(a) \neq 0$.

188. i) Fie $(P_{m_1}): y = x^2 - \frac{3}{2} m_1 x + m_1^2 + m_1$ şi

$$(P_{m_2}): y = x^2 - \frac{3}{2} m_2 x + m_2^2 + m_2$$

parabole ce corespund lui $m = m_1$ şi $m = m_2$.

Intersectînd (P_{m_1}) cu (P_{m_2}) găsim coordonatele punctului unic $N(x_N, y_N)$.

Scriind că (P_m) trece prin punctul O deducem $m = 0$ şi $m = -1$; valori cărora le corespund parabolele (P) şi (P');

$$(P): y = x^2; \quad (P'): y = x^2 + \frac{3}{2} x.$$

Fie dreapta (D) de ecuaţie $y = mx$, care intersectează parabola (P) în punctul $A(m, m^2)$ şi parabola (P') în punctul $B\left(m - \frac{3}{2}, m^2 - \frac{3}{2} m\right)$.

Dacă O este mijlocul segmentului AB, avem: $m = \frac{3}{4}$.

ii) 1°. Dacă $m_1 + m_2 = a$, atunci punctul N are abscisa constantă şi locul geometric este o paralelă la Oy (sau o parte din ea), de ecuaţie: (L_1): $x = \frac{2}{3}(a + 1)$.

Verificăm dacă orice punct de pe dreapta (L_1) este un punct al locului geometric, numai acele puncte ale dreptei (L_1), prin care trec parabolele (P_m).

Fie $M\left(\frac{2}{3}(a + 1), h\right) \in (L_1)$. Valorile lui m, corespunzătoare parabolelor (P_m) care trec prin punctul M, sînt rădăcini ale ecuaţiei:

$$h = \left(\frac{2}{3}(a + 1)\right)^2 - \frac{3m}{2} \cdot \frac{2}{3}(a + 1) + m^2 + m$$

$$\text{sau } m^2 - am + \frac{4}{9}(a + 1)^2 - h = 0.$$

Ecuaţia are rădăcini reale $\Leftrightarrow \Delta \geqslant 0$:

$$h \geqslant \frac{4}{9}(a+1)^2 - \frac{a^2}{4} = h_0.$$

Deci prin punctul M trec parabolele (P_m) dacă: $h \geqslant h_0$. Deci: L este locul geometric al punctelor aparţinînd dreptelor (L_1) care au ordonata superioară lui h_0.

2° Locul geometric al punctului N în acest caz se determină eliminînd pe m_1 şi m_2 între cele 3 relaţii:

$$m_1 \cdot m_2 = b, \quad x = x_N, \quad y = y_N.$$

Determinăm parabola (L_2): $y = x^2 - b$.
Verificăm dacă orice punct al parabolei (L_2) este un punct al locului geometric: *Da*, dacă $b < 0$, deoarece la orice abscisă $x = k$ există m_1, astfel încît să avem:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{m_1^2 + m_1 + b}{m_1} = K, \tag{1}$$

dat fiind că ecuaţia precedentă, în m_1, are discriminantul

$$\Delta' = \left(1 - \frac{3}{2}k\right)^2 - 4b \geqslant 0, \quad \forall k \in \mathbf{R}.$$

Deci în acest caz locul geometric al punctului L' este (L_2) în întregime. *Nu*, dacă $b > 0$.

$$\Delta' < 0 \Rightarrow k \in \left(\frac{2}{3}(1 - 2\sqrt{b}),\ \frac{2}{3}(1 + 2\sqrt{b})\right)$$

şi ecuaţia (1) nu are rădăcini reale. Aceste valori ale lui k reprezintă abscisele acelor puncte de pe (L_2) care nu aparţin locului geometric (L').

Locul geometric (L') este format din punctele parabolei $y = x^2 - b$ care nu aparţin benzii mărginite de dreptele:

$$x = \frac{2}{3}(1 - 2\sqrt{b}) \text{ şi } x = \frac{2}{3}(1 + 2\sqrt{b}).$$

3° Eliminînd pe m_1, m_2 între cele 3 relaţii: obţinem parabola (L_3): $y = x^2 - \frac{3}{2}cx$.

Deci $N \in (L_3)$. Verificăm dacă orice punct al parabolei (L_3) este un punct al locului geometric. Observăm că x_N

poate lua o valoare k dată dacă există m_1 astfel ca ecuaţia în m_1: $x_N = k$ să aibă rădăcini reale, ecuaţie care se scrie astfel:

$$2m_1^2 - (3k-2)m_1 + 3ck = 0.$$

Ea are discriminantul: $\Delta'' = 9k^2 - 12(2c+1)k + 4$.
Acest trinom are discriminantul $\Delta_1 = 144c(c+1)$.
Dacă $-1 \leqslant c \leqslant 0$, atunci $\Delta_1 \leqslant 0$ şi $\Delta'' > 0$, iar ecuaţia de gradul doi în m are rădăcini reale, oricare ar fi $k \in \mathbf{R}$.
Locul geometric descris de punctul N este parabola (L_3) în întregime.
Dacă $c < -1$ sau $c > 0$, atunci Δ'' are două rădăcini k_1 şi k_2 şi între ele $\Delta'' < 0$, iar în afară $\Delta'' > 0$. Astfel ecuaţia în m are rădăcini reale dacă numărul $k < k_1$ sau $k > k_2$.

În acest caz locul geometric al punctului N, (L'') este o parte a parabolei (L_3), cea exterioară benzii determinate de dreptele $x = k_1$ şi $x = k_2$.

Verificăm dacă există un punct comun celor 3 locuri geometrice. Fie dreapta (L_1) şi parabolele (L_2) şi (L_3):

$$x = \frac{2}{3}(a+1), \quad y = x^2 - b, \quad y = x^2 - \frac{3}{2}cx,$$

cărora aparţin locurile (L), (L') şi (L'').

Eliminînd pe x şi y între relaţiile de mai sus, determinăm o condiţie necesară şi suficientă, ca (L_1), (L_2), (L_3) să aibă un punct comun, anume: $b = (a+1)c$. (C)

Dar locurile (L), (L'), (L'') pot fi doar părţi ale lui (L_1), (L_2) şi (L_3). De aceea (C) reprezintă numai o condiţie necesară ca (L), (L'), (L'') să aibă un punct comun.

Condiţiei (C) trebuie să-i adăugăm condiţiile restrictive determinate mai sus.

iii) Fie $M(X, Y)$ un punct din plan. Scriind că $M \in (P_m)$, deducem o ecuaţie de gradul al doilea în m, care are două rădăcini reale şi prin punctul M trec două parabole $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Delta = \left(\frac{3}{2}X - 1\right)^2 - 4X^2 + 4Y > 0.$$

Astfel se pune în evidenţă parabola:

$$(P)\colon\ Y = \frac{7}{16}X^2 + \frac{3}{4}X - \frac{1}{4}.$$

Dacă $M \in (P)$, atunci prin punctul M trece o singură parabolă şi numai una. Deci (P) este locul geometric cerut.

BIBLIOGRAFIE

1. BOTEZ M. ŞT. *Probleme de geometrie.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1976.
2. GHIRCOIAŞIU N., IASSINSCHI M., VICIU A. *Fişe de geometrie şi trigonometrie.* Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1978.
3. HADAMARD J. *Lecţii de geometrie elementară.* Vol. I şi vol. II. Editura Tehnică, Bucureşti, 1961.
4. IONESCU-ŢIU C. *Geometrie plană şi în spaţiu pentru admiterea în facultate.* Editura Albatros, Bucureşti, 1976.
5. MURGULESCU E. şi colab. *Geometrie analitică şi diferenţială.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.
6. SIMIONESCU G. D. *Geometrie analitică.* Editura didactică şi pedagogică. Bucureşti, 1968.
7. ŢUBERBILLER N.O. *Probleme şi exerciţii de geometrie analitică.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1952.
8. ŢIŢEICA G. *Culegere de probleme de geometrie analitică.* Biblioteca Gazetei matematice, 1939.
9. ŢIŢEICA G. *Probleme de geometrie.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1982.
10. * * * *Gazeta matematică,* 1965—1985.

CUPRINS

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar : 19.05.1986. Apărut : 1986.
Coli de tipar : 26.

Comanda nr. 60079
Combinatul poligrafic „Casa Scînteii",
Piaţa Scînteii nr. 1, Bucureşti,
Republica Socialistă România