VICTOR IAVORSCHI

MATEMATICA

TESTE PREGĂTITOARE

pentru examenul de bacalaureat

clasa a XII-a

2022

TESTUL 1

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 8^{-\frac{2}{3}} + 0,75$.

2. Să se rezolve în R inecuația $\sqrt{x^2 - 8x} < 3$.

3. Să se rezolve în R ecuația $\begin{vmatrix} 4 + i\sqrt{3} & (2+\sqrt{5})x \\ (2-\sqrt{5})x & 4 - i\sqrt{3} \end{vmatrix} = 6x + 14$.

4. Determinați valoarea expresiei $E(x) = 26 \cdot \sin 2x + 25 \cdot tgx$, știind că $\cos x = -\frac{5}{13}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

5. Rezolvați în R ecuația $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$.

II. GEOMETRIE

6. Fie rombul $ABCD$ în care $m(\angle ABC) = 60^\circ$ și diagonala $AC = 7,5cm$. Să se afle perimetrul rombului $ABCD$.

7. Un triunghi are două laturi de lungimi $8cm$ și $4\sqrt{7}\,cm$, iar măsura unghiului opus laturii mai mari dintre cele două laturi are măsura de 60°. Să se afle lungimea laturii a treia a triunghiului.

8. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de $12cm$ și volumul de $384cm^3$. Să se afle lungimea înălțimii și aria laterală a piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care $a_1 = 2$ și $a_5 = 18$. Să se afle a_{2022}.

10. Fie funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

a) Determinați ecuația asimptotei la $+\infty$, la graficul funcției f.

b) Aflați punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați integrala $I = \int_3^4 f(x)dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o vază se află 11 flori, dintre care 4 sunt de culoare roșie. Se iau la întîmplare 3 flori din vază. Să se afle probabilitatea că printre florile scoase cel puțin una va fi de culoare roșie.

12. Să se afle termenul care-l conține pe x^5 din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, știind că suma coeficienților binomiali ai dezvoltării este egală cu 128.

SOLUŢII

1. $E=8^{-\frac{2}{3}}+0,75=\left(2^3\right)^{\frac{-2}{3}}+\frac{3}{4}=2^{-2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$.

■ **RĂSPUNS:** $E=1$.

2. DVA al inecuației se determină din condiția $x^2-8x\geq 0$. Ultima inecuație are mulțimea soluțiilor $x\in(-\infty;\ 0]\cup[8;\ +\infty)$. Ridicînd ambele părți ale inecuației din enunț la pătrat, obținem $x^2-8x<9$. Mulțimea soluțiilor ultimei inecuații este $x\in(-1;\ 9)$. Ținînd cont de DVA, obținem mulțimea soluțiilor inecuației inițiale $S=(-1;\ 0]\cup[8;\ 9)$.

■ **RĂSPUNS:** $S=(-1;\ 0]\cup[8;\ 9)$.

3. $\begin{vmatrix} 4+i\sqrt{3} & \left(2+\sqrt{5}\right)x \\ \left(2-\sqrt{5}\right)x & 4-i\sqrt{3} \end{vmatrix}=\left(4+i\sqrt{3}\right)\left(4-i\sqrt{3}\right)-\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)x^2=16-3i^2-(4-5)x^2=$ $16+3+x^2=x^2+19$. Obținem ecuația $x^2+19=6x+14 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0$. Ultima ecuație are soluțiile $x_1=1$, $x_2=5$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\{1;\ 5\}$.

4. Deoarece $x\in\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$, rezultă că $\sin x>0$, atunci $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=$ $\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$. Deci, $\sin x=\frac{12}{13}$.

Atunci $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x=2\cdot\frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{120}{169}$. Avem $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=-\frac{12}{5}$.

Atunci $E=26\cdot\sin 2x+25\cdot tgx=26\cdot\left(-\frac{120}{169}\right)+25\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{1020}{13}$.

■ **RĂSPUNS:** $E=-\frac{1020}{13}$.

5. DVA al ecuației este mulțimea $(0; +\infty)$. Ecuația se scrie: $\left(\log_{\frac{1}{2}}(4x)\right)^2 + \log_2 x^2 - \log_2 8 = 8 \Leftrightarrow \left(-\log_2(4x)\right)^2 + 2\log_2|x| - 3 - 8 = 0$. Deoarece $x > 0 \Rightarrow |x| = x$, și ecuația devine $\left(\log_2(4x)\right)^2 + 2\log_2 x - 11 = 0 \Leftrightarrow$ $\left(\log_2 4 + \log_2 x\right)^2 + 2\log_2 x - 11 = 0$. Notăm $\log_2 x = t$, și obținem ecuația $(2+t)^2 + 2t - 11 = 0 \Leftrightarrow 4 + 4t + t^2 + 2t - 11 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - 7 = 0$. Ultima ecuație are soluțiile $t_1 = -7$, $t_2 = 1$. Obținem $\log_2 x = -7$, de unde $x = \frac{1}{128}$ și $\log_2 x = 1$, de unde $x = 2$.

■ **RĂSPUNS:** $S = \left\{\frac{1}{128}; 2\right\}$.

6. Triunghiul ABC este isoscel cu $[AB] \equiv [BC]$, și deoarece are un unghi de 60°, rezultă că este echilateral, atunci $AB = BC = AC = 7{,}5\,cm$, deci latura rombului are lungimea de $7{,}5\,cm$. Perimetrul rombului este $P = 4 \cdot 7{,}5 = 30\,cm$.

■ **RĂSPUNS:** $P = 30\,cm$.

7. Fie triunghiul ABC cu $AB = 8\,cm$, $BC = 4\sqrt{7}\,cm$ și $m(\angle A) = 60^\circ$. Fie $AC = x$. Conform teoremei cosinusurilor în triunghiul ABC avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow \left(4\sqrt{7}\right)^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ $112 = 64 + x^2 - 8x \Leftrightarrow x^2 - 8x - 48 = 0$. Ultima ecuație are soluțiile $x_1 = -4$ (nu convine), $x_2 = 12$. Așadar, $AC = 12\,cm$.

■ **RĂSPUNS:** $AC = 12\,cm$.

8. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vîrful V și baza pătratul $ABCD$ cu latura de $12\,cm$. Fie $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow VO \perp (ABC) \Rightarrow [VO]$ este înălțimea piramidei. $A_{baz} = 12^2 = 144\,cm^2$. $V_{pir} = \frac{1}{3} \cdot A_{baz} \cdot h \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot h = 384$ $\Rightarrow 48h = 384$, de unde $h = 8\,cm$. Deci $VO = 8\,cm$. Aflăm lungimea apotemei piramidei. Fie M milocul laturii $[CD]$, atunci $OM \perp CD$, și conform teoremei celor trei perpendiculare avem $VM \perp CD \Rightarrow [VM]$ este apotema piramidei. $OM = \frac{1}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6\,cm$. Din triunghiul dreptunghic VOM, conform teoremei lui Pitagora avem $VM = \sqrt{VO^2 + OM^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10\,cm$. Atunci $A_{lat} = 4 \cdot A_{VCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot CD \cdot VM = 2 \cdot 12 \cdot 10 = 240\,cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $h = 8\,cm$, $A_{lat} = 240\,cm^2$.

9. Avem $a_5 = a_1 + 4r$, unde r este rația progresiei. Obținem $18 = 2 + 4r$, de unde $r = 4$. Atunci $a_{2022} = a_1 + 2021r = 2 + 2021 \cdot 4 = 8086$.

■ **RĂSPUNS:** $a_{2022} = 8086$.

10. *a*) $D_f=(-\infty;\,2)\cup(2;\,+\infty)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x-2}=+\infty$, rezultă că nu există asimptote orizontale la graficul funcţiei f. Stabilim dacă avem asimptote oblice la graficul funcţiei f. Avem $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2-2x}=1$, deci $m=1$.

Atunci $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x^2+2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x-2}=2$.

Deci $n=2$. Aşadar, ecuaţia asimptptei oblice la graficul funcţiei f este $y=x+2$.

b) Aflăm derivata funcţiei f:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x-2}\right)'=\frac{(x^2)'\cdot(x-2)-(x-2)'\cdot x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}.$$

Aflăm punctele critice ale funcţiei f, rezolvînd ecuaţia $f'(x)=0\Rightarrow\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0$ $\Rightarrow x^2-4x=0$, de unde $x_1=0$ şi $x_2=4$. Aşadar, punctele critice ale funcţiei f sunt $x_1=0$ şi $x_2=4$. Se obţine că $x=0$ este punct de maxim local, iar $x=4$ este punct de minim local.

c) Împărţind x^2 la $x-2$, obţinem că $\dfrac{x^2}{x-2}=x+2+\dfrac{4}{x-2}$.

Atunci $I=\displaystyle\int_3^4 f(x)\,dx=\int_3^4\frac{x^2}{x-2}dx=\int_3^4\left(x+2+\frac{4}{x-2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x+4\cdot\ln|x-2|\right)\Bigg|_3^4=$

$8+8+4\ln 2-\left(\dfrac{9}{2}+6+4\ln 1\right)=\dfrac{11}{2}+4\ln 2$. Aşadar, $I=\dfrac{11}{2}+4\ln 2$.

■ **RĂSPUNS:** *a*) $y=x+2$; *b*) $x=0$ este punct de maxim local, iar $x=4$ este punct de minim local; *c*) $I=\dfrac{11}{2}+4\ln 2$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n=C_{11}^3=165$. Numărul cazurilor favorabile este $m=n-C_7^3=165-\dfrac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=130$. Atunci probabilitatea este $P=\dfrac{130}{165}=\dfrac{26}{33}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\dfrac{26}{33}$.

12. Deoarece suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării este egală cu 128, rezultăcă $2^n=128$,deunde $n=7$.Avemdezvoltarea $\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^7$.Folosindformula termenului general al dezvoltării obţinem

$T_{k+1}=C_7^k\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{7-k}\cdot\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^k=C_7^k\cdot x^{\frac{21-3k}{2}}\cdot x^{-\frac{k}{3}}=C_7^k\cdot x^{\frac{21-3k}{2}-\frac{k}{3}}$. Deoarece termenul trebuie să-l conţină pe x^5, rezultă ecuaţia $\dfrac{21-3k}{2}-\dfrac{k}{3}=5\Leftrightarrow 3(21-3k)-2k=30$, de unde $k=3$. Aşadar, avem termenul $T_4=C_7^3\cdot x^5=35x^5$.

■ **RĂSPUNS:** $T_4=35x^5$.

TESTUL 2

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $a = 2^{\log_8 4} + \left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$.

2. Rezolvați în R inecuația $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \left(\frac{64}{27}\right)^{-1}$.

3. Să se determine numerele reale x și y din relația $(1-2i)x+(1+2i)y=1+i$.

4. Rezolvați în mulțimea R ecuația $3^{\frac{1}{2}+\log_3(\cos x)} + 6^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}+\log_9(\sin x)}$.

5. Determinați valorile parametrului real m pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ m & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x \in R$.

II. GEOMETRIE

6. Fie cercul $C(O;\, R)$. Punctele A și B se află pe cerc, astfel încît $m(\angle AOB) = 60^\circ$ și $AB = 6\,cm$. Să se afle aria discului mărginit de cerc.

7. Generatoarea unui con circular drept formează cu planul bazei un unghi de 30°. Determinați aria laterală a conului, dacă se știe că volumul lui este egal cu $8\pi\, cm^3$.

8. Determinați aria triunghiului ABC, știind că $AC = 3\,cm$, $BC = 4\,cm$, iar medianele AM și BN sunt reciproc perpendiculare.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n\ge 1}$, $a_n = \frac{2n+1}{3n-1}$.

10. Se consideră funcția $f: R \to R$, $f(x) = x^3 - 3x$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

b) Determinați punctele de extrem local ale funcției f.

c) Aflați aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa O_X și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Pe un raft se află 12 cărți, dintre care 4 sunt de matematică. Se iau la întîmplare 6 cărți de pe raft. Să se afle probabilitatea că 3 dintre ele vor fi cărți de matematică.

12. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu 128. Să se afle termenul dezvoltării, care-l conține pe a^3.

SOLUȚII

1. $a=2^{\log_8 4}+\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{-2}=2^{\log_{2^3}\left(2^2\right)}+\left(\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{25}{9}=\dfrac{31}{9}$.

■ **RĂSPUNS:** $a=\dfrac{31}{9}$.

2. DVA al inecuației este mulțimea R. Inecuația din enunț se scrie $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2}<\dfrac{27}{64}\Leftrightarrow$ $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2}<\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$. Deoarece $0<\dfrac{3}{4}<1$, obținem $6x+10-x^2>3\Leftrightarrow -x^2+6x+7>0$ $\Leftrightarrow\ x^2-6x-7<0$. Ultima inecuație are mulțimea soluțiilor $S=(-1;\,7)$.

■ **RĂSPUNS:** $S=(-1;\,7)$.

3. Avem $x-2xi+y+2yi=1+i$, sau $(x+y)+(-2x+2y)i=1+i$. Folosind definiția egalității a două numere complexe, obținem sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y=1\\-2x+2y=1\end{cases}$ $\Leftrightarrow\ \begin{cases}2x+2y=2\\-2x+2y=1\end{cases}$. Adunînd membru cu membru cele două ecuații ale ultimului sistem, obținem $4y=3$, de unde $y=\dfrac{3}{4}$, apoi $x=\dfrac{1}{4}$.

■ **RĂSPUNS:** $x=\dfrac{1}{4}$, $y=\dfrac{3}{4}$.

4. DVA al ecuației constă din mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care sunt satisfăcute simultan condițiile $\sin x>0$ și $\cos x>0$. Ecuația se scrie $3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\log_3\cos x}+\sqrt{6}=9^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{\log_9\sin x}\ \Leftrightarrow\ \sqrt{3}\cos x+\sqrt{6}=3\sin x$. Împărțind ambele părți ale ecuației la $\sqrt{3}$, obținem $\cos x+\sqrt{2}=\sqrt{3}\sin x\ \Leftrightarrow\ \sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}\ \Leftrightarrow$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \Leftrightarrow\ \sin x\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos x\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \Leftrightarrow\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ultima ecuație are două serii de soluții: $x_1=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$ și $x_2=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$,

$k \in Z$. Se observă că condițiile $\sin x > 0$ și $\cos x > 0$ sunt verificate numai de soluțiile din prima serie. Așadar, $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in Z$.

■ RĂSPUNS: $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in Z$.

5. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ m & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ și $\det A$ determinantul matricei A. Matricea A este inversabilă pentru orice număr real x, dacă și numai dacă $\det A \neq 0$ pentru orice $x \in R$. Avem $\det A = \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ m & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 2x(x-1) + x + 3m - 3(x-1) - mx^2 - 2 =$ $(2-m)x^2 - 4x + 3m + 1$. $\det A \neq 0 \Rightarrow (2-m)x^2 - 4x + 3m + 1 \neq 0$. Rezultă că ecuația $(2-m)x^2 - 4x + 3m + 1 = 0$ nu trebuie să aibă soluții reale, adică $\Delta < 0$. $\Delta = 16 - 4(2-m)(3m+1) = 12m^2 - 20m + 8$. Avem $12m^2 - 20m + 8 < 0 \Leftrightarrow$ $3m^2 - 5m + 2 < 0$ cu mulțimea soluțiilor $m \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

■ RĂSPUNS: $m \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

6. Triunghiul AOB este isoscel, deoarece $OA = OB$ ca raze, și deoarece are un unghi de 60°, rezultă că este echilateral, deci $AO = 6cm$, deci raza cercului este $R = 6cm$. Atunci aria discului va fi $A_d = \pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi\, cm^2$.

■ RĂSPUNS: $A_d = 36\pi\, cm^2$.

7. Fie un con circular drept cu vîrful V și baza un cerc cu centrul O și diametrul $[AB]$. $[AO]$ este o rază a cercului din baza conului, $[VA]$ este o generatoare a conului, iar $[VO]$ este înîlțimea conului și $m(\angle VAO) = 30^\circ$. Fie $VO = x$, atunci $VA = 2x$, iar $AO = x\sqrt{3}$. Volumul conului este $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(x\sqrt{3}\right)^2 \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(3x^2\right) \cdot x = \pi x^3$. Obținem $\pi x^3 = 8\pi$ $\Rightarrow$ $x^3 = 8$, de unde $x = 2$. Așadar, $h = 2cm$, $G = 4cm$, $R = 2\sqrt{3}\, cm$. Avem $A_{lat} = \pi RG = \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}\,\pi\, cm^2$.

■ RĂSPUNS: $A_{lat} = 8\sqrt{3}\,\pi\, cm^2$.

8. Fie triunghiul ABC, în care $AC = 3cm$, $BC = 4cm$, și AM, BN sunt mediane, $M \in (BC)$, $N \in (AC)$. Avem $AM \perp BN$ și fie $AM \cap BN = \{G\}$, G fiind centrul de greutate al triunghiului ABC. Mai avem $AN = NC = \frac{3}{2}cm$, $BM = MC = 2cm$. Fie $AM = x$, atunci $AG = \frac{2}{3}x$, $GM = \frac{1}{3}x$ și $BN = y$, atunci $BG = \frac{2}{3}y$, $GN = \frac{1}{3}y$. Din triunghiul dreptunghic AGN, conform teoremei lui Pitagora avem

1

Scanned with AltaScanner

$AG^2 + GN^2 = AN^2$, sau $\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = \frac{9}{4}$, iar din triunghiul dreptunghic BGM, conform teoremei lui Pitagora avem $GM^2 + BG^2 = BM^2$, sau $\frac{x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 4$.

Obținem sistemul de ecuații $\begin{cases} \frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = \frac{9}{4} \\ \frac{x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 + 4y^2 = 81 \\ x^2 + 4y^2 = 36 \end{cases}$. Scăzînd cele două ecuații ale sistemului parte cu parte, obținem $15x^2 = 45$, de unde $x = \sqrt{3}$, apoi $y = \frac{\sqrt{33}}{2}$. Atunci $AG = \frac{2\sqrt{3}}{3} cm$, $GN = \frac{\sqrt{33}}{6} cm$. Aria triunghiului AGN este $A_{AGN} = \frac{1}{2} \cdot AG \cdot GN = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{33}}{6} = \frac{\sqrt{11}}{6} cm^2$.

Atunci $A_{ABC} = 6 \cdot A_{AGN} = 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \sqrt{11}\, cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{ABC} = \sqrt{11}\, cm^2$.

9. Avem $a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)-1} = \frac{2n+2+1}{3n+3-1} = \frac{2n+3}{3n+2}$. Calculăm diferența $a_{n+1} - a_n$.

Avem $a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{(2n+3)(3n-1)-(2n+1)(3n+2)}{(3n+2)(3n-1)} = \frac{6n^2 - 2n + 9n - 3 - 6n^2 - 4n - 3n - 2}{(3n+2)(3n-1)} = \frac{-5}{(3n+2)(3n-1)} < 0$. Așadar, $a_{n+1} - a_n < 0$ $\Rightarrow a_{n+1} < a_n$, deci, șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.

■ **RĂSPUNS:** Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.

10. *a)* $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$. Atunci $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x-2}$.

Avem nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Aplicînd regula lui *l'Hospital* avem $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^3 - 3x - 2)'}{(x-2)'} = \lim_{x \to 2} (3x^2 - 3) = 9$.

b) $f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$. Aflăm punctele critice ale funcției, rezolvînd ecuația $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$, de unde $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Tabloul de variație al funcției:

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + 0 − − − − − − − 0 + + + + + + +
$f(x)$	↗ max ↘ min ↗

c) $A=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\int_{-1}^{0}(-f(x))dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=2\cdot\left|\int_{0}^{1}f(x)dx\right|=2\cdot\left|\int_{0}^{1}(x^3-3x)dx\right|=$

$2\cdot\left|\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right|_0^1=2\cdot\left|\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right|=2\cdot\left|\frac{1-6}{4}\right|=\frac{5}{2}$ (deoarece funcţia f este simetrică faţă de origine).

■ **RĂSPUNS:** *a)* $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=9$; *b)* $x=-1$ este punct de maxim local, $x=1$ este punct de minim local; *c)* $A=\frac{5}{2}(u.p)$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n=C_{12}^{6}=\frac{12!}{6!\cdot 6!}=\frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{6!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=924$.

Numărul cazurilor favorabile este $m=C_4^3\cdot C_8^3=224$. Atunci probabilitatea va fi $P=\frac{m}{n}=\frac{224}{324}=\frac{8}{33}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\frac{8}{33}$.

12. Deoarece suma coeficienţilor binomiali de rang impar este egală cu 128, rezultă că $2^{n-1}=128 \Leftrightarrow 2^{n-1}=2^7$, de unde $n=8$. Atunci avem dezvoltarea $\left(a^{\frac{5}{4}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^8$. Folosind formula termenului general al dezvoltării, obţinem $T_{k+1}=C_8^k\cdot\left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{8-k}\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^k=C_8^k\cdot a^{\frac{40-5k}{4}}\cdot a^{-\frac{k}{2}}=C_8^k\cdot a^{\frac{40-5k}{4}-\frac{k}{2}}$. Deoarece termenul trebuie să-l conţină pe a^3, obţinem $\frac{40-5k}{4}-\frac{k}{2}=3$, de unde $k=4$. Atunci avem termenul $T_5=C_8^4\cdot a^3=70a^3$.

■ **RĂSPUNS:** $T_5=70a^3$.

Scanned with AltaScanner

TESTUL 3

I. ALGEBRĂ

1. Calculați $a = \log_3 54 - \log_3 2 + \log_3 81$.
2. Determinați suma soluțiilor reale ale ecuației $\begin{vmatrix} x^2 & 9x \\ 4 & x \end{vmatrix} = 0$.
3. Se știe că $3 \cdot \overline{z} + 2z = 10 - 3i$. Determinați $z \cdot \overline{z}$, unde $\overline{z}$ reprezintă conjugatul numărului complex z.
4. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției $f : D \to R$, $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x + 4\right) + 2}$.
5. Să se afle soluțiile ecuației $3 + 2\sin^2 x - 5\cos 4x = \frac{8}{1 + tg^2 x}$, care aparțin intervalului $[\pi; 2\pi]$.

II. GEOMETRIE

6. Punctele A, B, C se află pe cercul $C(O; R)$, astfel încît $m(\angle ABC) = 90^\circ$ și $AC = 10\,cm$. Să se afle lungimea cercului.
7. Fie ABC un triunghi oarecare cu înălțimea $AD = 3\sqrt{3}\,cm$, $D \in (BC)$, mediana $AM = 6\,cm$, $M \in (BD)$ și $m(\angle B) = 30^\circ$. Să se afle perimetrul triunghiului ABC.
8. Baza unui paralelipiped drept este un paralelogram cu lungimile laturilor de $1\,cm$ și $4\,cm$ și unghiul ascuțit de 60°. Diagonala mai mare a paralelipipedului are lungimea de $5\,cm$. Să se afle volumul paralelipipedului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați numerele întregi x pentru care numerele $x+6$, $x-2$, $x-6$, în această ordine, sunt în progresie geometrică.
10. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

    a) Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

    b) Aflați punctele de extrem local ale funcției f.

    c) Calculați $\int_{-1}^{1} x \cdot f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o cutie se află 8 creioane de culoare roșie și 4 creioane de culoare albastră. Se extrag la întîmplare 5 creioane. Să se afle probabilitatea că printre creioanele extrase vor fi 3 de culoare roșie și 2 de culoare albastră.

12. Să se afle cîți termeni raționali are dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}\right)^{17}$.

SOLUŢII

1. $a=\log_3 54-\log_3 2+\log_3 81=\log_3 \frac{54}{2}+\log_3 81=\log_3 27+\log_3 81=3+4=7$.

■ **RĂSPUNS:** $a=7$.

2. Avem $x^2\cdot x-4\cdot 9x=0 \Leftrightarrow x^3-36x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-36\right)=0 \Leftrightarrow x(x-6)(x+6)=0$, de unde $x_1=0$, $x_2=-6$, $x_3=6$. Atunci suma soluțiilor ecuației din enunț este $S=x_1+x_2+x_3=\ 0+(-6)+6=0$.

■ **RĂSPUNS:** $S=0$.

3. Fie $z=a+bi$, $a,b\in R$, atunci $\overline{z}=a-bi$. Obținem $3(a-bi)+2(a+bi)=10-3i$.
Efectuînd transformări, obținem $3a-3bi+2a+2bi=10-3i \Leftrightarrow 5a-bi=10-3i$.
Folosind definiția egalității a două numere complexe, obținem $\begin{cases}5a=10\\ -bi=-3i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}$.
Atunci $z=2+3i$ și $\overline{z}=2-3i$. Obținem $z\cdot\overline{z}=(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=13$.

■ **RĂSPUNS:** $z\cdot\overline{z}=13$.

4. Domeniul maxim de definiție al funcției f se determină din condiția $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x+4\right)+2\geq 0$. Deoarece $x^2-2x+4=x^2-2x+1+3=\ (x-1)^2+3>0$ pentru orice $x\in R$, rezultă că DVA al ultimei inecuații este mulțimea R.
Inecuația se scrie $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x+4\right)\geq -2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x+4\right)\geq \log_{\frac{1}{2}} 4$.
Deoarece $0<\frac{1}{2}<1$, obținem $x^2-2x+4\leq 4 \Leftrightarrow x^2-2x\leq 0$. Folosind metoda intervalelor, obținem mulțimea soluțiilor ultimei inecuații: $x\in[0;\ 2]$.

■ **RĂSPUNS:** $D=[0;\ 2]$.

5. DVA al ecuației este mulțimea $R \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z\right\}$. Folosind formula $1+tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, ecuația se scrie $3+2\sin^2 x-5\cos 4x=8\cos^2 x$. Aplicînd formulele $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ și $\cos 4x=2\cos^2 2x-1$, ultima ecuație devine: $3+2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-5\left(2\cos^2 2x-1\right)=8\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$ $\Leftrightarrow$
$3+1-\cos 2x-10\cos^2 2x+5-4-4\cos 2x=0 \Leftrightarrow -10\cos^2 2x-5\cos 2x+5=0$
$\Leftrightarrow$ $2\cos^2 2x+\cos 2x-1=0$. Notăm $\cos 2x=t$ și ultima ecuație se scrie $2t^2+t-1=0$, care are soluțiile $t_1=-1$, $t_2=\frac{1}{2}$. Obținem ecuațiile $\cos 2x=-1$ și $\cos 2x=\frac{1}{2}$. Ecuația $\cos 2x=-1$ are mulțimea soluțiilor $2x=\pi+2\pi k$, $k \in Z$ sau $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$. Pe intervalul $[\pi; 2\pi]$ se află soluția $x=\frac{3\pi}{2}$, dar $\frac{3\pi}{2} \notin DVA$, deci ecuația nu are soluții pe intervalul $[\pi; 2\pi]$. Ecuația $\cos 2x=\frac{1}{2}$ are mulțimea soluțiilor $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$ sau $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$. Pe intervalul $[\pi; 2\pi]$ se află soluțiile $x_1=\frac{7\pi}{6}$ și $x_2=\frac{11\pi}{6}$.

■ **RĂSPUNS:** $x \in \left\{\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$.

6. Triunghiul ABC este înscris în cercul $C(O; R)$, și deoarece este dreptunghic, rezultă că ipotenuza $[AC]$ este diametru al cercului. $AC=10cm \Rightarrow R=5cm$. Lungimea cercului este $L=2\pi R=2\pi\cdot 5=10\pi\, cm$.

■ **RĂSPUNS:** $L_{cerc}=10\pi\, cm$.

7. Din triunghiul dreptunghic ADB, care are $m(\angle B)=30^\circ$, rezultă că $AB=2AD=\ 2\cdot 3\sqrt{3}=\ 6\sqrt{3}\, cm$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ADB avem $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{\left(6\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{108-27}=\sqrt{81}=9cm$. Din triunghiul dreptunghic ADM, conform teoremei lui Pitagora avem $DM=\sqrt{AM^2-AD^2}=\sqrt{6^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\ \sqrt{36-27}=\ \sqrt{9}=3cm$. Atunci $BM=BD-DM=9-3=6cm$ și $BC=2BM=2\cdot 6=12cm$. $CD=MC-MD=$ $=6-3=3cm$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ADC avem $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6cm$. Perimetrul triunghiului ABC este $P=AB+BC+AC=6\sqrt{3}+12+6=18+6\sqrt{3}=6\left(3+\sqrt{3}\right)cm$.

■ **RĂSPUNS:** $P_{ABC}=6\left(3+\sqrt{3}\right)cm$.

8. Fie paralelipipedul drept $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu baza paralelogramul $ABCD$ în care $AB=1cm$, $AD=4cm$ și $m(\angle A)=60^\circ$. Conform teoremei cosinusurilor

în triunghiul ABD avem: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ \Rightarrow$ $BD^2 = 1+16-2\cdot 1\cdot 4\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow BD^2 = 13$, de unde $BD=\sqrt{13}\,cm$. În paralelogramul $ABCD$ avem $AC^2+BD^2 = 2\left(AB^2+AD^2\right) \Rightarrow AC^2+\left(\sqrt{13}\right)^2 = 2(1+16) \Rightarrow$ $AC^2+13=34 \Rightarrow AC^2=21$, de unde $AC=\sqrt{21}\,cm$. Din triunghiul dreptunghic A_1AC, conform teoremei lui Pitagora, obținem $A_1A=\sqrt{A_1C^2-AC^2}=\sqrt{5^2-\left(\sqrt{21}\right)^2}=2cm$.

Aria bazei paralelipipedului este $A_{baz} = AB\cdot AD\cdot\sin 60^\circ = 1\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,cm^2$.
Volumul paralelipipedului este $V = A_{baz}\cdot A_1A = 2\sqrt{3}\cdot 2 = 4\sqrt{3}\,cm^3$.

■ **RĂSPUNS:** $V = 4\sqrt{3}\,cm^3$.

9. Folosind proprietatea caracteristică a progresiei geometrice obținem $(x-2)^2=(x+6)(x-6) \Leftrightarrow x^2-4x+4=x^2-36 \Leftrightarrow -4x=-40$, de unde $x=10$.

■ **RĂSPUNS:** $x=10$.

10. *a)* $f(0)=\ln 1=0$. Așadar, avem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x^2+1}=0$.

b) $f'(x)=\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'=\frac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)'=\frac{2x}{x^2+1}$. Aflăm punctele critice ale funcției, rezolvînd ecuația $f'(x)=0$. Avem $\frac{2x}{x^2+1}=0$, de unde $x=0$. Studiind semnul derivatei funcției f, obținem că $x=0$ este punct de minim local.

c) $\int_{-1}^{1} x\cdot f(x)dx=\int_{-1}^{1} x\cdot\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2-\int_{-1}^{1}\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=$ $-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)\Big|_{-1}^{1}=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\right)=0$. (S-a folosit metoda inegrării prin părți).

■ **RĂSPUNS:** *a)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$; *b)* $x=0$ este punct de minim local; *c)* $\int_{-1}^{1} x\cdot f(x)=0$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n=C_{12}^5=792$. Numărul cazurilor favorabile este $m=C_8^3\cdot C_4^2=336$. Atunci probabilitatea este $P=\frac{m}{n}=\frac{336}{792}=\frac{14}{33}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\frac{14}{33}$.

12. Avem $T_{k+1}=C_{17}^k\cdot\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{17-k}\cdot\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^k = C_{17}^k\cdot 5^{\frac{17-k}{3}}\cdot 3^{\frac{k}{2}}$. Pentru ca termenul dezvoltării să fie număr rațional, trebuie ca exponenții $\frac{17-k}{3}$ și $\frac{k}{2}$ să fie numere întregi. Obținem $k\in\{2;\,8;\,14\}$. Așadar, dezvoltarea are 3 termeni raționali.

■ **RĂSPUNS:** 3 termeni raționali.

TESTUL 4

I. ALGEBRĂ

1. Aflați valoarea expresiei $a = \log_3\left(5-\sqrt{7}\right)+\log_3\left(5+\sqrt{7}\right)-\log_3 2$.

2. Demonstrați că numărul $z = \dfrac{25}{4+3i}+\dfrac{25}{4-3i}$ este întreg.

3. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\sqrt{x^2-16}\cdot(x+9)>0$.

4. Să se rezolve în R ecuația $2\cos^2 x+\sin^2 x = \dfrac{3}{2}\sin 2x$.

5. Să se afle valorile lui $x \in R$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix} -x & 3x & 0 \\ 2 & x & 5 \\ 2 & 2x & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă.

II. GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC cu $AB = 12\,cm$, C_1 este milocul laturii $[AB]$, $CC_1 \perp AB$ și $m(\angle ACC_1) = 30^\circ$. Dacă M este milocul laturii $[BC]$, să se afle C_1M.

7. În prisma triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ se cunoaște raza cercului circumscris bazei $R = 4\sqrt{3}\,cm$ și aria laterală de $180\,cm^2$. Să se afle volumul prismei.

8. Un cerc înscris într-un triunghi dreptunghic avînd catetele de $6\,cm$ și $8\,cm$ este tangent la ipotenuza triunghiului în punctul M. Calculați distanța de la punctul M la vîrful unghiului drept la triunghiului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Calculați limita șirului $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n-1)^2-(n+1)^2}{2n+1}$.

10. Se consideră funcția $f: R\setminus\{1\} \to R$, $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.
    a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
    b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
    c) Determinați primitiva F a funcției f, care verifică condiția $F(2)=5$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o cutie se află 6 creioane de culoare roșie și 4 creioane de culoare verde. Se extrag la întâmplare 3 creioane. Să se afle probabilitatea ca dintre cele trei creioane scoase 2 vor fi de culoare roșie și unul de culoare verde.

12. Să se determine $a>0$, știind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 1848.

SOLUȚII

1. $a=\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)+\log_3\left(5+\sqrt{7}\right)-\log_3 2=\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)\left(5+\sqrt{7}\right)-\log_3 2=$

$\log_3(25-7)-\log_3 2=\ \log_3 18-\log_3 2=\ \log_3\dfrac{18}{2}=\log_3 9=2$.

■ **RĂSPUNS:** $a=2$.

2. $z=\dfrac{25}{4+3i}+\dfrac{25}{4-3i}=\dfrac{25(4-3i)+25(4+3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\dfrac{100-75i+100+75i}{16-9i^2}=\dfrac{200}{16+9}=\dfrac{200}{25}=8\in Z$.

■ **RĂSPUNS:** $z=8\in Z$.

3. DVA al inecuației se determină din condiția $x^2-16>0$, sau $x\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$. Pentru orice $x\in DVA$, $\sqrt{x^2-16}>0\ \Rightarrow\ x+9>0$, deci $x>-9$. Ținînd cont de DVA, obținem $x\in(-9;-4)\cup(4;+\infty)$.

■ **RĂSPUNS:** $S=(-9;-4)\cup(4;+\infty)$.

4. Folosind formula $\sin 2x=2\sin x\cos x$, ecuația se scrie:

$2\cos^2 x+\sin^2 x=\dfrac{3}{2}\cdot 2\sin x\cos x \quad\Leftrightarrow\quad 2\cos^2 x+\sin^2 x=3\sin x\cos x \quad\Leftrightarrow$

$\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$. Avem o ecuație trigonometrică omogenă de gradul doi. Împărțim ambele părți ale ecuației la $\cos^2 x$, deoarece în cazul dat $\cos x\neq 0$. Obținem ecuația $tg^2x-3tgx+2=0$. Notăm $tgx=t$ și obținem ecuația de gradul al doilea $t^2-3t+2=0$ cu soluțiile $t_1=1$, $t_2=2$. Obținem ecuațiile $tgx=1$ cu mulțimea soluțiilor $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$ și $tgx=2$ cu mulțimea soluțiilor $x=arctg2+\pi n$, $n\in Z$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ arctg2+\pi n, k, n\in Z\right\}$.

5. O matrice pătratică A este inversabilă dacă determinantul ei $\det A \neq 0$.

$\det A = \begin{vmatrix} -x & 3x & 0 \\ 2 & x & 5 \\ 2 & 2x & 1 \end{vmatrix} = -x^2 + 30x + 0 - 0 - 6x + 10x^2 = 9x^2 + 24x$. Aflăm valorile reale ale lui x pentru care $\det A = 0$. Obținem $9x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(3x+8) = 0$, de unde $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{8}{3}$. Atunci $\det A \neq 0$ pentru $x \in R \setminus \left\{-\frac{8}{3}; 0\right\}$.

■ **RĂSPUNS:** $x \in R \setminus \left\{-\frac{8}{3}; 0\right\}$.

6. C_1 este mijlocul laturii $[AB] \Rightarrow CC_1$ este mediană corespunzătoare laturii $[AB]$. Dacă $CC_1 \perp AB \Rightarrow CC_1$ este înălțime corespunzătoare laturii $[AB] \Rightarrow$ triunghiul ABC este isoscel cu baza $[AB]$. Atunci $[CC_1$ este bisectoare a unghiului ACB, și deoarece $m(\angle ACC_1) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle ACB) = 60^\circ \Rightarrow$ triunghiul ABC este echilateral cu latura de lungime $12cm$. $[C_1M]$ este linie milocie în triunghiul $ABC \Rightarrow C_1M = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6cm$.

■ **RĂSPUNS:** $C_1M = 6cm$.

7. Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ cu una dintre baze triunghiul echilateral ABC. Dacă latura triunghiului echilateral are lungimea a, atunci raza cercului circumscris triunghiului este $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 12$. Deci, latura triunghiului din baza prismei are lungimea $12cm$. Fie înălțimea prismei egală cu h. Atunci $A_{lat} = P_{baz} \cdot h = 3 \cdot 12 \cdot h = 36h$. Obținem $36h = 180$, de unde $h = 5cm$. Aria bazei prismei este $A_{baz} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}\,cm^2$. Volumul prismei este $V = A_{baz} \cdot h = 36\sqrt{3} \cdot 5 = 180\sqrt{3}\,cm^3$.

■ **RĂSPUNS:** $V = 180\sqrt{3}\,cm^3$.

8. Fie cercul $C(O; r)$ înscris în triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și catetele $AB = 8cm$, $AC = 6cm$. Ipotenuza BC are lungimea $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10cm$. Raza cercului înscris în triunghiul dreptunghic ABC are lungimea $r = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{8 + 6 - 10}{2} = 2cm$. Fie M punctul de tangență al cercului cu ipotenuza BC, iar P și Q punctele de tangență ale cercului cu catetele $[AC]$ și respectiv $[AB]$. Atunci patrulaterul $AQOP$ este pătrat cu lungimea laturii de $2cm$. Avem $CP = AC - AP = 6 - 2 = 4cm$. Conform proprietății tangentelor duse la cerc dintr-un punct exterior cercului avem $CM = CP = 4cm$. Din triunghiul dreptunghic ABC avem $\sin C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow$

$\sin C = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Deoarece unghiul C este ascuțit, obținem $\cos C = \sqrt{1-\sin^2 C} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. Segmentul $[AM]$ este distanța dintre punctul M și vîrful unghiului drept A al triunghiului ABC. Conform teoremei cosinusurilor în triunghiul ACM avem $AM^2 = AC^2 + CM^2 - 2\cdot AC\cdot CM\cdot\cos C \Rightarrow$
$AM^2 = 6^2 + 4^2 - 2\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{3}{5} \Rightarrow AM^2 = 36+16-\frac{144}{5} \Rightarrow AM^2 = 52-\frac{144}{5} \Rightarrow$
$AM^2 = \frac{116}{5} \Rightarrow AM = \frac{2\sqrt{145}}{5}cm$.

■ **RĂSPUNS:** $AM = \frac{2\sqrt{145}}{5}cm$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2-(n+1)^2}{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-2n+1-n^2-2n-1}{2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-4n}{2n+1} = -2$.

■ **RĂSPUNS:** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n-1)^2-(n-1)^2}{2n+1} = -2$.

10. *a*) Deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x-1} = +\infty$, rezultă că nu există asimptotă orizontală la $+\infty$. Studiem dacă funcția are asimptotă oblică la $+\infty$. Avem $m = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x} = 1$. Așadar, $m=1$.

Atunci $n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1} = 0$.
Deci $n=0$. Ecuația asimptotei spre $+\infty$ este $y=x$.

b) $f'(x) = \left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x^2-x+1)'(x-1)-(x-1)'(x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Aflăm punctele critice ale funcției, rezolvînd ecuația $f'(x)=0$. Obțnem $\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$, de unde $x_1=0$, $x_2=2$. Completînd tabloul de variație al funcției f obținem că $f(x)$ este crescătoare pe intervalele $(-\infty; 0)$ și $(2; +\infty)$, descrescătoare pe intervalele $(0; 1)$ și $(1; 2)$.

c) Avem $\frac{x^2-x+1}{x-1} = x+\frac{1}{x-1}$.

Atunci $F(x) = \int\frac{x^2-x+1}{x-1}dx = \int\left(x+\frac{1}{x-1}\right)dx = \int xdx + \int\frac{1}{x-1}dx = \frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$.

Din $F(2)=5 \Rightarrow \dfrac{2^2}{2}+\ln|2-1|+C=5 \Rightarrow 2+C=5$, de unde $C=3$. Așadar, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+3$.

■ RĂSPUNS: *a*) Asimptota oblică are ecuația $y=x$; *b*) $f(x)$ este crescătoare pe intervalele $(-\infty;\,0)$ și $(2;\,+\infty)$, este descrescătoare pe intervalele $(0;\,1)$ și $(1;\,2)$; *c*) $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+3$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n=C_{10}^3=120$. Numărul cazurilor favorabile este $m=C_6^2\cdot C_4^1=60$. Atunci probabilitatea este $P=\dfrac{m}{n}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$.

■ RĂSPUNS: $P=\dfrac{1}{2}$.

12. Deoarece $n=12$, rezultă că dezvoltarea are 13 termeni, deci termenul din miloc al dezvoltării va fi T_7.

Atunci $T_7=C_{12}^6\cdot\left(\sqrt[3]{a}\right)^6\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6=924\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^6\cdot\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^6=924\cdot a^2\cdot a^{-\frac{3}{2}}=924\cdot a^{\frac{1}{2}}=924\sqrt{a}$.

Obținem $924\sqrt{a}=1848 \Rightarrow \sqrt{a}=2$, de unde $a=4$.

■ RĂSPUNS: $a=4$.

TESTUL 5

I. ALGEBRĂ

1. Să se afle valoarea expresiei $a = \log_{\frac{1}{2}}\left[\log_3\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) - \log_3\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

2. Să se afle numerele reale a și b din relația $\frac{3-4i}{4+3i} = a+bi$.

3. Se consideră polinomul $P(X) = X^3 + X^2 + aX - 2$, unde $a \in R$. Știind că polinomul $P(X)$ se divide cu $X-2$, să se afle restul împărțirii lui $P(X)$ la binomul $Q(X) = X+3$.

4. Determinați toate valorile reale ale lui x pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 2+e^x & 1 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

5. Să se rezolve în R ecuația $8\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin x - 4 = 0$.

II. GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC în care $[AA_1]$ și $[BB_1]$ sunt mediane, $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$. Dacă $A_1B_1 = 4,5\,cm$, să se afle AB.

7. Aria suprafeței totale a unei prisme patrulatere regulate este egală cu $360\,cm^2$. Se știe că lungimea laturii bazei prismei este de două ori mai mică decît lungimea muchiei laterale a prismei. Să se afle volumul prismei.

8. Două laturi ale unui triunghi au lungimile $13\,cm$ și $14\,cm$, iar aria triunghiului este egală cu $84\,cm^2$. Să se afle lungimea laturii a treia a triunghiului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se determine primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi b_1, 6, b_3, 24, ...

10. Se consideră funcția $f: R \to R$, $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

$a)$ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$b)$ Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe R.

$c)$ Să se calculeze $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se formează aleator un număr natural de șapte cifre distincte două câte două. Determinați probabilitatea ca primele patru cifre ale numărului să fie numere naturale prime.

12. Să se determine termenul dezvoltării $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ care nu-l conține pe x.

SOLUȚII

1. $a=\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_3\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)-\log_3\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]=\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\frac{\sqrt{3}}{2}-\log_3\frac{1}{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)=$
$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\sqrt{3}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 3^{\frac{1}{2}}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\log_3 3\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1.$

■ **RĂSPUNS:** $a=1$.

2. Avem $\frac{3-4i}{4+3i}=\frac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{12-9i-16i+12i^2}{16-9i^2}=\frac{12-25i-12}{16+9}=-\frac{25i}{25}=-i$.
Obținem $a+bi=-i$, de unde $a=0$, $b=-1$.

■ **RĂSPUNS:** $a=0$, $b=-1$.

3. Deoarece polinomul $P(X)$ se divide cu $X-2$, rezultă că $P(2)=0$. Obținem $8+4+2a-2=0 \Leftrightarrow 2a=-10$, de unde $a=-5$. Așadar, avem polinomul $P(X)=X^3+X^2-5X-2$. Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)=X+3$ este $r=P(-3)$. Obținem $r=-27+9+15-2=-5$. Așadar, $r=-5$.

■ **RĂSPUNS:** $r=-5$.

4. Matricea A nu este inversabilă, dacă determinantul ei este egal cu zero, adică $\det A=0$. $\det A=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ 2+e^x & 1\end{vmatrix}=e^x-e^{-x}\left(2+e^x\right)=e^x-2e^{-x}-1$. Obținem $e^x-2e^{-x}-1=0$ $\Leftrightarrow$ $e^x-\frac{2}{e^x}-1=0$. Înmulțind ambele părți ale ecuației cu e^x obținem ecuația $e^{2x}-e^x-2=0$. Notăm $e^x=t$ și obținem ecuația de gradul al doilea $t^2-t-2=0$, care are soluțiile $t_1=-1$ și $t_2=2$. Obținem ecuațiile $e^x=-1$ și $e^x=2$. Ecuația $e^x=-1$ n-are soluții reale. Ecuația $e^x=2$ are souția $x=\ln 2$.

■ **RĂSPUNS:** $x=\ln 2$.

5. Fie ecuația $8\sin^2\frac{x}{2}-3\sin x-4=0$. Avem $8\sin^2\frac{x}{2}-3\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}-4\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)=0$ $\Leftrightarrow 8\sin^2\frac{x}{2}-6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow 4\sin^2\frac{x}{2}-6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}=0$ $\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0$. Deoarece în ultima ecuație $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, împărțim ambele părți ale ecuației la $\cos^2\frac{x}{2}$ și obținem ecuația $2tg^2\frac{x}{2}-3tg\frac{x}{2}-2=0$. Notăm $tgx=t$ și obținem ecuația $2t^2-3t-2=0$. Ultima ecuație are soluțiile $t_1=-\frac{1}{2}$ și $t_2=2$. Obținem ecuațiile $tg\frac{x}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=arctg\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k$, $k\in Z \Leftrightarrow \frac{x}{2}=-arctg\frac{1}{2}+\pi k$, $k\in Z \Leftrightarrow x=-2arctg\frac{1}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. Ecuația $tg\frac{x}{2}=2 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=arctg2+\pi n$, $n\in Z$. $\Leftrightarrow x=2arctg2+2\pi n$, $n\in Z$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\left\{-2arctg\frac{1}{2}+2\pi k; 2arctg2+2\pi n,\ n,k\in Z\right\}$.

6. Dacă $[AA_1]$ este mediană, rezultă că A_1 este milocul laturii $[BC]$, dacă $[BB_1]$ este mediană, rezultă că B_1 este milocul laturii $[AC]$. Atunci $[A_1B_1]$ este linie milocie în triunghiul ABC, rezultă că $AB=2\cdot A_1B_1=2\cdot 4,5=9cm$.

■ **RĂSPUNS:** $AB=9cm$.

7. Fie x lungimea laturii pătratului din baza prismei, atunci muchia laterală are lungimea $2x$. Aria totală a prismei este $A_{tot}=2A_{baz}+A_{lat}=2x^2+4\cdot x\cdot 2x=$ $2x^2+8x^2=10x^2$. Obținem $10x^2=360 \Rightarrow x^2=36$ și $x=6$. Așadar, lungimea laturii bazei prismei este egală cu $6cm$, iar lungimea muchiei laterale (înălțimii) este egală cu $12cm$. Aria bazei prismei este $A_{baz}=6^2=36cm^2$. Volumul prismei este $V=A_{baz}\cdot h=36\cdot 12=432cm^3$.

■ **RĂSPUNS:** $V=432cm^3$.

8. Fie triunghiul ABC cu $AB=13cm$, $BC=14cm$ și considerăm $m(\angle B)=\alpha$. Atunci aria triunghiului ABC este $A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14\cdot\sin\alpha=$ $=91\sin\alpha$. Obținem $91\sin\alpha=84$, de unde $\sin\alpha=\frac{84}{91} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{12}{13}$. Atunci $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\pm\frac{5}{13}$. Dacă $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, atunci conform teoremei cosinusurilor în triunghiul ABC avem $AC^2=AB^2+BC^2-$ $-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\alpha \Rightarrow AC^2=13^2+14^2-2\cdot 13\cdot 14\cdot\frac{5}{13} \Rightarrow AC^2=169+196-140$ $\Rightarrow AC^2=225$, de unde $AC=15cm$. Dacă $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, la fel conform teoremei cosinusurilor în triunghiul ABC, obținem $AC=\sqrt{505}\,cm$.

■ **RĂSPUNS:** $AC=15cm$ sau $AC=\sqrt{505}\,cm$.

9. Conform proprietății caracteristice a unei prigresii geometrice avem: $b_3=\sqrt{b_2\cdot b_4}=\sqrt{6\cdot 24}=\sqrt{144}=12$. Rația progresiei este $q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{12}{6}=2$. Atunci primul termen al progresiei este $b_1=\frac{b_2}{q}=\frac{6}{2}=3$.

■ **RĂSPUNS:** $b_1=3$.

10. *a*) Calculăm $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. Avem nedeterminare de forma $\infty-\infty$. Atunci

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

b) $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'-(x)'=\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=$ $\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Deoarece $\sqrt{x^2+1}>0$ pentru orice $x\in R$, iar $x-\sqrt{x^2+1}<0$ pentru orice $x\in R$ $\Rightarrow$ $\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0$, deci $f'(x)<0$ pentru orice $x\in R$, de unde rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe R.

c) $\int f(x)dx=\int\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx=\int\sqrt{x^2+1}dx-\int xdx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{x^2}{2}$. Atunci

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}=$$
$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

■ **RĂSPUNS:** *a*) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$; *b*) $f'(x)<0$ pentru orice $x\in R$, deci $f(x)$ este strict descrescătoare pe R; *c*) $I=\int_0^1 f(x)dx=\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n=P_7$. Deoarece printre cele 7 numere sunt 4 numere naturale prime, atunci numărul cazurilor favorabile este $P_4\cdot P_3$. Atunci probabilitatea va fi $P=\frac{P_4\cdot P_3}{P_7}=\frac{4!\cdot 3!}{7!}=\frac{4!\cdot 6}{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=\frac{1}{35}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\frac{1}{35}$.

12. $T_{k+1}=C_{10}^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{10-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{10}^k\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{10-k}\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k=C_{10}^k\cdot x^{\frac{10-k}{3}}\cdot x^{-\frac{k}{2}}=C_{10}^k\cdot x^{\frac{10-k}{3}-\frac{k}{2}}$.

Deoarece termenul nu trebuie să-l conțină pe x, rezultă că $\frac{10-k}{3}-\frac{k}{2}=0$, de unde $k=4$. Obținem $T_5=210$.

■ **RĂSPUNS:** $T_5=210$.

TESTUL 6

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt{\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}-\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^{-2}}$.

2. Să se arate că numărul $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)^2$ este întreg.

3. Să se rezolve în R inecuația $\left(\frac{4}{9}\right)^{2x-3}\leq\frac{27}{8}$.

4. Rezolvați în R ecuația $\sqrt{3x-d}=4-x$, unde $d=\begin{vmatrix}3 & 7^a\\ 7^{-a} & 1\end{vmatrix}$, $a\in R$.

5. Să se afle toate soluțiile ecuației $\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, care verifică inecuația $x^2-8x+12\leq 0$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC care are perimetrul $48\,cm$ și $AB=BC$. Dacă $BM\perp AC$ și $AM=9\,cm$, să se aria triunghiului ABC.

7. Aria laterală a unui con circular drept este egală cu $16\sqrt{10}\,\pi\,cm^2$. Lungimea înălțimii conului este de 3 ori mai mare decît lungimea razei bazei conului. Determinați volumul conului.

8. Se consideră rombul $ABCD$ cu $m(\angle ABC)=120^\circ$, $AC\cap BD=\{O\}$. Fie punctul M mijlocul laturii $[BC]$, $AM\cap BD=\{E\}$ și $OE=2\,cm$. Să se afle aria rombului $ABCD$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ suma dintre termenul al doilea și al patrulea este egală cu 10, iar diferența dintre termenul al șaselea și termenul al treilea este egală cu 12. Să se afle suma primilor optsprezece termeni ai progresiei.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

b) Aflați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.

c) Fie funcția $g:R\to R$, $g(x)=\frac{x}{f(x)}$. Aflați primitiva $G(x)$ a funcției g, graficul căreia intersectează asimptota oblică spre $+\infty$ în punctul cu abscisa $x=2$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o clasă sunt 15 fete și 10 băieți. Pentru a efectua o lucrare se formează o echipă de 5 elevi. Să se afle probabilitatea că echipa va fi formată din 3 fete și 2 băieți.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ diferența dintre coeficientul binomial al termenului al treilea și coeficientul binomial al termenului al doilea este egală cu 170. Să se afle termenul care-l conține pe a^3 din această dezvoltare.

SOLUŢII

1. $E=\sqrt{\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}-\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^{-2}}=\sqrt{\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^{2}}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{2}-\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}-\frac{7}{9}}=\sqrt{1}=1$.

■ **RĂSPUNS:** $E=1$.

2. $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)^2=1+2\sqrt{3}i+3i^2+1-2\sqrt{3}i+3i^2=1-3+1-3=-4\in Z$.

■ **RĂSPUNS:** $z=-4\in Z$.

3. $\left(\frac{4}{9}\right)^{2x-3}\le\frac{27}{8}\Leftrightarrow\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{2x-3}\le\left(\frac{3}{2}\right)^3\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-6}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\Leftrightarrow 4x-6\ge-3\Leftrightarrow$ $4x\ge3\Leftrightarrow x\ge\frac{3}{4}$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$.

4. $d=\begin{vmatrix}3 & 7^a\\ 7^{-a} & 1\end{vmatrix}=3-7^a\cdot7^{-a}=3-1=2$. Așadar, $d=2$. Atunci obținem ecuația $\sqrt{3x-2}=4-x$. DVA al ecuației se află din condițiile: $\begin{cases}3x-2\ge0\\4-x\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x\ge2\\-x\ge-4\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{2}{3}\\x\le4\end{cases}$. Așadar, DVA al ecuației este $DVA=\left[\frac{2}{3};4\right]$. Ridicînd ambele părți ale ecuației $\sqrt{3x-2}=4-x$ la pătrat, obținem $3x-2=16-8x+x^2\Leftrightarrow$ $x^2-11x+18=0$. Ultima ecuație are soluțiile $x_1=2$, $x_2=9$. Dar $x=9\notin DVA$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\{2\}$.

5. DVA al ecuației este mulțimea R. Obținem $\left(3^{-2}\right)^{\sin^2 x} = 3^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^{-2\sin^2 x} = 3^{-\frac{1}{2}}$, de unde $-2\sin^2 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}$. Obținem totalitatea $\left[\begin{array}{l}\sin x = -\frac{1}{2}\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z\\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z\end{array}\right.$. Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $x^2 - 8x + 12 \le 0$ este $S = [2;\ 6]$. Selectînd soluțiile ecuațiilor din ultima totalitate care aparțin intervalului $[2;\ 6]$ obținem $x \in \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$.

■ **RĂSPUNS:** $x \in \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$.

6. Dacă $AB = BC$, rezultă că triunghiul ABC este isoscel cu baza $[AC]$. Deoarece $BM \perp AC$, rezultă că BM este înălțime corespunzătoare bazei $[AC]$, atunci BM este și mediană, și deoarece $AM = 9\,cm$, rezultă că $AC = 18\,cm$. Atunci $AB = BC = 15\,cm$. Din triunghiul dreptunghic ABM, conform teoremei lui Pitagora, obținem $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12\,cm$.

Atunci aria triunghiului ABC este $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 = 108\,cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{ABC} = 108\,cm^2$.

7. Fie un con circular drept cu vîrful V și baza cercul cu centrul O și diametrul $[AB]$. Fie R raza bazei conului, atunci înălțimea conului $H = VO = 3R$. Din triunghiul dreptunghic VOA, conform teoremei lui Pitagora, aflăm generatoarea $G = VA$. Obținem $VA = \sqrt{AO^2 + VO^2} = \sqrt{R^2 + (3R)^2} = \sqrt{R^2 + 9R^2} = \sqrt{10R^2} = R\sqrt{10}$. Deoarece aria laterală a conului este egală cu $16\sqrt{10}\,\pi\,cm^2$, obținem $\pi RG = 16\sqrt{10}\,\pi$, de unde $RG = 16\sqrt{10} \Rightarrow R \cdot R\sqrt{10} = 16\sqrt{10} \Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4\,cm$. Atunci $H = VO = 3 \cdot 4 = 12\,cm$. Volumul conului va fi $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 12 = 64\,\pi\,cm^3$.

■ **RĂSPUNS:** $V_{con} = 64\,\pi\,cm^3$.

8. În triunghiul isoscel ABC cu $m(\angle ABC) = 120^\circ$, O este mijlocul laturii $[AC]$, M este mijlocul laturii $[BC]$, deci $[BO]$ și $[AM]$ sunt mediane, rezultă că punctul E este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci $BE = 2 \cdot OE = 2 \cdot 2 = 4\,cm$. Obținem $OB = OE + BE = 2 + 4 = 6\,cm$, atunci $BD = 2 \cdot OB = 2 \cdot 6 = 12\,cm$. În triunghiul BAD avem $m(\angle BAD) = 60^\circ$, și deoarece este isoscel, rezultă că este echilateral cu latura de $12\,cm$. Aria triunghiului ABD este $A_{ABD}=\frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{144\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}$. Aria rombului $ABCD$ este $A_{ABCD}=2\cdot 36\sqrt{3}=72\sqrt{3}\,cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{ABCD}=72\sqrt{3}\,cm^2$.

9. Avem $\begin{cases}a_2+a_4=10\\ a_6-a_3=12\end{cases}$ sau $\begin{cases}a_1+r+a_1+3r=10\\ a_1+5r-a_1-2r=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a_1+4r=10\\ 3r=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1+2r=5\\ r=4\end{cases}$, de unde $a_1=-3,\ r=4$. Atunci $S_{18}=\frac{2a_1+r(18-1)}{2}\cdot 18=\frac{2\cdot(-3)+4\cdot 17}{2}\cdot 18=558$.

■ **RĂSPUNS:** $S_{18}=558$.

10. *a*) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$, rezultă că graficul funcției f nu are asimptote orizontale. Stabilim dacă există asimptote oblice. Avem $m_1=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1$. Așadar, $m_1=-1$, atunci $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-m_1x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$. Așadar, dreapta de ecuație $y=-x$ (bisectoarea cadranelor II și IV) este asimptotă oblică spre $-\infty$. Analog se obține că dreapta $y=x$ (bisectoarea cadranelor I și III) este asimptotă oblică spre $+\infty$; *b*) Avem $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x^2+1\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Aflăm punctele critice ale funcției, rezolvînd ecuația $f'(x)=0$. Ecuația $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0$ are soluția unică $x=0$. Completînd tabloul de variație al funcției obținem că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty;\ 0)$ și este crescătoare pe intervalul $(0;\ +\infty)$. Punctul $x=0$ este punct de mini local și $f_{\min}=f(0)=1$; *c*) $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$G(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\left[\begin{array}{l}x^2+1=t\\ 2xdx=dt\\ xdx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}+C=\sqrt{x^2+1}+C.$$

Deoarece graficul primitivei $G(x)$ intersectează asimptota oblică $y=x$ în

punctul cu abscisa $x=2$, obținem $G(2)=2 \Rightarrow \sqrt{5}+C=2$, de unde $C=2-\sqrt{5}$.
Așadar, $G(x)=\sqrt{x^2+1}+2-\sqrt{5}$.

■ **RĂSPUNS:** *a*) $y=-x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$, $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$; *b*) $f(x)$ este descrescătoare pe $(-\infty;\,0)$ și este crescătoare pe $(0;\,+\infty)$, $x=0$ este punct de minim local, $f_{\min}=f(0)=1$; c) $G(x)=\sqrt{x^2+1}+2-\sqrt{5}$.

11. $n=C_{25}^5$, $m=C_{15}^3\cdot C_{10}^2$, atunci $p=\dfrac{m}{n}=\dfrac{C_{15}^3\cdot C_{10}^2}{C_{25}^5}=\dfrac{195}{506}$.

■ **RĂSPUNS:** $p=\dfrac{195}{506}$.

12. Avem $C_n^2-C_n^1=170 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!\cdot(n-2)!}-n=170 \Leftrightarrow \dfrac{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}{2(n-2)!}-n=170$
$\Leftrightarrow \dfrac{n^2-n}{2}-n-170=0 \Leftrightarrow n^2-n-2n-340=0 \Leftrightarrow n^2-3n-340=0$. Ultima ecuație are soluțiile $n_1=-17\notin N$ și $n_2=20$. Obținem dezvoltarea $\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{20}$.

Avem $T_{k+1}=C_{20}^k\left(\sqrt{a}\right)^{20-k}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^k=C_{20}^k\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{20-k}\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^k=C_{20}^k\cdot a^{\frac{20-k}{2}}\cdot a^{-\frac{k}{2}}=C_{20}^k\cdot a^{\frac{20-k}{2}-\frac{k}{2}}$.

Deoarece trebuie să aflăm termenul care-l conține pe a^3, obținem $\dfrac{20-k}{2}-\dfrac{k}{2}=3$, de unde $k=7$. Așadar, avem $T_8=C_{20}^7a^3$.

■ **RĂSPUNS:** $T_8=C_{20}^7a^3$.

TESTUL 7

I. ALGEBRĂ

1. Aflați 25% din numărul $a=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 \frac{3}{4}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$.

2. Fie numărul complex $z=(2-i)^2-3(1-i)$. Să se afle $z\cdot\bar{z}$.

3. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}\log_2(x-3) & \sqrt{3}-i\\ \sqrt{3}+i & 2\end{pmatrix}$. Să se rezolve în mulțimea R inecuația $\det A\le 2$, unde $\det A$ reprezintă determinantul matricei A.

4. Se consideră polinomul $P(X)=X^3-3X^2+aX+b$, unde $a,b\in R$. Știind că $X=-2$ este rădăcină a polinomului $P(X)$, iar restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X-3$ este egal cu -10, să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X-2$.

5. Să se rezolve în R ecuația $9^{\sqrt{x^2-2x}-x}-7\cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1}=2$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră cercul $C(O;R)$, în care punctele A, B, C se află pe cerc, astfel încît $m(\angle ACB)=30^\circ$ și $AB=6\,cm$. Să se afle perimetrul triunghiului AOB.

7. Perimetrul rombului $ABCD$ este egal cu $36\sqrt{2}\,cm$, iar diagonala $AC=12\sqrt{3}\,cm$. Să se afle lungimea diagonalei $[BD]$ și distanța de la centrul rombului la latura AB.

8. Să se afle volumul unei piramide patrulatere regulate care are muchia laterală de lungime $12\,cm$, iar secțiunea diagonală a piramidei este un triunghi dreptunghic.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Arătați că șirul $(x_n)_{n\ge1}$ cu termenul general $x_n=\frac{n+1}{2n+1}$ este descrescător.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2+ax}{bx-2}$, $a,b\in R$, $b\ne0$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției.

a) Determinați $a,b\in R$, astfel încît funcția f să aibă puncte de extrem de abscise $x=-2$ și $x=6$.

b) Care este poziția tangentei la graficul funcției f în punctul $A(-2;2)$?

c) Pentru $a=6$, $b=1$ aflați aria suprafeței plane limitată de graficul funcției f, axa O_X și dreptele de ecuații $x=-6$ și $x=0$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Folosind cifrele 1; 2; 3; 4; 5 se formează toate numerele naturale distincte de trei cifre cu cifre distincte. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare un număr din cele formate, el să se dividă cu 4.

12. Să se afle termenul al cincilea al dezvoltării $\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{3a}}\right)^n$, unde $a>0$, știind că raportul coeficienților binomiali ai termenilor al patrulea și al treilea este egal cu $\dfrac{10}{3}$.

SOLUȚII

1. $a=\sqrt{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_5\frac{4}{3}}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}}=\sqrt{\left(5^{-1}\right)^{\log_5\frac{3}{4}}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}}=\sqrt{5^{\log_5}\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{9}}=\sqrt{\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{9}}=\dfrac{4}{3}$.

Așadar, $a=\dfrac{4}{3}$. Atunci 25% din numărul a este $\dfrac{25}{100}\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{3}$.

■ **RĂSPUNS:** 25% din numărul a este $\dfrac{1}{3}$.

2. $z=(2-i)^2-3(1-i)=4-4i+i^2-3+3i=4-4i-1-3+3i=-i$. Așadar, $z=-i$, atunci $\overline{z}=i$. Obținem $z\cdot\overline{z}=-i\cdot i=-i^2=1$.

■ **RĂSPUNS:** $z\cdot\overline{z}=1$.

3. $\det A=\begin{vmatrix}\log_2(x-3) & \sqrt{3}-i\\ \sqrt{3}+i & 2\end{vmatrix}=2\log_2(x-3)-\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)=2\log_2(x-3)-\left(3-i^2\right)=$ $2\log_2(x-3)-(3+1)=2\log_2(x-3)-4$. Obținem inecuația $2\log_2(x-3)-4\leq 2$ $\Leftrightarrow$ $2\log_2(x-3)\leq 6$. DVA al inecuației este mulțimea $(3;+\infty)$. Inecuația se mai scrie $\log_2(x-3)\leq 3$ $\Leftrightarrow$ $\log_2(x-3)\leq\log_2 8$ $\Leftrightarrow$ $x-3\leq 8$ $\Leftrightarrow$ $x\leq 11$. Ținînd cont de DVA, obținem mulțimea soluțiilor inecuației: $S=(3;11]$.

■ **RĂSPUNS:** $S=(3;11]$.

4. Fie polinomul $P(X)=X^3-3X^2+aX+b$. Dacă $x=-2$ este rădăcină a polinomului $P(X)$, rezultă că $P(-2)=0$, adică $-8-12-2a+b=0$, sau $-2a+b=20$. Dacă prin împărțirea polinomului $P(X)$ la binomul $X-3$ se obține restul -10, atunci $P(3)=-10$, sau $27-27+3a+b=-10$, de unde $3a+b=-10$. Obținem sistemul $\begin{cases}-2a+b=20\\ 3a+b=-10\end{cases}$. Rezolvînd sistemul obținem

$a=-6$, $b=8$. Atunci obținem polinomul $P(X)=X^3-3X^2-6X+8$. Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X-2$ este egal cu $P(2)$, deci $P(2)=8-12-12+8=-8$.

■ **RĂSPUNS:** $r=-8$.

5. DVA al ecuației se determină din condiția $x^2-2x\geq 0$, de unde $x\in(-\infty;\ 0]\cup[2;\ +\infty)$. Așadar, $DVA=(-\infty;\ 0]\cup[2;\ +\infty)$. Ecuația se scrie $3^{2\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)}-\frac{7}{3}\cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x}=2$. Notăm $3^{\sqrt{x^2-2x}-x}=y$, $y>0$. Obținem ecuația $3y^2-7y-6=0$, care are soluțiile $y_1=-\frac{2}{3}$ și $y_2=3$. Soluția $y=-\frac{2}{3}$ nu satisface condiția $y>0$, deci rămîne $y=3$. Atunci obținem ecuația $3^{\sqrt{x^2-2x}-x}=3$, de unde $\sqrt{x^2-2x}-x=1$, sau $\sqrt{x^2-2x}=x+1$. Ridicînd ambele părți ale ultimei ecuații la pătrat obținem $x^2-2x=x^2+2x+1 \Leftrightarrow -4x=1$, de unde $x=-\frac{1}{4}$. Observăm că $-\frac{1}{4}\in DVA$, deci $S=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

6. Dacă punctele A, B, C se află pe cercul $C(O;R)$ și $m(\angle ACB)=30^\circ \Rightarrow m\left(\overset{\frown}{AB}\right)=60^\circ$, atunci $m(\angle AOB)=60^\circ$, deci triunghiul AOB este echilateral cu latura de $6cm$. Perimetrul triunghiului AOB este egal cu $18cm$.

■ **RĂSPUNS:** $P_{AOB}=18cm$.

7. Fie rombul $ABCD$ cu perimetrul $P=36\sqrt{2}\,cm$, atunci lungimea laturii rombului este $AB=9\sqrt{2}\,cm$. Considerăm $AC\cap BD=\{O\}$. Atunci $AC\perp BD$ și $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{3}=6\sqrt{3}\,cm$. Din triunghiul dreptunghic AOB, conform teoremei lui Pitgora, avem $BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{\left(9\sqrt{2}\right)^2-\left(6\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{162-108}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}\,cm$. Atunci $BD=2\cdot BO=2\cdot 3\sqrt{6}=6\sqrt{6}\,cm$. Fie $OM\perp AB$, deci $[OM]$ este distanța de la punctul O la latura AB, atunci $OM=\frac{AO\cdot BO}{AB}=\frac{6\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{6}}{9\sqrt{2}}=6cm$.

■ **RĂSPUNS:** $BD=6\sqrt{6}\,cm$, $d=6cm$.

8. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vîrful V și baza pătratul $ABCD$ în care $AC\cap BD=\{O\}$, atunci $[VO]$ este înălțimea piramidei. Triunghiul VAC este o secțiune diagonală a piramidei și un triunghi dreptunghic isoscel cu catetele $VA=VC=12cm$. Atunci ipotenuza lui este $AC=12\sqrt{2}\,cm$.

$VO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{2}=6\sqrt{2}\,cm$. Aria pătratului $ABCD$ din baza piramidei est

egală cu $A_b=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{12\sqrt{2}\cdot 12\sqrt{2}}{2}=144\,cm^2$. Atunci volumul piramidei est

$V=\frac{1}{3}\cdot A_b\cdot VO=\frac{1}{3}\cdot 144\cdot 6\sqrt{2}=288\sqrt{2}\,cm^3$.

■ **RĂSPUNS:** $V=288\sqrt{2}\,cm^3$.

9. Fie şirul $x_n=\frac{n+1}{2n+1}$. Atunci $x_{n+1}=\frac{n+1+1}{2(n+1)+1}=\frac{n+2}{2n+3}$. Aflăm semnul diferenţe $x_{n+1}-x_n$. Avem $x_{n+1}-x_n=\frac{n+2}{2n+3}-\frac{n+1}{2n+1}=\frac{(n+2)(2n+1)-(n+1)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}=$ $\frac{(2n^2+5n+2)-(2n^2+5n+3)}{(2n+3)(2n+1)}=\frac{-1}{(2n+3)(2n+1)}<0$. Aşadar, $x_{n+1}-x_n<0 \Rightarrow$ $x_{n+1}<x_n$, deci şirul x_n este descrescător.

■ **RĂSPUNS:** Şirul x_n este descrescător.

10. $D=R\setminus\left\{\frac{2}{b}\right\}$. *a*) Deoarece punctele de abscise $x=-2$ şi $x=6$ sunt puncte d extrem local, rezultă că $f'(-2)=f'(6)=0$. Avem $f'(x)=\left(\frac{x^2+ax}{bx-2}\right)'=$ $\frac{(x^2+ax)'\cdot(bx-2)-(bx-2)'\cdot(x^2+ax)}{(bx-2)^2}=\frac{(2x+a)(bx-2)-b(x^2+ax)}{(bx-2)^2}=$ $\frac{2bx^2-4x+abx-2a-bx^2-abx}{(bx-2)^2}=\frac{bx^2-4x-2a}{(bx-2)^2}$. Aşadar, $f'(x)=\frac{bx^2-4x-2a}{(bx-2)^2}$.

Obţinem $\begin{cases}4b+8-2a=0\\36b-24-2a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b=4\\-a+18b=12\end{cases}$, de unde $a=6$, $b=1$. Atunc funcţia se scrie $f(x)=\frac{x^2+6x}{x-2}$; *b*) Deoarece $A(-2;\,2)$ este punct de extrem local, f este derivabilă în $x=-2$, atunci conform teoremei lui Fermat, rezult că panta tangentei în A este 0, deci tangenta în $A(-2;\,2)$ este paralelă l axa O_X (perpendiculară pe axa O_Y); *c*) Rezolvând inecuaţia $f(x)\geq 0$, adic $\frac{x^2+6x}{x-2}\geq 0$, obţinem $x\in[-6;\,0]\cup(2;\,+\infty)$. Deoarece $(\forall)x\in[-6;\,0]$ ave $f(x)\geq 0$, rezultă că $A=\int_{-6}^{0}f(x)dx=\int_{-6}^{0}\frac{x^2+6x}{x-2}dx=\int_{-6}^{0}\left(x+8+\frac{16}{x-2}\right)dx=$ $\left[\frac{x^2}{2}+8x+16\ln|x-2|\right]_{-6}^{0}=(30-32\ln 2)(u.p)$.

■ **RĂSPUNS:** *a*) $a=6$, $b=1$; *b*) Tangenta în punctul $A(-2;\,2)$ de pe graficul funcției f este paralelă la axa O_X; *c*) $A=(30-32\ln 2)(u.p)$.

11. Numărul cazurilor posibile este $A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{2!\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2!}=60$. Numerele naturale de trei cifre distincte formate cu cifrele date și divizibile cu 4 sunt: $312;412;512;124;324;524;132;\ \ 432;532;152;352;452$, adică $n=12$. Atunci $p=\frac{m}{n}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$.

■ **RĂSPUNS:** $p=\frac{1}{5}$.

12. Fie dezvoltarea $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^n$. Conform enunțului avem $\frac{C_n^3}{C_n^2}=\frac{10}{3}$, sau

$$\frac{\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}}{\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow \frac{n!}{6\cdot(n-3)!}\cdot\frac{2(n-2)(n-3)!}{n!}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow \frac{(n-2)}{3}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow$$

$n=12$. Atunci $T_5=C_{12}^4\left(\sqrt{a}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^4=495\cdot a^4\cdot\frac{1}{(3a)^2}=\ 495\cdot a^4\cdot\frac{1}{9a^2}=55a^2$.

■ **RĂSPUNS:** $T_5=55a^2$.

TESTUL 8

I. ALGEBRĂ

1. Arătați că numărul $a = \dfrac{3\log_7 4 + \log_7 0,5}{1 - \log_7 14}$ este întreg.

2. Determinați perechea $(a;\, b)$ de numere reale, astfel încît $\dfrac{2i - i^2}{3i + i^2} = a + bi$.

3. Fie matricea X, astfel încît $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} + 4X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați dacă maricea X este inversabilă.

4. Să se rezolve în R inecuația $\left(2^x - 3\right) \cdot \log_2(x-1) \cdot \log_3^2 x \le 0$

5. Să se rezolve în R ecuația $\cos^2 x - 2\cos x = 4\sin x - \sin 2x$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră pătratul $ABCD$ cu latura de lungime $8cm$, în care M este mijlocul laturii $[AB]$, N este mijlocul laturii $[BC]$, iar P este mijlocul diagonalei $[AC]$. Să se afle aria triunghiului MNP.

7. Aria laterală a unui con circular drept este egală cu $240\pi\, cm^2$, iar aria totală a conului este egală cu $384\pi\, cm^2$. Să se afle volumul conului.

8. Într-un triunghi dreptunghic distanța de la mijlocul ipotenuzei la o catetă este $5cm$, iar distanța de la mijlocul acestei catete la ipotenuză este de $4cm$. Să se afle aria triunghiului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se afle primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $\begin{cases} 2a_1 + a_7 = 36 \\ a_2 \cdot a_3 = 60 \end{cases}$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = x\ln x$.

a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = e$ de pe graficul funcției.

b) Determinați intervalele de monotonie și coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f.

c) Calculați integrala $I = \int_1^2 f(x)\,dx$.

11. O urnă conține x bile negre $(x \geq 2)$, 5 bile albe și 2 bile de culoare violetă. Toate bilele sunt identice ca mărime. La întîmplare, din urnă se extrag 2 bile. Fie $P(x)$ probabilitatea ca ambele bile extrase vor fi de aceeași culoare. Demonstrați că $P(x)=\dfrac{x^2-x+22}{(x+7)(x+6)}$.

12. Să se afle cea mai mică valoare naturală a lui n din dezvoltarea $(x+a)^n$ pentru care raportul coeficienților binomiali ai doi termeni vecini ai dezvoltării este egal cu $5:8$.

SOLUȚII

1. $a=\dfrac{3\log_7 4+\log_7 0,5}{1-\log_7 14}=\dfrac{\log_7 4^3+\log_7 0,5}{\log_7 7-\log_7 14}=\dfrac{\log_7 64+\log_7 0,5}{\log_7 \frac{7}{14}}=\dfrac{\log_7(64\cdot 0,5)}{\log_7 \frac{1}{2}}=\dfrac{\log_7 32}{\log_7 2^{-1}}=$

$\dfrac{\log_7 2^5}{-\log_7 2}=\dfrac{5\cdot\log_7 2}{-\log_7 2}=-5\in Z$.

■ **RĂSPUNS:** $a=-5\in Z$.

2. $\dfrac{2i-i^2}{3i+i^2}=a+bi \;\Rightarrow\; \dfrac{2i+1}{3i-1}=a+bi \;\Rightarrow\; 2i+1=(a+bi)(3i-1) \;\Rightarrow\; 2i+1=$
$=3ai-a+3bi^2-bi \Leftrightarrow 1+2i=3ai-a-3b-bi \Leftrightarrow 1+2i=(-a-3b)+(3a-b)i$,
de unde $\begin{cases}-a-3b=1\\3a-b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3a-9b=3\\3a-b=2\end{cases}$, de unde $-10b=5 \Rightarrow b=-\dfrac{1}{2}$, apoi $a=\dfrac{1}{2}$.

■ **RĂSPUNS:** $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$.

3. Fie $\begin{pmatrix}-3&4\\-8&5\end{pmatrix}+4X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Atunci $4X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&4\\-8&5\end{pmatrix}$, sau $4X=\begin{pmatrix}4&-4\\8&-4\end{pmatrix}$, de unde $X=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}$. Determinantul matricei X este $\det X=\begin{vmatrix}1&-1\\2&-1\end{vmatrix}=1\neq 0$, deci matricea X este inversabilă.

■ **RĂSPUNS:** Matricea X este inversabilă.

4. Fie inecuația $(2^x-3)\cdot\log_2(x-1)\cdot\log_3^2 x\leq 0$. DVA al inecuației este mulțimea $(1;+\infty)$. Deoarece $\log_3^2 x>0$ pentru orice $x\in DVA$, rezultă că

$$(2^x-3)\cdot\log_2(x-1)\le 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x-3\ge 0\\ \log_2(x-1)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}2^x-3\le 0\\ \log_2(x-1)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x\ge 3\\ \log_2(x-1)\le \log_2 1\end{cases}\\ \begin{cases}2^x\le 3\\ \log_2(x-1)\ge \log_2 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge \log_2 3\\ x-1\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}x\le \log_2 3\\ x-1\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge \log_2 3\\ x\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\le \log_2 3\\ x\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x\in[\log_2 3;\ 2]\\ S=\varnothing\end{array}\right. \Rightarrow\; x\in[\log_2 3;\ 2].$$

■ **RĂSPUNS:** $S=[\log_2 3;\ 2]$.

5. Fie ecuația $\cos^2 x-2\cos x=4\sin x-\sin 2x$. *DVA* al ecuației este mulțimea R. Ecuația se mai scrie $\cos x(\cos x-2)=4\sin x-2\sin x\cos x \Leftrightarrow$ $\cos x(\cos x-2)=2\sin x(2-\cos x) \Leftrightarrow \cos x(\cos x-2)-2\sin x(2-\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow\; \cos x(\cos x-2)+2\sin x(\cos x-2)=0 \;\Leftrightarrow\; (\cos x-2)(\cos x+2\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-2=0\\ \cos x+2\sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=2\\ 2tgx+1=0\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}S=\varnothing\\ 2tgx=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}S=\varnothing\\ x=-arctg\dfrac{1}{2}+\pi k\end{array}\right.$$

$k\in Z$.

■ **RĂSPUNS:** $x=-arctg\dfrac{1}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

6. $[MP]$ și $[NP]$ sunt linii mijlocii în triunghiul $ABC \Rightarrow MP\parallel BC$, $NP\parallel AB$, și deoarece $m(\angle ABC)=90^\circ$, rezultă că $MP\perp NP \Rightarrow \Delta MNP$ este dreptunghic isoscel cu catetele $MP=NP=4cm$. Atunci aria triunghiului MNP este $A_{MNP}=\dfrac{MP\cdot NP}{2}=\dfrac{4\cdot 4}{2}=8cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{MNP}=8cm^2$.

7. Se consideră conul circular drept cu vîrful V și baza cercul cu centrul O, în care $[AB]$ este diametru, atunci $[VO]$ este înălțimea conului. Dacă $A_{lat}=240\pi cm^2$ și $A_{tot}=384\pi cm^2$, rezultă că $A_{baz}=A_{tot}-A_{lat}=\ 384-240\pi=144\pi cm^2$. Fie R raza bazei conului, atunci $A_{baz}=\pi R^2 \Rightarrow \pi R^2=144\pi \Rightarrow R=12cm$. $A_{lat}=\pi RG \Rightarrow \pi\cdot 12\cdot G=240\pi \quad G=20cm$. În triunghiul dreptunghi VOA avem $AO=12\,cm$, $VA=20cm$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOA avem $VO=\sqrt{VA^2-AO^2}=\sqrt{20^2-12^2}=16cm$. Atunci

$$V_{con}=\frac{1}{3}\pi R^2 H=\frac{1}{3}\pi\cdot 12^2\cdot 16=768\pi cm^3.$$

■ **RĂSPUNS:** $V_{con}=768\pi cm^3$.

8. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ şi O mijlocul ipotenuzei $[BC]$. Fie $ON \perp AC$, $N \in (AC)$, rezultă că $[ON]$ este distanţa de la mijlocul ipotenuzei la cateta $[AC]$ $\Rightarrow$ $ON = 5cm$. Deoarece O este mijlocul lui $[BC]$ şi $ON \parallel AB$, rezultă că $[ON]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC $\Rightarrow$ $AB = 2 \cdot ON = 2 \cdot 5 = 10cm$. N este mijlocul catetei $[AC]$ şi fie $NE \perp BC$, $E \in (BC)$, deci $[NE]$ este distanţa de la mijlocul catetei $[AC]$ la ipotenuza $[BC]$, atunci $NE = 4cm$. Din triunghiul dreptunghic OEN, conform teoremei lui Pitagoa avem $OE = \sqrt{ON^2 - NE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3cm$. Din triunghiul dreptunghic ONC, conform teoremei înălţimii avem $NE^2 = EC \cdot OE \Rightarrow 4^2 = EC \cdot 3 \Rightarrow EC = \frac{16}{3}cm$. Atunci $OC = OE + EC = 3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3}cm \Rightarrow BC = 2 \cdot OC = 2 \cdot \frac{25}{3} = \frac{50}{3}cm$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC avem $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{50}{3}\right)^2 - 10^2} = \frac{40}{3}cm$. Aria triunghiului ABC va fi

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{40}{3} = \frac{200}{3}cm^2.$$

■ **RĂSPUNS:** $A_{ABC} = \frac{200}{3}cm^2$.

9. Avem $\begin{cases} 2a_1 + a_7 = 36 \\ a_2 \cdot a_3 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + a_1 + 6r = 36 \\ (a_1 + r)(a_1 + 2r) = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 + 6r = 36 \\ (a_1 + r)(a_1 + 2r) = 60 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(a_1 + 2r) = 36 \\ (a_1 + r)(a_1 + 2r) = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2r = 12 \\ (a_1 + r)(a_1 + 2r) = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2r = 12 \\ 12(a_1 + r) = 60 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a_1 + 2r = 12 \\ a_1 + r = 5 \end{cases}$. Rezolvînd ultimul sistem obţinem $a_1 = -2$, $r = 7$.

■ **RĂSPUNS:** $a_1 = -2$, $r = 7$.

10. $D = (0; +\infty)$. *a)* $f(x_0) = f(e) = e \cdot \ln e = e$. $f'(x) = (x \ln x)' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$. Atunci $f'(x_0) = f'(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2$. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul x_0 este $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. În cazul nostru avem $y = e + 2(x - e)$, sau $y = 2x - e$; *b)* Avem $f'(x) = \ln x + 1$. Aflăm punctele critice ale funcţiei f rezolvînd ecuaţia $f'(x) = 0$, adică $\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$ sau $x = \frac{1}{e}$. Tabloul de variaţie al funcţiei:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Aşadar, funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(0; \frac{1}{e}\right]$ şi este strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right)$. $x = \frac{1}{e}$ este punct de minim local şi $f_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$. Deci punctul $A\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)$ este punct de minim local; *c*) Calculăm primitiva $F(x)$ a funcţiei f aplicînd metoda integrării prin

părţi: $F(x) = \int f(x)dx = \int x \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \\ dv = xdx \\ du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}dx =$

$\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$. Atunci

$I = \int\limits_1^2 f(x)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\right)\Bigg|_1^2 = 2\ln 2 - 1 - \left(0 - \frac{1}{4}\right) = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

■ **RĂSPUNS:** *a*) $y = 2x - e$; *b*) funcţia f este strict descrescătoare pe $\left(0; \frac{1}{e}\right]$, este strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right)$, punctul $A\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)$ este punct de minim local; *c*) $I = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n = C_{x+7}^2 = \frac{(x+7)!}{2! \cdot (x+5)!} = \frac{(x+5)!(x+6)(x+7)}{2 \cdot (x+5)!} = \frac{(x+6)(x+7)}{2}$. Numărul cazurilor favorabile este $m = C_x^2 + C_5^2 + C_2^2 = \frac{(x-1)x}{2} + 10 + 1 = \frac{x^2 - x}{2} + 11 = \frac{x^2 - x + 22}{2}$. Atunci $P(x) = \frac{m}{n} = \frac{\frac{x^2 - x + 22}{2}}{\frac{(x+6)(x+7)}{2}} = \frac{x^2 - x + 22}{(x+6)(x+7)}$.

■ **RĂSPUNS:** $P(x) = \frac{x^2 - x + 22}{(x+7)(x+6)}$.

12. Conform enunțului avem $C_n^k : C_n^{k+1} = 5:8$ sau $\frac{k+1}{n-k} = \frac{5}{8}$. Obținem $5(n-k) = 8(k+1) \Leftrightarrow 5n - 5k = 8k + 8 \Leftrightarrow 5n = 13k + 8$, de unde $n = \frac{13k+8}{5}$, sau $n = 2k + 1 + \frac{3(k+1)}{5}$. Deoarece k este număr natural, atunci el va fi cel mai mic pentru cea mai mică valoare naturală a lui k, pentru care $k+1$ se divide cu 5, deci pentru $k = 4$. Atunci $n = 8 + 1 + 3 = 12$.

■ **RĂSPUNS:** $n = 12$.

TESTUL 9

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

2. Să se dtermine $z \in C$ știind că $\frac{\bar{z}+7i}{z} = 6$.

3. Să se rezolve în R ecuația $\begin{vmatrix} 1 & x-1 & -1 \\ x & x-2 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \end{vmatrix} = 2-3x$.

4. Să se rezolve în R inecuația $x^2 \cdot 6^x - 6^{x+2} \le 0$.

5. Să se afle valoarea expresiei $E = \cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ pentru $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\angle ABC) = 70^\circ$, $m(\angle ACB) = 50^\circ$. $[BM$ este bisectoarea unghiului ABC, $M \in (AC)$, $[AN$ este bisectoarea unghiului BAC, $N \in (BC)$. Dacă $BM \cap AN = \{O\}$, să se afle $m(\angle AOB)$.

7. Într-un triunghi dreptunghic bisectoarea unui unghi ascuțit împarte cateta opusă în două segmente cu lungimile de $4cm$ și $5cm$. Să se afle aria triunghiului.

8. Generatoarea unui trunchi de con circular drept are lungimea de $8cm$ și formează cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 60°. Diagonala secțiunii axiale împarte acest unghi în două unghiuri congruente. Să se afle aria totală a trunchiului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul $(a_n)_{n\ge1}$, astfel încît $a_1 = -2$, $a_{n+1} = a_n + 3n$. Să se afle valoarea expresiei $E = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

10. Se consideră funcția $f: D \to R$, $f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x-1}$, unde $a, b \in R$.

a) Să se determine parametrii reali a și b, astfel încît graficul funcției f să admită asimptota $y = x+2$.

b) Determinați intervalele de monotonie și coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f pentru a și b determinați la punctul a).
c) Pentru a și b determinați la punctul a), calculați aria figurii mărginite de graficul funcției f, asimptota oblică și de dreptele de ecuații $x=2$ și $x=3$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd o submulțime cu trei elemente a mulțimii A, aceasta să conțină numărul 1.

12. Să se determine $x \in R$, știind că al patrulea termen al dezvoltării $\left(x^{\frac{1}{2(1+\lg x)}}+x^{\frac{1}{12}}\right)^6$ este egal cu 200.

SOLUȚII

1. $E=\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}=\sqrt{10^2\cdot 10^{\frac{1}{2}\lg 16}}=\sqrt{10^2\cdot 10^{\lg(16)^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt{10^2\cdot 10^{\lg 4}}=\sqrt{100\cdot 4}=\sqrt{400}=20$.

■ **RĂSPUNS:** $E=20$.

2. Fie $\dfrac{\overline{z}+7i}{z}=6 \Rightarrow \overline{z}+7i=6z$. Fie $z=x+yi$, unde $x,y\in R$, $i^2=-1$. Obținem $x-yi+7i=6(x+yi) \Leftrightarrow x-(y-7)i=6x+6yi$. Folosind definiția egalității a două numere complexe, obținem $\begin{cases}x=6x\\-(y-7)=6y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\-y+7=6y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$.
Deci, avem numărul complex $z=i$.

■ **RĂSPUNS:** $z=i$.

3. $\begin{vmatrix}1 & x-1 & -1\\ x & x-2 & 0\\ 1 & x-2 & 1\end{vmatrix}=2-3x \Leftrightarrow x-2+0-x(x-2)+x-2-x(x-1)-0=2-3x$
$\Leftrightarrow x-2-x^2+2x+x-2-x^2+x=2-3x \Leftrightarrow -2x^2+5x-4-2+3x=0 \Leftrightarrow$
$-2x^2+8x-6=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$, de unde $x_1=1$, $x_2=3$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\{1; 3\}$.

4. *DVA* al inecuației este mulțimea R. Avem $x^2\cdot 6^x-6^{2+x}\le 0 \Leftrightarrow x^2\cdot 6^x-6^2\cdot 6^x\le 0$ $\Leftrightarrow 6^x(x^2-36)\le 0$. Deoarece $6^x>0$ pentru orice $x\in R$, rezultă că $x^2-36\le 0$ $\Rightarrow x\in[-6; 6]$.

■ **RĂSPUNS:** $S=[-6; 6]$.

5. Avem $E=\left(\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha\right)-\cos^2\alpha=\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-\cos^2\alpha=$ $1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$. Așadar $E=\sin^2\alpha$. Atunci $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin^2\frac{\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$.

■ **RĂSPUNS:** $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$.

6. Din triunghiul ABC avem $m(\angle BAC)=180^\circ-70^\circ-50^\circ=60^\circ$. Dacă $[BM$ este bisectoarea unghiului ABC $\Rightarrow$ $m(\angle ABO)=35^\circ$. Dacă $[AN$ este bisectoarea unghiului BAC $\Rightarrow$ $m(\angle BAO)=30^\circ$. Din triunghiul AOB avem $m(\angle AOB)=180^\circ-35^\circ-30^\circ=115^\circ$.

■ **RĂSPUNS:** $m(\angle AOB)=115^\circ$.

7. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ în care $[BM$ este bisectoarea unghiului ABC, $M\in(AC)$ și $AM=4cm$, $CM=5cm$ $\Rightarrow$ $AC=AM+MC=$ $4+5=9cm$. Conform teoremei bisectoarei în triunghiul ABC avem $\frac{AB}{AM}=\frac{BC}{MC}$ $\Rightarrow$ $\frac{AB}{4}=\frac{BC}{5}$ $\Rightarrow$ $AB=4k$, $BC=5k$, $k\in R_+^*$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC avem $BC^2=AB^2+AC^2$ $\Rightarrow$ $(5k)^2=(4k)^2+9^2$ $\Rightarrow$ $25k^2=16k^2+81$ $\Rightarrow$ $9k^2=81$ $\Rightarrow$ $k^2=9$ $\Rightarrow$ $k=3$. Atunci $AB=4k=4\cdot 3=12cm$. Aria triunghiului ABC este $A_{ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=$ $\frac{12\cdot 9}{2}=54cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{ABC}=54cm^2$.

8. Fie trunchiul de con circular drept AA_1B_1B, unde trapezul isoscel AA_1B_1B este o secțiune axială, $[AB]$ fiind un diametru al cercului din baza mare, $[A_1B_1]$ un diametru al cercului din baza mică și generatoarea $AA_1=BB_1=8cm$. $m(\angle A_1AB)=60^\circ$. Diagonala AB_1 este bisectoare a unghiului A_1AB $\Rightarrow$ $m(\angle A_1AB_1)=$ $m(\angle B_1AB)=30^\circ$. Atunci $m(\angle AB_1A_1)=m(\angle B_1AB)=30^\circ$ ca unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele A_1B_1 și AB și secanta AB_1 $\Rightarrow$ triunghiul AA_1B_1 este isoscel cu baza AB_1, deci $A_1B_1=AA_1=8cm$, atunci lungimea razei bazei mici este $r=4cm$. $m(\angle A_1B_1B)=120^\circ$, și deoarece $m(\angle B_1AB)=30^\circ$, rezultă că $m(\angle AB_1B)=90^\circ$, deci triunghiul AB_1B este dreptunghic cu $m(\angle B_1AB)=30^\circ$ $\Rightarrow$ $AB=2\cdot BB_1=2\cdot 8=16cm$, de unde lungimea razei bazei mari este $R=8cm$. Atunci aria bazei mici este $A_b=\pi r^2=16\pi\,cm^2$, aria bazei mari este $A_B=\pi R^2=64\pi\,cm^2$, iar aria laterală este $A_{lat}=\pi G(R+r)=\pi\cdot 8(8+4)=96\pi\,cm^2$. Aria totală a trunchiului este $A_{tot}=A_B+A_b+A_{lat}=64\pi+16\pi+96\pi=176\pi\,cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{tot}=176\pi\,cm^2$.

9. $a_2 = a_1 + 3\cdot 1 = -2+3 = 1$; $a_3 = a_2 + 3\cdot 2 = 1+6 = 7$. Atunci $E = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

■ **RĂSPUNS:** $E = 3\sqrt{6}$.

10. $D = R\setminus\{1\}$. *a*) Dreapta de ecuație $y = x+2$ este asimptotă oblică $\Rightarrow$ $m = 1$ și $n = 2$. Avem $m = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+2}{x^2-x} = a \quad\Rightarrow\quad a = 1$. $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+bx+2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(b+1)x+2}{x-1} = b+1 \quad\Rightarrow\quad b+1 = 2 \quad\Rightarrow\quad b = 1$. Așadar, $a = b = 1$, atunci funcția f se scrie $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$, $D = R\setminus\{1\}$;

b) $$f'(x) = \left(\frac{x^2+x+2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2+x+2)'\cdot(x-1) - (x-1)'\cdot(x^2+x+2)}{(x-1)^2} = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x+x-1-x^2-x-2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}.$$ Aflăm punctele critice ale funcției rezolvînd ecuația $f'(x) = 0$. Avem $\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0$ $\Leftrightarrow$ $x^2-2x-3 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 3$. Tabloul de variație al funcției:

	$-\infty$ $\quad$ -1	1 $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$
	$+\ +\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ 0\ +\ +\ +\ +\ +$
	$\nearrow$ max $\searrow$	$\searrow$ min $\nearrow$

Funcția $f(x)$ este crescătoare pe $(-\infty;\,-1)$ și $[3;\,+\infty)$, descrescătoare pe $[-1;\,1)$ și $(1;\,3]$. $x = -1$ este punct de maxim local, $f_{\max} = f(-1) = -1$, deci avem punctul $A(-1;\,-1)$. $x = 3$ este punct de minim local, $f_{\min} = f(3) = 7$, deci avem punctul $B(3;\,7)$; *c*) $A = \int\limits_2^3\left(f(x) - x - 2\right)dx = \int\limits_2^3\left(\dfrac{x^2+x+2}{x-1} - x - 2\right)dx = \int\limits_2^3\dfrac{4}{x-1}dx = 4\ln|x-1|\Big|_2^3 = 4\ln 2\,(u.p)$.

■ **RĂSPUNS:** *a*) $a = b = 1$; *b*) Funcția $f(x)$ este crescătoare pe $(-\infty;\,-1]$ și $[3;\,+\infty)$, descrescătoare pe $[-1;\,1)$ și $(1;\,3]$. Punctul $A(-1;\,-1)$ este punct de maxim local, punctul $B(3;\,7)$ este punct de minim local; *c*) $A = 4\ln 2\,(u.p)$.

11. $P=\dfrac{C_9^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\dfrac{3}{10}$.

12. Avem $T_4=C_6^3\left(x^{\frac{1}{2(1+\lg x)}}\right)^3\cdot\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^3=20\cdot x^{\frac{3}{2(1+\lg x)}}\cdot x^{\frac{1}{4}}=20\cdot x^{\frac{3}{2(1+\lg x)}+\frac{1}{4}}=20\cdot x^{\frac{7+\lg x}{4(1+\lg x)}}$

Conform enunțului obținem $20\cdot x^{\frac{7+\lg x}{4(1+\lg x)}}=200 \Leftrightarrow x^{\frac{7+\lg x}{4(1+\lg x)}}=10$. Logaritmînd în baza 10 obținem $\dfrac{7+\lg x}{4(1+\lg x)}\cdot\lg x=1$. *DVA* al ultimei ecuații este mulțimea $\left(0;\dfrac{1}{10}\right)\cup\left(\dfrac{1}{10};+\infty\right)$. Ecuația se mai scrie: $7\lg x+\lg^2 x=4+4\lg x \Leftrightarrow$ $\lg^2 x+3\lg x-4=0$, de unde $\lg x=-4$ sau $\lg x=1$, adică $x=10^{-4}$ sau $x=10$.

■ **RĂSPUNS:** $x\in\{10^{-4};10\}$.

TESTUL 10

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_9\left(\sin^2 x + \cos^2 x + \log_{\sqrt{5}} 5\right)$, unde $x \in R$.

2. Să se afle modulul numărului complex $z = (2+i)(3-2i) - (1-2i)(2-i)$.

3. Să se rezolve în R ecuația $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$.

4. Să se rezolve în R inecuația $\log_x \frac{1}{4} + \log_4 \frac{1}{x} \leq -2$.

5. Polinomul $P(X)$ se divide cu $X+1$, iar prin împărțirea la $X^2 - 3X$ dă restul $7X - 1$. Să se afle restul împărțirii lui $P(X)$ la polinomul $Q(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră rombul $ABCD$ care are perimetrul de $40\,cm$, $BD \cap AC = \{O\}$ și $BD + AC = 38\,cm$. Să se afle perimetrul triunghiului AOB.

7. Aria suprafeței totale a unei prisme patrulatere regulate este egală cu $360\,cm^2$. Se știe că lungimea laturii bazei prismei este de două ori mai mică decît lungimea muchiei laterale a prismei. Să se afle volumul prismei.

8. În trapezul isoscel $ABCD$ latura laterală $[AB]$ și baza mică $[BC]$ au lungimile de cîte $2\,cm$, iar $BD \perp AB$. Să se afle aria trapezului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi, în care $b_2 = 6$, $b_4 = 54$. Să se afle b_7.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^2 + mx + n}{x-1}$, unde m și n sunt parametri reali.
a) Să se determine m și n, astfel încît funcția f să admită un extrem egal cu 1 în punctul $x = 0$.
b) Pentru m și n determinați la punctul *a*), scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 3$.
c) Determinați abscisele punctelor de extrem local ale funcției f.
d) Să se calculeze aria figurii plane limitate de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = 5$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3; . . . ; 9 se formează toate numerele naturale distincte de cîte 6 cifre distincte. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare un număr din cele formate, acesta să aibă primele două cifre impare, iar celelalte cifre pare.

12. Să se determine $x \in C$, știind că suma temenilor al treilea și al cincilea din dezvoltarea binomului $\left(x+\sqrt{5}\right)^6$ este egală cu 450.

SOLUŢII

1. Avem $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ și $\log_{\sqrt{5}} 5=2$. Obținem $E=\log_9\left(1+2\right)=\log_9 3=\frac{1}{2}$.

■ RĂSPUNS: $E=\frac{1}{2}$.

2. $z=(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)=6-4i+3i-2i^2-\left(2-i-4i+2i^2\right)=$
$6-i-2i^2-2+5i-2i^2=\ 6-i+2-2+5i+2=8+4i$. Așadar, $z=8+4i$. Atunci
$|z|=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$.

■ RĂSPUNS: $|z|=4\sqrt{5}$.

3. Fie ecuația $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 4\sin x\cos x-1=0 \Leftrightarrow 2\sin 2x=1 \Leftrightarrow$
$\sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=(-1)^k \arcsin\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z \Leftrightarrow 2x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$
$\Leftrightarrow x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

■ RĂSPUNS: $S=\left\{(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z\right\}$.

4. Fie inecuația $\log_x\frac{1}{4}+\log_4\frac{1}{x}\le -2$. *DVA* al inecuației este mulțimea $(0;1)\cup(1;+\infty)$. Inecuația se mai scrie $\log_x 4^{-1}+\log_4 x^{-1}\le -2 \Leftrightarrow$
$-\log_x 4-\log_4 x\le -2 \Leftrightarrow \log_x 4+\log_4 x\ge 2$. Fie $\log_4 x=t$, atunci $\log_x 4=\frac{1}{t}$,
obținem inecuația $\frac{1}{t}+t-2\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1+t^2-2t}{t}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t}\ge 0$, de unde $t=1$
și $t>0$. Din $t=1 \Rightarrow \log_4 x=1$, de unde $x=4$. Din $t>0 \Rightarrow \log_4 x>0 \Rightarrow$

$\log_4 x > \log_4 1 \Rightarrow x > 1$, adică $x \in (1; +\infty)$. Soluția $x = 4$ aparține intervalului $(1; +\infty)$, deci $S = (1; +\infty)$.

■ **RĂSPUNS:** $S = (1; +\infty)$.

5. Deoarece $P(X)$ se divide cu $X+1$, rezultă că $P(-1)=0$. Din condiția că $P(X)$ prin împărțirea la X^2-3X dă restul $7X-1$, atunci conform teoremei împărțirii cu rest avem: $P(X)=(X^2-3X)\cdot C(X)+7X-1$ sau $P(X)=X(X-3)\cdot C(X)+7X-1$, de unde $P(0)=-1$ și $P(3)=20$. La împărțirea lui $P(X)$ la $Q(X)$, împărțitorul, adică polinomul $Q(X)$ este de gradul trei, deci restul este un polinom de grad cel mult doi. Fie $R(X)=aX^2+bX+c$. Atunci, conform teoremei împărțirii cu rest avem $P(X)=(X^3-2X^2-3X)\cdot C(X)+aX^2+bX+c$ sau $P(X)=X(X-3)(X+1)\cdot C(X)+aX^2+bX+c$. Obținem $P(0)=c$, $P(3)=9a+3b+c$, $P(-1)=a-b+c$. Folosind relațiile obținute mai sus, obținem sistemul $\begin{cases} c=-1 \\ a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=20 \end{cases}$, de unde obținem $a=2$, $b=1$, $c=-1$. Așadar, restul este $R(X)=2X^2+X-1$.

■ **RĂSPUNS:** $R(X)=2X^2+X-1$.

6. Dacă perimetrul rombului este egal cu $40\,cm$, rezultă că latura rombului are $10\,cm$, deci $AB=10\,cm$. Deoarece $BD+AC=38\,cm \Rightarrow BO+AO=19\,cm$. Atunci $P_{AOB}=AB+BO+AO=10+19=29\,cm$.

■ **RĂSPUNS:** $P_{AOB}=29\,cm$.

7. Fie x lungimea laturii pătratului din baza prismei, atunci muchia laterală are lungimea $2x$. Aria totală a prismei este $A_{tot}=2A_{baz}+A_{lat}= 2x^2+4\cdot x\cdot 2x = 2x^2+8x^2=10x^2$. Obținem $10x^2=360 \Rightarrow x^2=36$ și $x=6$. Așadar, lungimea laturii pătratului din baza prismei este egală cu $6\,cm$, iar lungimea muchiei laterale (înălțimii) prismei este egală cu $12\,cm$. Aria bazei prismei este $A_{baz}=6^2=36\,cm^2$. Volumul prismei este $V=A_{baz}\cdot h=36\cdot 12=432\,cm^3$.

■ **RĂSPUNS:** $V=432\,cm^3$.

8. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB=BC=CD=2\,cm$, în care $BD \perp AB$. Construim $BM \perp AD$ și $CN \perp AD$, $M, N \in (AD)$, deci $[BM]$ și $[CN]$ sunt înălțimi ale trapezului. Patrulaterul $MBCN$ este dreptunghi $\Rightarrow MN=BC=2\,cm$. Fie $AM=ND=x$, atunci $MD=x+2$. Din triunghiul dreptunghic ABM, conform teoremei lui Pitagora avem $BM^2=AB^2-AM^2=4-x^2$. Deci $BM^2=4-x^2$ **(1)**. Din triunghiul dreptunghic ABD, conform teoremei

înălțimii avem $BM^2 = AM \cdot MD = x(x+2) = x^2 + 2x$ **(2)**. Din **(1)** și **(2)** rezultă $x^2 + 2x = 4 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ cu soluțiile $x_1 = -2$ (nu convine) și $x_2 = 1$. Așadar, $BC = 2cm$, $AD = 4cm$ și înălțimea $BM = \sqrt{3}\,cm$.

Aria trapezului $A_{tr} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BM = \dfrac{2+4}{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{tr} = 3\sqrt{3}\,cm^2$.

9. Conform proprietății caracteristice a progresiei geometrice avem $b_3 = \sqrt{b_2 \cdot b_4} = \sqrt{6 \cdot 54} = \sqrt{324} = 18$. Atunci rația progresiei este $q = \dfrac{b_3}{b_2} = \dfrac{18}{6} = 3$. Din $b_2 = b_1 q \Rightarrow 6 = 3b_1$, de unde $b_1 = 2$. Așadar, $b_1 = 2$, $q = 3$. Atunci $b_7 = b_1 q^6 = 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1458$.

■ **RĂSPUNS:** $b_7 = 1458$.

10. $D = R \setminus \{1\}$. *a*) Funcția f admite un extrem egal cu 1 în punctul $x = 0$, dacă $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$. Din $f(0) = 1 \Rightarrow \dfrac{n}{-1} = 1 \Rightarrow n = -1$. Atunci funcția se scrie $f(x) = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$.

Avem $f'(x) = \left(\dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}\right)' = \dfrac{(x^2 + mx - 1)'(x-1) - (x-1)'(x^2 + mx - 1)}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+m)(x-1) - (x^2 + mx - 1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x + mx - m - x^2 - mx + 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - m + 1}{(x-1)^2}$.

Din $f'(0) = 0 \Rightarrow \dfrac{-m+1}{1} = 0$, de unde $m = 1$. Aadar, $m = 1$, $n = -1$, și funcția f se scrie $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$; *b*) Cu rezultatele de la punctul *a*) avem $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ și $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$. Ecuația tngentei la graficul funcției f în punctul x_0 este de forma $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, unde $x_0 = 3$. Avem $f(x_0) = f(3) = \dfrac{11}{2}$, $f'(x_0) = f'(3) = \dfrac{3}{4}$. Ecuația tangentei este $y = \dfrac{11}{2} + \dfrac{3}{4}(x - 3)$ sau $3x - 4y + 13 = 0$; *c*) Aflăm punctele critice ale funcției rezolvînd ecuația $f'(x) = 0$, adică $\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$, de unde $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Din tabelul de variație al funcției obținem că $x = 0$ este punct de maxim local, iar $x = 2$ este punct de minim local; *d*) Pentru $x \in [2;\ 5]$,

$f(x)>0$, deci aria căutată este $A=\int_2^5 \frac{x^2+x-1}{x-1}dx=\int_2^5\left(x+2+\frac{1}{x-1}\right)dx=$ $\left(\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x-1|\right)\Big|_2^5=\left(\frac{33}{2}+2\ln 2\right)(u.p)$.

■ **RĂSPUNS:** *a*) $m=1$, $n=-1$; *b*) $3x-4y+13=0$; *c*) $x=0$ este punct de maxim local, $x=2$ este punct de minim local; *d*) $A=\left(\frac{33}{2}+2\ln 2\right)(u.p)$.

11. Avem $n=A_9^6$, $m=A_5^2\cdot P_4$. Atunci probabilitatea va fi $p=\frac{m}{n}=\frac{A_5^2\cdot P_4}{A_9^6}=\frac{1}{126}$.

■ **RĂSPUNS:** $p=\frac{1}{126}$.

12. $T_3=C_6^2x^4\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2=15x^4\cdot 5=75x^4$. $T_5=C_6^4x^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^4=15x^2\cdot 25=375x^2$. Din $T_3+T_5=450 \Rightarrow 75x^4+375x^2=450 \Leftrightarrow x^4+5x^2-6=0$. Notăm $x^2=y$ și obținem ecuația $y^2+5y-6=0$ cu soluțiile $y_1=1$ și $y_2=-6$. Obținem ecuațiile $x^2=1$ cu soluțiile $x_1=-1$ și $x_2=1$, apoi $x^2=-6$ cu soluțiile $x_3=-\sqrt{6}i$ și $x_4=\sqrt{6}i$.

■ **RĂSPUNS:** $x\in\left\{-1;1;\sqrt{6}i;-\sqrt{6}i\right\}$.

TESTUL 11

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\left(25^{\frac{3}{2}}+(0,5)^{-2}\right):\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

2. Fie numerele complexe $z_1=2-3i$ și $z_2=4+i$. Determinați partea reală a numărului complex $z=z_1\cdot z_2+\overline{z_1\cdot z_2}$.

3. Să se rezolve în mulțimea R inecuația $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}\leq(4,5)^{x-2}$.

4. Fie polinomul $P(X)=2X^3+aX^2+bX-6$, unde $a,\ b\in R$. Știind că $X=-1$ și $X=2$ sunt rădăcini ale polinomului $P(X)$, aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)=X-3$.

5. Să se afle valoarile reale ale lui m pentru care are loc egalitatea $\cos\alpha=\frac{m^2-4m-4}{m^2+1}$ dacă $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$.

II. GEOMETRIE

6. Trapezul isoscel $ABCD$ cu $BC\parallel AD$ este circumscris unui cerc. Dacă $AB=7\,cm$, să se afle lungimea liniei mijlocii a trapezului.

7. Un triunghi dreptunghic are catetele de $6\,cm$ și $8\,cm$. Înălțimea din vîrful unghiului drept împarte triunghiul în două triunghiuri. Să se afle ariile triunghiurilor nou formate.

8. Aria laterală a unui con circular drept este de $60\pi\,cm^2$, iar aria secțiunii axiale a conului este de $48\,cm^2$. Să se afle aria totală și volumul conului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se determine numerele $a,\ b\in R$, știind că numerele $2,\ a,\ b$ in ordinea dată sunt în progresie geometrică, iar numerele $2,\ 17,\ a$ sunt în progresie aritmetică.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=1+\frac{1}{x^2+1}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

b) Aflați punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați $I=\int_0^1(x^2+1)\cdot f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Să se afle probabilitatea ca alegînd un număr natural k din mulțimea $\{0; 1; 2; 3; \ldots; 7\}$, numărul C_7^k să fie prim.

12. Se consideră dezvoltarea $\left(x + x^{\lg x - 3}\right)^5$. Să se afle $x \in R$ pentru care termenul al treilea al dezvoltării este egal cu 1000.

TESTUL 12

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\left(4^{\log_2 3}\right)^{\frac{3}{2}}-\log_4 64$.

2. Fie $D(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \log_3 x & 1 \end{vmatrix}$. Rezolvați în R inecuația $D(x)\geq 0$.

3. Să se afle numărul complex z din egalitatea $\dfrac{z}{3-i}=\dfrac{13+4i}{17-9i}$.

4. Se consideră polinomul $P(X)=3X^4+(m-1)X^3+2X^2-5$. Dacă rest împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)=X+1$ este egal cu 7, să se af restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $R(X)=X-2$.

5. Să se rezolve în R inecuația $\dfrac{\sqrt{3^{2x+1}-4\cdot 3^x+1}}{x^2-x-6}\leq 0$.

II. GEOMETRIE

6. Aria totală a unui cub este egală cu $96\,cm^2$. Să se afle volumul cubului.

7. Într-un triunghi dreptunghic măsura unui unghi ascuțit este egală cu 30°, iar ari discului mărginit de cercul circumscris triunghiului este egală cu $25\pi\,cm^2$. Să s afle aria triunghiului.

8. Generatoarea unui trunchi de con circular drept are lungimea de $8\,cm$ și formeaz cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 60°. Diagonala secțiunii axiale trunchiului împarte acest unghi în două unghiuri congruente. Să se afle aria total a trunchiului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se determine numărul real x, știind că numerele $x+1$, $1-x$ și 4, în aceast ordine, sunt în progresie aritmetică.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=x^3-12x$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

b) Aflați punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați $I=\displaystyle\int_1^3 \frac{f(x)}{x^2}dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Din cifrele $0, 1, 2, 3, 4, 5$ se formează toate numerele naturale de cîte șase cifre, astfel încît în fiecare număr să nu fie cifre identice. Să se afle probabilitatea ca alegînd un număr din cele formate, el va avea prima cifră 3.

12. Să se afle termenul care-l conține pe a^3 din dezvoltarea $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$.

TESTUL 13

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 2\log_9 4 + \log_{\frac{1}{9}} 48$.

2. Să se rezolve în R ecuația $5^{4\sqrt{x-3}-x} = 1$.

3. Se consideră numerele complexe $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ și $z_2 = \frac{4}{\sqrt{3}+i}$. Să s[e] arate că numărul $z_1 + z_2$ este real.

4. Fie determinantul $d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. Să se rezolve în R inecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4d$

5. Rezolvați în R ecuația $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$.

II. GEOMETRIE

6. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $BC = 12cm$. Punctul M este mijlocul laturii $[AB]$, punctul N este mijlocul laturii $[AC]$, iar E est[e] mijlocul segmentului $[MN]$. Să se afle AE.

7. Într-un cilindru circular drept diagonala secțiunii axiale are lungimea $20cm$ ș[i] formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60°. Să se afle aria totală [a] cilindrului.

8. Dintr-un punct al cercului $C(O; R)$ sunt construite două coarde cu lungimil[e] de $10cm$ și $12cm$. Să se afle lungimea razei cercului, știind că distanța de l[a] mijlocul coardei mai mici la coarda mai mare este de $4cm$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_8 = 10$ și rația $r = 3$. Să se afle a_{2022}.

10. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$.

a) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

b) Studiați monotonia funcției f.

c) Calculați $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Din 100 de mere, 10 sunt alterate. Care este probabilitatea ca scoțând 5 mere la întîmplare, să scoatem mere alterate.

12. Să se afle termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{x}\right)^{14}$.

TESTUL 14

I. ALGEBRĂ

1. Arătați că valoarea expresiei $E=\sqrt{\log_2\left(\sqrt{23}-\sqrt{7}\right)+\log_2\left(\sqrt{23}+\sqrt{7}\right)}$ este un număr natural.

2. Să se afle modulul numărului complex $z=\left(2+3i\right)^2-\left(2-3i\right)^2$.

3. Calculați valoarea expresiei $E=\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x}+\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\cos x}$, dacă $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

4. Să se rezolve în R ecuația $\log_3\left[5+4\log_3\left(x-1\right)\right]=2$.

5. Să se rezolve în R inecuația $3\cdot 2^{\sqrt{x-1}}+2^{3-\sqrt{x-1}}>25$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC=10cm$, în care $(AM$ este bisectoarea unghiului BAC. Dacă $BM=8cm$, aflați aria triunghiului ABC.

7. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ în care $AB=AC+6$ și $BC=30cm$. Să se afle lungimea segmentului $[CD]$, unde $[CD$ este bisectoarea unghiului ACB, $D\in(AB)$.

8. Un con circular drept are secțiunea axială un triunghi isoscel cu perimetrul de $18cm$. Să se afle aria laterală și volumul conului, știind că aria totală a conului este egală cu $36\pi cm^2$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați valorile reale ale numărului a, știind că numerele $5-a$, $a+7$ și $a+15$, în această ordine, sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=x^3+3x$.

a) Calculați $L=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

b) Determinați punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa O_X și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. S-au cunpărat 6 bilete la un spectacol, dintre care 4 bilete sunt cu locuri pe rîndul întîi. Să se afle probabilitatea ca luînd la întîmplare 3 bilete, 2 dintre ele vor avea locuri pe rîndul întîi.

12. Aflați toți termenii raționali ai dezvoltării $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. S-au cunpărat 6 bilete la un spectacol, dintre care 4 bilete sunt cu locuri pe rîndul întîi. Să se afle probabilitatea ca luînd la întîmplare 3 bilete, 2 dintre ele vor avea locuri pe rîndul întîi.

12. Aflați toți termenii raționali ai dezvoltării $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$.

TESTUL 15

I. ALGEBRĂ

1. Aflați valoarea expresiei $E = 3^{\log_{27} 8} - \sqrt[3]{0,027}$.

2. Să se rezolve în R inecuația $\begin{vmatrix} \sqrt{x-2} & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} < 1$.

3. Rezolvați în R ecuația $4^{-3x-6} = 2^{-x} \cdot 8$.

4. Calculați $|z_1 - z_2|$, dacă se știe că z_1 și z_2 sunt soluțiile ecuației $z^2 - (5-2i)z + 5(1,5-i) = 0$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geq 0$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră pătratul $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$. Fie M mijlocul segmentului $[OC]$ și N mijlocul segmentului $[OD]$. Dacă $MN = 5cm$, să se afle aria pătratului $ABCD$.

7. În paralelipipedul drept $ABCDA_1B_1C_1D_1$ baza este rombul $ABCD$ cu lungimea laturii de $8cm$, iar $m(\angle A) = 120°$. Determinați lungimea diagonalei $[AC_1]$ a paralelipipedului, dacă se știe că lungimea muchiei laterale a paralelipipedului este de $6cm$.

8. Într-un triunghi dreptunghic distanța de la mijlocul ipotenuzei la o catetă este de $5cm$, iar distanța de la mijlocul acestei catete la ipotenuză este de $4cm$. Să se afle aria triunghiului ABC.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq1}$ cu termenul general $a_n = n^2 + 2n - 45$. Stabiliți dacă numărul 35 este termen al șirului, și în caz afirmativ indicați rangul termenului.

10. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

a) Calculați $L = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

b) Determinați punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați $I = \int_1^3 \dfrac{f(x)}{x^2} dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Pe un raft se află 15 cărți, dintre care 10 sunt în limba română, iar restul cărțlor în limba engleză. Se iau la întîmplare 5 cărți de pe raft. Să se afle probabilitatea că printre ele vor fi 2 cărți în limba română și 3 cărți în limba engleză.

12. Să se afle probabilitatea ca alegînd un termen al dezvoltării $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{40}$, acesta să fie număr rațional.

TESTUL 16

I. ALGEBRĂ

1. Arătați că valoarea expresiei $E = 81^{\frac{3}{4}} + (0,25)^{-2}$ este număr natural.

2. Fie matricea X, astfel încît $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} + 4 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați dacă matricea X este inversabilă.

3. Să se afle $m \in R$, astfel încît numărul $z = 3i^7 + 2mi^2 + (2+m)i + 5 - i$ să fie real.

4. Să se rezolve în mulțimea R ecuația $2x^2 + \sqrt{2x^2 - x} = 2 + x$.

5. Rezolvați în R inecuația $\dfrac{\log_{x-1}^2 (5-x)}{x^2 - 3x} \leq 0$.

II. GEOMETRIE

6. Un pătrat cu aria de $36cm^2$ este înscris în cercul $C(O;\ R)$. Să se afle aria discului mărginit de cerc.

7. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $AB = 20cm$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, astfel încît $BD = 16cm$. Să se afle aria triunghiului ABC.

8. Înălțimea unei piramide triunghiulare regulate este de $2cm$, măsura unghiului diedru de baza piramidei este de 30°. Să se afle aria laterală a piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$. Determinați cîți termeni ai șirului sunt cel mult egali cu $\dfrac{3}{4}$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f paralelă cu dreapta $y = x$.

c) Calculați $I = \int_2^4 f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră mulțimea $A=\left\{\log_2 n \,\middle|\, n\in\{1;2;3;4;\ldots;10\}\right\}$. Calculați probabilitatea ca, alegînd un element oarecare din mulțimea A, acesta să fie număr rațional.

12. Termenul din mijloc al dezvoltării $\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ este egal cu 4480. Să se afle x, $x>0$.

TESTUL 17

I. ALGEBRĂ

1. Să se afle valoarea epresiei $E = \log_6 60 - \log_6 5 + \log_6 3$.

2. Să se afle modulul numărului complex $z = \dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$.

3. Rezolvați în R ecuația $\det A = \sqrt{4-x}$, unde $\det A$ reprezintă determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ 2 & 3x \end{pmatrix}$.

4. Rezolvați în R inecuația $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{2x-1}{x+1} < \cos \dfrac{2\pi}{3}$.

5. Determinați soluțiile întregi ale inecuației $(-3+\sin x)\cdot(|3x-2|-4) \geq 0$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $BC \parallel AD$. Punctul M este mijlocul laturii $[AB]$ iar punctul N este mijlocul laturii $[CD]$. Dacă $MN = 9\,cm$ și $AD = 3 \cdot BC$, să se afle BC și AD.

7. Aria unui paralelogram este egală cu $120\,cm^2$, iar două laturi ale lui au lungimile de $15\,cm$ și $10\,cm$. Să se afle lungimea diagonalei mai mici a paralelogramului.

8. Lungimea înălțimii unei piramide patrulatere regulate este de 3 ori mai mică decît lungimea muchiei laterale, iar lungimea apotemei piramidei este de $3\sqrt{5}\,cm$. Să se afle volumul piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați monotonia șirului $a_n = \dfrac{2n-3}{n}$.

10. Se consideră funcția $f : R \setminus \{2\} \to R$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 3$.

c) Calculați aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x = 3$ și $x = 5$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se știe că în dezvoltarea $\left(x + x^{\lg x}\right)^5$ termenul al treilea este egal cu 10^6. Determinați x.

12. Se consideră mulțimea $A = \{1; 2; 3; \ldots ;10\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd o submulțime cu trei elemnte a mulțimii A, aceasta să conțină numărul 1.

ntul

$B]$.

i se

TESTUL 18

I. ALGEBRĂ

1. Arătați că numărul $a=\sqrt[3]{16^{\frac{3}{4}}+9^{\log_3 \sqrt{19}}}$ este natural.

2. Fie z_1 și z_2 soluțiile ecuației $z^2-6z+10=0$. Aflați valoarea expresiei $z_1^2+z_2^2$.

3. Să se rezolve în R inecuația $\log_8\left(x^2-4x+3\right)\le 1$.

4. Se consideră matricea $A(m;x)=\begin{pmatrix} x & -1 & m \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$. Să se afle cea mai mare valoare întreagă a parametrului $m\in R$, pentru care matricea $A(m;x)$ este inversabilă pentru orice $x\in R$.

5. Rezolvați în R ecuația $\sqrt{1-\cos^2 x}+\sin 2x=\lg\left(tg\frac{5\pi}{4}\right)$.

II. GEOMETRIE

6. Punctele A, B, C se află pe cercul $C(O;R)$, astfel încît $m(\angle ABC)=30^\circ$ și $AC=6cm$. Să se afle perimetrul triunghiului AOC.

7. Într-un triunghi dreptunghic bisectoarea unui unghi ascuțit împarte cateta opusă în două segmente de lungimi $4cm$ și $5cm$. Să se afle aria triunghiului.

8. Să se afle volumul unei piramide patrulatere regulate care are muchia laterală de lungime $12cm$, iar secțiunea diagonală a piramidei este un triunghi dreptunghic.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se determine $x\in R$, $x>0$, știind că numerele x, 6 și $x-5$ sunt în progresie geometrică.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$.

a) Scrieți ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $g:D\to R$, $g(x)=x\cdot f(x)$.

b) Determinați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați integrala $I=\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt 7 bile albe, 5 bile roșii și 3 bile albastre. Să se afle probabilitatea ca scoțând 3 bile din urnă, acestea să fie de culori diferite.

12. Coeficientul binomial al termenului al treilea în dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ este cu 44 mai mare decît coeficientul binomial al termenului al doilea. Determinați numărul natural n.

TESTUL 19

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_8\left(\sin^2 x + \cos^2 x + \log_2 8\right)$.

2. Să se calculeze determinantul $d = \begin{vmatrix} 3+i\sqrt{5} & 2+\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & 3-i\sqrt{5} \end{vmatrix}$.

3. Restul împărțirii polinomului $P(X) = X^3 + 2X^2 + aX + 7$ la binomul $X+2$ este egal cu 17. Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X-3$.

4. Rezolvați în R ecuația $x^2 - 18 + 4\sqrt{x^2+3x-6} = -3x$.

5. Rezolvați în R inecuația $\left(2x^2+11x-6\right)\cdot\sqrt{\log_{0,7}|x+6|} \geq 0$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $m(\angle C) = 2\cdot m(\angle B)$. Dacă $AM = 13,5\,cm$, unde M este mijlocul lui $[BC]$, să se afle AC.

7. Să se afle lungimea laturii $[BC]$ a triunghiuli ABC, știind că $AB = 6\,cm$, $AC = 10\,cm$ și că aria triungiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}\,cm^2$.

8. Într-un paralelipiped drept laturile bazei au lungimile de $3\,cm$ și $5\,cm$, iar una dintre diagonalele bazei are $4\,cm$. Să se afle diagonala mare a paralelipipedului, știind că diagonala mică a paralelipipedului formează cu planul bazei un unghi de 60°.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, astfel încît $a_3 = 3$ și $a_7 = 15$. Calculați $a_1 + a_9$.

10. Se consideră funcția $f: R \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Scrieți ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.
b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
c) Determinați aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2\sqrt{2}$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă se află 3 bile albe și 2 bile negre. Se extrag la întâmplare 2 bile. Să se afle probabilitatea ca bilele extrase să fie una albă și una neagră.

12. Să se determine termenul al cincilea al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt{2^{-1}}\right)^n$, știind că ultimul termen al dezvoltării este $\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{9}}\right)^{\log_3 8}$.

TESTUL 20

I. ALGEBRĂ

1. Arătați că valoarea expresiei $E=\left[7^{\log_{49}25}+\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}\right]^{\frac{2}{3}}$ este un număr natural pătra
perfect.

2. Rezolvați în mulțimea C ecuația $x^2-2ix+3=0$, unde $i^2=-1$.

3. Rezolvați în mulțimea R inecuația $(25-x^2)\sqrt{x^2-x-12}\geq 0$.

4. Să se afle valorile lui $x\in R$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}6 & 3 & x-1\\ 2x & 1 & 0\\ 4 & x+2 & 2\end{pmatrix}$ este inversabilă.

5. Să se rezolve în mulțimea R ecuația $4\cdot|\cos x|+3=a\cdot\cos 2x$, știind că una dintre soluțiile ei este $x=\frac{2\pi}{3}$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în care punctul M este mijlocul laturii $[BC]$. Dacă aria triunghiului ABM este egală cu $12,5\,cm^2$, să se afle aria dreptunghiului $ABCD$.

7. Un con circular drept are raza bazei de $8\sqrt{2}\,cm$, iar generatoarea formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 45°. Să se afle volumul și aria totală a conului.

8. Se consideră rombul $ABCD$ cu $m(\angle ABC)=120^\circ$, $AC\cap BD=\{O\}$. Fie punctul M mijlocul laturii $[BC]$, $AM\cap BD=\{E\}$ și $OE=2\,cm$. Să se afle aria rombului $ABCD$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Calculați limita șirului $L=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n-1)^2-(n+1)^2}{2n+1}$.

10. Se consideră funcția $f:R\setminus\{4\}\to R$, $f(x)=\frac{2x+1}{x-4}$.

$a)$ Determinați ecuațiile asimptotelor funcției f.
$b)$ Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
$c)$ Calculați integrala $I=\int_{-2}^{3}f(x)\,dx$.

11

12

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Să se afle probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 8.

12. Să se afle n din dezvoltarea $\left(\sqrt[30]{a^{-1}}+\sqrt[5]{a}\right)^n$, știind că termenul al șaselea sl dezvoltării nu-l conține pe a.

TESTUL 21

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt[3]{4-5\cdot 32^{-0,6}}$.

2. Determinați valorile reale ale lui x și y, pentru care $\begin{vmatrix} x-yi & 2+i \\ 2x & i \end{vmatrix}=1+2i$.

3. Să se rezolve în R inecuația $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{6-x^2}{2}}\leq 8$.

4. Se consideră polinomul $P(X)=X^3+mX^2-4X+n$, unde $m,n\in R$. Știind c
$X=-2$ este rădăcină a polinomului, iar restul împărțirii polinomului $P(X)$ l
binomul $X-4$ este egal cu 12, descompuneți $P(X)$ în factori.

5. Să rezolve în R escuația $\log_3 x^2-\log_3^2(-x)=-3$.

II. GEOMETRIE

6. Pătratul $ABCD$ este înscris în cercul $C(O;\,R)$. Dacă $AB=10\,cm$, să se afle ari
discului mărginit de cerc.

7. Se consideră triunghiul ABC, în care $M\in(AB)$, $AM=BM=6\,cm$, $BC=14\,cm$
și N este mijlocul laturii $[BC]$. Dacă $MN=5\,cm$, să se afle perimetru
triunghiului ABC.

8. Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sun
egale cu $20\,cm$ și $30\,cm$, iar aria laterală este egală cu suma ariilor bazelo
trunchiului. Să se afle volumul trunchiului de piramidă.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_2=2$ și $a_5=5$. Calculați sum
primilor 10 termeni ai progresiei.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.

a) Calculați limita $L=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

b) Determinați punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați $I=\int_0^1 f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta va da restul 5 prin împărțirea la 13.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ raportul dintre coeficientul binomial al termenului al cincilea și coeficientul binomial al temenului al treilea este egal cu $\frac{7}{2}$. Să se afle termenul dezvotării care-l conține pe x (pe x^1).

TESTUL 22

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 2^{\log_2 7 + \log_3 \frac{1}{9}}$.

2. Să se rezolve în mulțimea C ecuația $(3-i)z = 2+3i$.

3. Să se rezolve în R inecuația $\begin{vmatrix} \log_3(x+6) & \log_3 x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \le 0$.

4. Să se aducă la o formă mai simplă expresia $E(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha} + \frac{2}{1-\cos\alpha}}$, știind că $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

5. Fie ecuația $(x+1)\cdot 3^{x^2+5x+6} - x^2 \cdot \left(3^{x^2+5x+6} - 1\right) = x+1$. Notăm cu S suma modulelor soluțiilor ecuației. Să se afle S.

II. GEOMETRIE

6. Patrulaterul convex $ABCD$ este înscris în cercul $C(O; R)$. Dacă $m(\angle A) = 4 \cdot m(\angle C)$, să se afle măsurile unghiurilor A și C.

7. Într-un trapez isoscel lungimile bazelor sunt de $8cm$ și $14cm$, iar aria trapezului este egală cu $44cm^2$. Să se afle lungimea laturii laterale a trapezului.

8. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral. În con este înscrisă o sferă care are volumul de $\frac{32}{3}\pi\, cm^3$. Să se afle volumul conului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie $(b_n)_{n\ge1}$ o progresie geometrică cu termeni pozitivi, astfel încît $4b_2 = b_4$. Determinați valoarea raportului $a = \frac{b_3 + b_4}{b_2}$.

10. Se consideră funcția $f : R\setminus\{1\} \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$.

a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 3$.

b) Determinați punctele de extrem local și valorile funcției în punctele de extrem.
c) Să se determine primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia trece prin punctul $A(2; 5)$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă se află 20 de fișe numerotate de la 1 la 20. Se scot din urmă la întîmplare 4 fișe. Să se afle probabilitatea ca printre fișele scoase să fie fișa cu numărul 5.

12. Să se afle termenul dezvoltării $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ care-l conține pe x^5, știind că suma coeficienților binomiali ai dezvoltării este egală cu 128.

TESTUL 23

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 36^{\frac{1}{\log_5 6}} - 32^{\frac{2}{5}}$.

2. Fie numărul complex $z = 3 - 2i$. Determinați valorile reale ale lui a, pentru care $z^2 + az$ este număr real.

3. Se consideră polinomul $P(X) = X^3 - 2X^2 + aX + 24$, unde a este un parametru real. Știind că restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X - 3$ este egal cu -3, să se afle rădăcinile polinomului $P(X)$.

4. Rezolvați în R inecuația $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\log_2^2 x} < \left(\frac{5}{2}\right)^{4-2\log_2 x^3}$.

5. Determinați soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{3}\cos x - \sin 2x = 0$, care satisfac condiția $|x| < 2$.

II. GEOMETRIE

6. Un triunghi are perimetrul egal cu $48\,cm$, iar lungimile latrurilior triunghiului sunt direct proporționale cu numerele 3; 4 și respectiv 5. Să se afle lungimea medianei corespunzătoare laturii mai mari a triunghiului.

7. O piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală de $10\sqrt{2}\,cm$. Muchia laterală formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 45°. Să se afle volumul piramidei.

8. În trapezul isoscel $ABCD$ latura laterală $[AB]$ și baza mică $[BC]$ au lungimile de câte $2\,cm$, iar $BD \perp AB$. Să se afle aria trapezului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Calculați limita șirului $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 5n}}{n - 1}$.

10. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4}$.

a) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

b) Aflați cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției f pe intervalul $[-3; 3]$ (extremele globale ale funcției).
c) Să se afle aria figurii plane mărginite de fraficul funcției f, de axa O_x și de dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Din numerele 1, 2, 3, 4, 5 se aleg la întîmplare trei numere. Să se afle probabilitatea ca cele trei numere pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

12. Să se afle termenul dezvoltării $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ în care a și b au exponenții egali.

TESTUL 24

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresie $E=-\left[\sqrt[3]{\frac{8}{27}}-\sqrt[3]{\frac{125}{27}}\right]$.

2. Determinați numărul complex $z=a+bi$, $a,b\in R$, pentru care matricea $A=\begin{pmatrix} z & 2 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

3. Aflați valoarea expresiei $\sin\alpha\cos\alpha$, știind că $\sin\alpha+\cos\alpha=0,6$.

4. Rezolvați în R ecuația $\sqrt{4-x}\cdot\left(x^2-3x-10\right)=0$.

5. Să se rezolve în R inecuația $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră cercul $C(O;\ R)$, în care punctele A și B sunt diametral opuse și punctul C se află pe cerc. Dacă $BC=\frac{1}{2}AB$, să se afle măsura unghiului ABC.

7. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ avem $AB=6\,cm$, $BC=10\,cm$. Notăm cu D piciorul înălțimii din A pe ipotenuză. Paralela prin D la AB intersectează pe AC în punctul E. Determinați BD și EC.

8. Să se afle volumul sferei înscrise într-un con circular drept cu generatoarea de $10\,cm$ și raza bazei de $6\,cm$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Stabiliți dacă numărul $\frac{11}{21}$ este termen al șirului definit prin $a_n=\frac{n+1}{2n+1}$, și în caz afirmativ prcizați rangul lui.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x-1}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f.

$a)$ Determinați asimptotele la graficul funcției f.

$b)$ Să se afle coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f.

c) Să se afle primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia intersectează axa O_X în punctul cu abscisa $x = 2$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Dintre 10 elevi (6 băieți și 4 fete), profesorul de educație fizică dorește să formeze o echipă de atletism formată din 4 sportivi. Să se afle probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 băieți și 2 fete.

12. Să se afle $x \in R$, știind că termenul al cincilea al dezvoltării $\left(\sqrt{x} + x^{-1}\right)^6$ este egal cu $\frac{5}{9}$.

Scanned with AltaScanner

TESTUL 25

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 9^{\log_3 7} - \log_4 64$.

2. Determinați valorile reale ale lui a pentru care numărul complex $z = a + 4i$ are modulul egal cu 5.

3. Fie $d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. Rezolvați în R inecuația $\dfrac{x+1}{x+d} \leq 0$.

4. Fie polinomul $P(X) = 2X^3 + mX^2 + nX + 6$, unde $m, n \in R$. Știind că polinomul $P(X)$ este divizibil cu $X-1$, iar restul împărțirii lui $P(X)$ la binomul $X-3$ este egal cu 30, să se afle rădăcinile polinomului $P(X)$.

5. Rezolvați în R ecuația $\lg\left(3 \cdot 5^x + 24 \cdot 20^x\right) = x + \lg 18$.

II. GEOMETRIE

6. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, M mijlocul lui $[BC]$ și $ME \perp AB$, $E \in (AB)$. Dacă $ME = 3cm$ și $BC = 12cm$, să se afle $m(\angle ACB)$.

7. Aria laterală a unui con circular drept este egală cu $240\pi\, cm^2$, iar aria totală este egală cu $384\pi\, cm^2$. Să se afle volumul conului.

8. Să se afle aria unui triunghi isoscel în care înălțimea corespunzătoare bazei are lungimea $10cm$, iar înălțimea corespunzătoare laturii laterale are $12cm$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați suma primilor șase termeni ai progresiei geometrice cu termeni pozitivi $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2 = 6$ și $b_5 = 48$.

10. Fie polinomul $P(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$, $a, x \in R$.

a) Să se determine parametrul real a, astfel încît $P'(1) - 12 = 0$.

b) Pentru $a=3$, să se afle intervalele de monotonie ale funcției $f:D\to R$, $f(x)=\frac{P'(x)}{P(x)}$.

c) Pentru $a=3$ să se calculeze integrala $I=\int_2^5 \frac{P(x)}{P'(x)}dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Fie A mulțimea numerelor naturale mai mici decît 30, care prin împărțirea la 3 dau restul 2. Să se afle probabilitatea ca alegînd un element al mulțimii A, acesta să fie număr prim.

12. Aflați termenul din mijloc al dezvoltării $\left(2x^2+\frac{1}{2x}\right)^{12}$.

TESTUL 26

I. ALGEBRĂ

1. Să se afle media aritmetică a numerelor $a=\sqrt{81}+\sqrt[3]{-64}+16^{\frac{3}{4}}$ şi $b=\log_3 27-\sqrt{6\frac{1}{4}+3^{\log_3\frac{1}{2}}}$.

2. Să se rezolve în R ecuaţia $\sqrt{10-x}=4-x$.

3. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}\log_2(x-3) & \sqrt{3}-i\\ \sqrt{3}+i & 2\end{pmatrix}$. Să se rezolve în mulţimea R inecuaţia $\det A\le 2$, unde $\det A$ reprezintă determinantul matricei A.

4. Calculaţi valoarea expresiei $E(\alpha)=\frac{4}{5}\cdot tg\alpha+\frac{5}{12}\cdot\sin 2\alpha$, dacă $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ şi $\alpha\in\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=3^{x-x^2}$. Să se rezolve în R inecuaţia $2f(x)+f(1-x)<\frac{1}{3}$.

II. GEOMETRIE

6. Fie dreptunghiul $ABCD$, în care M este mijlocul laturii $[AB]$, N este mijlocul laturii $[BC]$ şi $MN=5cm$. Dacă $AD=2\cdot CD$, aflaţi aria dreptunghiului $ABCD$.

7. Să se afle lungimea diagonalei şi a laturii laterale ale unui trapez isoscel, care are bazele de lungimi $12cm$ şi $20cm$, iar centrul cercului circumscris trapezului se află pe baza mare.

8. Lungimea laturii bazei unei piramide patrulatere regulate este egală cu $10cm$, iar măsura unghiului diedru de la baza piramidei este egală cu 30°. Să se afle volumul piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinaţi $a+b+c$, dacă primii cinci termeni ai unei progresii aritmetice sunt: $a, b, 12, c, 18$.

10. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$.

a) Calculați $L = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x \cdot f(x)$.

b) Determinați punctele de extrem local ale funcției f.

c) Să se afle aria figurii plane determinate de graficul funcției f, de axa absciselor și de dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră ecuația de gradul întîi în necunoscuta x, $mx - 1 = m + x$. Să se afle probabilitatea ca ecuația să aibă o soluție întreagă atunci cînd m ia o valoare întreagă din intervalul $[-4; 5]$.

12. Aflați A_n^2, știind că termenul al cincilea al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}\right)^n$ nu-l conține pe x.

TESTUL 27

I. ALGEBRĂ

1. Să se afle valoarea expresiei $E = \log_2\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

2. Să se rezolve în R ecuația $\begin{vmatrix} 9^x & 1 \\ 2 & 3^x \end{vmatrix} = 7$.

3. Să se afle coeficienții reali p și q, știind că $z = 4 - 3i$ este soluție a ecuației $z^2 + pz + q = 0$.

4. Să se rezollve în R ecuația $\frac{2x-8}{\sqrt{6-x}} + \sqrt{6-x} = 3$.

5. Rezolvați în R inecuația $\log_{\frac{1}{3}}\left|\frac{3-2x}{1-x}\right| > -1$.

II. GEOMETRIE

6. În triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, măsura unghiului format de înălțimea AD și mediana AM este de 60°, $D, M \in (BC)$. Dacă $AD = 6cm$, să se afle BC.

7. Bisectoarea unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic împarte cateta opusă în două segmente cu lungimile de $10cm$ și $26cm$. Să se afle lungimea ipotenuzei triunghiului.

8. Să se afle aria totală a unei piramide triunghiulare regulate care are latura bazei de $6cm$, iar unghiul diedru de la baza piramidei are măsura de 60°.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul $(a_n)_{n\ge1}$, în care $a_1 = -3$ și $a_{n+1} = 3a_n + 7$. Calculați media aritmetică a numerelor a_3, a_4, a_5.

10. Se consideră funcția $f: R \to R$, $f(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}}$.

a) Să se calculeze limitele $L_1 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ și $L_2 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Să se afle punctele de extrem local ale funcției f.

c) Să se determine primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia trece prin origine.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o companie lucrează 120 de oameni. 70 din ei cunosc limba engleză, 60 cunosc limba franceză, iar 50 cunosc ambele limbi. Să se afle probabilitatea ca un colaborator luat la întîmplare, să nu cunoască nici o limbă străină.

ecuație

12. Suma coeficienților binomiali ai termenului al treilea de la începutul și termenului al treilea de la sfîrșitul dezvoltări $\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4}\right)^n$ este egală cu 9900. Să se afle numărul termenilor raționali ai dezvoltării.

a AD

BC.

TESTUL 28

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 2\log_3 5 + \log_{\frac{1}{3}} 75$.

2. Determinați valorile reale ale lui x și y, pentru care matricele $A = \begin{pmatrix} x+1 & x+y \\ 0 & x-2y \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & -x-1 \\ 0 & 9-2x \end{pmatrix}$ sunt egale.

3. Determinați modulul numărului complex z, dacă $|z| - z = 2 + 4i$.

4. Să se rezolve în R inecuația $81^x \leq \frac{1}{3} \cdot 27^{2x+1}$.

5. Să se rezolve în R ecuația $\dfrac{2\sin 2x - 4 + 8\cos x - 2\sin x}{2\sin x - \sqrt{3}} = 0$.

II. GEOMETRIE

6. Triunghiul ABC este înscris în cercul $C(O; R)$. Dacă $m\left(\widehat{AB}\right) = 140^\circ$, $m\left(\widehat{BC}\right) = 130^\circ$, să se afle $m(\angle B)$.

7. Într-un triunghi dreptunghic isoscel, mediana corespunzătoare ipotenuzei este de $2\sqrt{2}\,cm$. Determinațiii lungimea medianei corespunnzătoare unei catete.

8. Baza unei prisme drepte este un paralelogram cu laturile de $2cm$ și $4cm$ și un unghi de 60°. Determinați volumul prismei, dacă diagonala cea mai mare a prismei formează cu planul bazei un unghi de 30°.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul numeric $(a_n)_{n\geq 1}$, in care $a_1 = 1$ și $3 \cdot a_{n+1} = a_n$, $\forall n$, $n \in N$, $n \geq 1$. Să se afle $a_3 + a_4$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \dfrac{2x-2}{x^2 - x + 1}$, unde $D \subset R$.

a) Determinați asimptotele la graficul funcției f.
b) Să se afle coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f.
c) Să se afle aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră mulțimea $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare trei numere din mulțimea A, produsul celor trei numere să fie un număr natural care are ultima cifră zero.

12. Să se afle termenul al șaselea al dezvoltării $\left(\sqrt{y} + \sqrt[3]{x}\right)^n$, știind că coeficientul binomial al termenului al treilea de la sfîrșitul dezvoltării este egal cu 45.

TESTUL 29

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt{27^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}$.

2. Fie numărul complex $z=1+3i$. Demonstrați că numărul $u=\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$ este real.

3. Să se rezolve în R ecuația $\log_8(x-1)+\log_8(x+27)=\frac{7}{3}$.

4. Rezolvați în R inecuația $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3x^2+10}\leq\frac{25}{4}$.

5. Să se determine parametrii reali a și b, astfel încît polinomul $P(X)=X^4-4X^3+4X^2+aX+b$ să se dividă cu polinomul $Q(X)=X^2-4X+3$ și să se afle cîtul împrțirii lui $P(X)$ la $Q(X)$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC în care $[AA_1]$ și $[BB_1]$ sunt mediane, $A_1\in(BC)$, $B_1\in(AC)$. Dacă perimetrul triunghiului A_1B_1C este egal cu $14\,cm$, să se afle perimetrul triunghiului ABC.

7. Să se afle volumul unei prisme triunghiulare regulate, dacă aria totală a prismei este egală cu $8\sqrt{3}\,cm^2$, iar lungimea muchiei laterale a prismei este de $\sqrt{3}\,cm$.

8. Raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este de $15\,cm$, iar raza cercului înscris în triunghi este de $6\,cm$. Să se lungimile laturilor triunghiului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Numerele $1, 7, 13, \ldots, x$ formează o progresie aritmetică, astfel încît $1+7+13+\ldots+x=280$. Să se afle x.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{4}{x+1}-\frac{4}{x-1}+1$.

a) Să se scrie ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f;

b) Să se scrie ecuațiile tangentelor la graficul funcției f în punctele în care graficul intersectează axa O_X;

c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f;

d) Să se calculeze integrala $I = \int_2^3 (x+1)\cdot f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-un coș sunt 28 de mere, verzi și roșii. Probabilitatea de a lua la întîmplare un măr verde este de $\frac{3}{7}$. Să se afle cîte mere roșii se află în coș.

12. Să se afle termenul dezvoltării $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt[10]{\frac{a^7}{b^3}}\right)^n$ care-l conține pe ab.

TESTUL 30

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea exprsiei $a=\log_2\left(16^{\frac{1}{2}}\right)-\log_3\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Determinați valorile reale ale lui x și y pentru care $(1+i)xi+(2-3i)y=3-2i$.

3. Rezolvați în R inecuația $\lg(3x)\le\lg(4-x^2)$.

4. Știind că $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

5. Rezolvați în R ecuația $\log_3^2\left(\frac{x^2}{9}\right)+\log_3\left(x^6\right)-4=0$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu perimetrul de $42\,cm$ și $AB=AC=12\,cm$. Dacă $AD\perp BC$, $D\in(BC)$, să se afle CD.

7. Diagonalele rombului $ABCD$ au lungimile de $3\,cm$ și $4\,cm$. Din vîrful unghiului obtuz B al rombului sunt duse înălțimile BE și BF, $E\in(CD)$, $F\in(AD)$. Să se afle aria patrulaterului $BEDF$.

8. Într-un paralelipiped drept lungimile laturilor bazei sunt de $7\,cm$ și $17\,cm$, iar diagonalele paralelipipedului formează cu planul bazei unghiuri cu măsurile de 45° și 30°. Să se afle lungimea înălțimii paralelipipedului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul numeric $(a_n)_{n\ge1}$, în care $a_1=1$ și $a_{n+1}=a_n+3$. Calculați suma $S=a_1+a_2+a_3+a_4$.

10. Se consideră funcția $f:R\setminus\{1\}\to R$, $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$.

a) Să se determine asimptotele la graficul funcției f.
b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
c) Să se calculeze aria figurii mărginită de graficul funcției f, de asimptota oblică și de dreptele de ecuații $x=2$ și $x=3$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră mulțimea $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Se extrag la întîmplare trei elemente ale mulțimii A. Să se afle probabilitatea ca cele trei numere extrase să reprezinte lungimile laturilor unui triunghi.

12. Să se afle termenul al cincilea al dezvoltării $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^n$, știind că raportul dintre coeficientul binomial al termenului al patrulea și coeficientul binomial al termenului al treilea al dezvoltării este egal cu $\frac{10}{3}$.

TESTUL 31

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 2\log_3 6 - \log_3 4$.

2. Să se afle modulul numărului complex $z = (2-3i)^2 + (3+i)(3-i)$.

3. Fie $D(x) = \begin{vmatrix} \lg(12-x) & 2 \\ \lg x & 1 \end{vmatrix}$. Rezolvați în R ecuația $D(x) = 0$.

4. Rezolvați în mulțimea R inecuația $(0,7)^{2x-5} < 2\frac{2}{49}$.

5. Să se rezolve în mulțimea R ecuația $4\sin x = \sin 2x + 2\sin^2 x$.

II. GEOMETRIE

6. Măsura unui unghi al unui romb este de două ori mai mare decît măsura altui unghi al rombului. Știind că diagonala mai mică a rombului are lungimea $7\,cm$, să se afle peimetrul rombului.

7. Fie triunghiul ABC cu $AB = 18\,cm$, $BC = 15\,cm$ și $AC = 12\,cm$. Printr-un punct $D \in (AC)$ se duce $DE \parallel AB$, $E \in (BC)$, astfel încît $AD = DE$. Calculați perimetrul triunghiului CDE.

8. Într-un cilindru circular drept se înscrie o prismă triunghiulară regulată. Știind că volumul cilindrului este egal cu $45\pi\,cm^3$, iar aria laterală a cilindrului este egală cu $30\pi\,cm^2$, să se afle aria laterală și volumul prismei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu rația $r = 3$. Știind că suma primilor zece termeni ai progresiei este egală cu 150, să se afle a_1.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x+1}$.

a) Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

b) Aflați coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f.
c) Determinați primitiva F a funcției f, pentru care $x=-3$ este zerou.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră mulțimea $A=\left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, 2\pi\right\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare un element al mulțimii A, acesta să fie soluție a ecuației $\sin x=\frac{1}{2}$.

12. Să se afle termenul al şapteleạ al dezvoltării $\left(a^2\sqrt{a}+\frac{\sqrt[3]{a}}{a}\right)^n$, ştiind că coeficientul binomial al termenului al treilea este egal cu 36.

TESTUL 32

I. ALGEBRĂ

1. Arătaţi că numărul $a = 2\log_3 5 + \log_{\frac{1}{3}} 75$ este întreg.

2. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2a-b & ac+b \\ 5 & c+1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 5 & 2d+1 \\ a-3b & 3a+2b \end{pmatrix}$. Să se determine a, b, c, d, astfel încît $A = B$.

3. Determinaţi numărul complex $z = a+bi$, $a,b \in R$, pentru care $\begin{vmatrix} 2z+\bar{z} & i \\ 1-3i & 1 \end{vmatrix} = i$.

4. Rezolvaţi în R ecuaţia $\frac{2 \cdot \lg x}{\lg(5x-4)} = 1$.

5. Determinaţi polinomul $P(X) = mX^4 - 3X^3 + nX^2 - X + 1$, ştiind că $X=1$ este rădăcină a polinomului $P(X)$, iar restul împărţirii polinomului $P(X)$ la binomul $X+2$ este egal cu 51.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră pătratul $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $OC = 3\sqrt{2}\,cm$, să se afle aria pătratului $ABCD$.

7. Un con circular drept are înălţimea $VO = 4\,cm$ şi aria secţiunii axiale de $12\,cm^2$. Să se afle aria totală şi volumul conului.

8. Latura $[AB]$ a triunghiului isoscel ABC cu $AB = BC$ este diametru al cercului care intersectează latura $[BC]$ în punctul D, astfel încît $\frac{BD}{DC} = 4$ şi $AC = \sqrt{5}\,cm$. Să se afle aria triunghiului ABC.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = \frac{4n}{n+3}$. Studiaţi monotonia şirului.

10. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = (x-1) \cdot e^{-x}$.

a) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.
b) Să se afle punctele de extrem local ale funcției f.
c) Calculați $\int_{2}^{e} \frac{1}{f(x)\cdot e^{x}}dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Pe un raft sunt 10 cărți, dintre care cîteva sunt de matematică. Probabilitatea ca două cărți luate la întîmplare de pe raft să fie de matematică este egală cu $\frac{1}{3}$. Să se afle cîte cărți de matematică se află pe raft.

12. Cîți termeni ai dezvoltării $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{7}\right)^{36}$ sunt numere întregi?.

TESTUL 33

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_3 54 - \log_3 2 + \log_3 81$.

2. Știind că $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

3. Determinați $a, b \in R$, astfel încît să avem egalitatea $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3 = a + bi$.

4. Rezolvați în R inecuația $\log_{0,5}\left(x^2 - 5x + 6\right) > -1$.

5. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și D determinantul matricei A. Să se rezolve în R inecuația $\sqrt{2x-3} < D$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră cercul $C(O; R)$ în care punctele A și B sunt diametral opuse, iar punctul C se află pe cerc. Dacă raza cercului este $R = 6cm$ și $m(\angle CBA) = 60^\circ$, să se afle BC.

7. Fie dreptunghiul $ABCD$ în care $DE \perp AC$, $E \in (AC)$, $AE = 4cm$, $CE = 12cm$. Să se afle perimetrul dreptunghiului $ABCD$.

8. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are apotema de $\sqrt{7}\,cm$, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60°. Să se afle volumul piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 3, iar suma primilor șase termeni ai progresiei este egală cu 57. Să se afle a_1 și a_6.

10. Se consideră funcția $f : R \setminus \{1\} \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = -1$.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se afle aria figurii plane delimitate de graficul funcției f, de axa O_x și de dreptele de ecuații $x=2$ și $x=5$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se aruncă simultan două zaruri. Determinați probabilitatea ca produsul punctelor de pe fețele apărute să fie egal cu 6.

12. Să se afle suma coeficienților binomiali de rang impar ai dezvoltării $(x+y)^n$, știind că coeficientul binomial al termenului al treilea este cu 9 mai mare decît coeficientul binomial al termenului al doilea al dezvoltării.

TESTUL 34

I. ALGEBRĂ

1. Arătați că valoarea expresiei $a=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-3\cdot 2^{-3}$ este un număr natural.

2. Să se rezolve în mulțimea R inecuația $\log_{\frac{1}{3}}(1+x)>1$.

3. Să se afle numărul complex $z=x+yi$, dacă $|z|=z+8-12i$.

4. Să se determine parametri reali a și b, astfel încît polinomul $P(X)=aX^3+bX^2-73X+102$ să se dividă cu polinomul $Q(X)=X^2-5X+6$ și să se afle cîtul împărțirii lui $P(X)$ la $Q(X)$.

5. Să se afle $x\in R$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & x & 1\\ -2 & -2 & x-2\end{pmatrix}$ este inversabilă.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $AC=7cm$, $BC=14cm$. Să se afle $m(\angle ACB)$.

7. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ și $m(\angle B)=60^\circ$, înălțimea $[AD]$ are lungimea egală cu $6\sqrt{3}\,cm$, $D\in(BC)$.

   a) Să se afle aria triunghiului ABC.

   b) Dacă $DE\perp AC$, $E\in(AC)$, determinați valoarea raportului ariilor triunghiurilor CDE și ABC.

8. Baza unei piramide este un triunghi cu lungimile laturilor de $6cm$, $5cm$, $5cm$. Toate fețele laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri diedre cu măsurile de 45°. Să se afle volumul piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu formula termenului general $x_n=\frac{3n-1}{5n+2}$ este crescător.

10. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Să se determine pinctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați integrala $I = \int_0^2 f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt 7 bile albe, 5 bile roșii și 3 bile albastre. Se extrag la întîmplare 3 bile. Să se afle probabilitatea ca printre bilele extrase cel puțin două bile să fie roșii.

12. Să se determine $x \in C$, știind că suma temenilor al treilea și al cincilea din dezvoltarea binomului $\left(x + \sqrt{5}\right)^6$ este egală cu 450.

10. Se consideră funcția $f: R \to R$, $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Să se determine pinctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați integrala $I = \int_0^2 f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt 7 bile albe, 5 bile roșii și 3 bile albastre. Se extrag la întîmplare 3 bile. Să se afle probabilitatea ca printre bilele extrase cel puțin două bile să fie roșii.

12. Să se determine $x \in C$, știind că suma temenilor al treilea și al cincilea din dezvoltarea binomului $\left(x + \sqrt{5}\right)^6$ este egală cu 450.

TESTUL 35

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $a=\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)+\log_3\left(5+\sqrt{7}\right)-\log_3 2$.

2. Să se afle modulul numărului complex z, dacă $\frac{z}{2+i}=\frac{1}{2-i}$.

3. Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, astfel încît $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

4. Rezolvați în R inecuația $\log_{\frac{1}{4}}\frac{2x-1}{x+1}<\cos\frac{2\pi}{3}$.

5. Aflați cea mai mare soluție întreagă a inecuației $2^x+\left(0,5\right)^{3-x}<9$.

II. GEOMETRIE

6. De cîte ori aria pătratului circumscris unui cerc este mai mare decît aria pătratului înscris în același cerc?

7. Baza prismei drepte $ABCA_1B_1C_1$ este triunghiul dreptunghic ABC cu $m\left(\angle BAC\right)=90^\circ$, $AB_1=2\sqrt{41}\,cm$, $AC_1=2\sqrt{34}\,cm$ și $AA_1=10cm$. Să se afle volumul prismei.

8. În triunghiul ABC medianele (AE) și (CD) se intersectează în punctul $\{O\}$, $E\in(BC)$, $D\in(AB)$. Dacă $AE=9cm$, $CD=12cm$ și $AC=10cm$, să se afle aria triunghiului ABC.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$, cu termeni pozitivi avem $b_2=6$, $b_4=24$. Să se afle b_6.

10. Fie funcția $f:R\to R$, $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$.

a) Să se scrie ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.
b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Aflați primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia intersectează axa ordonatelor în punctul cu ordonata 6.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă se află 8 bile albe și 6 bile roșii. Să se afle probabilitatea că extrăgînd la întîmplare două bile, acestea să fie de culoare roșie.

12. Diferența dintre coeficientul binomial al celui de-al treilea termen și coeficientul binomial al celui de-al doilea termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+x^{\lg x}\right)^n$ este 27. Pentru care valori ale lui x, al doilea termen al dezvoltării este 900?

TESTUL 36

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 12^{\log_{144} 4} + \log_{\frac{1}{2}} 8$.

2. Rezolvați în R ecuația $3^{\log_5 (x-1)} = \log_3 27$.

3. Să se afle valorile reale ale lui x și y pentru care numerele $z_1 = x^2 + 4y - yi$ și $z_2 = 4 + y - \frac{2}{i} - x^2 i$ vor fi conjugate.

4. Știind că $\alpha \in R$ și că $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

5. Să se rezolve în R inecuația $\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} \geq 2$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră rombul $ABCD$ în care punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și respectiv $[AD]$ ale rombului. Dacă $AC = 12cm$ și $BD = 16cm$, să se afle aria patrulaterului $MNPQ$.

7. Diagonalele unui paralelogram au lungimile de $16cm$ și $12cm$, iar măsura unghiului dintre ele este de 30°. Să se afle aria paralelogramului.

8. Într-un con circular drept cu raza bazei de $5cm$ și înălțimea de $12cm$, se face o secțiune paralelă cu baza, avînd aria de $9\pi\, cm^2$. Să se afle aria laterală și volumul trunchiului de con format.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin formula termenului general $x_n = \frac{6-n}{5n-1}$ este descrescător.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$, D fiind domeniul maxim de definiție.

a) Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

b) Să se afle cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției f pe intervalul $[1; 3]$, (extremele globale).

c) Calculați integrala $I=\int_{1}^{3} f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră mulțimea $A=\{A\in Z \mid |x-2|\le 3\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare un element al mulțimii A, acesta să fie soluție a ecuației $x^2-7x+10=0$.

12. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\cdot\sqrt[4]{x}}\right)^n$, unde $x\in R$, $x>0$ și $n\in N^*$.

a) Să se determine n pentru care coeficienții binomiali ai termenilor 1, 2, respectiv 3 ai dezvoltării, formează o progresie aritmetică.

b) Pentru $n=8$, să se afle termenul dezvoltării, astfel încît exponentul lui x să fie număr natural.

TESTUL 37

I. ALGEBRĂ

1. Arătați că numărul $a = 2^{\log_8 27} + \log_{\frac{1}{5}} 25 - \sqrt[3]{125}$ este întreg.

2. Fie numărul complex z pentru care $\dfrac{z}{1+i} = \dfrac{1}{1-i}$. Arătați că numărul z este pur imaginar.

3. Să se rezolve în R ecuația $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

4. Se consideră polinomul $P(X) = X(X+1)(X-a) - 12$, unde a este un parametru real. Se știe că $X = 1$ este rădăcină a polinomului. Să se descompună polinomul $P(X)$ în factori.

5. Rezolvați în R inecuația $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2}{x+2} \geq 0$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Pe semidreapta $[BC$ se consideră punctul M, astfel încît $AM \cap CD = \{E\}$ și $CE = DE$. Dacă aria triunghiului ABM este egală cu $52\,cm^2$, să se afle aria dreptunghiului $ABCD$.

7. În triunghiul ABC avem $m(\angle ABC) = 60^\circ$, mediana $AM = 4\sqrt{3}\,cm$, iar înălțimea $AD = 2\sqrt{3}\,cm$. Să se afle perimetrul și aria triunghiului ABC.

8. Într-o piramidă patrulateră regulată secțiunea diagonală este un triunghi echilateral, iar apotema piramidei are lungimea de $3\sqrt{7}\,cm$. Să se afle:
a) Aria laterală și volumul piramidei.
b) Distanța de la centrul bazei la una dintre fețele laterale ale piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Aflați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ și numărul n de termeni ai progresiei, știind că $r = -2$, $a_n = 17$ și $S_n = 161$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x + 3}$, unde D reprezintă domeniul maxim de definiție al funcției.

a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de intersecție al graficului funcției cu axa O_Y.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Calculați aria figurii plane cuprinsă între graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = 6$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt bile albe și negre. Numărul bilelor albe este cu 3 mai mare decît numărul bilelor negre. Se scot la întîmplare două bile din urnă. Probabilitatea ca bilele scoase să fie de culori diferite este egală cu $\dfrac{28}{55}$. Să se afle numărul total de bile din urnă.

12. Să se determine termenul din dezvoltarea $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{a} + \dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^{18}$, care-l conține pe x, pe (x^1).

TESTUL 38

I. ALGEBRĂ

1. Calculaţi valoarea expresiei $a = 49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

2. Arătaţi că numărul $z = \frac{1}{2i}\left(i^7 - \frac{1}{i^7}\right)$ este întreg.

3. Se consideră determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} \sqrt{5x^2 - x} & x \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$. Rezolvaţi în R ecuaţia $D(x) = 1$.

4. Rezolvaţi în R ecuaţia $\log_2\left(x^2 - 4\right) = \log_2 x + \log_2 3$.

5. Să se rezolve în R inecuaţia $(x-1)\sqrt{6 + x - x^2} \geq 0$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC în care $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ şi $BD = DC$. Dacă $m(\angle BAD) = 32^\circ$, să se afle $m(\angle ACD)$.

7. Diagonala bazei unei piramide patrulatere regulate are lungimea $12\,cm$, iar faţa laterală a piramidei formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 45°. Să se afle aria totală a piramidei.

8. Lungimea liniei mijlocii a unui trapez este egală cu $4\,cm$, unghiurile de la baza mare a trapezului au măsurile de 40° şi 50°. Să se afle lungimile bazelor trapezului, ştiind că segmentul care uneşte mijloacele bazelor trapezului are lungimea $1\,cm$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiaţi mărginirea şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n = \frac{3n+8}{2n}$.

10. Se consideră funcţia $f: R \setminus \{1\} \to R$, $f(x) = \frac{x^2 + mx + n}{x-1}$. Să se determine parametrii reali m şi n astfel încît funcţia f să admită un extrem egal cu 1 în punctul $x = 0$.

a) Să se determine asimptotele la grficul funcţiei f obţinute.

b) Determinați coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f obținute;

c) Să se calculeze aria figurii plane limitate de graficul funcției f obținute, de axa O_x și dreptele de ecuații $x=2$, respectiv $x=5$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă se află 10 bile identice, 3 bile albe și 7 bile roșii. Se extrag la întîmplare două bile. Să se afle probabilitatea ca cele două bile să fie de culoare albă.

12. Să se afle cel mai mare coeficient binomial din dezvoltarea $(a+b)^n$, știind că suma coeficienților binomiali ai dezvoltării este egală cu 4096.

TESTUL 39

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 3^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

2. Să se rezolve în R ecuația $\begin{vmatrix} tgx & 4^{x^2-2} \\ 2^{x+1} & ctgx \end{vmatrix} = 0$.

3. Să se rezolve în R inecuația $\log_2(3x-4) \le 4$.

4. Se consideră polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 - 5X + 6$. Știind că $P(1) = P(-2)$, să se descompună polinomul $P(X)$ în factori.

5. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care numerele complexe $z_1 = \lg(2x^2 + x + 1) + i \cdot 4^x$ și $z_2 = \lg(x^2 + 1) + i \cdot (2^{x+1} - 3)$ sunt conjugate.

II. GEOMETRIE

6. Fie triunghiul isoscel ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ în care $BD \perp AC$, $D \in (AC)$. Dacă $m(\angle DBC) = 40^\circ$, să se afle $m(\angle BAC)$.

7. Se consideră triunghiul ABC cu lungimile laturilor $AB = 9\,cm$, $BC = 12\,cm$, $AC = 15\,cm$. Dacă $[AD]$ este mediana corespunzătoare laturii $[BC]$, $D \in (BC)$, să se afle aria triunghiului ABD.

8. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic cu lungimile catetelor egale cu $12\,cm$ și $16\,cm$. Să se afle volumul piramidei, știind că toate muchiile laterale ale piramidei au lungimile de cîte $10\sqrt{5}\,cm$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. În progresia geometrică $(b_n)_{n \ge 1}$ avem $b_1 = -\frac{2}{9}$, $b_3 = -2$. Să se afle b_7.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$. Să se determine a, b, c astfel încît graficul funcției f să admită ca asimptote dreptele de ecuații $x = 1$ și $y = x + 2$, iar $P(2; 6)$ să fie un punct al graficului funcției.

a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției obținute în punctul de abscisă $x = -1$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f obținute.

c) Să se calculeze aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, axa O_Y, asimptota oblică și dreapta de ecuație $x = -1$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt 11 bile identice, unele de culoare albă, altele de culoare roșie. Probabilitatea ca extrăgînd 2 bile, ambele să fie de culoare roșie este egală cu $\frac{6}{55}$. Să se afle cîte bile roșii sunt în urnă.

12. Aflați termenul al șaselea al dezvoltării $\left(\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^n$, știind că coeficientul binomial al termenului al patrulea este egal cu 56.

Scanned with AltaScanner

TESTUL 40

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $\sqrt[3]{a}$, unde $a = 2^{(\sqrt{2}+1)^2} : 2^{2\sqrt{2}}$.

2. Să se afle modulul numărului complex $z = \begin{vmatrix} 2+i & 1-i \\ 3+i & 5-i \end{vmatrix}$.

3. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\log_x(4x-3) = 2$.

4. Fie funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{3\cos 2x - 1}{\sin 3x}$. Aflați $f\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - f\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)$.

5. Rezolvați în R inecuația $\sqrt{x^2 - \frac{6x^2}{|x|} + \frac{3}{tg^2 30^\circ}} \le \frac{1}{2}\sin^2 30^\circ$.

II. GEOMETRIE

6. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle ABC) = 30^\circ$. Să se afle valoarea raportului $\frac{AC}{AB}$.

7. Măsura unghiului ascuțit al unui romb este egală cu 60°, iar aria rombului este egală cu $18\sqrt{3}\,cm^2$. Să se afle lungimea diagonalei mai mari a rombului.

8. O prismă triunghiulară dreaptă are baza un triunghi dreptunghic în care lungimea unei catete este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei. Știind că volumul prismei este egal cu $360\sqrt{3}\,cm^3$, iar înălțimea prismei este de $5\,cm$, să se afle aria laterală a prismei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Calculați limita $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^2 - 7n + 1}{2 - 5n - 6n^2}$.

10. Fie funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, D fiind domeniul maxim de definiție.

a) Scrieți ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

b) Determinați punctele de extrem local ale funcției f.

c) Să se afle primitiva F a funcției f, graficul căreia trece prin punctul $M(\sqrt{2}; 2)$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Din cifrele 1, 2, 3, , 9 se formează numere naturale distincte de cîte 7 cifre distincte. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare un număr din cele formate, acesta să să aibă primele trei cifre impare, iar celelalte cifre pare.

2. Aflați toți termenii raționali ai dezvoltării $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}\right)^{16}$.

TESTUL 41

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$.

2. Determinați numărul $z \in C$, dacă $\frac{\bar{z} + 7i}{z} = 6$.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ x+1 & 3 \end{pmatrix}$. Să se rezolve în R ecuația $\det A = \sqrt{4+x}$, unde $\det A$ reprezintă determinantul matricei A.

4. Rezolvați în R inecuația $\log_2(x-3) \le 1$.

5. Rezolvați în R ecuația $2\sin^2 x - 2\sin x + tgx \cdot \cos x - 1 = 0$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră cercul $C(O; R)$ în care punctele A și B sunt diametral opuse, iar punctul C se află pe cerc, astfel încît $m(\angle ABC) = 30^\circ$ și $AB = 12cm$. Să se afle perimetrul triunghiului AOC.

7. Generatoarea unui con circular drept formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 30°. Determinați volumul conului, dacă aria lui laterală este egală cu $8\sqrt{3}\,\pi\, cm^2$.

8. Într-un triunghi dreptunghic care are perimetrul de $36cm$, este înscris un cerc. Punctul de tangență împarte ipotenuza în două segmente, raportul lungimilor cărora este $2:3$. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$, în care $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$. Calculați suma primilor șapte termeni ai progresiei.

10. Se consideră funcția $f: R \to R$, $f(x) = e^x - ax$, unde $a \in R$, $a > 0$.

a) Să se determine asimptota spre $-\infty$ la graficul funcției f.

b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați integrala $I = \int_0^2 f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Din 10 persoane (6 bărbați și 4 femei) se formează o echipă din 4 persoane. Să se afle probabilitatea ca echipa să fie formată numai din bărbați.

12. Fie dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$. Știind că diferența dintre coeficienții binomiali ai termenilor al treilea și al doilea este egală cu 170, calculați C_n^{n-2}.

TESTUL 42

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$.

2. Determinați conjugatul numărului complex z, pentru care $(3-2i)z = 26i$.

3. Să se afle valorile parametrului real m pentru care polinomul $P(X) = 2X^5 + 5X^2 - m$ se divide cu binomul $X+2$.

4. Să se afle toate soluțiile ecuației $\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, care verifică inecuația $x^2 - 8x + 12 \le 0$.

5. Să se rezolve în R inecuația $\dfrac{\log^2_{\frac{1}{2}} x^2 + 7}{\sqrt{4x+1}} \ge 0$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu baza $[BC]$, în care $[BE$ este bisectoare, $E \in (AC)$. Dacă $m(\angle EBC) = 36^\circ$, să se afle $m(\angle BAC)$.

7. Perimetrul unui triunghi dreptunghic este egal cu $60\,cm$, iar raportul lungimilor catetelor este $3:4$. Să se afle lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

8. Aria laterală a unei piramide patrulatere regulate este egală cu $48\,cm^2$. Unghiul format de o față laterală cu planul bazei are măsura de 60°. Să se afle volumul piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul numeric $(x_n)_{n\ge1}$ pentru care $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}$. Să se afle $x_2 \cdot x_3$.

10. Se consideră funcția $f: D \to R$, $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției.

a) Să se afle punctele de extrem local ale funcției f.

b) Determinați imaginea funcției f (mulțimea valorilor funcției).

c) Aflați valoarea integralei $I = \int_0^1 \dfrac{1-2x}{f(x)}\,dx$.

11.

12.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Formînd numărul de telefon, o persoană a uitat ultimele 2 cifre, amintindu-și doar că ele sunt diferite. Să se afle probabilitatea că s-a format numărul dorit.

12. Aflați termenul care-l conține pe x^{-1} din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}+\frac{a}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$.

TESTUL 43

I. ALGEBRĂ

1. Calculți valoarea expresiei $E = 25^{\log_5 3\sqrt{5} - \log_5 \sqrt{3}}$.

2. Determinați numerele reale a și b, astfel încît $\dfrac{2i - i^2}{3i + i^2} = a + bi$.

3. Aflați mulțimea soluțiilor întregi ale inecuației $(x+1)\sqrt{6 + x - x^2} \geq 0$.

4. Să se rezolve în R ecuația $2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$.

5. Determinați cardinalul mulțimii A, dacă
$A = \{x \in R \mid 4^x - 2^{x+1} + 1 = 0\} \cup \{x \in Z \mid (x^2 - 4) \cdot \sqrt{x+1} = 0\}$.

II. GEOMETRIE

6. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle C) = 60^\circ$ și $AC = 6cm$. Să se afle lungimea cercului circumscris triunghiului ABC.

7. Un triunghi are perimetrul egal cu $48cm$, iar lungimile laturilor triunghiului sunt direct proporționale cu numerele 3, 4 și 5. Să se afle lungimea medianei corespunzătoare laturii mai mari a triunghiului.

8. Fie un con circular drept cu vîrful V și raza bazei de $2\sqrt{6}\,cm$. Coarda $[AB]$ din baza conului are lungimea de $5\sqrt{3}\,cm$, iar $m(\angle AVB) = 120^\circ$. Determinați volumul conului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Scrieți primii cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_2 + a_4 = 26$ și $a_5 - a_3 = 10$.

10. Se consideră funcția $f: R \to R$, $f(x) = x^5 + x$.

a) Calculați limita $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

b) Cîte puncte de extrem are funcția f?

c) Să se afle punctele de inflexiune ale funcției f.

d) Calculați $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-un lot de 10 piese, 7 sunt de calitate superioară. Să se afle probabilitatea ca din 6 piese luate la întîmplare, 4 vor fi de calitate superioară.

12. Determinați numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^{50}$.

TESTUL 44

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\log_3 27+\log_8 2+\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{5}+\log_{\frac{1}{7}}\sqrt[3]{7}$.

2. Fie numărul $z=3i^7+(2-i)^2-7$. Determinați suma dintre partea reală și partea imginară a numărului complex z.

3. Fie $E(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$. Aflați valoarea expresiei $E\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

4. Restul împărțirii polinomului $P(X)=-5X^3+2X^2+a$ la binomul $Q(X)=X-3$ este egal cu -114. Să se afle restul îmărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $R(X)=X+2$.

5. Rezolvați în R ecuația $\log_2\left(2^x+3\right)\cdot\log_2\left(2^{x+2}+12\right)=8$.

II. GEOMETRIE

6. Triunghiul ABC este înscris în cercul $C(O;R)$. Dacă punctele B, O, C sunt coliniare, să se afle $m(\angle A)$.

7. În paralelipipedul drept $ABCDA_1B_1C_1D_1$ baza este rombul $ABCD$ cu lungimea laturii de $8cm$, iar $m(\angle A)=120^\circ$. Determinați lungimea diagonalei AC_1 a paralelipipedului, știind că muchia lui laterală are lungimea de $6cm$.

8. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ și $m(\angle B)=30^\circ$, lungimea razei cercului înscris în triunghi este de $\sqrt{3}\,cm$. Să se afle distanța de la vîrful C al triunghiului pînă la punctul de tangență al cercului înscris cu cateta $[AB]$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se afle suma primior 20 de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$.

   a) Să se calculeze limita $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

c) Aflați aria figurii plane cuprinsă între graficul funcției f, axa O_x și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o lădiță se află mosorele cu ață. 40% din ele sunt cu ață albă, 20% - cu ață roșie, 25% - cu ață albastră și 15% cu ață verde. Să se afle probabilitatea că un mosorel luat la întîmplare, va fi cu ață roșie sau verde.

12. Să se afle exponentul n din dezvoltarea $\left(\sqrt[30]{a^{-1}}+\sqrt[5]{a}\right)^n$, știind că termenul al șaselea al dezvoltării nu-l conține pe a.

TESTUL 45

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}+\log_3 36-\log_3 4$.

2. Să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)=2X^3-3X^2-5X+7$ la binomul $X+2$.

3. Să se afle valorile reale ale lui x și y pentru care are loc egalitatea $\frac{x-2+(y-3)i}{1+i}=1-3i$.

4. Rezolvați în R inecuația $\frac{\sqrt{x-6}}{\log_2(x-5)-1}\geq 0$.

5. Rezolvați în R ecuația $2^{\cos 2x}=3\cdot 2^{\cos^2 x}-4$.

II. GEOMETRIE

6. Aria pătratului înscris într-un cerc este de $\frac{50}{\pi}cm^2$. Să se afle aria discului mărginit de acest cerc.

7. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle C)=90^\circ$, $CD\perp AB$, $D\in(AB)$, $AC=30cm$, $CD=24cm$. Să se afle aria triunghiului ABC.

8. Raza bazei unui cilindru circular drept are lungimea $26cm$, iar generatoarea cilindrului are $48cm$. Să se afle la ce distanță de la axa cilindrului trebuie făcută o secțiune paralelă la axa cilindrului, care să aibă forma de pătrat.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin recurență astfel: $a_1=1$, $a_{n+1}=4+a_n$. Să se afle suma $S=a_1+a_2+a_3$.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=x^3-3x$.

a) Calculați limita $L=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

b) Aflați punctele de extrem local ale funcției f.

c) Să se afle aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa O_X și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Din 10 persoane (6 bărbați și 4 femei) se formează o echipă din 4 persoane. Să se afle probabilitatea ca echipa să conțină și femei.

12. Să se afle exponentul n din dezvoltarea $\left(x+2\sqrt{y}\right)^n$, știind că coeficientul binomial al termenului al patrulea este 120, iar coeficientul binomial al termenului al șaselea este 252.

Scanned with AltaScanner

TESTUL 46

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\frac{4}{5}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\right]^{\log_{65}5}$.

2. Să se arate că numărul $z=\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este întreg.

3. Aduceți la o formă mai simplă expresia $E(x)=\left(1-\sin^2 x\right)\cdot ctg^2x+1-ctg^2x$.

4. Determinați valorile reale ale lui a, pentru care polinomul $P(X)=X^4-\left(2-\sin^2 a\right)X^3+2X^2\cos a+\left(2-5\sin^2 a\right)X+1$ se divide cu binomul $Q(X)=X-1$.

5. Rezolvați în R inecuația $\frac{\log^2_{\frac{2}{3}}|3-x|}{x^2-5x}\leq 0$.

II. GEOMETRIE

6. Fie trapezul $ABCD$ cu $BC \parallel AD$, care este circumscris cercului $C(O;R)$. Dacă $AB+CD=12cm$, să se afle lungimea liniei mijlocii a trapezului.

7. Fie ABC un triunghi, în care $m(\angle A)=60^\circ$, $m(\angle C)=45^\circ$, iar înîlțimea BH are lungimea de $2\sqrt{3}\,cm$, $H\in(AC)$. Determinați aria triunghiului ABC.

8. Baza unei prisme drepte este un triunghi dreptunghic cu o catetă de $8cm$. Raza cercului înscris în triunghiul din baza prismei este de $3cm$ şi este congruentă cu înălțimea prismei. Determinați volumul prismei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ avem $a_1=3$, $a_{16}=63$. Să se afle a_{10}.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$.

a) Să se calculeze limitele $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ şi $L_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Aflați punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați $I = \int_{-1}^{1} x \cdot f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Pentru a obține nota trecătoare la examen, un student trebuie să răspundă la 3 întrebări. Programa conține 30 de întrebări, dintre care studentul a pregătit doar 25. Să se afle probabilitatea că studentul va susține examenul.

12. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care suma dintre termenul al treilea și termenul al cincilea din dezvoltarea $\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$ este egală cu 135, iar suma coeficienților binomiali ai ultimilor trei termeni ai dezvoltării este egală cu 22.

TESTUL 47

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 9^{\log_3 5} - \log_5 25$.

2. Determinați conjugatul numărului complex $z = \frac{3}{i} + 2i^3 - 5$.

3. Rezolvați în R ecuația $3^{x+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-5}$.

4. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ -2 & -2 & x-2 \end{pmatrix}$ este inversabilă.

5. Rezolvați în R inecuația $\log_3(4^x + 1) + \log_{(4^x+1)} 3 > \frac{5}{2}$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră pătratul $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$. Fie M mijlocul lui $[AB]$ și N mijlocul lui $[BC]$. Dacă $MN = 3\sqrt{2}\,cm$, să se afle aria pătratului $ABCD$.

7. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel cu bazele de $12cm$ și $6cm$, iar măsura unghiului de la baza mare a trapezului este de 30°. Determinați aria laterală a trunchiului de con.

8. Bisectoarea unui unghi al unui triunghi împarte latura opusă în două segmente cu lungimile de $8cm$ și $10cm$. Să se afle lungimile laturilor triunghiului, știind că centrul cercului înscris în triunghi împarte această bisectoare în raportul $3:2$, socotind de la vîrful triunghiului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Șirul (a_n) este definit prin formula $a_n = n^2 - 8n - 65$. Stabiliți dacă numărul -45 este termen al șirului, și în caz afirmativ aflați rangul lui.

10. Se consideră funcția $f: R \to R$, $f(x) = e^x - x$.

a) Calculați $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

b) Să se afle punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Din 10 persoane (6 bărbați și 4 femei) se formează o echipă din 4 persoane. Să se afle probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 bărbați și 2 femei.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+x\right)^n$ diferența dintre coeficientul binomial al termenului al patrulea și coeficientul binomial al termenului al treilea este egală cu 75. Să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe x^7.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Din 10 persoane (6 bărbați și 4 femei) se formează o echipă din 4 persoane. Să se afle probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 bărbați și 2 femei.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+x\right)^n$ diferența dintre coeficientul binomial al termenului al patrulea și coeficientul binomial al termenului al treilea este egală cu 75. Să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe x^7.

Scanned with AltaScanner

TESTUL 48

I. ALGEBRĂ

1. Să se afle valoarea expresiei $E = \log_3 27 - \sqrt{6\frac{1}{4}} + 3^{\log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \log_2(x-3) & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 & 2 \end{pmatrix}$. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\det A \leq 2$, unde $\det A$ reprezintă determinantul matricei A.

3. Se consideră $a \in R$ și numărul complex $z = \frac{a+2i}{2+ai}$. Determinați a pentru care $z \in R$.

4. Se consideră expresia $E(x) = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x} + \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\cos x}$, unde $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Arătați că valoarea expresiei $E(x)$ este număr întreg.

5. Rezolvați în R ecuația $\frac{x \cdot 3^{1-x} - 81x}{x+3} = 0$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră pătratul $ABCD$ cu aria de $36 cm^2$, în care $AC \cap BD = \{O\}$, M este mijlocul laturii $[BC]$, N este mijlocul laturii $[CD]$. Să se afle aria patrulaterului $AMCN$.

7. Diagonala unei prisme patrulatere regulate este de $13 cm$, iar diagonala feței laterale este de $12 cm$. Determinați aria totală a prismei.

8. În trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $m(\angle A) = 90°$, se dă: $AD = 2\sqrt{3} cm$, $BC = 6 cm$ și $AB = 3 \cdot CD$. Să se afle lungimile diagonalelor și aria trapezului $ABCD$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_3 = 8$, $a_7 = 20$. Calculați $S = a_5 + a_8$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^2+2x+5}{x+1}$.

a) Scrieți ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.
b) Aflați coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f.
c) Calculați aria figurii plane mărginită de graficul funcției f, de axa O_x, și de dreptele de ecuații $x=2$ și $x=4$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă se află 15 bile identice ca mărime, dintre care 10 bile sunt roii și 5 bile sunt albe. Se extrag la întîmplare 3 bile din urnă. Să se afle probabilitatea ca printre bilele extrase 2 să fie de culoare roșie și una de culoare albă.

12. În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, suma coeficienților binomiali este mai mică decît suma coeficienților binomiali din dezvoltarea $(a+b)^{2n}$ cu 240. Aflați termenul al treilea al primei dezvoltări.

TESTUL 49

I. ALGEBRĂ

1. Arătați că valoarea expresiei $E = 9^{1+\log_3 2}$ este un pătrat perfect.

2. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, astfel încît $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Să se afle $\sin 2\alpha$.

3. Restul împărțirii polinomului $P(X) = X^3 - aX^2 + 6X - 7$ la binomul $X-2$ este egal cu 7. Să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X+2$.

4. Să se rezolve în mulțimea C ecuația $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.

5. Rezolvați în R inecuația $2 + \frac{\log_2^2|x|}{1+\log_2|x|} > \log_2|x|$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 9\,cm$, $AC = 13\,cm$, în care M este mijlocul laturii $[AB]$, N este mijlocul laturii $[BC]$ și $NP \parallel AB$, $P \in (AC)$. Să se afle perimetrul patrulaterului $AMNP$.

7. În triunghiul isoscel ABC cu baza $[BC]$ este înscris un cerc de rază $2\sqrt{3}\,cm$. Înălțimea $[AD]$ a triunghiului este împărțită de punctul de intersecție cu cercul în două segmente, raportul lungimilor cărora este $1:2$, socotind de la vîrful A. Să se afle perimetrul triunghiului ABC.

8. Înălțimea $[VO]$ a piramidei patrulatere regulate $VABCD$ este egală cu $12\sqrt{3}\,cm$, iar raportul dintre aria laterală a piramidei și aria bazei acesteia are valoarea 2. Să se afle aria laterală, aria totală și volumul piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați numărul real pozitiv x, știind că numerele $3, 15, x-5$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

10. Se consideră funcția $f: R\setminus\{-1\} \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - ax + b}{x+1}$, unde a și b sunt parametri reali.

a) Să se determine a și b, știind că graficul funcției f intersectează axa absciselor în punctele de abscise $x_1 = 0$ și $x_2 = 2$.

b) Cu a şi b determinaţi la punctul *a*), scrieţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

c) Calculaţi integrala $I=\int_4^6 f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂŢILOR ŞI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. La un institut de cercetări ştiinţifice lucrează 120 de oameni. 70 din ei cunosc limba engleză, 60 cunosc limba franceză, iar 50 cunosc ambele limbi. Să se afle probabilitatea ca un colaborator ales la întîmplare să nu cunoască nici o limbă.

12. Aflaţi C_n^3, ştiind că termenul al patrulea al dezvoltării $\left(x^2+\frac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{x}\right)^n$ îl conţine pe x^{14}.

TESTUL 50

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=(0,4)^{-2}\cdot\left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

2. Să se rezolve în R inecuația $\begin{vmatrix}\sqrt{x-2} & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}<1$.

3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}iz & 2i-1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. Determinați numerele complexe z, pentru care matricea A nu este inversabilă.

4. Calculați valoarea expresiei $E(\alpha)=\frac{4}{5}tg\alpha+\frac{5}{12}\sin(2\alpha)$, știind că $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ și $\alpha\in\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Rezolvați în R ecuația $\log_2\left(\frac{1}{|x-1|-1}\right)=1$.

II. GEOMETRIE

6. Fie pătratul $ABCD$ cu latura de $6cm$, în care $AC\cap BD=\{O\}$ și $OM\perp AB$, $M\in(AB)$. Să se afle aria patrulaterului $MBCO$.

7. Într-un triunghi dreptunghic isoscel, mediana corespunzătoare ipotenuzei este de $2\sqrt{2}\,cm$. Determinați lungimea medianei corespunzătoare unei catete.

8. Generatoarea unui con circular drept este de $11cm$. Punctele A, B și C aparțin cercului din baza conului, astfel încît $AB=3\sqrt{3}\,cm$, $BC=5\sqrt{3}\,cm$ și $m(\angle ABC)=120^\circ$. Determinați volumul conului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n\geq1}$ cu termenul general $a_n=\frac{2n+5}{n+1}$.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=e^2$.
b) Să se afle intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se calculeze aria figurii plane limitate de graficul funcției f, de axa O_x și de dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Determinați probabilitatea ca un număr natural de 5 cifre, luat la întîmplare, să aibă toate cifrele distincte și prima cifră impară.

12. Aflați termenul care-l conține pe x^5 din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, știind că suma coeficienților binomiali ai acestei dezvoltări este egală cu 128.

Scanned with AltaScanner

TESTUL 51

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $a = 27^{1-\log_3 2}$.

2. Fie polinomul $P(X) = 2X^3 - 5X^2 - 11X + m$.
a) Determinați valorile parametrului real m, dacă se știe că una dintre rădăcinile polinomului este egală cu -1.
b) Determinați celelalte rădăcini ale polinomului $P(X)$ pentru m determinat anterior.

3. Rezolați în R ecuația $\left(\frac{4}{9}\right)^{\sqrt{x}} = (2,25)^{\sqrt{x}-1}$.

4. Fie z_1 și z_2 soluțiile complexe ale ecuației $z^2 + (2+i)z + 3 - i = 0$. Determinați $|z_1 + z_2|$.

5. Rezolvați în R inecuația $\sqrt{x^2 - 4} \cdot [\log_2(1-x) - 3] < 0$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90°$, în care $AB = 7\,cm$ și $BC = 14\,cm$. Fie $[BD$ bisectoarea unghiului ABC al triunghiului, $D \in (AC)$. Să se afle măsura unghiului ABD.

7. Fie trapezul isoscel $ABCD$, în care $AD \parallel BC$, $AD = 6\,cm$, $CD = 2\,cm$ și $BC = 5\,cm$. Dreptele suport ale laturilor AB și CD ale trapezului se intersectează în punctul M. Determinați lungimea înălțimii triunghiului AMD, corespunzătoare laturii AD.

8. Înălțimea unei piramide triunghiulare regulate este de $2\,cm$, iar măsura unghiului diedru de la baza piramidei este de $30°$. Să se afle aria laterală a piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin recurență: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3$. Să se afle valoarea expresiei $E = a_1 \cdot a_4 - a_2 \cdot a_3$.

10. Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \to R$, $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.
a) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

b) Determinați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.
c) Determinați aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de axa O_x și de dreptele de ecuații $x = \frac{1}{e}$ și $x = e$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă se află 3 bile roșii și 2 bile albe, iar în altă urnă se află 2 bile roșii și 3 bile albe, de aceeași mărime. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Să se afle probabilitatea ca ambele bile să fie de culoare roșie.

12. Suma coeficienților binomiali ai prilmilor trei termeni ai dezvoltării $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^n$ este egală cu 121. Să se afle termenul care-l conține pe a^5 din dezvoltarea dată.

TESTUL 52

I. ALGEBRĂ

1. Să se arate că numărul $a = 4^{\log_2 \sqrt{7}} + \log_5 75 - \log_5 3$ este un pătrat perfect.

2. Fie $z = 2i - 5i^3(1-i) + 4$. Determinați conjugatul numărului complex z.

3. Fie $D(x) = \begin{vmatrix} \lg(12-x) & 2 \\ \lg x & 1 \end{vmatrix}$. Rezolvați în R ecuația $D(x) = 0$.

4. Fie polinomul $P(X) = aX^4 + X^3 + bX^2 - X + 6$. Știind că $P(X)$ se divide cu $X+1$ și că restul împărțirii lui $P(X)$ la $X-2$ este egal cu 12, să se afle restul împărțirii lui $P(X)$ la $X+3$.

5. Să se rezolve în R ecuația $6\sin^2 x - 2\sin(2x) = 5$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $AC = 8{,}5\,cm$, $BC = 17\,cm$. Să se afle raportul măsurilor unghiurilor ABC și ACB ale triunghiului ABC.

7. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic isoscel, în care $AB = BC$ și înălțimea AD este de $6\,cm$, $D \in (BC)$. Determinați perimetrul triunghiului ABC, dacă aria lui este egală cu $30\,cm^2$.

8. Într-un con circular drept cu raza bazei de $5\,cm$ și înălțimea de $12\,cm$, se face o secțiune paralelă cu baza, avînd aria de $9\pi\,cm^2$. Să se afle aria laterală și volumul trunchiului de con format.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $\begin{cases} a_1 + a_3 = -4 \\ a_2 + a_5 = 5 \end{cases}$. Să se afle suma primilor cincisprezece temeni ai progresiei.

10. Fie funcția $f : D \to R$, $f(x) = \dfrac{mx - 2}{x^2 - nx + 1}$.

a) Determinați valorile reale ale parametrilor m și n, astfel încît $x = 0$ și $x = 2$ să fie puncte de extrem local pentru funcția f.

b) Pentru m și n determinați anterior, scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul funcției intersectează axa O_x.

c) Determinați aria figurii mărginite de graficul funcției f, axa O_x și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ (cu m și n determinați anterior).

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt 11 bile identice, unele de culoare albă, altele de culoare roșie. Probabilitatea ca extrăgînd 2 bile din urnă, ambele să fie de culoare roșie este egală cu $\dfrac{6}{55}$. Să se afle cîte bile roșii sunt în urnă.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^2}}\right)^n$ diferența dintre coeficientul binomiali ai termenului al treilea și coeficientul binomial al primului termen este egală cu 65. Să se afle termenul care-l conține pe a^6 din această dezvoltare.

TESTUL 53

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 25^{\frac{1}{\log_2 5}} - 64^{\frac{1}{6}}$.

2. Fie $\overline{z} = (2+i)(3-i) - 4 + 5i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul numărului complex z. Determinați numărul complex z.

3. Să se rezolve în R inecuația $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} - \sqrt{\left(\frac{27}{8}\right)^{x}} > 0$.

4. Se dă polinomul $P(X) = X(X-1)(X-a) + 12$, unde a este un parametru real. Se știe că $X = -1$ este rădăcină a polinomului. Să se descompună $P(X)$ în factori.

5. Aflați soluțiile ecuației $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, care verifică condiția $\cos x \geq 0$.

II. GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 60^\circ$ și $m(\angle C) = 50^\circ$. Dacă $[BD$ este bisectoarea unghiului B al triunghiului, $D \in (AC)$, să se afle $m(\angle ABD)$.

7. Diagonala secțiunii axiale a unui cilindru circular drept are lungimea egală cu $8cm$ și formează cu planul bazei cilindrului un unghi cu măsura de 60°. Determinați aria laterală a cilindrului.

8. Să se afle lungimea liniei mijlocii a unui trapez dreptunghic circumscris unui cerc, știind că distanțele de la centrul cercului la extremitățile laturii laterale mai mari sunt egale cu $6cm$ și $8cm$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați monotonia șirului cu termenul general $a_n = \dfrac{(n!)^2}{\sqrt{n!}}$.

10. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2+1}}$.

   a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.
   b) Să se afle punctele de extrem local ale funcției f și valorile funcției în punctele de extrem.

c) Să se fetermine volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei O_x a suprafeţei mărginite de axa O_X şi de graficul funcţiei f.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON.

11. Pe un raft sunt 10 cărţi, dintre care cîteva sunt de matematică. Probabilitatea ca două cărţi luate la întîmplare de pe raft să fie de matematică este egală cu $\frac{1}{3}$. Să se afle cîte cărţi de matematică sunt pe raft.

12. Determinaţi pentru care valori pozitive ale lui x termenul al patrulea al dezvoltării $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^7$ este egal cu 280.

TESTUL 54

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $a = \log_3(3 \cdot \log_3 27) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 \sqrt{2}\right)$.

2. Să se rezolve în R ecuația $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$.

3. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x}$. Arătați că $E\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ este număr natural.

4. Să se determine numerele complexe z, care verifică relația $z^2 - 2\left(z + \bar{z}\right) + 4 = 0$.

5. Să se rezolve în R inecuația $\dfrac{\log^2_{x-1}(5-x)}{x^2-3x} \le 0$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC în care $[AM]$ este mediană, $M \in (BC)$. Dacă $[MD]$ este mediană în triunghiul AMC, $D \in (AC)$, și aria triunghiului DMC este egală cu $18\,cm^2$, să se afle aria triunghiului ABC.

7. Fie ABC un triunghi dreptunghic, în care $m(\angle A) = 90°$, iar bisectoarea $[BM$ împarte cateta $[AC]$ în segmentele $AM = 8\,cm$ și $MC = 10\,cm$. Determinați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

8. Fie piramida triunghiulară regulată cu raza cercului circumscris bazei de $4\,cm$ și măsura unghiului format de fața laterală cu planul bazei de $60°$. Să se afle volumul piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$, în care $a_8 = 32$, $a_{15} = 67$. Să se afle a_{20}.

10. Fie funcția $f : R \to R$, $f(x) = 2\sin^2 x - \sin 2x$.

a) Aduceți la o formă mai simplă expresia $E(x) = f(x) - f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

b) Determinați soluțiile ecuației $f(x) = 0$ situate pe intervalul $[\pi; 2\pi]$.

c) Pentru funcția $f:(0; 2\pi) \to R$, determinați primitiva al cărei grafic trece prin punctul $A\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

d) Determinați valorile reale ale parametrului b pentru care dreapta $y = 2x + b$ este tangentă la graficul funcției f în punctul $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt 10 bile albe, 8 bile roșii și 6 bile galbene. Să se afle probabilitatea ca extrăgînd la întîmplare două bile din urnă, ambele să fie de culoare roșie.

12. Determinați $n \in N^*$ și termenul care-l conține pe x^4 din dezvoltarea $\left(x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)^n$, știind că suma coeficienților binomiali ai acestei dezvoltări este egală cu 128.

TESTUL 55

I. ALGEBRĂ

1. Calculați media aritmetică a numerelor $a=\log_3 18$ și $b=\log_9 \frac{1}{4}$.

2. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției $f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{1}{8}}$.

3. Rezolvați în mulțimea C ecuația $|z|-iz=1-2i$.

4. Să se rezolve în R ecuația $\begin{vmatrix} \log_3(x-4) & \log_4 5 \\ \log_5 4 & 2 \end{vmatrix}=3$.

5. Determinați valorile reale ale lui x pentru care matricea $A=\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 2+e^x & 1 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

II. GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC în care $[BD]$ este înălțime, $D\in(AC)$ și $[AM]$ este mediană, $M\in(BC)$. Dacă $MP\perp AC$ și $MP=5cm$, să se afle BD.

7. Într-o prismă triunghiulară regulată fața laterală este un pătrat cu diagonala de $6\sqrt{2}\,cm$. Determinați volumul prismei.

8. Într-un cerc cu raza de $6cm$, unghiul înscris ABC se sprijină pe un arc de 120°. Determinați lungimile coardelor $[AB]$ și $[BC]$, dacă $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin recurență: $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n+5$. Să se afle produsul $P=a_2\cdot a_3$.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2-2x-1}{x+2}$.

a) Să se determine asimptotele la graficul funcției f.
b) Să se afle intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.

c) Să se afle integrala $I=\int_3^5 f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. 10 bile numerotate cu numerele 1, 2, 3, . . .,10 se așează într-un rînd una după alta. Să se afle probabilitatea ca bila cu numărul 2 să se afle după bila cu numărul 1.

12. Se consideră dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[3]{x^2}\right)^n$, unde $x>0$. Știind că diferența dintre coeficientul binomial al termenului al treilea și coeficientul binomial al primului termen este egală cu 35, să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe $\sqrt{x}$.

TESTUL 56

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

2. Determinați modulul numărului complex $z=\frac{25}{(2-i)^2}$.

3. Să se rezolve în R ecuația $9^{-4x-5}=3^{-x}\cdot\frac{1}{27}$.

4. Arătați că valoarea expreiei $E(x)=\cos^2 x\cdot(tgx+2)(2tgx+1)-5\sin x\cos x$ este număr natural.

5. Să se rezolve în R inecuația $(2-|x-1|)\cdot\log_{\frac{1}{10}}(4x^2+8)\le 0$.

II. GEOMETRIE

6. Un pătrat are aria egală $81cm^2$. Să se afle lungimea diagonalei pătratului.

7. Într-un romb diagonala mică este de $30cm$, iar înălțimea este de $24cm$. Determinați perimetrul rombului.

8. Baza unui paralelipiped drept este un romb. Înălțimea paralelipipedului este egală cu $\sqrt{3}\,cm$, iar diagonalele formează cu planul bazei unghiuri cu măsurile de 45° și 30°. Determinați volumul paralelipipedului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Într-o progresie geometrică $(b_n)_{n\ge1}$ se cunosc: $b_5=61$, $b_{11}=1647$. Să se afle b_7.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=\ln(1+x^2)$.

a) Calculați limita $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Aflați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați integrala $I=\int_0^1 f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă se află 10 bile identice: 3 bile albe şi 7 bile roşii. Se extrag la întîmplare două bile. Care este probabilitatea ca cele două bile extrase să fie de culoare albă ?

12. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, $a \neq 0$, suma coeficienţlor binomiali de rang par este egalî cu 128. Determinaţi termenul care-l conţine pe a^3.

Scanned with AltaScanner

TESTUL 57

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_6 7}}}$.

2. Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)=2X^3+5X^2-3X-4$ la binomul $X+2$.

3. Rezolvați în R inecuația $8\cdot 2^{x^2-3x}<(0,5)^{-1}$.

4. Fie $z=\begin{vmatrix}2-i & 2+3i\\ i & 1+2i\end{vmatrix}$. Aflați modulul numărului complex $\overline{z}$.

5. Să se rezolve în R ecuația $\ln\left(x^2+1\right)-0,5\cdot\ln\left(x^2+2x+1\right)=\ln 3$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ și $m(\angle B)=2\cdot m(\angle C)$. Dacă $AB=6cm$, să se afle BC.

7. Aria laterală a unei prisme patrulatere regulate este egală cu aria bazei. Determinați cosinusul unghiului format de diagonala prismei cu planul bazei.

8. Se consideră triunghiul ABC în care $[MN]$ este linie mijlocie, $M\in(AB)$, $N\in(BC)$ și $MN=5cm$. Dacă perimetrul triunghiului ABC este egal cu $24cm$ și AB este cu $2cm$ mai mare decît BC, să se afle lungimea bisectoarei AD, $D\in(BC)$.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Găsiți trei numere în progresie aritmetică, știind că suma lor este 63, iar raportul dintre primul și cel de-al treilea termen este egal cu $\frac{5}{9}$.

10. Fie funcția $f:R\to R$, $f(x)=x^3-6x^2+9x+m$.

a) Determinați $m\in R$ pentru care $f'(1)=m$.

b) Pentru m determinat la punctul *a*), aflați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați integrala $I=\int_1^2\frac{x^2-4x+3}{f(x)}dx$ cu m determinat la punctul *a*).

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt 12 bile, 8 de culoare albă şi 4 de culoare roşie. Se extrag la întîmplare 6 bile. Să se afle probabilitatea ca printre bilele extrase două să fie de culoare roşie.

12. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{n}$ suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu 128. Să se afle termenul care-l conține pe a^{3}.

TESTUL 58

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \frac{1}{2} \cdot \lg 36 + \log_{0,1} 60$.

2. Să se rezolve în R inecuația $9^{\log_3 x} < 1$.

3. Aflați conjugatul numărului complex $z = \begin{vmatrix} i^2 & i^3 \\ 2-3i & i \end{vmatrix}$.

4. Să se rezolve în $R \times R$ sistemul de ecuații $\begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 1 \\ x - 3y = 16 \end{cases}$.

5. Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{2}\sin^2 x = \cos x$ și să se afle soluțiile ecuației care aparțin intervalului $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.

II. GEOMETRIE

6. Se consideră rombul $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $m(\angle ABO) = 20^\circ$, să se afle $m(\angle BCO)$.

7. Într-un trapez isoscel latura laterală este de $30\,cm$, iar diagonala este de $40\,cm$ și este perpendiculară pe latura laterală. Determinați lungimea bazei mici a trapezului.

8. Înălțimea unei piramide triunghiulare regulate are lungimea de $2\,cm$, iar măsura unghiului diedru de la baza piramidei este de 30°. Aflați aria laterală a piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Arătați că șirul $a_n = \frac{3n-1}{3n+1}$ este mărginit și monoton.

10. Se consideră funcția $f : R \setminus \{2\} \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$.

a) Aflați coordonatlele punctelor de pe graficul funcției f în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{3}{4}$.

b) Determinați mulțimea E a valorilor funcției f.

c) Să se determine primitiva $F : D \to R$ a funcției f, pentru care $F(3) = 2$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu ajutorul cifrelor $1, 2, 3, 4, 5$ se formează toate numerele naturale de trei cifre distincte. Să se afle probabilitatea că luînd la întîmplare un număr din cele formate, el se va divide cu 4.

12. Aflați termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$.

TESTUL 59

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $a = 5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + 2 \cdot \log_5 3}$.

2. Să se afle modulul numărului complex $z = \begin{vmatrix} 2+i & 1-i \\ 3+i & 5-i \end{vmatrix}$.

3. Fie expresia $E(\alpha) = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Să se afle $E\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. Să se afle suma soluțiilor reale ale ecuației $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\dfrac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-9}$.

5. Să se rezolve în R inecuația $\log_4 x^2 + \log_2^2(-x) > 6$.

II. GEOMETRIE

6. Fie pătratul $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$, $AC = 8cm$ și M este mijlocul laturii $[AB]$. Să se afle aria triunghiului MAD.

7. Un cilindru circular drept are volumul egal cu $12cm^3$. Un alt cilindru are înălțimea de trei ori mai mare decît înălțimea primului cilindru și raza bazei de două ori mai mică decît a primului cilindru. Să se afle volumul celui de-al doilea cilindru.

8. Un triunghi dreptunghic are perimetrul egal cu $30cm$. În triunghi este înscris un cerc. Punctul de tangență al cercului cu o catetă împarte această catetă în două segmente, raportul lungimilor cărora este $2:3$, socotind de la vîrful unghiului drept. Afflați lungimile laturilor triunghiului.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Perimetrul unui poligon convex este egal cu $234cm$. Aflați cîte laturi are poligonul, știind că lungimile acestora formează o progresie aritmetică cu rația $4cm$, iar cea mai mare latură are $42cm$.

10. Se consideră funcția $f: R \to R$, $f(x) = e^x - 2x$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1, situat pe graficul funcției f.

b) Să se afle intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.

c) Să se afle primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia trece prin punctul $A(0;\ 5)$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Probabilitatea că un strung care lucrează într-o oră nu va lucra este $0{,}15$, iar al altui strung este de $0{,}16$. Care este probabilitatea ca ambele strunguri vor lucra fără înreruperi ?

12. Aflați termenul care-l conține pe x^6 din dezvoltarea $\left(x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, știind că diferența dintre coeficienții binomiali ai termenilor al treilea și al doilea este egală cu 35.

TESTUL 60

I. ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=(0,027)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\right)^{-2}$.

2. Să se afle modulul numărului complex $z=\left[\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)\right]^{6}$.

3. Să se rezolve în R ecuația $\frac{x\cdot 3^{x-1}-81x}{x+3}=0$.

4. Să se rezolve în $R\times R$ sistemul de ecuații $\begin{cases}2^{x}\cdot 4^{y}=64\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=3\end{cases}$.

5. Să se rezolve în R ecuația $2\cos^{2}x+\sin^{2}x=\frac{3}{2}\sin 2x$.

II. GEOMETRIE

6. Diagonala unui dreptunghi are lungimea de $4\sqrt{10}\,cm$. Să se afle aria discului mărginit de cercul circumscris dreptunghiului.

7. Baza mare a unui trapez isoscel este diametrul cercului circumscris trapezului. Latura laterală a trapezului este de $15\,cm$, iar înălțimea de $12\,cm$. Determinați lungimea razei cercului circumscris trapezului.

8. Muchia laterală și apotema unei piramide triunghiulare regulate sunt egale respectiv cu $11\,cm$ și $7\,cm$. Să se afle aria secțiunii ce trece prin muchia laterală și înălțimea piramidei.

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați trei numere în progresie geometrică care au suma 28, știind că dacă din ultimul termen scădem 4, obținem trei numere în progresie aritmetică.

10. Se consideră funcția $f:R^{*}\to R$, $f(x)=\frac{x^{2}+1}{x}$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.
b) Determinați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.
c) Calculați integrala $I=\int_{1}^{3}f(x)\,dx$.

IV. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt bile roșii și albastre identice. Se știe că probabilitatea extragerii la întîmplare a unei bile albastre este egală cu $\frac{7}{8}$. Știind că în urnă sunt 5 bile roșii, aflați cîte bile albastre sunt în urnă.

12. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n$. Să se afle n, știind că $\frac{T_3}{T_4}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

SOLUȚII

TESTUL 11

1. $E=43$. **2.** $\operatorname{Re} Z=22$. **3.** $S=\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$. **4.** $r=36$. **5.** $m\in\left(-\frac{5}{4};-1\right)\cup(9;+\infty)$. **6.** $l_m=7\,cm$. **7.** $15{,}36\,cm^2$ și $8{,}64\,cm^2$. **8.** $A_{lat}=96\pi\,cm^2$, $V=96\pi\,cm^3$. **9.** $a=32$, $b=512$. **10.** *a)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$; *b)* $x=0$ este punct de maxim local; *c)* $I=\frac{7}{3}$. **11.** $P=\frac{1}{4}$. **12.** $x\in\left\{\frac{\sqrt{10}}{10};100\right\}$.

TESTUL 12

1. $E=24$. **2.** $S=(0;3]$. **3.** $z=2+i$. **4.** $r=-5$. **5.** $S=(-2;-1]\cup[0;3)$. **6.** $V=64\,cm^3$. **7.** $A=\frac{25\sqrt{3}}{2}cm^2$. **8.** $A_{tot}=176\pi\,cm^2$. **9.** $x=-1$. **10.** *a)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-9$; *b)* $x=-2$ este punct de maxim local, $x=2$ este punct de minim local; *c)* $I=4-12\ln 3$. **11.** $P=\frac{1}{5}$. **12.** $T_9=C_{17}^{8}a^3$.

TESTUL 13

1. $E=-\frac{1}{2}$. **2.** $S=\{4;12\}$. **3.** $z_1+z_2=2\sqrt{3}\in R$. **4.** $S=(-3;+\infty)$. **5.** $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. **6.** $AE=3\,cm$. **7.** $A_{tot}=50\left(1+2\sqrt{3}\right)\pi\,cm^2$. **8.** $R=6{,}25\,cm$. **9.** $a_{2022}=6052$. **10.** *a)* $y=x$ este asimptotă oblică la $-\infty$; *b)* Funcția f este strict crescătoare pe R; *c)* $I=0$, deoarece funcția $f(x)$ este impară. **11.** $P(A)=1-\frac{C_{90}^{5}}{C_{100}^{5}}$. **12.** $T_8=-3432\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{x^5}$.

TESTUL 14

1. $E=2\in N$. **2.** $|z|=24$. **3.** $E=0$. **4.** $S=\{4\}$. **5.** $S=(10;+\infty)$. **6.** $A_{ABC}=48\,cm^2$. **7.** $CD=9\sqrt{5}\,cm$. **8.** $A_{lat}=20\pi\,cm^2$, $V=16\pi\,cm^3$. **9.** $a=3$. **10.** *a)* $L=15$; *b)* Funcția f nu are puncte de extrem local; *c)* $A=\frac{7}{4}(u.p)$. **11.** $P=0{,}3$. **12.** Dezvoltarea are un singur termen rațional $T_3=60$.

TESTUL 15

1. $E=1{,}7$. **2.** $S=[2;11)$. **3.** $S=\{-3\}$. **4.** $|z_1-z_2|=3$. **5.** $S=\{5\}\cup\left(4+\sqrt{2};+\infty\right)$. **6.** $A_p=100\,cm^2$. **7.** $AC_1=10\,cm$. **8.** $A=\frac{200}{3}cm^2$. **9.** $a_8=35$. **10.** *a)* $L=-3$; *b)* $x=-1$ este punct de maxim local, $x=1$ este punct de minim local; *c)* $I=\frac{14}{3}-3\ln 3$. **11.** $P=\frac{150}{1001}$. **12.** $P=\frac{7}{41}$.

TESTUL 16

1. $E=43\in N$. **2.** $\det X=1\neq 0$, rezultă că matricea X este inversabilă. **3.** $m=2$. **4.** $S=\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$. **5.** $S=(1;2)\cup(2;3)\cup\{4\}$. **6.** $A_d=18\pi\,cm^2$. **7.** $A_{ABC}=150\,cm^2$. **8.** $A_{lat}=72\,cm^2$. **9.** Trei termeni. **10.** $D=R\setminus\{0\}$. *a)* $x=0$ este asimptotă verticală, $y=0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ și la $+\infty$; *b)* $y=x-1$; *c)* $I=\ln 2-\frac{1}{4}$. **11.** $P=\frac{2}{5}$. **12.** $x=2$.

TESTUL 17

1. $E=2$. **2.** $|z|=1$. **3.** $S=\{3\}$. **4.** $S=(-\infty;-1)$. **5.** $x\in\{0;1;2\}$. **6.** $BC=4{,}5\,cm$, $AD=13{,}5\,cm$. **7.** $d=\sqrt{145}\,cm$. **8.** $V=144\,cm^3$. **9.** Șirul a_n este strict crescător. **10.** *a)* $L=-3$; *b)* $y=-3x+14$; *c)* $A=(4+3\ln 3)\,(u.p)$. **11.** $x\in\left\{10;\,10^{-\frac{5}{2}}\right\}$. **12.** $P=\frac{3}{10}$.

TESTUL 18

1. $a=3\in N$. **2.** $z_1^2+z_2^2=16$. **3.** $S=[-1;1)\cup(3;5]$. **4.** $m=-7$. **5.** $S=\left\{\pi n;\,-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\,\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ n,k,m\in Z\right\}$. **6.** $P_{AOC}=18\,cm$. **7.** $A=54\,cm^2$. **8.** $V=288\sqrt{2}\,cm^3$. **9.** $x=9$. **10.** $D=R\setminus\{0\}$. *a)* $y=2$ este ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ pentru funcția g; *b)* $f(x)$ este descrescătoare pe $(-\infty;0)$ și $(1;+\infty)$ și este crescătoare pe $(0;1)$. Punctul $x=1$ este punct de maxim local; *c)* $I=2\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$. **11.** $P=\frac{3}{13}$. **12.** $n=11$.

TESTUL 19

1. $E=\frac{2}{3}$. **2.** $d=13$. **3.** $r=37$. **4.** $S=\{-5;2\}$. **5.** $S=[-7;-6)\cup\{-5\}$. **6.** $AC=13{,}5\,cm$. 7. $BC=2\sqrt{19}\,cm$ sau $BC=14\,cm$. **8.** $d=10\,cm$. **9.** $a_1+a_9=18$. **10.** *a)* Dreapta $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f; *b)* Funcția f este strict crescătoare pe R; *c)* $A=2(u.p)$. 11. $P=\frac{3}{5}$. **12.** $T_5=210$.

TESTUL 20

1. $E=4=2^2$, deci este pătrat perfect. **2.** $S=\{-i;3i\}$. **3.** $S=[-5;-3]\cup[4;5]$. **4.** $x\in R\setminus\{-4;1;2\}$. 5. $S=\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z\right\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z\right\}$. **6.** $A_{ABCD}=50\,cm^2$. **7.** $V=\frac{1024\sqrt{2}}{3}\pi\,cm^3$, $A_{tot}=128\left(\sqrt{2}+1\right)\pi\,cm^2$. **8.** $A_{romb}=72\sqrt{3}\,cm^2$. **9.** $L=-2$. **10.** *a)* Dreapta $y=2$ este asimptotă orizontală către $+\infty$ și $-\infty$ la graficul funcției f, dreapta $x=4$ este asimptotă verticală; *b)* Funcția f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty;4)$ și $(4;+\infty)$; *c)* $I=10-9\ln 6$. **11.** $P=\frac{4}{45}$. **12.** $n=35$.

TESTUL 21

1. $E=\dfrac{3}{2}$. **2.** $x=-2,\ y=-7$. **3.** $S=[-3;\ 3]$. **4.** $P(X)=(X-3)(X-2)(X+2)$. **5.** $S=\left\{-27;\ -\dfrac{1}{3}\right\}$. **6.** $A_\ell=50\pi\,cm^2$. **7.** $P_{ABC}=36\,cm$. **8.** $V_p=7600\ cm^3$. **9.** $S_{10}=55$. **10.** *a)* $L=0$; *b)* $x=-3$ este punct de minim local, $x=1$ este punct de maxim local; *c)* $I=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}+\dfrac{\sqrt{3}\pi}{18}$. **11.** $P=\dfrac{7}{90}$. **12.** $T_4=84x$.

TESTUL 22

1. $E=\dfrac{7}{4}$. **2.** $z=\dfrac{3}{10}+\dfrac{11}{10}i$. **3.** $S=[3;\ +\infty)$. **4.** $E(\alpha)=-\dfrac{2}{\sin\alpha}$. **5.** $S=5+\sqrt{5}$. **6.** $m(\angle A)=144^\circ$, $m(\angle C)=36^\circ$. **7.** $l=5\,cm$. **8.** $V_{con}=24\pi\,cm^3$. **9.** $a=6$. **10.** *a)* $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$; *b)* $x=0$ este punct de maxim local, $f_{max}=f(0)=-1$; $x=2$ este punct de minim local, $f_{min}=f(2)=3$; *c)* $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|+3$. **11.** $P=\dfrac{C_{19}^3}{C_{20}^4}=\dfrac{1}{5}$. **12.** $T_4=35x^5$.

TESTUL 23

1. $E=21$. **2.** $a=-6$. **3.** $X\in\left\{-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3};\ 2\right\}$. **4.** $S=(0;\ 2)\cup(32;\ +\infty)$. **5.** $x\in\left\{-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{2}\right\}$. **6.** $m=10\,cm$. **7.** $V=250\sqrt{3}\,cm^3$. **8.** $A_{tr}=3\sqrt{3}\,cm^2$. **9.** $L=3$. **10.** *a)* $y=1$; *b)* $\max f(x)=f(2)=\dfrac{5}{4}$, $\min f(x)=f(-2)=\dfrac{3}{4}$; *c)* $A=\left(2+\dfrac{1}{2}\ln 2\right)(u.p)$. **11.** $P=\dfrac{1}{10}$. **12.** $T_{10}=C_{21}^9a^2b^2\sqrt{ab}$.

TESTUL 24

1. $E=1$. **2.** $z=1-i$. **3.** $\sin\alpha\cos\alpha=-0{,}32$. **4.** $S=\{-2;\ 4\}$. **5.** $S=(0;\ 1)\cup(1;\ 4)$. **6.** $m(\angle ABC)=60^\circ$. **7.** $BD=3{,}6\,cm$, $EC=5{,}12\,cm$. **8.** $V_{sf}=36\pi\,cm^3$. **9.** $a_{10}=\dfrac{11}{21}$. **10.** $D(f)=R\setminus\{1\}$. *a)* Dreapta $y=x-6$ este asimptotă oblică la $-\infty$ și la $+\infty$, dreapta $x=1$ este asimptotă verticală; *b)* Punctul $A(-1;\ -9)$ este punct de maxim local, punctul $B(3;\ -1)$ este punct de minim local; *c)* $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-6x+4\ln|x-1|+10$. **11.** $P=\dfrac{3}{7}$. **12.** $x=3$.

TESTUL 25

1. $E=46$. **2.** $a\in\{-3;\ 3\}$. **3.** $S=[-1;\ 3)$. **4.** $X\in\left\{-2;\ 1;\ \dfrac{3}{2}\right\}$. **5.** $S=\{-2;\ -1\}$. **6.** $m(\angle ACB)=60^\circ$. **7.** $V_{con}=768\pi\,cm^3$. **8.** $A=75\,cm^2$. **9.** $S_6=189$. **10.** $a=3$; *b)* $f(x)$ este descescătoare pe intervalele $(-\infty;\ -1)$ și $(-1;\ +\infty)$; *c)* $I=\dfrac{9}{2}$. **11.** $P=\dfrac{3}{5}$. **12.** $T_7=924x^6$.

TESTUL 26

1. $m_a=7$. **2.** $S=\{1\}$. **3.** $S=(3;\ 11]$. **4.** $E(\alpha)=1$. **5.** $S=(-\infty;\ -1)\cup(2;\ +\infty)$. **6.** $A=40\,cm^2$. **7.** Diagonala are lungimea $8\sqrt{5}\,cm$, latura laterală are $4\sqrt{5}\,cm$. **8.** $V=\dfrac{500\sqrt{3}}{9}\,cm^3$. **9.** $a+b+c=30$.

$L = 2$; *b*) $x = -2$ este punct de minim local, $x = 2$ este punct de maxim local; *c*) $A = \frac{1}{2}\ln 2\,(u.p)$.
$p = \frac{2}{5}$. **12.** $A_n^2 = 240$.

TESTUL 27

$f = 11$. **2.** $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$. **3.** $p = -8$, $q = 25$. **4.** $S = \{5\}$. **5.** $S = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{6}{5}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. $R = 24cm$. **7.** Lungimea ipotenuzei este $39\,cm$. **8.** $A_{tot} = 27\sqrt{3}\,cm^2$. **9.** $m_a = 16$. **10.** *a*) $L_1 = 0$ ... $= 0$; *b*) $x = 0$ este punct de maxim local; *c*) $F(x) = 2arctge^x - \frac{\pi}{2}$. **11.** $P = \frac{1}{3}$. **12.** 9 termeni.

TESTUL 28

$f = -1$. **2.** $x = 1$, $y = -3$. **3.** $|z| = 5$. **4.** $S = [-1; +\infty)$. **5.** $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \,\middle|\, k \in Z\right\}$. **6.** $m(\angle B) = 45^\circ$. ... $= 2\sqrt{5}\,cm$. **8.** $V = 8\sqrt{7}\,cm^3$. **9.** $a_3 + a_4 = \frac{4}{27}$. **10.** $D = R$. *a*) Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ şi spre $+\infty$; *b*) Punctul $A(0; -2)$ este punct de minim local, punctul $B\left(2; \frac{2}{3}\right)$ este punct de maxim local; *c*) $A = \left(\ln 3 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)(u.p)$. **11.** $P = \frac{1}{2}$. **12.** $T_6 = 252xy^2\sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

TESTUL 29

1. $E = 5$. **2.** $u = -\frac{8}{5} \in R$. **3.** $S = \{5\}$. **4.** $S = [-2; 2]$. **5.** $a = -4$, $b = 3$, $C(X) = X^2 + 1$. **6.** $P_{ABC} = 28\,cm$. **7.** $V_p = 3cm^3$. **8.** Lungimea ipotenuzei triunghiului este $30\,cm$, lungimile catetelor sunt de $24\,cm$ şi $18\,cm$. **9.** $x = 55$. **10.** Funcţia se mai scrie $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 1}$, cu $D = R \setminus \{-1; 1\}$. *a*) Dreapta de ecuaţie $y = 1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$. Dreptele de ecuaţii $x = -1$ şi $x = 1$ sunt asimptote verticale; *b*) Ecuaţiile tangentelor sunt: $y = \frac{3}{4}(x - 3)$ şi $y = -\frac{3}{4}(x + 3)$; *c*) $x = 0$ este punct de minim local; *d*) $I = \frac{7}{2} - 8 \cdot \ln 2$. **11.** 16 mere roşii. . **12.** $T_6 = 252ab$.

TESTUL 30

1. $a = 3$. **2.** $x = -5$, $y = -1$. **3.** $S = (0; 1]$. **4.** $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$. **5.** $S = \{-\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{3}\}$. **6.** $CD = 9cm$. **7.** $A_{BEDF} = 4{,}32\,cm^2$. **8.** $H = 13cm$. **9.** $S = 22$. **10.** *a*) Dreapta $y = x + 2$ este asimptotă oblică la $-\infty$ şi la $+\infty$. Dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală; *b*) Funcţia f este crescătoare pe intervalele $(-\infty; -1]$ şi $[3; +\infty)$ şi este descrescătoare pe intervalele $[-1; 1)$ şi $[1; 3)$; *c*) $A = 4\ln 2\,(u.p)$. **11.** $P = \frac{3}{10}$. **12.** $T_5 = 55a^2$.

TESTUL 31

1. $E = 2$. **2.** $|z| = 13$. **3.** $S = \{3\}$. **4.** $S = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **5.** $S = \{\pi k \mid k \in Z\}$. **6.** $P = 28cm$. **7.** $P_{CDE} = 18cm$

8. $A_{lat} = 45\sqrt{3}\,cm^2$, $V = \frac{135\sqrt{3}}{4}cm^3$. **9.** $a_1 = \frac{3}{2}$. **10.** $D = R\setminus\{-1\}$. *a*) Dreapta $y = x+1$ este asimptotă oblică la $-\infty$ și la $+\infty$. Dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală; *b*) Punctul $A(-3;\,-4)$ este punct de maxim local, punctul $B(1;\,4)$ este punct de minim local; *c*) $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x+1| - \frac{3}{2} - 4\ln 2$. **11.** $P = \frac{1}{5}$. **12.** $T_7 = 84a^3\sqrt{a}$.

TESTUL 32

1. $a = -1 \in Z$. **2.** $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$, $d = 2$. **3.** $z = 1+2i$. **4.** $S = \{4\}$. **5.** $P(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1$. **6.** $A = 36\,cm^2$. **7.** $A_{tot} = 24\pi\,cm^2$, $V = 12\pi\,cm^3$. **8.** $A = 3{,}75\,cm^2$. **9.** Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător. **10.** *a*) Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$; *b*) $x = 2$ este punct de maxim local; *c*) $\int_2^e \frac{1}{f(x)e^x}dx = \ln(e-1)$. **11.** 6 cărți de matematică. **12.** 3 termeni întregi.

TESTUL 33

1. $E = 7$. **2.** $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$. **3.** $a = -8$, $b = 0$. **4.** $S = (1;\,2)\cup(3;\,4)$. **5.** $S = \left[\frac{3}{2};\,\frac{7}{2}\right)$. **6.** $BC = 6cm$. **7.** $P = 16\left(\sqrt{3}+1\right)cm$. **8.** $V = \frac{4\sqrt{6}}{3}cm^3$. **9.** $a_1 = 2$, $a_6 = 17$. **10.** *a*) $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$; *b*) Funcția este crescătoare pe intervalele $(-\infty;\,0]$ și $[2;\,+\infty)$ și este descescătoare pe intervalele $[0;\,1]$ și $[1;\,2]$; *c*) $A = \left(\frac{21}{2} + \ln 4\right)(u.p)$. **11.** $P = \frac{1}{9}$. **12.** $S = 32$.

TESTUL 34

1. $a = 3 \in N$. **2.** $S = \left(-1;\,-\frac{2}{3}\right)$. **3.** $z = 5+12i$. **4.** $a = 2$, $b = 7$, $C(X) = 2X + 17$. **5.** $x \in R\setminus\{-2;1\}$. **6.** $m(\angle ACB) = 60^\circ$. **7.** *a*) $A_{ABC} = 72\sqrt{3}\,cm^2$, $\frac{A_{CDE}}{A_{ABC}} = \frac{9}{16}$. **8.** $V = 6\,cm^3$. **9.** Se precaută semnul diferenței $x_{n+1} - x_n$. **10.** *a*) Dreapta $y = x+2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$; *b*) Funcția f nu are puncte de extrem local; *c*) $I = 6 - \frac{1}{2}\ln 5$. **11.** $P = \frac{10\cdot C_5^2 + C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{22}{91}$. **12.** $x \in \left\{-1;\,1;\,-i\sqrt{6};\,i\sqrt{6}\right\}$.

TESTUL 35

1. $a = 2$. **2.** $|z| = 1$. **3.** $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$. **4.** $S = (-\infty;\,-1)$. **5.** $x = 2$. **6.** De două ori. **7.** $V = 240\,cm^3$. **8.** $A_{ABC} = 72\,cm^2$. **9.** $b_6 = 96$. **10.** *a*) Dreapta $y = 2$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$, dreapta $y = -2$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$; *b*) Funcția f este strict crescătoare pe R; *c*) $F(x) = 2\sqrt{x^2+4} + 2$. **11.** $P = \frac{15}{91}$. **12.** $x \in \left\{10^{\frac{4-\sqrt{34}}{3}};\,10^{\frac{4+\sqrt{34}}{3}}\right\}$.

TESTUL 36

1. $E = 0$. 2. $x = 6$. 3. $x = 1$, $y = 1$ sau $x = -1$, $y = 1$. 4. $\sin 2\alpha = -\frac{8}{9}$. 5. $S = (1; +\infty)$. 6. $A_{MNPQ} = 48\,cm^2$. 7. $A = 48\,cm^2$. 8. $A_{lat} = 41,6\pi\,cm^2$, $V = 78,4\pi\,cm^3$. 9. Se precaută semnul diferenței $x_{n+1} - x_n$. 10. $D = R\setminus\{0\}$. *a)* Dreapta $y = x - 3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ și spre $-\infty$, dreapta $x = 0$, adică axa Oy este asimptotă verticală; *b)* $f_{\max} = f(1) = 2$, $f_{\min} = f(2) = 0$; *c)* $I = \frac{2}{3}$. **11.** $P = \frac{2}{7}$. **12.** *a)* Nu există $n \in N^*$, astfel încît să fie îndeplinită condiția din enunț; *b)* $T_1 = x^4$, $T_5 = \frac{35}{8}x$.

TESTUL 37

1. $a = -4 \in Z$. **2.** $z = i$. **3.** $S = \{0; 1\}$. **4.** $P(X) = (X-1)(X+3)(X+4)$. **5.** $S = [-1; 0) \cup (0; 2]$. 6. $A_{ABCD} = 52\,cm^2$. **7.** $P_{ABC} = 4\left(5 + \sqrt{13}\right)cm$, $A_{ABC} = 16\sqrt{3}\,cm^2$. **8.** *a)* $A_{lat} = 36\sqrt{7}\,cm^2$, $V = 36\sqrt{6}\,cm^3$; *b)* $d = \frac{3\sqrt{42}}{7}cm$. **9.** $a_1 = 29$, $n = 7$. **10.** $D = R\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$. *a)* $4x - 9y - 6 = 0$; *b)* Funcția f este crescătoare pe intervalele $(-\infty; -2)$ și $(-1; +\infty)$ și este descrescătoare pe intervalele $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$ și $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$; *c)* $A = \left(5 + \frac{1}{8}\ln\frac{15}{7}\right)(u.p)$. **11.** 11 bile sau 45 bile. **12.** $T_7 = C_{18}^6 \cdot \frac{x}{a^6}$.

TESTUL 38

1. $a = 12,5$. **2.** $z = -1 \in Z$. **3.** $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$. **4.** $S = \{4\}$. **5.** $S = [1; 3]$. **6.** $m(\angle ACD) = 58^\circ$. 7. $A_{tot} = 72\left(\sqrt{2} + 1\right)cm^2$. **8.** $3\,cm$ și $5\,cm$. **9.** Șirul este mărginit și toți termenii șirului se află în intervalul $\left[\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right]$. **10.** $m = 1$, $n = -1$, deci avem funcția $f: R\setminus\{1\} \to R$, $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$. *a)* Dreapta $y = x + 2$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ și spre $+\infty$. Dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală; *b)* $A(0; 1)$ este punct de maxim local, $B(2; 5)$ este punct de minim local; *c)* $A = \left(\frac{33}{2} + 2\ln 2\right)(u.p)$.

11. $P = \frac{1}{15}$. **12.** $C_{12}^6 = 924$.

TESTUL 39

1. $E = 680$. **2.** $S = \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$. **3.** $S = \left(\frac{4}{3}; \frac{20}{3}\right]$. **4.** $P(X) = (X-1)(X+2)(X-3)$. **5.** $x = 0$. 6. $m(\angle BAC) = 80^\circ$. **7.** $A_{ABD} = 27\,cm^2$. **8.** $V_{pir} = 640\,cm^3$. **9.** $b_7 = -162$. **10.** $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, deci avem funcția $f: R\setminus\{1\} \to R$, $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$. *a)* $x - 2y + 1 = 0$; *b)* Funcția f este crescătoare pe intervalele $\left(-\infty; 1 - \sqrt{2}\right)$ și $\left(1 + \sqrt{2}; +\infty\right)$, este descrescătoare pe intervalele $\left(1 - \sqrt{2}; 1\right)$ și $\left(1; 1 + \sqrt{2}\right)$; *c)* $A = \left(2\ln 2 + \frac{3}{2}\right)(u.p)$. **11.** 4 bile roșii. **12.** $T_6 = \frac{56}{x+1}$.

TESTUL 40

1. $\sqrt[3]{a}=2$. **2.** $|z|=\sqrt{74}$. **3.** $S=\{3\}$. **4.** $f\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-f\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)=0$. **5.** $S=\left[-3\frac{1}{8};-2\frac{7}{8}\right]\cup\left[2\frac{7}{8};3\frac{1}{8}\right]$. **6.** $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **7.** $d=6\sqrt{3}\,cm$. **8.** $A_{lat}=60\left(3+\sqrt{3}\right)cm^2$. **9.** $L=-\frac{1}{2}$. **10.** $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ *a)* Dreapta $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$, dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$, dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală la stînga, dreapta $x=1$ este asimptotă verticală la dreapta; *b)* Fucția f nu are puncte de extrem local; *c)* $F(x)=\sqrt{x^2-1}+1$. **11.** $P=\frac{A_5^3\cdot P_4}{A_9^7}=\frac{1}{126}$. **12.** $T_5=C_{16}^4x^9$, $T_{17}=x^4$.

TESTUL 41

1. $E=24$. **2.** $z=i$. **3.** $S=\{5\}$. **4.** $S=(3;5]$. **5.** $S=\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z\right\}$. **6.** $P=18cm$. **7.** $V_{con}=8\pi\,cm^3$. **8.** $12cm$, $9cm$ și $15cm$. **9.** $S_7=56$. **10.** *a)* Dreapta $y=-ax$ este asimptotă oblică spre $-\infty$; *b)* $x=\ln a$ este punct de minim local; *c)* $I=e^2-2a-1$. **11.** $P=\frac{C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{14}$. **12.** $C_n^{n-2}=C_{20}^{18}=190$.

TESTUL 42

1. $E=-\frac{1}{2}$. **2.** $\bar{z}=-4-6i$. **3.** $m=-44$. **4.** $x\in\left\{\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$. **5.** $S=\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup(0;+\infty)$. **6.** $m(\angle BAC)=36^\circ$. **7.** $R=12{,}5cm$. **8.** $V=24\sqrt{2}\,cm^3$. **9.** $x_2\cdot x_3=\frac{\sqrt{6}}{6}$. **10.** $D=[-1;2]$. *a)* $x=\frac{1}{2}$ este punct de maxim local; *b)* $E(f)=\left[0;\frac{3}{2}\right]$; *c)* $I=0$. **11.** $P=\frac{1}{90}$. **12.** $T_{13}=18564a^6x^{-1}$.

TESTUL 43

1. $E=15$. **2.** $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$. **3.** $S=\{-1;0;1;2;3\}$. **4.** $S=\left\{3;3+\sqrt{2}\right\}$. **5.** $card\,A=3$. **6.** $L=12\pi\,cm$. **7.** $l_{med}=10cm$. **8.** $V_{con}=8\pi\,cm^3$. **9.** 3; 8; 13; 18; 23. **10.** *a)* $L=6$; *b)* Funcția f nu are puncte de extrem; *c)* $x=0$ este punct de inflexiune; *d)* $I=0$. **11.** $P=\frac{C_7^4\cdot C_3^2}{C_{10}^6}=\frac{1}{2}$. **12.** 17 termeni raționali.

TESTUL 44

1. $E=1$. **2.** $S=-11$. **3.** $E\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}$. **4.** $r=51$. **5.** $S=\{0\}$. **6.** $m(\angle A)=90^\circ$. **7.** $AC_1=10cm$. **8.** $d=\sqrt{15+6\sqrt{3}}\,cm$. **9.** $S_{20}=100$. **10.** *a)* $L=0$; *b)* $x=0$ este punct de minim local; *c)* $A=\frac{1}{2}\left(e^2-e^{-2}\right)(u.p)$. **11.** $P=\frac{1}{5}+\frac{3}{20}=\frac{7}{20}$. **12.** $n=35$.

TESTUL 45

1. $E=3,5$. **2.** $r=-11$. **3.** $x=6$, $y=1$. **4.** $S=\{6\}\cup(7;+\infty)$. **5.** $S=\{k\pi, k\in Z\}$. **6.** $A_d=25cm^2$. 7. $A_{ABC}=600cm^2$. **8.** $d=10cm$. **9.** $S=15$. **10.** *a)* $L=9$; *b)* $x=-1$ este punct de maxim local, $x=1$ este punct de minim local; *c)* $A=\frac{5}{2}(u.p)$. **11.** Numărul cazurilor posibile este $n=C_{10}^4=210$. Numărul cazurilor favorabile este $m=C_4^4+C_4^3\cdot C_6^1+C_4^2\cdot C_6^2+C_4^1\cdot C_6^3=195$, atunci $P=\frac{m}{n}=\frac{195}{210}=\frac{13}{14}$. 12. $n=10$.

TESTUL 46

1. $E=4$. **2.** $z=-1\in Z$. **3.** $E(x)=\sin^2 x$. **4.** $a_1=\pi+2n\pi$, $n\in Z$, $a_2=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$. 5. $S=(0;3)\cup(3;5)$. **6.** $l_m=6cm$. **7.** $A_{ABC}=\left(6+2\sqrt{3}\right)cm^2$. **8.** $V=180cm^3$. **9.** $a_{10}=39$. **10.** *a)* $L_1=0$, $L_2=0$; *b)* $x=0$ este punct de minim local; *c)* $I=0$. **11.** $P=\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}\cdot\frac{23}{28}=\frac{115}{203}$. **12.** $x\in\{-1;2\}$.

TESTUL 47

1. $E=23$. **2.** $\bar{z}=-5+5i$. **3.** $S=\{1\}$. **4.** $x\in R\setminus\{-2;1\}$. **5.** $S=\left[-\infty;\log_4\left(\sqrt{3}-1\right)\right]\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. 6. $A=36cm^2$. **7.** $A_{lat}=18\sqrt{3}\,\pi\,cm^2$. **8.** $12cm$, $15cm$, $18cm$. **9.** $a_{10}=-45$. **10.** *a)* $L=0$; *b)* $x=0$ este punct de minim local; *c)* $I=e-\frac{3}{2}$. **11.** $P=\frac{C_6^2\cdot C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{7}$. **12.** $T_5=210x^7$.

TESTUL 48

1. **$E=1$.** **2.** $S=(3;7]$. **3.** $a\in\{-2;2\}$. **4.** $E(x)=-2\in Z$. **5.** $S=\{0\}$. **6.** $A=18cm^2$. 7. $A_{tot}=\left(50+20\sqrt{119}\right)cm^2$. **8.** $AC=3\sqrt{2}\,cm$, $BD=\sqrt{66}\,cm$, $A_{tr}=12\sqrt{2}\,cm^2$. **9.** $S=37$. **10.** $D=R\setminus\{-1\}$. *a)* Dreapta $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ și spre $+\infty$, dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală; *b)* $A(-3;-4)$ este punct de maxim local, $B(1;4)$ este punct de minim local; *c)* $A=\left(8+4\ln\frac{5}{3}\right)(u.p)$. **11.** $P=\frac{45}{91}$. **12.** $T_3=6\sqrt[3]{x}$.

TESTUL 49

1. $E=36=6^2$, deci este pătrat perfect. **2.** $\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$. **3.** $r=-33$. **4.** $S=\{1;-i;i\}$. **5.** $S=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **6.** $P=22cm$. **7.** $P=36cm$. **8.** $A_{lat}=1152cm^2$, $A_{tot}=1728cm^2$, $V=2304\sqrt{3}\,cm^3$. **9.** $x=80$. **10.** *a)* $a=2$, $b=0$; *b)* Dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală, dreapta $y=x-3$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ și spre $+\infty$; *c)* $I=4+3\ln\frac{7}{5}$. **11.** $P=\frac{1}{3}$. **12.** $C_n^3=C_{11}^3=165$.

TESTUL 50

1. $E=1$. **2.** $S=[2;11)$. **3.** $z=6+3i$. **4.** $E(\alpha)=1$. **5.** $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right\}$. **6.** $A=13{,}5\,cm^2$. **7.** $l_m=2\sqrt{5}\,cm$. **8.** $V=98\sqrt{2}\,\pi\,cm^3$. **9.** Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. **10.** $D=(0;+\infty)$. *a)* $y=-\frac{3}{e^6}x+\frac{5}{e^4}$; *b)* Funcţia f este crescătoare pe intervalul $(0;\sqrt{e})$ şi este descrescătoare pe intervalul $(\sqrt{e};+\infty)$; *c)* $A=\frac{e-2}{e}(u.p)$. **11.** $P=\frac{5}{9}$. **12.** $T_4=35x^5$.

TESTUL 51

1. $a=3\frac{3}{8}$. **2.** *a)* $m=-4$; *b)* $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=4$. **3.** $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$. **4.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$. **5.** $S=(-7;-2)$. **6.** $m(\angle ABD)=30^\circ$. **7.** $h=3\sqrt{15}\,cm$. **8.** $A_{lat}=72\,cm^2$. **9.** $E=-18$. **10.** *a)* Dreapta $y=0$ (axa absciselor) este asimptotă orizontală spre $+\infty$, dreapta $x=0$ (axa ordonatelor este asimptotă verticală la dreapta; *b)* funcţia f este crescătoare pe intervalul $(0;1)$ şi este descrescătoare pe intervalul $(1;+\infty)$. $x=1$ este punct de maxim local; *c)* $A=2(u.p)$. **11.** $P=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$. **12.** $T_4=455a^5$.

TESTUL 52

1. $a=9=3^2$, deci este pătrat perfect. **2.** $\bar{z}=9-7i$. **3.** $S=\{3\}$. **4.** $a=2$, $b=-8$, $r=72$. **5.** $S=\{arctg5+\pi k \mid k\in Z\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n \,\middle|\, n\in Z\right\}$. **6.** $\frac{m(\angle ABC)}{m(\angle ACB)}=\frac{1}{2}$. **7.** $P_{ABC}=\left(20+2\sqrt{10}\right)cm$. **8.** $A_{lat}=41{,}6\pi\,cm^2$, $V=78{,}4\pi\,cm^3$. **9.** $S_{15}=240$. **10.** *a)* $m=2$, $n=1$; *b)* $y=2x-2$; *c)* $A=\left(\ln 3-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)(u.p)$. **11.** 4 bile roşii. **12.** $T_1=a^6$.

TESTUL 53

1. $E=2$. **2.** $z=3-6i$. **3.** $S=\left(-\infty;-\frac{6}{5}\right)$. **4.** $a=5$, atunci $P(X)=(X+1)(X-3)(X-4)$. **5.** ${}_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$, $x_2=\frac{\pi}{6}+2\pi n$ $n\in Z$. **6.** $m(\angle ABD)=35^\circ$. **7.** $A_{lat}=16\sqrt{3}\pi\,cm^2$. **8.** $l_m=9{,}8\,cm$. **9.** Se arată că $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, deci şirul este crescător. **10.** *a)* Dreapta $y=-x+3$ este asimptotă oblică spre $-\infty$, dreapta $y=x-3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$; *b)* $x=1$ este punct de minim, $f_{min}=f(1)=-\sqrt{2}$; *c)* $V=\pi\cdot(6-3\ln 10-8arctg3)(u.c)$. **11.** 6 cărţi de matematică. **12.** $x=8$.

TESTUL 54

1. $a=3$. **2.** $S=\{2\}$. **3.** $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\in N$. **4.** $z_1=-2i$, $z_2=2i$, $z_3=2$. **5.** $S=(1;2)\cup(2;3)\cup\{4\}$. **6.** $A_{ABC}=72\,cm^2$. **7.** $R=15\,cm$. **8.** $V=24\,cm^3$. **9.** $a_{20}=92$. **10.** *a)* $E(x)=-2\cos(2x)$;

b) $S=\left\{\pi; \frac{5\pi}{4}; 2\pi\right\}$; c) $F:(0; 2\pi)\to R$, $F(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$; d) $b=-\frac{\pi}{2}$

11. $P=\frac{7}{69}$. **12.** $n=7$, $T_3=21x^4$.

TESTUL 55

1. $m=1$. **2.** $D=(-\infty; 3]$. **3.** $z=2-\frac{3}{2}i$. **4.** $x=13$. **5.** $x=\ln 2$. **6.** $BD=10cm$. **7.** $V=54\sqrt{3}\,cm^3$ 8. $AB=6cm$, $BC=12cm$. **9.** $P=297$. **10.** $D(f)=(-\infty; -2)\cup(-2; +\infty)$. *a)* Dreapta $y=x-4$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ şi spre $+\infty$, dreapta $x=-2$ este asimptotă verticală; *b)* Funcţia f este crescătoare pe intervalele $\left(-\infty; -2-\sqrt{7}\right)$ şi $\left(-2+\sqrt{7}; +\infty\right)$, şi este descrescătoare pe intervalele $\left(-2-\sqrt{7}; -2\right)$ şi $\left(-2; -2+\sqrt{7}\right)$. Punctul $x=-2-\sqrt{7}$ este punct de maxim local, punctul $x=-2+\sqrt{7}$ este punct de minim local; *c)* $I=7\ln\frac{7}{5}$. **11.** $P=\frac{9\cdot 8!}{10!}=\frac{1}{10}$. **12.** $T_4=84\sqrt{x}$.

TESTUL 56

1. $E=20$. **2.** $|z|=5$. **3.** $x=-1$. **4.** $E(x)=2\in N$. **5.** $S=[-1; 3]$. **6.** $d=9\sqrt{2}\,cm$. **7.** $P_{romb}=100cm$. 8. $V=4{,}5cm^3$. **9.** $b_7=183$. **10.** *a)* $L=0$; *b)* funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty; 0)$ şi este crescătoare pe intervalul $(0; +\infty)$. Punctul $x=0$ este punct de minim local; *c)* $I=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$. 11. $P=\frac{1}{15}$. **12.** $T_5=70a^3$.

TESTUL 57

1. $E=6\sqrt{2}$. **2.** $r=6$. **3.** $S=(1; 2)$. **4.** $|\bar{z}|=5\sqrt{2}$. **5.** $S=\left\{\frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}$. **6.** $BC=12cm$. **7.** $\cos\alpha=\frac{4\sqrt{66}}{33}$. **8.** $AD=\frac{8\sqrt{10}}{3}cm$. **9.** 15, 21, 27. **10.** *a)* $m=0$; *b)* funcţia f este crescătoare pe intervalele $(-\infty; 1)$ şi $(3; +\infty)$, este descrescătoare pe intervalul $(1; 3)$. $x=1$ este punct de maxim, $x=3$ este punct de minim; *c)* $I=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}$. **11.** $P=\frac{C_4^2\cdot C_8^4}{C_{12}^6}=\frac{5}{11}$. **12.** $T_5=70a^3$.

TESTUL 58

1. $E=-1$. **2.** $S=(0; 1)$. **3.** $\bar{z}=3-i$. **4.** $S=\{(64; 16)\}$. **5.** $x\in\left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$. **6.** $m(\angle BCO)=70^\circ$. **7.** Baza mică a trapezului are lungimea $14cm$. **8.** $A_{lat}=72cm^2$. **9.** Avem $a_{n+1}-a_n=\frac{6}{(3n+4)(3n+1)}>0$, deci şirul este crescător, apoi obţinem $a_n\in\left[\frac{1}{2}; 1\right)$, deci şirul este mărginit. **10.** *a)* $A\left(0; -\frac{7}{2}\right)$, $B\left(4; \frac{3}{2}\right)$; *b)* $E=(-\infty; -3]\cup[1; +\infty)$; *c)* $F:R\setminus\{2\}\to R$, $F(x)=\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x-2|+\frac{13}{2}$. **11.** $P=\frac{1}{5}$. **12.** $T_4=20$.

TESTUL 59

1. $a=144$. **2.** $|z|=\sqrt{74}$. **3.** $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $S=-\frac{3}{2}$. **5.** $S=(-\infty;-4)\cup\left(-\frac{1}{8};0\right)$. **6.** $A_{MAD}=8cm^2$. **7.** $V_{cil}=9cm^3$. **8.** $5cm$, $12cm$, $13cm$. **9.** 9 laturi. **10.** *a*) $y=(e-2)x$; *b*) funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty;\ln 2)$ şi este crescătoare pe intervalul $(\ln 2;+\infty)$. Punctul $x=\ln 2$ este punct de minim local; *c*) $F(x)=e^x-x^2+4$. **11.** $P=0,714$. **12.** $T_5=210x^6$.

TESTUL 60

1. $E=10$. **2.** $|z|=4$. **3.** $S=\{0;5\}$. **4.** $S=\{(4;1)\}$. **5.** $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$, $x_2=arctg2+\pi k$, $k\in Z$. **6.** $A_l=40\pi cm^2$. **7.** $R=12,5cm$. **8.** $A_{sec}=15\sqrt{6}cm^2$. **9.** 16, 8, 4 sau 4, 8, 16. **10.** *a*) Dreapta $y=x$ este asimptotică oblică spre $-\infty$ şi spre $+\infty$, dreapta $x=0$ este asimptotă verticală; *b*) Funcţia f este crescătoare pe intervalele $(-\infty;-1)$ şi $(1;+\infty)$, şi este descrescătoare pe intervalele $(-1;0)$ şi $(0;1)$. Punctul $x=-1$ este punct de maxim local, punctul $x=1$ este punct de minim local; *c*) $I=4+\ln 3$. **11.** 35 de bile albastre. **12.** $n=6$.