В. А. ГУСЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

5 — 9 классы

Учебное пособие для общеобразовательных учреждений

Москва
«ОНИКС 21 век»
«Мир и Образование»
2005

УДК 514(076.2)
ББК 22.151я72
Г96

Гусев В. А.

Г96 Сборник задач по геометрии. 5—9 кл.: Учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / В. А. Гусев. — М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2005. — 480 с.: ил.

ISBN 5-329-01213-9 (ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»)
ISBN 5-94666-172-8 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

Сборник содержит задачи по курсу геометрии в соответствии с программой основной школы. Он состоит из двух частей: в первую часть включены задачи, относящиеся к темам обязательной программы, во вторую — задачи по дополнительным темам курса.

Задачи в сборнике распределены по 6 группам: задачи и вопросы, ответы на которые учат делать выводы; задачи для самоконтроля; стандартные и учебные задачи; творческие и исследовательские задания.

Пособие рассчитано на учащихся и преподавателей школ, лицеев и гимназий.

УДК 514(076.2)
ББК 22.151я72

ISBN 5-329-01213-9
(ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»)
ISBN 5-94666-172-8
(ООО «Издательство «Мир и Образование»)

© Гусев В. А., 2005
© ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век».
Оформление обложки, 2005

К ЧИТАТЕЛЮ

Что представляет собой данный сборник задач по геометрии для основной школы? Чем он отличается от многих других аналогичных задачников?

Отметим, что вторая половина XX века была посвящена реформированию школьного математического образования. Начиная с 50—60-х годов появилось множество учебников и задачников по геометрии, в основном, создаваемых под руководством и при непосредственном участии выдающегося математика академика А. Н. Колмогорова.

Одной из целей данного сборника задач является сохранение накопленного за этот период в России фонда задач по геометрии для основной школы и использование его в условиях дифференцированного обучения математике.

В программу по математике основной школы (5—9-е классы) в разное время входило разное содержание, однако набор тем оставался практически одним и тем же. Естественно, что среди них есть «пограничные темы», «пересечение тем», «оригинальные темы», но основа содержания обучения традиционно сохраняется.

В последние годы появились учебники по геометрии [1—7], построенные на реализации идей фузионизма. Однако в предлагаемом сборнике задач это проявляется только в начале первой главы, где рассматриваются свойства основных геометрических фигур, а в основном он содержит задачи на плоскости, т. е. задачи планиметрии.

Сборник состоит из двух частей:

Часть I. Задачи, относящиеся к темам обязательной программы по геометрии для основной школы.

Часть II. Задачи по дополнительным темам курса геометрии для основной школы.

Задачи из второй части можно рекомендовать при углубленном изучении геометрии или при различных формах индивидуальной работы со школьниками.

К подавляющему числу задач в конце пособия приводятся ответы, указания или решения.

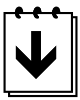
В настоящее время существует достаточно много различных учебников и задачников, где встречаются разнообразные трактовки тех или иных геометрических понятий и различные обозначения. В связи с этим в начале каждого параграфа помещены два пункта:

Основное теоретическое содержание. Здесь приводится минимальная теоретическая информация, необходимая для решения предлагаемых задач.

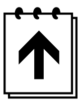
Термины и обозначения. Здесь указаны используемая в задачнике терминология и минимальный список обозначений.

Рисунки в задачнике имеют двойную нумерацию (в том числе рисунки, включенные в ответы): первая цифра указывает номер темы, вторая — порядковый номер рисунка. Например, **рис. 6.15** — это 15-й рисунок в теме 6, **рис. 6.50** — это 50-й рисунок из ответов к теме 6.

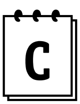
Задачи в сборнике подобраны по всему непрерывному спектру трудностей и сложностей: от задач на самом элементарном уровне, которые должны решать все учащиеся, не обладающие высоким уровнем математических способностей, до задач творческих, исследовательских, которые могут быть предложены учащимся, проявляющим интерес к обучению геометрии. В этой связи используются специальные знаки, обозначающие соответствующие группы задач.



Задачи и вопросы, ответы на которые *учат делать выводы* (мы их называем «учись делать выводы»). С помощью этих задач можно проверить, усвоен основной теоретический материал или нет. Уметь решать такие задачи должен каждый ученик.



Задачи для самоконтроля (мы их называем «ищи причину вывода»): решая их, нужно не только получить следствие из условия задачи, но и *выяснить причину появления* этого *следствия*. Задачи этой группы могут вызвать затруднения у некоторых учащихся.



Стандартные задачи — наиболее простые задачи; без умения их решать нельзя получить положительную оценку.

У *Учебные задачи* — самая многочисленная группа задач, которые придется решать в классе и дома. Эти задачи позволяют усвоить материал учебника и перейти к решению более сложных геометрических задач.

Т *Творческие задачи*; к ним относятся задачи, которые не удается решить стандартными методами; для их решения нужно выдвинуть некоторую новую идею.

И *Исследовательские задания.* Для своего решения они требуют значительных усилий. Такие задания не могут полностью решаться в классе, они предполагают работу дома, возможно, даже не одного, а нескольких учеников.

В первых четырех видах задач: «учись делать выводы», «ищи причину вывода», стандартные задачи, учебные задачи, как правило, не содержатся задачи, при решении которых используются методы, которые могут появиться гораздо позднее в процессе изучения курса геометрии. Отметим, что не в каждом параграфе обязательно присутствуют все шесть видов задач. Во второй части сборника содержатся, как правило, только творческие задачи и исследовательские задания.

В основу данного задачника вошли созданные при участии автора в разные годы пособия по геометрии для основной школы [1—4, 8—16].

Исследовательские задания, включенные в данный сборник, составлены на основе задач, приведенных в журнале «Квант» в разное время (см. [17—29] в списке литературы).

Данный сборник задач будет полезен учащимся и преподавателям средней школы, студентам педагогических вузов. Его можно использовать для любого из существующих в настоящее время школьных учебников по геометрии.

Автор

ЛИТЕРАТУРА

I. Пособия, отражающие идеи фузионизма в геометрии

1. *Гусев В. А.* Геометрия, 6—11. Экспериментальный учебник. Части 1—9. — М.: Авангард, 1994—2001.

2. *Гусев В. А.* Геометрия, 7 (6). Экспериментальный задачник. — М.: Авангард, 2000.

3. *Гусев В. А.* Геометрия, 5—6. — М.: Русское слово, 2002.

4. *Гусев В. А.* Геометрия, 7. — М.: Русское слово, 2003.

5. *Вернер А. Л., Рыжик В. А., Ходот Т. Г.* Геометрия, 7—9. — М.: Просвещение, 2000—2003.

6. *Клековкин Г. А.* Геометрия, 5. — М.: Русское слово, 2000.

7. *Левитас Г. Г.* Геометрия на плоскости и в пространстве. Ч. 1—2. — М.: Авангард, 1996.

II. Пособия, на базе которых составлен данный задачник

8. *Гусев В. А., Маслова Г. Г., Скопец З. А., Черкасов Р. С.* Сборник задач по геометрии для 6—8 классов. — М.: Просвещение, 1975.

9. *Герасимова И. С., Гусев В. А., Маслова Г. Г., Скопец З. А., Ягодовский М. И.* Сборник задач по геометрии для 9 и 10 классов. — М.: Просвещение, 1977.

10. *Абрамов А. М., Гусев В. А., Маслова Г. Г., Семенович А. В., Черкасов Р. С.* Геометрия в 6 классе: Пособие для учителя. — М.: Просвещение, 1979.

11. *Гусев В. А., Маслова Г. Г., Семенович А. В., Черкасов Р. С., Абрамов А. М.* Геометрия в 7 классе: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1981; Геометрия в 8 классе: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1982.

12. *Гусев В. А., Медяник А. И.* Дидактические материалы по геометрии для 7 класса. — М.: Просвещение, 1991.

13. *Гусев В. А., Медяник А. И.* Дидактические материалы по геометрии для 8 класса. — М.: Просвещение, 1992.

14. *Гусев В. А., Медяник А. И.* Дидактические материалы по геометрии для 9 класса.— М.: Просвещение, 1993.

15. *Гусев В. А.* Психолого-педагогические основы обучения математике. — М.: Вербум-М, 2003.

16. Методика обучения геометрии. Под ред. проф. *В. А. Гусева.* — М.: Академия, 2004.

III. Пособия, на базе которых составлены исследовательские задания

17. *Барр Стефан.* Математический цветник. — М.: Мир, 1983.

18. *Шабунин М.* Об углах и окружностях. — Квант, № 1, 1991.

19. *Моиз Э., Даунс Р.* Геометрия. — М.: Просвещение, 1972.

20. *Курляндчик Л. Д.* Прямоугольный треугольник. — Квант, № 3, 1989.

21. *Коробов А.* Семь решений задачи Штейнера. — Квант, № 4, 1990.

22. Геометрические неожиданности. — Квант, № 2, 1996.

23. *Терешин Д.* Вписанный четырехугольник. — Квант, № 2, 1992.

24. *Затакавай В.* Теорема Птолемея и некоторые тригонометрические соотношения. — Квант, № 4, 1991.

25. *Лоповок Л. М.* Вписанный шестиугольник. — Квант, № 1, 1973.

26. *Белый С.* «Ключ» к решению — подобные треугольники. — Квант, № 5, 1976.

27. *Орач Б.* Теорема Менелая. — Квант, № 3, 1991.

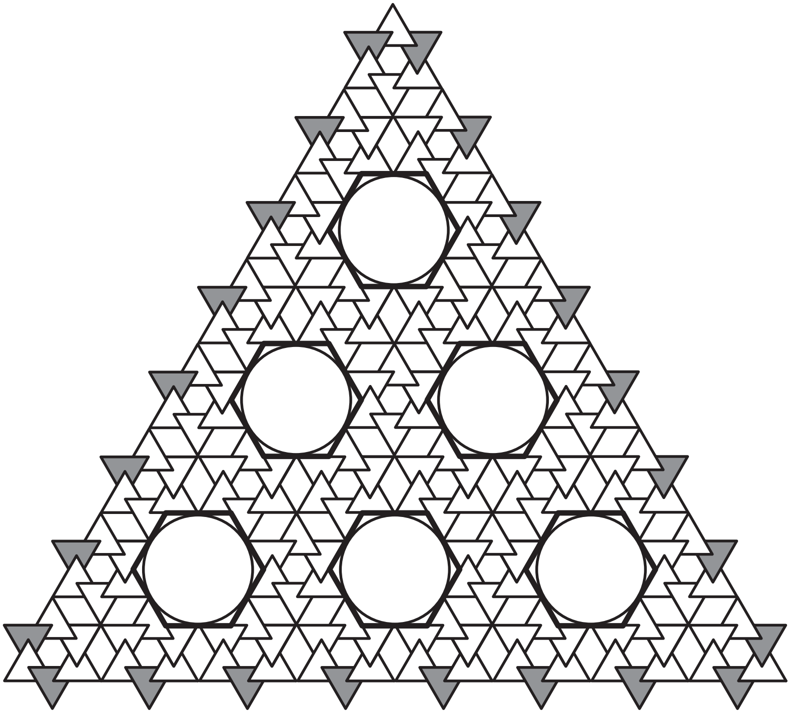
28. *Эрдниев Б. и Манцаев Н.* Теоремы Чевы и Менелая. — Квант, № 3, 1990.

29. *Кушнир И. А.* Урок одной задачи. — Квант, № 9, 1986.

Примечание. Позиции [17]—[29] указаны в тексте соответствующих задач.

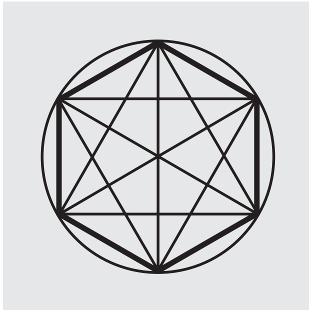
Часть I

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕМАМ ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ



Глава I

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ



Тема 1

ПЛОСКОСТИ, ТОЧКИ, ПРЯМЫЕ

1. Плоскости

Основное теоретическое содержание

Плоскость — неопределяемое понятие геометрии. В пространстве существует бесконечное множество плоскостей.

Термины и обозначения

Плоскости изображают в пространстве или параллелограммами, или произвольными плоскими фигурами.
Плоскости обозначают строчными греческими буквами: α, β, γ и т. д.

1.1. На рисунке 1.1 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите грани этого куба. Сколько граней имеет куб?

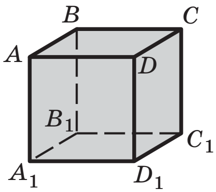


Рис. 1.1

1.2. Сколько граней имеет неотточенный шестигранный карандаш? Сколько граней имеет прямоугольный параллелепипед?

1.3. Возьмите глобус, мысленно проведите плоскость через экватор. Назовите столицы стран, расположенных в Северном и Южном полушариях.

1.4. В пространстве имеется плоскость. На сколько частей эта плоскость разобьет пространство?

1.5. Что можно сказать об утверждении: «Крышка стола есть плоскость»?

1.6. Могут ли Москва и Санкт-Петербург располагаться в разных полупространствах, определенных некоторой плоскостью, пересекающей Земной шар?

1.7. Имеется куб. Ответьте на вопросы:

1. Как провести плоскость, чтобы куб лежал в одном полупространстве, задаваемом этой плоскостью?

2. Как провести плоскость, чтобы в каждом полупространстве, задаваемом этой плоскостью, лежало: а) только по одной грани куба; б) по две грани; в) по три грани?

1.8. Постройте произвольную плоскость. Как она будет выглядеть?

1.9. Изобразите плоскость α.

1. Изобразите несколько фигур, лежащих в этой плоскости.

2. Существуют ли фигуры, не лежащие в этой плоскости? Изобразите несколько таких фигур.

1.10. Пусть фигура состоит из двух (трех, четырех) точек. Существует ли плоскость, разделяющая точки этих фигур так, чтобы с каждой стороны от плоскости находилось одинаковое число точек?

1.11. Сколько различных плоскостей определяются гранями куба?

1.12. Сколько различных плоскостей могут определять тройки точек, взятых из пяти данных точек?

1.13. Вы изучили материал, связанный с понятием плоскости. Пока мы еще мало что знаем о геометрии, ее методах, свойствах геометрических фигур, но уже можем начать проводить первые математические исследования: наблюдать, делать выводы, рассматривать различные случаи.

Определите, на сколько частей (областей) разбивают пространство две (три) плоскости. На какое наибольшее количество частей разбивают пространство две (три) плоскости?

Можно по-разному подходить к решению данного задания. Мы подскажем только одну идею. Посмотрите на вашу комнату: две плоскости — например, пол и потолок, три плоскости — например, пол и две стены.

Выполнение этого исследовательского задания практически не требует специальных знаний. Вам нужны лишь внимание, смекалка и воображение. Сразу получить и обосновать полный ответ трудно, но важно начать исследование, которое в дальнейшем будет продолжаться.

2. Точки и прямые

Основное теоретическое содержание

Все геометрические фигуры состоят из точек. *Точка* в геометрии является неопределяемым понятием.

Точки могут произвольно располагаться в пространстве: лежать и не лежать на плоскости, принадлежать различным фигурам и не принадлежать им.

Прямая — так же, как и точка, неопределяемое понятие геометрии.

АКСИОМА 1. Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

Термины и обозначения

Точки обозначают прописными (заглавными) латинскими буквами: A, B, C, D, K, M и т.д. Прямые обозначают строчными латинскими буквами: a, b, c, d, m, n, p и т.д. или двумя заглавными буквами, соответствующими точкам, лежащим на ней.

Если в условии задачи сказано «две точки» или «две прямые», то имеется в виду, что они различные.

В геометрии применяют некоторые удобные знаки, которые широко используются в математике и относятся к так называемой теории множеств.

Знак принадлежности «$\in$». Запись $C \in p$ читается так: «точка C принадлежит прямой p».

Знак непринадлежности «$\notin$». Запись $D \notin p$ читается так: «точка D не принадлежит прямой p».

1.14. Дана прямая. Сколько точек содержит эта прямая?

1.15. Посмотрите на рисунок 1.2 и ответьте на вопросы:

1. Через какие точки проходят прямые a, b и c?

2. Какие точки лежат на прямой b?

3. Какие точки не лежат на прямой c?

1.16. Какие из вершин куба (рис. 1.3) принадлежат прямым a, b, c, d?

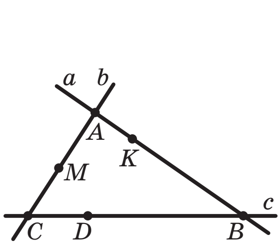


Рис. 1.2

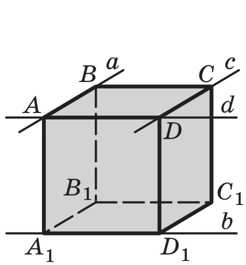


Рис. 1.3

1.17. Даны две точки. Можно ли через них провести прямую? Сколько прямых можно провести? Почему?

1.18. Есть прямая и точка. Как они могут быть расположены? Как могут быть расположены прямая и две точки?

1.19. Проведите прямую. Сколько точек для этого нужно иметь?

1.20. Сколько точек содержит прямая, проходящая через точки A и B?

1.21. Посмотрите на рисунок 1.4 и ответьте на вопросы:

1. Какие точки принадлежат прямым a и b?

2. Какие точки не принадлежат этим прямым?

3. Какие точки принадлежат и прямой a, и прямой b?

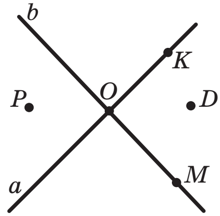


Рис. 1.4

1.22. Вытяните руку перед собой. Рассмотрите точку A, совпадающую с кончиком вашего указательного пальца, и точку B, совпадающую с правым верхним углом вашей комнаты. Сколько прямых одновременно проходит через обе точки A и B? Какая аксиома подтверждает ваш ответ?

1.23. Дана одна точка. Проведите через эту точку прямую. Сколько можно провести прямых через данную точку? Какую фигуру мы при этом получим: плоскую или пространственную?

1.24. Перечертите рисунок 1.5 в тетрадь. С помощью линейки проведите все прямые, проходящие через пары этих точек. Сколько прямых вам удалось провести?

1.25. Даны три точки. Как они могут быть расположены? Сколько через них можно провести прямых? Почему? (Эту задачу можно поставить для любого числа точек: 4, 5, 6, ..., n.)

1.26. На листе бумаги отметьте пять точек и проведите всевозможные прямые, каждая из которых проходит через какие-либо две из этих точек. Как расположить точки, чтобы оказались проведенными: а) 5 прямых; б) 6 прямых?

1.27. Прочитайте следующие записи: $A \notin a$; $B \in b$; $C \notin m$; $K \in c$.

1.28. Начертите прямую a и отметьте: а) точки A и B, лежащие на прямой a; б) точки P, Q и R, не лежащие на этой прямой. Запишите с помощью знаков взаимное расположение точек A, B, P, Q, R и прямой a.

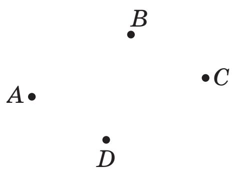


Рис. 1.5

1.29. Запишите с помощью знаков взаимное расположение точек и прямых, изображенных на рисунке 1.6.

1.30. Перечертите в тетрадь рисунок 1.7 и обозначьте буквами все прямые и точки их пересечения. Запишите с помощью знаков взаимное расположение точек и прямых.

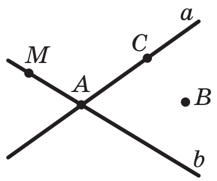


Рис. 1.6

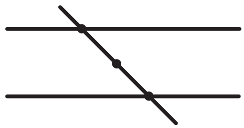


Рис. 1.7

1.31. На полу классной комнаты отметьте мелом точку A.

1. Сколько прямых задают эта точка A и точки, являющиеся вершинами углов в классной комнате? Сделайте чертежи, обозначьте вершины углов класса и выпишите все получившиеся прямые.

2. Представьте себе, что на каждой стене класса отмечена точка. Сколько таких точек отмечено? Мысленно соедините эти точки прямыми. Сколько образовалось прямых?

3. Сколько получится прямых, если добавить к точкам на стенах класса точку A, отмеченную на полу классной комнаты?

1.32. Сколько нужно отметить точек на плоскости для того, чтобы провести две (три, четыре) прямые? Произойдут ли какие-то изменения в решении этой задачи, если рассмотреть данные точки в пространстве?

1.33. Сколько различных прямых определяют все пары вершин куба?

1.34. Сколько различных прямых определяют все пары точек, взятых из шести данных точек?

1.35. На прямой даны 10 точек. На сколько частей эти точки делят прямую?

1.36. На листе бумаги отметьте n точек и проведите всевозможные прямые, каждая из которых проходит через какие-либо две из этих точек. Оказалось, что проведено 6 прямых. Возможно ли, что $n = 3$? $n = 4$? $n = 5$? $n = 6$? Для тех случаев, когда это возможно, сделайте чертежи.

1.37. Точки A, B и C лежат на прямой a. Есть ли среди прямых AB, AC и BC различные? Объясните ответ.

1.38. Дано: P и O — различные точки. Прямая l_1 содержит обе точки P и O, прямая l_2 также содержит обе точки P и O. Что можно сказать о прямых l_1 и l_2? Обоснуйте ваш вывод.

1.39. Дано: l_1 и l_2 — различные прямые. Точка P принадлежит и l_1, и l_2. Точка O также принадлежит и l_1, и l_2. Что можно сказать о точках P и O? Обоснуйте ваш вывод.

1.40 (8 точек и 6 прямых). Могут ли 6 прямых пересекаться в 8 точках?

1.41 (7 точек и 7 прямых). Докажите, что 7 прямых и 7 точек нельзя расположить на плоскости так, чтобы через каждую точку проходили ровно 3 прямые и на каждой прямой лежали 3 точки.

1.42 (8 точек и 7 прямых). Могут ли 7 прямых пересекаться в 8 точках? Сколько вообще может быть точек пересечения у 7 прямых?

1.43 (9 точек и 9 прямых). Как расположить 9 точек, которые лежат по три на 9 прямых, причем через каждую точку проходят по три данных прямых? (*Конфигурация Паскаля.*)

1.44 (10 точек и 10 прямых). Как расположить 10 точек, которые лежат по три на 10 прямых, причем через каждую точку проходят только три такие прямые? (*Конфигурация Дезарга.*)

1.45 (15 точек и 25 прямых). Можно ли расположить 15 лампочек так, чтобы образовалось 25 рядов по 3 лампочки в каждом? Где лучше решать задачу: в пространстве или на плоскости?

1.46 (16 точек и 12 прямых). В саду посажено 16 тюльпанов в 12 рядов по 4 луковицы в каждом (рисунок 1.8). Можно ли те же 16 луковиц рассадить не в 12, а в 15 рядов, причем в каждом ряду по-прежнему будут 4 луковицы? Как это сделать?

1.47. Выше мы рассмотрели различные задачи на расположение точек и прямых, в каждой задаче следовало проявить интуицию и смекалку. Вместе с тем каждая задача рассматривалась сама по себе, и для ее решения следовало выдвигать какую-то идею или идеи.

В то же время определенные серии задач составляют как бы единое целое, так как в них рассматривается общая проблема, которая ре-

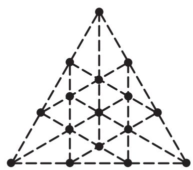


Рис. 1.8

ализуется в различных частных случаях. Например, все предлагаемые далее задачи 1—6 можно обобщить так.

Имеется целое число точек N ($N \geqslant 3$). Как можно расположить их на плоскости, чтобы никакие четыре из них не лежали на одной прямой и чтобы было максимальным число прямых, проходящих через три из данных точек? (Последнее требование при решении нашей серии задач учитывается не всегда.) [17]

1) **5 точек и 2 прямые.** Как расположить 5 точек и 2 прямые, чтобы на каждой прямой было по три точки?

2) **6 точек и 4 прямых.** Можно ли 6 деревьев посадить в 4 ряда так, чтобы в каждом ряду было по 3 дерева?

3) **7 точек и 5 прямых.** Можно ли 7 точек расположить на 5 прямых так, чтобы на каждой прямой было по 3 точки?

4) **7 точек и 6 прямых.** Можно ли 7 тюльпанов посадить так, чтобы образовалось 6 рядов по 3 тюльпана в каждом?

5) **8 точек и 7 прямых.** Можно ли 8 точек расположить на 7 прямых так, чтобы на каждой прямой лежали только 3 точки?

6) **9 точек и 10 прямых.** Стефан Барр в книге «Математический цветник» сформулировал такую задачу:

«Задача простая: деревья в саду.
Девять деревьев. По три в ряду.
Их посадить нужно в десять рядов.
Задача простая... Ответ ваш готов?»

7) **10 точек и 12 прямых.** Как расположить 10 точек на 12 прямых так, чтобы на каждой прямой лежало по три точки?

3. Взаимное расположение точек, прямых и плоскостей

Основное теоретическое содержание

Точки и прямые могут по-разному располагаться по отношению друг к другу. Точки могут *лежать на прямой a* и *не принадлежать прямой a*. О прямой *a* иногда говорят, что она *проходит через две точки*.

Точки могут *лежать в плоскости* и *не лежать в ней*. Аналогично и прямые могут *лежать в плоскости*, а могут и *не лежать в ней*.

АКСИОМА 2. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.

АКСИОМА 3. Прямая, проходящая через две точки плоскости, принадлежит этой плоскости.

Термины и обозначения

Для обозначения принадлежности и непринадлежности фигур в геометрии используются знаки:
Знак включения «$\subset$». Запись $a \subset \alpha$ читается так: «прямая a принадлежит плоскости α».
Знак невключения «$\not\subset$». Запись $p \not\subset \beta$ читается так: «прямая p не принадлежит плоскости β».

1.48. Прямая лежит на плоскости. Что можно сказать о точках этой прямой?

1.49. На рисунке 1.9 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ответьте на вопросы:

1. В какой из граней не лежит точка A?
2. В какой грани лежит точка C_1?
3. Каким плоскостям принадлежит точка D?
4. Какой грани принадлежит прямая AD_1?
5. Какой грани принадлежит прямая D_1C?
6. Какие прямые не лежат в грани ABB_1A_1?

1.50. На рисунке 1.10 прямая a пересекает квадрат $ABCD$. Назовите вершины квадрата, лежащие: а) в одной полуплоскости; б) в разных полуплоскостях, определенных этой прямой.

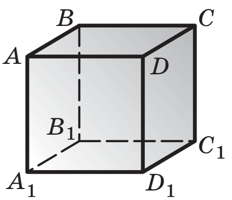


Рис. 1.9

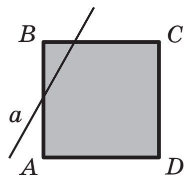


Рис. 1.10

1.51. Какое минимальное число точек необходимо для определения плоскости? Всегда ли три точки полностью определяют некоторую плоскость?

1.52. Перечислите различные условия, которые определяют плоскость.

1.53. Сколько существует плоскостей, содержащих три данные точки, если эти точки не принадлежат одной прямой?

1.54. Почему у штативов фотоаппаратов, геодезических приборов по три опорные ножки? Почему стол, имеющий четыре ножки, не всегда устойчив?

1.55. Предположим, что вершина любого угла вашего письменного стола обозначена через P, выключатель на стене — через K и вершина одного из углов комнаты — через C. Существует ли плоскость, содержащая точки P, K и C?

1.56. Даны плоскость α и квадрат $ABCD$. Может ли плоскости α принадлежать: а) только одна вершина квадрата; б) только две вершины квадрата; в) только три вершины квадрата?

1.57. Определите, какое из следующих утверждений верно (объясните ваш вывод):

1. Если 3 точки лежат на одной прямой, то они лежат в одной плоскости.

2. Если 3 точки лежат в одной плоскости, то они лежат на одной прямой.

1.58. Что нужно знать о прямой a, чтобы утверждать, что она лежит в плоскости α?

1.59. Две точки M и K, принадлежащие прямой AB, лежат в плоскости α. Лежит ли прямая AB в плоскости α? Почему?

1.60. Какие из вершин куба, изображенного на рисунке 1.11, принадлежат граням α, β, γ этого куба?

1.61. На рисунке 1.12 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какой грани параллелепипеда принадлежат: прямая AB, прямая BD, прямая DC_1, прямая B_1D_1? Ваши выводы обоснуйте.

1.62. Каким может быть взаимное расположение прямой и плоскости?

1.63. Посмотрев на рисунок 1.13, изображающий некоторую пространственную фигуру, выясните, являются ли точки множеств:

а) $\{A, B, C, D\}$; б) $\{A, D, B\}$;
в) $\{P, D\}$; г) $\{P, B, C\}$;
д) $\{A, B, C\}$

1) принадлежащими одной прямой;

2) принадлежащими одной плоскости;

3) не принадлежащими одной прямой, но принадлежащими одной плоскости.

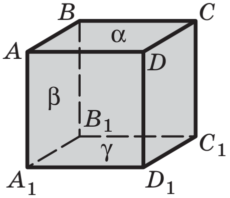


Рис. 1.11

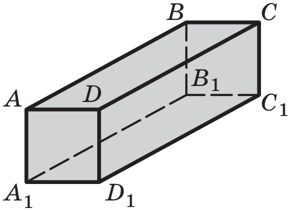


Рис. 1.12

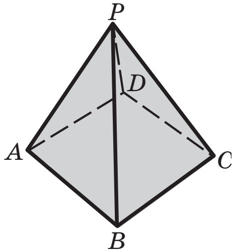


Рис. 1.13

1.64. Сколько прямых можно провести через пары различных точек A, B, C и D, если эти точки: а) лежат в одной плоскости; б) не лежат в одной плоскости?

1.65. Дана прямая l. Сколько плоскостей в пространстве содержат эту прямую?

1.66. Укажите, верны или ошибочны следующие утверждения:

1. Пространство содержит по крайней мере четыре точки.
2. Каждая полуплоскость имеет свою границу.
3. Прямая разбивает плоскость на два множества.
4. Каждая плоскость разбивает пространство на два множества.
5. Любые две полуплоскости лежат в одной плоскости.

1.67. Каким общим свойством обладают полуплоскости и полупространства?

1.68. Сколько плоскостей могут содержать: одну данную точку; две данные точки; три данные точки?

1.69. Возьмите книгу или кусок жесткого картона. Можно ли удержать их на концах двух карандашей? Каково наименьшее число карандашей, необходимых для этого?

1.70. Даны четыре точки A, B, C, D. Каково взаимное расположение этих точек? Сколько плоскостей могут определять эти точки?

1.71. Прямая l_1 пересекает плоскость α в точке P, но не принадлежит α. Прямая l_2 принадлежит плоскости α, но не содержит точку P. Может ли прямая l_1 пересекать прямую l_2? Объясните ваш ответ.

1.72. Два ученика играют, поочередно отмечая какую-либо вершину куба. Первый игрок стремится к тому, чтобы какие-нибудь три последовательно отмеченные вершины лежали в одной грани, а второй старается не допустить этого. Докажите, что при правильной игре второй всегда может выиграть.

1.73. Даны плоскость α и прямая a, параллельная этой плоскости. Расстояние от прямой a до плоскости α равно m. Ответьте на вопросы:

1. Сколько прямых, расстояние которых от прямой a равно m, лежит в плоскости α?
2. Сколько прямых, расстояние которых от прямой a равно n $(n > m)$, лежит в плоскости α?

1.74. Из точки M, которая находится на расстоянии a от плоскости α, проведен к этой плоскости перпендикуляр. Ответьте на вопросы:

1. Как расположены относительно этого перпендикуляра прямые, лежащие в плоскости α, если расстояние от точки M до этих прямых: а) равно a; б) больше a?

2. Существует ли в плоскости α прямая, расстояние которой от точки M меньше a?

4. Взаимное расположение прямых

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если две прямые имеют только одну общую точку, то они называются *пересекающимися*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Прямые a и b называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две прямые, не лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, называются *скрещивающимися*.

Термины и обозначения

Параллельность прямых обозначают знаком « $\parallel$ ». Запись $a \parallel b$ читается так: «прямая a параллельна прямой b» или «прямые a и b параллельны».

1.75. Дополните следующие утверждения:

1. Две различные прямые могут пересекаться лишь в ... .

2. У двух прямых может быть ... .

3. В каждой вершине куба пересекаются ... .

4. Через одну точку можно провести ... .

5. В каждой вершине треугольной пирамиды пересекаются ... .

1.76. Сколько прямых, содержащих ребра прямоугольного параллелепипеда, пересекаются в его вершинах?

1.77. Заполните пропуски в следующих предложениях так, чтобы в результате получились истинные утверждения:

1. Если две прямые в пространстве не имеют общих точек, то они ... .

2. Если две прямые не принадлежат одной плоскости, то ... .

3. Если $ABCD$ — квадрат, то прямые AB и CD ... .

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.14). Прямая ... скрещивается с прямой AA_1, прямые AB и CC_1 ... , так как ... .

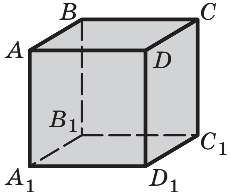


Рис. 1.14

1.78. На рисунке 1.15 изображен токарный резец. Его кромки — отрезки некоторых прямых. Какие различные виды расположения прямых вы видите на изображении этого резца?

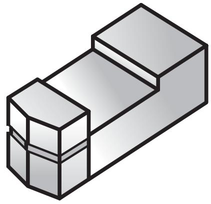


Рис. 1.15

1.79. Могут ли две пересекающиеся прямые лежать в разных плоскостях?

1.80. Могут ли через две точки проходить различные пересекающиеся прямые?

1.81. Верно ли, что две любые прямые в пространстве либо параллельны, либо пересекаются?

1.82. Могут ли прямые, содержащие ребра треугольной пирамиды, быть: а) параллельными; б) скрещивающимися?

1.83. Могут ли в одной грани прямоугольного параллелепипеда находиться отрезки скрещивающихся прямых?

С

1.84. Известно, что прямые a и b пересекаются. Сколько общих точек имеют эти прямые? Изобразите в тетради пересекающиеся прямые.

1.85. Известно, что прямые a и b параллельны. Сколько общих точек имеют эти прямые? Изобразите эти прямые.

У

1.86. Соедините два карандаша заточенными концами и зажмите их между большим и указательным пальцами. Что можно сказать о прямых, которым принадлежат эти карандаши? Сколько существует плоскостей, одновременно содержащих обе эти прямые?

1.87. На листе бумаги изображена прямая a. Проведите прямую b, пересекающую прямую a и прямую c, параллельную прямой a.

1.88. Изучите изображенную на рисунке 1.16 пространственную фигуру (точки A, B, C, D лежат в одной плоскости) и ответьте на вопросы:

1. Принадлежат ли одной прямой точки E, D и F?
2. Принадлежат ли одной плоскости точки E, C, B и F?
3. Пересекаются ли отрезки AC и BD?
4. Пересекаются ли отрезки AC и DF?
5. Принадлежат ли одной плоскости точки E, B и F?
6. Принадлежат ли одной плоскости точки F, B, G и D?

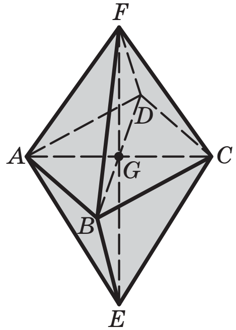


Рис. 1.16

1.89. Прямая AB пересекает прямую AC в точке A, а прямую BC — в точке B. Принадлежит ли точка C прямой AB? Сделайте рисунок.

1.90. Дана прямая a. Отметьте такие точки A, B, C, чтобы прямые AB и a пересекались в точке C, лежащей между точками A и B.

1.91. Начертите три прямые AB, BC, AC. На сколько частей разбивается этими прямыми плоскость?

1.92. Даны a_1 и a_2 — различные прямые. Точка P принадлежит a_1 и a_2. Точка O также принадлежит a_1 и a_2. Что можно сказать о точках P и O? Какая аксиома или теорема подтверждает ваше заключение?

1.93. На рисунке 1.14 изображен куб. Докажите, что прямая AB скрещивается с прямыми A_1D_1, B_1C_1, A_1D, B_1C, DC_1, D_1C.

1.94. Перечислите все ребра куба (см. рис. 1.14), для которых содержащая их прямая является скрещивающейся с прямой BB_1.

1.95. Через данную точку проведите прямую, скрещивающуюся с данной прямой.

1.96. Установите, верны ли высказывания:

1. Если две прямые в пространстве не имеют общей точки, то они параллельны.

2. Если прямые a и b — скрещивающиеся и прямые a и c — скрещивающиеся, то прямые b и c — тоже скрещивающиеся.

1.97. Можно ли на плоскости начертить три прямые, чтобы число их точек пересечения было равно: 0; 1; 2; 3? Выполните соответствующие рисунки.

1.98. Можно ли на плоскости начертить такие четыре прямые, чтобы число их точек пересечения было равно: 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0?

1.99. Можно ли расположить на плоскости пять точек так, что если через каждые две провести прямую, то получится прямых: 1; 2; 3; 4; ... ; 11?

1.100. Приведите пример трех прямых, каждые две из которых скрещиваются. Сколько можно построить прямых, каждые две из которых будут скрещиваться?

1.101. Существуют ли две параллельные прямые, каждая из которых пересекает две данные скрещивающиеся прямые?

1.102. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Где лежат все точки D, такие, что прямые AB и CD скрещиваются?

1.103. Прямые a и b параллельны. Прямая a скрещивается с прямой c. Что можно сказать о взаимном расположении прямых b и c?

1.104. Прямые a и b пересекаются. Прямая a скрещивается с прямой c. Что можно сказать о взаимном расположении прямых b и c?

1.105. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 1.14). Сколько прямых, проходящих через две вершины куба: а) пересекается с ребром AB; б) параллельны ребру AB?

1.106. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 1.14). Какие ребра этого куба лежат на прямых, которые скрещиваются: а) с прямой AD; б) с прямыми AD и DD_1?

1.107. В кубе $KLMNK_1L_1M_1N_1$ проведена диагональ KM_1 (рис. 1.17). Сколько прямых, скрещивающихся с прямой KM_1, проходит через какие-либо две вершины куба?

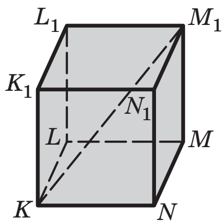


Рис. 1.17

1.108. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Докажите, что существует не более одной прямой, проходящей через точку A и пересекающей обе данные прямые.

1.109. Даны плоскость α и прямая a, пересекающая эту плоскость. Докажите, что прямая b, лежащая в плоскости α, не параллельна прямой a.

1.110. Докажите, что через точку M, не лежащую в данной плоскости α, проходит бесконечное множество прямых, параллельных плоскости α.

1.111. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 1.14). Сколько различных прямых, проходящих через две из вершин этого куба: а) параллельны грани ABB_1A_1; б) пересекают грань ABB_1A_1?

5. Взаимное расположение плоскостей

Основное теоретическое содержание

АКСИОМА 4. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют и общую прямую.

1.112. Находясь в комнате (рис. 1.18), вы видите различные случаи взаимного расположения плоскостей (их частей). Ответьте на вопросы:

1. Сколько пар пересекающихся плоскостей вы видите?
2. Сколько пар параллельных плоскостей вы видите?
3. Сколько всего плоскостей (их частей) вы видите?

1.113. На рисунке 1.19 изображены две плоскости α и β. Какие общие точки они имеют?

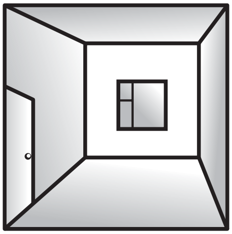


Рис. 1.18

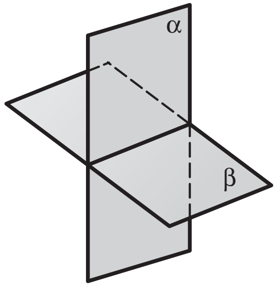


Рис. 1.19

1.114. Сколько различных пар параллельных плоскостей определяется вершинами куба?

1.115. Сколько различных взаимно пересекающихся плоскостей проходит через одну из вершин куба, если каждая из этих плоскостей содержит не менее трех вершин куба?

1.116. Две плоскости α и β пересекаются по прямой AB. Каждая из точек P и O принадлежит обеим плоскостям α и β. Должны ли точки P и O принадлежать прямой AB? Ваш вывод обоснуйте.

1.117. Что нужно знать о двух плоскостях, чтобы утверждать, что они пересекаются? Какая фигура является общей для двух пересекающихся плоскостей?

1.118. Даны две плоскости, которые пересекаются по прямой BC, и две прямые a и b ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$). Возможны ли такие случаи, что прямые a и b: а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются? К ответам дайте рисунок.

1.119. Даны две параллельные плоскости α и β ($\alpha \parallel \beta$) и две прямые a и b ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$). Возможны ли такие случаи, что прямые a и b: а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются?

1.120. Обозначим через α и β плоскости двух смежных граней куба. Укажите, какие из следующих высказываний истинны:

1. Существуют пересекающиеся прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$.

2. Существуют параллельные прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$.

3. Существуют скрещивающиеся прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$.

1.121. Обозначим через α и β плоскости двух противоположных граней куба. Укажите, какие из следующих высказываний истинны:

1. Любые прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ являются скрещивающимися.

2. Существуют прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, которые являются скрещивающимися.

1.122. На рисунке 1.18 изображен разрез обычной комнаты. Плоскости стен, пола и потолка пересекаются по отрезкам прямых. Обозначьте три из этих плоскостей (частей плоскостей) α, β и γ. Какие из них являются пересекающимися, а какие — параллельными? Укажите на этом рисунке другие пары параллельных и пересекающихся плоскостей.

T

1.123. У какого многогранника имеется наименьшее число граней (частей плоскостей)?

1.124. Может ли многогранник иметь только две параллельные грани (части плоскости)?

1.125. Докажите, что две различные плоскости не могут иметь две и только две общие точки.

Тема 2

ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУРАХ

6. Геометрические фигуры, их объединение и пересечение

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Любое множество точек называется *геометрической фигурой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пересечением* двух или нескольких данных фигур называется фигура, состоящая из всех тех и только тех точек, которые принадлежат каждой из данных фигур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Объединением* двух или нескольких фигур называется фигура, состоящая из всех тех и только тех точек, которые принадлежат хотя бы одной из этих фигур.

Термины и обозначения

Для объединения и пересечения фигур применяют два знака: *знак объединения* «$\cup$»; *знак пересечения* «$\cap$».

Запись «$\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi_3$» читается так: «объединением фигур Φ_1 и Φ_2 является фигура Φ_3».

Запись «$a \cap b = C$» читается так: «пересечением прямых a и b является точка C».

2.1. На рисунке 2.1, *а—г* изображены различные случаи взаимного расположения треугольника ABC и прямой l. В каждом случае ответьте на вопросы:

1. Какой фигурой является пересечение треугольника и прямой?

2. Какой фигурой является объединение треугольника и прямой?

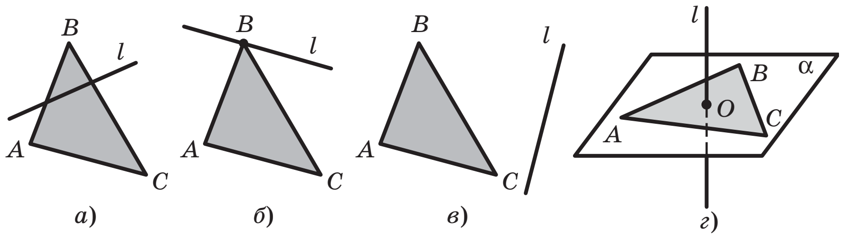


Рис. 2.1

2.2. На рисунке 2.2, *а*, *б* изображены различные случаи расположения двух кубов. Какими фигурами являются их объединение и пересечение?

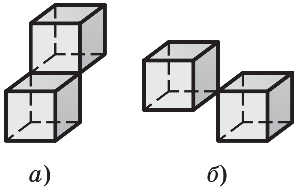


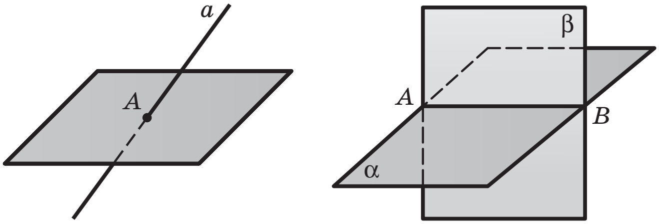
Рис. 2.2

2.3. На рисунке 2.3, *а*, *б* изображены случаи взаимного расположения точек, прямых и плоскостей. Ответьте на вопросы:

1. Какой фигурой является пересечение прямой и плоскости на рисунке 2.3, *а*?

2. Какой фигурой является пересечение плоскостей α и β на рисунке 2.3, *б*?

3. Какой фигурой является объединение точки A и плоскости α на рисунке 2.3, *а*?



а) *б*)

Рис. 2.3

2.4. Может ли пересечение прямой и плоскости быть отрезком?

2.5. Может ли пересечение двух прямых быть точкой?

2.6. Может ли объединением точки и прямой быть прямая?

2.7. Может ли пересечением двух плоскостей быть точка?

2.8. Может ли объединением прямой и плоскости быть: а) точка; б) прямая; в) плоскость; г) пространство?

2.9. Как должны быть расположены плоскости, чтобы их объединением было пространство? Как будет при этом выглядеть пересечение этих плоскостей?

2.10. Как могут быть расположены два куба, чтобы их пересечением были: а) точка; б) отрезок; в) квадрат?

У

2.11. Изобразите расположение прямой и куба, при котором их пересечением является: а) точка; б) отрезок; в) пустое множество точек.

2.12. Может ли в пересечении двух квадратов получиться отрезок? Изобразите такое расположение квадратов. Какой фигурой может быть объединение двух квадратов?

2.13. Может ли пересечением двух квадратов быть квадрат?

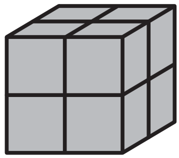


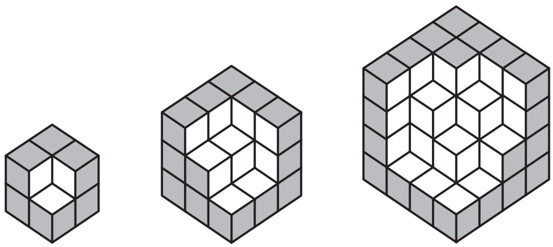
Рис. 2.4

2.14. На рисунке 2.4 изображен куб, сложенный из 8 маленьких одинаковых кубиков. Сколько прямоугольных параллелепипедов содержит данное объединение кубиков?

2.15. Алеша из маленьких кубиков составляет большой куб. Ответьте на вопросы:

1. Сколько еще нужно добавить кубиков к изображенным на рисунках 2.5, *а*, *б*?

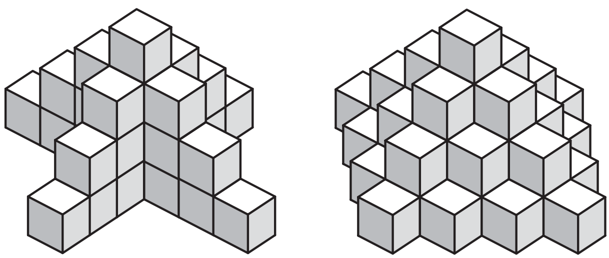
2. Сколько кубиков на рисунке 2.5, *в* имеют затемненные грани, а сколько не имеют?



а) *б*) *в*)

Рис. 2.5

2.16. Сколько кубиков понадобилось для создания конструкций, изображенных на рисунках 2.6, *а*, *б*?



а) *б*)

Рис. 2.6

2.17. Какие фигуры могут получиться при пересечении двух четырехугольников? Возможно ли, чтобы при пересечении двух четырехугольников образовались два четырехугольника? три четырехугольника?

2.18. Нарисуйте две фигуры так, чтобы: а) их объединением был круг, а пересечением — треугольник; б) их объединением был треугольник, а пересечением — круг; в) их объединением и пересечением был куб; г) их объединением и пересечением была пирамида.

2.19. Нарисуйте два цилиндра (два конуса) так, чтобы их пересечением был цилиндр (конус).

2.20. Приведите примеры одинаковых геометрических фигур, которые имеют: а) только одну общую точку; б) бесконечное множество общих точек, не лежащих на одной прямой; в) не только одну общую прямую (при этом фигуры не являются плоскостями); г) ровно одну общую плоскость.

2.21. На какое наибольшее число частей можно разделить фигуру, изображенную на рисунке 2.7, тремя разрезами?

2.22. Какое наибольшее число частей можно получить при трех разрезах фигуры, изображенной на рисунке 2.8?

2.23. Деревянный куб снаружи покрасили белой краской, каждое его ребро разделили на 3 (4, 5) равные части, после чего куб разрезали так, что получились маленькие кубики, у которых ребра в 3 (4, 5) раза меньше, чем у исходного куба. Сколько получилось маленьких кубиков? У скольких кубиков окрашены три грани? только одна грань? Сколько получилось неокрашенных кубиков?

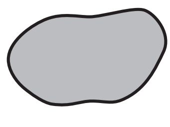


Рис. 2.7

2.24. Сколько различных фигур можно построить из 3 кубиков, соединяя два соседних кубика только по граням?

2.25. Сколько различных фигур можно построить из 4 кубиков, соединяя два соседних кубика только по граням?

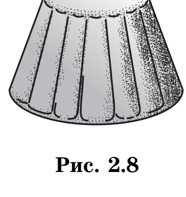


Рис. 2.8

2.26. На какое наибольшее число различных частей, не имеющих общих точек, кроме своих границ, можно разбить плоскость: а) прямая и окружность; б) три прямые; в) угол и окружность; г) три окружности?

2.27. Какие n-угольники можно получить как общую часть: а) угла и полуплоскости; б) двух углов; в) двух треугольников; г) треугольника и четырехугольника?

2.28. Даны кр. $(O_1; r_1)$ и кр. $(O_2; r_2)$, причем $O_1O_2 < r_1 + r_2$. Докажите, что общая часть этих кругов — выпуклая фигура.

2.29. Даны две выпуклые фигуры F_1 и F_2. Докажите, что фигура $F_1 \cap F_2$ выпуклая.

И **2.30.** На рисунке 2.9, *а* изображены семь многогранников *1*, ..., *7*. Из них можно сконструировать различные фигуры. При конструировании предпочтительно сначала использовать наиболее «неправильные» (*5*, *6*, *7*), а многогранник *1* желательно использовать при сборке самым последним.

1. Сделайте из картона каждый из семи многогранников.

2. Сделайте эти многогранники так, чтобы каждый из кубиков имел ребро 6 см.

3. Составьте из этих многогранников фигуры, изображенные на рисунке 2.9, *б*.

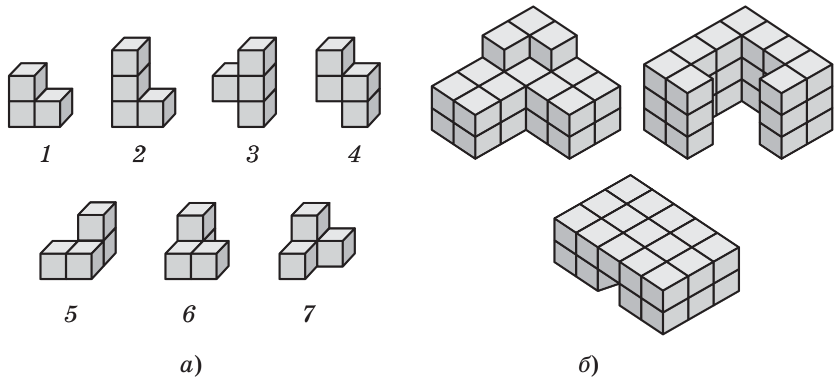


Рис. 2.9

2.31. Среди изображенных на рисунке 2.10 фигур укажите пары, которые дополняют друг друга до куба.

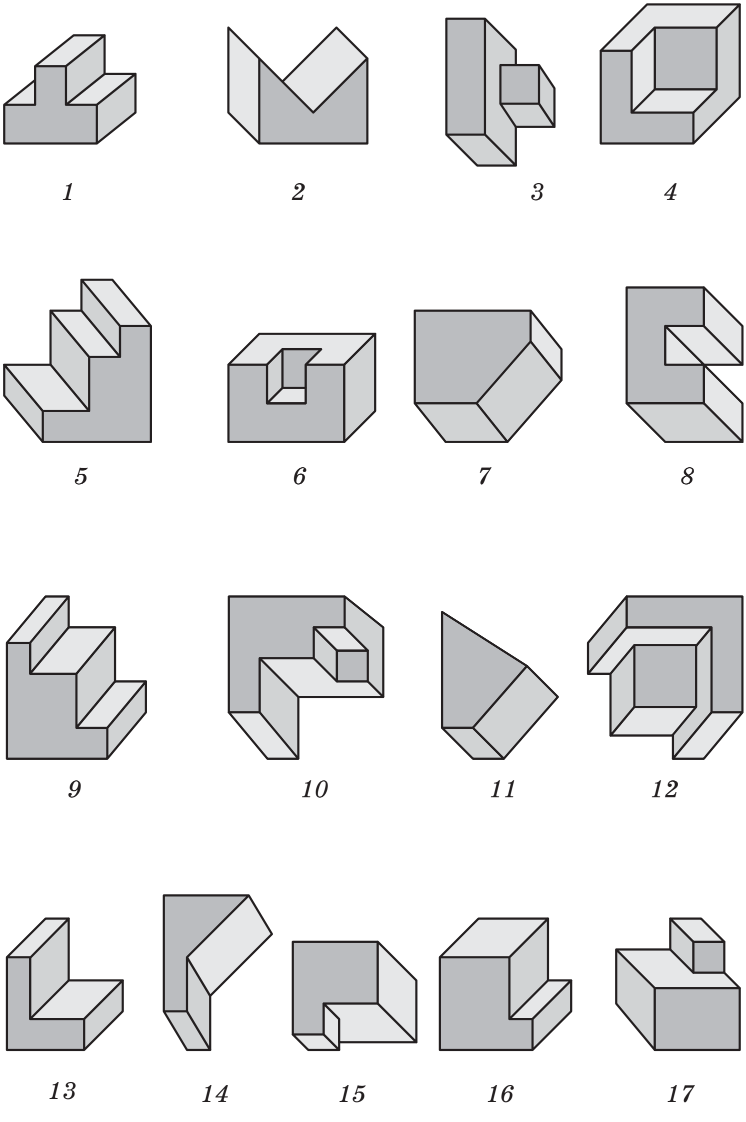


Рис. 2.10

2.32. На рисунке 2.11 найдите пары фигур, дополняющие друг друга до куба.

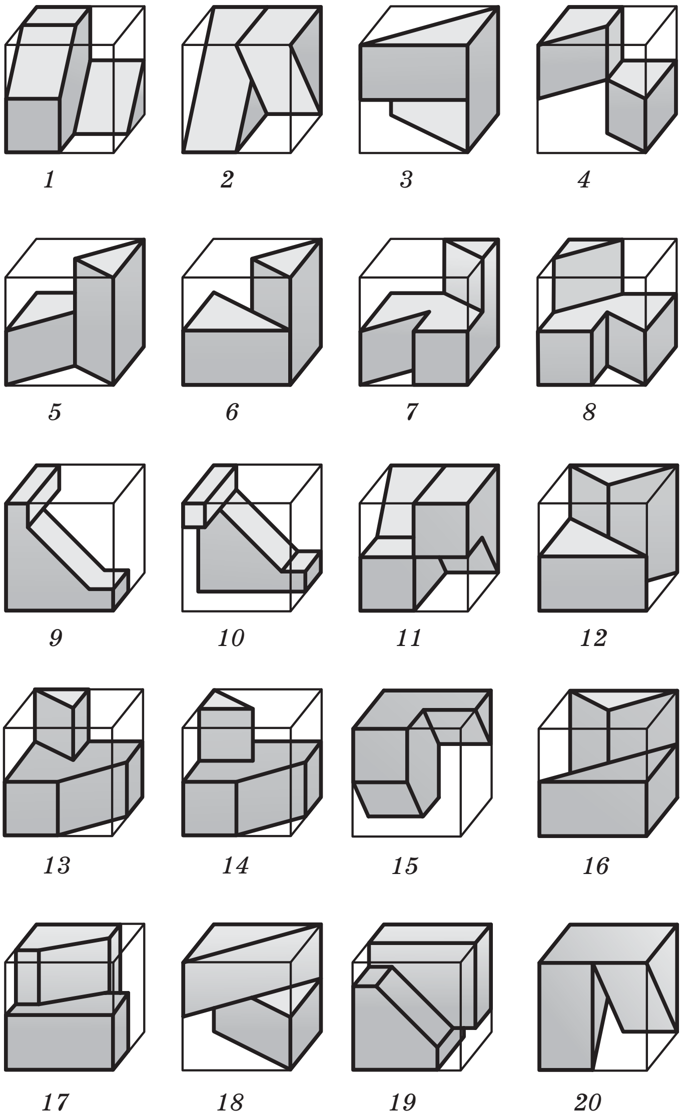


Рис. 2.11

7. Взаимное расположение плоскостей и геометрических фигур

Основное теоретическое содержание

Геометрические фигуры и плоскости могут иметь общие точки, в этом случае говорят о *сечении фигур плоскостью*.

Среди фигур отдельно выделяют фигуры, все точки которых лежат в одной плоскости. Такие фигуры называют *плоскими*.

Свойства этих фигур изучает раздел геометрии, называемый *планиметрией*. Это название происходит от латинского слова «планум» — равнина, плоскость.

Есть много геометрических фигур, все точки которых не лежат в одной плоскости. Раздел геометрии, который изучает свойства таких фигур, называют *стереометрией* (от греческого слова «стерео» — телесный, пространственный). Такие фигуры будем называть *пространственными фигурами* или неплоскими (иногда их называют телами).

2.33. Назовите известные вам плоские фигуры.

2.34. Назовите известные вам пространственные (неплоские) фигуры.

2.35. Всегда ли три точки лежат в одной плоскости?

2.36. Всегда ли четыре точки лежат в одной плоскости?

2.37. Лежат ли все вершины куба в одной плоскости?

2.38. Может ли куб лежать (стоять) на плоскости? Какая фигура в этом случае будет пересечением куба и плоскости?

2.39. Как провести плоскость сечения куба, чтобы это сечение имело форму квадрата? Сколько можно провести таких сечений? Выполните необходимые построения.

2.40. При пересечении какой фигуры плоскостью в сечении получается: а) квадрат; б) точка; в) отрезок; г) круг?

2.41. Какие фигуры могут получиться при пересечении куба плоскостью?

2.42. Начертите куб, поставьте на каждом из трех ребер, выходящих из одной его вершины, по одной точке. Постройте плоскость, которая пересекает куб и проходит через эти точки. Какая фигура будет пересечением куба и плоскости?

2.43. На рисунке 2.12 изображены четыре ряда по три различных «кусочка» куба (каждый из этих «кусочков» в свою очередь получен некоторым сечением куба) и между ними стоит знак объединения. Что получится в результате этого объединения в каждом случае? На рисунке приведен пример результата в наиболее простом случае. Попробуйте получить другие результаты.

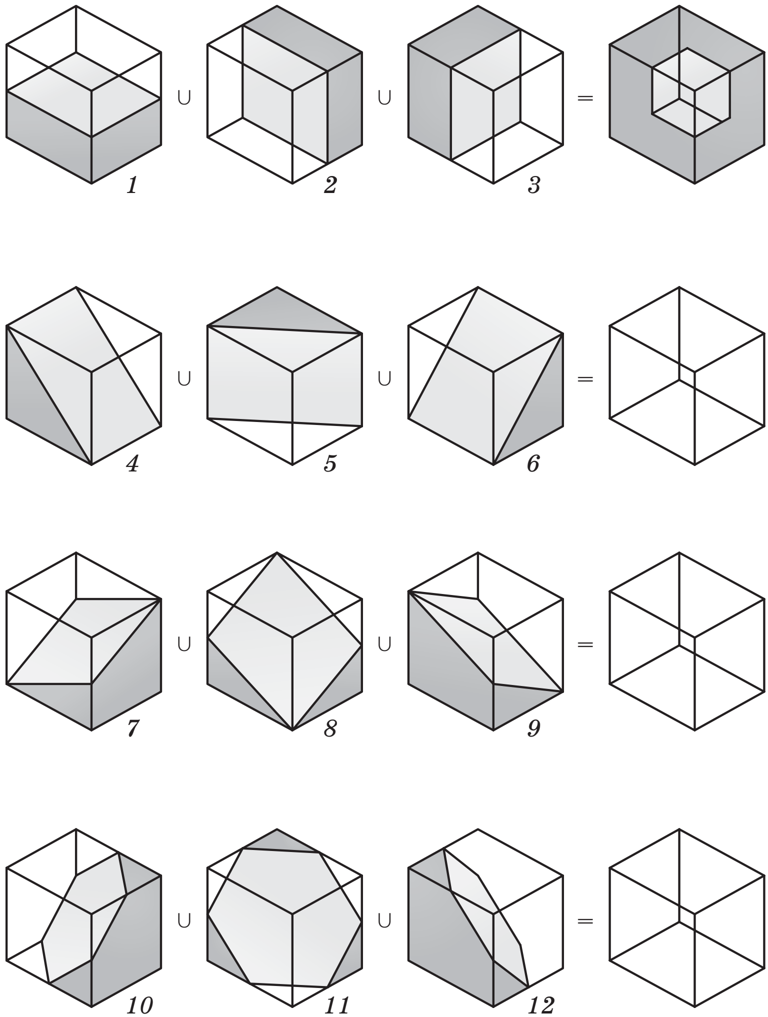


Рис. 2.12

2.44. Какие из закрашенных на рисунках фигур (рис. 2.13) с вершинами в вершинах куба или серединах его ребер являются сечениями куба плоскостью?

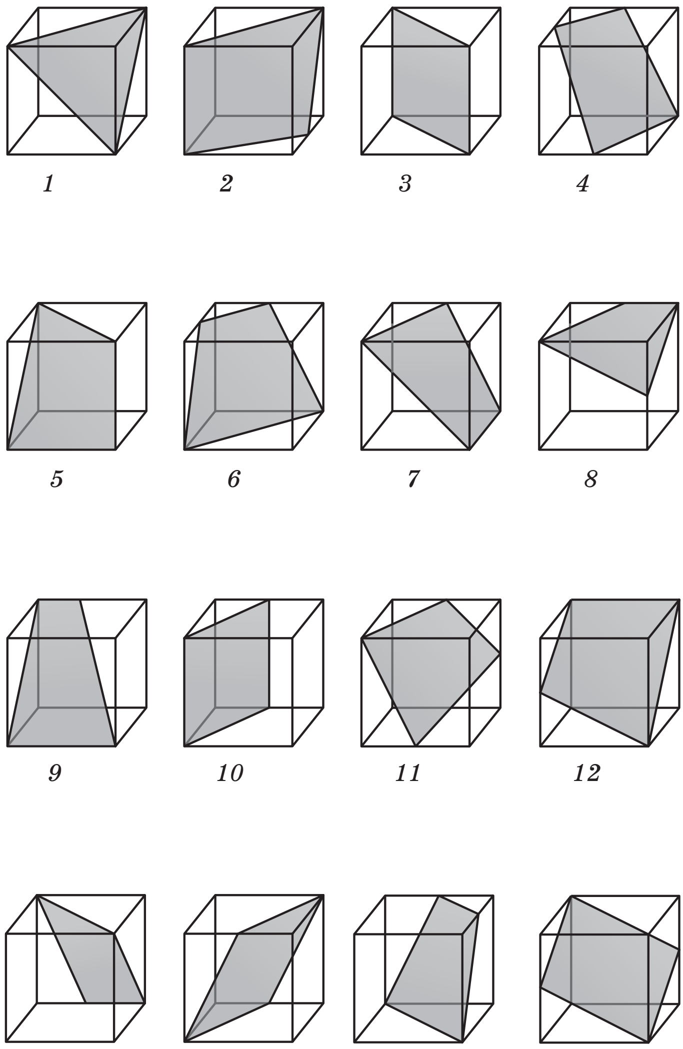


Рис. 2.13

2.45. Каждая из фигур *1—8* на рисунке 2.14, *а* является частью куба. Объединением каких трех фигур является каждая из фигур *А – З* на рисунке 2.14, *б*, если первоначальные кубы совмещать сдвигом?

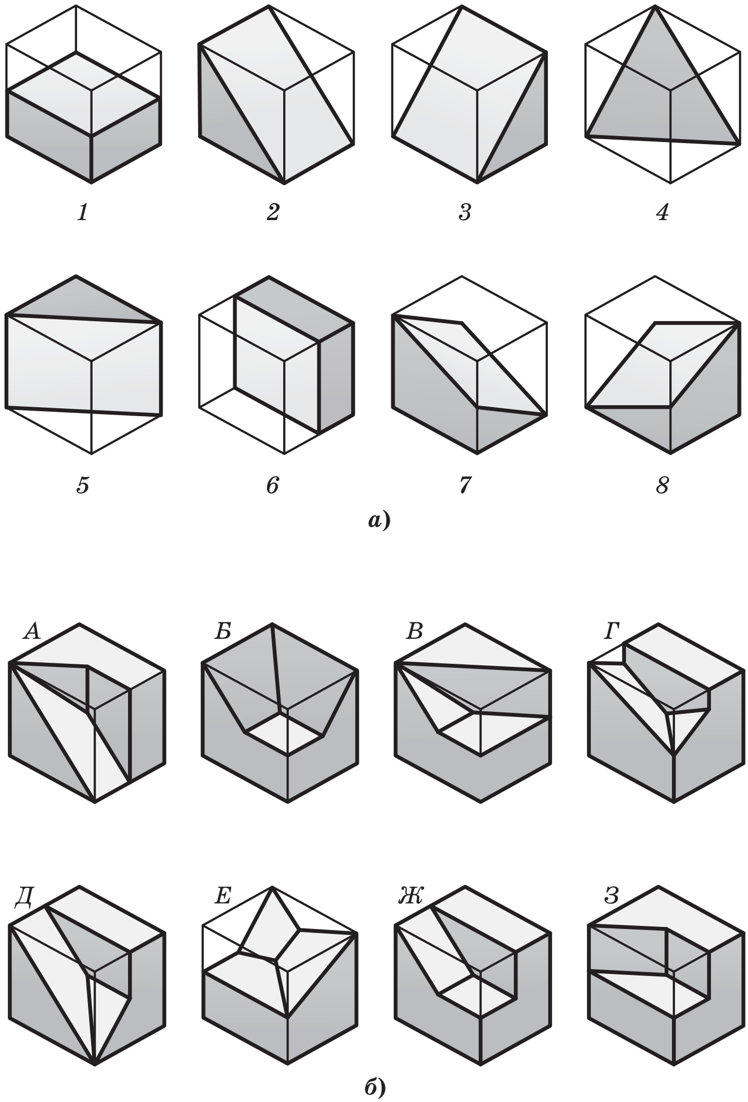


Рис. 2.14

8. Изображение геометрических фигур

Основное теоретическое содержание

Правила изображения пространственных фигур на плоскости (листе бумаги):

- линии, которые не видны на изображении фигуры (они закрыты гранями), изображают пунктиром;
- отрезки всегда изображают отрезками, прямые — прямыми, плоскости — плоскостями;
- параллельные прямые (отрезки), имеющиеся на реальной модели, на рисунках тоже изображают параллельными прямыми (отрезками);
- если на модели куба отметить середины ребер, то и на рисунке их изображениями будут середины соответствующих отрезков — ребер.

2.46. Расположите перед собой модель куба. Какие грани вы видите? Какие грани вы не видите? Какие ребра вы видите? Какие ребра вы не видите?

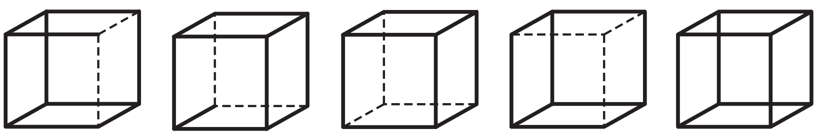
2.47. Посмотрите на модель тетраэдра — треугольной пирамиды с равными ребрами. Сколько граней вы видите? Сколько ребер вы видите?

2.48. Можно ли расположить куб перед глазами так, чтобы видеть: а) только одну грань куба; б) только две грани куба; в) только три грани куба? Опишите, как в каждом случае вы расположили куб.

2.49. Решите задачу **2.48**, заменив слово «грань» на слово «ребро».

2.50. На рисунке 2.15, *а—д* даны различные изображения каркасного куба. Какие из этих изображений правильные?

2.51. Можно ли расположить перед глазами модель тетраэдра так, чтобы были видны все его ребра?



а) *б*) *в*) *г*) *д*)

Рис. 2.15

2.52. Начертите в тетради куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как вы изобразили ребра, которые видите? Как вы изобразили ребра, которые не видите? Какие грани вам не видны? Какие отличия в изображении видимых и невидимых ребер и граней вы видите?

2.53. Достройте фигуру, изображенную на рисунке 2.16, до куба.

2.54. Внимательно изучите изображенный на рисунке 2.17 прямоугольный параллелепипед. Закройте книгу и сделайте по памяти чертеж, похожий на этот. Попрактикуйтесь до тех пор, пока не будете довольны своим результатом.

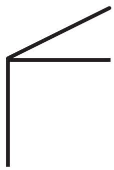


Рис. 2.16

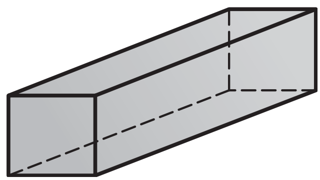


Рис. 2.17

2.55. На клетчатой бумаге изображены видимые ребра куба (рис. 2.18). Проведите невидимые ребра куба.

2.56. На клетчатой бумаге изображены видимые грани и ребра пирамиды (рис. 2.19). Проведите невидимые ребра пирамиды.

2.57. На клетчатой бумаге начали изображать прямоугольный параллелепипед (рис. 2.20). Проведите остальные ребра параллелепипеда.

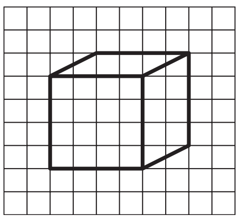


Рис. 2.18

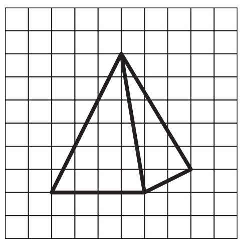


Рис. 2.19

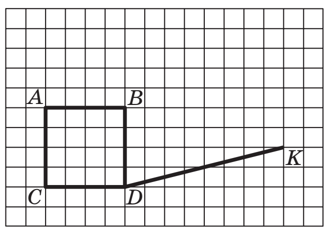


Рис. 2.20

2.58. На клетчатой бумаге изображены различные многогранники (видимые грани и ребра) (рис. 2.21). Проведите невидимые ребра этих многогранников.

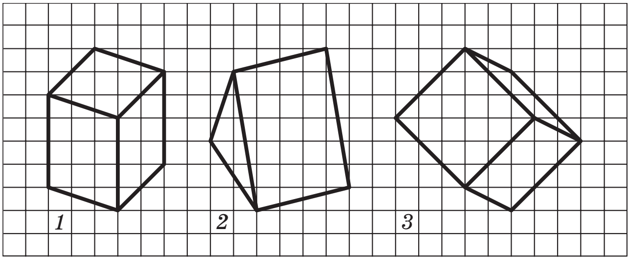


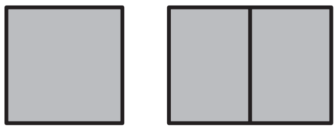
Рис. 2.21

2.59. Возьмите в руки модель куба (желательно не очень маленькую). Посмотрите на нее: а) слева снизу; б) справа снизу; в) справа сверху; г) слева сверху. Отметьте те грани и ребра, которые при этом не видны. Сделайте соответствующие рисунки в тетради.

2.60. Изобразите куб, у которого видны: а) передняя, правая и верхняя грани; б) передняя, левая и верхняя грани.

2.61. Можно ли считать, что на рисунке 2.22, *а*, *б* помещены верные изображения куба?

2.62. На рисунке 2.23 фигура не дорисована (верхняя часть изображения закрыта листом бумаги). Дорисуйте ее.



а) *б*)

Рис. 2.22

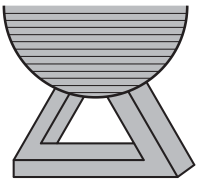
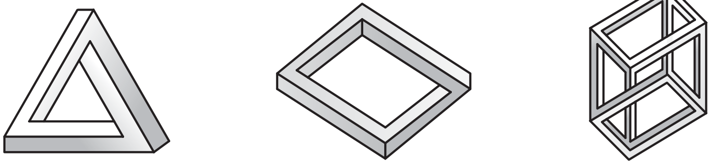


Рис. 2.23

2.63. Объясните, могут ли существовать не на бумаге, а в реальной жизни фигуры, изображенные на рисунке 2.24, *а*—*в*?



а) *б*) *в*)

Рис. 2.24

2.64. Можно ли сконструировать «многогранник», представленный на рисунке 2.25?

2.65. Нарисуйте вид справа и спереди многогранников, изображенных на рисунке 2.26, *а—в*.

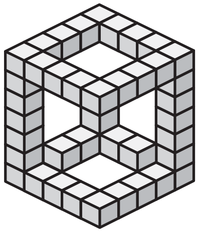
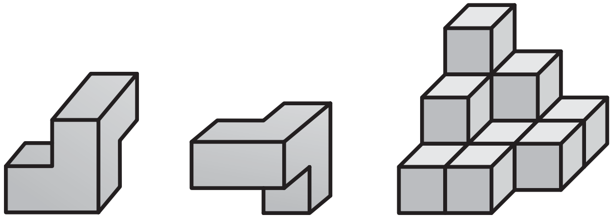


Рис. 2.25

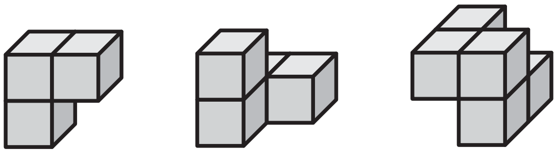


а) *б*) *в*)

Рис. 2.26

2.66. Нарисуйте вид спереди, справа, слева для каждого из многогранников, изображенных на рисунке 2.27, *а—в*.

2.67. Нарисуйте вид спереди, справа, слева и сзади изображенного на рисунке 2.28 многогранника (он состоит из 11 кубиков).



а) *б*) *в*)

Рис. 2.27

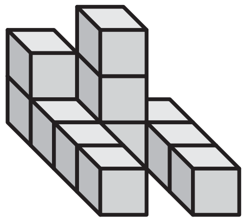
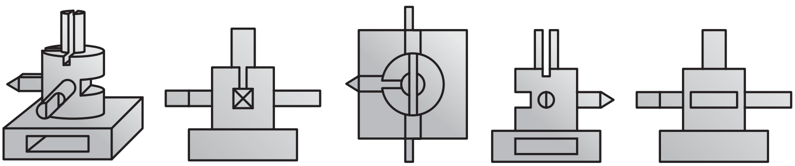


Рис. 2.28

2.68. На рисунке 2.29, *а* изображена некоторая фигура, а на рисунке 2.29, *б—д* даны изображения этой фигуры с разных сторон. Один из этих рисунков ошибочный. Какой?



а) *б*) *в*) *г*) *д*)

Рис. 2.29

2.69. Среди кубиков с номерами от *1* до *11* (рис. 2.30) найдите парные кубики для *A*, *B* и *C*. При этом нужно сравнивать цвета граней и их положения.

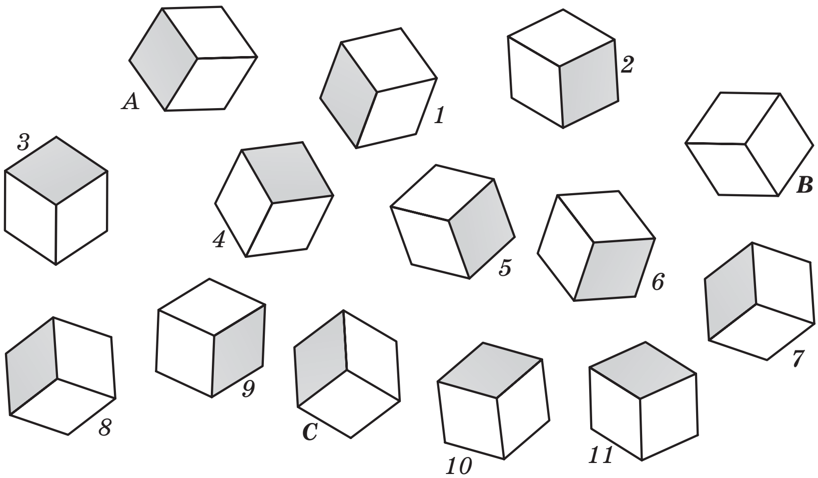


Рис. 2.30

Тема 3

ОТРЕЗКИ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

9. Понятие отрезка

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Отрезком AB* называется фигура, состоящая из точек *A*, *B* прямой и всех точек прямой, лежащих между ними.

Термины и обозначения

Отрезки обозначают двумя буквами, характеризующими начало и конец отрезка: *AB*, *CD*, *MK* и т. д.

3.1. Даны прямая *a* и на ней три точки (рис. 3.1). Сколько отрезков получилось на прямой? Каким свойством обладают эти отрезки? Решите задачу при условии, что на прямой даны 4 точки; 5 точек.

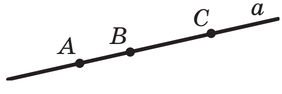


Рис. 3.1

3.2. На рисунке 3.2, *а*, *б* изображены две фигуры. Сколько отрезков вы видите на этих рисунках (имеются в виду отрезки, соединяющие выделенные жирно точки)?

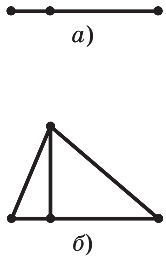


Рис. 3.2

3.3. На рисунке 3.3 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ответьте на вопросы:

1. Сколько отрезков (ребер) выходит из каждой вершины куба?
2. Сколько ребер имеет куб?
3. Сколько граней имеет куб?

3.4. На рисунке 3.4 изображен прямоугольный параллелепипед. Ответьте на вопросы:

1. Сколько отрезков (ребер) выходит из каждой вершины параллелепипеда?
2. Сколько ребер имеет прямоугольный параллелепипед?
3. Сколько граней имеет прямоугольный параллелепипед?

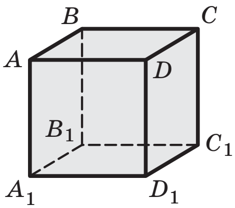


Рис. 3.3

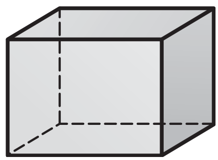


Рис. 3.4

3.5. Даны два отрезка. Как они могут быть расположены относительно друг друга? Сколько у них может быть точек пересечения? Почему?

3.6. Известно, что два отрезка имеют одну общую точку. Как они могут быть расположены?

3.7. Что нужно знать, чтобы утверждать, что отрезки пересекаются?

3.8. Даны отрезок и прямая. Каково может быть их взаимное расположение?

3.9. Даны отрезок и плоскость. Каково может быть их взаимное расположение?

3.10. Что нужно знать, чтобы утверждать, что отрезок: а) пересекает прямую; б) пересекает плоскость; в) не пересекает прямую; г) не пересекает плоскость?

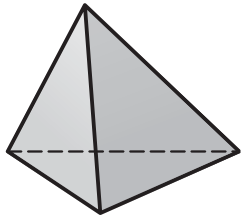


Рис. 3.5

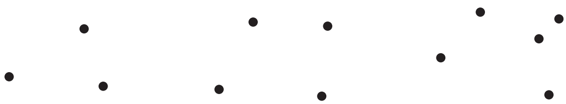
3.11. Как проверить, лежит ли отрезок AB: а) в одной полуплоскости (в разных полуплоскостях), заданной некоторой прямой a; б) в одном полупространстве (в разных полупространствах), заданном некоторой плоскостью α?

3.12. На рисунке 3.3 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Могут ли вершины куба задавать отрезки, отличные от ребер куба? Назовите эти отрезки.

3.13. На рисунке 3.5 изображена треугольная пирамида. Существуют ли другие отрезки (кроме ребер пирамиды), соединяющие вершины пирамиды?

3.14. Даны две (три) различные точки. Как они могут быть расположены? Сколько отрезков с концами в этих точках мы можем при этом получить? Изобразите все возможные случаи.

3.15. На рисунке 3.6, *а—в* изображены 3, 4 и 5 точек. Соедините эти точки отрезками. Сколько отрезков вы получите?



а) *б*) *в*)

Рис. 3.6

3.16. Даны различные точки A, B, C, D. Сколько существует различных отрезков, оба конца которых принадлежат фигуре, состоящей из точек: а) A, B, C; б) A, B, C и D?

3.17. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вершину A куба соедините отрезками с другими его вершинами. Сколько отрезков вы при этом получите?

3.18. Внутри куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка O. Эту точку соедините со всеми вершинами куба. Сколько отрезков при этом получится?

3.19. 1. На прямой нужно получить три отрезка. Сколько для этого следует отметить точек на данной прямой?
2. Решите задачу для случаев, когда надо получить 4, 5, 6 отрезков.

3.20. На прямой даны 5, 6, 7, 8, ..., n точек. Сколько отрезков при этом имеется на данной прямой?

3.21. Докажите, что если две точки отрезка AB принадлежат отрезку CD, то эти отрезки лежат на одной прямой.

3.22. Расставьте на плоскости шесть точек таким образом, что если соединить первую точку со второй, вторую с третьей и т. д., а шестую вновь с первой, то каждый из шести отрезков ровно один раз пересекается с каким-либо другим отрезком.

3.23. Дан отрезок AB. Назовите, какую фигуру образует множество всех таких точек X этого отрезка, для которых: а) $AX < AB$; б) $AX = BX$; в) $AX \leqslant \frac{AB}{2}$; г) $AX \neq BX$.

3.24. Даны две точки A и B. Покажите на рисунке множество таких точек X плоскости, для которых: а) $BX - AX = AB$; б) $AX - BX = AB$; в) $AX + BX \leqslant AB$.

3.25. В каких многогранниках из одной вершины исходят 3 отрезка (ребра); 4 отрезка (ребра); 5 отрезков (ребер) и т. д.? Изобразите эти многогранники.

3.26. Начертите многогранник, имеющий: а) 8 ребер; б) 9 ребер.

3.27. Назовите (изобразите) многогранник, имеющий наименьшее число ребер. Сколько у него вершин? граней?

3.28. Постройте многогранник, из каждой вершины которого выходят более трех ребер.

10. Измерение отрезков

Основное теоретическое содержание

Каждому отрезку соответствует его длина. *Длиной отрезка* называют расстояние между двумя точками, являющимися концами этого отрезка.

Процесс нахождения длин отрезков называют *измерением длин отрезков*. Измерить отрезок — значит сравнить его длину с длиной некоторого отрезка, принятого за единицу измерения. Если за единицу измерения принят метр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается метр.

Для измерения длин отрезков можно сформулировать некоторые свойства:

- каждый отрезок имеет определенную длину больше нуля;
- длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Отрезки равны*, если равны их длины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Отрезки равны*, если при наложении друг на друга они совпадают.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Точка A лежит между точками B и C*, если сумма расстояний от точки B до точки A и от точки A до точки C равна расстоянию от точки B до точки C, т. е. $BA + AC = BC$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точку B отрезка AC называют его *серединой*, если расстояние AB равно расстоянию BC, т. е. $AB = BC$.

ТЕОРЕМА (неравенство треугольника). *Для любых точек A, B и C, не принадлежащих одной прямой, расстояние AC меньше суммы расстояний AB и BC, т. е. $AC < AB + BC$.*

Термины и обозначения

Иногда, говоря «отрезок», мы имеем в виду его длину. Запись «$AB = 5$ см» читается так: «отрезок AB имеет длину 5 см или отрезок AB длиной 5 см».

3.29. Расстояние между двумя точками, измеренное в сантиметрах, равно 12. Чему будет равно это расстояние, если за единицу длины принять миллиметр?

3.30. Расстояние между двумя точками, измеренное в миллиметрах, равно 9. Чему равно это расстояние, выраженное в сантиметрах?

3.31. Расстояние PK равно 54 см. Чему оно равно в дециметрах? в метрах?

3.32. Расстояние PC равно 54 дм. Чему оно равно в сантиметрах? в метрах?

3.33. Даны прямая a и точка A на ней. Сколько отрезков длиной 5 см можно отложить на прямой a от точки A?

3.34. Пусть P, C, M — три точки на некоторой прямой. Какое соотношение между отрезками PC, CM и PM должно выполняться, если P лежит между C и M?

3.35. Как расположены три различные точки A, B, C, если $AB + BC = AC$?

3.36. Пусть A, B, C — три различные точки. Может ли случиться, что будет выполняться неравенство $AB + BC > AC$? Если нет, то почему? Если да, то как расположены точки A, B, C?

3.37. Могут ли для трех точек A, B и C одной прямой одновременно выполняться равенства: $AB + BC = AC$ и $AC + CB = AB$?

3.38. Точка A лежит на прямой BC. Лежит ли точка A между точками B и C, если $AB + AC = BC$? Объясните ваш ответ.

3.39. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Какая из этих точек лежит между двумя другими, если $AB = AC$? Объясните ваш ответ.

3.40. Пусть A, B, C — три точки на окружности. Можно ли сказать, что каждая из этих точек лежит между двумя другими?

3.41. Почему предложение «Точка B называется серединой отрезка AC, если $AB = BC$» нельзя считать определением середины отрезка?

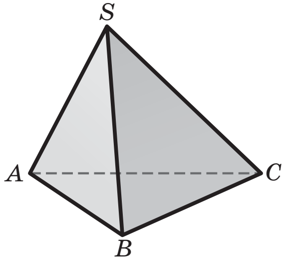


Рис. 3.7

3.42. Посередине доски длиной 2 м, т. е. на расстоянии 1 м от каждого из ее концов, проведена черта. Столяр тщательно распиливает доску по этой черте. Однако ни одна из двух получившихся при этом половин не имеет длины 1 м. Более того, общая длина этих двух половин не равна всей длине доски. Как это объяснить?

3.43. На рисунке 3.7 изображена треугольная пирамида $SABC$. Ребра SA и SC равны соответственно 3 и 4 см. Какую длину может иметь ребро AC данной пирамиды?

3.44. В каждом из следующих равенств вставьте пропущенные числа:

а) 2 м = ... см = ... мм; б) ... м = ... см = 1 мм; в) ... м = = 50 см = ... мм.

3.45. Точка B лежит на прямой между точками A и C; $AB = 2$, $AC = 5$. Найдите расстояние BC.

3.46. Если расстояние PC равно x дм, то чему оно равно в сантиметрах?

3.47. Расстояние AB, измеренное в сантиметрах, на 15 больше, чем то же самое пятикратное расстояние, измеренное в дециметрах. Чему равно расстояние AB в дециметрах?

3.48. Города X, Y и Z на карте расположены на одной прямой, но не обязательно в том порядке, в котором перечислены. Расстояние от X до Y равно 12 км; расстояние от Y до Z — 21 км.

1. Можно ли сказать, какой город находится между двумя другими? Какой город не находится между двумя другими?

2. Сделайте рисунок и с его помощью определите расстояние от X до Y. Сколько вариантов решения у этой задачи?

3. Вам дополнительно стало известно, что расстояние от X до Z равно 9 км. Какой город находится между двумя другими?

4. Расстояние между X и Y равно k км, между X и Z — n км, между Y и Z — $(k + n)$ км. Какой город находится между двумя другими?

3.49. Пусть E, H, K — три точки на прямой. Точки E и H отстоят друг от друга на 3 см, а точки H и K — на 5 см. Сколькими способами можно расположить на прямой эти три точки? Поясните выводы рисунками.

3.50. Пусть P, K, M — три точки некоторой прямой. Какая из этих точек лежит между двумя другими, если $PK = 12$, $PM = 7$ и $KM = 5$? Обоснуйте вывод.

3.51. Пусть D, H, K — три точки некоторой прямой. Определите, какое из следующих утверждений верно:

1) точка K лежит между D и H и точка H лежит между D и K;
2) точка H лежит между K и D и точка H лежит между D и K;
3) точка D лежит между H и K и точка K лежит между D и H;
4) точка K лежит между H и D и точка D лежит между K и H;
5) точка D лежит между K и H и точка D лежит между H и K.

3.52. Расстояние от пункта A до пункта B равно 20 км, а от пункта B до пункта C — 12 км. Каким может быть расстояние от пункта A до пункта C? Для случаев, когда это расстояние принимает наибольшее или наименьшее из возможных значений, сделайте рисунок, приняв расстояние в 1 км за 1 см.

3.53. На прямой расположены три точки A, B и C (рис. 3.8). Найдите расстояние AC, если: а) $AB = 6$ см, $BC = 12$ см; б) $AB = 6$ м, $BC = 12$ м; в) $AB = 6$ км, $BC = 12$ км.

Рис. 3.8

3.54. Решите задачу **3.53** при условиях: а) $AB = 6$ м, $BC = 12$ см; б) $AB = 6$ см, $BC = 12$ м; в) $AB = 6$ км, $BC = 12$ см.

3.55. В задачах **3.53** и **3.54** заданы только числа 6 и 12. Объясните, почему же в ответах задачи **3.53** во всех трех случаях получается одно и то же число, хотя единицы разные, а в задаче **3.54** все ответы различны.

T **3.56.** Обсудите следующие вопросы:
1. Почему существует столько различных единиц длины?
2. Если допустить, что мы можем установить одну универсальную единицу длины, то какие преимущества это дало бы? какие недостатки?

3.57. Куб со стороной 1 м распилили на кубы со стороной 1 см. Получившиеся кубики выложили в ряд. Чему равна длина ряда?

3.58. Петя и Вова подсчитали расстояние между одними и теми же точками A, B и C. Петя сказал: «$AB = 1$, а $BC = 2{,}5$». Вова сказал: «$AB = 12$, а $BC = 30$». Если оба мальчика правы, то объясните, как они могли для одних и тех же расстояний получить разные числа. Согласуется ли это со свойствами расстояний?

3.59. Можно ли построить три точки X, Y и Z так, чтобы выполнялись следующие требования:

а) $XY + YZ = XZ, \quad XZ - XY > YZ$;

б) $XZ - XY = YZ, \quad XY + YZ \geqslant XZ$;

в) $XY + YZ > XZ, \quad XY - XZ > YZ$?

Для случаев, когда построение возможно, сделайте рисунки.

3.60. Сколькими способами из отрезков длиной 7 и 12 см можно составить отрезок длиной 1 м?

3.61. В озеро впадает река (рис. 3.9). По реке и озеру движется моторная лодка. Ее собственная скорость больше скорости течения реки. На озере течения нет. «Расстояние» между пунктами A, B, C и D будем оценивать по времени, необходимому для того, чтобы лодка пришла из одного пункта в другой. Какие из основных свойств расстояний будут выполняться для такого «расстояния» при любом выборе пунктов на берегах реки и озера? Что можно сказать о таком «расстоянии», если пункты выбираются только на берегу озера?

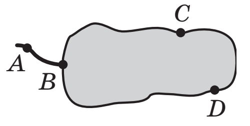


Рис. 3.9

3.62. При горных переходах расстояние иногда измеряется временем, затраченным при переходе из одного пункта в другой. Будут ли для таких «расстояний» выполняться все свойства расстояний?

3.63. Четыре точки A, B, C и D принадлежат некоторой прямой, порядок их расположения таков, что $AC > AB$ и $BD < BC$. Сделайте рисунок, покажите, как расположены эти четыре точки. Сколько способов их расположения существует?

11. Расстояние между фигурами

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расстоянием от точки A до фигуры* Φ называется расстояние от A до ближайшей к ней точки фигуры Φ, т. е. до такой точки B, что $AB < AM$ для любой точки M фигуры Φ, отличной от B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть мы имеем две фигуры Φ_1 и Φ_2. Если среди расстояний между точками, одна из которых принадлежит фигуре Φ_1, а другая — фигуре Φ_2, существует наименьшее, то его называют *расстоянием между фигурами* Φ_1 и Φ_2.

3.64. На рисунке 3.10 изображены два здания. Как вы будете измерять расстояние между ними?

3.65. Представьте себе две планеты в космосе, диаметр одной из них равен 1 000 000 км, а другой — 10 000 000 км. На сколько километров отличается расстояние между планетами от расстояния между центрами этих планет?

3.66. Расстояние от Земли до Солнца равно 150 млн км, а до Луны — 400 тыс. км. Чему равно расстояние от Луны до Солнца во время: а) солнечного затмения; б) лунного затмения?

Рис. 3.10

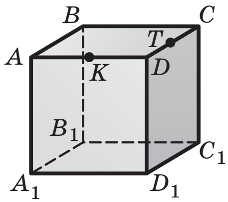


Рис. 3.11

3.67. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.11), точки T и K — середины ребер CD и AD. Укажите расстояние от точки D: а) до плоскости грани ABB_1A_1; б) до отрезка CT; в) до отрезка KT; г) до ребра AB; д) до ребра BC; е) до прямой AC_1; ж) до прямой A_1C_1.

Тема 4
ЛОМАНАЯ

12. Понятие ломаной

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ломаной* $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ называется фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ и соединяющих их отрезков A_1A_2, $A_2A_3 \ldots, A_{n-1} A_n$. Точки $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ называются *вершинами ломаной*, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ — *звеньями ломаной*. Точки A_1 и A_n называются соответственно *началом* и *концом ломаной*. При построении ломаной соседние звенья не должны лежать на одной прямой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если начало и конец ломаной совпадают, то она называется *замкнутой*, в противном случае ломаная называется *незамкнутой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ломаная иногда может пересекать сама себя, т. е. не соседние по порядку звенья ломаной могут иметь общие точки. В этом случае ломаная называется *самопересекающейся*, или *непростой*. Если таких самопересечений нет, то ломаная называется *простой*.

Термины и обозначения

Если в тексте написано «ломаная», то следует понимать, что она простая.

4.1. На рисунке 4.1, *а* и *б* изображены две ломаные $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Ответьте на вопросы:

1. Сколько вершин и звеньев имеют эти ломаные?
2. Какая из этих двух ломаных является простой?
3. Какие звенья ломаных имеют пересечения?

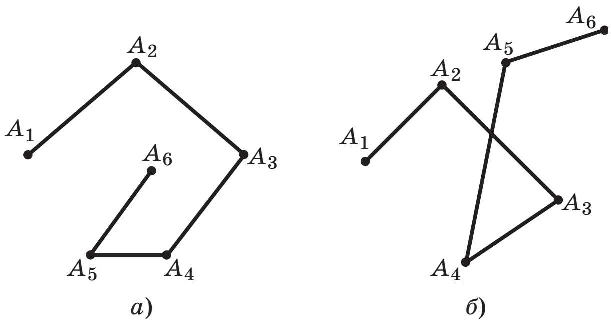


Рис. 4.1

4.2. Приведите примеры ломаных из окружающей обстановки.

4.3. На рисунке 4.2, *а—к* изображены различные цифры, являющиеся объединением отрезков, т. е. ломаными. Какие из них являются простыми ломаными?

4.4. Какие из фигур на рисунке 4.2, *а—к* являются простыми замкнутыми ломаными?

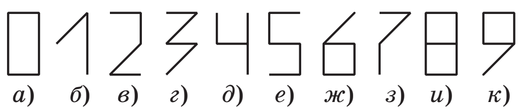


Рис. 4.2

4.5. На модели куба покажите ломаные, все звенья которых: а) лежат в одной плоскости; б) не лежат в одной плоскости.

4.6. Какое наименьшее число звеньев может быть у замкнутой ломаной?

4.7. На рисунке 4.3 изображена замкнутая ломаная. Сколько у нее звеньев? Лежат ли все звенья в одной плоскости? Ответ обоснуйте.

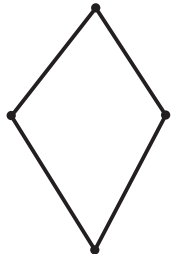


Рис. 4.3

4.8. На рисунке 4.4, *а—г* изображены различные фигуры, являющиеся объединением отрезков. Какие из этих фигур являются: а) простыми ломаными; б) простыми замкнутыми ломаными?

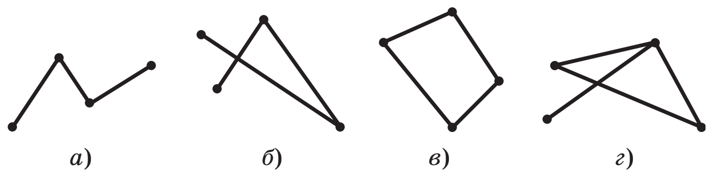


Рис. 4.4

4.9. Отметьте в тетради точки так, как показано на рисунке 4.5, и постройте несколько простых ломаных, вершины которых находятся в этих точках.

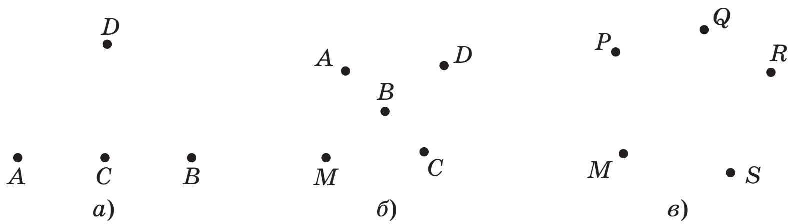


Рис. 4.5

4.10. В плоскости дана прямая KH. Постройте в этой плоскости ломаную, состоящую из n звеньев ($n = 2, 3, 4, \ldots$), так, чтобы прямая KH рассекала каждое из ее звеньев на два отрезка.

4.11. В полуплоскости с границей l даны две точки. Можно ли построить ломаную, соединяющую эти две точки и не пересекающую прямую l? Покажите это на чертежах.

4.12. В различных полупространствах, задаваемых плоскостью α, даны две точки. Можно ли построить ломаную, соединяющую эти точки и не пересекающую плоскость α?

Т **4.13.** Какое наименьшее число звеньев может иметь ломаная, два звена которой лежат на одной прямой? Начертите такую ломаную.

4.14. 1. Сколько существует двухзвенных ломаных, вершинами которых являются точки, изображенные на рисунке 4.5, *а—в*, а сторонами — отрезки с концами в этих точках?

2. Сколько таких трехзвенных ломаных?

4.15. Дан квадрат $ABCD$.

1. Покажите, что существуют 5 простых замкнутых ломаных, все вершины которых — вершины этого квадрата.

2. Покажите, что существуют 20 простых незамкнутых ломаных, все вершины которых являются вершинами квадрата $ABCD$.

4.16. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как из точки A, следуя вдоль ребер, можно попасть в точку C_1, не проходя два раза через одну и ту же вершину?

4.17. Жук ползает по ребрам куба. Сможет ли он последовательно обойти их, проходя по каждому ребру ровно один раз?

4.18. Нарисуйте квадрат. Отметьте на нем 9 точек: вершины, середины сторон и точку пересечения диагоналей. Сколько ломаных соединяют две противоположные вершины квадрата? При этом надо учесть, что каждая ломаная имеет вершинами только отмеченные точки, а ее звенья лежат на сторонах квадрата или параллельны им.

4.19. Сможете ли вы нарисовать: а) замкнутую семизвенную ломаную, которая пересекает свое звено два раза; б) замкнутую шестизвенную ломаную, которая каждое звено пересекает два раза; в) замкнутую ломаную, которая каждое звено пересекает один раз?

4.20. Какое наибольшее число точек самопересечения может быть у замкнутой ломаной из пяти звеньев? из семи звеньев? из любого нечетного числа звеньев? А если ломаная будет незамкнутой, изменится ли результат? Попробуйте решить задачу для ломаной, у которой четное число звеньев.

4.21. О некоторой ломаной известно: а) она замкнутая; б) каждое свое звено она пересекает ровно один раз; в) у нее шесть звеньев. Есть ли противоречие в этих данных? Если есть, то какое изменение нужно внести в исходную информацию, чтобы избежать противоречия?

4.22. Сможете ли вы сделать из гибкой проволоки замкнутую пятизвенную ломаную, имеющую: а) одну точку самопересечения; б) две точки самопересечения; в) три точки пересечения; г) четыре точки пересечения; д) пять точек пересечения?

4.23. У Димы есть кусок фанеры, расчерченный на 64 клетки (рис. 4.6). Он хочет сделать из этой фанеры шахматную доску. Как это можно сделать? (При этом хотелось бы, чтобы фанеру пришлось разрезать на небольшое количество частей, лучше всего на две.)

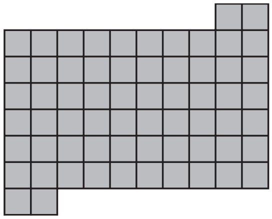


Рис. 4.6

4.24. Какое максимальное количество точек самопересечения может иметь замкнутая n-звенная плоская ломаная, если: а) n нечетно; б) n четно? (Предполагается, что никакие три вершины не лежат на одной прямой и что никакие три звена не пересекаются в одной точке.)

4.25. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Всякий отрезок, являющийся общей стороной двух из 24 полученных квадратов, окрашен в синий или красный цвет. Известно, что красных отрезков 26. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная линия, состоящая только из красных отрезков.

И **4.26. О свойствах ломаных с равным количеством точек самопересечения на каждом звене.**

(Задание составлено на основе материалов статьи в журнале «Квант», № 8, 1986.)

Введем дополнительное определение ломаных, называемых ломаными типа (n, m).

Ломаными типа (n, m), где $n \geqslant 3$, $m \geqslant 1$, называют последовательности из n различных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (вершин) и n последовательно соединяющих эти точки отрезков A_1A_2,

A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 (звеньев), таких, что каждое звено пересекают ровно m других звеньев, притом в m различных внутренних точках. Например, на рисунке 4.7 показаны ломаные типов (5, 2), (6, 1), (9, 2).

1. Постройте, исходя из сформулированного определения, ломаные типов (0, 1), (5, 2), (9, 2).

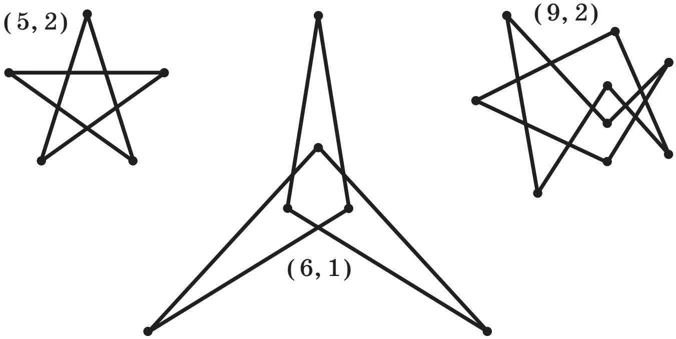


Рис. 4.7

2. При каких n существует ломаная типа $(n, 1)$?

3. Верно ли, что при всяком m существует (для некоторого n) ломаная типа (n, m)?

4. Для каких пар чисел (n, m) существует ломаная типа (n, m)?

13. Длина ломаной

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Длиной ломаной* называется сумма длин ее звеньев.

ТЕОРЕМА (о длине ломаной). *Длина ломаной больше расстояния между ее концами.*

4.27. На рисунке 4.8 изображена ломаная $ABCDE$ и указаны длины ее звеньев. Каким может быть расстояние между точками A и E?

4.28. Постройте ломаную $ABCD$, выполните необходимые измерения и вычислите ее длину.

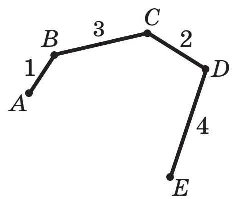


Рис. 4.8

4.29. На рисунке 4.9 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть длина ребра этого куба равна 1 см.

1. Постройте на этом кубе трехзвенную ломаную, составленную из ребер куба. Чему равна длина этой ломаной?

2. Постройте на этом кубе четырехзвенную ломаную, составленную из ребер куба. Чему равна длина этой ломаной?

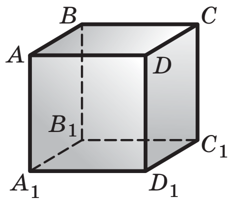


Рис. 4.9

4.30. Звенья ломаной $ABCD$ имеют длины: $AB = 1$ см, $BC = 2$ см, $CD = 3$ см. Может ли расстояние AD оказаться равным: а) 0,5 см; б) 6 см; в) 1 см; г) 7 см? Постройте такую ломаную, если это возможно.

4.31. Какую длину может иметь отрезок AB, концы которого соединены ломаной, имеющей звенья длиной: 1) 3 см, 2 см и 5,5 см; 2) 3 см, 4 см и 5 см? Ответ запишите в виде двойного неравенства.

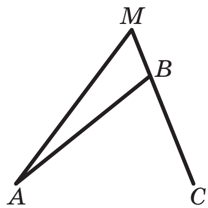


Рис. 4.10

4.32. Существует ли замкнутая ломаная, длины звеньев которой равны: 1) 2 см, 3 см, 4 см, 10 см; 2) 3 см, 3 см, 4 см, 4 см; 3) 4 см, 5 см, 0,5 см?

4.33. Докажите, что существует трехзвенная ломаная длиной $3a$, содержащая все вершины квадрата со стороной a. Докажите, что число звеньев и длину такой ломаной нельзя уменьшить.

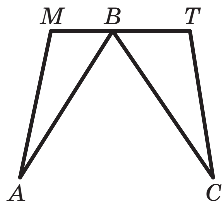


Рис. 4.11

4.34. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 4.9). Длина его ребра 2 см. Может ли ломаная состоять из ребер куба и иметь пять звеньев? Всегда ли длина такой ломаной равна 10 см?

4.35. Докажите, что существует трехзвенная ломаная длиной $7a$, содержащая все вершины куба с ребром a. Докажите, что число звеньев и длину такой ломаной нельзя уменьшить.

4.36. Докажите, что длина ломаной ABC меньше длины ломаной AMC (рис. 4.10).

4.37. Докажите, что длина ломаной ABC меньше длины ломаной $AMTC$ (рис. 4.11).

4.38. Докажите, что длина ломаной AMC больше длины ломаной $ATKC$ (рис. 4.12).

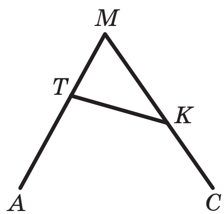


Рис. 4.12

4.39. Квадратный участок земли, сторона которого равна 40 м, состоит из 16 грядок. Для орошения участка между некоторыми грядками надо проложить трубу длиной 100 м. Эта труба должна разделить участок на две равные части. Покажите, как надо проложить трубу.

4.40. Из одного куска проволоки, не разрезая его, надо сделать каркас: а) треугольной пирамиды; б) четырехугольной пирамиды; в) куба. Предположим, что длина каждого ребра равна 1 см. Какова в этом случае наименьшая длина такой проволоки?

4.41. Внутри квадрата отмечены 9 точек (рис. 4.13). Постройте четырехзвенную ломаную, проходящую через все точки. Сколько можно еще добавить точек, чтобы перечеркнуть все точки четырехзвенной ломаной при условии, что на каждом звене ломаной лежат не более четырех точек?

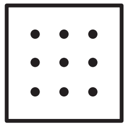


Рис. 4.13

Тема 5

УГЛЫ

14. Лучи. Направления

Основное теоретическое содержание

Пусть на прямой a отмечена точка B. Эта точка разделяет прямую a на три части:

1) первая состоит из точек, лежащих левее точки B;
2) вторая состоит из самой точки B;
3) третья состоит из точек, лежащих правее точки B.

Объединение первого или третьего множеств с точкой B называют *лучом*. Таким образом, точка B определила на прямой a два луча. Точка B называется *началом* каждого из этих лучей.

Лучи иногда называют *полупрямыми*. Точка B называется *начальной точкой* полупрямой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Лучи прямой a, на которые она разбивается точкой B, называют *дополнительными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Направлением* называется множество лучей, сонаправленных данному.

Термины и обозначения

Лучи обозначаются строчными латинскими буквами a, b, m, n, ... или двумя прописными буквами, одна из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-либо точку на луче.

5.1. На прямой AB имеется точка C (рис. 5.1). Какие геометрические фигуры вы видите на этом рисунке?

5.2. На прямой отмечены три точки M, A, K (рис. 5.2). Сколько лучей с началами в этих точках вы можете назвать на этом рисунке?

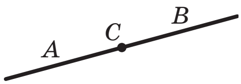


Рис. 5.1

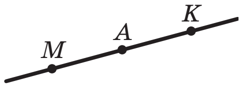


Рис. 5.2

5.3. Даны две точки. Сколько различных направлений задают эти точки?

5.4. Сколько различных направлений существует на плоскости?

5.5. Как на прямой получить две полупрямые: а) с общим началом; б) с различными начальными точками?

5.6. Как могут быть расположены: а) два луча с общим началом; б) три луча с общим началом?

5.7. Всегда ли два луча лежат в одной плоскости?

5.8. Всегда ли три луча лежат в одной плоскости?

5.9. Сколько различных направлений можно задать в пространстве? Чем определяются эти направления?

5.10. О каких лучах можно сказать, что они: а) сонаправленные; б) противоположно направленные?

5.11. Могут ли вершины куба задавать одинаковые направления? Сколько различных направлений задают вершины куба?

5.12. Могут ли вершины прямоугольного параллелепипеда задавать одинаковые направления?

5.13. На прямой MN отмечена точка O (рис. 5.3). Назовите дополнительные лучи на этом рисунке.

5.14. На прямой CD отмечены две точки A и B (рис. 5.4). Сколько лучей с началами в точках A и B изображено на этом рисунке? Назовите их.

Рис. 5.3

Рис. 5.4

5.15. Какой фигурой является пересечение лучей AK и KA?

5.16. Какой фигурой может являться: а) пересечение двух лучей, не лежащих на одной прямой; б) объединение двух лучей, лежащих на одной прямой?

5.17. Начертите в тетради прямую и отметьте на ней две точки A и B, находящиеся на расстоянии 5 см друг от друга. Сколько на луче AB находится точек, расположенных от точки A на расстоянии 3 см? Сколько на этом луче находится точек, расположенных от точки B на расстоянии 3 см? 6 см?

5.18. Запишите в принятых обозначениях: а) точка A принадлежит лучу a; б) луч l является частью луча p; в) точка M не принадлежит лучу a.

5.19. Сколько различных направлений задают на плоскости: а) две точки; б) три точки; в) четыре точки? Рассмотрите все возможные случаи расположения этих точек.

5.20. Отметьте на прямой последовательно четыре точки A, M, P, B. Сколько на прямой AB получилось лучей с началом в точках A, M, P и B? Запишите эти лучи. Какие лучи являются противоположно направленными друг другу?

5.21. На прямой отмечены пять точек (рис. 5.5). Сколько различных лучей с началами в этих точках вы здесь видите?

Рис. 5.5

5.22. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какие вершины этого куба задают сонаправленные лучи, т. е. определяют одно направление? Могут ли вершины куба задавать противоположные направления? Приведите примеры.

5.23. Дана треугольная пирамида $PABC$. а) Есть ли пары вершин этой пирамиды, которые задают сонаправленные лучи? б) Сколько различных лучей определяют пары вершин этой пирамиды?

5.24. Луч света отражается от плоского зеркала AB таким образом, что угол падения MNA равен углу отражения BNP (рис. 5.6). Докажите, что если на плоскости имеются два взаимно перпендикулярных зеркала, то любой луч, направленный внутрь образованного этими зеркалами прямого угла (не проходящий через вершину угла), отразившись по одному разу от каждого зеркала, изменит свое направление на противоположное.

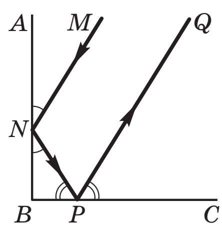


Рис. 5.6

15. Понятие угла

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Углом* называют фигуру, состоящую из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости. Точку, из которой выходят ограничивающие угол лучи, называют *вершиной угла*, а сами лучи — *сторонами угла*.

Луч проходит между сторонами данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Развернутым углом* называют угол, сторонами которого являются дополнительные лучи одной прямой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Угол между направлением* движения судна в море и направлением на север называют *курсом судна*.

Пеленгом предмета называют угол, вершина которого совпадает с точкой, из которой этот пеленг определяется, а сторонами являются направления на север и на предмет.

Термины и обозначения

Слово «угол» иногда заменяют знаком «$\angle$». Часто при изображении угла чертят только выходящие из вершины участки его сторон, а ту часть плоскости, которую хотят указать, обозначают дужкой «$\cup$».

Углы можно обозначать одной прописной буквой, поставленной у вершины угла, например $\angle A$, или тремя буквами, из которых одна ставится при вершине угла, а две другие — у каких-нибудь точек сторон, например $\angle BAD$. Буква, стоящая при вершине угла, всегда записывается между двумя другими буквами.

Иногда угол обозначают цифрой, поставленной внутри угла.

Угол, сторонами которого являются лучи a и b, обозначают как $\angle(ab)$.

5.25. На рисунке 5.7 изображены два луча с общим началом. Сколько при этом получилось углов? Какой фигурой является объединение и пересечение получившихся углов?

5.26. На рисунке 5.8 изображены три луча a, b и c, имеющие общее начало. Сколько различных углов, образованных данными лучами, получилось? Укажите для каждой пары получившихся углов их пересечение и объединение. Объединение каких углов дает каждый угол?

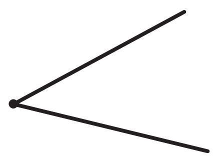


Рис. 5.7

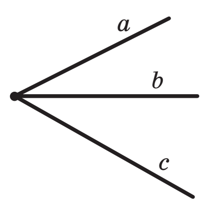


Рис. 5.8

5.27. Посмотрите на треугольную пирамиду (рис. 5.9). Сколько различных углов задают лучи, которым принадлежат ребра этой пирамиды?

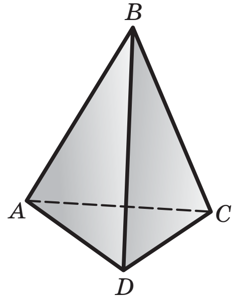


Рис. 5.9

5.28. У куба есть восемь вершин. Сколько различных углов определяют лучи, исходящие из этих вершин, которым принадлежат ребра куба?

5.29. Как надо расположить два луча, чтобы образовался угол? Сколько при этом образуется углов?

5.30. Сколько следует взять лучей с общим началом, чтобы получить: один угол? два угла? три угла?

5.31. «*Развернутым углом* называется угол, стороны которого являются полупрямыми одной прямой». Объясните, почему в определении развернутого угла два последних слова обязательны?

5.32. 1. Нарисуйте угол с вершиной A. Из точки A внутри угла проведите: а) два луча; б) три луча. Сколько углов вы теперь видите на каждом рисунке?

2. Решите задачу для большего числа лучей.

5.33. Нарисуйте: а) два угла с общей вершиной; б) два угла с общей стороной; в) два угла, стороны которых лежат на двух данных прямых; г) два угла, лежащие так, что стороны одного пересекают стороны другого; д) углы ABC и ABD; е) углы ABC и BCM; ж) углы KMO, OMD и DMK.

5.34. Прямые AB и CD пересекаются в точке O. При этом условии выполните рисунок и запишите в принятых обозначениях образовавшиеся углы.

5.35. Нарисуйте два угла так, чтобы: а) их пересечением и объединением были углы; б) угол получился только в пересечении; в) угол получился только в объединении; г) угол не получился ни в их пересечении, ни в их объединении.

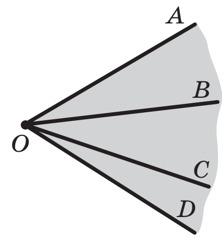


Рис. 5.10

5.36. Покажите на рисунке 5.10 объединение и пересечение углов: а) AOB и COD; б) AOB и AOC.

5.37. Какие фигуры могут получиться: а) при пересечении двух углов, отличных от развернутого; б) при объединении таких углов?

5.38. Во внутренней области угла AOB дана точка M. Какой фигурой является множество таких точек X, что отрезок MX имеет общую точку хотя бы с одной стороной угла?

5.39. На какое наибольшее число различных частей, не имеющих общих точек, кроме своих границ, могут разбить плоскость угол и окружность?

16. Измерение углов

Основное теоретическое содержание

Процесс сравнения углов с углом, принятым за единицу измерения, называется *измерением углов*. Обычно за единицу измерения углов принимают градус — величину угла, равного 1/180 развернутого угла.
В результате измерения углов находят их градусные меры. Градусную меру часто называют просто *величиной угла*. Величина угла, равного 1/60 градуса, называется *минутой*; 1/60 минуты называется *секундой*.
Так как градус равен 1/180 развернутого угла, то величина развернутого угла равна $180°$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Угол, равный $90°$, называют *прямым*. Угол, меньший $90°$, называют *острым*. Угол, больший $90°$, называют *тупым*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Углы называют равными*, если равны их градусные меры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углы называют равными, если их можно совместить наложением друг на друга.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Биссектрисой* угла называют луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам.

Термины и обозначения

Градус обозначают знаком «$°$», минуту — знаком «$'$», секунду — знаком «$''$». Величина прямого угла часто обозначается знаком «d».
Градусные меры угла обозначают так же, как сами углы, или буквами греческого алфавита. Например, запись $\angle AOB = 45°$ читается так: «величина (или градусная мера) угла AOB равна 45 градусам». Запись $\angle A = \alpha$ читается так: «величина угла A равна α». Запись $\alpha < 90°$ читается так: «величина угла меньше 90 градусов». Аналогично записываются и читаются величины прямого и тупого углов.
Можно говорить: «величина угла равна 30 градусам» или «угол равен 30 градусам».

5.40. Сколько углов, равных $60°$, можно отложить от данной полупрямой?

5.41. Сколько минут содержит величина угла, равного $4°$, $20°1'$, $22°$, $36°20'$, $100°$?

5.42. Сколько секунд содержит величина угла, равного $1°$, $10°$, $10°10'$, $2°20''$?

5.43. Курс судна равен: а) $90°$; б) $0°$; в) $180°$. Что означает эта информация?

5.44. Может ли луч OC проходить между сторонами угла AOB, если: а) $\angle AOC = 30°$, $\angle COB = 80°$, $\angle AOB = 50°$; б) $\angle AOC = 100°$, $\angle COB = 90°$; в) $\angle AOC < \angle AOB$?

5.45. Объясните, из чего следует, что биссектриса неразвернутого угла образует с каждой его стороной острый угол.

5.46. Луч OB является биссектрисой неразвернутого угла MOK. Может ли угол MOB быть прямым или тупым?

5.47. На рисунке 5.11 OP — биссектриса угла KOM, а OM — биссектриса угла POA. Будет ли угол KOP равен углу AOM? Объясните ответ.

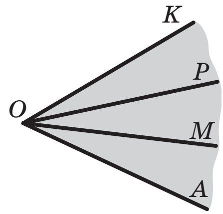


Рис. 5.11

5.48. Может ли человек в карманном зеркальце увидеть себя во весь рост?

5.49. При каком условии вы можете увидеть: а) в озере отражение облака; б) в горизонтальном зеркале вертикальный предмет целиком?

5.50. Как можно определить направление на предмет?

5.51. Как можно понять слова: направление на предмет изменилось со 110° до 40°?

5.52. Самолет движется значительно быстрее поезда. Почему же мы, глядя в иллюминатор, видим медленно перемещающиеся под самолетом облака?

5.53. Самолет взлетает. Когда он разгоняется по взлетной полосе, за иллюминатором все быстрее и быстрее мелькают столбики, постройки, деревья. Вот самолет отрывается от поверхности земли — и почти сразу все эти постройки и деревья замедляют свое кажущееся перемещение. Неужели скорость самолета уменьшается?

5.54. Между сторонами угла AOB, равного 78°, проходит луч OC. Найдите величину угла AOC, если $\angle BOC = 18°$.

5.55. Между сторонами угла MOK проходит луч OA. $\angle MOA = 45°$, а $\angle AOK = 16°$. Найдите величину угла MOK.

5.56. Луч OM проходит между сторонами угла AOK. Найдите угол AOK, если: а) $\angle AOM = 35°$, $\angle MOK = 75°$; б) $\angle AOM = 57°$, $\angle MOK = 62°$; в) $\angle AOM = 94°$, $\angle MOK = 85°$.

5.57. На рисунке 5.12 изображена биссектриса OM угла AOB. $\angle AOM = 20°$. Чему равна величина угла AOB?

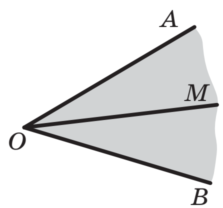


Рис. 5.12

5.58. При помощи транспортира и линейки постройте углы, градусные меры которых равны: $36°$; $78°$; $90°$; $136°$.

5.59. С помощью транспортира отложите углы величиной $35°$ и $45°$ от данного луча.

5.60. Запишите следующие градусные меры углов в порядке возрастания: $25°36'$; $25°36''$; $25°36'24''$; $25°36'40''$.

5.61. Выполните указанные действия над градусными мерами углов:

а) $25°36'24'' + 36°24'40''$; б) $48°26' + 28°36'34''$;

в) $48°48'48'' - 24°36'36''$; г) $3 \cdot 84°36'$;

д) $5 \cdot 18°36'18''$; е) $144°50'22'' : 3$.

5.62. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов, когда они показывают: а) 18 ч; б) 13 ч; в) 15 ч?

5.63. Найдите угол между часовой и минутной стрелками часов, если они показывают: а) 18 ч 15 мин; б) 9 ч; в) 9 ч 15 мин.

5.64. Между сторонами угла AOB, равного $60°$, проходит луч OC. Найдите углы BOC и AOC, если: а) угол AOC на $30°$ больше угла BOC; б) угол AOC в два раза больше угла BOC; в) луч OC делит угол AOB пополам; г) градусные меры углов AOC и BOC относятся как $2 : 3$.

5.65. Из вершины развернутого угла проведен луч, образующий с одной из его сторон угол $50°$. Какой угол образует этот луч с другой стороной развернутого угла? Обоснуйте ответ.

5.66. Из вершины развернутого угла AOA_1 в одну полуплоскость проведены лучи OB и OC. Чему равен угол BOC, если: а) $\angle AOB = 50°$, $\angle AOC = 70°$; б) $\angle A_1OB = 70°$, $\angle AOC = 70°$; в) $\angle AOB = 60°$, $\angle A_1OC = 30°$?

5.67. Из вершины развернутого угла AOA_1 в одну полуплоскость проведены лучи OB и OC. Известно, что $\angle AOB = 60°$, $\angle AOC = 30°$. Найдите углы A_1OB, A_1OC, BOC.

5.68. Судно движется по меридиану в направлении на юг из точки A в точку B. Определите курс судна.

5.69. Из точки A маяк виден точно на востоке. Чему равен пеленг маяка?

5.70. Известно, что судно движется с запада на восток по прямой AB. Определите курс судна.

5.71. В результате повышения давления на 1 ат[1] стрелка манометра отклоняется вправо, описывая угол, равный $6°$. Какой угол опишет стрелка манометра при увеличении давления на 8 ат?

---

[1] Атмосфера (ат) — единица измерения давления.

5.72. *Азимутом* данного объекта называется угол между направлениями на север магнитной стрелки компаса и на объект. Азимуты отсчитываются от направления на север по часовой стрелке от 0 до 360°. Например, азимут направления на маяк M — острый угол в 70°, а азимут ели E — угол в 260° (рис. 5.13).

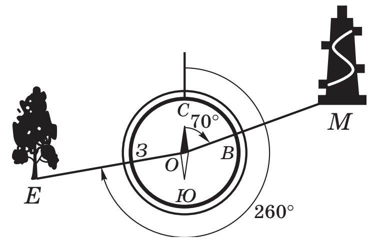


Рис. 5.13

На рисунке 5.14 дана схематичная карта Подмосковья.

Рис. 5.14

1. Определите азимуты направлений от Москвы на: а) Клин; б) Воскресенск; в) Каширу; г) Серпухов; д) Крюково; е) Можайск.

2. Чтобы определить по карте маршрут перехода, необходимо найти азимуты каждого из направлений этого маршрута. Сделайте это, используя карту Подмосковья (см. рис. 5.14), для маршрутов:

а) Кубинка — Малоярославец; б) Кубинка — Волоколамск;

в) Крюково — Пушкино; г) Барыбино — Подольск.

5.73. С помощью транспортира по рисунку 5.15 определите азимут строения B из точки M.

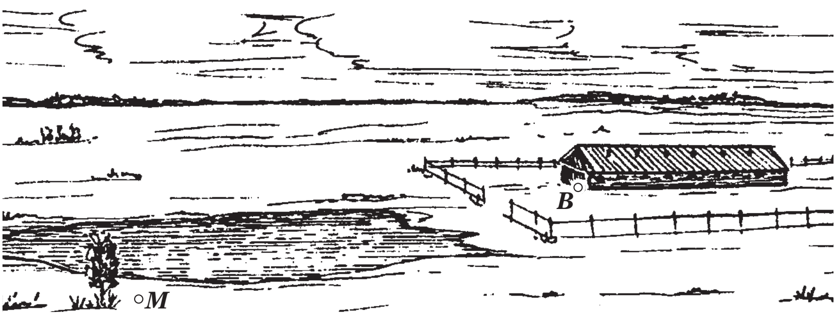


Рис. 5.15

5.74. На карте луч AB изображает направление движения судна, луч AB есть направление на маяк C (рис. 5.16). Найдите курсовой угол судна.

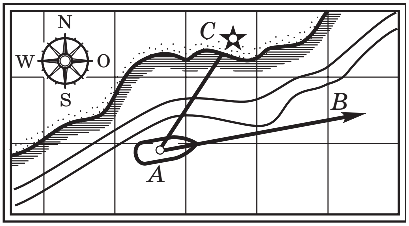


Рис. 5.16

5.75. Из точки M определили пеленг маяка A, равный 75°. Курс судна равен 140°. Определите курсовой угол.

5.76. Из точек A и B ученик определил азимуты озера C. Азимут из точки A равен 130°, а из точки B равен 75°. Определите местоположение озера на плане, если даны точки A и B плана, лежащие на одном меридиане, причем B южнее A.

5.77. На судне (точка M) штурман увидел маяк (точка A) и определил пеленг этого маяка. Нанесите на карту направление MA на маяк A, если пеленг маяка равен 120°. Точка M на карте дана.

5.78. Мальчику, стоящему у мельницы (точка M), известно, что азимут школьного лагеря равен 130°, а расстояние до него 800 м. Найдите местоположение лагеря (точка A).

5.79. Разделите величины углов 45°; 90°; 75°; 148° на три равные части.

5.80. Чему равен угол между биссектрисой и стороной данного угла, равного: а) 30°; б) 52°; в) 172°?

5.81. Найдите угол, если его биссектриса образует со стороной угол, равный: а) 60°; б) 75°; в) 89°.

5.82. Докажите, что полупрямая, дополнительная к биссектрисе угла, образует с его сторонами равные углы.

5.83. Равные тупые углы со сторонами a, b и a, c соответственно отложены от полупрямой a в разные полуплоскости. Докажите, что луч a не является биссектрисой угла со сторонами b и c.

T **5.84.** От полупрямой AB отложены два различных угла BAC и BAD с одной и той же градусной мерой. Пересекает ли прямую AB отрезок CD?

5.85. Однажды Феде понадобилось построить десять равных углов. Конечно, ему хотелось сделать это скучное задание побыстрее. Что бы вы ему посоветовали?

5.86. Как построить на земле угол, равный данному, если у вас в руках один кусок веревки?

5.87. Углы, которые образует биссектриса угла с его сторонами, не являются острыми. Что можно сказать о данном угле?

5.88. Даны три луча OA, OB, OC с начальной точкой O. Известно, что $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 120°$.

Ответьте на вопросы:

1. Проходит ли какой-нибудь из этих лучей между сторонами угла, образованного двумя другими лучами?

2. Может ли прямая пересекать все три данных луча? Объясните ответ.

5.89. Нарисуйте отрезок AB. Пусть из точки C он виден под некоторым углом ACB. Постройте другие точки, из которых он виден под таким же углом.

5.90. Отрезок AB виден из точки C под некоторым углом ACB. Нарисуйте отрезки, которые видны из точки C под тем же углом.

17. Смежные углы

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми.

ТЕОРЕМА. *Сумма смежных углов равна* 180°.

Следствие 1. Если два угла равны, то смежные с ними углы тоже равны.

Следствие 2. Угол, смежный с прямым углом, есть прямой угол.

Следствие 3. Угол, смежный с острым углом, — тупой; угол, смежный с тупым углом, — острый.

5.91. На рисунке 5.17 угол COA выделен дужкой. Назовите угол, смежный с этим углом.

5.92. На рисунке 5.18 на прямой AB отмечена точка O, из которой проведены два луча OM и OK. Назовите пары смежных углов, которые вы видите на этом рисунке.

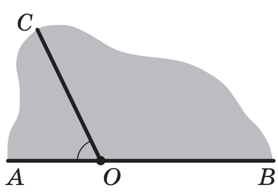


Рис. 5.17

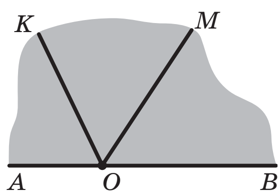


Рис. 5.18

5.93. Можно ли углы ABC и CBD (рис. 5.19) назвать смежными?

5.94. О двух углах известно, что сумма их равна $180°$. Можно ли утверждать, что эти углы смежные?

5.95. Верны ли такие утверждения: а) если два угла смежные, то один из них острый, а другой тупой; б) если один из двух углов острый, а другой тупой, то они смежные?

5.96. Могут ли два смежных угла быть: а) острыми; б) тупыми; в) прямыми?

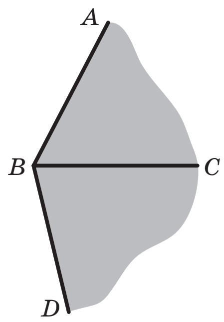


Рис. 5.19

5.97. Даны два угла. Равны ли смежные с ними углы?

5.98. Угол α, смежный с углом β, равен $30°$. Найдите угол β.

5.99. Поставьте нужные обозначения и выпишите углы, смежные с углом, изображенным на рисунке 5.20. Какими свойствами обладают смежные углы?

5.100. Нарисуйте угол. Постройте смежный с ним угол. Сколько таких углов можно построить?

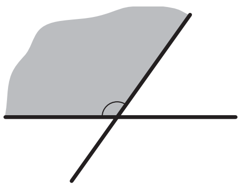


Рис. 5.20

5.101. Нарисуйте луч l. Нарисуйте еще два луча так, чтобы вместе с данным они образовали смежные углы.

5.102. Найдите угол, смежный с углами: $30°$, $45°$, $90°$, $15°30'$, $82°2'$.

5.103. Являются ли два угла смежными, если: а) их объединением является полуплоскость; б) их пересечением является луч; в) их объединением является полуплоскость, а пересечением — луч? Сделайте соответствующие рисунки.

5.104. Нарисуйте два смежных угла. Какая фигура является их пересечением? объединением?

5.105. Найдите смежные углы, если: а) один из них на $45°$ больше другого; б) их разность равна $50°$; в) один в 5 раз меньше другого; г) они равны.

5.106. Найдите смежные углы, если градусные меры относятся как: а) $2 : 3$; б) $3 : 7$; в) $11 : 25$; г) $22 : 23$.

5.107. Чему равен угол, если два смежных с ним угла составляют в сумме $100°$?

5.108. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.21). Постройте угол, смежный: а) с углом BCD; б) с углом C_1CD; в) с углом B_1BD. Какова градусная мера построенных углов?

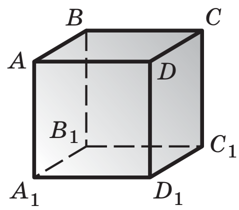


Рис. 5.21

5.109. Найдите величину угла между биссектрисами смежных углов.

5.110. Даны два неравных угла. Докажите, что большему углу отвечает меньший смежный угол, а меньшему — больший смежный угол.

5.111. Докажите, что если смежные углы равны, то они прямые.

5.112. Почему при двойном складывании листа бумаги получается прямой угол?

5.113. Докажите, что если два различных прямых угла имеют общую сторону, то они смежные.

5.114. От полупрямой a в одну полуплоскость отложены углы (ab) и (ac). Докажите, что если угол (ab) прямой, то угол (bc) острый.

5.115. От луча AB в разные полуплоскости отложены углы BAC и BAD. Пересекает ли прямую AB отрезок CD? Почему?

5.116. Углы (ab) и (ac) отложены от полупрямой a в одну полуплоскость, причем угол (ab) больше угла (ac). Докажите, что $\angle(bc) = \angle(ab) - \angle(ac)$.

5.117. Углы BAC и BAD отложены от полупрямой AB в разные полуплоскости. Докажите, что угол CAD равен сумме этих углов или дополняет ее до 360°, а именно, если сумма градусных мер данных углов не превосходит 180°, то $\angle CAD = \angle BAC + \angle BAD$, а если она больше 180°, то $\angle CAD = 360° - (\angle BAC + \angle BAD)$.

5.118. Точки A, B и C не лежат на одной прямой и точка P не принадлежит прямым AB, AC и BC. Докажите, что по крайней мере одна из прямых PA, PB и PC пересекает соответственно отрезок BC, AC или AB.

18. Вертикальные углы

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два угла называют *вертикальными*, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

ТЕОРЕМА. *Вертикальные углы равны.*

5.119. Сколько различных углов образуется при пересечении двух прямых? Какими свойствами обладают эти углы?

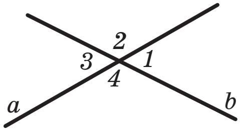


Рис. 5.22

5.120. Сколько пар вертикальных углов и сколько пар смежных углов изображено на рисунке 5.22?

5.121. Сколько углов, меньших 180°, получается при пересечении трех прямых, проходящих через одну точку?

5.122. Могут ли при пересечении двух прямых образоваться равные углы? Как они называются? Сколько их?

5.123. Могут ли вертикальные углы быть: а) прямыми; б) тупыми; в) один острым, а другой тупым?

5.124. Верно ли утверждение, что если два угла равны, то они вертикальные? Проиллюстрируйте ответ рисунком.

5.125. Какими (острыми, прямыми или тупыми) являются вертикальные углы, если их сумма: а) меньше 180°; б) больше 180°; в) равна 180°?

5.126. Верно ли следующее утверждение: «Два угла с общей вершиной, объединение сторон которых есть две прямые, являются вертикальными углами»?

5.127. Через какие вершины куба можно провести прямые, чтобы при их пересечении образовались вертикальные углы?

5.128. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30°. Чему равны остальные углы?

5.129. С помощью транспортира найдите величины всех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых. Нужно ли измерять все углы? Сколько углов достаточно измерить, чтобы ответить на этот вопрос?

5.130. Докажите, что если один из четырех углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, имеет величину 90°, то величины трех остальных углов также равны 90°.

5.131. Сумма величин двух вертикальных углов равна 120°. Найдите величину каждого из них.

5.132. Установите, верно ли следующее предложение: «Два угла, сумма которых есть развернутый угол, являются смежными углами.»

5.133. Запишите, пересечением каких полуплоскостей, заданных на рисунке 5.23, является: 1) каждый из вертикальных углов: а) $\angle 1$ и $\angle 3$, б) $\angle 2$ и $\angle 4$; 2) каждый из смежных углов: а) $\angle 1$ и $\angle 2$, б) $\angle 3$ и $\angle 4$.

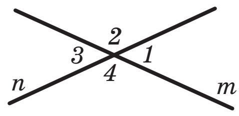


Рис. 5.23

5.134. Найдите величины углов, образованных при пересечении двух прямых, если один из них равен 110°.

5.135. Найдите величины углов, образованных при пересечении двух прямых, если: а) один из них на 20° больше другого; б) один из них составляет половину другого; в) сумма величин двух из них равна 100°.

5.136. Один из углов, которые образуются при пересечении двух прямых, на 50° меньше другого. Найдите эти углы.

5.137. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.

5.138. Найдите углы, которые образуются при пересечении двух прямых, если сумма трех углов равна 270°.

5.139. Дан угол со сторонами a и b. Проведите полупрямую a_1, дополнительную к полупрямой a, и полупрямую b_1, дополнительную к b. Чему равен угол со сторонами a_1 и b_1? Какими являются углы со сторонами a_1 и b_1?

Т **5.140.** На рисунке 5.24 изображены три прямые, пересекающиеся в точке O. Найдите сумму углов $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

5.141. На рисунке 5.25 $\angle AOB = 50°$, $\angle FOE = 70°$. Найдите углы AOC, BOD, COE и COD.

5.142. Сумма вертикальных углов в два раза больше угла, смежного с обоими. Найдите эти углы.

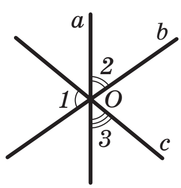


Рис. 5.24

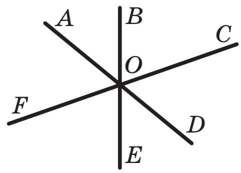


Рис. 5.25

5.143. На плоскости расположены 4 прямые (рис. 5.26). Известны углы между некоторыми из них: $\alpha = 110°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 80°$. Найдите углы между остальными парами прямых.

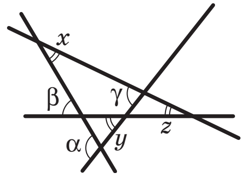


Рис. 5.26

5.144. Даны дополнительные полупрямые a_1 и a_2. От этих полупрямых в разные полуплоскости отложены углы α и β. Докажите, что если углы α и β равны, то они вертикальные.

5.145. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

Тема 6

ТРЕУГОЛЬНИКИ

19. Определение треугольника

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Треугольником* называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, трех отрезков, попарно соединяющих эти точки, а также части плоскости, ограниченной этими отрезками. Указанные точки называются *вершинами* треугольника, отрезки — его *сторонами*, а часть плоскости — *внутренней областью* треугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Высотой* треугольника, опущенной из данной вершины, называют перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника.

ТЕОРЕМА. *Высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

Точка пересечения высот треугольника называется его ортоцентром.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Медианой* треугольника называют отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

ТЕОРЕМА. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке.*

Точка пересечения медиан треугольника называется *центроидом треугольника или его центром тяжести.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Биссектрисой* треугольника называют отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны.

ТЕОРЕМА. *Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются *боковыми* сторонами, а третья сторона — *основанием* равнобедренного треугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним*, или *правильным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Периметром* треугольника называется сумма длин его сторон.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Средней линией* треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

ТЕОРЕМА. *Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.*

Термины и обозначения

Треугольник обозначают его вершинами. Вместо слова «треугольник» употребляется символ «$\triangle$». Запись $\triangle PMK$ читается так: «треугольник PMK».

Когда говорят «сторона треугольника», допускают двойное толкование: либо это отрезок, соединяющий две вершины треугольника, либо длина этого отрезка. Из контекста должно быть ясно, о чем идет речь.

6.1. Сколько вершин и сторон имеет треугольник?

6.2. Сколько треугольников изображено на рисунке 6.1?

6.3. Назовите все треугольники на рисунке 6.2.

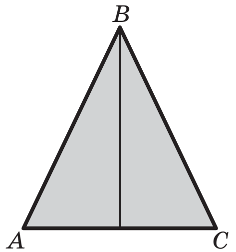


Рис. 6.1

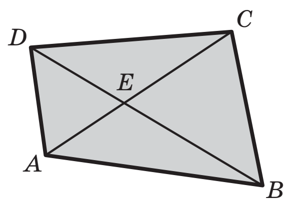
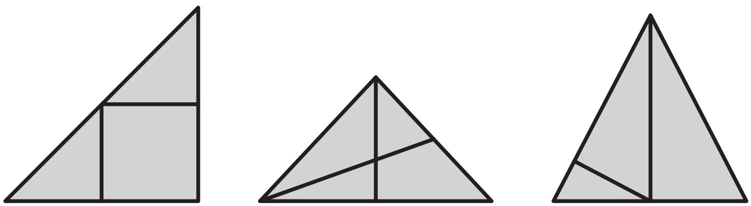


Рис. 6.2

6.4. Сколько треугольников изображено на рисунке 6.3, *а*—*в*?



а) *б*) *в*)

Рис. 6.3

6.5. Назовите боковые стороны и основания у равнобедренных треугольников ABC и MNK (рис. 6.4, *а*, *б*).

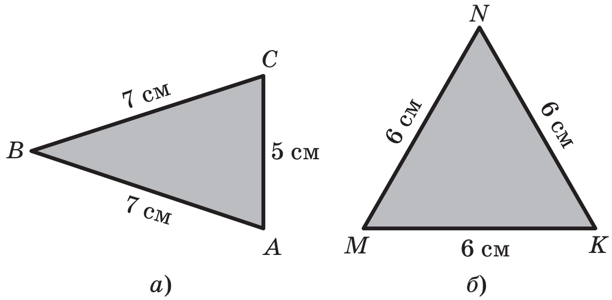


Рис. 6.4

6.6. Всегда ли вершины треугольника лежат в одной плоскости? Обоснуйте ваш ответ.

6.7. Каким может быть взаимное расположение треугольника и некоторой прямой?

6.8. Каким может быть взаимное расположение треугольника и некоторой плоскости?

6.9. Является ли равносторонний треугольник равнобедренным? Вывод обоснуйте.

6.10. Может ли равнобедренный треугольник быть равносторонним?

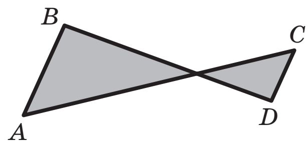


Рис. 6.5

6.11. Посмотрите на рисунок 6.5. Можно ли утверждать, что точки A, B, C и D обязательно лежат в одной плоскости? Проиллюстрируйте ваши выводы с помощью реальных моделей.

6.12. Стороны треугольника равны 6, 7 и 9 см. Найдите периметр этого треугольника.

6.13. С помощью масштабной линейки постройте три таких отрезка, которые не могут быть сторонами одного и того же треугольника.

6.14. Известно, что длины всех сторон некоторого треугольника равны целому числу сантиметров. Две стороны этого треугольника имеют длины 4 и 7 см. Какую длину может иметь третья сторона этого треугольника?

6.15. Одна из сторон треугольника равна 8 см, другая — 10 см. Третья сторона длиннее второй на 2 см. Найдите периметр треугольника.

6.16. Сторона AB треугольника ABC равна 5 см, сторона BC вдвое больше стороны AB, а сторона AC на 2 см меньше стороны BC. Найдите периметр треугольника.

6.17. В треугольнике ABC $AB + BC = 9$ см, $AC + BC = 13$ см, $AB + BC + AC = 17$ см. Найдите стороны треугольника.

6.18. Сумма первой и второй сторон треугольника равна 10 см. Сумма второй и третьей сторон равна 12 см. Сумма первой и третьей сторон равна 8 см. Найдите периметр треугольника.

6.19. Периметр треугольника равен 36 см. Стороны треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите длины его сторон.

6.20. Периметр треугольника равен 28 см, а одна из его сторон — 10 см. Найдите длины двух других его сторон, если их разность равна 2 см.

6.21. Периметр треугольника ABC равен 35 см; AB больше AC на 2 см, BC меньше AC на 3 см. Найдите стороны треугольника.

6.22. Периметр равнобедренного треугольника равен 10 см, а основание — 4 см. Найдите длину боковой стороны.

6.23. Периметр равнобедренного треугольника равен 3 дм. Найдите длину каждой стороны треугольника, если одна из них равна 8 см.

6.24. В равнобедренном треугольнике основание в 2 раза меньше боковой стороны, а периметр равен 50 см. Найдите длины сторон треугольника.

6.25. Периметр равнобедренного треугольника равен 13 см. Найдите длины его сторон, если основание меньше боковой стороны на 2 см.

6.26. Основание равнобедренного треугольника в 3 раза меньше боковой стороны, а его периметр равен 21 см. Найдите длины сторон треугольника.

6.27. Из металлического прута нужно сделать деталь, имеющую форму равнобедренного треугольника. Одна из сторон треугольника должна иметь длину 250 см, а другая — длину 100 см. Какой должна быть длина l прута, чтобы это можно было сделать?

6.28. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1. Постройте сечения куба в форме равностороннего треугольника.

2. Решите эту задачу, чтобы в сечении куба получить равнобедренные треугольники.

T **6.29.** Можно ли из шести спичек составить фигуру, состоящую из четырех равносторонних треугольников со стороной, равной длине спички?

6.30. Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что длина ломаной AMB меньше длины ломаной ACB.

6.31. Докажите, что расстояние между любыми двумя вершинами замкнутой ломаной не больше половины суммы длин ее звеньев.

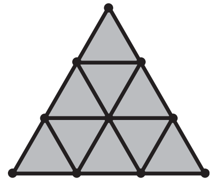


Рис. 6.6

6.32. На рисунке 6.6 изображены десять точек на сторонах и внутри равностороннего треугольника. Сосчитайте, сколько этих точек определяют треугольники с вершинами в этих точках.

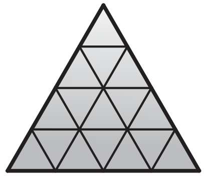
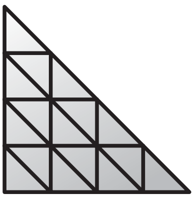


Рис. 6.7

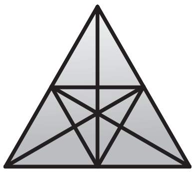
6.33. Сколько треугольников изображено на рисунке 6.7?

6.34. Сколько треугольников изображено на рисунке 6.8, *а*, *б*?

6.35. Сколько треугольников содержит фигура, изображенная на рисунке 6.9?



а)



б)

Рис. 6.8

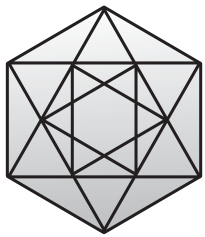


Рис. 6.9

6.36. Можно ли треугольник разбить на более мелкие треугольники так, чтобы никакие два треугольника разбиения не имели общих (полностью совпадающих) сторон?

6.37. К треугольнику, изображенному на рисунке 6.10, пристроили равнобедренный треугольник так, что получился новый треугольник. Сколькими способами это можно сделать?

6.38. Можно ли двумя прямыми разбить треугольник: а) на 5 треугольников; б) на 8 треугольников?

6.39. Докажите, что сумма медиан любого треугольника меньше его периметра, но больше полупериметра этого треугольника.

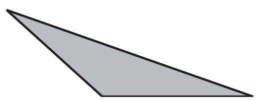


Рис. 6.10

6.40. На прямой a лежат 3 точки, точка B лежит вне прямой. Точку B соединили отрезками с точками на прямой. Сколько треугольников получилось на чертеже? Сколько будет треугольников, если на прямой взять 4, 5, ..., n точек (n — натуральное число)?

6.41. Можно ли расположить на плоскости несколько треугольников так, чтобы две вершины каждого из них лежали на сторонах (но не в вершинах) других треугольников?

6.42. Каждые две из n точек (никакие три из них не лежат на одной прямой) соединены отрезком, и на всех отрезках расставлены стрелки. Треугольник ABC с вершинами в данных точках называется ориентированным, если стрелки расставлены в направлениях AB, BC, CA или AC, CB, BA.

1. Объясните, как расставить стрелки, чтобы не получилось ни одного ориентированного треугольника.

2. Какое наибольшее число ориентированных треугольников возможно (для каждого n)? (Нарисуйте соответствующие примеры для $n = 4$, 5 и 6.)

20. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Сумма углов треугольника

Основное теоретическое содержание

В треугольнике ABC против вершины A (или угла A) лежит сторона BC и, наоборот, против стороны BC лежит вершина A (или угол A). Про вершину A и угол A говорят, что они *противолежащие* стороне BC. О стороне BC также говорят, что она противолежащая вершине A и углу A. (Аналогично и для других углов и сторон треугольника.) Углы A и B в треугольнике ABC называют прилежащими к стороне AB, углы B и C — прилежащими к стороне BC, а углы C и A — прилежащими к стороне CA. Стороны и углы треугольника называют его *элементами*.

В зависимости от величины углов различают три вида треугольников: *остроугольные*, у которых все углы острые; *прямоугольные*, у которых один из углов прямой; *тупоугольные*, у которых один из углов тупой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Внешним углом* треугольника при данной вершине называют угол, смежный с углом треугольника при этой вершине.

ТЕОРЕМА. *Сумма углов произвольного треугольника равна 180°.*

Следствие. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

ТЕОРЕМА. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.*

Следствие. Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним.

ТЕОРЕМА. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.*

Следствие. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Термины и обозначения

Сторону, противолежащую вершине A, часто обозначают буквой a. Сторону AC, противолежащую вершине (и углу) B, обозначают буквой b. Сторону AB, противолежащую вершине (и углу) C, обозначают буквой c.
Записи выражений «угол треугольника равен 30°» и «величина угла треугольника равна 30°» одинаковы: $\angle A = 30°$.

6.43. Сколько углов имеет треугольник?

6.44. Назовите все стороны и углы треугольника, изображенного на рисунке 6.11.

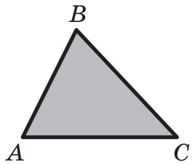


Рис. 6.11

6.45. В треугольнике ABC (см. рис. 6.11) для каждого угла назовите противолежащую сторону и для каждой стороны назовите противолежащий угол и прилежащие углы.

6.46. В треугольнике PKM угол P — прямой (рис. 6.12). Назовите: а) стороны, лежащие против углов P, K, M; б) углы, лежащие против сторон PK, KM, PM; в) углы, прилежащие к сторонам PK, KM, PM.

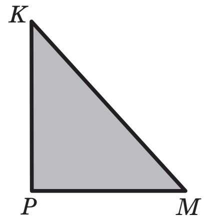


Рис. 6.12

6.47. Сколько у каждого треугольника внешних углов?

6.48. Чему равен внешний угол равностороннего треугольника?

6.49. Может ли точка лежать вне треугольника и вне каждого из его углов?

6.50. Может ли у прямоугольного треугольника быть: а) два прямых угла; б) два тупых угла?

6.51. Объясните, почему механизм из трех звеньев, изображенный на рисунке 6.13, будет жестким даже в том случае, когда все три его звена соединены шарнирами.

6.52. Величина одного из углов треугольника равна α. Какую величину может иметь один из других углов этого треугольника?

6.53. Может ли внешний угол треугольника быть больше угла треугольника?

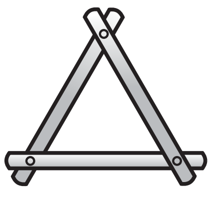


Рис. 6.13

6.54. Могут ли у треугольника быть два острых внешних угла? два прямых внешних угла? два тупых внешних угла?

6.55. Сколько острых внешних углов может иметь треугольник? (При каждой вершине мы берем лишь один внешний угол.)

С **6.56.** На рисунке 6.14 $\angle BCD = 100°$. Найдите величину угла BCA данного треугольника.

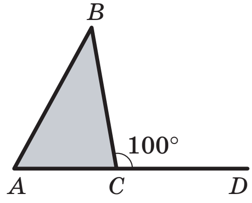


Рис. 6.14

6.57. Нарисуйте треугольник ABC. Почему его можно считать пересечением: а) трех углов, отличных от развернутого? б) трех полуплоскостей? в) двух углов, отличных от развернутого?

6.58. Начертите произвольный отрезок AB.

1. Постройте с помощью транспортира треугольник ABC, если: а) $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$; б) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$. Измерьте угол C.

2. Найдите, сколько различных треугольников можно построить по этим данным?

6.59. Укажите наибольший угол треугольника ABC, если: а) $a = 15$ см, $b = 15$ см, $c = 7$ см; б) $a = 10$ см, $b = 8$ см, $c = 8$ см; в) $a = 15$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см.

6.60. Укажите наибольшую сторону треугольника ABC, если: а) $\angle A = 45°$, $\angle B = 67°$; б) $\angle A = 57°$, $\angle B = 74°$; в) $\angle A = 80°$, $\angle B = 68°$.

6.61. Запишите стороны треугольника ABC в порядке убывания их длин, если: а) $\angle A = 10°$, $\angle C = 78°$; б) $\angle C = 178°$, $\angle A = 1°$.

6.62. Запишите стороны треугольника ABC в порядке возрастания их длин, если $\angle B = 67°$, $\angle C = 78°$.

6.63. По данным на рисунке 6.15 величинам углов треугольника ABC: а) выясните, какая из его сторон, AB или AC, больше; б) запишите углы этого треугольника в порядке возрастания их величин.

6.64. Дан треугольник ABC (рис. 6.16). Через середину M стороны AC к ней проведен перпендикуляр MN, точка N принадлежит стороне AB, $\angle CAN = 40°$, $\angle NCB = 30°$.

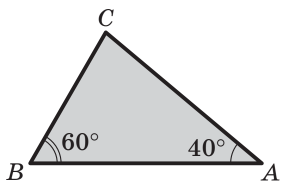


Рис. 6.15

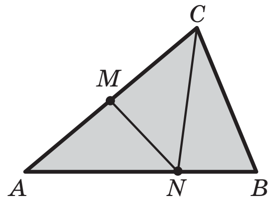


Рис. 6.16

1. Вычислите периметр треугольника BCN, если $AB = a$, $BC = c$.

2. Определите вид треугольника ABC.

6.65. Докажите, что если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то и третьи их углы равны.

6.66. Один угол равнобедренного треугольника равен 45°. Найдите остальные его углы.

6.67. Вычислите углы равнобедренного треугольника, если угол при его основании в два раза меньше угла при вершине.

6.68. Какие углы образуются при пересечении двух биссектрис равностороннего треугольника?

6.69. Какие углы образуют биссектрисы двух углов треугольника, если третий угол этого треугольника равен: а) 48°; б) 126°?

6.70. 1. Какой вид имеет треугольник, если сумма двух любых углов его больше 90°?

2. Существует ли треугольник, сумма двух любых углов которого меньше 120°?

3. Какой вид имеет треугольник, если любой его угол меньше суммы двух остальных?

6.71. Вычислите величины углов треугольника, если известно, что они пропорциональны числам: а) 1, 2, 3; б) 3, 7, 8; в) 1, 1, 3.

6.72. У треугольника ABC $\angle C = 90°$. Постройте внешний угол этого треугольника при вершине C и найдите его величину.

6.73. Найдите углы треугольника, зная, что внешние углы при двух его вершинах равны 120° и 150°.

6.74. Два внешних угла треугольника равны 100° и 150°. Найдите третий внешний угол.

6.75. У треугольника один угол равен 30°, а один из внешних углов равен 40°. Найдите остальные углы треугольника.

6.76. Внешний угол треугольника равен 160°. Найдите углы треугольника, не смежные с ним, если: а) они относятся как 3 : 5; б) один из них составляет 3/5 другого; в) один из них больше другого на 20°; г) их разность равна 40°.

6.77. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC внешний угол при вершине A равен 150°. Найдите углы при основании.

6.78. Чему равны внешние углы равностороннего треугольника?

6.79. Найдите сумму внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой его вершине.

6.80. Определите угол A треугольника ABC, если сумма внешних углов, смежных с углами B и C, в 3 раза больше угла A.

6.81. Каким будет треугольник, если один из его углов: а) равен сумме двух других углов; б) больше суммы двух других углов; в) меньше суммы двух других углов?

6.82. Какой вид имеет треугольник, если сумма двух любых углов его больше 90°?

6.83. Два угла треугольника равны 60° и 72°. Вычислите меньшие из углов, образованных двумя прямыми, содержащими биссектрисы треугольника.

6.84. Какой вид имеет треугольник, если один из его внешних углов: а) острый; б) равен внутреннему углу?

21. Признаки равенства треугольников

Основное теоретическое содержание

ТЕОРЕМА. *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны* **(по трем сторонам).**

ТЕОРЕМА. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны* **(по двум сторонам и углу между ними).**

ТЕОРЕМА. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны* **(по стороне и двум прилежащим к ней углам).**

6.85. Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$.

1) $AB = 5$ см, $\angle A = 90°$. Чему равна сторона A_1B_1? Чему равен угол A_1?

2) $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $CA = 8$ см. Найдите стороны треугольника $A_1B_1C_1$;

3) $\angle A = 34°$, $\angle B = 56°$. Найдите угол C и углы треугольника $A_1B_1C_1$;

4) $\angle A_1 = 76°$, $A_1B_1 = 10$ см, $C_1A_1 = 5$ см. Найдите $\angle A$, AB, CA.

6.86. Гранями треугольной пирамиды являются равные треугольники OAB и OBC. Известно, что $OA = 4$ см, $AB = 8$ см, $BO = 10$ см. Найдите стороны треугольника OBC.

6.87. Даны два равных треугольника ABC и DEM.

1. Известно, что $AB = DE$, $AC = DM$. Укажите углы треугольника ABC, равные углам D, E, M.

2. Докажите, что каждая биссектриса (медиана) треугольника ABC равна некоторой биссектрисе (медиане) треугольника DEM, равного треугольнику ABC.

6.88. Дано: $\triangle ABE = \triangle DCF$ (рис. 6.17). Заполните пропуски:

$$\angle A = \angle D;\ \angle B = \dots\ ;\ \angle E = \dots\ ;$$
$$AB = \dots\ ;\ AE = \dots\ ;\ BE = \dots\ .$$

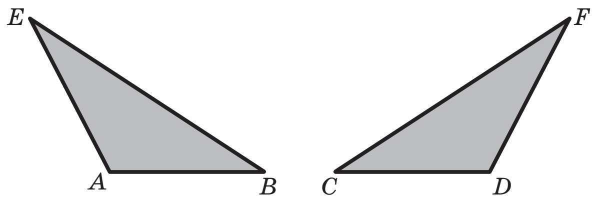


Рис. 6.17

6.89. Дано: $\triangle MQP = \triangle NQP$ (рис. 6.18). Перечислите шесть пар равных друг другу элементов (сторон, углов) этих двух треугольников.

6.90. Как можно узнать, равны ли: а) два отрезка; б) два угла?

6.91. Какие вы можете предложить способы, чтобы выяснить, что два треугольника равны?

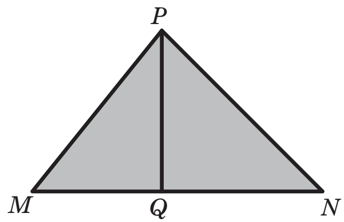


Рис. 6.18

6.92. Определите, верны ли следующие утверждения:

1. Треугольник, равный равнобедренному треугольнику, является равнобедренным.

2. Треугольник, равный остроугольному треугольнику, является тупоугольным.

3. Существуют два равных треугольника, один из которых является прямоугольным, а другой — тупоугольным.

4. В правильной пирамиде одна грань — остроугольный треугольник, а другая — тупоугольный треугольник.

6.93. Какие пары фигур, изображенных на рисунке 6.19, *а—з*, равны?

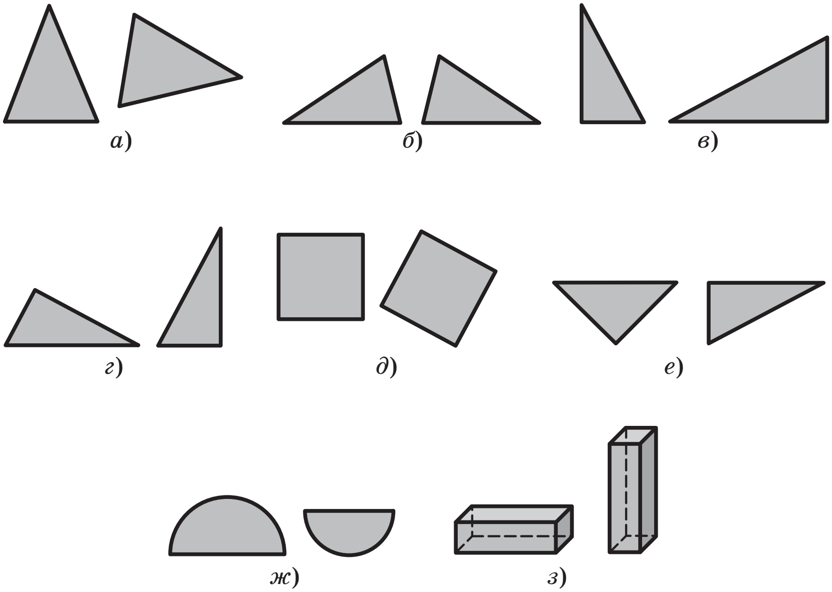


Рис. 6.19

6.94. Для какой из фигур, изображенных на рисунке 6.20, *а—з*, нельзя на этом же рисунке подобрать равную ей фигуру?

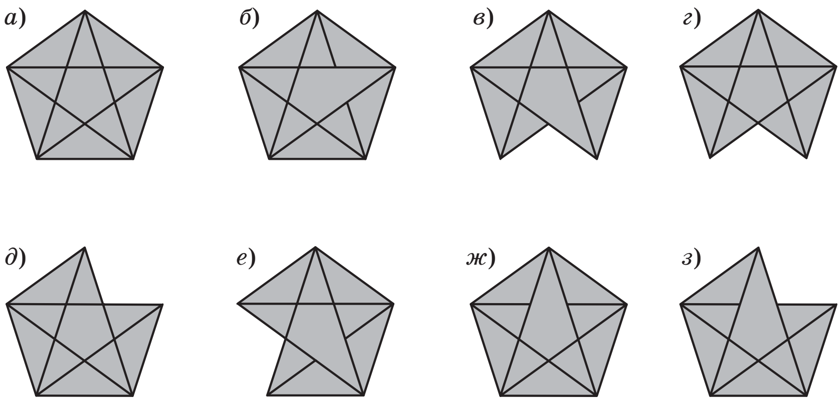


Рис. 6.20

6.95. Посмотрите на фигуры, изображенные на рисунке 6.21. Выпишите равные между собой фигуры.

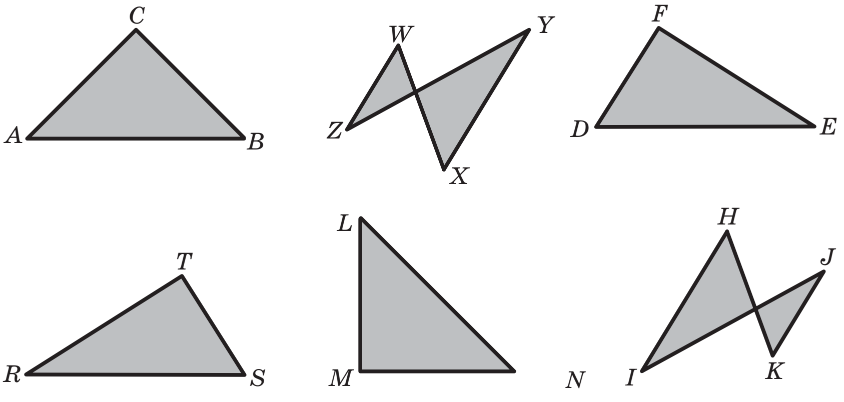


Рис. 6.21

6.96. Посмотрите на фигуры, изображенные на рисунке 6.22. Выпишите равные между собой фигуры.

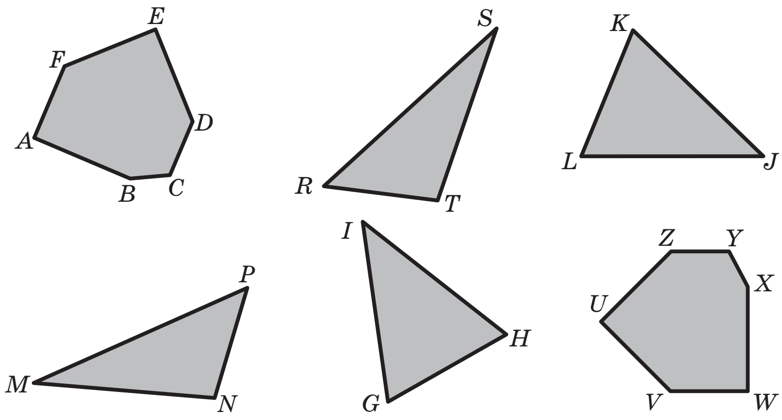


Рис. 6.22

6.97. Ответьте на вопросы:

1. Равна ли любая фигура самой себе?

2. Если каждая из двух фигур равна третьей, то равны ли они между собой?

3. Равны ли стороны квадрата?

4. Равны ли стороны прямоугольника?

5. Равны ли противоположные грани куба?

6. Равны ли две смежные грани куба?

7. Равны ли две противоположные грани прямоугольного бруса, имеющего форму кирпича?

8. Равны ли две смежные грани кирпича?

6.98. Треугольники каждой из пар треугольников, изображенных на рисунке 6.23, *а—з*, равны. Выпишите равенства для каждой из этих пар.

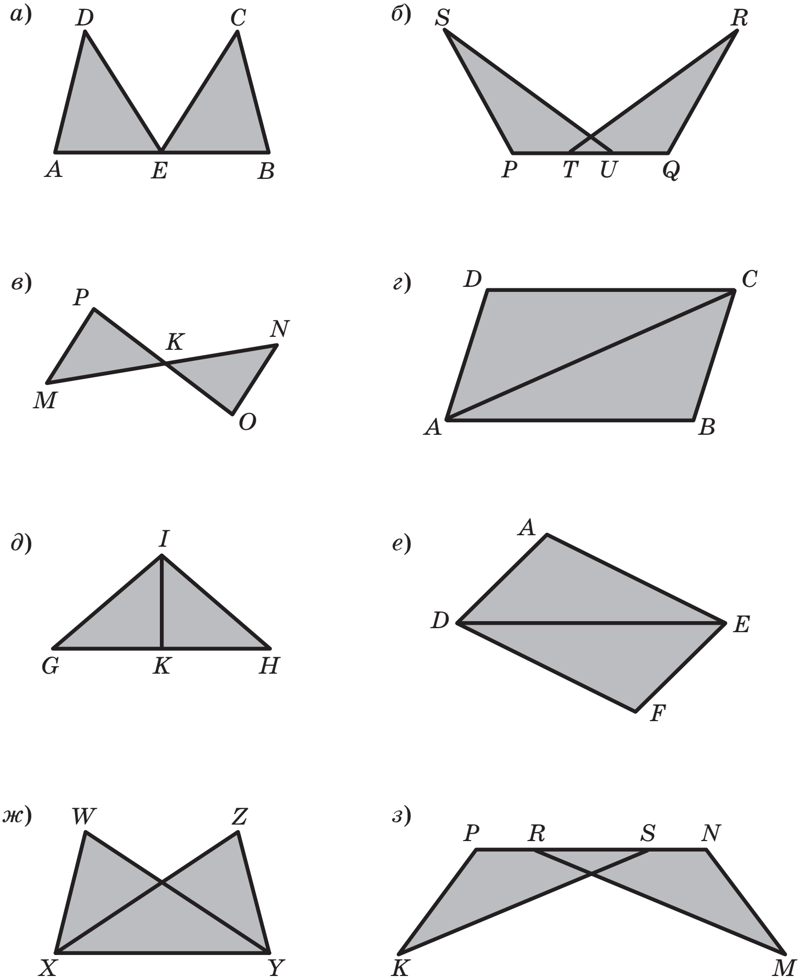


Рис. 6.23

6.99. При каких условиях следующие пары фигур будут равны: а) два отрезка; б) две прямые; в) два угла; г) две окружности; д) два квадрата; е) два треугольника?

6.100. Рассмотрите треугольник ABC. Ответьте на вопросы:

1. Какой угол заключен между сторонами BC и AB?
2. Какая сторона прилежит к углам A и B?
3. Между какими сторонами заключен $\angle C$?
4. К каким углам прилежит сторона BC?

6.101. Рассмотрите треугольник MHK. Придумайте простой метод, позволяющий, не делая чертежа, определить, какие стороны и углы заключены между какими углами и сторонами. Ответьте на вопросы:

1. Заключен ли $\angle H$ между MH и HK?
2. Прилежит ли сторона MK к углам M и K?
3. Какой угол заключен между MH и MK?
4. Какая сторона прилежит к углам M и H?

6.102. Какие из изображенных на рисунке 6.24, *а—е* фигур равны?

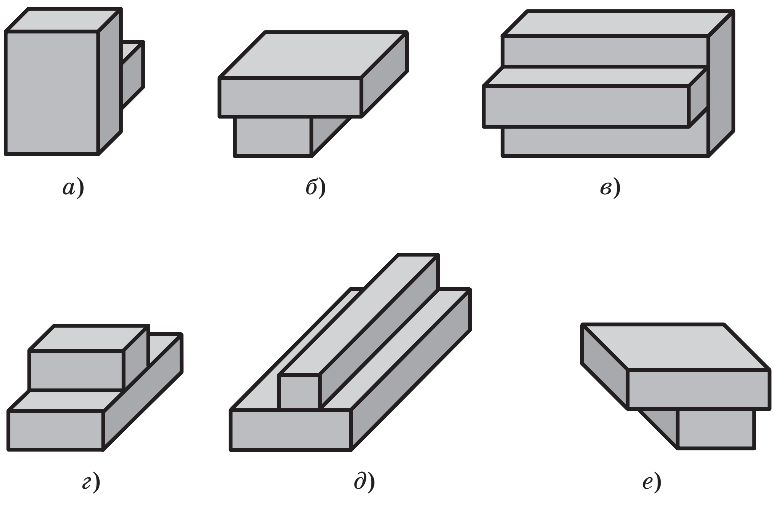


Рис. 6.24

6.103. Всегда ли можно построить треугольник по трем сторонам, если известно, что одна из них меньше суммы двух других? Приведите примеры.

6.104. На рисунке 6.25 изображена треугольная пирамида $OABC$. Ребро OA равно ребру OC, а ребро AB равно ребру CB. Докажите, что грани AOB и COB равны.

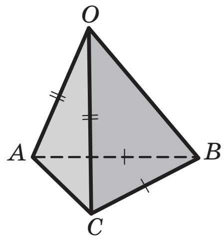


Рис. 6.25

6.105. Дано: $AB = BC$, $AD = DC$ (рис. 6.26). Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CDB$.

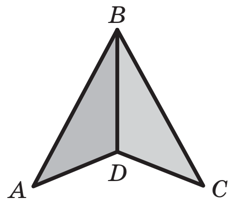


Рис. 6.26

6.106. Дана треугольная пирамида $OABC$. Грани OAB и OBC равны между собой. На ребре OB взята точка P и соединена с вершинами A и C (рис. 6.27). Докажите, что $\triangle APB = \triangle CPB$.

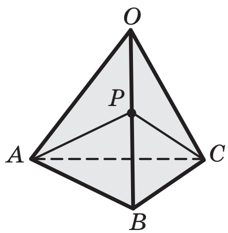


Рис. 6.27

6.107. Можно ли построить треугольник, стороны которого равны: а) 3 см, 4 см, 5 см; б) 3 см, 4 см, 7 см; в) 3 см, 4 см, 8 см?

6.108. На рисунке 6.28 $AB = BC$, $AD = CD$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$, т. е. BD — биссектриса углов ABC и ADC.

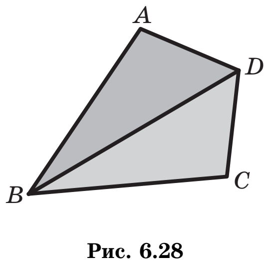


Рис. 6.28

6.109. Пользуясь одной лишь линейкой, постройте треугольник, любые две стороны которого не равны. Затем постройте второй треугольник, равный первому, и опишите действия, которые вы сделали. Ответьте на вопросы:

1. Существует лишь один способ построения второго треугольника по первому или несколько?

2. Сколькими из шести элементов первого треугольника вы воспользовались при построении второго?

3. Каково наименьшее число попарно равных элементов, необходимое, чтобы гарантировать равенство самих треугольников?

6.110. Постройте треугольник RST, у которого $RS = 5$ см, $RT = 3$ см и $\angle R = 35°$.

6.111. Постройте треугольник ABC, у которого $AB = 4$ см, $\angle A = 45°$ и $\angle B = 60°$. Если построить несколько треугольников ABC с теми же данными, то как будут соотноситься эти треугольники?

6.112. Постройте треугольник ABC, у которого $\angle A = 40°$, $AC = 6$ см и $CB = 4$ см. Затем постройте треугольник DEF, у которого $\angle D = 40°$, $DF = 6$ см и $FE = 4$ см. Обязательно ли $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ равны?

6.113. В задаче **6.111** вы должны были прийти к заключению, что все треугольники ABC, меры некоторых элементов (сторон, углов) которых известны, равны между собой, т. е. все соответствующие их элементы равны. В случае, когда это верно, мы будем говорить, что три данных элемента определяют треугольник. В задаче **6.112** вы должны были найти два неравных треугольника, три элемента которых имеют заданные меры. Допускает ли задача **6.110** один треугольник в качестве решения или больше? В задаче **6.112** можно ли указать такие меры углов и отрезков, которые не задавали бы ни одного треугольника?

6.114. Постройте треугольник, определяемый каждой системой заданных ниже элементов:

а) $\angle M = 30°$, $MO = 2$, $\angle O = 90°$;

б) $\angle B = 55°$, $AB = 5$, $BC = 3$;

в) $\angle G = 35°$, $GH = 6$, $HJ = 4$;

г) $AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 4$;

д) $\angle M = 80°$, $MO = 2$, $\angle O = 120°$;

е) $DE = 8$, $EF = 3$, $DF = 4$;

ж) $DE = 4$, $DF = 8$, $\angle D = 60°$;

з) $\angle A = 70°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 50°$.

Если заданные числа допускают два треугольника, то постройте оба. Если можно построить больше двух треугольников или нельзя построить ни одного, то объясните почему.

6.115. В треугольной пирамиде $OABC$ $AB = OC$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что грани OCA и BCA равны.

6.116. Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\triangle APC = \triangle A_1P_1C_1$.

6.117. Дано: $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 6.29). Докажите, что $\triangle ABC = \triangle ADC$.

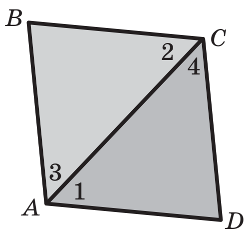


Рис. 6.29

6.118. Дано: AD — биссектриса угла BAC, $AB = AC$ (рис. 6.30). Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ADC$.

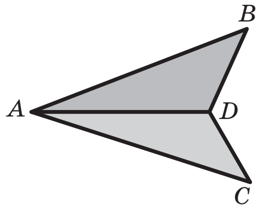


Рис. 6.30

6.119. Прямая, проходящая через вершину треугольника, разбивает его на два равнобедренных треугольника. Верно ли, что данный треугольник равнобедренный?

6.120. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

6.121. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB - BC = A_1B_1 - B_1C_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

6.122. Отрезки AB и A_1B_1 имеют общую середину O. Докажите, что: а) отрезки AA_1 и BB_1, AB_1 и A_1B равны; б) середины отрезков A_1A и B_1B лежат на одной прямой с точкой O.

6.123. По преданию древнегреческий математик Фалес первым решил задачу на вычисление расстояния от берега до корабля. Для этого он измерил расстояние AB и угол ABC (рис. 6.31), а затем, произведя на суше некоторые построения и измерения, вычислил расстояние AC. Какие построения и измерения мог провести Фалес для решения этой задачи? На чем основывалось это решение?

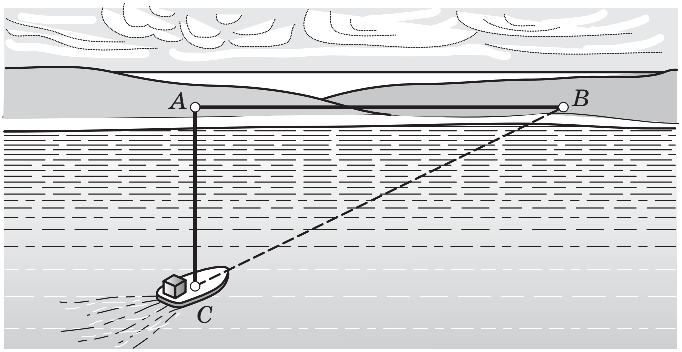


Рис. 6.31

6.124. На рисунке 6.32 отрезки AD и BC пересекаются в точке E, $BE = EC$, $AE = ED$. Докажите, что $\triangle ABE = \triangle CED$.

6.125. На рисунке 6.33 BD — биссектриса $\angle MBN$, $BM = BN$. Докажите, что $MK = KN$.

6.126. На рисунке 6.34 $BC = AD$, $\angle DAC = \angle BCA$. Что можно доказать, исходя из данных задачи?

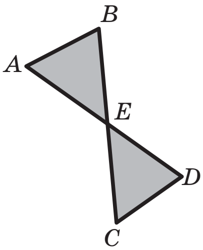


Рис. 6.32

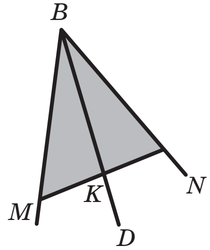


Рис. 6.33

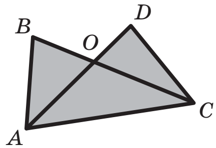


Рис. 6.34

6.127. На рисунке 6.35 точка O является пересечением отрезков AB и CD, $AO = OB$, $CO = OD$, $AC = BD$. Докажите, что $\angle COD$ развернутый.

6.128. На рисунке 6.36 $AD = AF$, $DE = FK$. Докажите, что: а) $DK = EF$; б) AO — биссектриса $\angle BAC$.

6.129. Пользуясь одной масштабной линейкой, разделите данный угол пополам.

6.130. На рисунке 6.37 $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AD = EC$.

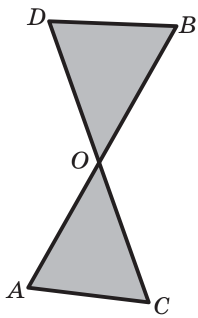


Рис. 6.35

6.131. Дано: $AE = DC$, $DA = EC$ (см. рис. 6.37). Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

6.132. Дано: $DA = EC$, $\angle 1 = \angle 2$ (см. рис. 6.37). Докажите, что $AB = BC$.

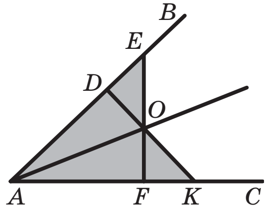


Рис. 6.36

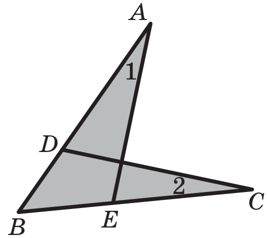


Рис. 6.37

6.133. На рисунке 6.38 отрезки AB и A_1B_1 пересекаются в точке C, $BC = CA$, $\angle A = \angle B$. Докажите, что $\triangle CBB_1 = \triangle CAA_1$.

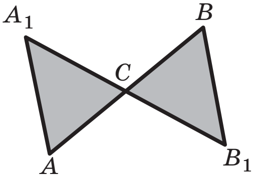


Рис. 6.38

6.134. На рисунке 6.39 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

6.135. На рисунке 6.40 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, ED — продолжение AE, BDC — отрезок. Что можно доказать исходя из данных этой задачи?

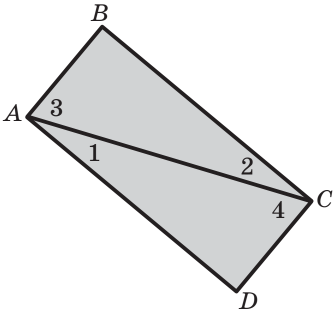


Рис. 6.39

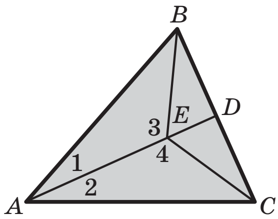


Рис. 6.40

6.136. Постройте прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и гипотенузе; в) по катету и прилежащему к нему острому углу; г) по катету и противолежащему ему острому углу; д) по гипотенузе и острому углу.

6.137. На рисунке 6.41 $BB_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AB$, $BC = CA$. Докажите, что $\triangle CBB_1 = \triangle CAA_1$. Что следует из равенства этих треугольников?

6.138. Для измерения длины озера на местности выполнили построение, показанное на рисунке 6.42 ($AC \perp BD$, $CD = BC$). Какое расстояние нужно измерить на местности, чтобы узнать длину озера?

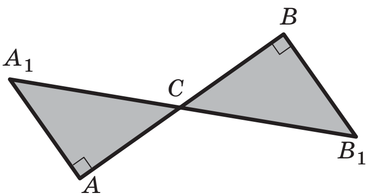


Рис. 6.41

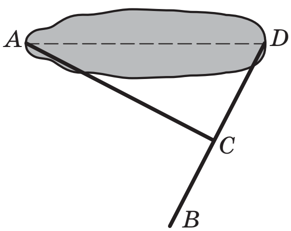


Рис. 6.42

6.139. Докажите, что две высоты, проведенные из концов основания равнобедренного треугольника, равны. Верно ли аналогичное свойство для медиан и биссектрис?

6.140. Дан $\triangle ABC$. Если $\triangle ABC = \triangle BAC$ и $\triangle ABC = \triangle ACB$, то какое заключение можно сделать относительно $\triangle ABC$? Как доказать, что ваше заключение справедливо?

6.141. Если $\triangle ABC = \triangle DEF$ и $\triangle DEF = \triangle GNK$, то какое заключение можно сделать относительно $\triangle ABC$ и $\triangle GNK$? Как доказать, что ваше заключение справедливо? Сформулируйте теорему, обобщающую эту ситуацию.

22. Свойства прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Треугольник называют *прямоугольным*, если у него есть прямой угол. Стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол, называют *катетами*, а сторону, противолежащую прямому углу, — *гипотенузой*.

ТЕОРЕМА (теорема Пифагора). *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

ТЕОРЕМА. *Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны* **(признак равенства по гипотенузе и катету).**

ТЕОРЕМА. *Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны* **(признак равенства по двум катетам).**

ТЕОРЕМА. *Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны* **(признак равенства по гипотенузе и острому углу).**

Термины и обозначения

При решении задач на зависимости между элементами прямоугольного треугольника будем пользоваться обозначениями: a и b — длины катетов; c — длина гипотенузы; h_c — длина высоты, проведенной из вершины прямого угла; a_c и b_c — длины проекций катетов a и b на гипотенузу c.

С

6.142. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4 см. Найдите гипотенузу этого прямоугольного треугольника.

У

6.143. Заполните пустые клетки таблицы, в которой указаны длины катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника:

Катет	3 см		3 см	6,2 дм	
Катет	4 см	4 см		4,3 дм	3,1 м
Гипотенуза		5 см	5 см		7,2 м

6.144. 1. На какое расстояние следует отодвинуть от стены дома нижний конец лестницы, длина которой 9 м, чтобы верхний конец ее оказался на высоте 7 м?

2. Лестница длиной 9 м прислонена к стене дома так, что нижний ее конец отстоит от стены на 3 м. На какой высоте находится верхний конец этой лестницы?

Т

6.145. Установите вид треугольника (по углам), если один из его углов: а) равен сумме двух других углов; б) больше ее; в) меньше ее.

6.146. Докажите: 1) $h = \frac{ab}{c}$; 2) $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$; 3) $h^2 = a_c b_c$.

6.147. Постройте среднее пропорциональное между отрезками, длины которых: а) 2 см и 3 см; б) 15 мм и 24 мм.

6.148. Дано: $a_c = 3$ см, $b_c = 2$ см. Вычислите c, a, b, h.

6.149. Выразите длины проекций катетов на гипотенузу через длины катетов.

6.150. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 9 м и 12 м; б) 12 см и 16 см; в) $3a$ и $4a$.

6.151. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см, а один из катетов — 12 см. Найдите другой катет.

6.152. Биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении $p : q$. В каком отношении делит гипотенузу основание проведенной к ней высоты?

6.153. Постройте отрезок x, если: 1) $x = \sqrt{ab}$; 2) $x = \sqrt{2bc}$; 3) $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$, где a, b — данные отрезки.

6.154. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.

6.155. 1. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 6.43, *а—в*) $a = 38$ см, $b = 16$ см. Вычислите площадь каждого из затемненных прямоугольников.

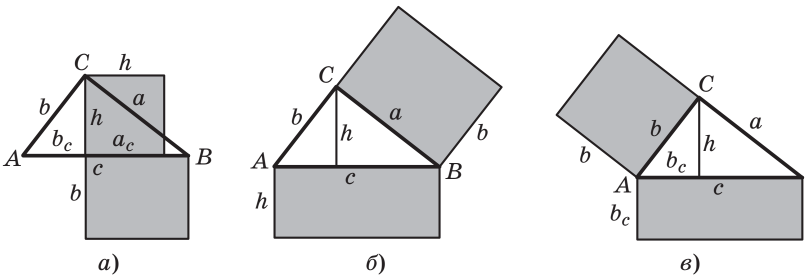


Рис. 6.43

2. В прямоугольном треугольнике ABC $a = 36$ см, $c = 45$ см. Вычислите площадь каждого из затемненных треугольников, изображенных на рисунке 6.44.

6.156. Стороны треугольника пропорциональны числам 13, 12 и 5. Докажите, что такой треугольник прямоугольный.

6.157. Вычислите расстояния AC, AE и CE (рис. 6.45).

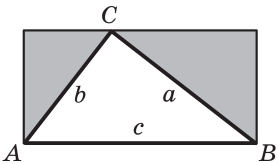


Рис. 6.44

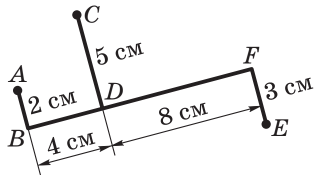


Рис. 6.45

6.158. Из точки A, находящейся вне прямой MN, проведены к этой прямой две наклонные. Одна из них имеет длину 13 см, а ее проекция на эту прямую равна 5 см. Вычислите длину второй наклонной и ее проекцию на прямую MN, если эта наклонная составляет с прямой MN угол: 1) 30°; 2) 45°.

6.159. Дано: $a = 9$ см, $b = 12$ см. Вычислите: c, h, a_c, b_c.

6.160. Дано: $a = 12$ см, $c = 13$ см. Вычислите: b, h, a_c, b_c.

6.161. Вычислите катеты прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки k и l. Проведите вычисления при $k = 12$ см и $l = 5$ см.

6.162. Могут ли длины всех сторон прямоугольного треугольника выражаться четными числами? нечетными числами?

23. Свойства равнобедренного треугольника

Основное теоретическое содержание

ТЕОРЕМА. *В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно и медианой, и высотой.*

ТЕОРЕМА. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

6.163. Сколько высот имеет треугольник? Каким свойством обладают высоты треугольника?

6.164. Сколько осей симметрии имеет равносторонний треугольник?

6.165. Могут ли все основания высот треугольника быть расположенными на его сторонах? на продолжении сторон? Может ли только одно основание высоты быть расположено на продолжении стороны треугольника?

6.166. Два угла треугольника равны 60° и 72°. Вычислите меньшие из углов, образованных двумя прямыми, содержащими высоты треугольника.

6.167. Высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, отсекает от него треугольник, периметр которого равен 18 см. Вычислите длину высоты, если периметр данного равнобедренного треугольника равен: а) 24 см; б) 30 см; в) 20 см.

6.168. Найдите длины основания и боковой стороны равнобедренного треугольника, если известно, что две его стороны имеют длины: а) 3 см и 7 см; б) 20 см и 10 см; в) 7 см и 8 см.

6.169. 1. Постройте биссектрисы и медианы данного треугольника.

2. Постройте высоты данного треугольника: а) остроугольного; б) прямоугольного; в) тупоугольного.

6.170. Постройте угол, осью симметрии которого является данная прямая a.

6.171. Постройте равнобедренный треугольник, симметричный относительно данной прямой a. Как можно построить равносторонний треугольник, осью симметрии которого является эта прямая?

6.172. Постройте равнобедренный треугольник: а) по основанию a и боковой стороне b; б) по боковой стороне b и высоте h, проведенной к основанию; в) по основанию a и высоте h, проведенной к основанию.

6.173. Через внутреннюю точку данного угла проведите прямую, отсекающую от сторон этого угла равные отрезки.

6.174. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите, что прямая CD проходит через середину отрезка AB.

6.175. Докажите, что если в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, то медиана AM треугольника не является высотой.

6.176. Биссектрисы углов при основании AB равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что прямая CM перпендикулярна прямой AB.

6.177. Докажите, что разносторонний треугольник не имеет осей симметрии.

6.178. Докажите равенство медиан, биссектрис, высот равнобедренного треугольника, проведенных к его боковым сторонам.

6.179. Дано: $AB = BC$, $\angle BAD = \angle BCE$ (рис. 6.46). Докажите, что треугольник BDE — равнобедренный.

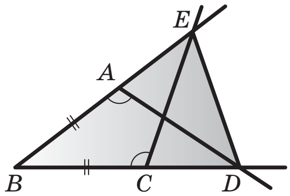


Рис. 6.46

6.180. Докажите, что если все углы треугольника равны, то этот треугольник равносторонний.

6.181. Как можно воспользоваться шарнирным механизмом, имеющим звенья равной длины (рис. 6.47), для построения: а) биссектрисы данного угла; б) середины данного отрезка; в) центра данной окружности?

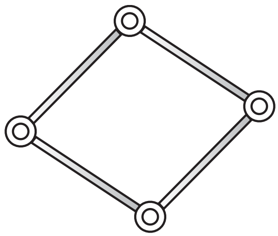


Рис. 6.47

6.182. Высоты AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC, проведенные к боковым сторонам, пересекаются в точке M. Докажите, что прямая MC — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Т

6.183. Докажите, что в равных треугольниках равны соответственно: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты.

6.184. Докажите, что высоты в равнобедренном треугольнике пересекаются в одной точке (аналогично докажите это утверждение для медиан и биссектрис).

6.185. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

6.186. Могут ли две биссектрисы одного и того же треугольника быть взаимно перпендикулярны?

6.187. Возьмите точку M внутри равностороннего треугольника ABC и опустите перпендикуляры MP, MQ и MR на его стороны (рис. 6.48). Оказывается, что сумма этих отрезков не зависит от выбора точки M и равна высоте треугольника. Докажите, что

$$AP + BQ + CR = BP + CQ + CR,$$

а также, что

$$AP^2 + BQ^2 + CR^2 = BP^2 + CQ^2 + CR^2.$$

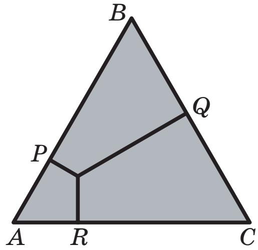


Рис. 6.48

6.188. Докажите, что если треугольник переходит в себя при некотором нетождественном повороте, то этот треугольник равносторонний.

Тема 7

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

24. Прямоугольник и квадрат

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямоугольник* — это четырехугольник, у которого все углы прямые.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квадрат* — это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Термины и обозначения

Стороны и углы прямоугольника можно понимать и как геометрические фигуры, и как соответствующие им величины. Можно говорить так: «сторона квадрата равна 2 см» или «длина стороны квадрата равна 2 см».

7.1. На рисунке 7.1 изображен квадрат. Сколько у него сторон, углов и вершин? Чему равна величина его углов? Какие стороны квадрата равны между собой?

7.2. Дайте определение квадрата с помощью понятия: 1) «параллелограмм»; 2) «ромб»; 3) «четырехугольник».

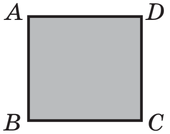


Рис. 7.1

Рис. 7.2

7.3. На рисунке 7.2 изображен прямоугольник. Сколько у него сторон, углов и вершин? Чему равна величина его углов? Какие стороны прямоугольника равны между собой?

7.4. Является ли диагональ прямоугольника его осью симметрии?

7.5. Имеет ли прямоугольник центр (центры) симметрии?

7.6. Какими симметриями обладает квадрат?

7.7. Назовите изометрии, при которых прямоугольник переходит в себя.

7.8. Назовите изометрии, при которых квадрат переходит в себя.

7.9. Какими особыми свойствами обладает квадрат по сравнению с прямоугольником?

7.10. Какие изометрии переводят сторону AB квадрата $ABCD$ в сторону BC (рис. 7.3)?

7.11. Какие изометрии переводят треугольник *1* в треугольник *2* (см. рис. 7.3), если $ABCD$ — квадрат?

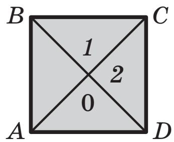


Рис. 7.3

7.12. Диагонали AC и BD квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Через точку O провели две прямые a и b, причем $a \perp b$ (рис. 7.4). Укажите образ треугольника ABC при симметрии: а) относительно прямой a; б) относительно прямой b; в) относительно точки O.

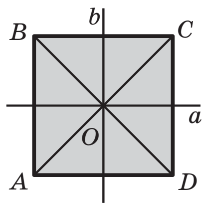


Рис. 7.4

7.13. Лист бумаги сложен вчетверо, как это показано на рисунке 7.5, и разрезан по линии AB. Определите, не разворачивая лист бумаги, какая фигура отрезана от листа. Как должна проходить линия разреза, чтобы от листа бумаги был отрезан квадрат?

7.14. Лист бумаги сложен так, как это показано на рисунке 7.6, и разрезан по линии AB. Какая фигура отрезана от листа бумаги? Может ли эта фигура быть: а) равнобедренным треугольником; б) правильным треугольником?

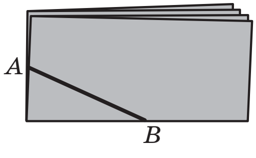


Рис. 7.5

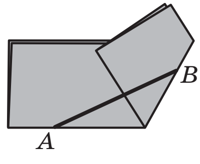


Рис. 7.6

7.15. Ответьте на вопросы предыдущей задачи для случая, когда лист согнут так, как показано на рисунке 7.7.

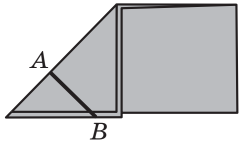


Рис. 7.7

7.16. Даны два равных прямоугольника. Сколько существует различных изометрий, при которых один из них переходит в другой?

7.17. Укажите свойства, которыми обладает прямоугольник, но не обладает параллелограмм, не являющийся прямоугольником.

7.18. Верно ли следующее предложение:

«Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны и равны, то этот четырехугольник является квадратом»?

7.19. Верно ли следующее предложение:

«Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны и точкой их пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник является квадратом»?

7.20. Два равных квадрата имеют общую сторону. Назовите изометрии, которые переводят один из этих квадратов в другой.

7.21. Постройте четырехугольник, имеющий два прямых угла, но не являющийся прямоугольником.

7.22. Постройте четырехугольник, диагонали которого равны между собой, но он не является прямоугольником.

7.23. Докажите следующие утверждения:

1. Прямоугольник, у которого две смежные стороны равны, является квадратом.

2. Четырехугольник, у которого все стороны равны и один угол прямой, является квадратом.

7.24. Докажите, что множество всех вершин прямоугольников, имеющих общую диагональ, есть окружность, для которой эта диагональ является диаметром.

7.25. Докажите следующие утверждения:

1. Прямоугольник, у которого две смежные стороны равны, является квадратом.

2. Четырехугольник, у которого все стороны равны и один из углов прямой, является квадратом.

7.26. Какими особыми свойствами обладает квадрат по сравнению: а) с прямоугольником, не являющимся квадратом; б) с ромбом, не являющимся квадратом?

7.27. Длина проекции одной из сторон квадрата на его диагональ равна b. Найдите длину диагонали.

7.28. Постройте квадрат: а) по его стороне; б) по его диагонали.

7.29. Два равных квадрата имеют общую вершину. Укажите такие изометрии, которые переводят один из этих квадратов в другой.

7.30. Докажите, что диагонали квадрата равны.

7.31. Докажите, что диагонали квадрата взаимно перпендикулярны.

7.32. Постройте квадрат: а) по сумме диагонали и стороны; б) по разности диагонали и стороны.

7.33. Паркетчик, проверяя, имеет ли выпиленный четырехугольник форму квадрата, убеждается, что диагонали равны и пересекаются под прямым углом. Достаточно ли такой проверки?

7.34. Надо убедиться, что кусок материи в форме четырехугольника имеет форму квадрата. Для этого материю дважды перегибают сначала по одной, а потом по другой диагонали. Образующиеся треугольники оба раза точно совмещаются. Доказывает ли такая проверка, что этот кусок материи действительно имеет форму квадрата?

7.35. Сторона квадратной шайбы равна 60 мм. Какой длины должен быть лист стали, чтобы из него можно было сделать 50 шайб? Ширина листа 300 мм.

7.36. Заготовлены одинаковые по длине и ширине рейки в форме прямоугольников. Как обрезать концы реек под углом в 45°, не используя углоизмерительный инструмент, чтобы из них можно было сложить рамку?

7.37. Имеется 9 палочек различных длин: 1, 2, ..., 9 см. С какими сторонами и сколькими способами можно составить квадраты из этих палочек?

У к а з а н и е. Все палочки использовать не обязательно; способы составления одного и того же квадрата считаются разными, если использованы разные наборы палочек.

7.38. Покажите на чертеже, как можно разрезать прямоугольник со сторонами 6 и 2 см на две части так, чтобы из них можно было составить прямоугольник со сторонами 3 и 4 см.

7.39. Разрежьте квадрат на части, из которых можно составить квадратную рамку.

7.40. Данную фигуру (рис. 7.8) разрежьте на части так, чтобы из них можно было составить квадратную рамку.

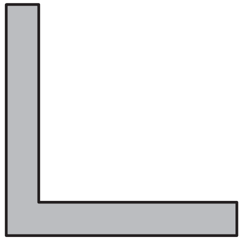


Рис. 7.8

7.41. Каждая из сторон квадрата $KLMN$ разделена на два отрезка длиной a и b и выполнены построения, указанные на рисунке 7.9. Докажите, что площадь затемненного квадрата (рис. 7.9, *а*) равна сумме площадей двух затемненных квадратов (рис. 7.9, *б*).

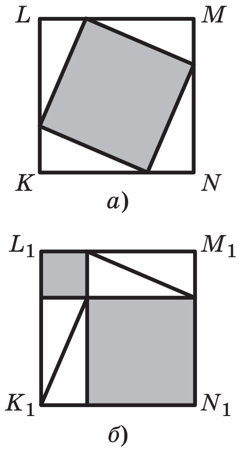


Рис. 7.9

7.42. Начертите прямоугольник $ABCD$, точку пересечения его диагоналей обозначьте через O и отметьте точку P, принадлежащую AC, $AP = 2PC$. Проведите оси симметрии l и m прямоугольника, $m \parallel AB$. Ответьте на вопросы:

1. На какие точки переходят точки A, B, C, D, O и P при: а) осевой симметрии относительно прямой l; б) осевой симметрии относительно прямой m; в) центральной симметрии относительно точки O?

2. Найдите образ треугольника BOC при симметрии: а) относительно прямой l; б) относительно прямой m; в) относительно точки O.

7.43. Приведите примеры, опровергающие высказывания: а) если диагонали четырехугольника равны, то этот четырехугольник — параллелограмм; б) если диагонали четырехугольника равны и образуют с двумя его параллельными сторонами соответственно равные углы, то такой четырехугольник — параллелограмм.

7.44. Даны прямоугольник $ABCD$ и его оси симметрии m и n, $m \parallel AB$, $n \parallel BC$, прямые m и n пересекаются в точке O.

В какую фигуру перейдет:

а) отрезок AB при симметрии относительно прямой m;

б) прямоугольник с диагональю OA и вершинами на сторонах прямоугольника $ABCD$ (кроме вершины O) при симметрии относительно прямой m;

в) диагональ BD при симметрии относительно прямой n;

г) прямая m при симметрии относительно прямой n;

д) прямая n при симметрии относительно прямой m;

е) прямая m при центральной симметрии относительно точки O?

7.45. В четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны.

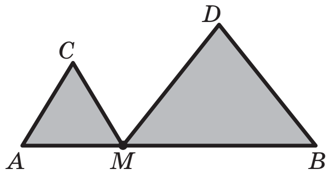


Рис. 7.10

7.46. Дан отрезок AB (рис. 7.10); M — произвольная точка отрезка AB. На отрезках AM и MB, как на гипотенузах, по одну сторону прямой AB построены равнобедренные прямоугольные треугольники ACM и MDB.

1. Укажите множества вершин C и D этих треугольников.

2. Пусть прямые AC и BD пересекаются в точке N; докажите, что прямая MN делит отрезок CD на равные части.

3. Найдите множество всех центров окружностей, описанных около треугольника AMC.

7.47. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит пересекаемую ею сторону на отрезки равной длины. Найдите периметр этого прямоугольника, если длина меньшей стороны прямоугольника 15 см.

7.48. Периметр прямоугольника равен 12 см. Найдите сумму расстояний от произвольной внутренней точки прямоугольника до его сторон.

7.49. Постройте прямоугольник: а) по двум сторонам, имеющим общую вершину; б) по стороне и диагонали; в) по диагонали и углу между диагоналями; г) по диагонали и сумме прилежащих сторон.

7.50. 1. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

2. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

7.51. Какой фигурой является множество вершин прямых углов всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой AB?

7.52. Как найти на прямой l такую точку C, чтобы угол ACB был прямым (A и B — данные точки)?

7.53. Постройте прямоугольник, все вершины которого лежат на данной окружности, причем две из них — в данных точках.

7.54. Объясните, на чем основано устройство центроискателя, изображенного на рисунке 7.11.

7.55. Пользуясь только чертежным угольником: а) постройте оси симметрии двух данных точек; б) разделите данный отрезок пополам; в) удвойте данный отрезок.

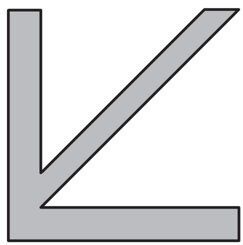


Рис. 7.11

7.56. Из вершин A и B треугольника ABC проведены высоты. Докажите, что вершины A, B и основания построенных высот принадлежат одной окружности. Где находится центр этой окружности? Чему равен ее радиус?

7.57. Точка A лежит вне данного круга (рис. 7.12), BC — диаметр. С помощью одной линейки постройте перпендикуляр к прямой BC, проходящий через A.

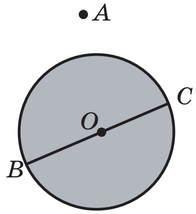


Рис. 7.12

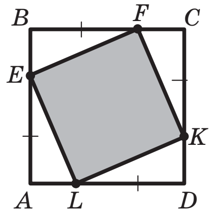


Рис. 7.13

7.58. 1. Дан квадрат $ABCD$, $AE = BF = CK = DL$ (рис. 7.13). Докажите, что $EFKL$ — квадрат.

2. Дан квадрат $ABCD$, $AE = CF$ (рис. 7.14). Докажите, что $BEDF$ — ромб.

7.59. Постройте квадрат: а) по двум данным вершинам; б) по серединам двух противоположных сторон; в) по серединам двух прилежащих сторон; г) по центру и двум точкам на одной из сторон.

7.60. Постройте квадрат по сумме длин всех его сторон и диагоналей.

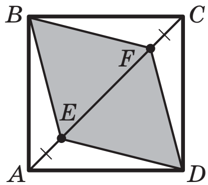


Рис. 7.14

7.61. Четыре селения расположены в вершинах квадрата. Соедините их сетью дорог так, чтобы суммарная длина всех дорог была наименьшей.

7.62. На трех сторонах треугольника вне его построены три квадрата. Как восстановить (построить) треугольник, если даны только центры этих квадратов?

7.63. Длина одной стороны прямоугольника равна 9 см, длина другой равна 4 см. Разбейте прямоугольник на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

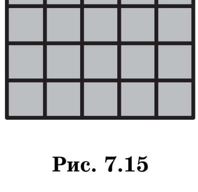


Рис. 7.15

7.64. Можно ли из квадрата размером 5×5 клеток (рис. 7.15) вырезать одну клетку так, чтобы получившуюся фигуру можно было разрезать по линиям клеток на 8 прямоугольных полосок размером 1×3 клетки?

7.65. Каждую из трех фигур, изображенных на рисунке 7.16, *а—в*, разрежьте на две части таким образом, чтобы из них можно было составить квадрат.

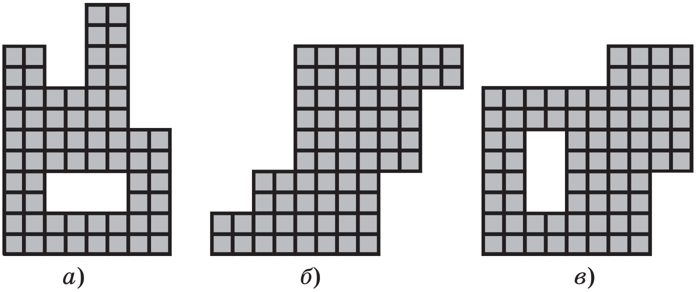


Рис. 7.16

7.66. Разрежьте «елочку» (рис.7.17) на 4 части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

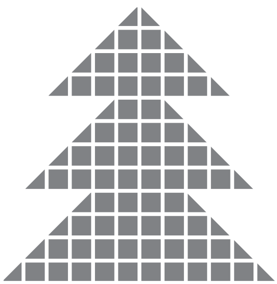


Рис. 7.17

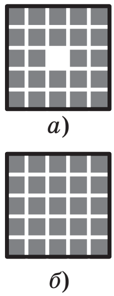


Рис. 7.18

7.67. Разрежьте «квадрат с дыркой» (рис. 7.18, *а*) двумя прямыми таким образом, чтобы из них и второго квадрата (рис. 7.18, *б*) можно было сложить новый квадрат.

7.68. Разрежьте большой квадрат (рис. 7.19, *в*) на 3 части так, чтобы из них и двух других квадратов (рис. 7.19, *а*, *б*) можно было сложить один квадрат.

7.69. Диагональ квадрата со стороной 2 см служит стороной другого квадрата. Вычислите диагонали второго квадрата.

7.70. Через вершины квадрата, проведены прямые, параллельные

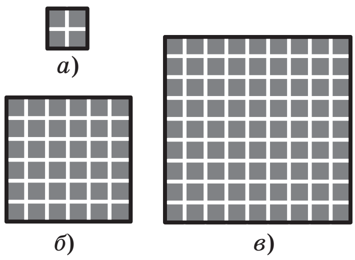


Рис. 7.19

его диагоналям. Определите вид четырехугольника, образованного этими прямыми.

7.71. Вершины четырехугольника $KLMN$ — середины сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. В каком случае четырехугольник $KLMN$ будет: а) прямоугольником; б) ромбом, в) квадратом?

7.72. Дан квадрат $ABCD$. На стороне AB взята точка K, такая, что $AK = KB$. Докажите, что точки D, K и C — вершины равнобедренного треугольника.

7.73. Дан квадрат $ABCD$. Точки K, L, M и N — середины его сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Докажите, что $\angle KLM = \angle MNK = 90°$.

7.74. Дан квадрат $ABCD$. Точки K и M делят его стороны AB и CD так, что $AK : KB = CM : MD$. Докажите, что $\angle DKC = \angle BMA$.

7.75. Через центр симметрии квадрата $ABCD$ проведена прямая l, пересекающая сторону AB; $A \notin l$, $B \notin l$. Докажите, что сумма расстояний вершин B и C квадрата до прямой равна сумме расстояний вершин A и D до этой прямой.

7.76. На сторонах квадрата вне его построены квадраты. Докажите, что их центры симметрии являются вершинами квадрата.

7.77. Около прямоугольника $ABCD$ описан четырехугольник $KLMN$ так, что стороны этого четырехугольника проходят через вершины A, B, C и D прямоугольника, а вершины K, L, M и N лежат на осях симметрии прямоугольника. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — ромб. В каком случае четырехугольник $KLMN$ является квадратом?

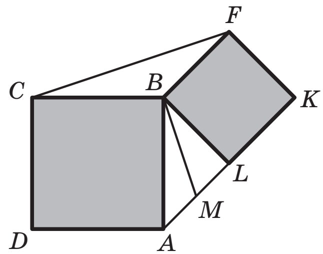


Рис. 7.20

7.78. Квадраты $ABCD$ и $LBFK$ имеют общую вершину B (рис. 7.20). Докажите, что медиана BM треугольника ABL перпендикулярна отрезку CF.

7.79. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $\angle MAD = \angle MDA = 15°$. Докажите, что треугольник BCM равносторонний.

7.80. На рисунке 7.21 $ABCD$ — квадрат, точка P принадлежит CD, $PP_1 \parallel CB$, точка P_1 принадлежит AB, $P_1P_2 \parallel AC$, точка P_2 принадлежит BC, прямые AC и BD пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle P_2OP = 90°$.

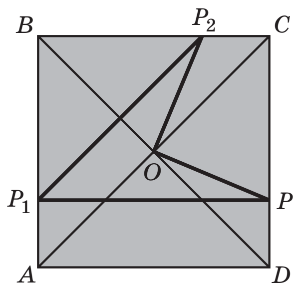


Рис. 7.21

7.81. Прямоугольник со сторонами 4 и 9 см разрежьте на два равных многоугольника так, чтобы из них можно было составить квадрат.

7.82. Из 8 прямоугольников размером 2×4 и 6 прямоугольников размером 2×3 Лёня сложил квадрат размером 10×10 (рис. 7.22). Внимательно посмотрев на получившуюся фигуру, мальчик обнаружил, что в двух случаях стороны прямоугольников образуют отрезки, соединяющие противоположные стороны квадрата. Это показалось Лёне некрасивым, и он попытался сложить квадрат из этих же прямоугольников по-другому, но сделать этого не сумел. Помогите Лёне!

7.83. Можно ли покрыть всю плоскость квадратами с длинами сторон 1, 2, 4, 8, 16 ... (рис. 7.23) без наложений, используя каждый квадрат не более: а) десяти раз; б) одного раза?

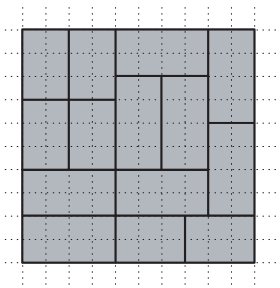


Рис. 7.22

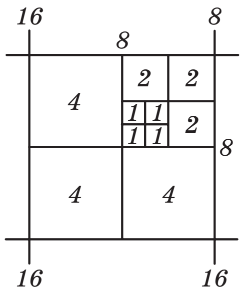


Рис. 7.23

7.84. Если разрезать квадрат, как показано на рисунке 7.24, получится популярная китайская головоломка «**Танграм**». Суть игры состоит в том, чтобы из 7 частей, на которые разрезан квадрат, составить различные фигуры.

Эта игра появилась в Китае в конце XVIII века. На ксилографии японского художника Утамаро изображены две девушки, которые складывают фигурки «чи чау ту» — так называется эта игра в Китае (в переводе — «умственная головоломка из 7 частей»). Название «танграм» возникло в Европе, скорее всего, оно происходит от японского слова «тань» (китаец) и греческого корня «грамма» (буква).

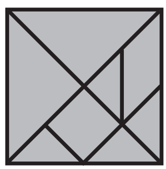


Рис. 7.24

1. Попытайтесь сложить фигуры, изображенные на рисунке 7.25.

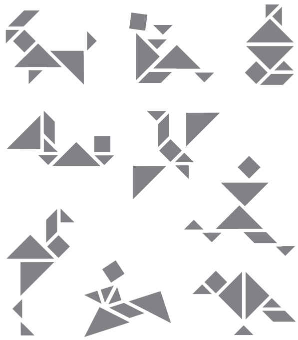
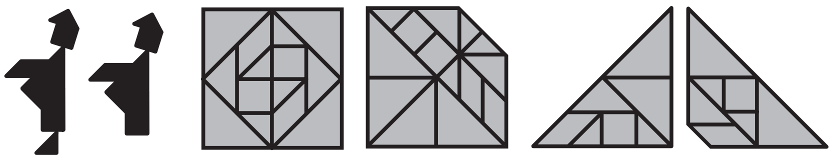


Рис. 7.25

2. Попробуйте из полного комплекта танграма составить все возможные выпуклые многоугольники (в 1942 году было доказано, что их ровно 13).

3. На рисунке 7.26 показаны парадоксы «Танграма». Как объяснить исчезновение ноги у «человека с подносом» (рис. 7.26, *а*), если для составления обеих фигурок использовался полный комплект танграма? На рисунке 7.26, *б* вы видите два квадрата, составленные из двойных комплектов танграма. Как объяснить, что у второго квадрата не хватает уголка? На рисунке 7.26, *в* изображен аналогичный «софизм» для треугольников.



а) *б*) *в*)

Рис. 7.26

7.85. Свойства квадрата лежат в основе многих интересных задач с общим названием «**Разбиение квадрата на квадраты**».

1. На рисунке 7.27 показано одно из возможных разбиений квадрата. Постарайтесь найти закономерность сложения нечетных чисел. Чему равна сумма нечетных чисел от 1 до $2n - 1$?

2. Квадрат можно разбить на квадраты меньших размеров, например, средними линиями, как на рисунке 7.28. На рисунке 7.29 вы видите более сложное разбиение квадрата на меньшие квадра-

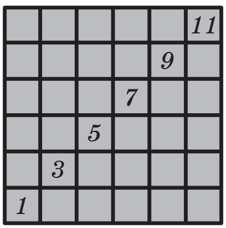


Рис. 7.27

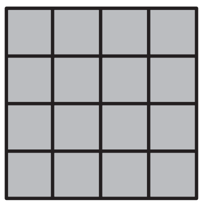


Рис. 7.28

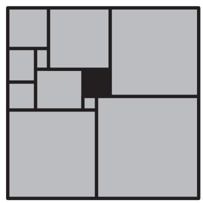


Рис. 7.29

ты с целочисленными сторонами. Найдите их размеры, если известно, что длина стороны темного квадратика равна 2. Обратите внимание на то, что не все квадраты имеют разный размер.

3. Долгое время математики полагали, что разбить квадрат на неравные квадраты невозможно. В 1939 году было впервые построено разбиение квадрата на 55 различных квадратов. В 1940 году были найдены два способа разбиения квадрата на 28 различных квадратов, а затем — на 26 квадратов. В 1948 году было получено разбиение квадрата на 24 различных квадрата. В 1978 году квадрат был разбит на 21 различный квадрат. Разбиение квадрата на меньшее число равных квадратов уже невозможно. Попробуйте повторить достижения ученых по разбиению квадрата.

7.86. Равносоставленные фигуры. Разрежьте плоскую геометрическую фигуру и составьте из ее частей новую. У вас не возникает сомнения в том, что площади старой и новой фигур равны? Две плоские фигуры называются *равносоставленными*, если каждую из них можно разбить на части, соответственно равные частям другой фигуры.

1. Докажите, что *равносоставленные фигуры равновелики*, т. е. имеют равные площади. Этот «закон сохранения площади» использован на рисунке 7.30, *а*, *б* для доказательства теоремы Пифагора. Обоснуйте соответствующие выводы.

2. Если даны две плоские фигуры (например, многоугольники) равной площади, всегда ли можно одну из них разрезать на конечное число частей и сложить из них вторую? Оказывается, что любой из двух многоугольников равной площади всегда можно разрезать на конечное число частей (меньших многоугольников) и сложить из них второй данный многоугольник...

Эта теорема была доказана в 1832 году и называется «**теорема Больяи—Гервина**».

Таким образом, верно утверждение:

«*Равновеликие многоугольники всегда равносоставлены*».

Подумайте над доказательством этой теоремы.

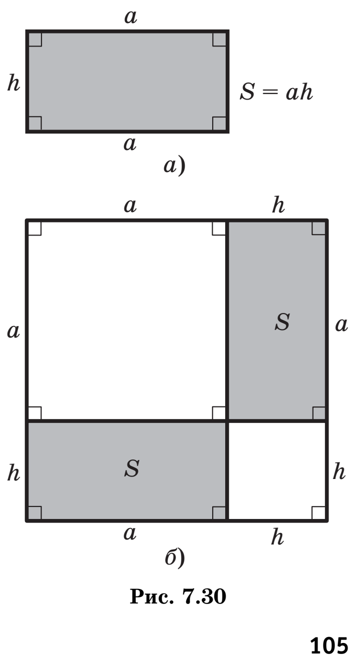


Рис. 7.30

3. Разрежьте многоугольник (рис. 7.31) на меньшие многоугольники и соберите из них квадрат.

4. Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равносоставлен с объединением квадратов, построенных на катетах. Обоснуйте выводы для случая, изображенного на рисунке 7.32 и придумайте другие варианты разрезания.

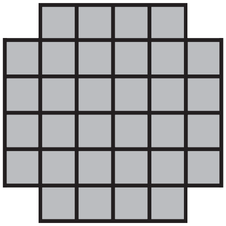


Рис. 7.31

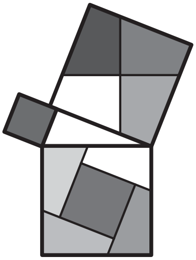


Рис. 7.32

25. Параллелограмм

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Параллелограмм* — это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых.

ТЕОРЕМА. *Середина диагонали параллелограмма является и его центром симметрии.*

ТЕОРЕМА. *В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.*

ТЕОРЕМА. *Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.*

ТЕОРЕМА. *Четырехугольник является параллелограммом, если он имеет две пары равных противоположных сторон.*

ТЕОРЕМА. *Четырехугольник является параллелограммом, если его диагонали, пересекаясь, делятся пополам.*

ТЕОРЕМА. *Четырехугольник является параллелограммом, если две его противоположные стороны равны и параллельны.*

Термины и обозначения

Стороны и углы параллелограмма можно понимать как отрезки и углы — геометрические фигуры; и как их величины, т. е. можно говорить так: «сторона параллелограмма равна 2 см или длина стороны параллелограмма равна 2 см». Аналогично для углов параллелограмма можно говорить так: «угол параллелограмма равен 30 °».

25.1. Определение и свойства параллелограмма

7.87. Дан параллелограмм $PQRS$. Назовите: а) его стороны; б) его вершины; в) его углы. Сколько сторон, вершин и углов имеет параллелограмм?

7.88. Дан параллелограмм $ABCD$. Сколько диагоналей имеет параллелограмм? Назовите их.

7.89. Дан параллелограмм $PQRS$. Какие равные стороны и углы имеет этот параллелограмм?

7.90. В параллелограмме проведена диагональ. На сколько треугольников эта диагональ разбивает параллелограмм?

7.91. Что надо знать о четырехугольнике, чтобы утверждать, что он является параллелограммом?

7.92. Чему равна сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной его стороне?

7.93. Могут ли все углы параллелограмма быть: острыми? тупыми? прямыми? Может ли только один из углов параллелограмма быть прямым?

7.94. Стороны параллелограмма равны 3 и 5 см. Может ли диагональ этого параллелограмма равняться: а) 10 см; б) 8 см; в) 4 см?

С

7.95. Может ли один угол параллелограмма быть равен $40°$, а другой — $50°$? Ответ объясните.

7.96. Один из углов параллелограмма равен $55°$. Найдите остальные его углы.

У

7.97. Расстояния от точки пересечения диагоналей параллелограмма до двух его вершин равны 3 и 4 см. Чему равны расстояния до двух других вершин? Объясните ответ.

7.98. Сумма двух углов параллелограмма равна $100°$. Вычислите углы параллелограмма.

7.99. Разность двух углов параллелограмма равна $45°$. Вычислите углы параллелограмма.

7.100. Один угол параллелограмма в 4 раза больше второго угла. Найдите все углы параллелограмма.

7.101. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A$ относится к $\angle B$ как $2 : 3$. Найдите все углы параллелограмма.

7.102. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы в $30°$ и $50°$. Вычислите все углы этого параллелограмма.

7.103. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 5$ см, $BC = 7$ см. Найдите стороны CD, AD и периметр параллелограмма P_{ABCD}.

7.104. Выразите сторону параллелограмма через его периметр p и другую сторону a.

7.105. Сумма двух смежных сторон параллелограмма равна 40 см. Одна из сторон параллелограмма равна 10 см. Вычислите длину смежной с ней стороны параллелограмма и его периметр.

7.106. Разность двух смежных сторон параллелограмма равна 10 см. Вычислите вторую из этих сторон и периметр параллелограмма, если одна из них равна: а) 6 см; б) 13 см.

7.107. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что ее отрезок, заключенный между параллельными сторонами, делится этой точкой пополам.

7.108. В параллелограмме $ABCD$ через точку пересечения диагоналей проведена прямая, которая отсекает на сторонах BC и AD отрезки $BE = 2$ м и $AF = 2{,}8$ м. Найдите стороны BC и AD.

7.109. Периметр параллелограмма равен 60 см. Найдите стороны параллелограмма, если: а) одна из сторон параллелограмма равна 13 см; б) одна сторона параллелограмма на 4 см больше другой стороны; в) одна сторона параллелограмма в 3 раза меньше второй стороны; г) разность двух сторон параллелограмма равна 7 см.

7.110. Периметр параллелограмма равен 48 см, а его стороны относятся как 1 : 3. Найдите стороны параллелограмма.

7.111. Сумма двух сторон параллелограмма равна 28 см, его периметр — 58 см. Найдите стороны параллелограмма.

7.112. Найдите углы параллелограмма, если диагональ параллелограмма равна его стороне и перпендикулярна ей.

7.113. Один из углов параллелограмма равен $45°$. Перпендикуляр, опущенный из вершины его тупого угла, равен 4 см и своим основанием делит сторону параллелограмма на два равных отрезка. Найдите углы, которые образует диагональ параллелограмма, проведенная из этой же вершины, со сторонами параллелограмма.

7.114. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A из вершины B на сторону AD опущен перпендикуляр BK. Со стороной AB он образует угол в $40°$. Найдите все углы параллелограмма.

7.115. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A. Из вершины B опущен перпендикуляр BK к прямой AD, $AK = BK$. Найдите $\angle C$ и $\angle D$.

7.116. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A из вершины B на сторону AD опущен перпендикуляр BK, равный половине стороны AB. Найдите $\angle C$ и $\angle D$.

7.117. В параллелограмме $MNPK$ проведена высота NE, причем $\angle NME$ в 5 раз больше $\angle MNE$. Найдите $\angle MNP$.

7.118. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса AM $\angle BAD$ отсекает ΔABM с $\angle BAM = 25°$. Найдите все углы параллелограмма.

7.119. В параллелограмме $BCEF$ проведен отрезок BD, отсекающий на стороне CE отрезок CD, равный стороне BC и образующий со стороной BF угол в $30°$. Найдите углы параллелограмма.

7.120. В параллелограмме $ABCD$ DN — биссектриса $\angle ADC$. Найдите углы параллелограмма, если: а) $\angle DNC = 56°$; б) $\angle BND = 110°$.

7.121. Из вершины одного угла параллелограмма проведены биссектриса этого угла и высота. Угол между ними равен $30°$. Найдите углы параллелограмма.

7.122. Вычислите углы параллелограмма, если угол между его высотами, проведенными из одной вершины, равен $25°$.

7.123. В параллелограмме $ABCD$ проведен отрезок BM, образующий со стороной AB угол в $60°$ и делящий сторону AD на два отрезка AM и AD. Найдите углы и периметр параллелограмма, если $CD = 4$ см, $AM = 4$ см, $MD = 4$ см.

7.124. В параллелограмме $CDEK$ из вершины D на сторону EK опущена высота DN; $CD = 10$ см, $\angle DEK = 30°$, высота DN равна 2 см. Найдите стороны CK и EK.

7.125. В параллелограмме $MNPQ$ проведен перпендикуляр NH к прямой MQ, причем точка H лежит на стороне MQ. Найдите стороны и углы параллелограмма, если известно, что $MH = 3$ см, $HQ = 5$ см, $\angle MNH = 30°$.

7.126. Периметр параллелограмма $ABCD$ с $\angle BCD = 30°$ равен 56 см, а перпендикуляр BK, опущенный на сторону AD, равен 6 см. Найдите стороны параллелограмма.

7.127. Диагональ параллелограмма делит его на два треугольника со сторонами 2, 3 и 4 см. Найдите периметр этого параллелограмма. Сколько решений имеет задача? Покажите их на чертеже.

7.128. Параллелограмм одной из его диагоналей делится на два треугольника, периметр каждого из них 6 см. Вычислите длину этой диагонали, если периметр параллелограмма равен 7 см.

7.129. Периметр треугольника, отсекаемого от параллелограмма его диагональю, равен 25 см, периметр параллелограмма равен 30 см. Вычислите длину этой диагонали.

7.130. Параллелограмм, периметр которого равен 50 см, разделен диагоналями на четыре треугольника. Разность периметров двух из этих треугольников равна 5 см. Вычислите стороны параллелограмма.

7.131. Параллелограмм разбивается диагональю на два равнобедренных треугольника; бóльшая сторона параллелограмма равна a. Выразите через a высоту параллелограмма, проведенную к этой стороне.

7.132. В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляр, опущенный из вершины B на сторону AD, делит ее пополам. Найдите диагональ BD и стороны параллелограмма, если известно, что периметр параллелограмма равен 3,8 м, а периметр треугольника ABD равен 3 м.

7.133. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD равны соответственно 20 и 10 см и пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника COD, если $AB = 13$ см.

7.134. Дан параллелограмм $ABCD$. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке O, сторона AB равна 12 см, периметр $\triangle COD$ равен 24 см, а периметр $\triangle AOD$ равен 28 см. Найдите периметр параллелограмма.

7.135. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. $BC = 9$ см, $CD = 6$ см, периметр $\triangle AOB$ равен 17 см. Найдите периметр треугольника AOD.

7.136. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Известно, что $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AC = 6$ см. Найдите периметр параллелограмма, три вершины которого находятся в данных точках. Сколько решений имеет задача?

7.137. Дан равнобедренный треугольник. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные его боковым сторонам. Докажите, что периметр получившегося параллелограмма не зависит от выбора точки на основании данного треугольника.

T **7.138.** Биссектриса угла параллелограмма делит одну из его сторон на отрезки, длины которых a и b. Выразите через a и b периметр параллелограмма.

7.139. Биссектриса одного угла параллелограмма делит пересекаемую ею сторону на отрезки в 4 и 5 см. Вычислите периметр этого параллелограмма.

7.140. Длины сторон параллелограмма равны 3 и 5 см. На какие отрезки делит бо́льшую сторону биссектриса острого угла этого параллелограмма?

7.141. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A делит сторону BC на отрезки BK и KC. Найдите периметр параллелограмма, если известно, что $AB = 4$ см и BK в 2 раза меньше KC.

7.142. Стороны параллелограмма равны 8 и 3 см; биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащие к большей стороне, делят противолежащую сторону на три части. Найдите каждую из них.

7.143. Докажите, что если биссектрисы двух углов параллелограмма, противолежащих одной стороне, пересекаются, то они перпендикулярны.

7.144. Докажите, что биссектрисы двух противоположных углов параллелограмма параллельны.

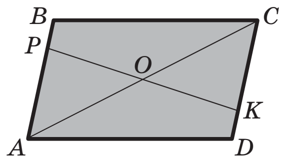


Рис. 7.33

7.145. $ABCD$ — параллелограмм, $DK = BP$. Докажите, что отрезки AC и PK делят друг друга пополам (рис. 7.33)

7.146. Докажите, что вершины A и C параллелограмма $ABCD$ равноудалены от прямой BD.

7.147. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Укажите изометрии, при которых треугольник AOB переходит в треугольник COD.

25.2. Признаки параллелограмма

7.148. Верно ли утверждение: «Четырехугольник является параллелограммом, если: а) две противоположные стороны его параллельны; б) диагонали точкой пересечения делятся пополам; в) сумма углов, прилежащих к одной из его сторон, равна 180°; г) две его противоположные стороны центрально-симметричны; д) его диагонали равны»?

7.149. Существует ли параллелограмм, две диагонали и сторона которого равны соответственно: а) 4 см, 10 см и 6 см; б) 8 см, 10 см и 9 см; в) 8 см, 10 см и 10 см.

7.150. Объясните принцип действия механической рейсшины.

7.151. Для проведения параллельных прямых штурманы используют параллельные линейки. Сделайте такие линейки, покажите, как ими пользоваться, и объясните, на чем основан принцип действия этого прибора.

7.152. В параллелограмме $ABCD$ отмечены точки: M — на стороне BC и K — на стороне AD, причем $MK \parallel AB$. Докажите, что $ABMK$ — параллелограмм.

7.153. Через середины сторон параллелограмма проведены прямые, им перпендикулярные. Укажите вид четырехугольника, определяемого этими прямыми.

7.154. Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180°$, то $ABCD$ — параллелограмм.

7.155. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: а) $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle DAC$; б) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$.

7.156. Дан параллелограмм $ABCD$, точка M принадлежит стороне BC, точка N принадлежит стороне CD, O — центр симметрии параллелограмма (рис. 7.34). Проведены прямые MO и NO, пересекающие прямые AD и AB соответственно в точках P и Q. Докажите, что точки M, N, P и Q — вершины параллелограмма.

7.157. Докажите, что объединение данного треугольника и треугольника, ему симметричного относительно середины какой-либо его стороны, является параллелограммом.

7.158. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины отрезков AO, BO, CO, DO соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

7.159. $DEBF$ — параллелограмм, $AE = CF$. Докажите, что и $ABCD$ — параллелограмм (рис. 7.35).

7.160. $ABCD$ — параллелограмм, $AM = CN$. Докажите, что $MBND$ — параллелограмм (рис. 7.36).

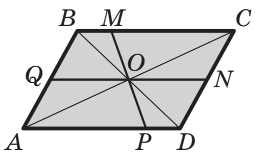


Рис. 7.34

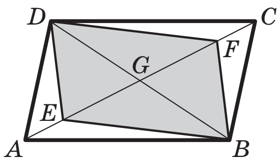


Рис. 7.35

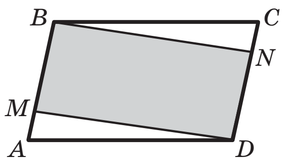


Рис. 7.36

7.161. $ABCD$ — параллелограмм, $AM = CN$. Докажите, что $MBND$ — параллелограмм (рис. 7.37).

7.162. $ABCD$ — параллелограмм, $AM \perp BD$, $CN \perp BD$. Докажите, что: 1) $AM = CN$; 2) $BN = DM$; 3) $AMCN$ — параллелограмм (рис. 7.38).

7.163. Вне параллелограмма $ABCD$ с острым углом A построены равносторонние треугольники ABM, DCT. Докажите, что $AMCT$ — параллелограмм.

7.164. На сторонах AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что

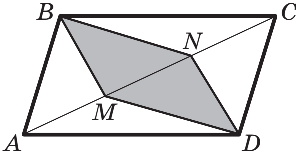


Рис. 7.37

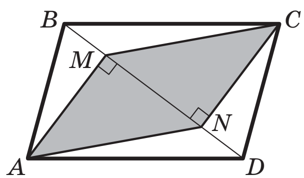


Рис. 7.38

$AM = CP$, $BN = DQ$, $BM = DP$, $NC = QA$. Докажите, что $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.

7.165. В четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$, $AB = DC$. Отрезок MN (M принадлежит DC, N — AB, $AN = CM$) пересекается с отрезком AC в точке K. Докажите, что $MK = KN$.

7.166. Дан параллелограмм $ABCD$. Через точку пересечения его диагоналей проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD в точках E и F соответственно, а другая — стороны BC и AD в точках G и H. Докажите, что четырехугольник $EGFH$ — параллелограмм.

7.167. Постройте параллелограмм, если даны две стороны и угол между ними.

7.168. Постройте параллелограмм, если даны сторона, диагональ и угол между ними.

7.169. Постройте параллелограмм по двум сторонам и диагонали.

7.170. Постройте параллелограмм по двум сторонам в 2 и 5 см, если известно, что одна из его диагоналей перпендикулярна меньшей стороне.

7.171. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

7.172. Постройте параллелограмм, если даны две диагонали и угол между ними.

7.173. Постройте параллелограмм по стороне и двум диагоналям.

7.174. Постройте параллелограмм по двум сторонам 3 и 5 см и высоте, равной 2 см. (Два решения.)

7.175. Постройте параллелограмм по двум сторонам 3 и 5 см и высоте, равной 4 см.

7.176. Постройте параллелограмм по двум сторонам 3 и 5 см и высоте, равной 6 см.

7.177. Постройте параллелограмм по острому углу и двум высотам.

7.178. Постройте параллелограмм по высоте и двум диагоналям.

7.179. Постройте параллелограмм по стороне, прилежащему к ней углу и диагонали, выходящей из вершины другого угла. Сколько решений может иметь задача?

7.180. Постройте параллелограмм, если даны две высоты, проведенные из одной вершины, и сторона.

7.181. Постройте параллелограмм по периметру, диагонали и противолежащему ей углу.

7.182. Постройте параллелограмм по стороне, сумме длин диагоналей и углу между ними.

7.183. Две доступные точки A и B разделены препятствием. Найдите расстояние между ними, пользуясь одним из признаков параллелограмма.

7.184. Найдите расстояние между недоступными точками A и B.

7.185. Для определения расстояния между недоступными точками A и B, расположенными на другом берегу реки (рис. 7.39), на местности провешивают произвольную прямую MN и отмечают на ней такие точки K и L, что $AK \perp MN$ и $BL \perp MN$. Разделив полученный таким образом отрезок KL пополам точкой O, провешивают через точку O прямые AO и BO. Докажите, что полученный таким образом отрезок CD равен искомому отрезку AB.

7.186. Докажите, что четырехугольник, у которого диагонали в точке пересечения делятся пополам, — параллелограмм.

7.187. Докажите, что каждый четырехугольник, имеющий центр симметрии, — параллелограмм.

7.188. Постройте центр симметрии параллелограмма, вершины которого недоступны.

7.189. Через внутреннюю точку угла ABC, $\angle ABC < 180°$, проведите прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, делился этой точкой пополам.

7.190. Дан шестиугольник, у которого противоположные стороны равны и параллельны. Докажите, что диагонали этого шестиугольника, соединяющие его «противоположные вершины», пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

7.191. $ABCD$ — параллелограмм, $AE = AF = CK = CN$. Докажите, что E, F, N, K — вершины параллелограмма (рис. 7.40).

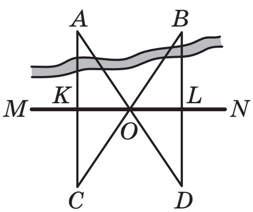


Рис. 7.39

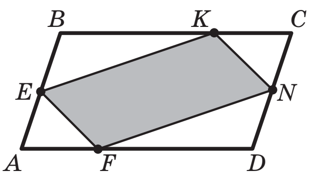


Рис. 7.40

7.192. На сторонах параллелограмма $ABCD$ отложены, как указано на рисунке 7.41, *а*, *б* равные отрезки AM, DN, CP, BQ. Докажите, что точки M, N, P и Q являются вершинами параллелограмма.

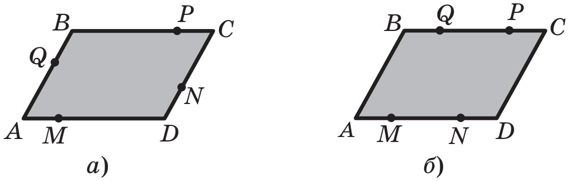


Рис. 7.41

7.193. $ABCD$ — параллелограмм. На его сторонах AB и CD равные отрезки AE и CF, а на сторонах BC и AD — равные отрезки BG и DH. Докажите, что четырехугольник $EGFH$ — параллелограмм.

7.194. При пересечении биссектрис углов параллелограмма образовался четырехугольник. Докажите, что этот четырехугольник является параллелограммом.

7.195. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри параллелограмма, до прямых, на которых лежат его стороны, — величина постоянная для данного параллелограмма. Чему она равна?

7.196. Докажите, что если каждый угол выпуклого четырехугольника равен противолежащему углу, то этот четырехугольник — параллелограмм.

7.197. На каждой стороне одного параллелограмма лежит одна из вершин другого параллелограмма. Докажите, что точки пересечения диагоналей у этих параллелограммов совпадают.

7.198. 1. Даны два параллелограмма. На каждой стороне одного из них лежит одна вершина другого. Докажите, что эти параллелограммы имеют общий центр симметрии.

2. Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $DKBL$ (рис. 7.42) имеют общий центр симметрии.

7.199. На рисунке 7.43 $ABCD$ — параллелограмм, KL — биссектриса его внешних углов с вершиной A, точка K принадле-

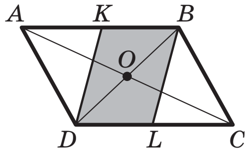


Рис. 7.42

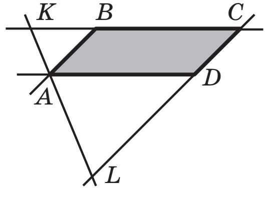


Рис. 7.43

жит прямой BC, а L — CD. Докажите, что треугольник KCL равнобедренный и сумма его боковых сторон равна периметру параллелограмма $ABCD$.

7.200. К сторонам параллелограмма проведены серединные перпендикуляры, пересекающие противоположные стороны или их продолжения в точках K, L, M, N (рис. 7.44). Докажите, что: а) четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм; б) центры симметрии параллелограммов $ABCD$ и $KLMN$ совпадают.

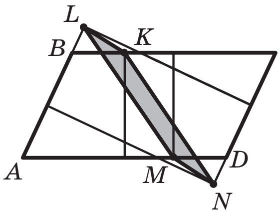


Рис. 7.44

7.201. Докажите, что медиана треугольника, заключенная между его неравными сторонами, образует с меньшей из этих сторон угол больший, чем с другой стороной.

7.202. Сколько параллелограммов образуется при пересечении: а) трех параллельных прямых другими тремя параллельными прямыми; б) четырех параллельных прямых другими четырьмя параллельными прямыми; в) n параллельных прямых другими n параллельными прямыми?

7.203. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько существует параллелограммов, для которых эти точки служат вершинами?

26. Ромб

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Параллелограмм, все стороны которого равны, называется *ромбом*.

ТЕОРЕМА. *Прямая, содержащая диагональ ромба, является его осью симметрии.*

Следствие 1. Диагонали ромба делят его углы пополам.

Следствие 2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

7.204. На рисунке 7.45 изображен ромб $ABCD$.

1. Назовите его равные стороны.
2. Назовите его равные углы.
3. Назовите его диагонали.
4. Назовите его центры симметрии.
5. Назовите его оси симметрии.

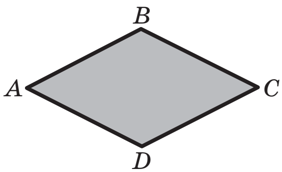


Рис. 7.45

7.205. Дан ромб $ABCD$. O — точка пересечения его диагоналей.

На какие точки переходят вершины ромба при симметрии относительно: а) прямой AC; б) прямой BD; в) точки O?

7.206. Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Назовите образ треугольника ABO при симметрии относительно: а) прямой AC; б) прямой BD; в) точки O.

7.207. Какие определения можно дать ромбу?

7.208. Существуют ли изометрии, переводящие ромб в себя?

7.209. Может ли длина стороны ромба равняться половине длины его диагонали?

7.210. Может ли диагональ ромба быть: а) перпендикулярна его стороне; б) равна его стороне?

7.211. Существует ли точка, равноудаленная: а) от всех вершин ромба; б) от всех сторон ромба?

7.212. В каждом случае выберите тот ответ, при котором утверждение становится верным.

1. Если диагонали четырехугольника делят друг друга пополам, то этот четырехугольник есть: а) ромб; б) квадрат; в) параллелограмм; г) прямоугольник.

2. Фигура, получающаяся при соединении середины смежных сторон произвольного четырехугольника, — это: а) прямоугольник; б) параллелограмм; в) ромб; г) ни первое, ни второе, ни третье.

3. Биссектрисы противоположных углов параллелограмма, не являющегося ромбом: а) параллельны; б) лежат на одной прямой; в) перпендикулярны.

7.213. Приведите примеры, опровергающие высказывания:

а) если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то такой четырехугольник — ромб;

б) если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны и равны, то такой четырехугольник — ромб.

7.214. Какое условие должно быть добавлено к условию а) задачи **7.213**, чтобы четырехугольник был ромбом?

7.215. Как проверить, является ли вырезанный из картона четырехугольник ромбом?

7.216. Швея вырезала из материи четырехугольник, который должен быть ромбом. Как проверить правильность изготовления выкройки (не пользуясь никакими инструментами)?

7.217. Сторона ромба равна 4 см. Вычислите периметр ромба.

7.218. Вычислите периметр ромба, один из углов которого равен 60°, а длина меньшей диагонали 8 см.

7.219. Найдите все углы ромба, если его сторона равна диагонали.

7.220. Диагонали ромба $KMNP$ пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника KOM, если $\angle MNP = 80°$.

7.221. Из вершины B ромба $ABCD$ проведены перпендикуляры BK и BM к прямым AD и DC. Докажите, что луч BD является биссектрисой $\angle KBM$.

7.222. Сторона ромба $ABCD$ равна 2 см, $\angle D = 120°$ (рис. 7.46). Найдите расстояния AM, MD, BD. Докажите, что треугольник MBN равносторонний.

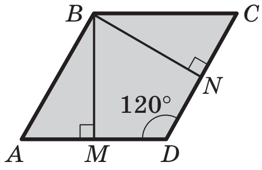


Рис. 7.46

7.223. Найдите углы ромба, если основание перпендикуляра, опущенного из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам.

7.224. Периметр ромба равен 16 см, расстояние между противолежащими сторонами 2 см. Найдите углы ромба.

7.225. Найдите углы, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, если один из углов ромба равен 45°.

7.226. Найдите углы ромба, если его диагонали составляют с его стороной углы, один из которых на 30° меньше другого.

7.227. Углы, образуемые стороной ромба с его диагоналями, относятся 4 : 5. Найдите углы ромба.

7.228. Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

7.229. Докажите, что параллелограмм, у которого две смежные стороны равны, есть ромб.

7.230. Докажите, что если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.

7.231. Докажите, что четырехугольник, у которого все стороны равны, является ромбом.

7.232. Докажите, что четырехугольник $ABCD$, для которого прямые AC и BD являются осями симметрии, — ромб.

7.233. Докажите, что если каждая диагональ четырехугольника делит пополам два его угла, то этот четырехугольник является ромбом.

7.234. Верно ли следующее утверждение: «Если диагонали четырехугольника равны и перпендикулярны, то этот четырехугольник — квадрат»?

7.235. Докажите, что ромб, у которого один угол прямой, является квадратом.

7.236. Как проверить, является ли вырезанный из картона четырехугольник ромбом?

7.237. Через точку пересечения диагоналей ромба проведены перпендикуляры к его сторонам. Докажите, что точки пересечения этих перпендикуляров со сторонами ромба являются вершинами прямоугольника.

7.238. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 — середины сторон ромба $ABCD$ (рис. 7.47). Докажите, что четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ есть прямоугольник.

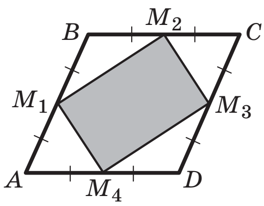


Рис. 7.47

7.239. Пусть в ромбе $ABCD$ (см. рис. 7.47) точки M_1, M_2, M_3, M_4 — середины его сторон. Докажите, что точки B и D лежат на одной прямой с серединами отрезков: а) M_1M_2 и M_3M_4; б) M_1M_3 и M_2M_4.

7.240. В параллелограмме $ABCD$ ($AD > AB$) биссектрисы углов A и B пересекают стороны параллелограмма BC и AD в точках K и L соответственно. Докажите, что четырехугольник $ABKL$ — ромб.

7.241. В ромбе $ABCD$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC и диагональ BD соответственно в точках M и N. Найдите угол ANB, если $\angle AMC = 120°$.

7.242. Докажите, что почтовый конверт (стандартный) склеивается из листа бумаги, имеющего форму ромба (припуски на склеивание не учитывать).

7.243. Постройте ромб: а) по стороне и диагонали; б) по диагоналям; в) по стороне и углу; г) по диагонали и углу.

7.244. Постройте ромб, если заданы точка пересечения его диагоналей и две соседние вершины.

7.245. Постройте ромб, если заданы точка пересечения его диагоналей и середины двух смежных сторон.

7.246. Постройте ромб: а) по стороне и диагонали; б) по диагоналям; в) по стороне и углу; г) по диагонали и углу; д) по диагонали и высоте.

7.247. Через три данные точки проведите параллельные прямые так, чтобы две из них были одинаково удалены от третьей. Как должны быть расположены эти точки, чтобы задача имела решение? Сколько различных решений может иметь задача?

7.248. Вычислите углы ромба, если высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противоположную сторону на равные отрезки.

7.249. Докажите, что перпендикуляры, проведенные через середины сторон ромба к этим сторонам, пересекаются в одной точке или образуют ромб. Каково взаимное расположение осей симметрии этих ромбов?

И **7.250.** Из одинаковых дощечек формы ромба выкладывают паркет (рис. 7.48), начиная от центра O зала. Возможно ли продолжить дальнейшую укладку паркета такими же дощечками? Если возможно, то укажите углы ромбов и наметьте варианты дальнейшей укладки.

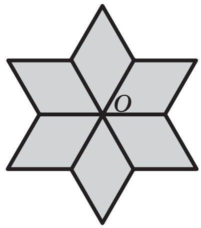


Рис. 7.48

7.251. С помощью одной двусторонней линейки (т. е. линейки с двумя параллельными краями) постройте: а) ось симметрии двух данных точек A и B (ширина линейки меньше AB); б) биссектрису угла; в) прямую, перпендикулярную данной прямой.

7.252. В равнобедренном треугольнике ABC отмечены середины боковых сторон M и K и их проекции на основание M_1 и K_1. Через отмеченные точки проведены две прямые MK_1 и KM_1 (рис. 7.49). Покажите, как из полученных частей *1*, *2*, *3* и *4* можно сложить ромб.

7.253. В ромбе $ABCD$ угол A равен 60°. Докажите, что если один из углов треугольника BMN (рис. 7.50) равен 60°, то и остальные его углы тоже равны по 60°.

7.254. Разрежьте прямоугольник по прямой, проходящей через его центр так, чтобы из полученных двух кусков можно было составить ромб.

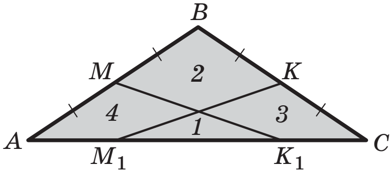


Рис. 7.49

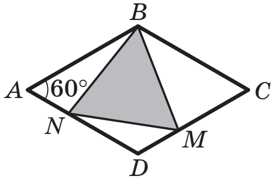


Рис. 7.50

7.255. Пол в комнате, имеющий форму правильного шестиугольника со стороной 10, заполнен плитками в форме ромба со стороной 1 и острым углом 60°. Разрешается вынуть три плитки, составляющие правильный шестиугольник со стороной 1, и заменить их расположение другим (рис. 7.51). Докажите, что из любого расположения плиток такими операциями можно получить любое другое.

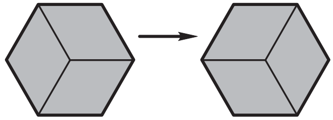


Рис. 7.51

27. Трапеция

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны, называется *трапецией*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Трапеция, боковые стороны которой равны, называется *равнобедренной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Трапецию, один из углов которой прямой, называют *прямоугольной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией трапеции*.

ТЕОРЕМА. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям, а длина ее равна полусумме длин оснований.*

ТЕОРЕМА. *В равнобедренной трапеции углы при основании равны.*

7.256. Сколько у трапеции параллельных сторон?

7.257. Чему равна сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне?

7.258. Чему равна сумма всех углов трапеции?

7.259. Сколько диагоналей имеет трапеция?

7.260. Могут ли у трапеции быть: а) три прямых угла; б) три острых угла?

7.261. Могут ли у трапеции быть равны: а) две стороны; б) три стороны; в) четыре стороны?

7.262. Могут ли у трапеции быть равными диагонали?

7.263. Являются ли следующие утверждения признаком того, что данный четырехугольник: трапеция? параллелограмм? прямоугольник? ромб? квадрат? (Каждую из этих возможностей рассмотрите отдельно.)

1. Все четыре стороны равны.
2. Две его стороны параллельны.
3. Две его стороны равны.

4. Его диагонали делят друг друга пополам.
5. Его диагонали равны и делят друг друга пополам.
6. Все его углы равны.
7. Его диагонали равны и перпендикулярны.
8. Все его стороны равны и все углы равны.
9. Каждые два его противоположных угла равны.
10. Каждая диагональ делит пополам два его угла.

7.264. Углы при одном основании трапеции равны 68° и 74°. Вычислите остальные углы трапеции.

7.265. Диагональ BD трапеции $ABCD$ перпендикулярна стороне AB, $\angle BAD = 40°$. Вычислите остальные углы трапеции, если меньшее основание трапеции равно другой боковой стороне.

7.266. Могут ли величины углов трапеции, взятые в последовательном порядке, относиться как числа: а) 6, 3, 4, 2; б) 8, 7, 13, 12?

7.267. Докажите, что в трапеции: а) не может быть трех прямых углов; б) сумма трех углов не может равняться 180°.

7.268. Докажите следующие утверждения:

1. Сумма боковых сторон трапеции больше разности оснований.
2. Сумма диагоналей трапеции больше суммы оснований.
3. Разность оснований больше разности боковых сторон.
4. Диагонали трапеции точкой их пересечения не делятся пополам.

7.269. В трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно 4 см. Через вершину B проведена прямая, параллельная стороне CD. Периметр образовавшегося треугольника равен 12 см. Найдите периметр трапеции.

7.270. Докажите, что если обе непараллельные стороны трапеции равны одной из параллельных сторон, то диагонали этой трапеции делят пополам углы при другой параллельной стороне.

7.271. Докажите, что в равнобедренной трапеции равны: а) диагонали; б) углы при основании.

7.272. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники ABO и CDO равны.

7.273. Докажите, что трапеция равнобедренная: а) если углы при ее основании равны; б) если ее диагонали равны.

7.274. Докажите, что у равнобедренной трапеции сумма противолежащих углов равна $180°$.

7.275. Докажите, что середины сторон равнобедренной трапеции являются вершинами ромба.

7.276. Высота, проведенная из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, делит большее основание на части, имеющие длины 5 и 2 см. Вычислите среднюю линию этой трапеции.

7.277. Докажите, что перпендикуляр, проведенный к основанию равнобедренной трапеции через его середину, является осью симметрии этой трапеции.

7.278. Меньшее основание трапеции имеет длину 6,2 см, расстояние между серединами диагоналей равно 4 см. Найдите длину большего основания.

7.279. Длина средней линии трапеции равна 10 см. Одна из диагоналей делит ее на два отрезка, разность длин которых равна 2 см. Вычислите длины оснований этой трапеции.

7.280. Длины оснований трапеции равны 4 и 10 см. Найдите длины отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

7.281. Докажите, что средняя линия трапеции делит пополам обе ее диагонали.

7.282. $ABCD$ — трапеция, у которой $AB \parallel CD$, а EF — средняя линия (рис. 7.52). Найдите:

а) если $AB = 12$, $DC = 7$, то $EF = \dots$;

б) если $AB = 14$, $DC = 14$, то $EF = \dots$;

в) если $DC = 6$, $EF = 14$, то $AB = \dots$;

г) если $AB = 27$, $EF = 18$, то $DC = \dots$.

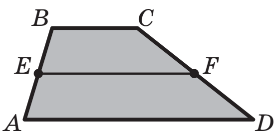


Рис. 7.52

7.283. Дан четырехугольник. Середины его сторон последовательно соединены отрезками. Определите вид полученного четырехугольника, если данный четырехугольник: а) не трапеция и не параллелограмм; б) трапеция; в) параллелограмм (отличный от ромба и прямоугольника); г) прямоугольник (отличный от квадрата); д) ромб (отличный от квадрата); е) квадрат.

7.284. Постройте трапецию $ABCD$ ($AB \parallel BC$) по следующим элементам: а) $AD = 12$ см, $AB = 6$ см, $CD = 8$ см, $\angle A = 35°$; б) $AD = 10$ см, $AB = 5$ см, $CD = 6$ см, $BD = 8$ см; в) $AD = 12$ см, $BC = 2{,}8$ см, $\angle D = 35°$, $\angle A = 40°$; г) $AD = a$, $BC = b$, $AC = c$, $AB = d$.

7.285. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

7.286. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

7.287. Постройте равнобедренную трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$) по следующим элементам: 1) AD, AB, $\angle A$; 2) AD, BC, AC; 3) AD, AB, AC; 4) AD, AC и высоте h.

7.288. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей равнобедренной трапеции и точку пересечения продолжений боковых сторон, перпендикулярна основаниям трапеции и делит их пополам.

7.289. В трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно 4 см. Через вершину B проведена прямая, параллельная стороне CD. Периметр образовавшегося треугольника равен 12 см. Вычислите периметр трапеции.

7.290. В равнобедренной трапеции один из углов равен $60°$, боковая сторона равна 24 см, а сумма оснований равна 44 см. Вычислите длины оснований трапеции.

7.291. Вычислите периметр равнобедренной трапеции, если известно, что один из ее углов равен $60°$, а основания равны 15 и 49 см.

7.292. В трапеции боковые стороны равны меньшему основанию, диагональ составляет с основанием угол $30°$. Вычислите углы трапеции.

7.293. Концы отрезка, расположенного по одну сторону прямой, удалены от нее на 8 и 15 см. На каком расстоянии от прямой находится середина этого отрезка?

7.294. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам. Периметр трапеции равен 132 см, а основания относятся как $2 : 5$. Вычислите длину средней линии трапеции.

7.295. В прямоугольной трапеции один из углов равен $135°$, средняя линия равна 18 см, а основания относятся как $1 : 8$. Вычислите меньшую боковую сторону трапеции.

7.296. Основания трапеции равны a и b, сумма углов при основании a равна $90°$. Вычислите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

7.297. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей этой трапеции.

7.298. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция (или параллелограмм).

7.299. Основания трапеции равны a и b. Отрезок длиной c, параллельный основаниям, имеет концы на боковых сторонах этой трапеции. В каком отношении этот отрезок делит боковые стороны трапеции ($a < c < b$)?

7.300. Построить трапецию по боковым сторонам, углу между ними, а также углу между ее диагоналями.

7.301. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равны углы ABD и ACD. Докажите, что эта трапеция равнобедренная.

7.302. Докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения продолжений ее боковых сторон, делит пополам основания трапеции.

7.303. На плоскости даны две параллельные прямые и точка A. С помощью одной линейки проведите через точку A прямую, параллельную данным.

7.304. На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка K так, что $BK = \lambda BC$. Пусть P — точка пересечения прямых AB и CD, M — точка пересечения AK и BD. Прямая PM пересекает BC в точке N. Докажите, что $BN = \dfrac{\lambda}{\lambda + 1} BC$.

Используя этот результат, покажите, как с помощью одной линейки разделить данный отрезок на n равных частей, если дана прямая, параллельная этому отрезку.

7.305. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.

7.306. Разрежьте квадрат на непрямоугольные трапеции.

7.307. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание AD равно диагонали AC. Известно, что $\angle CAD = \angle CDM$, где M — середина BC. Найдите углы трапеции.

7.308. Дана трапеция $ABCD$ (рис. 7.53); $AB \parallel CD$, K — точка пересечения биссектрис внешних углов A и D трапеции, L — точка пересечения биссектрис внешних углов B и C трапеции. Вычислите периметр трапеции $ABCD$, если $KL = 25$ см.

7.309. Если биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на втором ее основании, то длина второго основания равна сумме длин боковых сторон трапеции. Докажите.

7.310. Докажите, что длина отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции, равна полуразности длин ее оснований.

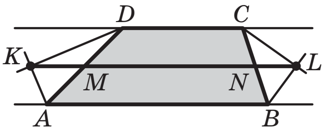


Рис. 7.53

7.311. По одну сторону отрезка AB длины a построены два квадрата $AMNP$ и $MBKL$, точка M принадлежит отрезку AB (рис. 7.54). Какой фигурой является множество середин (точка D) всех отрезков, соединяющих центры квадратов $AMNP$ и $MBKL$?

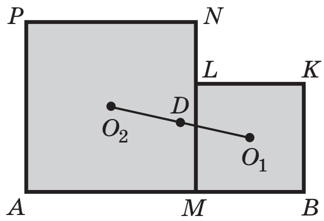


Рис. 7.54

7.312. В трапеции $ABCD$ каждое из оснований AD и BC продолжено в обе стороны. Биссектрисы внешних углов A и B трапеции пересекаются в точке K, а внешних углов C и D — в точке E. Найдите периметр трапеции, если $KE = 2a$.

7.313. Найдите величину угла между боковыми сторонами трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна полуразности их длин.

7.314. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, диагонали взаимно перпендикулярны и $\frac{AD}{BC} = k$. Найдите отношение $\frac{BD}{AC}$.

7.315. Длины оснований трапеции равны a и b. Через точку пересечения ее диагоналей проведена прямая параллельно основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции.

7.316. Диагонали трапеции с основаниями a и b взаимно перпендикулярны. Какие значения может принимать высота трапеции?

7.317. Основания равнобедренной трапеции — 4 и 8 см, ее площадь — 21 см^2. Какую сторону пересекает биссектриса угла при большем основании: меньшее основание или боковую сторону трапеции?

И

7.318. Как разрезать трапецию: 1) на две части, чтобы из них можно было сложить параллелограмм; 2) на две части, чтобы из них можно было сложить треугольник; 3) на три части, чтобы из них можно было сложить прямоугольник?

7.319. Периметр четырехугольника $ABCD$ равен 10, его стороны AB и CD параллельны. Найдите длины всех сторон четырехугольника, если известно, что биссектрисы углов A и B четырехугольника делят сторону BD на три равные части, а биссектрисы углов C и D делят сторону AB на три равные части.

Тема 8

МНОГОУГОЛЬНИКИ

28. Понятие многоугольника

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Объединение замкнутой ломаной и ограниченной ею части плоскости называют *многоугольником*.

Ломаная L называется *границей многоугольника*, а ее внутренняя область — *внутренней областью многоугольника*. Звенья границы многоугольника называются *сторонами многоугольника*, а вершины — *вершинами многоугольника*. У любого многоугольника есть *периметр — сумма длин сторон многоугольника*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отрезок, соединяющий две несоседние вершины многоугольника, называется его *диагональю*.

В геометрии различают *выпуклые* и *невыпуклые* многоугольники.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

Термины и обозначения

Если в тексте задачи написано многоугольник, то будем считать, что он выпуклый; о рассмотрении невыпуклых многоугольников в тексте задачи должно быть сказано особо.

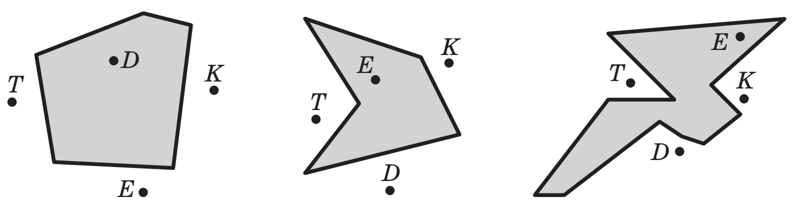
Иногда, говоря о сторонах или углах многоугольника, имеют в виду их величины.

8.1. Назовите известные вам многоугольники.

8.2. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины: а) четырехугольника; б) пятиугольника; в) шестиугольника; г) n-угольника?

8.3. Сколько диагоналей имеет: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник; г) n-угольник?

8.4. Принадлежат ли точки D и K и точки E и T одной и той же (внутренней или внешней) области многоугольника (рис. 8.1, *а—в*)?



а) *б*) *в*)

Рис. 8.1

8.5. Какие из фигур, изображенных на рисунке 8.2, *а—д*, являются многоугольниками?

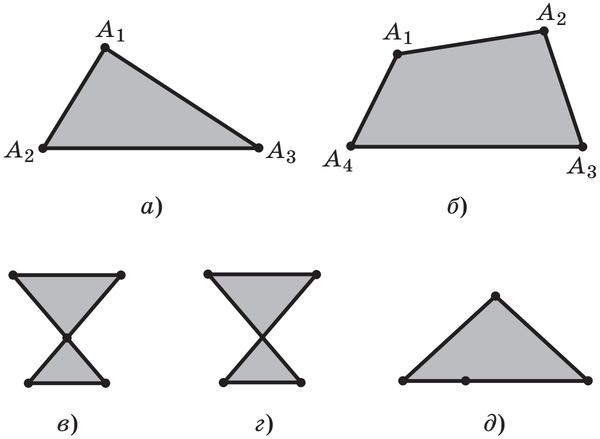


Рис. 8.2

8.6. Какие из фигур, изображенных на рисунке 8.3, *а—з*, являются шестиугольниками? Какие из них являются выпуклыми шестиугольниками?

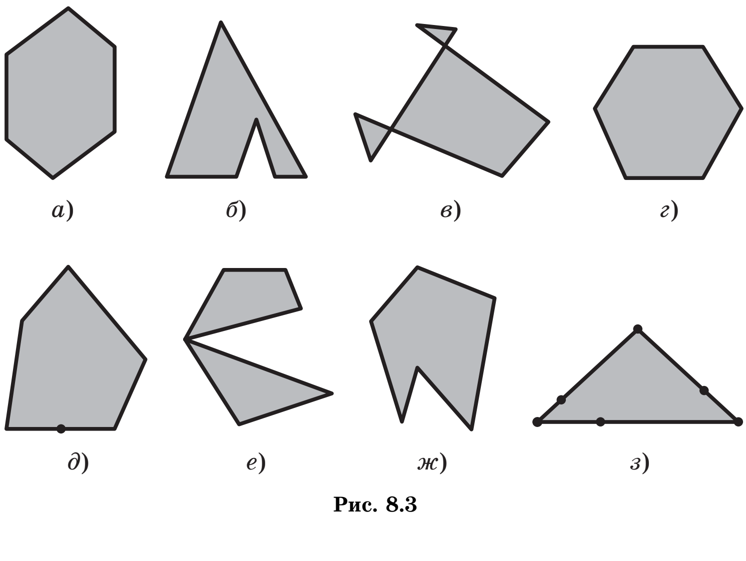


Рис. 8.3

8.7. Объясните, почему фигура на рисунке 8.4 не является выпуклым многоугольником.

8.8. Является ли выпуклой фигурой треугольник?

8.9. Является ли выпуклой фигурой четырехугольник?

8.10. Всякий ли многоугольник имеет диагонали?

8.11. Верно ли, что любой многоугольник содержит все свои диагонали?

8.12. Сколько вершин может иметь многоугольник, если он является пересечением: а) двух углов; б) двух треугольников?

8.13. Какие из следующих фигур — выпуклые: а) угол; б) прямая; в) луч; г) отрезок; д) полуплоскость; е) плоскость; ж) треугольник; з) четырехугольник?

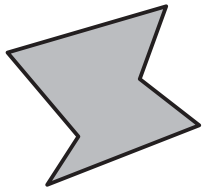


Рис. 8.4

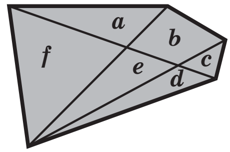


Рис. 8.5

8.14. а) Сколько треугольников изображено на рисунке 8.5? б) Назовите несколько многоугольников, изображенных на рисунке 8.6.

8.15. Какая фигура является объединением: а) треугольников ABC и ACD; б) треугольников AED и ACD; в) пятиугольника $ABCDE$ и треугольника ABC; г) четырехугольников $ABCD$ и $ACDE$ (рис. 8.7)?

8.16. Какая фигура является пересечением: а) треугольников ABC и ADC; б) треугольников ABC и ADE; в) пятиугольников $ABCDE$ и треугольника ACD; г) четырехугольников $ABCD$ и $ACDE$; д) треугольника ABC и отрезка CD (см. рис. 8.7)?

8.17. На сколько треугольников разбивается: а) пятиугольник диагоналями, проведенными из одной его вершины; б) n-угольник диагоналями, проведенными из одной его вершины?

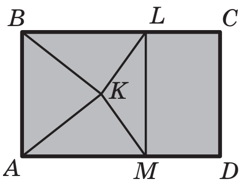


Рис. 8.6

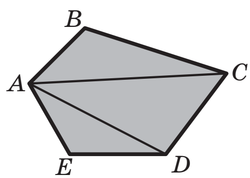


Рис. 8.7

8.18. Начертите: четырехугольник, пятиугольник. Выполните необходимые измерения и вычислите периметры построенных многоугольников.

8.19. Начертите выпуклый и невыпуклый многоугольники. Объясните, чем они отличаются друг от друга.

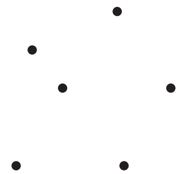
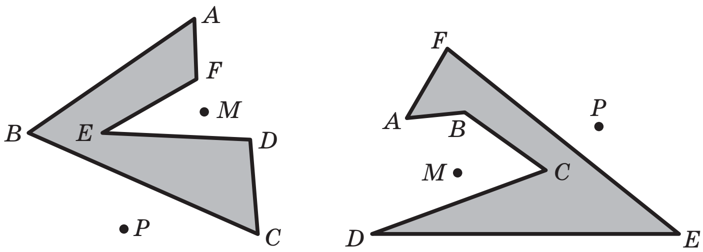


Рис. 8.8

8.20. Соедините отрезками точки, указанные на рисунке 8.8 так, чтобы в результате получился многоугольник.

8.21. Задана замкнутая ломаная $ABCDEF$ (рис. 8.9, *а*, *б*). Проведите какую-нибудь ломаную, концы которой находятся в точках M и P, не пересекающую ломаную $ABCDEF$.



а) *б*)

Рис. 8.9

8.22. Внутри многоугольника, все стороны которого равны, взята точка M. Докажите, что сумма расстояний от точки M до прямых, на которых лежат стороны многоугольника, есть величина постоянная, не зависящая от положения точки M.

8.23. Постройте четырехугольник, если даны его стороны a, b, c, d и диагональ l.

8.24. Постройте четырехугольник, если даны его диагонали m и n, угол α между ними и сторона a, лежащая против этого угла.

8.25. Существует ли многоугольник, число диагоналей которого: а) в два раза больше числа сторон; б) в два раза меньше числа сторон; в) в три раза меньше числа сторон?

8.26. Какой вид имеет четырехугольник, если проекции его сторон на каждую из диагоналей равны?

8.27. Пользуясь данными, указанными на рисунках 8.10, *а—в* (равные отрезки отмечены одинаковым числом черточек, параллельные прямые — одинаково направленными стрелками), докажите, что: 1) $\frac{DF}{FC} = \frac{1}{2}$ (рис. 8.10, *а*); 2) $\frac{BH}{HF} = \frac{HF}{FC} = 1$ (рис. 8.10, *б*); 3) $\frac{CF}{CB} = \frac{1}{3}$ (рис. 8.10, *в*).

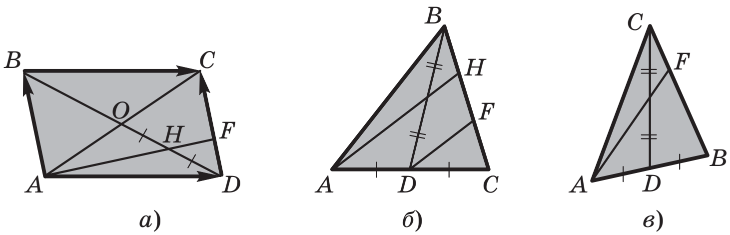
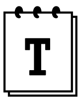


Рис. 8.10



8.28. То, что граница многоугольника (замкнутая ломаная) разбивает точки плоскости на два множества, называемые внутренностью и внешностью многоугольника, кажется довольно очевидным фактом. Этот факт можно доказать, но доказательство его является весьма трудным. Покажите, что эта теорема играет существенную роль в решении следующей популярной головоломки. Каждый из трех домов A, B и C нужно соединить с магазинами K, M, E (рис. 8.11). Предлагается провести пути, ведущие из каждого дома к каждому магазину так, чтобы никакие два из этих путей не пересекались. (Разумеется, все пути должны лежать в одной плоскости.)

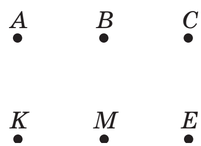


Рис. 8.11

8.29. Никакие два из отрезков, образующих фигуру (рис. 8.12), не имеют общих точек, не являющихся их концами, и никакие два отрезка, имеющие общий конец, не лежат на одной прямой. Тем не менее эта фигура не является многоугольником. Почему?

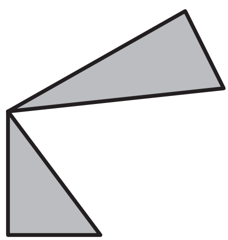


Рис. 8.12

8.30. Сколько треугольников изображено на рисунке 8.13, *а—в*?

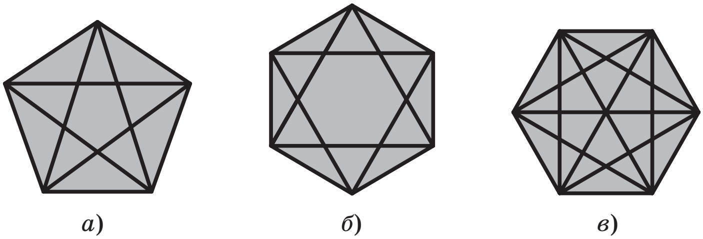


Рис. 8.13

8.31. На рисунке 8.14, *а—в* указаны длины стержней, соединенных шарнирами.

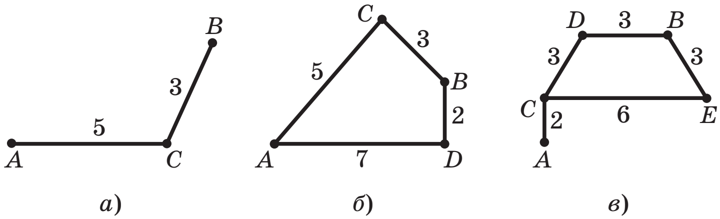


Рис. 8.14

1. Для каждого из этих шарнирных механизмов укажите наибольшее и наименьшее расстояния, на которые можно раздвинуть концы A и B стержней. Покажите на рисунках шарнирные механизмы в этих крайних положениях.

2. Может ли расстояние AB принимать все промежуточные значения между найденными наибольшим и наименьшим расстояниями?

8.32. Существует ли многоугольник, число диагоналей которого: а) равно числу его сторон; б) больше числа его сторон?

8.33. Сколько диагоналей имеет многоугольник: а) со 103 сторонами; б) с n сторонами?

8.34. В многоугольнике проведены все диагонали, соединяющие одну (фиксированную) его вершину со всеми остальными вершинами. Сколько получилось треугольников, если многоугольник имеет: 4 стороны; 5 сторон; 11 сторон; 35 сторон; n сторон?

8.35. Одним и тем же способом можно разделить: четырехугольник на 4 треугольника, пятиугольник — на 5 треугольников и вообще любой n-угольник на n треугольников. Что это за способ?

8.36. Покажите на рисунках у себя в тетради, что объединение двух выпуклых фигур может быть как выпуклой фигурой, так и невыпуклой.

8.37. Докажите, что пересечение двух выпуклых фигур есть фигура выпуклая.

8.38. Докажите, что в многоугольнике длина любой его диагонали не больше половины периметра многоугольника.

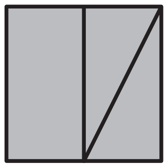
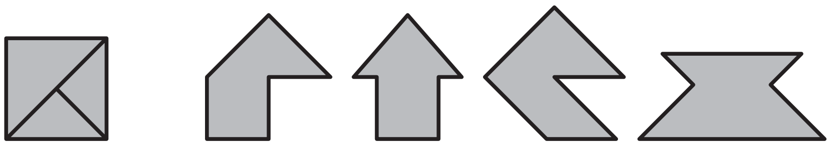


Рис. 8.15

8.39. Вырежьте из картона квадрат и разрежьте его на три части, как показано на рисунке 8.15. Сложите из полученных трех частей, прикладывая их друг к другу, различные фигуры.

8.40. Вырежьте из картона квадрат и разрежьте его на три треугольника, как показано на рисунке 8.16, *а*. Сложите из полученных трех треугольников, прикладывая их друг к другу, фигуры, показанные на рисунке 8.16, *б*. Придумайте еще фигуры, которые можно сложить из этих трех треугольников.



а) *б*)

Рис. 8.16

29. Углы многоугольника

Основное теоретическое содержание

В многоугольнике $ABCD$ рассмотрим вершину A и два луча AB и AD, выходящие из вершины A и содержащие стороны AB и AD данного многоугольника. Два луча с общим началом задают два угла. Тот из углов, которому принадлежит сам многоугольник $ABCD$, называется его *внутренним углом*.

ТЕОРЕМА. *У любого многоугольника каждый угол меньше* $180°$.

ТЕОРЕМА. *Сумма внутренних углов n-угольника равна* $(n - 2) \cdot 180°$.

Термины и обозначения

Для краткости внутренним углом многоугольника иногда называют и *величину* этого *угла*.

8.41. На рисунке 8.17 изображен многоугольник $ABCDEF$. Ответьте на вопросы:

1. Сколько внутренних углов имеет этот многоугольник?

2. Сколько сторон имеет этот многоугольник?

3. Какой вывод можно сделать из рассмотренных пунктов а) и б)?

4. Что можно сказать о величине каждого угла многоугольника?

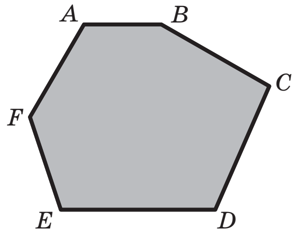


Рис. 8.17

8.42. Сколько у каждого угла многоугольника внешних углов?

8.43. Чему равен внешний угол: а) квадрата; б) прямоугольника; в) правильного пятиугольника?

8.44. Может ли внутренний угол многоугольника иметь величину $120°$?

8.45. Может ли внутренний угол невыпуклого многоугольника иметь величину $120°$?

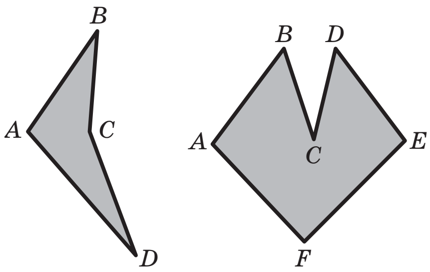
8.46. Назовите углы каждого изображенного многоугольника (рис. 8.18, *а*, *б*).

8.47. Какое наибольшее число острых углов может быть у многоугольника?

8.48. На рисунке 8.19 изображен пятиугольник $ABCDE$, $\angle CDE = 95°$. Найдите величину угла CDM.

8.49. Сколько сторон имеет многоугольник, если каждый угол этого многоугольника равен: 1) $144°$; 2) $150°$; 3) $170°$; 4) $171°$?

8.50. Сколько сторон имеет многоугольник, если сумма его углов равна: 1) $1080°$; 2) $1620°$; 3) $3960°$; 4) $1800°$; 5) $4140°$?



а) *б*)

Рис. 8.18

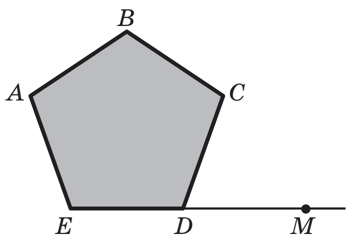


Рис. 8.19

8.51. Может ли сумма углов многоугольников быть равной: 1) 9180°; 2) 3600°; 3) 2040°; 4) 11d; 5) 18d?

8.52. Найдите сумму градусных мер внешних углов: а) пятиугольника; б) шестиугольника.

8.53. Докажите, что не существует многоугольника, у которого: а) больше четырех прямых внешних углов; б) больше трех тупых внешних углов.

8.54. Существует ли такой многоугольник, у которого сумма внутренних углов равна: 1) 540°; 2) 1800°; 3) 1080°; 4) 2000°?

8.55. Существует ли многоугольник с равными углами, у которого один угол равен: 1) 120°; 2) 108°; 3) 80°?

8.56. Все углы n-угольника равны между собой. Найдите величины этих углов, если число сторон равно: а) 3; б) 5; в) 10; г) 12.

8.57. Вычислите сумму величин углов пятиугольника; шестиугольника.

8.58. Найдите сумму величин всех углов восьмиугольника; десятиугольника; двенадцатиугольника; пятнадцатиугольника; двадцатиугольника.

8.59. Вычислите сумму всех внутренних углов: а) невыпуклого четырехугольника; б) невыпуклого пятиугольника.

Т **8.60.** Каково наибольшее число острых углов у многоугольника?

8.61. Докажите, что в четырехугольнике биссектрисы двух углов, прилежащих к одной стороне, образуют угол, величина которого равна полусумме величин двух других углов.

8.62. Докажите, что в четырехугольнике биссектрисы двух противоположных углов образуют углы, один из которых составляет с полуразностью двух других углов угол, равный 180°.

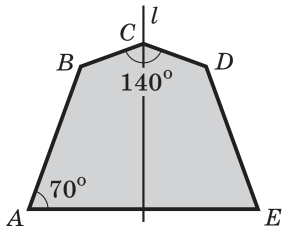


Рис. 8.20

8.63. Многоугольник $ABCDE$ (рис. 8.20) симметричен относительно прямой l, проходящей через вершину C, $\angle A = 70°$, $\angle C = 140°$. Вычислите величину угла B.

8.64. Многоугольник $KLMNPQ$ симметричен относительно прямой KN. Вычислите величины его внутренних углов M, P и Q, если $\angle MNP = 60°$, $\angle LKQ = \angle KLM = 120°$ (рис. 8.21).

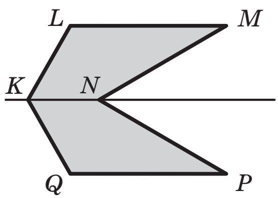


Рис. 8.21

8.65. Сколько сторон имеет многоугольник, если сумма всех его внутренних углов с одним из внешних равна 2250°?

8.66. Вычислите число сторон многоугольника, у которого равны все его внутренние углы, если сумма его внешних углов с одним из внутренних равна 468°.

30. Правильные многоугольники

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многоугольник, у которого все стороны и все углы равны, называется *правильным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Паркетом* называется такое покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют или общую сторону, или общую вершину, или совсем не имеют общих точек.

8.67. На рисунке 8.22 изображен правильный пятиугольник. Каким свойством обладают стороны и углы этого многоугольника?

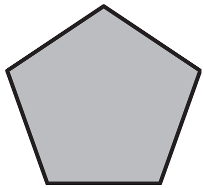


Рис. 8.22

8.68. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. В какие фигуры перейдут при повороте на 72° по часовой стрелке относительно его центра O: а) вершина C; б) вершина A; в) диагональ AC; г) треугольник ACO; д) треугольник ABC?

8.69. Что надо знать о сторонах и углах многоугольника, чтобы утверждать, что он правильный?

8.70. Сколько сторон и углов может иметь правильный многоугольник? Обоснуйте ваш вывод.

8.71. Каждый ли многоугольник, все стороны которого равны и все углы которого прямые, является квадратом?

8.72. Какой четырехугольник (если он существует) является: а) равносторонним, но не правильным; б) равноугольным, но не правильным?

8.73. Сторона правильного пятиугольника равна 2 см. Чему равен периметр этого пятиугольника?

8.74. 1. Вычислите углы правильного n-угольника ($n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$).
2. Вычислите внешние углы правильного n-угольника ($n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$).

8.75. Найдите число сторон правильного многоугольника, если: 1) его угол равен: а) 135°; б) 150°; в) 140°; 2) его внешний угол равен: а) 36°; б) 24°; в) 60°.

8.76. Докажите, что центральный угол правильного многоугольника равен его внешнему углу. (Центральный угол правильного многоугольника — это угол с вершиной в его центре и со сторонами, проходящими через две смежные вершины.)

8.77. Постройте правильный n-угольник по его стороне ($n = 5, 6, 8$).

8.78. Определите величину каждого угла правильного многоугольника: а) с пятью сторонами; б) с девятью сторонами; в) с двенадцатью сторонами; г) с пятнадцатью сторонами; д) с семнадцатью сторонами; е) с двадцатью четырьмя сторонами.

8.79. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если величина одного из его углов равна: а) 128°? б) 140°? в) 144°? г) 160°?

8.80. Нарисуйте многоугольник, у которого все стороны равны и все углы прямые, но не являющийся правильным.

8.81. При каких изометриях переходит в себя: а) правильный пятиугольник; б) правильный шестиугольник?

8.82. 1. Сколько осей симметрии имеет правильный n-угольник?

2. Сколько существует поворотов, переносящих в себя правильный n-угольник?

3. Каждый ли правильный многоугольник имеет центр симметрии?

8.83. Вычислите диагонали правильного пятиугольника со стороной a.

8.84. Докажите, что в правильном шестиугольнике имеются: а) три пары параллельных диагоналей и три диагонали, им перпендикулярные; б) две тройки диагоналей, являющихся сторонами правильного треугольника.

8.85. Докажите, что диагонали правильного пятиугольника при взаимном пересечении образуют правильный пятиугольник.

8.86. 1. Правильный шестиугольник можно получить из двух бумажных лент одинаковой ширины, как это показано на рисунке 8.23. Докажите, что этот шестиугольник правильный.

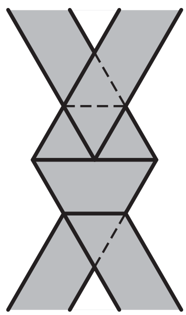


Рис. 8.23

2. Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом, как показано на рисунке 8.24. Покажите, что этот узел имеет форму правильного пятиугольника.

8.87. На рисунке 8.25 изображен правильный звездчатый пятиугольник с острым углом 60°.

1. Как нужно сложить лист бумаги и как должна быть расположена линия разреза, чтобы получить такую фигуру?

2. Как должна проходить линия разреза, чтобы вырезанный пятиугольник оказался бы правильным?

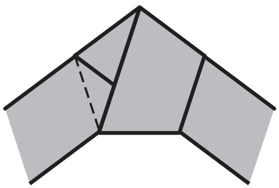


Рис. 8.24

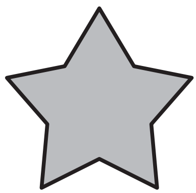


Рис. 8.25

8.88. 1. Стороны правильного треугольника продолжены, как указано на рисунке 8.26, $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 — вершины правильного треугольника.

2. Стороны правильного шестиугольника продолжены, как показано на рисунке 8.27, на одно и то же расстояние. Докажите, что A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 — вершины правильного шестиугольника.

8.89. Докажите, что пятиугольник правильный, если равны все его стороны и три последовательных угла.

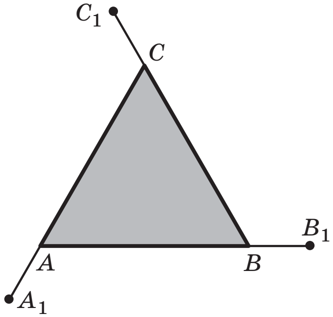


Рис. 8.26

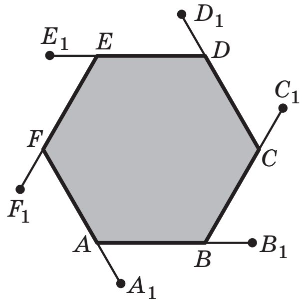


Рис. 8.27

8.90. 1. На сторонах правильного шестиугольника $ABCDEF$, вне его, построены квадраты (рис. 8.28). Докажите, что треугольник BB_1B_2 правильный.

2. На каждой стороне правильного шестиугольника $ABCDEF$, вне его, построены квадраты и их вершины соединены отрезками, как показано на рисунке 8.29. Докажите, что двенадцатиугольник $A_1A_1B_1B_2...F_1F_2$ правильный.

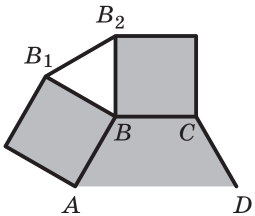


Рис. 8.28

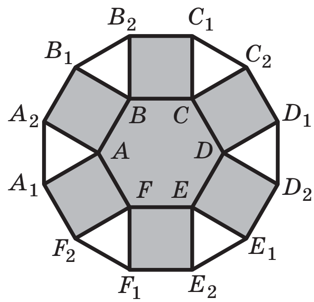


Рис. 8.29

8.91. Найдите отношения сторон правильных многоугольников, которыми можно покрыть без просветов и перекрытий всю плоскость, если этими многоугольниками являются:

а) квадрат и шестиугольник;

б) шестиугольник, квадрат и треугольник;

в) шестиугольник и треугольник;

г) восьмиугольник и квадрат;

д) двенадцатиугольник и треугольник.

Для каждого задания рассмотрите какой-либо один вариант и сделайте соответствующий чертеж.

И **8.92.** Самый простой из правильных паркетов — это разбиение плоскости на квадраты (рис. 8.30). Сколько существует паркетов с таким условием: к каждой вершине паркета примыкают четыре правильных многоугольника и все вершины устроены одинаково (последнее означает, что паркет можно сдвинуть так, что любая его заданная вершина перейдет в любую другую заданную вершину и все линии совпадут)? Это вполне практическая задача.

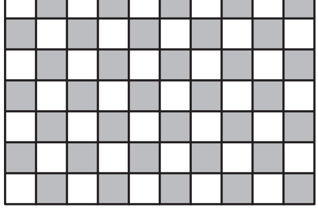


Рис. 8.30

8.93. Известно, что существуют паркеты из правильных треугольников, квадратов и правильных шестиугольников.

1. Можно ли составить паркет из каких-нибудь других многоугольников?

2. Можно ли в паркете заменить правильный треугольник на произвольный?

3. Можно ли в паркете квадрат заменить любым параллелограммом?

4. Можно ли составить паркет из любого четырехугольника?

5. Существует ли паркет из невыпуклых многоугольников с произвольным числом сторон?

Попробуйте составить такие паркеты.

Тема 9

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

31. Определения окружности и круга

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество точек плоскости, находящихся на данном положительном расстоянии от данной точки этой плоскости, называется *окружностью*.

Данная точка называется *центром окружности*. Расстояние от любой точки окружности до ее центра называется *радиусом окружности*. Если продлить радиус окружности за точку O до пересечения с окружностью, то получим отрезок, называемый *диаметром окружности*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Хордой окружности* называется отрезок с концами, лежащими на данной окружности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки этой же плоскости не больше данного положительного расстояния, называется *кругом*.

Для круга понятия радиуса, диаметра и хорды такие же, как и для окружности.

Граница круга есть окружность.

Термины и обозначения

Радиус окружности и круга обычно обозначают буквой r.

Окружность с центром в точке O и радиусом r обозначают так: окр. (O; r), читаем так: «окружность с центром O и радиусом r».

Круг с центром в точке O и радиусом r обозначают так: кр. (O; r), читаем так: «круг с центром O и радиусом r».

Радиусом окружности и круга называют также длину этих отрезков.

9.1. Заполните пропуски.

Множество всех точек ..., находящихся на данном положительном расстоянии от данной точки, называется ... .

9.2. Заполните пропуски.

Множество всех точек ..., расстояние от которых до данной точки не превосходит данного положительного расстояния, называется ... .

9.3. 1. Принадлежит ли окружности ее центр? 2. Принадлежит ли кругу его центр?

9.4. Укажите, верны ли следующие утверждения:

а) все радиусы данной окружности равны;

б) радиус окружности является ее хордой;

в) хорда окружности содержит ровно две ее точки;

г) диаметр круга является его хордой;

д) хорда круга является его диаметром;

е) расстояние между двумя точками, лежащими на окружности, равно длине диаметра этой окружности.

9.5. Радиус окружности равен 5 см. Чему равен диаметр окружности?

9.6. Запишите с помощью знаков $\in$ и $\notin$: а) точка A не принадлежит окр. $(O;\ r)$; б) точка D принадлежит окр. $(O;\ r)$; в) точка L не принадлежит окр. $(O;\ r)$.

9.7. Постройте на листе бумаги окружность радиусом 3 см. Можно ли найти на этой окружности такие точки M и N, для которых: а) $MN = 2$ см; б) $MN = 3$ см; в) $MN = 6$ см; г) $MN = 7$ см?

Отметьте на выполненном рисунке эти точки.

9.8. Нарисуйте окружность.

1. Отметьте на ней точку. Сколько можно провести через нее диаметров; хорд? Какая из этих хорд будет наибольшей; наименьшей?

2. Отметьте точку внутри нарисованной окружности. Сколько можно провести через нее диаметров? хорд?

9.9. Нарисуйте окружность с центром O. Пусть точка X движется по этой окружности. Какую фигуру «заметит» радиус OX, если точка X прошла по окружности: а) некоторую дугу; б) полуокружность; в) всю окружность?

9.10. Нарисуйте окружность.

1. Какую фигуру образуют середины всех ее радиусов?

2. Пусть A — ее центр, а B — точка на окружности. Какую фигуру образуют все точки X, такие, что $AX = 2AB$?

9.11. Отметьте некоторую точку. Нарисуйте фигуру, все точки которой удалены от этой точки на расстояние d (2 см $\leqslant d \leqslant$ 3 см). Как бы вы ее назвали?

Т **9.12.** Дана окр. $(O;\ r)$. Какую фигуру образует множество всех таких точек X плоскости, в которой лежит данная окружность, для которых: а) $OX < r$; б) $OX > r$; в) $OX \geqslant r$; г) $0 < OX \leqslant r$?

9.13. На окружности отмечены 10 точек (рис. 9.1). За один ход играющий проводит отрезок с концами в каких-либо двух из этих точек, но так, чтобы он не пересекал ранее проведенных отрезков. Играют двое, поочередно делая ходы. Тот, кто не может сделать ход, считается проигравшим. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или второй играющий?

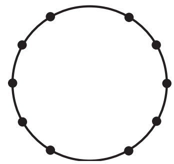


Рис. 9.1

9.14. Условимся считать «расстоянием» между точками A и B окружности длину дуги AB этой окружности, которая не превосходит полуокружности. Выполняются ли для таких «расстояний» на окружности основные свойства расстояний?

9.15. Аккуратно вырежьте из листа бумаги круг. Попробуйте, не перегибая его, найти центр круга.

9.16. Сколько различных сфер можно провести: а) через две данные точки; б) через три данные точки?

32. Взаимное расположение прямой и окружности. Взаимное расположение окружностей

Основное теоретическое содержание

Перечислим условия, определяющие все возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности в зависимости от расстояния между центром окружности и прямой.

1) Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса, то прямая и окружность не имеют общих точек. При этом окружность лежит по одну сторону от прямой.

2) Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, то окружность имеет с прямой единственную общую точку, т.е. прямая *касается окружности*. И в этом случае окружность лежит по одну сторону от прямой.

3) Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса, то прямая пересекает окружность ровно в двух точках. В этом случае прямая *разбивает окружность* на две части.

Пусть мы имеем две окружности с радиусами r_1 и r_2, а расстояние между центрами этих окружностей равно h.

Две окружности в зависимости от соотношений между h, r_1, r_2:

а) $h > r_1 + r_2$ — не имеют общих точек;

б) $h = r_1 + r_2$ — касаются внешним образом;

в) $r_1 - r_2 < h < r_1 + r_2$ — пересекаются в двух точках;

г) $h = r_1 - r_2$ — касаются внутренним образом;

д) $h > r_1 - r_2$ — не имеют общих точек;

е) $h = 0$ — являются концентрическими.

9.17. Как могут быть расположены по отношению друг к другу окружность и прямая; круг и прямая? Постарайтесь рассмотреть все возможные случаи расположения этих фигур. В каждом случае ответьте на вопросы:

1. Какой фигурой является пересечение указанных фигур?
2. Какой фигурой является объединение фигур?

9.18. Верны ли следующие утверждения?

1. Две окружности могут пересекаться ровно в трех точках.
2. Прямая может иметь с окружностью ровно одну общую точку.

9.19. Дана окр. $(O;\ r)$. Какую фигуру образует множество всех таких точек X плоскости, для которых:

а) $OX < r$; б) $OX > r$;

в) $OX \geqslant r$; г) $0 < OX \leqslant r$?

9.20. Каково взаимное расположение двух окружностей, если расстояние между их центрами равно 4 см, а радиусы соответственно равны: а) 1 и 3 см; б) 3 и 5 см; в) 2 и 1 см; г) 3 и 7 см; д) 1 и 4 см; е) 4 и 4 см?

9.21. Отметьте на листе бумаги такие точки A и B, что $AB = 5$ см. Постройте точку X, если известно, что: а) $AX = 3$ см, $BX = 4$ см; б) $AX = 2$ см; $BX = 2$ см; в) $AX = 6$ см, $BX = 1$ см.

9.22. Начертите окружность с центром в точке O и радиусом r и постройте точки, принадлежащие этой окружности и находящиеся на данном расстоянии d: а) от данной вне этой окружности точки M; б) от данной на этой окружности точки B. Сколько решений может иметь каждая из этих задач?

9.23. Постройте две окружности, каждая из которых проходит через центр другой. Сколько общих точек имеют эти окружности? Чему равно расстояние между их центрами?

9.24. Постройте точки, находящиеся на расстоянии a от данной точки A и на расстоянии b от другой данной точки B. При каком условии задача: а) имеет решение; б) не имеет решения?

9.25. Постройте окружность, которая касается данной окружности с центром в точке O и радиусом 2 см в данной точке и имеет радиус, равный: а) 1 см; б) 2 см; в) 3 см. Сколько окружностей можно построить в каждом из этих случаев?

9.26. Постройте окружность, которая: а) касается данной окружности с центром в точке O и радиусом r в данной на ней точке M; б) имеет радиус r_1 и касается данной окружности с центром в точке O_1, и радиусом r_1 в данной на ней точке M. Сколько решений может иметь эта задача?

9.27. Даны две окружности: окр. $(O_1;\ r_1)$ и окр. $(O_2;\ r_2)$, такие, что $r_1 > r_2$. Каким может быть расстояние между их центрами (точками O_1 и O_2), если известно, что: а) у этих окружностей есть общая точка; б) у этих окружностей есть две общие точки; в) эти окружности не имеют общих точек?

9.28. Прямая a пересекает окр. $(O;\ r)$ в точках A и B. Какую фигуру образует множество всех точек X этой прямой, для которых: а) $OX = r$; б) $OX \leqslant r$; в) $OX < r$; г) $OX \geqslant r$; д) $OX > r$; е) $OX \neq r$?

9.29. Кру́га радиусом r внешним образом касаются три одинаковые окружности, касающиеся попарно между собой. Найдите сумму площадей трех криволинейных треугольников, образованных указанными окружностями.

9.30. Окр. $(O_1;\ r_1)$ и окр. $(O_2;\ r_2)$ пересекаются в точках A и B $(r_1 \neq r_2)$. Покажите на рисунке множества точек плоскости:

а) окр. $(O_1;\ r_2) \cup$ окр. $(O_2;\ r_2)$;

б) окр. $(O_1;\ r_1) \cap$ окр. $(O_2;\ r_2)$;

в) кр. $(O_1;\ r_1) \cup$ кр. $(O_2;\ r_2)$;

г) кр. $(O_1;\ r_1) \cap$ кр. $(O_2;\ r_2)$;

д) кр. $(O_1;\ r_1) \cup$ окр. $(O_2;\ r_2)$.

9.31. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую так, чтобы отрезки, отсекаемые на этой прямой окружностями, были равны.

9.32. Окр. $(O_1;\ r_1)$ и окр. $(O_2;\ r_2)$ имеют две общие точки P и T $(r_1 \neq r_2)$. Покажите на рисунке, выполненном в тетради, множество всех таких точек X плоскости, для которых: а) $O_1X < r_1$, $O_2X < r_2$; б) $O_1X \geqslant r_1$, $O_2X \geqslant r_2$; в) $O_1X + O_2X > O_1O_2$.

9.33. Даны две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2, такими, что $r_1 > r_2$. Каким может быть расстояние O_1O_2, если известно, что у этих окружностей: а) есть общая точка; б) есть две общие точки; в) нет общих точек?

9.34. Расстояние от пункта A до пункта B равно 20 км, а от пункта B до пункта C — 12 км. Каким может быть расстояние от пункта A до пункта C? Для случаев, когда это расстояние принимает наибольшее или наименьшее из возможных значений, сделайте рисунок, приняв расстояние в 1 км за 1 см.

9.35. Три походные радиостанции поддерживают между собой связь, если расстояние между ними не превышает 10 км. Две из этих радиостанций расположились в пунктах A и B, расстояние между которыми равно 9 км. Приняв расстояние в 1 км за 1 см, сделайте рисунок, отметьте точки A и B. Определите на рисунке точки, в которых может расположиться третий пункт с радиостанцией так, чтобы поддерживать связь: а) с каждой из радиостанций; б) хотя бы с одной из этих радиостанций.

9.36. Две окружности радиусом r касаются. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиусом R в точках A и B соответственно. Вычислите радиус r, если $AB = 12$ см, $R = 8$ см.

9.37. Через общую точку A двух окружностей с центрами O_1 и O_2 проведена прямая, пересекающая эти окружности в точках M и N. Докажите, что $\angle O_1MB = \angle O_2NB$, где B — вторая общая точка окружностей.

9.38. Даны три окружности: окр. $(O_1;\ r_1)$, окр. $(O_2;\ r_2)$, окр. $(O_3;\ r_3)$. Выразите расстояния O_1O_2, O_2O_3 и O_1O_3 через радиусы r_1, r_2, r_3.

9.39. Известно, что шесть кругов имеют общую точку. Докажите, что хотя бы один из них содержит центр некоторого другого круга.

9.40. Из пяти окружностей каждые четыре имеют общую точку. Докажите, что все пять окружностей имеют общую точку.

9.41. Докажите, что если окр. $(O_1;\ r_1)$ и окр. $(O_2;\ r_2)$ касаются друг друга, то точка касания принадлежит прямой, проходящей через центры этих окружностей.

9.42. Постройте окружность, которая касается двух данных концентрических окружностей. Какой фигурой является множество центров всех таких окружностей?

9.43. Дан треугольник ABC. На сторонах его взяты точки: D и E на AB, F на AC, G на BC. При этом $AD = AC$, $BE = BC$, $AE = AF$, $BG = BD$. Докажите, что точки C, D, E, F, G лежат на одной окружности.

9.44. В плоскости даны угол, окружность с центром O и две не принадлежащие ей точки A и B. Постройте такую хорду A_1B_1 окружности, чтобы прямые A_1A и B_1B были параллельны, а угол A_1OB_1 равен данному.

33. Касательные к окружности

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если прямая имеет с окружностью только одну общую точку, то говорят, что прямая касается окружности, а саму прямую называют *касательной к окружности*. Общая точка называется *точкой касания*.

Касательная к окружности лежит в одной плоскости с этой окружностью.

ТЕОРЕМА. *Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к окружности.*

ТЕОРЕМА. *Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны.*

9.45. Прямая a касается окружности с центром O и радиусом r. Найдите расстояние от точки O до прямой a, если диаметр окружности равен 10 см.

9.46. Радиус окружности с центром O равен 2 см. Расстояние от точки A до центра O равно 4 см. Найдите длину отрезка AB, касательного к окружности, где B — точка касания.

9.47 Докажите, что если отрезки AB и AB_1 являются касательными к окружности с центром O и радиусом r, B и B_1 — точки касания, то $AB = AB_1$ и $\triangle BAO = \triangle B_1AO$.

9.48. Постройте окружность данного радиуса r, которая касается данной прямой a в данной на ней точке M.

9.49. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку этой окружности.

9.50. 1. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла.

2. Постройте окружность, которая касается сторон данного угла, причем одной из них в данной точке.

9.51. Найдите множество центров окружностей, касающихся сторон данного угла.

9.52. Две окружности касаются друг друга в точке A. Существует ли прямая, касающаяся обеих этих окружностей и проходящая через A?

9.53. Постройте окружность, касающуюся всех сторон данного треугольника.

9.54. Известно, что AO — наименьшее из всех расстояний от точки A до точек прямой p ($A \in p$). Докажите, что прямая OA перпендикулярна прямой p.

9.55. Две окружности радиусом 3 и 5 см касаются внешним образом. Вычислите длину отрезка их внешней общей касательной, заключенной между точками касания.

9.56. К окр. (O; r) проведена из точки M касательная. Найдите формулу, выражающую зависимость между расстояниями OM, $MA = m$ (A — точка касания) и радиусом r.

9.57. Расстояние между центрами окружностей радиусами 6 и 2 см равно 10 см. Вычислите длину отрезка: а) общей внешней касательной; б) общей внутренней касательной.

9.58. Окружность касается трех сторон треугольника ABC (рис. 9.2), $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Выразите длины отрезков касательных x, y, z через a, b, c.

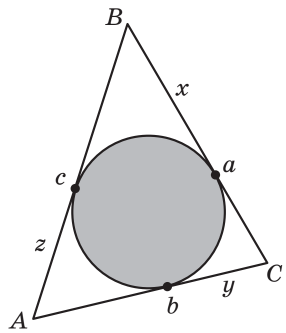


Рис. 9.2

9.59. Постройте окружность данного радиуса R, которая касается данной прямой l и данной окр. (O; r).

9.60. Окр. (O_1; r_1) и окр. (O_2; r_2) касаются внешним образом. Постройте окружность данного радиуса R, которая касается каждой из данных окружностей.

9.61. Через данную точку M проведите прямую, которая находится на данном расстоянии l: а) от данной точки A; б) от данной окружности.

9.62. Постройте касательную к данной окружности, перпендикулярную данной прямой.

9.63. Докажите, что касательная, параллельная хорде, делит в точке касания дугу, стягиваемую этой хордой, на две равные дуги.

9.64. К окружности проведена касательная. Докажите, что сумма расстояний от концов любого диаметра до этой касательной равна диаметру этой окружности.

9.65. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой в данной точке.

9.66. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла, причем одной из них — в данной точке.

9.67. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой и проходящую через данную точку, не лежащую на этой прямой.

9.68. Докажите, что диаметр круга, вписанного в прямоугольный треугольник, равен разности суммы катетов и гипотенузы.

9.69. К окружности радиусом 4 см с центром в точке O проведена из точки A касательная. Вычислите площадь треугольника ABO, где B — точка касания, если $AB = 8$ см.

9.70. На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах вне его построены полуокружности, к этим полуокружностям проведены касательные, параллельные катетам прямоугольного треугольника и не пересекающие фигуру. Докажите, что четырехугольник, стороны которого лежат на этих касательных, — квадрат.

9.71. На данной прямой найдите такую точку, чтобы отрезки касательных, проведенных из нее к данной окружности, имели бы данную длину.

9.72. Центры двух окружностей, радиусы которых R и r, лежат на гипотенузе прямоугольного треугольника. Одна окружность касается двух катетов, другая касается катета и первой окружности. Найдите стороны треугольника.

34. Расстояние от центра окружности до ее хорды

Основное теоретическое содержание

ТЕОРЕМА. *Диаметр, проведенный к хорде через ее середину, перпендикулярен этой хорде.*

ТЕОРЕМА. *Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.*

9.73. Как разделить хорду окружности пополам?

9.74. Внутри круга дана точка. Какая из всех хорд круга, проходящих через эту точку, имеет наименьшую длину и какая — наибольшую?

9.75. В окружности радиусом r проведена хорда.

1. Найдите ее расстояние от центра окружности, если длина хорды равна a. Произведите вычисления, если: а) $r = 14$ см, $a = 8$ см; б) $r = 8$ см, $a = 14$ см.

2. Выразите длину хорды через ее расстояние h от центра.

9.76. Радиус круга равен 25 см. В этом круге проведены две параллельные хорды длиной 14 и 4 см. Вычислите расстояние между хордами.

9.77. Докажите, что в одном круге (или в равных кругах): а) хорды равной длины равноудалены от центра; б) из двух неравных хорд хорда большей длины ближе к центру.

9.78. Каждая из двух равных окружностей радиусом r проходит через центр другой. Выразите через r длину их общей хорды.

9.79. Две равные и взаимно перпендикулярные хорды окружности точкой их пересечения делятся каждая на отрезки в 10 и 16 мм. Вычислите радиус окружности.

9.80. Две окружности имеют общий центр, AB — хорда окружности меньшего радиуса, C и D — точки пересечения прямой AB с окружностью большего радиуса. Докажите, что: а) $AB = BD$; б) $BC = AD$.

9.81. Постройте хорду данной окружности, серединой которой является данная точка.

9.82. Докажите, что диаметр, который делит пополам хорду, не проходящую через центр, перпендикулярен этой хорде.

9.83. Докажите, что две хорды окружности, пересекающиеся в точке, отличной от центра окружности, не могут обе делиться в точке пересечения пополам.

9.84. Докажите, что диаметр окружности есть наибольшая из хорд этой окружности.

9.85. Центр окружности, пересекающей стороны данного угла, лежит на биссектрисе этого угла (рис. 9.3). Есть ли на этом рисунке равные отрезки?

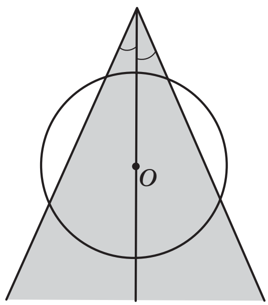


Рис. 9.3

9.86. Как разделить дугу данной окружности пополам?

9.87. Дан квадрат. Постройте окружность так, чтобы стороны этого квадрата были хордами данной окружности.

9.88. Из точки A окружности проведены две взаимно перпендикулярные и равные хорды, удаленные от центра на расстояние 4 см. Вычислите длину каждой хорды.

Т **9.89.** Докажите, что диаметр, который делит пополам хорду, не проходящую через центр, перпендикулярен этой хорде.

9.90. Фигура L является объединением двух окружностей. Докажите: 1) если фигура L имеет бесконечно много осей симметрии, то центры этих окружностей совпадают; 2) если фигура L имеет в точности две оси симметрии, то радиусы этих окружностей равны.

9.91. Хорда, равная 8 см, отсекает от окружности дугу в 90°. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

9.92. В окружности проведены две параллельные хорды, отсекающие от нее дуги в 90°. Вычислите расстояние между хордами, если длина одной из хорд равна 12 см.

9.93. Докажите, что хорда окружности, перпендикулярная другой хорде той же окружности и проходящая через ее середину, является диаметром окружности.

9.94. Дана окружность. Через середину ее радиуса проведена перпендикулярная ему хорда. Докажите, что эта хорда видна из центра окружности под углом 120°.

35. Части окружности и круга

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Круговым сектором* называют часть круга, лежащую внутри центрального угла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Круговым сегментом* называют общую часть круга и полуплоскости, граница которой содержит хорду этого круга.

9.95. Заполните пропуски:
Если прямая пересекает окружность, то их пересечение есть или ..., или ... .

9.96. Заполните пропуски:

Если прямая пересекает круг, то их пересечение есть или ..., или ... .

9.97 На сколько частей два радиуса окружности делят круг? Как называются эти части?

9.98. Дана окружность. Сколько можно провести сфер, содержащих эту окружность?

9.99. На окружности поставили две точки. Сколько дуг окружности при этом получилось?

9.100. Круг пересекают две параллельные хорды. Какие фигуры при этом получились?

9.101. Сколько дуг заданной окружности определяют: а) два луча с началом в ее центре; б) две прямые, проходящие через центр этой окружности?

9.102. Постройте окружность с центром в данной точке, которая делила бы данную окружность на две полуокружности.

9.103. Докажите, что параллельные хорды, проведенные через концы диаметра окружности, равны.

9.104. Из точки, данной на стороне угла, как из центра опишите окружность, которая от другой стороны угла отсечет хорду данной длины.

9.105. В окружности проведены две равные хорды AB и CD. Докажите, что либо $\cup BC = \cup AD$, либо $\cup BD = \cup AC$.

9.106. Хорда AB окружности с центром O разделена точками C и D на три равных отрезка, и точки A, B, C и D соединены с точкой O. Докажите, что лучи OC и OD не разделят угол AOB на равные углы.

9.107. Дана окр. $(O;\ r)$. Через точку A, $OA < r$, проведите хорду так, чтобы разность отрезков, на которые эта хорда делится точкой A, была бы равна данному отрезку d.

9.108. Даны две концентрические окружности c и c_1 радиусами a и $2a$ соответственно, их центр — точка O. Точка P лежит между этими окружностями. Из точки P как из центра радиусом OP проведена окружность, пересекающая окружность c_1 в точке M. Докажите, что перпендикуляр, проведенный через точку P к прямой OM, касается окружности c.

9.109. В сектор с радиусом R и центральным углом α вписан круг. Вычислите его радиус.

Тема 10

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

36. Вписанный угол

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают ее, называется *вписанным углом.*

ТЕОРЕМА. *Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.*

Следствие 1. Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, прямой.

Следствие 2. Каждые два вписанных угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

10.1. На рисунке 10.1, *а* изображено несколько примеров взаимного расположения окружности и углов. Назовите: а) вписанные углы, изображенные на рисунке; б) вершины и стороны этих углов.

10.2. Посмотрите на рисунок 10.1, *б*.

1. Назовите дугу, на которую опирается: угол B; угол C; угол CAD.

2. Назовите угол, который опирается: а) на дугу BC; б) на дугу BCD.

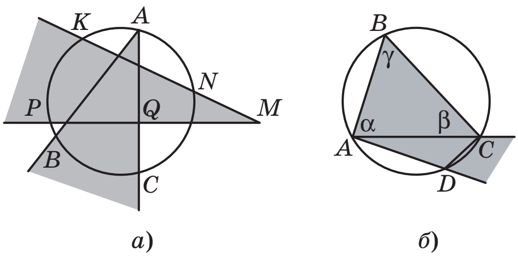


Рис. 10.1

10.3. На рисунке 10.2 луч AK касается данной окружности, а лучи AM и AC пересекают окружность. Назовите все вписанные углы на этом рисунке. Какие дуги высекает на окружности угол *1*? угол *2*? угол *3*?

10.4. Углы AMC и ATC вписаны в одну и ту же окружность. Что можно сказать о величине этих углов?

10.5. Окружность разделена точками A, B, C, D и E на пять равных дуг: $\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE = \cup EA$. Найдите величины вписанных в эту окружность углов BAC, BAD, BAE, CAE и DAE.

10.6. Хорда делит окружность на две дуги, отношение длин которых равно 4 : 5. Под каким углом видна эта хорда из точек окружности? Рассмотрите точки, принадлежащие обеим дугам.

10.7. Окружность разделена тремя точками на дуги, длины которых относятся как числа 2, 3 и 4, и точки деления соединены отрезками. Вычислите углы полученного треугольника.

10.8. Данная хорда видна из некоторой точки окружности под углом $41°15'$. Вычислите угловую величину дуг, на которые данная хорда делит окружность.

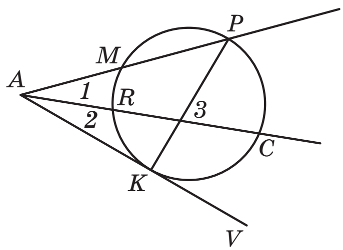


Рис. 10.2

10.9. Точки A, B, C и D, взятые последовательно, принадлежат окружности, $\smile AD = 68°$, $\smile BC = 140°$, $\smile DC = 50°$. Вычислите: а) $\smile AB$; б) $\angle BDC$ и $\angle BAC$; в) $\angle ABD$; г) $\angle ABC$; д) $\angle BCA$.

10.10. На окружности даны точки A, B, C, D, являющиеся вершинами квадрата $ABCD$, и точка M, принадлежащая меньшей дуге AD. Докажите, что угол AMD делится лучами MC и MB на три равных угла.

10.11. Центральный угол на $35°$ больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Вычислите величину каждого из этих углов.

10.12. Хорда делит окружность на две дуги. Под какими углами видна хорда из точек окружности, если угловые величины этих дуг относятся как: а) $5 : 4$; б) $7 : 3$?

10.13. Равные углы ABC и ADC опираются на отрезок AC, и их вершины лежат по одну сторону от прямой AC. Докажите, что точки A, B, C и D принадлежат одной окружности.

10.14. На рисунке 10.3 $AB = CD$. Докажите, что $\smile AC = \smile BD$.

10.15. На рисунке 10.4 у окружности с центром O имеем $OM = OK$, причем отрезки OM и OK соответственно перпендикулярны хордам AB и CD. Докажите, что $AB = CD$.

10.16. Лучи OM и ON касаются окружности в точках M и N (рис. 10.5). Найдите $\angle NOM$ и $\angle NMO$, если величина большей дуги NKM равна $242°$.

10.17. Почему на рисунке 10.5 для задачи **10.16** $\angle KMN = \angle KNM$?

10.18. Докажите, что если на рисунке 10.5 $\angle O = 60°$, то величина большей дуги MKN равна удвоенной величине меньшей дуги MN.

10.19. Докажите, что если две касательные к окружности пересекаются, то вместе с хордой, соединяющей точки их касания, они образуют равнобедренный треугольник.

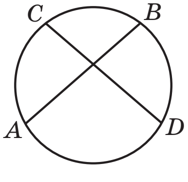


Рис. 10.3

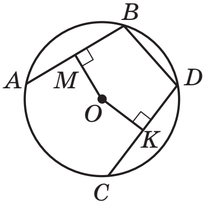


Рис.10.4

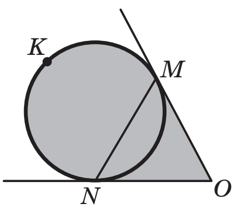


Рис. 10.5

10.20. Докажите теорему: «Если две дуги окружности равны, то любой угол, вписанный в одну из них, равен любому углу, вписанному в другую».

10.21. Точка P на рисунке 10.6 является центром окружности. Найдите $\angle A$ и $\angle P$, если $\angle B = 35°$.

10.22. На рисунке 10.7 $\angle M = 75°$, $\cup MK = 90°$ и $\cup CD = 70°$. Найдите величину всех остальных дуг и углов.

10.23. Точки C, B и A лежат на окружности с центром O (рис. 10.8). Докажите, что $AO \perp CO$, если $\angle ABC = 45°$.

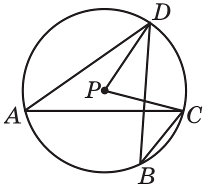


Рис. 10.6

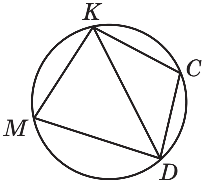


Рис. 10.7

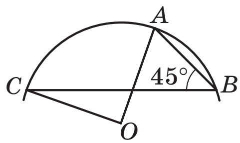


Рис. 10.8

10.24. Дан угол с вершиной на окружности, образованный лучом секущей и лучом касательной. Докажите, что середина высекаемой им дуги равноудалена от сторон угла.

10.25. На рисунке 10.9 PK и OS — касательные, а PO — диаметр данной окружности. Найдите радиус этой окружности, если дано, что $\cup MO = 120°$ и $KO = 8$.

10.26. Докажите теорему: «Величина угла, образованного двумя секущими окружности, пересекающимися в точке, лежащей внутри окружности, равна полусумме величин дуг, высекаемых этим углом и углом, ему вертикальным».

10.27. На рисунке 10.10:

а) $\cup DB = 40°$ и $\cup AC = 90°$. Найдите $\angle AKC$;

б) $\cup AD = 100°$ и $\cup BC = 170°$. Найдите $\angle BKC$;

в) $\cup AC = 130°$ и $\angle DKB = 75°$. Найдите $\cup DB$;

г) $\cup ACD = 310°$ и $\cup BC = 200°$. Найдите $\angle AKC$;

д) $\cup BAC = 180°$ и $\angle DKB = 75°$. Найдите $\cup DB$.

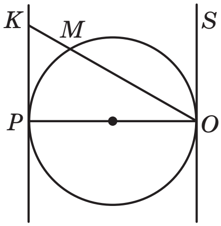


Рис. 10.9

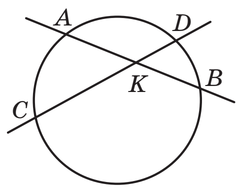


Рис. 10.10

10.28. Докажите теорему: «Величина угла, образованного двумя секущими окружности, пересекающимися в точке, лежащей вне окружности, равна полуразности величин высекаемых этим углом дуг».

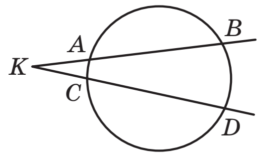


Рис. 10.11

10.29. На рисунке 10.11:

а) $\cup BD = 70°$ и $\cup AC = 30°$. Найдите $\angle K$;

б) $\cup BD = 126°$ и $\cup AC = 18°$. Найдите $\angle K$;

в) $\cup AC = 50°$ и $\angle K = 22°$. Найдите $\cup BD$;

г) $\cup AB = 80°$, $\cup BD = 80°$ и $CD = 190°$. Найдите $\angle K$;

д) $\angle K = 28°$, $\cup ABD = 166°$ и $\cup ABC = 290°$. Найдите $\cup CD$.

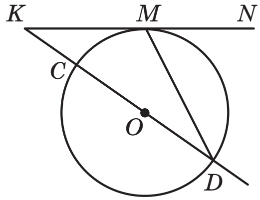


Рис. 10.12

10.30. Проверьте, что теорема, помещенная в задаче **10.28**, остается верной, если слова «двумя секущими» заменить словами «секущей и касательной» или же словами «двумя касательными».

10.31. Две касательные к окружности образуют угол 72°. Какую величину имеет каждая из высекаемых ими дуг?

10.32. Прямая KN касается окружности в точке M, а секущая KD проходит через центр окружности O (рис. 10.12). Найдите $\cup CM$ и $\angle NMD$, если $\angle K = 35°$.

10.33. Даны две касательные к окружности, пересекающиеся в точке K. Чему равна величина $\angle K$, если величина одной из высекаемых этим углом дуг в 4 раза больше величины другой?

10.34. Равные углы ABC и ADC опираются на отрезок AC, и их вершины лежат по одну сторону от прямой AC. Докажите, что точки A, B, C и D принадлежат одной окружности.

10.35. Отрезок AB на рисунке 10.13 является диаметром меньшей из двух концентрических окружностей. Отрезки AP и BQ касаются меньшей окружности соответственно в точках A и B. Докажите, что AB и PQ пересекаются в центре окружностей.

10.36. Две равные окружности внешне касаются в точке M. Диаметр AB одной из них параллелен диаметру CD другой, причем точки C и Q лежат по противоположные стороны от прямой AD. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — ромб.

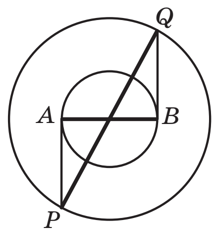


Рис. 10.13

10.37. Две равные окружности касаются в точке M. Секущая l, проходящая через M, пересекает бо́льшую окружность в точке A и меньшую в точке B. Докажите, что касательные в точках A и B параллельны.

З а м е ч а н и е. Возможны два случая: а) окружности касаются внутренне; б) окружности касаются внешне.

10.38. На рисунке 10.14 $\cup BD = 70°$ и $\angle DMB = 4\angle K$. Найдите $\cup AC$ и $\angle K$.

10.39. Посмотрите на рисунок 10.15. Найдите отношение x к y, при котором $\angle DMB = 2\angle K$.

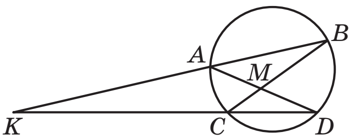


Рис. 10.14

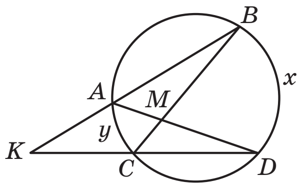


Рис. 10.15

10.40. Даны окружность и точка P, лежащая вне ее. Прямая, проходящая через точку P, касается окружности в точке K. Секущая, содержащая точку P, пересекает окружность в точках C и D, причем точка C лежит между точками D и P. Биссектриса $\angle CKD$ пересекает хорду DC в точке S. Докажите, что $PK = PS$.

10.41. Даны диаметры равных касающихся окружностей — AD и DB; BC — касательная в точке C (рис. 10.16). Докажите, что $\cup AC = \cup DC + \cup DE$.

10.42. В полуокружность диаметра AD с центром O вписана ломаная $ABCD$; $AB = BC = a$, $CD = b$ (рис. 10.17). Докажите, что $OB \parallel CD$.

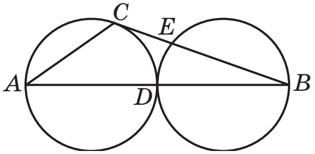


Рис. 10.16

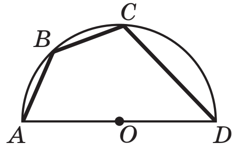


Рис. 10.17

10.43. Некоторая прямая пересекает окружность с центром в точке O в двух точках A и B, не лежащих на одном диаметре, причем точка B не помещается на чертеже (рис. 10.18). Постройте отрезок диаметра, проходящего через эту точку.

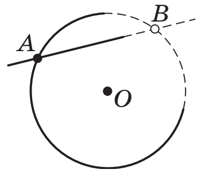


Рис. 10.18

10.44. Докажите, что середина дуги AB не одинаково удалена от касательной MA и секущей MB, $\cup AB < 180°$ (рис. 10.19).

10.45. На рисунке 10.20 лучи KA и KB касаются окружности в точках A и B соответственно. Длины полученных дуг относятся как $1 : 4$. Вычислите углы треугольника AKB.

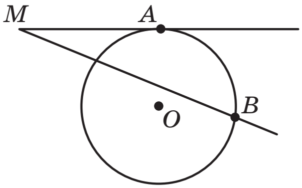


Рис. 10.19

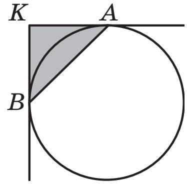


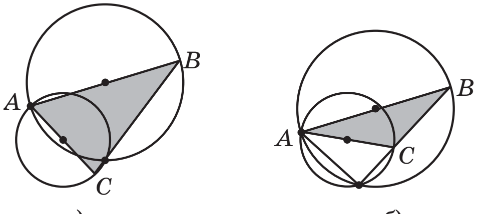
Рис. 10.20

10.46. Постройте треугольник по медиане, биссектрисе и высоте, исходящим из одной вершины.

10.47. Докажите, что из всех медиан равнобедренного треугольника с основанием a и углом при вершине α медиана, проведенная к стороне a, наибольшая при $\alpha < 90°$.

10.48. Докажите, что из всех медиан равнобедренного треугольника с основанием a и углом при вершине α медиана, проведенная к стороне a, наименьшая при $\alpha > 90°$.

10.49. Докажите, что окружности, построенные на двух сторонах треугольника как на диаметрах, пересекаются на третьей стороне или на ее продолжении (рис. 10.21, *а*, *б*).



а) *б*)

Рис. 10.21

10.50. AC и BD — взаимно перпендикулярные и пересекающиеся хорды окружности. Из точек A и B проведены к прямой DC перпендикуляры AM и BK, M принадлежит прямой BD, а K — прямой AC. Докажите, что четырехугольник $AMKB$ — ромб.

И

10.51. Об углах и окружностях. [18]

У Данте в «Божественной комедии» написано:

Иль треугольник в поле полукружья,
Но не прямоугольный начертить.

Треугольник, о котором пишет Данте, построить нельзя (рис. 10.22). Этот факт Данте считал общеизвестным.

Данте Алигьери (1265—1321) математикой не занимался. Он вошел в историю как поэт и философ, создатель итальянского литературного языка.

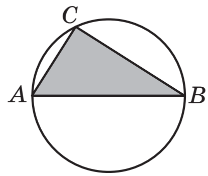


Рис. 10.22

В этом задании будут рассмотрены конфигурации, для изучения которых необходима теорема и следствие 1, сформулированные в начале этого параграфа. При решении многих задач пользуются эквивалентной формулировкой этой теоремы:

На рисунке 10.23 α — *центральный угол, опирающийся на дугу AnB данной окружности, тогда из точек, принадлежащих дуге AmB, хорда AB видна под углом* $\frac{\alpha}{2}$.

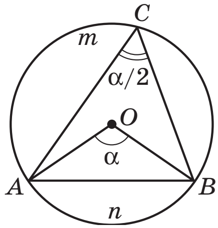


Рис. 10.23

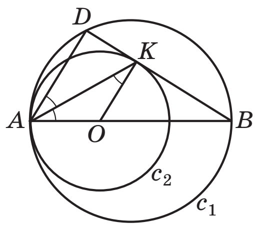


Рис. 10.24

В силу этого вписанный «в поле полукружья» треугольник обязательно прямоугольный.

Решите следующие задачи.

1. На отрезке AB как на диаметре построена окружность c_1, BD — ее хорда. Окружность c_2 касается c_1 в точке A и отрезка AD в точке K (рис. 10.24). Докажите, что AK — биссектриса угла DAB.

2. Докажите существенно более общую теорему, чем сформулированная выше теорема:

Геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под некоторым углом α, состоит из двух дуг окружностей, симметричных друг другу (рис. 10.25).

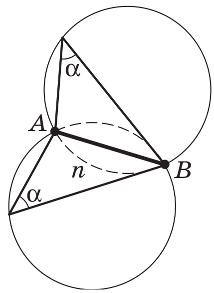


Рис. 10.25

3. Используя при решении результаты задачи **2**, постройте треугольник: а) по углу, противолежащей стороне и проведенной к ней высоте; б) по углу, противолежащей стороне и проведенной к ней медиане.

4. Точка C движется по дуге окружности S, стягиваемой хордой AB. Найдите траекторию движения точки P, являющейся центром вписанной в треугольник ABC окружности.

5. Диаметры AB и CD окружности радиусом R пересекаются под углом α. Из произвольной точки M окружности на эти диаметры опущены перпендикуляры MP и MQ. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от выбора точки M, и найдите PQ.

6. Вершины A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. Найдите траекторию движения вершины C прямого угла.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG. Докажите, что $EF = DG$.

8. Докажите, что высоты треугольника ABC являются биссектрисами треугольника DEK, образованного основаниями высот треугольника ABC.

9. На сторонах четырехугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырехугольник.

10.52. Секущие и касательные отрезки. Степень точки относительно окружности. [19]

Если отрезок пересекает окружность в двух точках и одна и только одна из них является концом этого отрезка, то этот отрезок называется *секущим отрезком данной окружности*.

На рисунке 10.26 показан случай, когда к окружности проведены две секущие, проходящие через точку, лежащую вне ее.

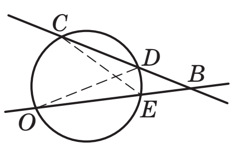


Рис. 10.26

Докажите **теоремы:**

T1. Даны окружность μ и точка B вне ее. Пусть BC — какая-нибудь секущая, проходящая через точку B и пересекающая окружность μ в точках D и C, BO — другая секущая, проходящая через B и пересекающая окружность μ в точках E и O. Тогда $BD \cdot BC = BE \cdot BO$ (см. рис. 10.26).

Произведение $BD \cdot BC$ определено, как только дана окружность и лежащая вне ее точка B. Число $BD \cdot BC$ называется *степенью точки B относительно данной окружности*.

Т2. Даны касательный отрезок BE к окружности μ и секущая, проходящая через точку B и пересекающая окружность в точках C и D. Тогда $BC \cdot CD = BE^2$ (рис. 10.27).

Иными словами, квадрат длины касательного отрезка равен степени его внешнего конца относительно данной окружности.

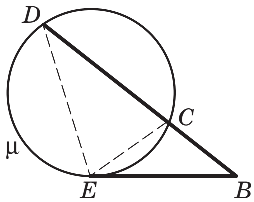


Рис. 10.27

Т3. Пусть BD и CE — хорды одной и той же окружности, пересекающиеся в точке O. Тогда $OB \cdot OP = OC \cdot OE$ (рис. 10.28).

Используя теоремы **Т1—Т3**, решите следующие задачи:

1. Две хорды некоторой окружности пересекаются в точке O (рис. 10.29). Отрезки одной из хорд имеют длины 4 и 6, а один из отрезков другой хорды — длину 3. Найдите длину второго ее отрезка.

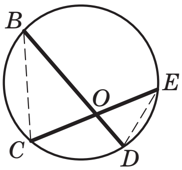


Рис. 10.28

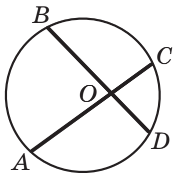


Рис. 10.29

2. На рисунке 10.30 две окружности касаются прямой l в точке O, P — любая точка прямой l, отличная от O. Докажите, что $PM \cdot PC = PK \cdot PD$.

3. На рисунке 10.31 A — любая точка прямой l, отличная от общей точки касания K двух окружностей. Докажите, что $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

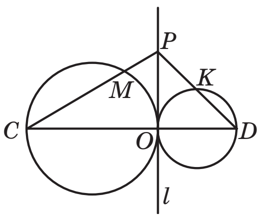


Рис. 10.30

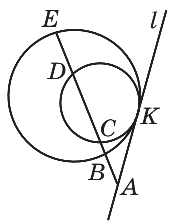
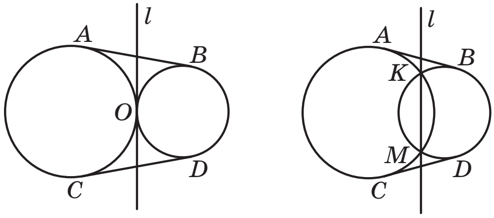


Рис. 10.31

4. Докажите, что если две окружности и прямая пересекаются в одной и той же точке (или точках) (рис. 10.32, *а*, *б*), то эта прямая делит пополам каждый общий внешний касательный отрезок данных окружностей.

5. Докажите, что общие внутренние касательные двух непересекающихся окружностей и линия центров этих окружностей имеют общую точку (рис. 10.33).



а) *б*)

Рис. 10.32

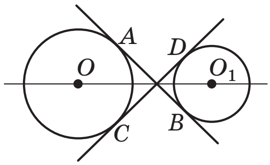


Рис. 10.33

37. Вписанные и описанные треугольники

Основное теоретическое содержание

ТЕОРЕМА. *Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну. Центр такой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.*

ТЕОРЕМА. *Во всякий треугольник можно вписать окружность, притом только одну. Центр такой окружности — точка пересечения биссектрис углов треугольника.*

10.53. В окр. (O; r) вписан треугольник ABC. Что можно сказать о вершинах, сторонах и углах треугольника ABC?

10.54. Около окр. (O; r) описан треугольник ABC. Назовите свойства его вершин, сторон и углов.

10.55. Всякий ли треугольник можно вписать в окружность?

10.56. Постройте треугольник, вписанный в окружность. Проведите прямую, которой принадлежит центр описанной окружности. Ваш вывод обоснуйте.

У

10.57. Вычислите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если отношение его катетов равно 0,8, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.

10.58. Постройте треугольник со сторонами 5, 6 и 7 см и опишите около него окружность. Измерьте радиус этой окружности.

10.59. Постройте треугольник ABC, если $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $\angle ABC = 40°$. Опишите около него окружность и измерьте ее радиус.

10.60. Постройте треугольник ABC, если $AB = 6$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$. Опишите около него окружность и измерьте ее радиус.

10.61. Дан остроугольный треугольник ABC; O — центр описанной около него окружности; $AD \perp BC$. Докажите, что $\angle BAD = \angle OAC$.

10.62. Впишите в данную окружность треугольник, подобный данному.

10.63. 1. Докажите, что площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

2. Докажите, что радиус r окружности, описанной около треугольника, может быть вычислен по формулам: а) $r = \frac{ab}{2h}$; б) $r = \frac{abc}{4S}$.

10.64. Какой вид имеет треугольник, если: а) центры вписанной и описанной около него окружностей совпадают; б) центр описанной окружности лежит на его стороне; в) центр вписанной окружности лежит на одной из его высот; г) центр описанной окружности лежит на одной из его высот или на продолжении высот?

10.65. В данный треугольник впишите окружность.

10.66. В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 и 16 см. Вычислите радиус вписанной в него окружности.

10.67. Вычислите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, высота которого: а) $h = 1$ см; б) $h = 2{,}5$ см.

10.68. Докажите, что сумма диаметров вписанной в прямоугольный треугольник и описанной около него окружностей равна сумме его катетов.

10.69. Постройте окружность, касающуюся трех данных прямых, попарно пересекающихся и не проходящих через одну точку.

10.70. Вычислите радиусы окружностей, описанной около прямоугольного треугольника и вписанной в него, если его катеты равны: а) 20 и 21 см; б) 40 и 30 см.

10.71. Вычислите углы треугольника, в котором высота, биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины его угла, делят этот угол на четыре равных угла.

10.72. В прямоугольном треугольнике медиана и биссектриса, проведенные из вершины прямого угла, образуют угол в $10°$. Вычислите углы данного треугольника.

10.73. Из вершины прямого угла треугольника проведены лучи через центры вписанной и описанной окружностей. Угол между этими лучами равен $7°$. Вычислите острые углы треугольника.

10.74. Дан остроугольный треугольник ABC; O — центр описанной около него окружности; $AD \perp BC$. Докажите, что $\angle BAD = \angle OAC$.

10.75. В равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна 18 см и основание 12 см, вписана окружность. К ней проведена касательная, параллельная основанию. Найдите длину отрезка касательной, ограниченного точками пересечения с боковыми сторонами.

10.76. Медиана CD треугольника ABC, в котором $AC > BC$, касается окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, соответственно в точках E и F. Докажите, что $2EF = AC - BC$.

10.77. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается прямой AB в точке D и прямой AC в точке E. Докажите, что точки пересечения прямой DE с биссектрисами углов B и C треугольника лежат на одной окружности с точками B и C.

10.78. В треугольник вписана окружность c_1. Точки касания ее с двумя сторонами соединены отрезком. Во вновь образовавшийся треугольник вписана окружность c_2. Докажите, что центр этой окружности принадлежит окружности O.

10.79. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком прямой с центром O описанного круга. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

10.80. Дан параллелограмм $ABCD$. В треугольники ABC, ACD, ABD, BCD вписаны окружности. Докажите, что точки касания этих окружностей и диагоналей параллелограмма являются вершинами прямоугольника.

10.81. В треугольник вписана окружность радиусом r. Параллельно сторонам треугольника к окружности проведены касательные и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности радиусов r_1, r_2, r_3. Докажите, что $r = r_1 + r_2 + r_3$.

10.82. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке M и стороны BC в точке N. Биссектрисы углов A и B треугольника встречают MN соответственно в точках X и Y. Докажите, что отрезки MX, NY и XY пропорциональны сторонам треугольника ABC.

10.83. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MO, которая пересекает высоту AH в точке E. Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу вписанной окружности.

10.84. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB соответственно в точках K, M и N. Докажите, что $\operatorname{ctg} \angle AKC + \operatorname{ctg} \angle BMA + \operatorname{ctg} \angle CNB = 0$.

10.85. Докажите, что для всякого треугольника ABC имеет место соотношение $2S = OA^2 \sin \angle A + OB^2 \sin \angle B + OC^2 \sin \angle C$, где O — центр вписанной в треугольник окружности, а S — площадь треугольника.

10.86. В окружность вписан треугольник ABC, касательные к окружности в точках A и B пересекаются в точке S. Прямая CS пересекает прямую AB в точке M. Докажите, что $AM : MB = b^2 : a^2$, где $a = BC$, $b = AC$.

10.87. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Найдите для этого треугольника отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

И

10.88. Прямоугольный треугольник. [20]

1. Пусть ABC — прямоугольный треугольник, точка H — основание высоты, опущенной из вершины прямого угла C (рис. 10.34). Введем обозначения $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $AH = b'$, $BH = a'$, $CH = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Докажите следующие утверждения (формулы):

а) треугольники BCH, ACH и ABC попарно подобны;

б) $a^2 = a'c$, $b^2 = b'c$.

Из соотношений б) следует теорема Пифагора:

$$a^2 + b^2 = a'c + b'c = c(a' + b') = c^2;$$

в) $h^2 = a'b'$, $h = \dfrac{ab}{c}$;

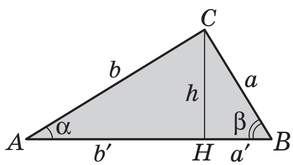


Рис. 10.34

г) пусть O — центр вписанной в треугольник окружности, а r — ее радиус (рис. 10.35). Тогда $r = \frac{a+b-c}{2}$.

д) $\angle ARB = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B = 135°$.

2. Впишем окружности радиусов r_1 и r_2 соответственно в треугольники ACH и BCH (рис. 10.36).

Докажите следующие утверждения:

а) $r + r_1 + r_2 = h$; б) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$; в) $AC = AQ$, $BC = BP$.

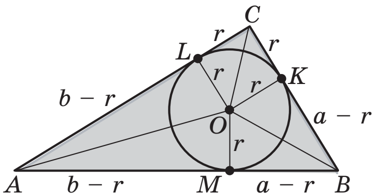


Рис. 10.35

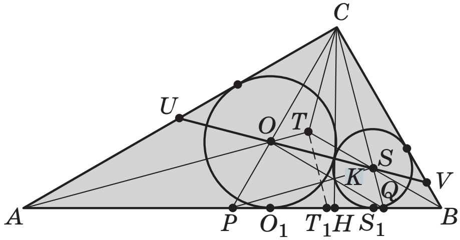


Рис. 10.36

10.89. Задача Штейнера. [21]

Сформулируем четыре задачи.

(А). Докажите, что если в треугольнике равны биссектрисы двух различных углов, то треугольник равнобедренный.

(Б). Докажите, что если у двух треугольников равны соответственные углы при вершине, биссектрисы этих углов и основания, то треугольники равны между собой.

(В). Постройте треугольник по углу при вершине, биссектрисе этого угла и основанию.

(Г). В треугольнике ABC проведена биссектриса AL угла A. Из точки L основания BC опущен перпендикуляр LK на прямую AC и продолжен на отрезок $KM = BC$ (рис. 10.37). Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABC и AKM, касаются стороны AC в одной и той же точке.

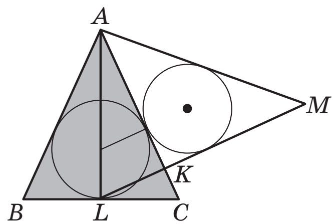


Рис. 10.37

Задача (А), наиболее известная из всех четырех задач, связана с именем знаменитого геометра Якоба Штейнера, который нашел первое «чисто геометрическое» (т.е. без использования алгебры и тригонометрии) доказательство. Задачи (Б) и (В) известны тем, что, по слухам, бытующим среди абитуриентов, они предлагаются на устных экзаменах в качестве вопросов «на засыпку». Задача (Г) появилась совсем недавно, как геометрическая интерпретация алгебраического решения задачи (В).

Заметим, что все четыре задачи тесно связаны в том смысле, что из решения каждой из них следует решение предыдущей.

Попытайтесь решить эти задачи в той последовательности, о которой сказано в задании.

Отметим, что пока никому не удалось получить чисто геометрическое решение задачи (Г). Возможно, вам удастся это сделать!

10.90. Точка W.

Так обозначают точку пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника с осью симметрии соответствующей стороны. Использование этой точки как вспомогательной эффективно, потому что она обладает двумя замечательными свойствами:

1-е. Точка W принадлежит окружности, описанной около треугольника ABC;

2-е. Расстояния от точки W до двух ближайших вершин треугольника равно расстоянию до центра вписанной окружности. Например (рис. 10.38), $WB = WC = WI$.

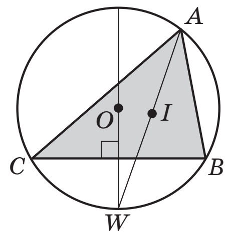


Рис. 10.38

Докажите эти свойства самостоятельно.

Решите следующие задачи:

1. В равнобедренном треугольнике ABC точки N, K, M — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите величину угла C, если известно, что центр окружности, описанной около треугольника MNK, лежит на биссектрисе угла C.

2. В треугольнике ABC: M — точка пересечения медиан, I — центр вписанной окружности. Докажите, что если отрезок MI перпендикулярен BC, то $a = \frac{b+c}{3}$ (a, b, c — длины сторон BC, AC, AB).

10.91. Геометрические неожиданности. [22]

На стенах японских пагод изображено множество неожиданных фактов, открытых японскими математиками несколько веков назад.

Например, в 1800 году на стенах одного из храмов появилась дощечка, сообщавшая о следующем наблюдении:

Разобьем многоугольник, вписанный в окружность, на треугольники, проводя из какой-нибудь одной его вершины все диагонали (рис. 10.39). Впишем в каждый из получившихся треугольников окружность. Сумма радиусов этих окружностей — величина постоянная, не зависящая от выбора вершины многоугольника.

В дальнейшем удалось доказать и более сложное утверждение: та же сумма получается и для любого другого способа разбиения вписанного многоугольника на треугольники (рис. 10.40).

Докажите эти факты.

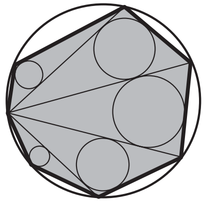


Рис. 10.39

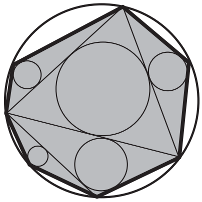


Рис. 10.40

38. Четырехугольники, вписанные в окружность

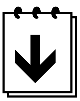
Основное теоретическое содержание

ТЕОРЕМА. *Сумма противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника равна 2d.*

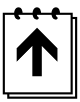
ТЕОРЕМА. *Если сумма двух противоположных углов четырехугольника равна 2d, то около этого четырехугольника можно описать окружность.*

Термины и обозначения

Если в тексте написано «четырехугольник», то следует понимать, что он выпуклый.



10.92. В окр. (O; r) вписан четырехугольник $ABCD$. Что можно сказать о вершинах, сторонах и углах этого четырехугольника?



10.93. Можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, углы которого соответственно равны: а) $90°$, $90°$, $60°$, $120°$; б) $70°$, $130°$, $110°$, $50°$; в) $45°$, $75°$, $135°$, $105°$?

10.94. Можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, углы которого относятся как числа: а) 2, 3, 4, 3; б) 7, 2, 4, 5?

10.95. На рисунке 10.41 $AB = CD$. Докажите, что четырехугольник $ADBC$ — равнобедренная трапеция.

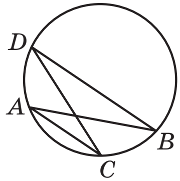


Рис. 10.41

10.96. 1. Постройте квадрат: а) вписанный в данную окружность; б) по радиусу вписанной в него окружности.

2. Квадрат $ABCD$ на рисунке 10.42 вписан в окружность и P — любая точка дуги AB, отличная от A и B. Докажите, что лучи PC и PD делят $\angle APB$ на три равные части.

10.97. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Прямые PA и PD касаются окружности соответственно в точках A и D (рис. 10.43). Найдите величину каждого угла и каждой меньшей дуги на этом рисунке, если $\cup AD = 70°$, $\cup BC = 170°$, $\angle TAB = 40°$.

10.98. AB — диаметр окружности, хорда DE которой параллельна касательной CB (рис. 10.44).

1. Дано, что $\cup BD = 64°$. Найдите величину каждого угла и каждой меньшей дуги на рисунке 10.44.

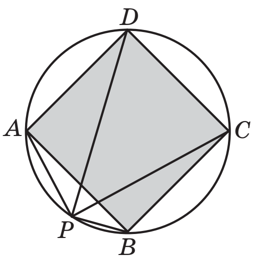


Рис. 10.42

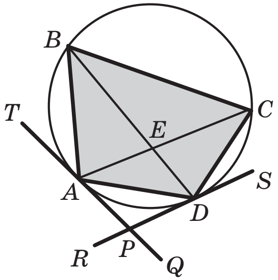


Рис. 10.43

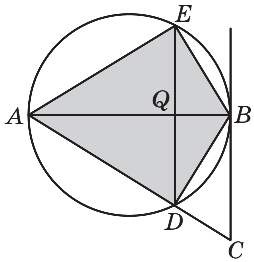


Рис. 10.44

2. Дано, что $AE = 16$ и что радиус окружности равен 10. Найдите длину каждого отрезка.

3. Пользуясь информацией, полученной в п. 2, найдите площадь четырехугольника $ADBE$.

10.99. Докажите, что: 1) любая трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная; 2) любой параллелограмм, вписанный в окружность, — прямоугольник; 3) любой ромб, вписанный в окружность, — квадрат.

10.100. Постройте ромб по радиусу описанной около него окружности и стороне.

10.101. Впишите в данную окружность прямоугольник, подобный данному.

10.102. Три угла вписанного четырехугольника относятся как числа 2, 3 и 4. Вычислите эти углы.

10.103. Докажите, что внутренний угол A вписанного четырехугольника $ABCD$ равен его внешнему углу с вершиной C.

10.104. Докажите, что во вписанном четырехугольнике $ABCD$ биссектриса внутреннего угла A пересекается с биссектрисой внешнего угла с вершиной C в точке, лежащей на окружности, в которую вписан четырехугольник.

10.105. В каком случае можно описать окружность около выпуклого четырехугольника $ABCD$, если:

а) $\angle A = 78°$, $\angle C = 102°$; б) $\angle A = 70°$, $\angle B = 102°$?

10.106. Постройте трапецию, три стороны которой равны, и опишите около нее окружность.

10.107. Докажите, что биссектрисы углов четырехугольника в общем случае образуют четырехугольник, около которого можно описать окружность.

10.108. Через середину дуги AB окружности проходят две произвольные прямые, пересекающие окружность в точках F и C и хорду AB в точках D и E соответственно. Докажите, что точки F, C, D и E лежат на одной окружности.

10.109. Во всяком треугольнике точки, симметричные точке пересечения высот относительно трех сторон треугольника, лежат на окружности, описанной около этого треугольника. Докажите это.

10.110. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке K (рис. 10.45). Докажите, что точки A, B_1, K и C_1 лежат на одной окружности.

10.111. Докажите, что если четырехугольник имеет оси симметрии, совпадающие с серединными перпендикулярами, проведенными к его сторонам, то около этого четырехугольника можно описать окружность.

10.112. В прямоугольнике, вписанном в окружность, стороны равны 15 и 20 см. Вычислите радиус окружности.

10.113. В данную окружность впишите трапецию с данным острым углом, имеющую наибольшую площадь.

10.114. Продолжения боковых сторон AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке S. Докажите, что окружности, проведенные соответственно че-

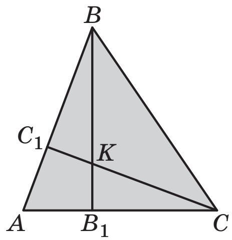


Рис. 10.45

рез точки A, C, S и B, D, S, пересекаются в центре окружности, описанной вокруг данной трапеции.

10.115. В сектор с радиусом R и центральным углом α вписан круг. Вычислите его радиус.

10.116. В круг вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций равны.

10.117. В окружность вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — произвольная точка дуги BC. Найдите $\frac{BM + MC}{AM + MD}$, если $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$.

10.118. Около окружности диаметром d описана равнобедренная трапеция. Докажите, что диагональ этой трапеции больше $d\sqrt{2}$.

10.119. Вписанный четырехугольник. [23]

Используя признак четырехугольника, вписанного в окружность, решите следующие задачи.

1. Докажите, что около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

2. Докажите, что если четырехугольник является вписанным, то центр описанной около него окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам четырехугольника.

3. Древнегреческому ученому Герону Александрийскому (ок. I в. н.э.) принадлежит известная формула вычисления площади треугольника через его стороны: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c — стороны треугольника, а p — его полупериметр.

Эту формулу можно обобщить на случай вписанного четырехугольника, т.е. справедлива такая **теорема**:

«*Если вписанный четырехугольник имеет длины сторон* a, b, c и d, *то его площадь* S *может быть вычислена по формуле*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ *— полупериметр четырехугольника.*»

Эта теорема была установлена индийским математиком Брахмагуптой (ок. 598 — 660 г. н.э.).

4. Докажите, что если четырехугольник со сторонами a, b, c и d вписан в окружность радиусом r, то его площадь равна

$$S = \frac{1}{4r}\sqrt{(ab+cd)(bc+ad)(ca+bd)}.$$

5. Интересными свойствами обладает вписанный четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Докажите некоторые из них.

а) Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и перпендикулярная одной из сторон, делит противоположную сторону пополам.

б) Расстояние от центра описанной окружности до любой из сторон равно половине противоположной стороны.

в) Сумма квадратов сторон равна увосьмеренному радиусу описанной окружности.

г) Ломаная, вершинами которой являются две противоположные вершины четырехугольника и центр описанной окружности, делит площадь четырехугольника пополам.

6. $ABCD$ — вписанный четырехугольник, продолжения сторон которого пересекаются в точках E и K. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов AED и AKB со сторонами четырехугольника $ABCD$ являются вершинами ромба.

7. Пусть P, Q и M — соответственно точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника и продолжений его противоположных сторон. Докажите, что центр окружности, описанной около этого четырехугольника, совпадает с точкой пересечения высот треугольника PQM.

8. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Из вершин A и B опущены перпендикуляры на сторону CD, пересекающие диагонали в точках K и M. Докажите, что $AKMB$ — ромб.

9. $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Перпендикуляр к AB, восстановленный в точке A, пересекает прямую CD в точке M, а перпендикуляр к AD, восстановленный в точке A, пересекает прямую BC в точке N. Докажите, что MN проходит через центр описанной окружности.

10. Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность, то произведение расстояний от точки, лежащей на этой окружности, до двух противоположных сторон равно произведению расстояния от этой точки до двух других сторон, а также произведению расстояний от той же точки до диагоналей.

10.120. Теорема Птолемея. [24]

Вписанный четырехугольник обладает рядом интересных свойств.

Одно из свойств было доказано древнегреческим математиком и астрономом Клавдием Птолемеем (ок. 100 — 170 г. н.э.) в его знаменитом сочинении «Альмагесто».

1. Вот эта **теорема**, носящая имя Птолемея:
Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.
Попробуйте самостоятельно доказать эту теорему.

2. Докажите **обобщенную теорему Птолемея.**

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Четыре окружности касаются данной в точках A, B, C и D. Пусть a, b, c, d, e и f — длины общих внешних касательных к окружностям, касающихся данной в точках A и B, B и C, C и D, D и A, A и C, B и D соответственно. Докажите, что $ef = ac + bd$.

39. Четырехугольники, описанные около окружности

Основное теоретическое содержание

ТЕОРЕМА. *Суммы противолежащих сторон описанного около окружности четырехугольника равны.*

ТЕОРЕМА. *Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.*

Термины и обозначения

Если в тексте написано «четырехугольник», то это значит, что он выпуклый.

10.121. Около окр. $(O; r)$ описан четырехуголник $ABCD$. Назовите свойства его вершин, сторон и углов.

10.122. В каком случае около окружности можно описать четырехугольник?

10.123. Постройте квадрат: а) описанный около данной окружности; б) по радиусу описанной окружности.

10.124. Постройте квадрат по радиусу описанной около него окружности.

10.125. Углы описанного около окружности четырехугольника, взятые по порядку, относятся как числа 1, 2, 3 и 2. Вычислите углы, под которыми видна каждая его сторона из центра вписанной в него окружности.

10.126. Радиус вписанной в трапецию окружности равен r. Точка касания делит боковую сторону трапеции на отрезки длиной a и b. Докажите, что $r^2 = ab$.

10.127. Докажите, что боковая сторона трапеции, описанной около окружности с центром O, видна из точки O под углом $90°$.

10.128. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению ее оснований.

10.129. Вычислите площадь четырехугольника, описанного около окружности диаметра r, если три его стороны, взятые по порядку, равны a, b, c.

10.130. Докажите, что в равнобедренной трапеции, описанной около круга, квадрат высоты равен произведению ее оснований.

10.131. Вокруг окружности радиусом r описана равнобедренная трапеция $ABCD$; E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD трапеции равен $60°$. Докажите, что прямая EK параллельна прямой AB, и найдите площадь трапеции $ABEK$.

10.132. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиусом r. Найдите длину стороны ромба.

10.133. Около круга с радиусом 2 см описана равнобедренная трапеция, площадь которой 20 см^2. Найдите длины сторон трапеции.

10.134. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определите длину боковой стороны этой трапеции, если известно, что острый угол при ее основании равен $\frac{\pi}{6}$.

10.135. Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны тогда и только тогда, когда четырехугольник имеет пару равных противоположных углов.

10.136. Выразите угол ромба через его площадь Q и площадь S вписанного в него круга.

10.137. Около окружности диаметром d описана равнобедренная трапеция. Докажите, что диагональ этой трапеции больше $d\sqrt{2}$.

10.138. Около окружности описана трапеция. Докажите, что длины m и n диагоналей трапеции и радиуса r окружности связаны неравенством $m^2 + n^2 \geqslant 16r^2$.

10.139. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению ее оснований.

10.140. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC описана около окружности радиусом r. M и N — точки касания, расположенные на AD и BC. Докажите, что $AM \cdot BN = DM \cdot CN = r^2$.

10.141. Основания трапеции равны 10 и 20 см, а боковые стороны равны 6 и 8 см. Найдите радиус окружности, проходящей через концы меньшей боковой стороны трапеции и касающейся противоположной боковой стороны.

10.142. Основания трапеции равны a и b, углы при основании a равны α и β. Докажите, что для того чтобы в эту трапецию можно было вписать окружность, необходимо и достаточно выполнения равенства $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{b}{a}$.

10.143. Прямые пересекают стороны AD и BC параллелограмма $ABCD$ и делят параллелограмм на несколько трапеций, в каждую из которых можно вписать окружность. Пусть сторона AD разделена на отрезки a_1, a_2, ..., a_n, а сторона BC — на отрезки b_1, b_2, ..., b_n. Докажите, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot b_n$.

10.144. Трапеция с основаниями AD и BC описана около окружности; K и M — точки касания на AD и BC. Найдите $\frac{BM}{MC}$, если $\frac{AK}{KD} = \alpha$.

40. Вписанные и описанные произвольные многоугольники

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многоугольник, все вершины которого принадлежат окружности, называется *вписанным* в эту окружность, а окружность — *описанной около этого многоугольника.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многоугольник, все стороны которого касаются окружности, называется описанным около этой окружности, а окружность — *вписанной в этот многоугольник.*

ТЕОРЕМА. *Во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность.*

ТЕОРЕМА. *Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность.*

Т **10.145.** AB — сторона вписанного в круг квадрата, $AB = BK$, O — центр круга. Докажите, что отрезок KM равен удвоенной стороне вписанного в этот круг правильного десятиугольника.

10.146. Пятиугольник $ABCDE$, имеющий ось симметрии, проходящую через вершину B, вписан в окружность с центром O. Стороны AB и DE видны из центра окружности под углом $50°$. Под каким углом видна из центра окружности сторона AE?

10.147. Около окружности описан шестиугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Докажите, что его противоположные стороны попарно равны.

10.148. Через середину B радиуса OA некоторой окружности к нему проведен перпендикуляр, пересекающий окружность в точке K. Отрезок BK может быть приближенно принят равным стороне правильного семиугольника, вписанного в эту окружность. Найдите допускаемую при этом погрешность.

10.149. В выпуклом десятиугольнике $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, вписанном в окружность, четыре пары противоположных сторон параллельны. Докажите, что стороны, входящие в пятую пару, тоже параллельны.

10.150. В окружность, радиус которой R, вписан многоугольник, площадь которого больше $2R^2$, а длина каждой стороны больше R. Найдите число сторон многоугольника.

10.151. Около окружности описан шестиугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Докажите, что его противоположные стороны попарно равны.

И **10.152. Задача о вписанном в окружность произвольном выпуклом шестиугольнике.** [25]
Этот шестиугольник обладает рядом интересных свойств. Рассмотрим их в этом задании.

Более 360 лет назад знаменитый французский математик Блэз Паскаль (тогда 16-летний юноша) изучал некоторые свойства шестиугольника, вписанного в коническое сечение (то есть в окружность, эллипс, гиперболу или параболу). При этом он открыл теорему, носящую ныне его имя:
если шестиугольник вписан в коническое сечение, то точки пересечения его противоположных сторон (или их продолжений) лежат на одной прямой.

Свои исследования Паскаль выполнил средствами так называемой проективной геометрии.

Решите такие задачи:

1. Суммы взятых через один углов вписанного выпуклого шестиугольника равны между собой.

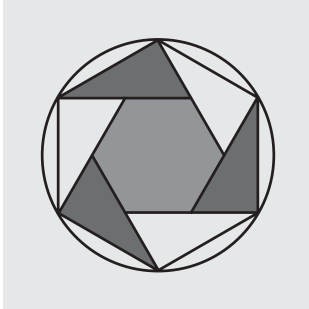
2. Среди внутренних углов выпуклого вписанного шестиугольника прямых и острых углов найдется не более двух.

3. Верна́ или нет теорема, обратная теореме о равенстве суммы углов (см. задачу 1)?

4. Если три большие диагонали вписанного выпуклого шестиугольника пересекаются в одной точке, то произведения взятых через одну сторон равны между собой.

5. Справедлива и обратная теорема: если произведения взятых через одну сторон вписанного выпуклого шестиугольника равны между собой, то большие диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

Глава II
ПЛОЩАДИ ФИГУР



Тема 11
ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

41. Площади квадрата и прямоугольника

Основное теоретическое содержание

Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = ab$, где a и b — стороны прямоугольника.
Квадрат есть прямоугольник, у которого стороны равны, а значит, *площадь квадрата* со стороной a равна a^2, т.е. $S = a^2$. Площадь квадрата можно также вычислить по формуле $S = \dfrac{d^2}{2}$, где d — диагональ квадрата.

Термины и обозначения

Площадь квадрата обозначается так: $S_{\text{кв.}}$ или S_{ABCD}, где $ABCD$ — квадрат. Площадь прямоугольника обозначается так: $S_{\text{пр.}}$ или S_{ABCD}, где $ABCD$ — прямоугольник.

11.1. Как изменится площадь квадрата, если его сторона: а) удвоится; б) утроится; в) станет вдвое меньше?

11.2. Как изменится площадь прямоугольника, если: а) его высота и основание удвоятся; б) основание и высота уменьшатся в 3 раза; в) основание увеличится в 4 раза, а высота уменьшится в 4 раза; г) основание увеличится в 6 раз, а высота уменьшится в 3 раза?

11.3. Как изменится площадь прямоугольника, если: а) не изменяя его высоты, увеличить в 3 раза его основание; б) не изменяя его основания, уменьшить в 2 раза его высоту; в) его высоту и основание увеличить в 4 раза; г) его основание увеличить в 4 раза, а высоту уменьшить в 3 раза; д) его основание увеличить в 3 раза, а высоту увеличить в 2 раза?

11.4. Как изменится площадь прямоугольника, если: а) высота его утроится, а основание останется прежним; б) основание его удвоится, а высота останется прежней; в) удвоятся его высота и основание?

С **11.5.** Найдите площадь прямоугольника с основанием a и высотой h, если: а) $a = 17$, $h = 12$; б) $a = 1\frac{1}{3}$, $h = 5\frac{3}{4}$; в) $a = 3$, $h = 5$; г) $a = 10$, $h = 15$.

11.6. Вычислите площадь квадрата со стороной a, если: а) $a = 24$; б) $a = 3\frac{3}{5}$; в) $a = 7$; г) $a = 46$.

11.7. Найдите площадь полной поверхности куба, если его ребро равно: а) 1 см; б) 10 см; в) 100 см; г) 1 м.

11.8. Вычислите площадь боковой и полной поверхностей куба, если его ребро равно: а) 8 см; б) 10 см; в) 12 см.

11.9. Дан прямоугольный параллелепипед, в его основании лежит прямоугольник со сторонами 2 и 4 см, высота параллелепипеда равна 2 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей этого параллелепипеда.

11.10. Длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда равны соответственно 12, 8 и 20 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей этого параллелепипеда.

У **11.11.** Квадрат и прямоугольник имеют равные площади. Чему равна сторона квадрата, если прямоугольник имеет размеры 25×16 см?

11.12. Прямоугольный участок земли засевают травой. Размеры участка 22×28 м. Сколько потребуется килограммовых пакетов семян, если содержимого одного пакета хватает, чтобы засеять 70 м^2?

11.13. Докажите, что если два прямоугольника имеют одно и то же основание b, то их площади относятся, как и их высоты.

11.14. Вычислите площадь прямоугольника, если две его стороны равны: а) 30 см и 2,9 см; б) 34 см и 0,6 дм; в) 4 м и 1 м 4 дм.

11.15. Вычислите неизвестную сторону прямоугольника, если его площадь и одна из сторон соответственно равны: а) 270 см^2 и 15 см; б) 142 м^2 и 35 м 50 см; в) 16 км^2 и 4000 м; г) 0,096 км^2 и 300 м.

11.16. 1. Площадь земельного участка равна 250 а. Чему равна площадь этого участка: а) в квадратных метрах; б) в квадратных километрах; в) в гектарах?

2. Площадь земельного участка равна 24 га. Чему равна площадь этого участка: а) в квадратных километрах; б) в квадратных метрах; в) в арах?

3. Площадь земельного участка равна 350 000 м^2. Выразите эту площадь: а) в квадратных километрах; б) в арах; в) в гектарах.

11.17. Участок прямоугольной формы имеет площадь 400 га. Вычислите периметр этого участка, если: а) длина участка равна 10 км; б) участок имеет форму квадрата.

11.18. 1. Вычислите стороны прямоугольника, если они относятся как 4 : 9, а площадь его равна 36 м^2.

2. Вычислите периметр прямоугольника, если его площадь равна 144 см^2, а отношение смежных сторон равно 1 : 2.

11.19. 1. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если каждую его сторону увеличить на 10%?

2. На сколько процентов уменьшится площадь прямоугольника, если каждую его сторону уменьшить на 10%?

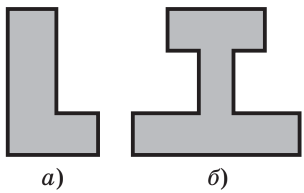


Рис. 11.1

11.20. Вычислите площади фигур, данных на рисунке 11.1, *а*, *б*, разбив их на прямоугольники и проведя все необходимые измерения. (Все углы фигур или 90°, или 270°.)

11.21. Запишите формулы, по которым, зная a, b, c и d, можно вычислить площади фигур, данных на рисунке 11.2, *а*— *в*. (Все углы фигур или 90°, или 270°.)

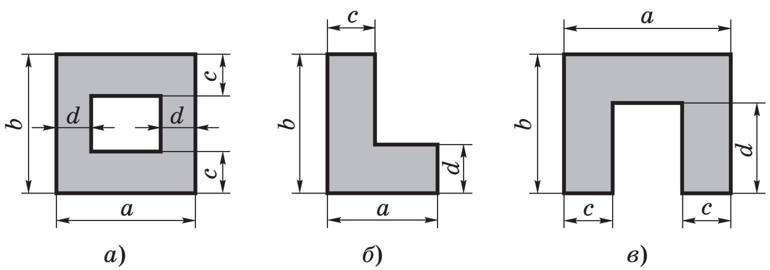


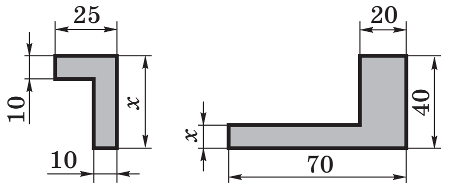
Рис. 11.2

11.22. Площади фигур на рисунке 11.3, *а*, *б* (размеры даны в миллиметрах) равны: а) 550 мм^2, б) 1300 мм^2. Вычислите x, если все углы фигур или 90°, или 270°.

11.23. Длина комнаты 5,4 м, а ширина 4,2 м. В комнате два окна шириной 1,2 м и высотой 1,6 м. Освещенность комнаты считается нормальной, если площадь окон (световая площадь) составляет 20% от площади пола. Нормально ли освещение комнаты?

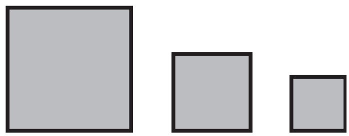
11.24. Известно, что периметр прямоугольника, каждая из сторон которого измеряется целым числом сантиметров, равен 12 см. Вычислите площадь этого прямоугольника. В каком случае площадь прямоугольника будет наибольшей?

11.25. Вычислите площади квадратов, изображенных на рисунке 11.4, *а—в*, предварительно измерив их стороны.



а) *б*)

Рис. 11.3



а) *б*) *в*)

Рис. 11.4

11.26. Вычислите сторону квадрата, если его площадь равна: а) 256 см^2; б) 76,8 м^2; в) 14,6 мм^2.

11.27. Вычислите периметр квадрата, площадь которого равна 2,5 м^2.

11.28. Сколько нужно кафельных плиток размером 10×10 см, чтобы выложить ими прямоугольный участок стены размером 4 м 70 см $\times$ 2 м 10 см?

11.29. Площадь прямоугольника равна 48 см^2, одна из его сторон равна 8 см. Прямая, параллельная одной из сторон прямоугольника, разбивает его на два равных прямоугольника. Вычислите периметры образовавшихся прямоугольников.

11.30. Основание и высота одного из двух прямоугольников соответственно равны 20 и 60 см, площадь второго прямоугольника равна половине площади первого, и одна из его сторон равна 50 см. Вычислите периметр второго прямоугольника.

11.31. Вырежьте из бумаги два равных прямоугольных треугольника и сложите из них: а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник; в) параллелограмм, отличный от прямоугольника. Почему площади всех получившихся фигур равны?

11.32. Основание прямоугольника в два раза больше его высоты. Покажите на рисунке, выполненном в тетради: а) как разрезать этот прямоугольник на две части так, чтобы из них можно было составить прямоугольный треугольник; б) как разрезать его на две части так, чтобы из них можно было составить равнобедренный треугольник; в) как разрезать его на три части так, чтобы из них можно было составить квадрат.

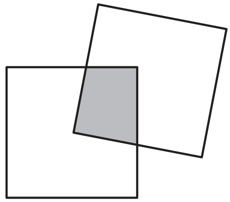


Рис. 11.5

11.33. На рисунке 11.5 изображены два квадрата, они расположены так, что вершина одного квадрата совпадает с центром другого. Найдите площадь затемненного четырехугольника, если длины сторон обоих квадратов равны a.

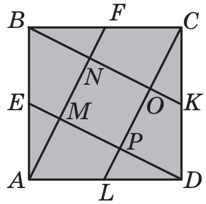


Рис. 11.6

11.34. Докажите, что из всех прямоугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

11.35. Докажите, что из всех равновеликих прямоугольников наименьший периметр имеет квадрат.

11.36. E, F, K и L — середины сторон квадрата $ABCD$ (рис. 11.6). Сравните площадь четырехугольника $MNOP$ с площадью квадрата $ABCD$.

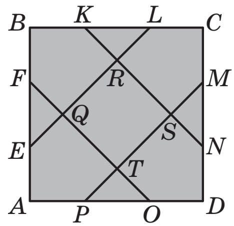


Рис. 11.7

11.37. $ABCD$ — квадрат (рис. 11.7); E, F, K, L, M, N, O, P — точки, делящие каждую сторону квадрата на три равные части. Докажите, что площадь четырехугольника $QRST$ равна $\frac{2}{9}$ площади квадрата $ABCD$.

11.38. Докажите, что площадь квадрата, построенного на катете равнобедренного прямоугольного треугольника, вдвое больше площади квадрата, построенного на высоте, проведенной к гипотенузе.

11.39. Постройте квадрат, площадь которого в два раза больше площади данного квадрата.

11.40. Докажите, опираясь на свойства площадей, что при любых положительных рациональных числах p и q прямоугольник с основанием $a = pe$ и высотой $b = qe$ имеет площадь pqe^2. На рисунке 11.8 изображен прямоугольник, у которого $p = \frac{2}{9}$, $q = \frac{2}{9}$.

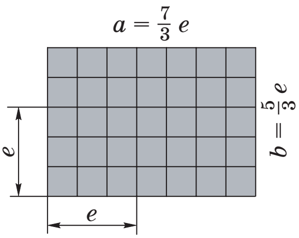


Рис. 11.8

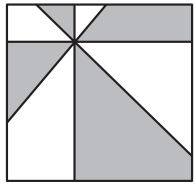


Рис. 11.9

11.41. Через точку внутри квадрата проведены прямые, параллельные его сторонам и диагоналям (рис. 11.9). Докажите, что сумма затемненных площадей равна сумме незатемненных площадей.

11.42. Сколько кусков обоев потребуется для оклейки комнаты размером $6 \times 5 \times 3$ м, если размер одного куска $0{,}5 \times 7$ м и на обрезки достаточно иметь запас, равный площади окон и двери?

11.43. Докажите, что из всех прямоугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

11.44. Докажите, что из всех равновеликих прямоугольников наименьший периметр имеет квадрат.

11.45. Вычислите диагональ и площадь прямоугольника, периметр которого равен 14 см, если его вершина удалена от диагонали, не проходящей через эту вершину, на 2,4 см.

11.46. В квадрат, длина стороны которого a, вписан прямоугольник так, что каждой стороне квадрата принадлежит вершина прямоугольника. Вычислите длину диагонали прямоугольника, если он отличен от квадрата и его площадь равна S.

11.47. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.

11.48. В прямоугольном треугольнике ACB $a = 38$ см, $b = 45$ см (рис. 11.10). Вычислите площадь каждого из затемненных треугольников.

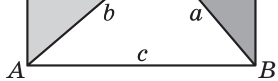


Рис. 11.10

11.49. В квадрат вписан другой квадрат. Один из острых углов между сторонами квадратов равен α. При каком значении α площадь вписанного квадрата составляет $\frac{2}{3}$ площади описанного.

11.50. Дан квадрат $ABCD$; точки P, Q, R, S — середины его сторон AB, BC, CD и DA. Докажите, что прямые AR, BS, CP, DQ своим пересечением образуют квадрат, площадь которого составляет $\frac{1}{5}$ площади данного квадрата.

42. Площади параллелограмма и ромба

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Высотой параллелограмма* называют общий перпендикуляр противоположных сторон.

ТЕОРЕМА. *Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и проведенной к ней высоты.*

ТЕОРЕМА. *Площадь ромба равна произведению его стороны и проведенной к ней высоты.*

Термины и обозначения

Площади параллелограмма и ромба обозначаются соответственно $S_{\text{пар.}}$, $S_{\text{ромб}}$, или S_{ABCD}, где $ABCD$ — параллелограмм или ромб.

11.51. На рисунке 11.11, *а—и* укажите равновеликие параллелограммы.

11.52. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 10 см, а высота, проведенная к этой стороне, равна 12 см. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

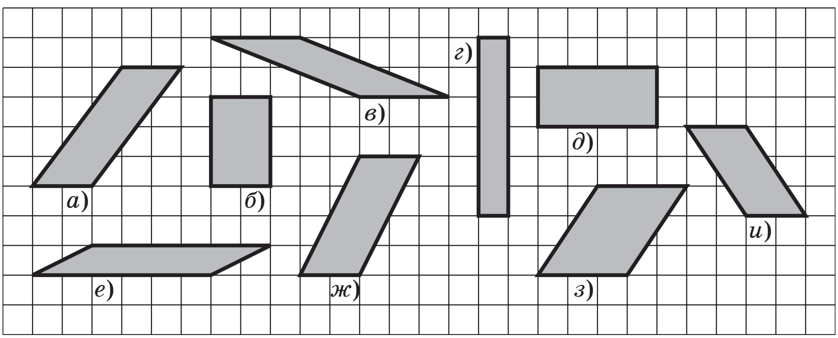


Рис. 11.11

11.53. Какие значения может принимать площадь параллелограмма $ABCD$, если его диагонали равны m и n?

11.54. Каждая из сторон параллелограмма меньше 2 см. Какие значения может принимать площадь S этого параллелограмма?

11.55. Какие значения может принимать площадь ромба, если: 1) его сторона равна a; 2) его высота равна h?

11.56. Нарисуйте параллелограмм, произведите необходимые измерения и вычислите его площадь.

11.57. 1. Вычислите площадь параллелограмма, если его стороны равны 4 и 6 см, а угол между ними равен $30°$.

2. Вычислите площадь ромба, если его сторона равна 10 см, а один из углов равен $150°$.

11.58. Постройте прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ см и $BC = 3$ см и равновеликий ему параллелограмм $ABEF$ со стороной $BE = 5$ см.

11.59. 1. Площадь параллелограмма равна 24 см^2. Вычислите расстояние между его сторонами, равными 6 см.

2. В параллелограмме, площадь которого равна 41 см^2, стороны равны 5 и 10 см. Вычислите высоты параллелограмма.

11.60. Стороны параллелограмма 6 и 4 см. Одна из высот равна 5 см. Найдите другую высоту. Сколько решений имеет задача?

11.61. Постройте параллелограмм, площадь которого 10 см^2, а стороны 5 и 3 см.

11.62. Дан параллелограмм $ABCD$; $AB = 12$ см, $AC = 16$ см. Вершина D удалена от диагонали AC на 4 см. Вычислите расстояние от точки D до прямой AB.

11.63. Найдите множество вершин параллелограммов, равновеликих данному параллелограмму $ABCD$ и имеющих расстояние между его сторонами, равными 6 см.

11.64. В параллелограмме, площадь которого равна 41 см^2, стороны равны 5 и 10 см. Вычислите высоты параллелограмма.

11.65. Две полосы шириной 4 и 1 см, пересекаясь, образуют параллелограмм, площадь которого равна 6 см^2. Вычислите стороны параллелограмма.

11.66. Постройте ромб. Выполните необходимые измерения и вычислите его площадь.

11.67. Вычислите площадь ромба, если его сторона равна 10 см, а один из углов равен $150°$.

11.68. Диагонали ромба равны 8 и 14 см. Найдите площадь ромба.

11.69. Найдите высоту ромба, стороны которого равны 10 см, а площадь 100 см^2.

11.70. Через вершину ромба проведите две прямые, делящие ромб на три равновеликие части.

11.71. Площадь параллелограмма равна 24 см^2. Точка пересечения его диагоналей удалена от прямых, на которых лежат стороны, на 2 и 3 см. Вычислите периметр этого параллелограмма.

11.72. Постройте два неравных равновеликих параллелограмма с общей стороной.

11.73. 1. Выведите формулу, выражающую площадь S ромба через его диагонали m и n.

2. Выведите формулу для вычисления площади S квадрата по его диагонали c.

11.74. 1. Вычислите площадь ромба, диагонали которого имеют длины: а) 2,5 и 3,6 дм; б) 8,8 и 9,5 м.

2. Вычислите площадь ромба, если сторона его равна 6,2 см, а один из углов равен 30°.

11.75. Вычислите диагонали ромба, если известно, что их длины пропорциональны числам 2, 3, а площадь ромба равна 12 см^2.

11.76. 1. Параллелограмм (не прямоугольник) и прямоугольник имеют соответственно равные стороны. Вычислите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.

2. Начертите прямоугольник и параллелограмм (не прямоугольник) с соответственно равными сторонами. Какая из фигур имеет бо́льшую площадь?

11.77. В параллелограмме $ABCD$ вершина A соединена отрезками с серединами сторон BC и CD и вершиной C (рис. 11.12). Докажите, что треугольники *1*, *2*, *3*, *4* равновелики.

11.78. Дано: $ABCD$ — параллелограмм, точка E принадлежит диагонали BD. Проведены $KL \parallel BC$ и $MN \parallel AB$ (рис. 11.13). Докажите, что $AKEN$ и $EMCL$ — параллелограммы и что $S_{AKEN} = S_{EMCL}$.

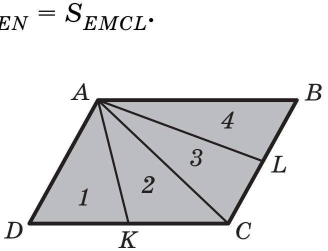


Рис. 11.12

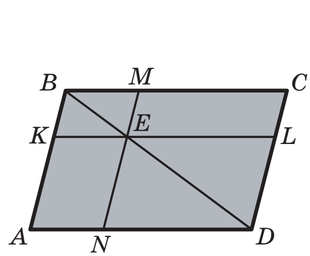


Рис. 11.13

11.79. Участок земли имеет форму параллелограмма. Покажите на рисунке, выполненном в тетради, как можно разбить его на два участка так, чтобы их площади были пропорциональны числам 3 и 4, а линия деления была бы параллельна основанию.

11.80. Через вершину параллелограмма проведите прямые, разбивающие этот параллелограмм на: а) 4 равновеликие части; б) 5 равновеликих частей.

11.81. Докажите, что прямая, проходящая через центр симметрии параллелограмма, разбивает его на две равновеликие части.

11.82. Найдите площадь S параллелограмма, периметр которого равен m, а точка пересечения диагоналей O находится на расстоянии t от каждой из его сторон.

Т **11.83.** В параллелограмме $ABCD$ проведены четыре отрезка: вершина B соединена с серединой стороны DC, вершина A соединена с серединой стороны BC, вершина C соединена с серединой стороны AD, вершина D соединена с серединой стороны AB (рис. 11.14). Докажите, что четырехугольник, образуемый этими четырьмя отрезками, — параллелограмм и что его площадь в пять раз меньше площади параллелограмма $ABCD$.

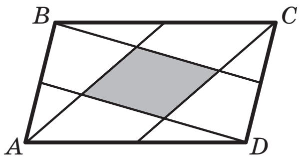


Рис. 11.14

11.84. Докажите, что четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда каждая из его диагоналей делит его площадь пополам.

11.85. Через данную точку проведите прямую, рассекающую данный параллелограмм на две равновеликие части.

11.86. Через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм делится ими на четыре параллелограмма. Два из них пересекаются диагональю AC. Докажите, что два другие параллелограмма равновеликие.

11.87. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

11.88. Дан параллелограмм $ABCD$, точки M, N, P, Q — середины его сторон AB, BC, CD, DA. Прямые AP, CM, DN и BQ своим пересечением определяют четырехугольник. Докажите, что этот четырехугольник есть также параллелограмм и его площадь составляет $\frac{1}{5}$ площади данного параллелограмма.

11.89. Точки M и N — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$. Прямые DM и BN пересекаются в точке P. Какую часть площади данного параллелограмма составляет площадь четырехугольника $AMPN$?

11.90. Дан параллелограмм $ABCD$. На сторонах AB и AD даны соответственно точки M и N, причем $AM : MB = k$, $AN : ND = l$. Прямые BN и DM пересекаются в точке P. Какую часть площади данного параллелограмма составляет площадь четырехугольника $AMPN$?

11.91. Середина каждой стороны параллелограмма соединена с вершинами, принадлежащими противолежащей стороне. Докажите, что площадь образовавшегося восьмиугольника составляет $\frac{1}{6}$ площади параллелограмма.

43. Площадь треугольника

Основное теоретическое содержание

ТЕОРЕМА. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.*

ТЕОРЕМА. *Площадь треугольника равна половине произведения основания и высоты, проведенной к этому основанию.*

ТЕОРЕМА (формула Герона). *Площадь треугольника равна*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, а *p — его полупериметр.*

ТЕОРЕМА. *Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними:*

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha,$$

где b и c — стороны треугольника, а α — угол между ними.

Термины и обозначения

Площадь треугольника обозначается так: S_{Δ}, $S_{\Delta ABC}$, S_{ABC}.

11.92. На рисунке 11.15, *а—з* укажите равновеликие треугольники.

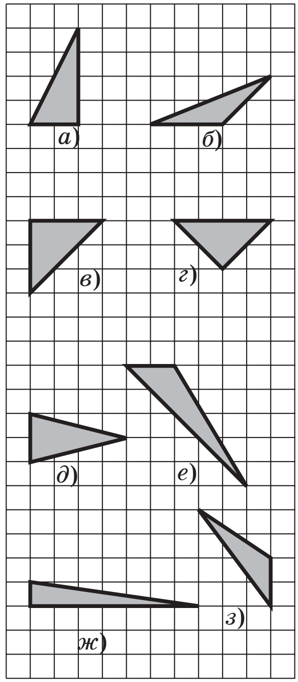


Рис. 11.15

11.93. Две стороны треугольника равны 5 и 6 см. Может ли его площадь быть равна: а) 10 $см^2$; б) 15 $см^2$; в) 20 $см^2$?

11.94. Можно ли площадь прямоугольного треугольника вычислить по формуле площади треугольника?

11.95. Какую фигуру образуют вершины равновеликих треугольников, имеющих общее основание AB?

11.96. Треугольник и параллелограмм имеют равные основания и высоты. Как относятся их площади?

11.97. Длины двух сторон треугольника равны 4 и 3 см. Какой может быть его площадь?

11.98. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 и 7 см; б) 1,2 и 35 дм.

С

11.99. Площадь треугольника 48 $см^2$. Вычислите высоту треугольника, проведенную к стороне, равной 32 см.

У

11.100. Дайте несколько различных доказательств теоремы о вычислении площади треугольника.

11.101. Найдите зависимость между площадью S данного треугольника и площадью S_1 треугольника, отсеченного от него любой из средних линий.

11.102. Вычислите площадь, занятую школьным садом и огородом (рис. 11.16). Произведите необходимые построения и измерения. Масштаб 1 : 5000.

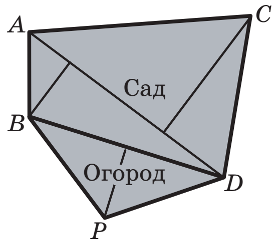


Рис. 11.16

11.103. Выведите формулу для вычисления площади равнобедренного прямоугольного треугольника по его гипотенузе c.

11.104. Вычислите площадь четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны 6 и 8 см.

11.105. Дан треугольник ABC (рис. 11.17); $A = 90°$, $AD \perp CB$. Найдите: а) площадь треугольника ABC; б) отношение площадей треугольников ABD и ACD; в) длину отрезка AD.

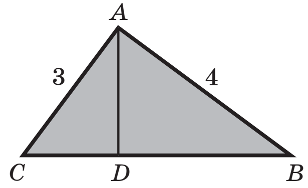


Рис. 11.17

11.106. Дан треугольник ABC; $AB = 3AC$. Чему равно отношение высот, проведенных из вершин B и C?

11.107. Катеты прямоугольного треугольника 6 и 8 см, гипотенуза 10 см. Вычислите высоту, проведенную к гипотенузе.

11.108. Основание одного треугольника 10 см, его высота 4 см. Основание другого треугольника 20 см. Какова должна быть его высота, проведенная к этой стороне, чтобы треугольники были равновелики?

11.109. Стороны прямоугольника 5 и 6 см. Постройте равновеликий ему треугольник с основанием 7,5 см. Сколько решений имеет задача?

11.110. В треугольнике высоты, проведенные к сторонам a и b, равны h_a и h_b.

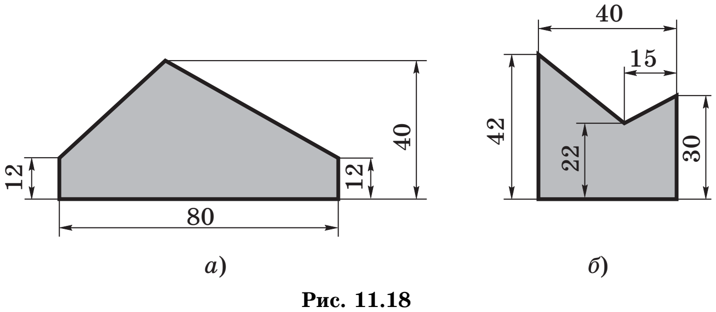
1. Докажите, что $a : b = h_b : h_a$.

2. Докажите, что если в треугольнике $a < b$, то $h_b < h_a$.

11.111. 1. Докажите, что во всяком треугольнике высоты обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены.

2. Существует ли треугольник, высоты которого равны: а) 5 см, 4 см, 3 см; б) 1 см, 1 см, 3 см; в) 5 см, 10 см, 12 см?

11.112. 1. Вычислите площади фигур, изображенных на рисунке 11.18, *а*, *б*.



а) *б*)

Рис. 11.18

2. Напишите формулы для вычисления площадей фигур, изображенных на рисунке 11.19, *а*, *б*.

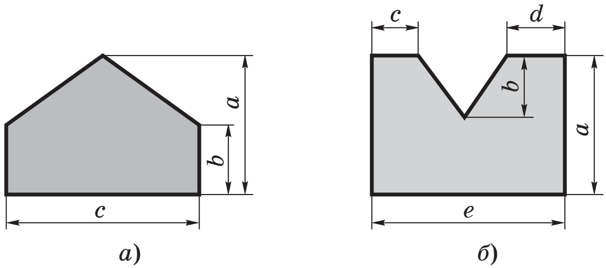


Рис. 11.19

11.113. Площадь фигуры, изображенной на рисунке 11.20, равна 805 мм^2. Вычислите неизвестный размер x.

11.114. Докажите, что медиана треугольника разбивает его на два треугольника одинаковой площади.

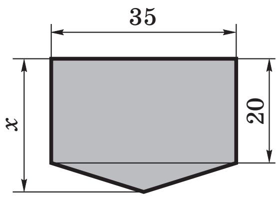


Рис. 11.20

11.115. У одного треугольника длина каждой стороны меньше 1 см, а у другого треугольника длина каждой стороны больше 10 м. Может ли площадь второго треугольника быть меньше площади первого?

11.116. Докажите, что диагонали параллелограмма разбивают его на четыре равновеликих треугольника.

Т **11.117.** Постройте параллелограмм, равновеликий данному треугольнику.

11.118. Найдите площадь фигуры, которая является объединением равностороннего треугольника, имеющего площадь S, и его образа при повороте на $60°$ вокруг центра этого треугольника.

11.119. Площадь равнобедренного треугольника равна S. Найдите площадь фигуры, которая является пересечением этого треугольника и его образа при симметрии относительно оси, параллельной основанию и делящей высоту, проведенную к этому основанию, в отношении $1 : 2$, считая от основания.

11.120. Через точку E, расположенную внутри угла BAC, проведите прямую так, чтобы она отсекала от угла BAC треугольник наименьшей площади.

11.121. Отрезок данной длины движется так, что концы его скользят по сторонам прямого угла. При каком положении этого отрезка площадь отсекаемого им треугольника будет наибольшей?

11.122. Постройте равнобедренный треугольник, равновеликий данному треугольнику так, чтобы основание построенного треугольника было равно одной из сторон данного треугольника.

11.123. В параллелограмме $ABCL$ точка K принадлежит DC и BC, $BK = KL = LC$. Найдите отношение площадей: а) треугольников DLK и DLC; б) треугольников DAC и DCK; в) треугольника DAC и четырехугольника $ADLB$: г) треугольника DCL и четырехугольника $ADKB$; д) четырехугольников $ABKD$ и $ABLD$.

11.124. Через вершину треугольника проведите прямую, разбивающую его: а) на два равновеликих треугольника; б) на два треугольника, площади которых относятся как 2 : 3.

11.125. Через вершину треугольника проведите две прямые, разбивающие его на три равновеликих треугольника.

11.126. Некоторая точка O плоскости соединена с вершинами параллелограмма $ABCD$.

1. Докажите, что если точка O находится внутри параллелограмма, то сумма площадей треугольников ABO и CDO равна сумме площадей треугольников BCO и DAO.

2. Сохранится ли это равенство, если точка O находится на стороне параллелограмма?

3. Сохранится ли это равенство, если точка O находится в вершине параллелограмма?

11.127. Даны точки A, B, C и D такие, что $AD = BC$, $BD = AC$, $ABCD$ — многоугольник. Докажите, что: а) $\angle BAD = \angle ABC$; б) $S_{ACD} = S_{BDC}$.

11.128. Постройте равнобедренный треугольник, равновеликий данному треугольнику, так, чтобы основание построенного треугольника было равно одной из сторон данного треугольника.

11.129. Постройте треугольник, равновеликий данному треугольнику, так, чтобы основание построенного треугольника совпадало с одной из сторон данного треугольника, а один из углов при основании был равен 45°.

11.130. Укажите наиболее рациональный способ вычисления площадей фигур, изображенных на рисунке 11.21, *а*, *б*.

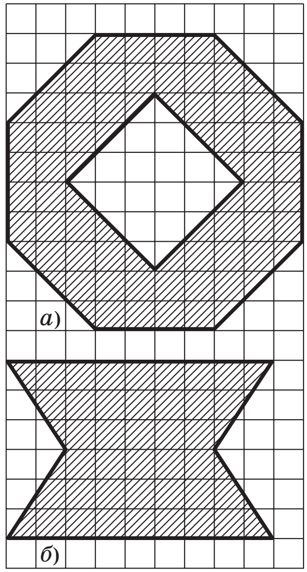


Рис. 11.21

11.131. Через центр симметрии квадрата $ABCD$ со стороной a проведена прямая l, пересекающая сторону AB; A и B не принадлежат прямой l. Выразите сумму расстояний от вершин квадрата до прямой l через a и длину b отрезка прямой l, затемненного внутри квадрата.

11.132. Каждая сторона треугольника разделена на три равных отрезка и точки деления соединены с вершинами (рис. 11.22). Найдите отношение площадей данного треугольника и затемненного.

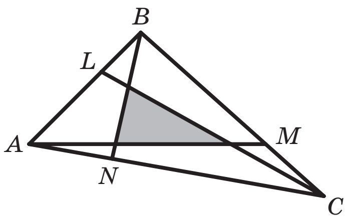


Рис. 11.22

11.133. Дан треугольник, площадь которого равна 6 см^2. Стороны его разделены пополам, и точки деления последовательно соединены отрезками. Стороны получившегося треугольника вновь разделены пополам, и также построен треугольник. Вычислите площадь последнего треугольника.

11.134. Какой вид должен иметь треугольник со сторонами a и b, чтобы его площадь была наибольшей? Вычислите площадь такого треугольника.

11.135. Через точку M, принадлежащую треугольнику ABC, проведены прямые, параллельные его сторонам. Каждые две из этих прямых и сторона данного треугольника определяют новый треугольник. Докажите, что если эти треугольники имеют площади S_1, S_2, S_3, а площадь данного треугольника равна S, то

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}.$$

11.136. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ACB = 90°$) проекции точки M пересечения медиан на стороны BC, AC, AB обозначим M_a, M_b, M_c (рис. 11.23). Докажите, что $S_1 = S_2 + S_3$, где S_1, S_2, S_3 — соответственно площади треугольников MM_aM_b, MM_bM_c, MM_aM_c.

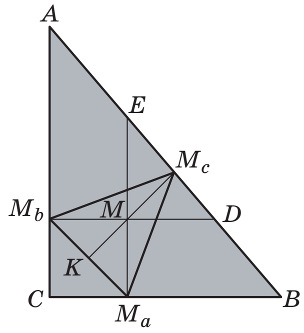


Рис. 11.23

11.137. Точка O — точка пересечения отрезков AC и BD (рис. 11.24). Докажите, что площади треугольников AOB и DOC равны тогда и только тогда, когда прямые BC и AD параллельны.

11.138. В треугольнике ABC прямая, проходящая через вершину A и делящая медиану BM в отношении $1 : 2$, считая от вершины, пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC.

11.139. Через середину высоты равнобедренного треугольника проведены две прямые, соединяющие ее с вершинами основания (рис. 11.25). Какую часть площади составляет каждая из частей, на которые эти две прямые разрезают треугольник?

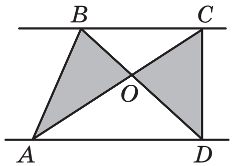


Рис. 11.24

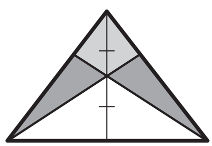


Рис. 11.25

11.140. Дан треугольник ABC. Продолжим его сторону AB за вершину B отрезком $BP = AB$, сторону AC — за вершину A отрезком $AM = CA$, сторону BC — за вершину C отрезком $KC = BC$. Во сколько раз площадь треугольника PKM больше площади треугольника ABC?

11.141. Внутри треугольника ABC лежит точка M. Докажите, что площади треугольников ABC и CBM равны тогда и только тогда, когда точка M находится на медиане BK ($K \in AC$) (рис. 11.26).

11.142. Как в треугольнике ABC провести ломаную $BDEFG$ (рис. 11.27), чтобы все пять полученных треугольников имели одинаковые площади?

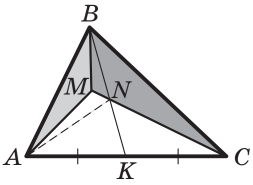


Рис. 11.26

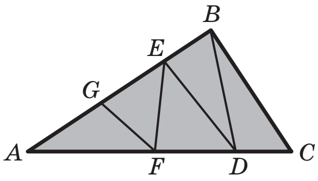


Рис. 11.27

11.143. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены произвольные параллелограммы $ACMN$ и $BCPQ$, стороны MN и PQ которых пересекаются в точке S. Докажите, что площадь параллелограмма $ABUN$, где $BU \parallel SC$ и $BU = SC$, равна сумме площадей параллелограммов $ACMN$ и $BCPQ$.

11.144. Прямой, проходящей через данную точку, взятую на стороне треугольника, разделите этот треугольник на две равновеликие части.

11.145. Через точку пересечения медиан треугольника проведена прямая. Докажите, что отношение площади образовавшегося треугольника к площади оставшейся части не меньше $\frac{4}{5}$.

11.146. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC даны точки A_1, B_1, C_1, причем $BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = AC_1 : C_1B = 2$. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 попарно пересекаются в точках M, N, P: M — точка пересечения прямых BB_1 и CC_1, N — точка пересечения прямых CC_1 и AA_1, P — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Докажите, что площадь треугольника MNP составляет $\frac{1}{7}$ площади данного треугольника.

11.147. В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ и около него же описан треугольник $A_2B_2C_2$, причем соответствующие стороны построенных треугольников параллельны. Докажите, что

$$S_{ABC}^2 = S_{A_1B_1C_1} \cdot S_{A_2B_2C_2}.$$

11.148. Из основания высоты треугольника проведены к двум другим его сторонам перпендикуляры. Докажите, что если основания этих перпендикуляров расположены на одной прямой с центром описанной около треугольника окружности, то эта прямая делит треугольник на равновеликие части.

11.149. В квадрате $ABCD$ точка M одинаково отстоит от вершин A и B, а также от стороны CD (рис. 11.28). Какую часть площади квадрата составляет площадь треугольника ABM?

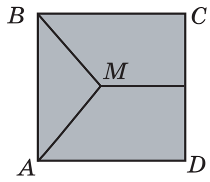


Рис. 11.28

44. Площадь трапеции

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Высотой трапеции* называется общий перпендикуляр к ее основаниям или к прямым, содержащим основания.

ТЕОРЕМА. *Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований и высоты, т.е. если a и b — основания трапеции, h — высота и S — площадь трапеции, то*

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Термины и обозначения

Площадь трапеции $ABCD$ обозначается так: $S_{\text{тр. } ABCD}$ или S_{ABCD}.

11.150. Можно ли по формуле площади трапеции вычислить: площадь прямоугольного треугольника? площадь прямоугольника?

11.151. Можно ли площади треугольника и трапеции вычислить по формуле $S = ch$, где c — средняя линия, а h — высота треугольника или трапеции соответственно?

11.152. Вычислите площадь трапеции, основания которой 12 и 16 см, а высота 15 см.

11.153. Вычислите площадь трапеции, большее основание которой 38 см, высота 14 см, а проекции боковых сторон на основание равны высоте трапеции.

11.154. Верно ли, что площадь трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна половине произведения длин диагоналей?

11.155. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 3,6 дм, 6 дм. Вычислите площадь этой трапеции.

11.156. Докажите, что прямая, проходящая через середину средней линии трапеции и пересекающая основания, делит эту трапецию на две равновеликие части.

11.157. Покажите, как можно разделить трапецию прямыми на n равновеликих частей (n = 3; 4).

11.158. Вычислите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 2 см и 4 см, а один из углов 45°.

11.159. По данным на рисунке 11.29, *а—г* размерам постройте трапеции и найдите их площади, проведя необходимые измерения.

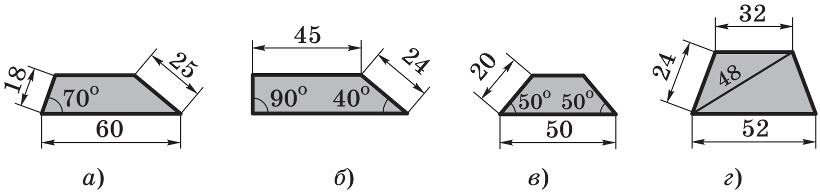


Рис. 11.29

11.160. По размерам, проставленным на рисунке 11.30, *а*, *б*, вычислите площади трапеций.

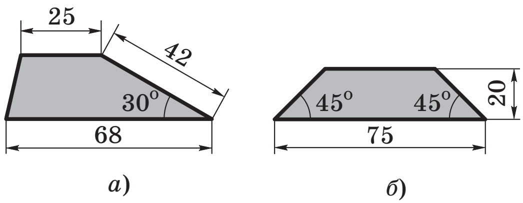


Рис. 11.30

11.161. Площади многоугольников (рис. 11.31, *а*, *б*) равны: а) 12 110 мм²; б) 3375 мм². Вычислите размер x.

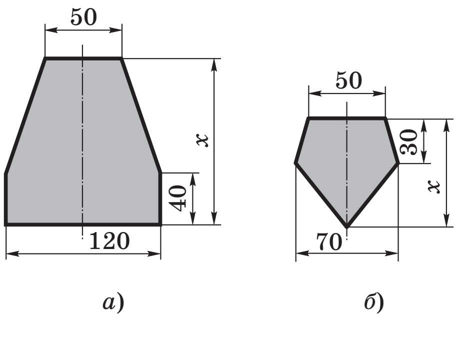


Рис. 11.31

11.162. Середины оснований трапеции соединены отрезком. Докажите, что полученные две трапеции равновелики.

11.163. Дана трапеция $ABCD$; $AB \parallel CD$, M принадлежит отрезку AB, $AM = MB$, P принадлежит отрезку MD. $DP = PM$, Q принадлежит отрезку MC, $CQ = MQ$. Докажите, что треугольники APD и BQC равновелики.

11.164. Дан треугольник ABC; $AB = AC = BC\sqrt{5} = a$. Выразите через a площадь треугольника ABC.

11.165. От участка земли, имеющего форму трапеции, нужно отделить треугольный участок так, чтобы его площадь была равна площади оставшейся части. Как это можно сделать?

11.166. Участок земли, имеющий форму трапеции, требуется разделить на четыре равновеликие части, каждая из которых должна быть трапецией. Как это можно сделать?

11.167. Дано: $ABCD$ — трапеция, $CK = KD$, $KE \perp AB$ (рис. 11.32). Докажите, что: 1) $S_{ABK} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$; 2) $S_{ABCD} = AB \cdot EK$.

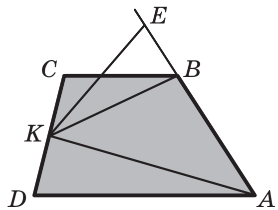


Рис. 11.32

11.168. Вычислите площадь треугольника, две медианы которого взаимно перпендикулярны и равны m_a и m_b.

11.169. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) дана точка M. Найдите множество точек M, для которых площади треугольников AMB и BMC равны.

11.170. Вычислите площадь трапеции $CDEF$, если $CD \parallel EF$, $\angle F = 45°$, $FE = 2CD = 5CF = 5$ см.

11.171. Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую длину может иметь бо́льшая диагональ этой трапеции?

11.172. Вычислите площадь трапеции с основанием 1 см, боковой стороной 3 см, составляющей с большим основанием угол 30°, если другой угол при большем основании равен 45°.

11.173. Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне BC, $AC = 4a$, $AD = 3a$. Выразите площадь трапеции через a.

T

11.174. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, опущенный на нее из середины другой боковой стороны.

11.175. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка K (середина AB) соединена с вершинами C и D (рис. 11.33). Найдите отношение площади треугольника KCD к площади трапеции.

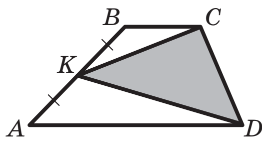


Рис. 11.33

11.176. В данной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проведена диагональ AC (рис. 11.34). На какой высоте нужно пересечь трапецию прямой, параллельной основаниям, чтобы сумма площадей треугольников AKL и LMC была наименьшей (K, L, M — точки пересечения прямой с отрезками AB, AC и CD соответственно)?

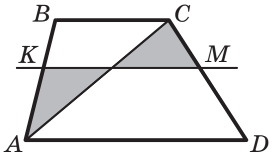


Рис. 11.34

11.177. В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны CD равна a, а расстояние от середины AB до CD равно b. Найдите площадь трапеции.

11.178. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что если стороны AD и BC параллельны, то треугольники AOB и COD равновелики. Докажите так же, что если AOB и COD равновелики, то AD и BC параллельны.

11.179. Основания трапеции равны a и b, боковые стороны равны c и d. Постройте эту трапецию. Найдите площадь трапеции.

11.180. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны m и n, а средняя линия равна l.

11.181. Диагонали трапеции равны 6 и 8, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 5. Найдите площадь трапеции.

11.182. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Площади треугольников, прилежащих к основаниям, равны 4 и 9. Найдите площадь трапеции.

11.183. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, делит трапецию на две равновеликие части. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.

11.184. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает боковые стороны. Отрезок этой прямой внутри трапеции равен c ($a < c < b$). В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?

11.185. Основания трапеции равны a и b, угол между диагоналями α (угол, под которым видны основания из точки пересечения диагоналей). Боковые стороны при продолжении пересекаются под углом β. Найдите площадь трапеции.

11.186. E — середина стороны AB трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции $ABCD$.

11.187. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, $DA \perp AB$, $CB \perp AB$. Из двух точек M и N, расположенных на стороне AB, противоположная сторона CD видна под прямым углами. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{MCD} + S_{NCD}$.

11.188. На основании AB трапеции $ABCD$ дана точка M. Постройте на стороне CD такую точку N, чтобы площадь четырехугольника, полученного при пересечении прямых AN, BN, CM и DM, была наибольшей.

11.189. Вокруг окружности радиуса r описана равнобокая трапеция $ABCD$; E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD трапеции равен $60°$. Докажите, что прямая EK параллельна прямой AB, и найдите площадь трапеции $ABEK$.

45. Площади произвольных многоугольников

Основное теоретическое содержание

Площадь произвольного многоугольника находят с помощью разбиения его на треугольники или конкретные четырехугольники, площади которых известны.

Термины и обозначения

Площадь произвольного многоугольника $ABCDEF$ обозначается так: S_{ABCDEF}.

Если в тексте написано «многоугольник», то это значит, что он выпуклый.

У

11.190. Выполните необходимые измерения и вычислите площади фигур, изображенных на рисунке 11.35.

11.191. Выполните необходимые построения и измерения и по полученным данным вычислите площадь четырехугольника (рис. 11.36), если никакие построения и измерения внутри этого четырехугольника проводить нельзя.

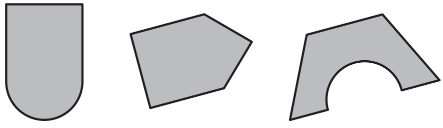


Рис. 11.35

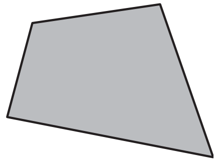


Рис. 11.36

11.192. Разметьте на местности участок земли, имеющий форму многоугольника, произведите необходимые измерения и вычислите площадь этого участка.

11.193. Постройте треугольник, равновеликий данному четырехугольнику.

11.194. Постройте равновеликие: а) прямоугольники; б) треугольник и четырехугольник; в) ромб и прямоугольник (отличные от квадрата).

11.195. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон другого четырехугольника, имеющего площадь S.

11.196. Выведите формулу для вычисления площади фигуры, изображенной на рисунке 11.37, если известно, что $AB \parallel DE \parallel CF$, $AB = DE$, $AF = FE$ и $CF \perp AE$.

11.197. Докажите, что площадь фигуры, изображенной на рисунке 11.38, равна $\frac{1}{2}(BD \cdot CK + AE \cdot OK)$, если известно, что $BD \parallel AE$ и $CK \perp AE$.

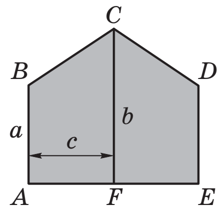


Рис. 11.37

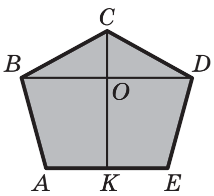


Рис. 11.38

11.198. Докажите, что если точки P, Q, R и S — середины сторон четырехугольника $ABCD$, то $S_{ABCD} = 2S_{PQRS}$.

11.199. Докажите, что если средняя линия четырехугольника делит его на две равновеликие части, то четырехугольник есть трапеция.

11.200. Средние линии четырехугольника разбивают его на четыре четырехугольника. Докажите, что сумма площадей двух неприлежащих четырехугольников составляет половину площади четырехугольника.

11.201. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны 3 и 4 см, одна из его диагоналей — 5 см. Вычислите площадь этого четырехугольника.

11.202. Докажите, что если два четырехугольника расположить так, что середины их сторон совпадают (рис. 11.39), то их площади равны.

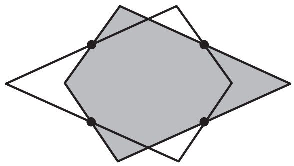


Рис. 11.39

11.203. В четырехугольнике соединены середины соседних сторон. Какой четырехугольник образуют проведенные отрезки? Найдите отношение площади этого четырехугольника к площади исходного.

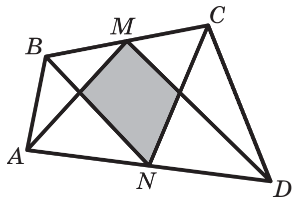


Рис. 11.40

11.204. Середины сторон BC и AD (точки M и N) четырехугольника $ABCD$ соединены с его вершинами, как показано на рисунке 11.40. Докажите, что $S_{AMD} = S_{ABN} + S_{NCD}$.

11.205. Дан четырехугольник $ABCD$. Его средние линии пересекаются в точке M. Построена ломаная $MAUV$, где $AU = MB$, $MU = MC$. Докажите, что M — середина отрезка VD. Найдите отношение площади четырехугольника $ABCD$ к площади четырехугольника $MAUV$.

11.206. На сторонах AB и CD четырехугольника $ABCD$ даны точки M и N, такие, что $AM : MB = CN : ND$. Пусть отрезки AN и DM пересекаются в точке P, а отрезки CM и BN — в точке Q. Докажите, что площадь четырехугольника $MQNP$ равна сумме площадей треугольников APD и BCQ.

11.207. Дан четырехугольник $ABCD$. Точки M и N делят сторону AB на три равных отрезка, точки M_1 и N_1 делят противоположную сторону DC также на три равных отрезка. Докажите, что площадь четырехугольника MNN_1M_1 составляет $\frac{1}{3}$ площади данного четырехугольника.

11.208. Дан четырехугольник $ABCD$. Каждая его сторона разделена на три равных отрезка и точки деления, расположенные на противоположных сторонах, соединены отрезками, разделяющими данный четырехугольник на 9 четырехугольников. Докажите, что тот из них, который не имеет общих точек со сторонами данного, составляет $\frac{1}{9}$ площади данного четырехугольника.

11.209. На сторонах четырехугольника $ABCD$ взяты точки M, P, K, H так, что $AM : MB = 3 : 5$; $BP : PC = 1 : 3$, $CK : KD = 4 : 5$; $DH : HA = 1 : 8$. Найдите отношение площади шестиугольника $MBPKDH$ к площади четырехугольника $ABCD$. Подумайте, при любых ли отношениях AM к MB, BP к PC и так далее можно решить эту задачу.

11.210. Дан четырехугольник $ABCD$, обладающий следующими свойствами: прямая, проходящая через точку C параллельно прямой AD, и прямая, проходящая через точку D параллельно прямой BC, пересекаются на стороне AB в точке M. Докажите, что $S_{CMD} = \sqrt{S_{AMD} \cdot S_{BMC}}$.

11.211. Точка M принадлежит четырехугольнику $ABCD$. Будет ли этот четырехугольник параллелограммом, если треугольники AMB, BMC, CMD, DMA равновелики?

11.212. Диагонали четырехугольника площадью 45 ед^2 делятся точкой их пересечения в отношении 2 : 3 и 4 : 5. Вычислите площадь каждого из четырех треугольников, на которые эти диагонали разбивают данный четырехугольник.

11.213. Выразите площадь затемненного многоугольника через длину m отрезка ON, если прямая MN перпендикулярна оси Ox (рис. 11.41, *а—г*).

11.214. Внутри выпуклого четырехугольника, площадь которого S, дана точка A. Определите вид и вычислите площадь

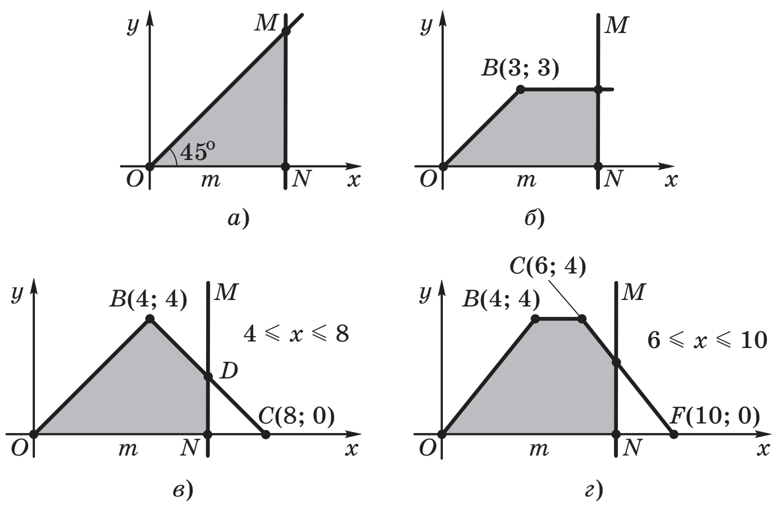


Рис. 11.41

четырехугольника, вершинами которого являются точки, симметричные точке A относительно середин сторон данного четырехугольника.

11.215. На продолжении стороны BC четырехугольника $ABCD$ найдите такую точку O, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ равнялась площади треугольника ABO.

11.216. Докажите, что если внутри четырехугольника $ABCD$ существует такая точка O, что отрезки AO, OB, OC, OD делят его на четыре равновеликие части, то хотя бы одна из диагоналей делит другую диагональ пополам. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

11.217. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны. Вычислите площадь этого четырехугольника, если $AB = 2$ см, $BC = 7$ см, $CD = 4$ см, $DA = 5$ см.

11.218. Докажите, что если длины диагоналей четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин средних линий четырехугольника.

11.219. Длины диагоналей четырехугольника равны a, а сумма длин его средних линий равна b. Вычислите площадь четырехугольника.

11.220. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если его диагонали взаимно перпендикулярны и равны 4,5 и 6,5 см.

11.221. В четырехугольнике $KLMN$ диагональ KM делит диагональ NL на два равных отрезка. Докажите, что $S_{KLM} = S_{KNM}$.

11.222. Диагонали разбивают четырехугольник на четыре треугольника с общей вершиной в точке пересечения диагоналей. Площади трех из этих треугольников равны 1 см^2, 2 см^2 и 3 см^2. Какова площадь четвертого треугольника?

11.223. Прямые, проведенные через вершины четырехугольника параллельно его диагоналям, ограничивают параллелограмм. Докажите, что площадь параллелограмма вдвое больше площади четырехугольника.

11.224. Докажите, что если у двух четырехугольников диагонали соответственно равны и пересекаются под равными углами, то четырехугольники равновелики.

11.225. Дан четырехугольник $ABCD$; BD — его диагональ. Через вершины C и D проведены прямые, параллельные соответственно прямым BD и BC, M — точка их пересечения. Докажите, что $S_{ACM} = S_{ABCD}$.

11.226. Прямая, параллельная диагонали AC четырехугольника $ABCD$ и проходящая через середину его диагонали BD, пересекает сторону AD в точке E. Докажите, что прямая CE делит площадь четырехугольника $ABCD$ пополам.

11.227. Через середину каждой диагонали четырехугольника проведена прямая, параллельная другой его диагонали. Точка O пересечения этих прямых соединена отрезками с серединами сторон четырехугольника. Докажите, что эти четыре отрезка делят площадь четырехугольника на четыре равные части.

11.228. Все внутренние углы шестиугольника $ABCDEF$ равны; $AB = CD = EF = 4a$, $BC = DE = FA = 3a$. Вычислите его площадь.

11.229. Вычислите площадь многоугольника $ABCDEFG$, в котором $AB = BC = CD = DE = EF = FG = 1$ и $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE = \angle AEF = \angle AFG = 90°$. Какую закономерность вы заметили при вычислении длин диагоналей AC, AD, AE, AF и стороны AG этого многоугольника?

11.230. Отрезок AB точками C и D разбит на три равных отрезка, $AC = CD = DB$. На этих отрезках, как на сторонах по одну сторону отрезка AB, построены равносторонний треугольник ACE, квадрат $CDGF$ и прямоугольный треугольник DBH ($\angle B = 90°$), в котором $BH = 0{,}5\ DB$. Точки E и F и точки G и H соединены отрезками. Вычислите площадь многоугольника $AEFGHB$, если $AB = 3b$.

11.231. На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты $ABEF$, $BCPQ$, $CAMN$. Какую наибольшую площадь может иметь шестиугольник $EFMNPQ$, если $BC = a$, $CA = b$?

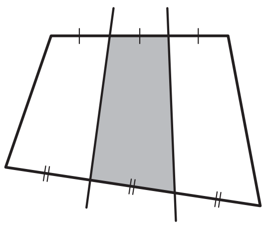


Рис. 11.42

11.232. Две прямые делят каждую из двух сторон четырехугольника на три равные части (рис. 11.42). Докажите, что между этми прямыми заключена $\frac{1}{3}$ площади четырехугольника.

11.233. Противоположные стороны шестиугольника $ABCDEF$ попарно параллельны. Докажите, что треугольники ACE и BDF равновелики.

11.234. Дан пятиугольник, в котором проведены пять отрезков, соединяющих вершины пятиугольника с серединами противолежащих им сторон. Докажите, что если четыре из этих отрезков имеют общую точку, то она принадлежит и пятому отрезку.

11.235. В пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и CDE равны по $90°$, стороны BC, CD и AE равны по 1 и сумма сторон AB и DE равна 1. Докажите, что площадь пятиугольника равна 1 (см. рис. 11.43).

11.236. Покажите, что на рисунке 11.44 закрашена ровно половина площади правильной пятиконечной звезды.

11.237. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образуемых парами сторон и диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.

11.238. Докажите, что если соединить середины последовательных сторон выпуклого n-угольника (рис. 11.45), то у полученного многоугольника:

а) периметр не меньше половины периметра M ($n \geqslant 3$);

б) площадь не меньше половины площади M ($n \geqslant 4$).

11.239. Два квадрата $AKBM$ и $CNDL$ расположены на плоскости так, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, причем точки K и L лежат внутри этого четырехугольника. Докажите, что площадь этого четырехугольника равна $(MN^2 - KL^2)/4$.

11.240. Через две вершины треугольника проведены две прямые, разбивающие его на три треугольника и четырехугольник.

1. Могут ли площади всех четырех частей быть равными?

2. Какие три из этих частей могут иметь равные площади? Во сколько раз отличается от них площадь четвертой части?

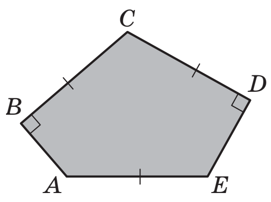


Рис. 11.43

Рис. 11.44

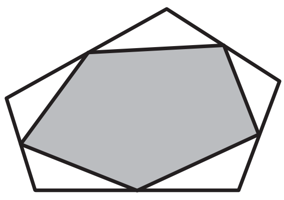


Рис. 11.45

Тема 12

ПЛОЩАДИ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И КРУГА

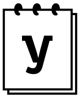
46. Площади правильных многоугольников

Основное теоретическое содержание

ТЕОРЕМА. *Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности:*

$$S_n = \frac{1}{2}\ nr^2 \cdot \sin \frac{360}{n},$$

где r — радиус описанной около правильного многоугольника окружности, а n — число его сторон.



12.1. Два квадрата расположены внутри полукруга так, как показано на рисунке 12.1. Докажите, что площадь большего квадрата в четыре раза превосходит площадь меньшего квадрата.

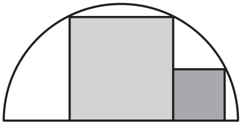


Рис. 12.1

12.2. Все стенки и дно картонной коробки (без крышки) представляют собой квадраты площадью 1 ед.^{2}. Разрежьте коробку на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат площадью 5 ед.^{2}.

12.3. $ABCD$ — квадрат со стороной a. Вычислите площадь звезды $AKBLCMDN$, если все ее стороны равны, а точки K, L, M, N удалены от сторон AB, BC, CD AD соответственно на расстояние b (рис. 12.2).

12.4. От каждой вершины квадрата со стороной a на его сторонах отложены отрезки, равные половине его диагонали. Полученные восемь точек последовательно соединены (рис. 12.3).

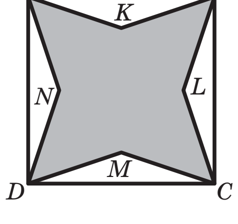


Рис. 12.2

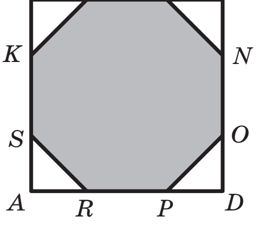


Рис. 12.3

Определите вид затемненного восьмиугольника и вычислите его площадь.

12.5. Вычислите отношения площадей правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника, если периметры этих фигур равны.

12.6. Сумма стороны a и высоты h равностороннего треугольника равна k. Выразите через k площадь этого треугольника.

12.7. Разность стороны равностороннего треугольника и его высоты равна m. Выразите через m площадь этого треугольника.

12.8. Две противоположные стороны правильного восьмиугольника и перпендикулярные к ним диагонали образуют прямоугольник. Выразите площадь прямоугольника через сторону a восьмиугольника.

12.9. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей его диагоналей.

И **12.10. 1.** Правильный восьмиугольник можно разрезать на конечное число параллелограммов (например, как на рис. 12.4). Попробуйте выполнить другие возможные разрезания и докажите, что среди них есть хотя бы два прямоугольника.

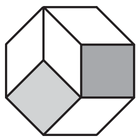


Рис. 12.4

2. Правильный $4k$-угольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы k прямоугольников.

3. Найдите суммарную площадь прямоугольников из пункта 2, если длина стороны $4k$-угольника равна 1.

47. Площадь круга

Основное теоретическое содержание

ТЕОРЕМА. *Площадь круга равна* πr^2, *где* r *— радиус круга.*

Термины и обозначения

Площадь круга обозначается так: $S_{\text{кр}}$.

12.11. Как изменится площадь круга, если: а) диаметр уменьшить в 4 раза; б) радиус увеличить в 3 раза?

С

12.12. Вычислите площадь круга, диаметр которого равен: а) 4 см; б) 10 м.

У

12.13. Выразите площадь круга через длину его окружности.

12.14. Чему равна площадь круга, если длина окружности равна: а) 4; б) 2π; в) 10π?

12.15. Вычислите площадь сечения провода, если его диаметр равен: а) 3 мм; б) 0,2 мм.

12.16. Вычислите площадь поперечного сечения дерева, если его обхват (длина окружности) равен: а) 88 см; б) 4 дм.

12.17. Произведите необходимые измерения и вычислите площади фигур, изображенных на рисунке 12.5, *а*—*е* (масштаб 1 : 10).

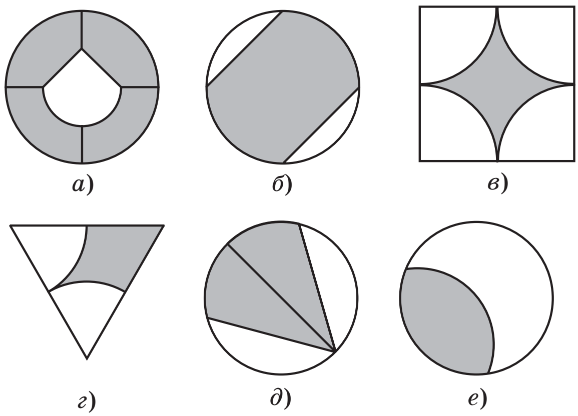


Рис. 12.5

12.18. Из квадратного листа жести вырезали круг наибольшей площади. Какая часть листа ушла в отходы?

12.19. Постройте круг, площадь которого была бы равна: а) 4 см^2; б) 16 м^2 (построение приближенное).

12.20. Вычислите площадь круга, описанного около: а) равностороннего треугольника со стороной 10 см; б) правильного шестиугольника со стороной 10 см; в) правильного восьмиугольника со стороной 10 см.

12.21. Вычислите площадь круга, вписанного в правильный шестиугольник со стороной 10 см.

12.22. Вычислите площадь круга, вписанного в правильный восьмиугольник со стороной 10 см.

12.23. Стороны треугольника ABC равны 3, 4 и 5 см. Найдите площади четырех кругов, касающихся прямых AB, BC, CA (рис. 12.6).

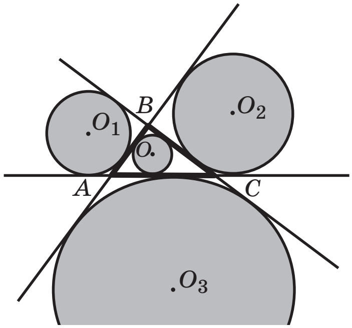


Рис. 12.6

T **12.24.** В Древнем Египте площадь круга считалась равной площади квадрата, сторона которого равна $\frac{8}{9}$ диаметра этого круга. Каким значением числа π пользовались египетские математики?

12.25. Докажите, что отношение площадей двух кругов равно квадрату отношения их радиусов.

12.26. Два круга имеют радиусы 3 и 12. Чему равно отношение площадей этих кругов?

12.27. Постройте круг (построение приближенное), площадь которого равна: а) сумме площадей двух данных кругов; б) их разности.

12.28. Постройте окружность, которая делила бы данный круг на две равновеликие фигуры — кольцо и круг.

48. Площади частей круга

Основное теоретическое содержание

Площадь кругового сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha,$$

где r — радиус круга, α — градусная мера соответствующего центрального угла.

Площадь кругового сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha \pm S_{\Delta},$$

где r — радиус круга, α — градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а S_{Δ} — площадь треугольника с вершинами в центре круга и в концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «+» надо брать, если $\alpha > 180°$, а знак «−», — если $\alpha < 180°$.

Термины и обозначения

Площадь шарового сектора обозначается так: $S_{\text{ш. сек}}$. Площадь шарового сегмента обозначается так: $S_{\text{ш. сег}}$.

12.29. Вычислите площадь сектора, радиус r которого равен 6 см, а величина угла равна: 1) $24°$; 2) $30°$; 3) $\frac{\pi}{5}$.

12.30. Докажите, что сумма площадей двух затемненных луночек (рис. 12.7) равна площади прямоугольного треугольника.

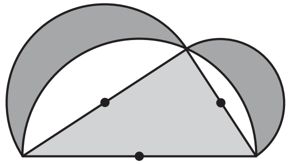


Рис. 12.7

12.31. Докажите, что сумма площадей полукругов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, как на диаметрах, равна площади полукруга, построенного на гипотенузе.

12.32. Вычислите радиус окружности, которая делит круг радиуса r на две равновеликие фигуры — кольцо и круг.

12.33. Докажите, что площадь кольца, образованного двумя концентрическими окружностями, равна площади круга, диаметр которого равен хорде большей окружности, касающейся меньшей окружности.

12.34. В прямой угол вписана окружность радиусом 5 см. Вычислите площадь фигуры, заключенной между сторонами этого угла и дугой окружности, ограниченной точками касания окружности сторон угла.

12.35. На катете AB ($AB = 2a$) равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$), как на диаметре, построена полуокружность так, как это указано на рисунке 12.8, и из точки A, как из центра, проведена дуга окружности радиусом $2a$, пересекающая гипотенузу AC в точке E. Вычислите площади фигур S_1, S_2, S_3 и S_4.

12.36. 1. Диаметр AB окружности разделен на 4 равных отрезка, на которых построены полуокружности, как показано на рисунке 12.9. Вычислите площадь каждой из затемненных фигур, если $AB = d$.

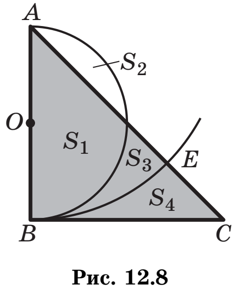


Рис. 12.8

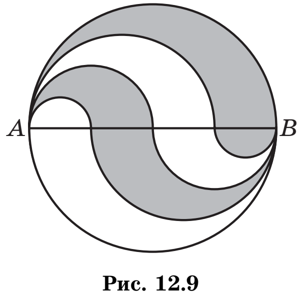


Рис. 12.9

2. Решите эту же задачу для случая, когда отрезок AB разделен на n равных отрезков.

12.37. Окружность радиусом R проходит через центр другой окружности. Точки пересечения этих окружностей лежат на диаметре первой окружности. Выразите через R площадь затемненной части (рис. 12.10).

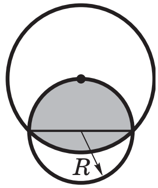


Рис. 12.10

12.38. Из каждой вершины равностороннего треугольника радиусом, равным его стороне, проведена дуга, концами которой служат две другие вершины треугольника. Вычислите площадь затемненной фигуры (рис. 12.11).

12.39. Три равных круга радиусом r попарно касаются. Вычислите площадь затемненной фигуры (рис. 12.12).

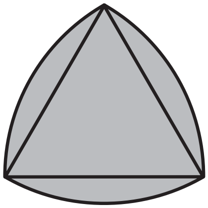


Рис. 12.11

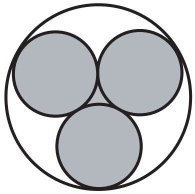


Рис. 12.12

12.40. Найдите периметр и площадь фигуры (рис. 12.13, *а*, *в*) или ее затемненной части (рис. 12.13, *б*, *г*, *д*). Сколько осей симметрии имеет каждая фигура? Какие из фигур имеют центр симметрии? Назовите изометрии, с помощью которых каждая фигура может перейти в себя.

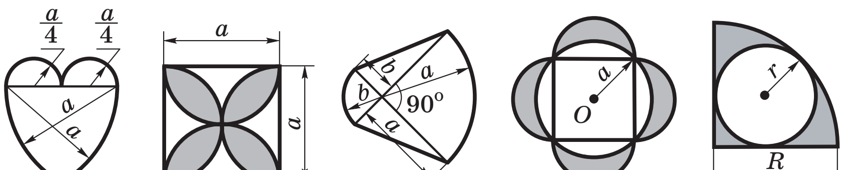
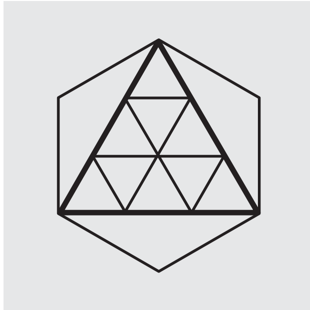


Рис. 12.13

Глава III
ПОДОБИЕ ФИГУР



Тема 13
ПОНЯТИЕ ПОДОБИЯ ФИГУР. ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

49. Понятие подобия фигур. Подобие треугольников

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два треугольника *подобны*, если у них соответствующие углы равны и соответствующие стороны пропорциональны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отношение сходственных сторон в подобных треугольниках называется коэффициентом подобия треугольника.

Термины и обозначения

Подобие фигур обозначается знаком «$\backsim$». Запись $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ читается так: «треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$». Коэффициент подобия треугольников часто обозначают k.

13.1. Назовите предметы в окружающем мире, которые имеют одинаковую форму, но разные размеры.

13.2. Назовите всегда подобные друг другу фигуры.

13.3. Приведите примеры подобных фигур.

13.4. Подобны ли две любые равные фигуры?

13.5. Равны ли две подобные фигуры? При каком условии подобные фигуры равны?

13.6. О двух фигурах L_1 и L_2 известно, что $L_1 \backsim L_2$ и $L_2 \backsim L_1$. Можно ли по этим данным найти значение коэффициента подобия?

13.7. Дано: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Следует ли из этого, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$? Почему?

13.8. Нарисуйте какие-нибудь две подобные, но неравные фигуры.

С

13.9. Стороны одного (меньшего) треугольника — 4 дм, 3,6 дм и 2,5 дм. Вычислите стороны другого треугольника, подобного данному, если отношение их сходственных сторон равно 1,6.

У

13.10. План земельного участка начерчен в двух видах: первый план имеет масштаб 1 : 10, а второй — 1 : 100. Чему равны коэффициенты подобия этих планов?

13.11. Нарисуйте две неравные «правильные» пятиугольные звезды и найдите коэффициент подобия этих фигур.

13.12. На рисунке 13.1 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$, длины сторон указаны. Найдите x и y.

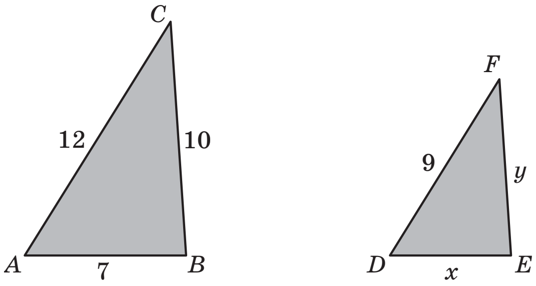


Рис. 13.1

13.13. С одного и того же негатива отпечатаны две фотографии: одна без увеличения, а вторая с увеличением. На первой фотографии некоторый объект имеет ширину 2 см и высоту 2,3 см. На второй фотографии ширина этого объекта равна 7,5 см. Какова его высота?

13.14. В двух подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны AB, BC и AC соответственно равны 20, 18 и 15 см. Сторона A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равна 10 см. Чему равны стороны A_1B_1 и B_1C_1?

13.15. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC соответственно равны 20, 15 и 12 см. Коэффициент подобия треугольников равен 2,5. Вычислите периметр треугольника $A_1B_1C_1$.

13.16. Стороны данного треугольника равны 8, 6 и 5 см. Меньшая сторона второго треугольника, подобного данному, — 2,5 см. Определите другие стороны второго треугольника.

13.17. Стороны данного треугольника равны 3,5 см, 4 см, 8 мм. Бо́льшая сторона второго треугольника, подобного данному, — 6 см. Определите другие стороны второго треугольника.

13.18. Стороны данного треугольника — 12,6 м, 16,5 м и 18 м. Вычислите стороны треугольника, подобного данному, если меньшая сторона этого треугольника равна большей стороне данного треугольника.

13.19. В треугольнике ABC $AB = 16{,}2$ см, $BC = 24{,}3$ см и $AC = 32{,}7$ см. Вычислите стороны треугольника $A_1B_1C_1$, подобного данному, если сторона A_1B_1 этого треугольника соответствует стороне AB первого треугольника и если: а) больше этой стороны на 10,8 см, б) меньше этой стороны на 5,4 см.

13.20. Докажите, что два треугольника, подобные одному и тому же третьему треугольнику, подобны.

50. Признаки подобия треугольников

Основное теоретическое содержание

ТЕОРЕМА. *Признаки подобия треугольников*:

Два треугольника подобны, если: 1) *два угла одного соответственно равны двум углам другого*; 2) *две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, образованные этими сторонами, равны*; 3) *стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого.*

13.21. Подобны ли треугольники ABC и KPT, если в них $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle P = 60°$, $\angle T = 70°$?

13.22. Острый угол одного прямоугольного треугольника равен 30°, а другого — 60°. Подобны ли эти треугольники?

13.23. Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют по равному тупому углу?

13.24. Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют: а) по прямому углу; б) равные острые углы.

13.25. Постройте разносторонний треугольник и проведите прямую, параллельную одной из его сторон так, чтобы коэффициент подобия данного и отсеченного треугольника был равен: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{3}{4}$.

13.26. Используя рисунок 13.2, где $AC \parallel A_1C_1 \parallel A_2C_2$, напишите пропорции, начинающиеся с соотношений:

1) $\frac{AC}{A_1C_1}$; 2) $\frac{AB}{A_2B}$; 3) $\frac{BD}{BD_1}$;

4) $\frac{BC}{C_2C_1}$; 5) $\frac{AD}{A_1D_1}$.

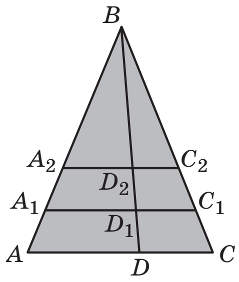


Рис. 13.2

13.27. На рисунке 13.3, *а—г* изображены геометрические фигуры, параллельные прямые на этих рисунках обозначены стрелками (направление стрелок имеет значение). Назовите на этих рисунках подобные треугольники и объясните, почему они подобны.

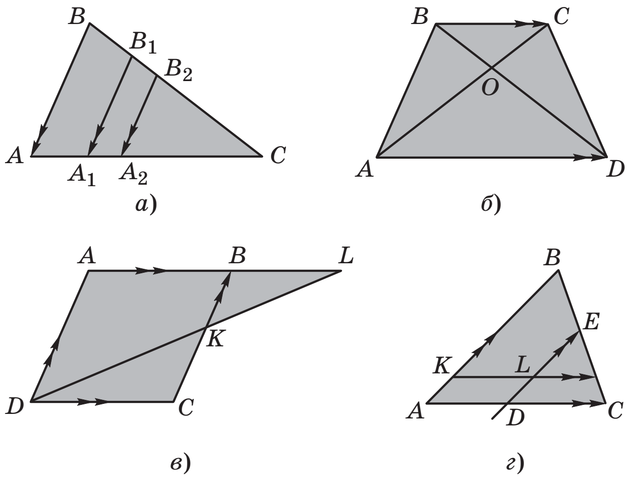


Рис. 13.3

13.28. В прямоугольном треугольнике построены проекции катетов на гипотенузу. Сколько пар подобных треугольников образовалось на этом чертеже?

13.29. Сколько пар подобных треугольников вы видите на рисунке 13.4?

13.30. В треугольнике проведены все средние линии. Сколько образовалось треугольников, подобных данному?

13.31. Подобны ли два треугольника, если их стороны имеют длины:

а) 2 см, 3 см, 4 см и 3 см, 4 см, 5 см;

б) 3 см, 4 см, 6 см и 9 см, 14 см, 18 см;

в) 2 см, 4 см, 3 см и 10 мм, 15 мм, 20 мм?

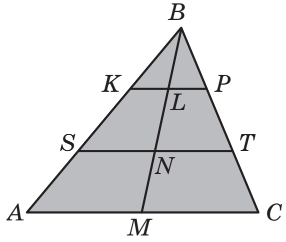


Рис. 13.4

13.32. По данным, указанным на рисунке 13.5, *а—г*, найдите подобные треугольники и объясните, почему они подобны.

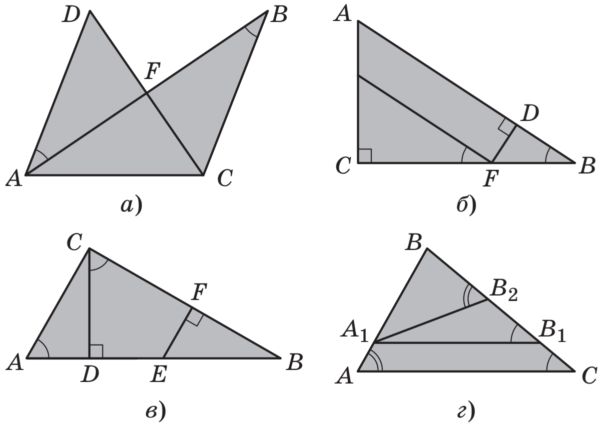


Рис. 13.5

13.33. На одной из сторон данного угла A отложены отрезки $AB = 5$ см и $AC = 16$ см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8$ см и $AF = 10$ см. Будут ли подобны треугольники ACD и ABF? Ответ обоснуйте.

13.34. Докажите, что если через точку, взятую внутри окружности, проведены две хорды, то произведение длин отрезков одной из них равно произведению длин отрезков другой.

13.35. Из двух пересекающихся хорд первая точкой пересечения разделилась на отрезки a и b, а вторая — в отношении $\frac{m}{n}$. Найдите вторую хорду. Произведите вычисления для случаев:

1) $m : n = 1 : 2$, $a = 2$, $b = 3$;

2) $m : n = 4 : 5$, $a = 3$, $b = 4$.

13.36. Докажите, что если из какой-либо точки вне окружности провести к ней секущую и касательную, то отрезок касательной (от данной точки до точки касания) есть среднее пропорциональное между всей секущей и ее внешней частью.

13.37. Из одной и той же точки проведены к окружности касательная и секущая. Найдите длину секущей, если касательная равна l, а внешний и внутренний отрезки секущей находятся в отношении $p : q$. Произведите вычисления для случаев:

1) $l = 7$, $p : q = 1 : 2$; 2) $l = 16$, $p : q = 0{,}5$.

13.38. Докажите, что два прямоугольных треугольника подобны, если их катеты пропорциональны.

13.39. Докажите, что прямоугольные равнобедренные треугольники подобны.

13.40. Из точки D, лежащей на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, опущен перпендикуляр DE на катет BC. Докажите, что треугольники DBE и ABC подобны.

13.41. Прямая, паралельная стороне AB треугольника ABC, делит его сторону AC в отношениии $3 : 5$. В каком отношении эта прямая делит сторону BC?

13.42. На сторонах AC и AB треугольника ABC отмечены точки K и P так, что $\angle AKP = \angle B$. Докажите, что треугольники AKP и ABC подобны.

13.43. Докажите, что в подобных треугольниках отношение двух сходственных сторон равно отношению двух сходственных: 1) высот; 2) биссектрис; 3) медиан.

13.44. В треугольнике ABC основание $AB = a$. Прямая, пересекающая боковые стороны, в отношении $\frac{m}{n}$ (считая от вершины). Определите отрезок прямой, заключенный между сторонами треугольника. Произведите вычисления для случаев:

1) $a = 2{,}5$ см, $\frac{m}{n} = \frac{3}{7}$; 2) $a = 4{,}8$ см, $\frac{m}{n} = \frac{12}{25}$;

3) $a = 12{,}6$ см, $\frac{m}{n} = 0{,}75$.

13.45. Между пунктами A и B находится болото. Чтобы найти расстояние между A и B, отметили вне болота произвольную точку C, измерили расстояние $AC = 600$ м и $BC = 400$ м, а также $\angle ACB = 62°$. Начертите план в масштабе $1 : 10\,000$ и найдите по нему расстояние между пунктами A и B.

13.46. Чтобы определить на местности расстояние AB между двумя точками, одна из которых B недоступна, можно выполнить построения, план которых показан на рисунке 13.6. Найдите расстояние AB, если $AC = 150$ м, $DF \parallel AB$, $DF = 16$ м, $CD = 30$ м.

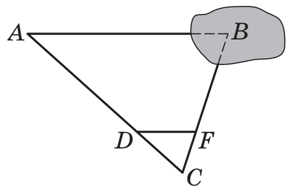


Рис. 13.6

13.47. На рисунке 13.7, *а—в* показано, как можно разными способами определить ширину реки AB, построив на местности подобные треугольники. Обоснуйте в каждом из изображенных на рисунке случаев: какие построения выполнены; чем мы пользуемся для определения ширины реки в нашем случае. Выполните необходимые измерения и определите ширину реки (масштаб рисунков 1 : 1000).

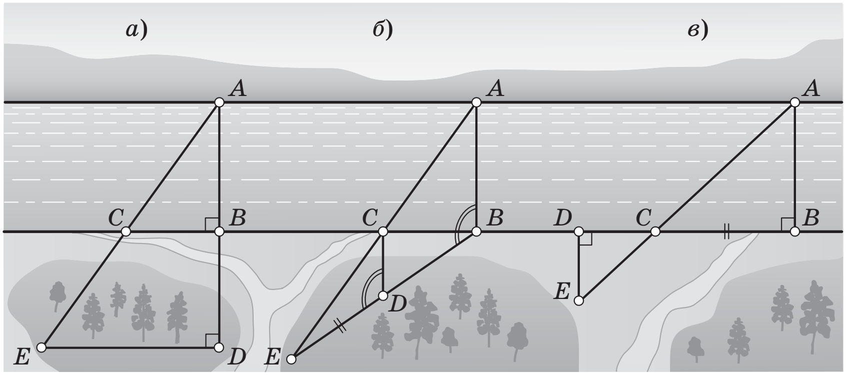


Рис. 13.7

13.48. Наблюдатель, находящийся в точке A (рис. 13.8), видит конец шеста C и точку D верхней части мачты DF расположенными на одной прямой. Какова высота мачты, если $AF = 60$ м, $AB = 6$ м, $BC = 3$ м?

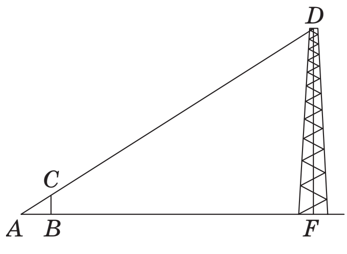


Рис. 13.8

13.49. Найдите расстояние между двумя недоступными точками путем построения на местности подобных треугольников.

13.50. Можно ли две стороны треугольника пересечь прямой, параллельной третьей стороне, чтобы отсеченный треугольник был подобен данному?

13.51. Может ли прямая, не параллельная ни одной стороне треугольника, отсечь от него треугольник, подобный данному?

13.52. Может ли медиана треугольника рассечь его на два разных подобных треугольника?

13.53. Мальчик хочет измерить высоту дерева, воспользовавшись линейкой, длина которой 15 см (рис. 13.9). На стволе он отмечает точку, находящуюся в 1,5 м от земли. Отойдя от дерева на 30 см, мальчик вытягивает перед собой руку с линейкой (линейка расположена вертикально) и устанавливает линейку таким образом, чтобы она закрывала собой дерево от верхушки до выбранной ранее на стволе отметки. Затем мальчик измеряет расстояние AB от глаза до линейки (например, с помощью веревки) и вычисляет высоту дерева по следующей формуле:

$$h = 30\frac{15}{AB} + 1{,}5.$$

Почему можно воспользоваться этой формулой? В каких единицах будет измерена высота дерева? Какой будет высота дерева, если $AB = 20$ см?

13.54. Докажите, что любой остроугольный или тупоугольный треугольник, не имеющий равных сторон, нельзя рассечь прямой, проходящей через вершину, на два подобных треугольника.

13.55. Пользуясь признаками подобия треугольников, докажите, что две медианы треугольника делятся их точкой пересечения в отношении 2 : 1.

13.56. Дан треугольник ABC. При каком условии можно провести через вершину C прямую p, пересекающую отрезок AB в точке C_1 так, чтобы треугольники ACC_1 и BCC_1 были подобны?

13.57. Определите углы равнобедренного треугольника, если биссектриса угла при основании этого треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному.

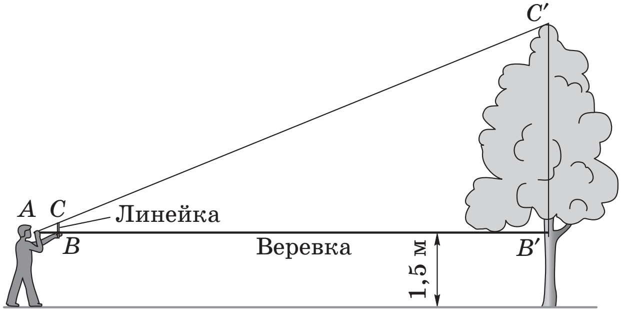


Рис. 13.9

13.58. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). Проведены неравные высоты AM и BN. Докажите, что треугольники AMC и ABN подобны.

13.59. Дан треугольник ABC. Проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольник A_1B_1C подобен треугольнику BAC.

13.60. Докажите, что если стороны одного треугольника соответственно перпендикулярны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

13.61. Дан остроугольный треугольник ABC. Проведены высоты AA_1 и BB_1. Подсчитайте, сколько образовалось при этом подобных друг другу треугольников.

13.62. Дан треугольник ABC. Проведены высоты AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке H. Докажите, что $A_1H \cdot AA_1 = BA_1 \cdot CA$, $B_1H \cdot BB_1 = CB_1 \cdot AB_1$.

13.63. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C взята точка D так, что $\angle BDC = \angle ABC$. Известно, что $AB = 13$, $BC = 8$, $BD = 10$. Найдите AC.

13.64. Измерьте высоту какого-либо сооружения (мачты, высокого здания, фабричной трубы и т. п.), находящегося в окрестностях школы.

13.65. Отряд туристов A идет по маршруту в направлении AB (рис. 13.10). В каком направлении должна двигаться группа C, чтобы пересечь шоссе MN в том же месте, что и отряд A?

13.66. Из пункта B к месту пересечения двух дорог AC и AD требуется провести узкоколейную дорогу. Как на местности наметить трассу дороги BA, если место пересечения дорог A окружено лесом?

13.67. Через лес требуется прорубить просеку в направлении, заданном двумя доступными точками A и B, между которыми находится лес. Как это сделать?

13.68. Две параллельные плоскости α и β пересекают сторону AB угла ABC в точках D и D_1, а сторону BC соответственно в точках E и E_1. Найдите длину отрезка DE, если $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 54$ см.

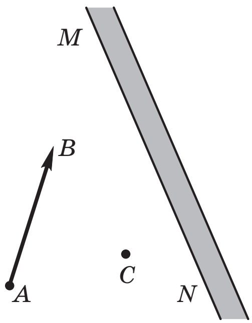


Рис. 13.10

И

13.69. Еще одно доказательство теоремы Пифагора.
1. Сформулируйте и докажите признаки подобия прямоугольных треугольников.

2. Пусть в треугольнике ABC угол C — прямой. Докажите, что высота CH разбивает его на треугольники CAH и CBH, подобные данному треугольнику ABC_1 (рис. 13.11).

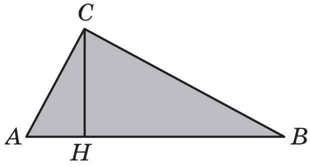


Рис. 13.11

3. Используя признаки подобия прямоугольных треугольников, докажите теорему Пифагора: *в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

4. Докажите теорему, обратную теореме Пифагора: *если в треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 + CB^2$, то угол C — прямой.*

5. Докажите, что если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то и суммы квадратов его противоположных сторон равны.

6. Докажите, что квадрат наименьшей медианы прямоугольного треугольника в 5 раз меньше суммы квадратов других медиан.

7. Две окружности, радиусы которых 32 и 72 см, касаются друг друга внешним образом. Прямая касается этих окружностей в точках A и B. Найдите расстояние AB.

13.70. Подобные треугольники — «ключ» к решению геометрических задач. [26]

В одних задачах подобные треугольники заданы в условии, в других они «замаскированы» и поэтому сразу не бросаются в глаза; встречаются и такие задачи, в которых подобных треугольников вообще нет, чтобы их получить, нужно сделать некоторые дополнительные построения.

Научиться «видеть» подобные треугольники очень полезно — обычно они облегчают решение задачи. Решим некоторые такие задачи.

1. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка O и через нее проведены три прямые, паралельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник ABC на шесть частей, три из которых являются треугольниками. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны r_1, r_2, r_3; радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен r. Докажите, что $r = r_1 + r_2 + r_3$.

2. Докажите, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами треугольника, образованного отрезками, соединяющими основания высот.

3. Окружность радиусом r проходит через вершину B равнобедренного треугольника ABC, касается основания AC

в точке A и пересекает боковую сторону BC в точке D. Найдите длину боковой стороны AB, если $\frac{BD}{DC} = k$.

4. Серединный перпендикуляр к гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC пересекает катет AC в точке M, а продолжение катета BC — в точке N. Определите AB, если $MP = a$, $MN = b$ (рис. 13.12).

5. Найдите площадь ромба $ABCD$, если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, равны соответственно R и r (рис. 13.13).

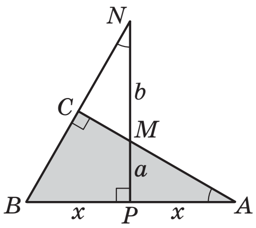


Рис. 13.12

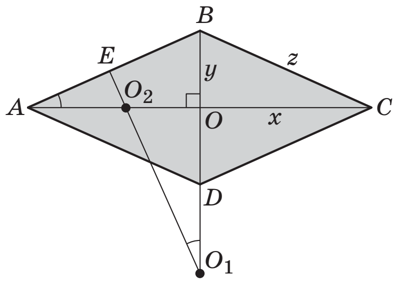


Рис. 13.13

6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на высоте BD как на диаметре построена окружность. Через точки A и C к окружности проведены касательные AM и CN, продолжения которых пересекаются в точке O. Определите отношение $\frac{AB}{AC}$, если $\frac{OM}{AC} = k$ и высота BD меньше основания AC (рис. 13.14).

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) высота AF пересекает высоту BD в точке O, причем $\frac{BO}{OD} = n$. В каком отношении биссектриса AE делит высоту BD (рис. 13.15)?

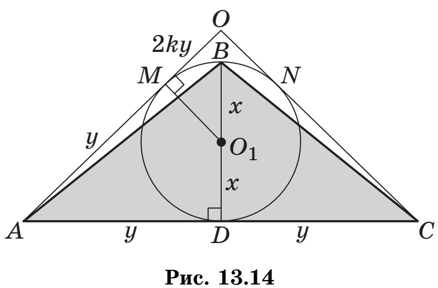


Рис. 13.14

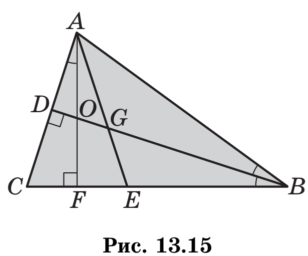


Рис. 13.15

8. В трапеции $ABCD$ (AB и CD — основания) $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$). Окружность, проходящая через вершины A, B и C, касается стороны AD. Найдите диагональ AC (рис. 13.16).

9. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD, пересекающиеся в точке F. Из вершины C проведена прямая CK, параллельная боковой стороне AD, которая пересекает BD в точке L так, что $DF = BL$. Найдите отношение $AB : CD$ (рис. 13.17).

10. В треугольнике ABC через основание D высоты BD проведена прямая, параллельно стороне AB до пересечения со стороной BC в точке K. Найдите отношение $BK : KC$, если площадь треугольника BDK составляет $\frac{3}{16}$ площади треугольника ABC (рис. 13.18).

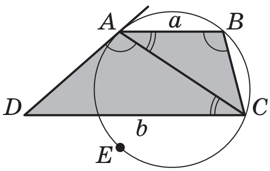


Рис. 13.16

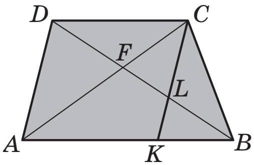


Рис. 13.17

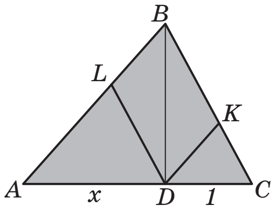


Рис. 13.18

13.71. Теорема Менелая. [27]

Эта теорема дошла до нас в арабском переводе книги «Сферика» Менелая Александрийского (I в. н. э.). Теорема Менелая красива и проста, она входит в золотой фонд древнегреческой математики.

1. Теорема Менелая. *Пусть $\triangle ABC$ пересечен прямой, не параллельной стороне AB и пересекающей две его стороны AC и BC соответственно в точках B_1 и A_1, а прямую AB в точке C_1* (рис. 13.19), *тогда*

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

Замечание. Чтобы не запутаться, в каком порядке идут буквы в формуле, придерживайтесь следующего правила: двигайтесь по контуру треугольника от вершины до точки пересечения с прямой и от точки пересечения до следующей вершины.

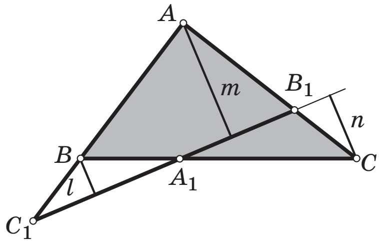


Рис. 13.19

2. Решите задачу с помощью теоремы Менелая.

Пусть AD — медиана $\triangle ABC$ (рис. 13.20). На AD взята точка K так, что $AK : KD = 3 : 1$. В каком отношении прямая BK делит площадь ΔABC?

3. Часто при решении задач нужна не сама теорема Менелая, а теорема, обратная ей.

Теорема. *Рассмотрим треугольник ABC. Пусть точки A_1, B_1, C_1 принадлежат прямым BC, AC, AB соответственно, т. е. лежат на сторонах треугольника или их продолжениях* (рис. 13.21). *Если* $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$, *то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.*

Докажите эту теорему.

4. Следующая красивая задача, вероятно, так же, как и теорема Менелая, известна с глубокой древности.

Три окружности разных радиусов расположены на плоскости так, что ни одна из них не лежит целиком в круге, ограниченном другой. Каждой паре окружностей сопоставим точку пересечения внешних двойных касательных. Докажите, что полученные три точки лежат на одной прямой (рис. 13.22).

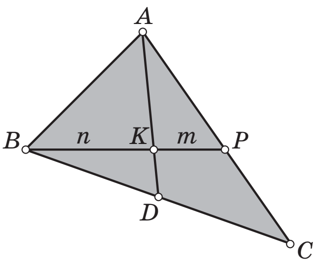


Рис. 13.20

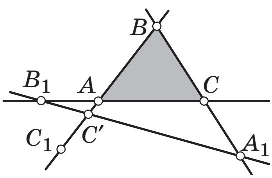


Рис. 13.21

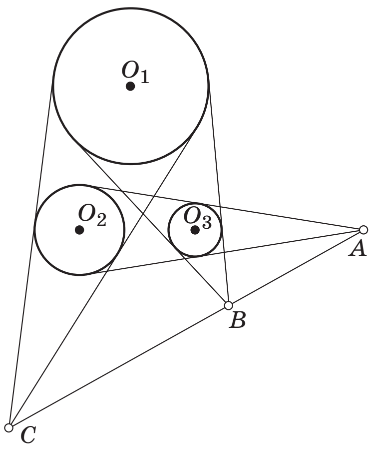


Рис. 13.22

Используя все ранее сказанное, решите следующие задачи.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC даны соответственно точки M и N, такие, что $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NA} = \frac{1}{2}$. В каком отношении точка S пересечения отрезков BN и CM делит каждый из этих отрезков?

6. В треугольнике ABC биссектриса AD делит BC в отношении $2 : 1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

7. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, а на стороне BC — точки E и F так, что $AD : DB = 3 : 2$, $BE : EC = 1 : 3$ и $BF : FC = 4 : 1$. В каком отношении прямая AE делит отрезок DF?

8. Ортоцентр H треугольника ABC делит высоту пополам. Докажите, что $\cos\angle C = \cos\angle A \cdot \cos\angle B$, где $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — углы при вершинах.

9. В правильном треугольнике ABC со стороной a точка E — середина BC, D — середина AC, точка F принадлежит отрезку DC, а пересечение отрезков BF и DE — точка M, $S_{ABMD} = \frac{5}{8} S_{ABC}$. Найдите MF (рис. 13.23).

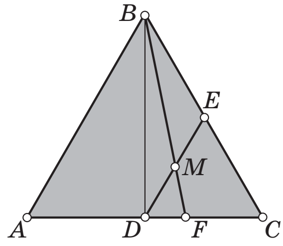


Рис. 13.23

10. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M делит отрезок AD в отношении p, а точка N делит отрезок DC в отношении q. Прямые BM и AN пересекаются в точке S. Вычислите отношение $AS : SN$ (рис. 13.24).

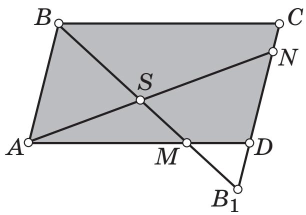


Рис. 13.24

11. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q. Найдите площадь четырехугольника $QMCD$ (рис. 13.25).

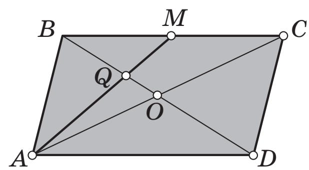


Рис. 13.25

12. Стороны треугольника ABC разделены точками M, N и P так, что $AM : MB = BN : NC = CP : PA = 1 : 4$. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного прямыми AN, BP и CM, к площади треугольника ABC.

13. Теорема Менелая допускает интересное стереометрическое обобщение: если плоскость μ пересекает ребра AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды в точках A_1, B_1, C_1, D_1, то

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1. \qquad (*)$$

Обратно, если для четырех точек A_1, B_1, C_1, D_1, лежащих соответственно на ребрах AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды, выполнено равенство (*), то эти четыре точки лежат в одной плоскости.

14. Докажите, что если все стороны пространственного четырехугольника касаются некоторой сферы, то четыре точки касания лежат в одной плоскости.

15. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер треугольной пирамиды, пересекаются в одной точке.

13.72. Теорема Чевы. [28]

Эту замечательную теорему доказал в XVII веке итальянский инженер и математик Чева.

1. Теорема Чевы. *Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и BA треугольника ABC* (рис. 13.26). *Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

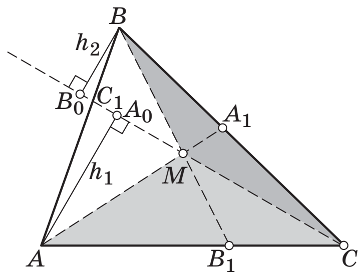


Рис. 13.26

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

(отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 иногда называют *чевианами*).

Докажите самостоятельно эту теорему.

Используя теорему Чевы, решите задачи:

2. Докажите, что следующие отрезки в треугольнике пересекаются в одной точке: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты; г) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон со вписанной окружностью (точка Жергонна); д) отрезки, проходящие через вершины и делящие периметр пополам; е) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанными окружностями.

3. Возможно такое пространственное обобщение теоремы Чевы:

Пусть точка M — точка внутри треугольной пирамиды $ABCD$, A_1, B_1, C_1 и D_1 — точки пересечения плоскостей CMD, AMD, AMB и CMB с ребрами AB, BC, CD и DA соответственно (рис. 13.27). Тогда

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1. \quad (*)$$

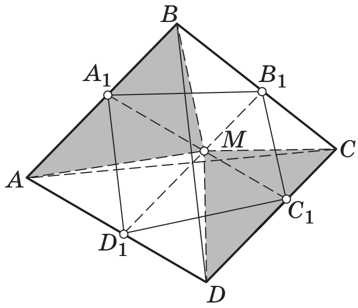


Рис. 13.27

Обратно, если для точек A_1, B_1, C_1, D_1, лежащих на соответствующих ребрах, выполнено соотношение (*), то плоскости ABC_1, BCD_1, CDA_1 и DAB_1 проходят через одну точку.

Докажите теорему.

Используя эту теорему, решите задачи:

4. Пусть в треугольнике ABC проведены три чевианы AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке O. Тогда

$$\frac{OA_1}{A_1A} + \frac{OB_1}{B_1B} + \frac{OC_1}{C_1C} = 1.$$

5. Докажите, что медианы треугольной пирамиды пересекаются в одной точке (*медианой треугольной пирамиды* называется отрезок, соединяющий его вершину с центром противоположной грани).

6. В треугольной пирамиде $ABCD$ суммы противоположных ребер равны. Докажите, что существует сфера, касающаяся всех ребер этой пирамиды.

Тема 14
ПОДОБИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

51. Свойства и признаки подобных многоугольников

Основное теоретическое содержание

У подобных многоугольников соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

Отношение соответствующих сторон называется *коэффициентом подобия* фигур.

Термины и обозначения

Если в тексте задачи написано «многоугольник», то это означает, что он выпуклый.

Запись $ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$ читается так: «многоугольник $ABCDE$ подобен многоугольнику $A_1B_1C_1D_1E_1$.

14.1. Даны два подобных многоугольника. Как найти их коэффициент подобия?

14.2. Объясните, почему: а) все равные многоугольники подобны, б) все квадраты подобны.

14.3. Верно ли, что:

1) все параллелограммы с равными углами подобны;

2) все ромбы подобны?

14.4. Могут ли два подобных, но не равных многоугольника иметь: а) по равной стороне; б) равные периметры?

14.5. Как разбить подобные многоугольники на одинаковое число подобных треугольников на рисунке 14.1? Возможны ли различные способы разбиения подобных многоугольников на одинаковое число соответственно подобных треугольников? Приведите пример.

14.6. Постройте два подобных прямоугольника с коэффициентом подобия, равным: а) 1,5; б) $\frac{2}{3}$.

14.7. Докажите справедливость следующих предложений:

1) два прямоугольника подобны, если их стороны соответственно пропорциональны;

2) два ромба подобны, если они имеют по равному углу;

3) два ромба подобны, если их диагонали соответственно пропорциональны;

4) два параллелограмма подобны, если они имеют по равному углу и их стороны соответственно пропорциональны.

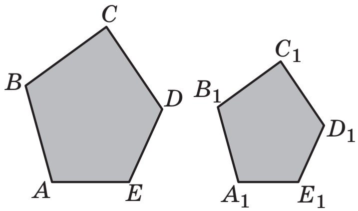


Рис. 14.1

14.8. В ящик плотно вложены коробки, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда. (На рисунке 14.2 показан вид сверху.) Будут ли подобны показанные на этом рисунке малые прямоугольники прямоугольнику $ABCD$?

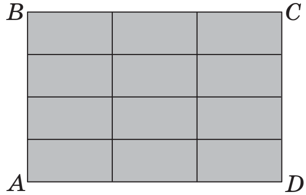


Рис. 14.2

14.9. Разрежьте тетрадный лист бумаги на несколько равных частей прямоугольной формы так, чтобы полученные после разрезания малые прямоугольники были подобны взятому листу.

14.10. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = a$ и $BC = b$. Отрезок EF проведен так, что полученный прямоугольник $BCEF$ подобен данному. Определите стороны прямоугольника $ADEF$.

Проведите вычисления для случаев:

1) $a = 8$, $b = 6$; 2) $a = 6{,}4$, $b = 4{,}8$.

14.11. Дан прямоугольник, длины сторон которого a и b. Постройте прямую, пересекающую прямоугольник так, чтобы один из образовавшихся прямоугольников был подобен данному.

14.12. Дан прямоугольник, длины сторон которого a и b. Постройте прямую, пересекающую прямоугольник так, чтобы образовавшиеся два прямоугольника были подобны.

14.13. Дан прямоугольник, длины сторон которого a и b. Какова зависимость между a и b, если средняя линия прямоугольника отсекает от него прямоугольник, подобный данному?

14.14. Стороны одного пятиугольника относятся как $2{,}5 : 1 : 2 : 1{,}5 : 3$. Бóльшая сторона подобного ему пятиугольника равна 27 см. Определите стороны второго пятиугольника.

14.15. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ образует со сторонами AB и AD такие же углы, как диагональ A_1C_1 параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ со сторонами A_1C_1 и A_1D_1. Докажите, что эти параллелограммы подобны.

14.16. Докажите, что трапеции подобны, если соответствующие стороны этих трапеций пропорциональны.

14.17. Диагональ трапеции делит ее на два подобных треугольника. Найдите зависимость между длиной d этой диагонали и длинами a и b оснований трапеции.

14.18. Через точку пересечения двух окружностей проведены четыре прямые, пересекающие первую окружность в точках A_1, B_1, C_1 и D_1, вторую — в точках A_2, B_2, C_2 и D_2. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 и точки A_2, B_2, C_2, D_2 — вершины подобных четырехугольников.

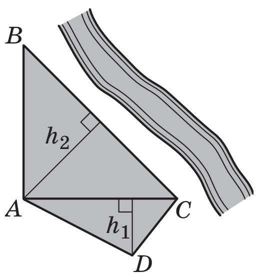


Рис. 14.3

14.19. Опытный земельный участок, прилегающий к пойме реки, на плане изображен в виде многоугольника в масштабе 1 : 10 000 (рис. 14.3). Выполните необходимые измерения и вычислите: а) длину границы участка; б) площадь участка; в) валовый сбор зерна со всего участка, если средняя урожайность пшеницы 45 ц с 1 га.

14.20. Как прямоугольник со сторонами 2 и 5 см рассечь на два подобных прямоугольника?

14.21. Стороны параллелограмма имеют длины a и b. Постройте прямую, отсекающую от данного параллелограмма подобный ему.

14.22. В данный параллелограмм впишите ромб так, чтобы стороны ромба были параллельны диагоналям параллелограмма, а вершины ромба лежали на сторонах параллелограмма.

14.23. Даны два подобных ромба $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($\angle A = \angle A_1$). Докажите, что $AC \cdot A_1C_1 + BD \cdot B_1D = 4AB \cdot A_1B_1$.

52. Периметры и площади подобных фигур

Основные теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Периметром многоугольника* называется сумма длин его сторон.

ТЕОРЕМА. *Периметры подобных фигур относятся как их коэффициенты подобия.*

ТЕОРЕМА. *Площади подобных фигур относится как квадраты их коэффициентов подобия.*

Термины и обозначения

Периметр многоугольника обозначается буквой P. Площадь многоугольника обозначается буквой S.

14.24. Как изменится площадь многоугольника, если каждая из его сторон: 1) увеличится в n раз; 2) уменьшится в k раз?

14.25. Найдите отношение площадей двух квадратов, если отношение сторон этих квадратов равно:

а) 1 : 2; б) 2 : 3; в) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$; г) 1 : 1,5; д) $k : l$.

14.26. Как относятся стороны двух квадратов, если отношение площадей этих квадратов равно:

а) 4 : 9; б) 3 : 4; в) 0,5 : 2; г) $p : t$?

14.27. Стороны одного треугольника равны 1,2, 2,4 и 3 м. Периметр подобного ему треугольника — 11 м. Определите стороны второго треугольника.

14.28. Отношение периметров двух треугольников равно 0,625. Стороны меньшего из этих треугольников — 4, 5 и 7 дм. Определите стороны большего треугольника.

14.29. Меньшие стороны двух подобных многоугольников — 35 и 21 см, а разность их периметров — 40 м. Определите периметр каждого многоугольника.

14.30. Наименьшие стороны двух подобных многоугольников относятся как $\frac{2}{5}$. Определите периметр большего из этих многоугольников, если периметр меньшего из них равен 42 см.

14.31. Периметр параллелограмма 24 мм. На продолжениях его диагоналей от вершин отложены отрезки, равные соответствующим диагоналям. Вычислите периметр четырехугольника, вершинами которого служат конечные точки отложенных отрезков.

14.32. Одна из сторон треугольника разделена на три части и через точки деления проведены прямые, параллельные другой стороне треугольника. Найдите отношение площади данного треугольника к площади каждого треугольника, отсеченного построенными прямыми.

14.33. Сходственные стороны двух подобных многоугольников относятся как $\frac{a}{b}$. Площадь первого многоугольника равна S. Найдите площадь второго многоугольника.

Вычислите эту площадь при $S = 24$ см^2 для случаев:

1) $\frac{a}{b} = \frac{4}{9}$; 2) $\frac{a}{b} = 0{,}5$; 3) $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

14.34. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его боковую сторону в отношении $m : n$ (считая от основания). В каком отношении находится площадь отсеченного треугольника к площади полученной трапеции?

Вычислите для случаев: 1) $m : n = 1 : 2$; 2) $m : n = 2 : 3$.

14.35. Площади двух подобных треугольников равны S_1 и S_2. Основание первого из них — a_1. Найдите высоту первого треугольника, основание и высоту второго. Вычислите при $S_1 = 64$ см^2, $S_2 = 25$ см^2, $a_1 = 4$ см.

14.36. Периметры двух подобных многоугольников относятся как $3 : 5$. Площадь большего многоугольника равна 40 м^2. Определите площадь второго многоугольника.

14.37. В треугольник ABC вписан квадрат, как показано на рисунке 14.4. Определите площадь квадрата, если основание $AC = a$ и высота $BD = h$.

Произведите вычисления для случаев:

1) $a = 6$ см, $h = 12$ см; 2) $a = 4{,}5$ см, $h = 9$ см; 3) $a = 15$ дм, $h = 3$ м.

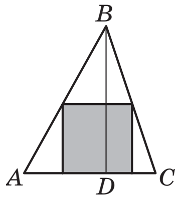


Рис. 14.4

14.38. План земельного участка снят в масштабе $1 : 1000$. Во сколько раз площадь этого участка больше площади плана?

14.39. При снятии плана участка расстояние в 20 м на местности изображалось в плане отрезком в 1 см. Во сколько раз площадь участка на плане будет меньше площади участка на местности?

14.40. На рисунке 14.5 дан план участка, выполненный в масштабе $1 : 5000$. Произведите необходимые измерения на плане и вычислите площадь участка.

14.41. Даны два подобных многоугольника. Найдите коэффициент подобия, если их площади: а) $S_1 = 25$ см^2 и $S_2 = 81$ см^2; б) $S_1 = 0{,}04$ м^2 и $S_2 = 0{,}09$ м^2.

14.42. На рисунке 14.6 изображен план школы. Узнайте, какую площадь в гектарах занимает здание школы, если план начерчен в масштабе $1 : 3000$, а длина стороны клетки равна 0,5 см.

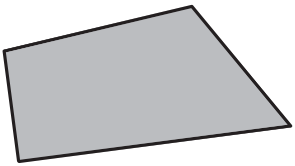


Рис. 14.5

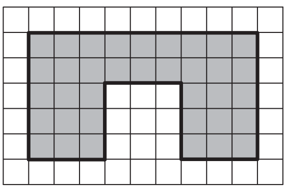


Рис. 14.6

14.43. Постройте квадрат, площадь которого равна: а) четвертой части площади данного квадрата; б) половине его площади.

14.44. Постройте треугольник, подобный данному, площадь которого равна: а) половине площади данного треугольника; б) составляет четвертую часть площади данного треугольника.

14.45. В треугольник ABC вписаны два квадрата, как показано на рисунке 14.7. Основание треугольника $AC = a$ и высота $BD = h$. Определите отношение площадей вписанных квадратов.

Произведите вычисления для случаев:

1) $a = 4$ см, $h = 6$ см; 2) $a = 6{,}5$ см, $h = 2{,}5$ см.

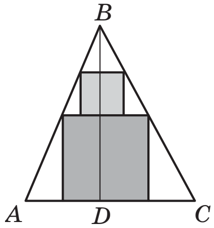


Рис. 14.7

14.46. В треугольник, основание которого равно a и высота, опущенная на это основание, равна h, вписан прямоугольный равнобедренный треугольник так, что гипотенуза параллельна основанию данного треугольника, а вершина прямого угла лежит на этом основании. Определите площадь вписанного треугольника.

Произведите вычисления для случая: $a = 30$ см; $h = 10$ см.

14.47. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, делит ее на две подобные трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.

14.48. Какие четырехугольники можно разрезать прямой линией на два подобных между собой четырехугольника?

14.49. Задачи на трапеции, где используется понятие подобия. [29]

1. В трапеции $ABCD$, основания которой a и b, проведена через точку пересечения диагоналей прямая MN, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, отсекаемого от нее боковыми сторонами (рис. 14.8, *а*).

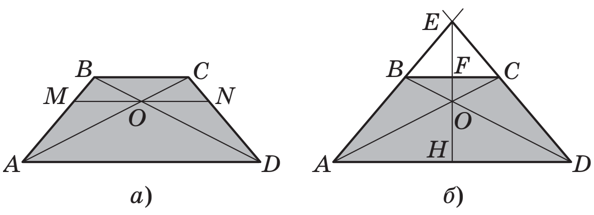


Рис. 14.8

2. Докажите, что в трапеции отрезок прямой, параллельный основаниям, которому принадлежит точка пересечения диагоналей и концы которого находятся на боковых сторонах трапеции, делится в этой точке пополам (рис. 14.8, *а*).

3. Изменим рисунок 14.8, *а* — продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке E, проведем через точки O и E прямую. Точки пересечения прямой с основаниями обозначим F и H (рис. 14.8, *б*).

Докажите, что в произвольной трапеции середины оснований, точка пересечения боковых сторон и точка пересечения диагоналей принадлежат одной прямой (рис. 14.8, *б*).

Решите эту задачу разными способами.

Используя результаты приведенных выше задач, решите следующие задачи на построение с помощью одной линейки.

4. На прямой даны три точки A, B, C, из которых B находится посередине между A и C. Через произвольную точку K, не принадлежащую отрезку AC, проведите n прямых, параллельных AC.

5. На каждой из двух параллельных прямых расположены по одному отрезку длиной a и b.

Постройте отрезок $x = \dfrac{ab}{a+b}$.

6. Отрезки длиной a и b принадлежат одной из параллельных прямых, а отрезок длиной c — другой из них.

Постройте отрезок длиной x, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

7. Даны параллельные отрезки. Разделите один из них пополам.

8. Разделите трапецию на две равновеликие фигуры.

9. Даны две параллельные прямые. Проведите через данную точку третью прямую, параллельную данным.

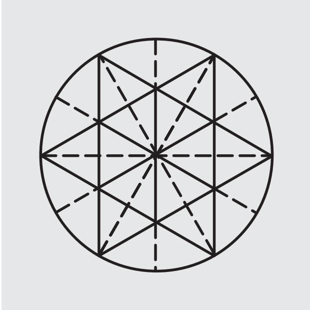
10. Увеличьте данный отрезок, лежащий на одной из двух параллельных прямых, в 2, 3, ..., n раз.

11. Найдите половину, треть, ..., n-ю часть такого отрезка.

Все приведенные задачи встречаются в трактате XII века индийского математика Бхаскары «Венец астрономического учения» в таком виде:
Зная длины a и b двух палок бамбука, вертикально воткнутых в землю на известном расстоянии, вычислить длину перпендикуляра к земле, опущенного из точки пересечения прямых, соединяющих верхний конец одной палки с основанием другой, и длины между основаниями этого перпендикуляра и основаниями палок.

Глава IV

ИЗОМЕТРИИ



Тема 15

ПОВОРОТ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

53. Поворот

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Поворотом фигуры* Ф *вокруг точки O на угол* α называется такое преобразование, при котором:

1) *точка O переходит сама в себя (остается на месте)*;

2) *любая точка X фигуры* Ф *переходит в такую точку* X_1 *фигуры* $Ф_1$, *что* $\angle X_1OX$ *всегда равен* α;

3) $OX = OX_1$.

Угол поворота, на который мы поворачиваем фигуру, всегда заключается в интервале от 0 до 180°: $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. При повороте на 0° все точки фигуры остаются на месте. Такой поворот на 0° только один. Мы рассматриваем повороты *по часовой стрелке* и *против часовой стрелки.*

Существуют фигуры, которые при некоторых поворотах переходят сами в себя. Про такие фигуры говорят, что *они имеют центр поворота.*

ТЕОРЕМА. *Поворот фигуры на плоскости вокруг центра на некоторый угол является изометрией.*

Термины и обозначения

Поворот вокруг точки O на угол α обозначается R_O^α.

Запись $R_O^\alpha(A) = A_1$ читается так: «образом точки A при повороте вокруг центра O на угол α является точка A_1 или точка A при повороте вокруг центра O на угол α переходит в точку A_1».

Запись R_O^α (Ф) = $Ф_1$ читается так: «фигура Ф при повороте вокруг точки O на угол α переходит в фигуру $Ф_1$».

15.1. На рисунке 15.1 изображен поворот треугольника ABC на угол $50°$ вокруг точки O по часовой стрелке. Ответьте на следующие вопросы:

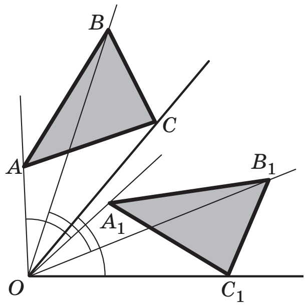


Рис. 15.1

1. В какую точку при этом повороте переходят: вершина A треугольника ABC, вершина B, вершина C?

2. В какой отрезок переходят при этом повороте: сторона AB треугольника ABC, сторона BC, сторона CA?

3. В какую фигуру при повороте переходят: угол ABC, угол BCA, угол CAB?

4. В какую фигуру при повороте переходит треугольник ABC?

5. Назовите расстояния, которые сохраняются при данном повороте.

6. Какая точка при данном повороте остается на месте?

15.2. Есть ли у поворота неподвижные точки? неподвижные прямые?

15.3. Назовите фигуры, которые при любом повороте переходят в себя.

15.4. Укажите центры и углы поворота, при которых переходят в себя: а) прямая; б) луч; в) отрезок; г) окружность; д) треугольник; е) четырехугольник.

15.5. Даны точка A и точка O — центр поворота. В какую точку может перейти точка A при повороте вокруг точки O на углы: $30°$; $45°$? Постройте точки, в которые при указанных поворотах перейдет точка A.

15.6. В какую фигуру переходит прямая при повороте на некоторый угол вокруг точки O?

15.7. В какую фигуру переходит окружность (круг) при повороте вокруг точки O на угол $25°$? Отдельно рассмотрите случай, когда центр поворота совпадает с центром окружности (круга).

15.8. Постройте фигуру, в которую перейдет прямой угол при повороте вокруг вершины на угол $45°$ против часовой стрелки. Заштрихуйте объединение и пересечение данного и построенного углов.

15.9. На рисунке 15.2, *а—ж* изображены различные фигуры, состоящие из двух, трех и четырех полукругов. В каждом случае определите поворот, при котором данные фигуры переходят сами в себя.

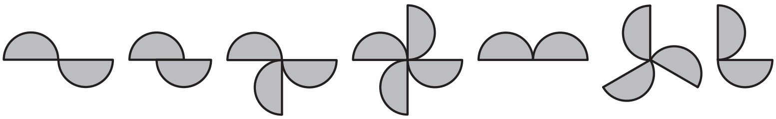


Рис. 15.2

15.10. Нарисуйте отрезок AB. Постройте фигуру, в которую перейдет этот отрезок при повороте: а) вокруг точки A на угол $120°$ по часовой стрелке; б) вокруг точки B на угол $60°$ против часовой стрелки; в) вокруг середины отрезка на угол $45°$ по часовой стрелке.

15.11. Докажите, что если при повороте отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1, то угол этого поворота равен углу между прямыми AB и A_1B_1.

15.12. Каким поворотом можно перевести пару пересекающихся прямых в себя?

15.13. Три прямые пересекаются в одной точке, при которой образованы шесть углов по $60°$. Какими поворотами можно перевести данные прямые в себя?

15.14. Даны две равные окружности. Каким поворотом одну из них можно перевести в другую?

15.15. Нарисуйте квадрат $ABCD$. Постройте фигуру, в которую переходит этот квадрат при повороте по часовой стрелке: а) вокруг точки A на угол $135°$; б) вокруг точки D на угол $90°$; в) вокруг точки C на угол $45°$; г) вокруг точки D на угол $30°$; д) вокруг центра квадрата на угол $45°$.

Для случаев в), г), д) найдите объединение исходного и полученного квадратов.

15.16. Нарисуйте равносторонний треугольник ABC. Постройте фигуру, в которую перейдет этот треугольник при повороте против часовой стрелки: а) вокруг точки C на угол $30°$; б) вокруг середины отрезка AC на угол $90°$; в) вокруг центра треугольника на угол $30°$; г) вокруг центра треугольника на угол $90°$.

Для каждого случая найдите объединение исходного и полученного треугольников.

15.17. Сколько существует поворотов, переводящих: а) точку в точку; б) окружность в равную ей окружность; в) отрезок в отрезок?

15.18. Каким поворотом можно преобразовать правильную пятиконечную звезду в себя?

15.19. Даны две окружности. Поворотом на угол 45° одна окружность преобразуется в другую. Постройте центр этого поворота.

15.20. Даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Постройте центр M поворота, при котором точка A перйдет в точку A_1, а точка B — в точку B_1. Всегда ли можно найти центр такого поворота?

15.21. На прямой a дана точка A, а на прямой b — точка B. Поворотом преобразуйте прямую a в прямую b так, чтобы точка A перешла в точку B.

15.22. Даны две равные окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и на каждой из них по точке A_1 и A_2. Каким поворотом можно преобразовать одну окружность в другую так, чтобы при этом точка A_1 перешла в точку A_2?

15.23. Докажите, что поворот R_M^{φ} плоскости однозначно определяется заданием угла φ поворота и парой соответственных точек A_1 и A_2.

15.24. В окружность вписан правильный n-угольник. При повороте R_O^{φ}, где O — центр окружности, а $\varphi \neq 180°$, многоугольник переходит в новый многоугольник. Докажите, что соответствующие при повороте стороны многоугольников (или их продолжения) пересекаются в точках, являющихся вершинами правильного n-угольника. Вычислите длину его стороны, если длина стороны данного n-угольника равна a.

15.25. При повороте R_M^{φ} треугольник ABC перейдет в треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что если точки P, Q, S (P — точка пересечения прямых AB и A_1B_1, Q — точка пересечения прямых BC и B_1C_1, R — точка пересечения прямых CD и C_1D_1, S — точка пересечения прямых DA и D_1A_1) принадлежат одной прямой, то центр M поворота есть общая точка окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

15.26. Даны два одинаково ориентированных квадрата $MPQR$ и $MUVW$. Докажите, что отрезки PU и RW равны и перпендикулярны.

54. Центральная симметрия

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть O — фиксированная точка и X — произвольная точка. Точка X_1 называется *симметричной* точке X относительно точки O, если точки X, O, X_1 лежат на одной прямой и $OX = OX_1$. Точка, симметричная точке O, есть сама точка O.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть F — данная фигура и O — фиксированная точка плоскости. Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка X переходит в точку X_1, симметричную X относительно данной точки O, называется *центральной симметрией с центром O*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если преобразование симметрии относительно точки O переводит фигуру в себя, то фигура называется *центрально-симметричной*, а точка O — *центром симметрии этой фигуры*.

ТЕОРЕМА. *Центральная симметрия является изометрией.*

Термины и обозначения

Центральная симметрия обозначается Z_0, где O — центр симметрии.

Запись $Z_0(X) = X_1$ читается так: «образом точки X при центральной симметрии с центром в точке O является точка X_1», или так: «точка X при центральной симметрии с центром O переходит в точку X_1».

Запись Z_0 (Ф) = $Ф_1$ читается так: «фигура Ф при центральной симметрии с центром в точке O переходит в фигуру $Ф_1$».

15.27. На рисунке 15.3 изображены два квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, симметричные друг другу относительно точки O. Ответьте на вопросы:

1. Какая точка является их центром симметрии?

2. В какие точки перейдут при этой симметрии вершины квадрата $ABCD$?

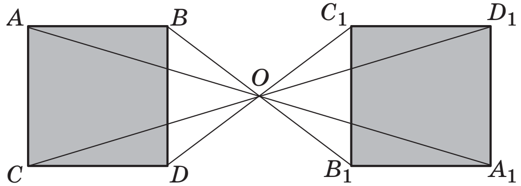


Рис. 15.3

3. Какие точки симметричны точкам A_1 и D_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$?

4. Назовите равные отрезки на этом рисунке.

5. Назовите равные фигуры на этом рисунке.

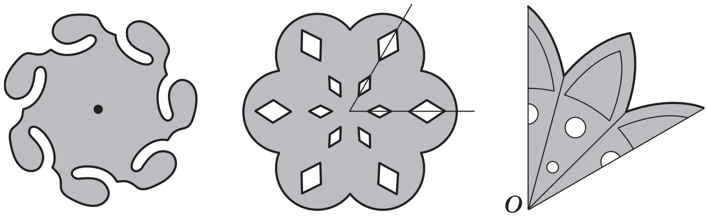
15.28. 1. Какая точка при центральной симметрии переходит в себя?

2. Какие прямые при центральной симметрии переходят в себя?

3. Как найти центр симметрии, если центральная симметрия задана парой соответствующих точек A и A_1?

15.29. В какую фигуру переходят: а) луч OC при симметрии относительно центра O; б) угол ABC при симметрии относительно точки B?

15.30. Какие из фигур на рисунке 15.4, *а—в* имеют центр симметрии? При повороте на какой угол эти фигуры переходят в себя?



а) *б*) *в*)

Рис. 15.4

15.31. Сущестствуют ли фигуры, имеющие несколько центров симметрии?

15.32. Задает ли центральную симметрию одна пара соответственных точек? Как найти в этом случае центр симметрии?

15.33. Имеет ли центр симметрии: а) отрезок; б) прямая; в) луч; г) куб; д) шар; е) треугольная пирамида?

15.34. Существуют ли многоугольники, имеющие центр симметрии? не имеющие центра симметрии?

15.35. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно данного центра O?

15.36. Постройте прямую, симметричную данной прямой AB относительно данного центра O (O принадлежит AB).

15.37. Постройте фигуры, центрально-симметричные фигурам, изображенным на рисунке 15.5, *а—г*. В каждом случае выберите центр симметрии.

15.38. Треугольник ABC при симметрии относительно центра O переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Постройте эти симметричные треугольники и найдите стороны A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если $AB = 4$ см, $BC = 10$ см, $CA = 12$ см. В какую точку перейдет при этой симметрии точка M — середина стороны BC? Чему равно расстояние B_1M_1?

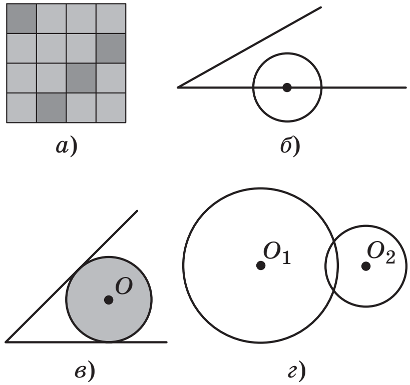


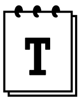
Рис. 15.5

15.39. Постройте центр симметрии следующих фигур: а) пары точек; б) двух равных углов (в каких случаях решение этой задачи возможно?); в) двух равных окружностей (рассмотрите все возможные случаи); г) двух равных треугольников (в каких случаях они могут быть центрально симметричны?).

15.40. На прямой даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Постройте центр симметрии фигуры Ф, где Ф является объединением отрезков AB и A_1B_1.

15.41. Можно ли считать, что любые два отрезка центрально-симметричны? Рассмотрите разные случаи.

15.42. В круге с центром O и радиусом R взята точка A, удаленная от центра на 2. Постройте фигуру, в которую данный круг перейдет при симметрии относительно точки A. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного кругов.



15.43. Постройте треугольник, цетрально-симметричный равностороннему треугольнику относительно его центра. Пусть сторона данного треугольника равна 1. Вычислите периметр объединения и пересечения исходного и полученного треугольников.

15.44. Фигура F_2 симметрична фигуре F_1 относительно центра O. Будет ли центрально-симметричным объединение этих фигур? их пересечение?

15.45. Через точку, лежащую внутри круга, проведите хорду, чтобы она делилась данной точкой пополам.

15.46. Постройте центрально-симметричный шестиугольник.

15.47. Дан параллелограмм, вершины которого не поместились на чертеже. Постройте центр симметрии этого параллелограмма.

15.48. Около окружности описан восьмиугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Докажите, что противоположные стороны восьмиугольника попарно равны.

Тема 16

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

55. Осевая симметрия

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точки A и A_1 называются *симметричными относительно некоторой прямой* p, если эта прямая перпендикулярна отрезку AA_1 и проходит через его середину. Прямая p называется *осью симметрии точек* A и A_1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Осевой симметрией данной фигуры с осью* l называется такое преобразование, при котором каждой точке данной фигуры ставится в соответствие точка, симметричная ей относительно прямой l.

ТЕОРЕМА. *Осевая симметрия является изометрией.*

Термины и обозначения

Осевая симметрия с осью l иногда обозначается S_l. Запись $S_l(X) = X_1$ читается так: «точка X_1 симметрична точке X относительно прямой l» или «точка X при осевой симметрии с осью l перешла в точку X_1».

16.1. На плоскости (рис. 16.1) изображены два треугольника, симметричные друг другу относительно оси l. Ответьте на следующие вопросы:

1. В какие точки этой симметрии перейдут точки A, B, C?

2. В какие фигуры перейдут стороны треугольника ABC?

3. Какие расстояния сохраняются при этой симметрии?

4. Что можно сказать о треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$?

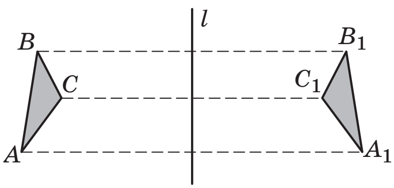


Рис. 16.1

16.2. Какие точки при симметрии относительно оси l переходят в себя? Какие прямые при симметрии относительно оси l переходят в себя?

16.3. Назовите фигуры, имеющие: ось симметрии; две оси симметрии.

16.4. Сколькими парами соответствующих точек определяется осевая симметрия?

16.5. Сколько осей симметрии имеют: а) луч; б) прямая; в) плоскость?

16.6. Сколько осей симметрии имеет окружность?

16.7. Нарисуйте отрезок и постройте отрезок, симметричный ему относительно прямой: а) содержащей его; б) проходящей через его конец; в) проходящей через точку внутри его. Изобразите такие треугольники.

16.8. В каком случае треугольник имеет одну ось симметрии? Может ли треугольник иметь более одной оси симметрии?

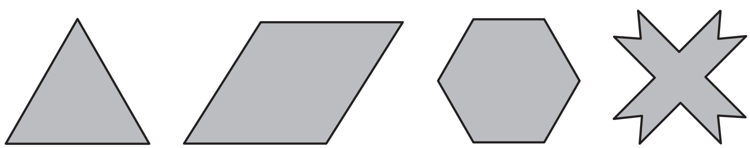
16.9. Докажите, что если треугольник имеет две оси симметрии, он имеет и третью ось.

16.10. Сколько осей симметрии может иметь четырехугольник?

16.11. Нарисуйте равносторонний треугольник. Постройте треугольник, симметричный ему относительно средней линии. Назовите объединение исходного и полученного треугольников. Вычислите периметр фигуры, являющейся объединением, если сторона исходного треугольника равна 2.

16.12. Дан прямоугольник. Постройте фигуру, симметричную этому прямоугольнику относительно прямой, проходящей через его диагональ. Назовите объединение исходного и полученного прямоугольников.

16.13. На рисунке 16.2, *а—г* изображены различные фигуры. Имеют ли эти фигуры оси симметрии? Сколько осей симметрии имеет каждая фигура? Постройте эти оси симметрии.



а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 16.2

16.14. На рисунке 16.3, *а—г* фигуры переходят в себя при некоторых осевых симметриях. Укажите оси этих симметрий. Постройте их.

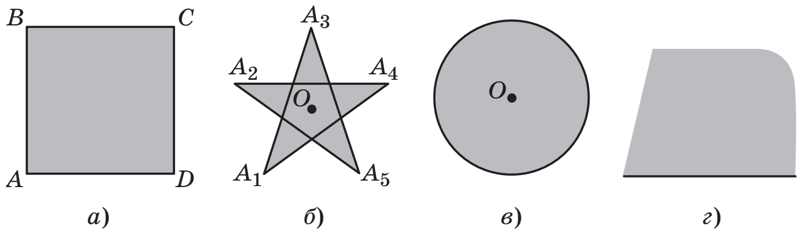


Рис. 16.3

16.15. Четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой AC. Найдите длины сторон BC и AD, если $AB = 3$ см, $CD = 2$ см.

16.16. Дан отрезок AB и две точки C и D, такие, что $CA = CB$, $DA = DB$. Докажите, что точки A и B симметричны относительно прямой CD.

16.17. На плоскости задана прямая l. Пользуясь только циркулем, постройте фигуру, в которую при симметрии относительно оси l переходит: а) точка M, не принадлежащая оси l; б) окружность с центром O и радиусом r.

16.18. Во внутренней области прямого угла BOD взята точка X и построены точки X_1 и X_2, симметричные точке X относительно сторон данного угла. Докажите, что точки O, X_1 и X_2 лежат на одной прямой.

16.19. Как проверить, лежат ли три данные точки на одной прямой, пользуясь только циркулем?

16.20. Докажите, что если две точки одной прямой симметричны двум точкам другой прямой относительно некоторой оси, то и все точки первой прямой симметричны точкам второй прямой относительно этой оси.

16.21. Дан угол, вершина которого не поместилась на чертеже. Постройте угол, величина которого в два раза больше величины данного угла.

16.22. Даны угол, вершина D которого не поместилась на чертеже, и произвольная точка M (в пределах чертежа). Проведите через точку M прямую так, чтобы она проходила через вершину D.

16.23. Как измерить расстояние между недоступными вершинами двух углов, пользуясь осевой симметрией.

16.24. Докажите, что углы между прямыми a и b и симметричными им прямыми a_1 и b_1 относительно оси l имеют равные величины.

16.25. Даны прямая p и точки A и B по разные стороны от нее. На прямой p найдите такую точку M, чтобы разность расстояний ее от точек A и B была наибольшей.

16.26. Постройте пятиугольник, имеющий: а) одну ось симметрии; б) две оси симметрии.

16.27. Даны две пересекающиеся прямые.

1. При какой осевой симметрии одна из них переходит в другую?

2. При какой осевой симметрии одна из двух параллельных прямых переходит в другую?

16.28. Могут ли две осевые симметрии иметь общие пары соответствующих точек?

16.29. Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные прямые под углами равной величины.

16.30. Постройте треугольник по стороне, разности двух других сторон и углу, заключенному между первой стороной и большей из двух других сторон.

16.31. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

16.32. Внутри острого угла дана точка M. Постройте треугольник MAB наименьшего периметра, вершины A и B которого лежат на сторонах угла.

16.33. Постройте фигуру, которая является объединением двух неравных отрезков и имеет две оси симметрии.

16.34. Постройте фигуру, которая является объединением двух равных отрезков без общих точек и имеет две оси симметрии.

16.35. Сколько осей симметрии имеет фигура, которая является: а) объединением двух окружностей, каждая из которых проходит через центр другой; б) объединением круга $(O; r)$ и окружности, центр которой лежит на окружности $(O; r)$?

16.36. Постройте четырехугольник $ABCD$, имеющий только одну ось симметрии — прямую BD.

16.37. Постройте невыпуклый четырехугольник $ABCD$, симметричный относительно оси BD.

16.38. Сколько осей симметрии может иметь фигура, которая является объединением окружности и прямой?

16.39. Даны две точки A и B. Какую фигуру образует множество всех таких точек X, для которых:

1) $AX < BX$; 3) $BX < AX$; 5) $AX \neq BX$?

2) $AX \leqslant BX$; 4) $BX \leqslant AX$;

16.40. Дана ось симметрии l и окр. $(O; r)$, такая, что $O \notin l$. Постройте при помощи одного циркуля окр. $(O_1; r)$, такую, что окр. $(O_1; r) = S_l$ (окр. $(O; r)$).

16.41. Даны ось симметрии l, точка A и точка $B = S_l(A)$, $A \neq B$. Отметьте на плоскости точку $C \notin l$ и постройте точку $D = S_l(C)$ при помощи одной линейки.

16.42. Даны ось симметрии l и точки $A = S_l(A)$, $X \notin l$, $Y = S_l(X)$, P принадлежит прямой AY, $Z = S_l(P)$. Какие из указанных фигур лежат в одной полуплоскости с границей l: луч PY; отрезок AP; луч AZ; отрезок AX; отрезок ZX, отрезок PY?

16.43. Постройте фигуру, которая является объединением четырех разносторонних треугольников с общим основанием и имеет две оси симметрии. Каким многоугольником является общая часть этих треугольников и сколько осей симметрии имеет этот многоугольник?

16.44. Докажите, что в многоугольнике с нечетным числом вершин и имеющем оси симметрии ни одна из диагоналей не может лежать на оси симметрии.

16.45. На плоскости нарисованы три равных отрезка. Сколько осей симметрии может иметь объединение этих отрезков?

16.46. Постройте фигуру, которая является объединением: а) четырех равных окружностей и имеет четыре оси симметрии; б) трех окружностей и имеет бесконечное множество осей симметрии; в) трех окружностей и имеет только две оси симметрии.

16.47. Постройте фигуру, которая является общей частью взаимно пересекающихся кругов и имеет четыре оси симметрии.

16.48. Покажите, что равносторонний шестиугольник, описанный вокруг данной окружности, имеет три оси симметрии.

16.49. Докажите, что равноугольный шестиугольник, вписанный в данную окружность, имеет три оси симметрии.

56. Параллельный перенос

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Преобразование, при котором каждая точка фигуры F переходит в одном и том же направлении и на одно и то же расстояние, называется *параллельным переносом*.

ТЕОРЕМА. *Параллельный перенос является изометрией.*

Термины и обозначения

Параллельный перенос на расстояние AB в направлении луча AB обозначается F_{AB}. Запись $F_{AB}X = X_1$ читается так: «точка X при параллельном переносе в направлении луча AB на расстояние AB перешла в точку X_1».

16.50. На рисунке 16.4 квадрат $ABCD$ при параллельном переносе перешел в квадрат $A_1B_1C_1D_1$. Ответьте на вопросы:

1. В какую точку перейдет вершина A квадрата?
2. В какую фигуру перейдет сторона BC квадрата?
3. Какие равные фигуры вы видите на этом рисунке?

16.51. В какую фигуру переходит фигура F при параллельном переносе? Почему?

16.52. На рисунке 16.5 изображен параллелограмм $ABCD$. Существует ли параллельный перенос, переводящий: а) отрезок AB в отрезок DC; б) отрезок AD в отрезок BC?

16.53. Пусть нам задан параллельный перенос, переводящий точку A в точку A_1. Как построить точку, в которую при этом параллельном переносе перейдет точка B?

16.54. Докажите, что параллельный перенос есть изометрия. В какую фигуру параллельный перенос переводит прямую?

16.55. Сколько различных параллельных переносов задают: а) две точки; б) три точки; в) четыре точки?

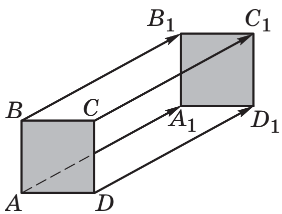


Рис. 16.4

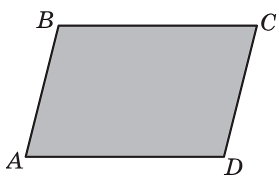


Рис. 16.5

16.56. Какой параллельный перенос переводит окружность в равную ей окружность? В каком случае отрезок можно перевести в отрезок с помощью параллельного переноса?

16.57. Какие фигуры можно перевести в себя при параллельном переносе?

16.58. Пусть даны точки A, A_1 и B. Постройте точку B_1, в которую переходит точка B при параллельном переносе, переводящем точку A в точку A_1.

16.59. Даны отрезок AB и точка K. Выполните параллельный перенос отрезка AB так, чтобы его середина переместилась в точку K.

16.60. Постройте фигуру, в которую переходит данный треугольник ABC при параллельном переносе, переводящем точку A в точку C.

16.61. Постройте фигуру, в которую переходит данный параллелограмм $ABCD$ при параллельном переносе, переводящем точку A в точку C.

16.62. Выполните параллельный перенос данной прямой AB так, чтобы ее точка A перешла в данную точку C. Рассмотрите два случая: а) точка C принадлежит прямой AB; б) точка C не принадлежит прямой AB.

16.63. Выполните параллельный перенос данной окружности так, чтобы ее центр O перешел в данную точку O_1.

16.64. В результате параллельного переноса окружности радиуса r получили окружность, касающуюся данной. На какое расстояние перенесена окружность?

16.65. Даны угол B и прямая l. Постройте отрезок AB данной длины a так, чтобы он был параллелен прямой l и чтобы его концы принадлежали сторонам угла B.

16.66. В каком месте следует строить мост KP, перпендикулярный берегам канала, чтобы путь $AKPB$ между пунктами A и B был кратчайшим (рис. 16.6)?

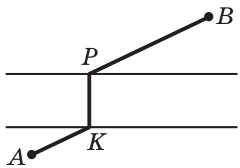
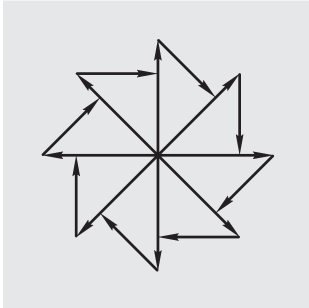


Рис. 16.6

Глава V

ВЕКТОРЫ



Тема 17

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

57. Понятие вектора. Равенство векторов

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вектором* называется отрезок, на котором указано направление (одно из двух возможных).

Кратко говорят: вектор — это направленный отрезок. Первый по этому направлению конец отрезка называется *началом вектора* (или точкой приложения), второй — его *концом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два вектора называют *коллинеарными*, если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой.

Коллинеарные векторы либо одинаково направлены, либо противоположно направлены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор $\overline{AB}$ *равен вектору* $\overline{CD}$, если длины отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны и они одинаково направленные (сонаправленные).

Термины и обозначения

Векторы обозначают либо одной буквой с чертой сверху $\overline{a}$, либо двумя буквами с чертой сверху: $\overline{AB}$. Запись $\overline{m}$ или $\overline{CD}$ читается так: «вектор $\overline{m}$» или «вектор $\overline{CD}$».

Равенство векторов обозначают так: $\overline{AB} = \overline{CD}$, читают: «векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны».

17.1. Сколько различных векторов изображено на рисунке 17.1?

17.2. Даны два равных вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Какими свойствами обладают эти векторы?

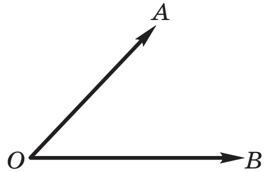


Рис. 17.1

17.3. Сколько различных векторов изображено на рисунке 17.2, *а—в*?

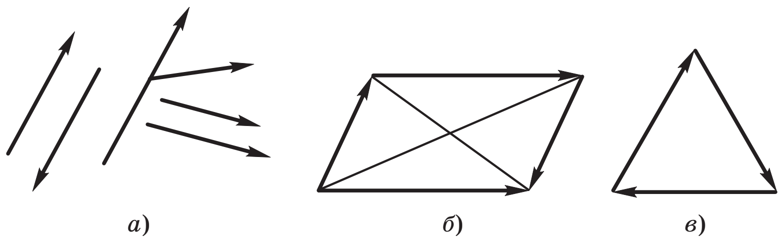


Рис. 17.2

17.4. При каком условии две пары точек $\{A, A_1\}$ и $\{B, B_1\}$ задают равные векторы?

17.5. Определяют ли пары точек, составленные из несмежных вершин равнобедренной трапеции, один и тот же вектор?

17.6. Определяют ли пары точек, составленные из вершин ромба, равные векторы?

17.7. Известно, что $\overline{AB} = \overline{CD}$. Можно ли на основании этого утверждать, что $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$?

17.8. Известно, что $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ и $|\overline{CD}| \neq 0$. Можно ли на основании этого утверждать, что $\overline{AB} = \overline{CD}$?

17.9. Могут ли быть различными два вектора, изображаемые направленными отрезками равной длины, расположенными на одной прямой?

17.10. Можно ли один и тот же вектор изобразить направленными отрезками, расположенными на: а) двух пересекающихся прямых; б) на различных параллельных прямых; в) на одной прямой?

17.11. Могут ли пары точек, первая из которых — центр окружности, а вторая — точка окружности, определять один и тот же вектор?

17.12. Могут ли пары точек, одна из которых — центр круга, а другая — точка круга, определять один и тот же вектор?

17.13. Возможно ли равенство двух векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$?

17.14. Какую фигуру образуют концы равных векторов, отложенных от всех точек: а) прямой; б) отрезка?

17.15. Можно ли утверждать, что из равенства $\overline{AB} = \overline{CD}$ следует равенство $AB = CD$?

17.16. Можно ли утверждать, что из равенства $AB = CD$ следует равенство $\overline{AB} = \overline{CD}$?

У **17.17.** Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. От данной точки O отложите: а) вектор $\overline{OA} = \bar{a}$, а от точки A — вектор $\overline{AB} = \bar{b}$; б) данные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

17.18. Середины двух отрезков AB и CD совпадают. Введите векторные обозначения и выпишите возможные векторные равенства.

17.19. Сколько различных векторов задает: а) множество точек $\{A, B\}$; б) множество точек $\{A, B, C\}$; в) множество вершин равностороннего треугольника; г) множество вершин параллелограмма; д) множество точек $\{A, B, C, D\}$?

17.20. Могут ли одновременно выполняться равенства

$$\overline{AC} = \overline{CD} \text{ и } \overline{AD} = \overline{DC}?$$

17.21. Дана равнобедренная трапеция. Выпишите все коллинеарные векторы, определяемые вершинами трапеции.

17.22. Для четырехугольника $MNPQ$ векторы: а) $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ коллинеарны, а $\overline{NP}$ и $\overline{MQ}$ неколлинеарны; б) $\overline{NP}$ и $\overline{QP}$, $\overline{NP}$ и $\overline{QM}$ коллинеарны. Какую фигуру представляет в каждом из этих случаев четырехугольник $MNPQ$?

Т **17.23.** Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ равны. Докажите, что если точки A, B, A_1 и B_1 не лежат на одной прямой, то четырехугольник ABB_1A_1 — параллелограмм.

17.24. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $\overline{AA_1} = \overline{C_1C}$.

17.25. Запишите на «языке векторов», что четырехугольники $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.

17.26. Даны треугольник ABC, BM медиана этого треугольника и $\overline{MN} = \overline{BM}$ (рис. 17.3). Докажите, что $\overline{AB} = \overline{NC}$.

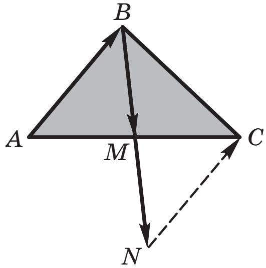


Рис. 17.3

58. Сложение векторов

Основное теоретическое содержание

Пусть даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$; отложим вектор $\bar{a}$ от произвольной точки A и от его конца отложим вектор $\bar{b}$, тогда получится вектор $\bar{c}$, который не зависит от выбора точки A. Операция получения этого вектора $\bar{c}$ называется *сложением векторов по правилу треугольника*.

Пусть даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, которые неколлинеарны, т. е. не лежат на одной прямой. Отложим эти вектора от некоторой точки A, т. е. $\overline{AB} = \bar{a}$ и $\overline{AD} = \bar{b}$. Тогда суммарный вектор изобразится диагональю параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overline{AB} = \bar{a}$ и $\overline{AD} = \bar{b}$:

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}.$$

Это правило сложения векторов называется *правилом параллелограмма*.

Термины и обозначения

Сумма векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается $\bar{a} + \bar{b}$. Запись $\overline{AB} + \overline{BC}$ читают так: «сумма векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$».

17.27. Какой вектор является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на рисунке 17.4?

17.28. Какой вектор является суммой векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ на рисунке 17.5?

17.29. Какой вектор является суммой векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ на рисунке 17.6?

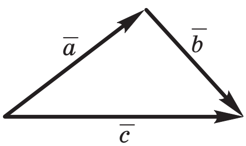


Рис. 17.4

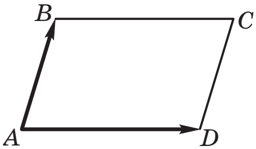


Рис. 17.5

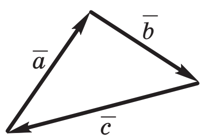


Рис. 17.6

17.30. Может ли длина суммы двух векторов одинаковой длины быть: а) меньше длины каждого вектора; б) равна длине каждого вектора; в) больше длины каждого вектора; г) больше суммы длин векторов; д) равна сумме длин векторов?

17.31. Может ли длина суммы двух векторов быть меньше длины каждого из слагаемых?

17.32. При каком условии из трех векторов можно образовать замкнутую ломаную?

17.33. Сложите два вектора по правилу параллелограмма. При каком условии сумма векторов направлена по биссектрисе угла параллелограмма?

17.34. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 17.7). Найдите сумму этих векторов по правилу треугольника.

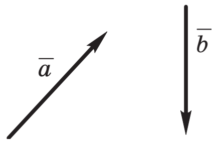


Рис. 17.7

17.35. На тело действуют две взаимно перпендикулярные силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, $|\overline{F_1}| = 8{,}5$ Н, $|\overline{F_2}| = 3{,}6$ Н. Найдите их сумму.

17.36. Запишите вектор $\overline{AB}$ в виде суммы двух векторов, одним из которых является вектор $\overline{AM}$.

17.37. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Постройте вектор $\bar{c}$, такой, что $\bar{a} + \bar{c} = \bar{b}$.

17.38. Найдите сумму следующих векторов:

а) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$;

б) $\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ} + \overline{QT}$;

в) $\overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX}$.

17.39. Упростите суммы:

а) $\overline{AB} + \overline{MN} + \overline{DC} + \overline{CA} + \overline{PQ} + \overline{NM}$;

б) $\overline{FK} + \overline{MQ} + \overline{KP} + \overline{AM} + \overline{QK} + \overline{PF}$;

в) $\overline{KM} + \overline{DF} + \overline{AC} + \overline{FK} + \overline{CD} + \overline{PA} + \overline{MP}$;

г) $\overline{AB} + \overline{BA} + \overline{CD} + \overline{MN} + \overline{DC} + \overline{NM}$.

17.40. Как найти сумму трех и более векторов? Сформулируйте правило сложения. Сделайте рисунок.

17.41. Упростите векторные выражения:

а) $\overline{A_1D_1} + \overline{D_1A} + \overline{B_1C}$;

б) $\overline{AB} + \overline{D_1C_1} + \overline{B_1B} + \overline{B_1A_1} + \overline{BB_1} + \overline{D_1A_1}$;

в) $\overline{A_1B_1} + \overline{A_1D_1} + \overline{C_1B_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{A_1C}$;

г) $\overline{D_1C_1} + \overline{BA}$.

17.42. Даны векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{d}$. Постройте вектор $\bar{c}$, такой, что $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{d}$.

17.43. Какому условию должны удовлетворять три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, чтобы можно было построить треугольник ABC, такой, что $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$, $\overline{CA} = \bar{c}$?

17.44. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Докажите, что $\overline{AM} + \overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

17.45. Дан треугольник ABC. Докажите, что если M — точка пересечения его медиан, то $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \bar{0}$.

17.46. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \bar{0}$.

17.47. Дан треугольник ABC. От произвольной точки O отложены векторы $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$ и $\overline{OC_1}$ такие, что $\overline{OA_1} = \overline{BC}$, $\overline{OB_1} = \overline{CA}$ и $\overline{OC_1} = \overline{AB}$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с точкой O.

17.48. Дан параллелограмм $ABCD$ с центром O. Упростите суммы векторов: а) $(\overline{AB} + \overline{OD}) + \overline{CO}$; б) $(\overline{BC} + \overline{OA}) + \overline{OD}$.

17.49. Дан параллелограмм $ABCD$. M — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \bar{0}$.

17.50. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC имеют соответственно длины a и b ($a > b$). Постройте направленный отрезок, задающий вектор: а) $\overline{AD} + \overline{BC}$; б) $\overline{AD} + \overline{CB}$; в) $\overline{AB} + \overline{CD}$. Вычислите длину каждого из этих векторов.

59. Разность векторов

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Разностью* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два ненулевых вектора называются *противоположными*, если их длины равны и они направлены противоположно.

Термины и обозначения

Разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначают $\bar{a} - \bar{b}$. Запись $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$ читают так: «разность векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ есть вектор $\overline{CB}$».

17.51. На рисунке 17.8 изображен вектор $\overline{AB}$. Назовите вектор, противоположный вектору $\overline{AB}$.

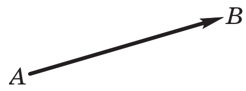


Рис. 17.8

17.52. На рисунке 17.9 изображены два вектора $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Назовите вектор, равный $\overline{OA} - \overline{OB}$.

17.53. Разность каких векторов изображена на рисунке 17.10?

17.54. Известно, что $\bar{m} + \bar{n} = \bar{d}$. Какой из этих векторов можно назвать разностью двух других?

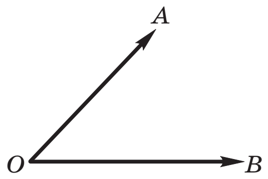


Рис. 17.9

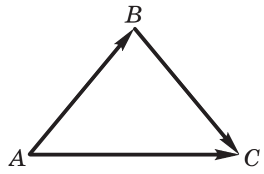


Рис. 17.10

17.55. Как расположены векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если векторы $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$ коллинеарны?

17.56. Может ли выполняться равенство

$$|\overline{CA} + \overline{CB}| = |\overline{CA} - \overline{CB}|?$$

17.57. Могут ли длины векторов $\overline{AB} + \overline{AC}$ и $\overline{AB} - \overline{AC}$ быть больше длины каждого из векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$? Приведите примеры.

17.58. Даны векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Найдите сумму векторов $\overline{AB}$ и вектора, противоположного вектору $\overline{CD}$.

17.59. Даны векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Найдите разность вектора $\overline{CD}$, и вектора, противоположного вектору $\overline{AB}$.

17.60. Запишите вектор $\overline{MN}$ в виде разности двух векторов.

17.61. Запишите вектор $\overline{AB}$ в виде разности двух векторов, один из которых равен вектору $\overline{OA}$.

17.62. Запишите вектор $\overline{CD}$ в виде разности двух векторов, один из которых равен вектору $\overline{KD}$.

17.63. Представьте вектор $\overline{AB}$ в виде суммы и разности следующих векторов:

а) $\overline{AC}$, $\overline{DC}$, $\overline{BD}$; б) $\overline{DA}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, в) $\overline{DA}$, $\overline{DC}$, $\overline{CB}$.

17.64. Упростите выражения:

а) $\overline{OP} - \overline{EP} + \overline{KD} - \overline{BD}$;

б) $\overline{AD} + \overline{MP} + \overline{EK} - \overline{EP} - \overline{MD}$;

в) $\overline{AC} - \overline{BC} + \overline{MP} - \overline{PA} + \overline{MB}$.

17.65. Докажите, что $|\overline{AB} - \overline{AC}| \leqslant |\overline{AB}| - |\overline{AC}|$. В каком случае имеет место знак равенства?

17.66. Сравните длины $|\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{a}| + |\bar{b}|$, если: а) $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены; б) $\bar{a}$ и $\bar{d}$ неколлинеарны. Чему равна длина $|\bar{a} + \bar{b}|$, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ противоположно направлены?

17.67. Даны четыре точки A, B, C и D. Выразите вектор $\overline{AB}$ в виде разности двух векторов, определяемых данными точками. Сколькими способами это можно сделать?

17.68. Для любых четырех точек A, B, C, D докажите справедливость следующих равенств: а) $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$; б) $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$; в) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{DC}$. Изобразите эти соотношения на рисунке.

17.69. Рассматривая параллелограмм, определяемый векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, проверьте правильность такого соотношения: $(\bar{a} - \bar{b}) + \bar{b} = \bar{a}$.

17.70. Даны параллелограмм $ABCD$ и точка O. Выразите вектор $\overline{OD}$ через векторы $\overline{OA} = \overline{m}$, $\overline{OB} = \overline{n}$, $\overline{OC} = \overline{p}$.

17.71. $ABCD$ — параллелограмм. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$, чтобы вектор $\overline{AD} - \overline{AB}$ образовывал с ними равные углы?

17.72. При каждой вершине треугольника ABC построены ромбы, стороны которых равны и направлены по сторонам треугольника; AA_1, BB_1, CC_1 — диагонали этих ромбов. Докажите, что $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{0}$.

17.73. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда для любой точки Q выполняется равенство $\overline{QA} + \overline{QC} = \overline{QB} + \overline{QD}$.

17.74. Докажите, что если точки O, A, B не принадлежат одной прямой и $\overline{OC} = \overline{OA} - \overline{OB}$, то четырехугольник $OBAC$ — параллелограмм.

17.75. Докажите, что если в треугольнике ABC угол ABC прямой, то $|\overline{CA} + \overline{CB}| = |\overline{CA} - \overline{CB}|$. Верно ли обратное утверждение?

17.76. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$, где O — произвольная точка пространства.

60. Умножение вектора на число

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть даны ненулевой вектор $\overline{a}$ и число $x \neq 0$. Произведением вектора $\overline{a}$ на число x называется такой вектор $x\overline{a}$, который имеет длину $|x| \cdot |\overline{a}|$ и сонаправлен с вектором $\overline{a}$, если $x > 0$, и направлен противоположно вектору $\overline{a}$, если $x < 0$.

Итак, если $\overline{b} = x\overline{a}$, причем $\overline{a} \neq \overline{0}$ и $x \neq 0$, то:

1) $|\overline{b}| = |x| \cdot |\overline{a}|$,

2) $\overline{b} = x\overline{a}$, $\overline{b}$ сонаправлен с $\overline{a}$, если $x > 0$, и $\overline{b}$ противоположно направлен с $\overline{a}$, если $x < 0$.

Если $\overline{a} = \overline{0}$ или $x = 0$, то вектор $x\overline{a} = \overline{0}$.

Термины и обозначения

Умножение вектора $\overline{a}$ на число k обозначают $k\overline{a}$. Запись $m\overline{c}$ читают так: «умножение (или произведение) вектора $\overline{c}$ на число m».

17.77. Даны два вектора $\overline{a}$ и $3\overline{a}$. Каково направление этих векторов и их длины?

17.78. Даны векторы $\overline{a}$ и $k\overline{a}$. При каких значениях k эти векторы: а) сонаправлены; б) противоположно направлены?

17.79. Выразите вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в случаях, изображенных на рис. 17.11, *а—д*.

17.80. При каком значении k справедливо следующее соотношение: $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC} = k(\overline{EA} + \overline{CE})$?

17.81. В треугольнике ABC CM — медиана и $\overline{CB} = \overline{a}$, $\overline{CA} = \overline{b}$. Выразите вектор $\overline{CM}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

17.82. Докажите, что в параллелограмме $ABCD$ выполняется равенство $\overline{AC} + \overline{BD} = 2\overline{BC}$.

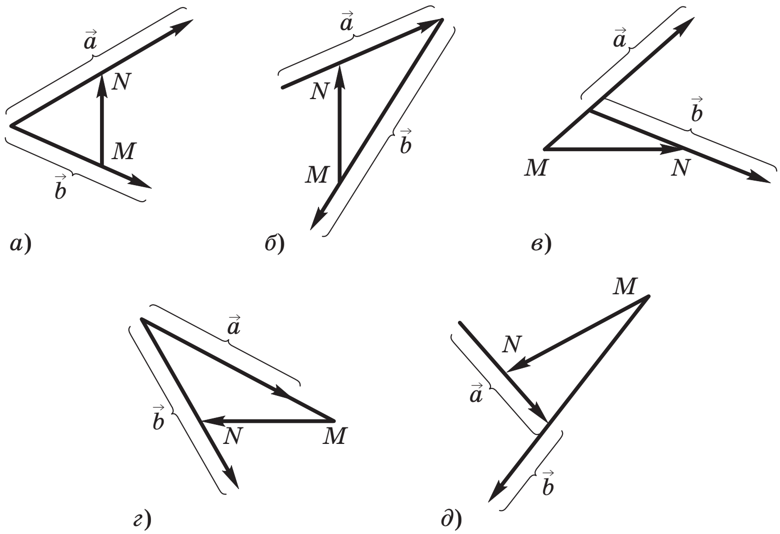


Рис. 17.11

17.83. В трапеции $ABCD$ длины оснований составляют $\overline{AB} = \bar{a}$ и $\overline{CD} = \bar{b}$. Выразите вектор $\overline{CD}$ через вектор $\overline{AB}$.

17.84. Точка P — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\overline{PC}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

17.85. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — соответственно середины сторон CD и AD. Выразите вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{CB} = \bar{a}$ и $\overline{DC} = \bar{b}$.

17.86. $ABCD$ — параллелограмм, O —точка пересечения его диагоналей, Q — произвольная точка плоскости. Выразите вектор $\overline{QO}$ через векторы $\overline{QA} = \bar{a}$, $\overline{CD} = \bar{b}$ и $\overline{AD} = \bar{c}$.

17.87. A, B, C, D — четыре точки плоскости, M и N — соответственно середины отрезков AD и BC. Выразите вектор $\overline{MN}$ через: а) $\overline{AB} = \bar{a}$ и $\overline{DC} = \bar{b}$; б) $\overline{AC} = \bar{c}$ и $\overline{DB} = \bar{d}$.

17.88. Дано: $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — ненулевые и неколлинеарные векторы. Докажите, что если числа α и β удовлетворяют условию $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = \bar{0}$, то $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

17.89. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC, Q — произвольная точка плоскости. Докажите, что

$$\overline{QA_1} + \overline{QB_1} + \overline{QC_1} = \overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC}.$$

17.90. В треугольнике ABC точка D взята на стороне AC так, что $AC : DC = m : n$. Выразите векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ через $\overline{AC} = \bar{a}$ и $\overline{BD} = \bar{b}$.

17.91. В треугольнике ABC AA_1 — медиана и M — ее середина. Выразите для произвольной точки Q плоскости вектор $\overline{QM}$ через векторы $\overline{QA}$, $\overline{QB}$, $\overline{QC}$.

17.92. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и Q — произвольная точка плоскости. Выразите векторы $\overline{QB}$, $\overline{QC}$, $\overline{QA_1}$ через векторы $\overline{QA} = \bar{a}$, $\overline{QB_1} = \bar{b}$, $\overline{QC_1} = \bar{c}$.

17.93. Точки K и L служат соответственно серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overline{AK} = \bar{m}$ и $\overline{AL} = \bar{n}$, выразите векторы $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ через $\bar{m}$ и $\bar{n}$.

17.94. В трапеции $ABCD$ основание AD в k раз больше основания BC. Для произвольной точки Q выразите вектор $\overline{QD}$ через векторы $\overline{QA} = \bar{a}$, $\overline{QB} = \bar{b}$, $\overline{QC} = \bar{c}$.

Тема 18

ДЛИНА ВЕКТОРА. КОЛЛИНЕАРНОСТЬ ВЕКТОРОВ. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Длиной вектора* называется длина направленного отрезка, изображающего этот вектор.

Термины и обозначения

Длина вектора иногда называется *модулем вектора* и обозначается $|\bar{a}|$. Запись $|\overline{AB}|$ читается так: «длина вектора $\overline{AB}$».

18.1. Даны два неколлинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Докажите, что векторное равенство $k\bar{a} + l\bar{b} = p\bar{a} + q\bar{b}$ влечет за собой два равенства: $k = p$, $l = q$.

18.2. От точки O отложены три попарно неколлинеарных вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Докажите, что если вектор $\overline{OC}$ коллинеарен вектору $\overline{OA} + \overline{OB}$ и вектор $\overline{OB}$ коллинеарен вектору $\overline{OC} + \overline{OA}$, то вектор $\overline{OA}$ коллинеарен вектору $\overline{OB} + \overline{OC}$.

18.3. От точки O отложены четыре попарно неколлинеарных вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$. Докажите, что если вектор $\overline{OA}$ коллинеарен вектору $\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}$, вектор $\overline{OB}$ коллинеарен вектору $\overline{OD} + \overline{OA} + \overline{OC}$ и вектор $\overline{OC}$ коллинеарен вектору $\overline{OD} + \overline{OA} + \overline{OB}$, то вектор $\overline{OD}$ коллинеарен вектору $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

18.4. Даны два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равной длины. Докажите, что направления векторов $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$ взаимно перпендикулярны.

18.5. Даны два неколлинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Докажите, что если $|2\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} + 2\bar{b}|$, то $|\bar{a}| = |\bar{b}|$.

18.6. Даны два неколлинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Следует ли из равенства $|\bar{a} + k\bar{b}| = |\bar{b} + k\bar{a}|$, что $|\bar{a}| = |\bar{b}|$?

18.7. Даны два перпендикулярных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Докажите, что $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$.

18.8. Даны два перпендикулярных вектора $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Из точки O к отрезку AB проведен перпендикуляр OC. Докажите, что

$$\overline{OC} = \frac{a^2\overline{OB} + b^2\overline{OA}}{a^2 + b^2}, \text{ где } a = |\overline{OA}|,\ b = |\overline{OB}|.$$

18.9. Даны три точки A, B и C, такие, что $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. Докажите, что для любой точки имеет место равенство

$$\overline{OB} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{OC}.$$

Выразите вектор $\overline{OA}$ через векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, а вектор $\overline{OC}$ через векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

18.10. Даны три точки A, B и C, такие, что $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$. Докажите, что для любой точки O имеет место равенство

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \lambda\overline{OB}}{1 + \lambda}.$$

18.11. На прямой даны три различные точки A, B и C. Докажите, что существует значение k, для которого

$$\overline{OC} = k\overline{OA} + (1 - k)\overline{OB},$$

где O — произвольная точка плоскости.

Докажите обратное утверждение: если выполняется для трех различных точек указанное выше равенство, то точки A, B и C принадлежат одной прямой.

18.12. На прямой p_1 даны три точки A_1, B_1 и C_1, а на прямой p_2 — три точки A_2, B_2 и C_2, причем $\overline{A_1B_1} = m\overline{B_1C_1}$, $\overline{A_2B_2} =$

$= m\overline{B_2C_2}$. Отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 разделены точками A_0, B_0 и C_0 в равных отношениях. Докажите, что эти точки принадлежат одной прямой или совпадают.

18.13. Даны четыре точки A, B, C и D. Докажите, что отрезки, соединяющие середины пар отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, имеют общую середину.

18.14. Симметрия с центром S переводит точку A в точку B. Докажите, что $\overline{OB} = 2\overline{OS} - \overline{OA}$, где O — произвольная точка плоскости.

18.15. Пусть A_1, A_2, A_3 — три не принадлежащие одной прямой точки плоскости и α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 — данные числа. Если для некоторой точки M выполняются соотношения $\overline{QM} = \alpha_1\overline{QA_1} + \alpha_2\overline{QA_2} + \alpha_3\overline{QA_3}$, $\overline{QM} = \beta_1\overline{QA_1} + \beta_2\overline{QA_2} + \beta_3\overline{QA_3}$, независимо от выбора точки Q, то $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$.

18.16. Точки M_1 и M_2 делят отрезок AB на три равные части. Для произвольной точки Q выразите векторы $\overline{QM_1}$ и $\overline{QM_2}$ через векторы $\overline{QA} = \bar{a}$ и $\overline{QB} = \bar{b}$.

18.17. Отрезок AB разделен точками M_3 и M_5 в отношении $3 : 5$ и $5 : 3$ (от точки A). Выразите векторы $\overline{QM_3}$ и $\overline{QM_5}$ через векторы $\overline{QA} = \bar{a}$ и $\overline{QB} = \bar{b}$.

18.18. Для того чтобы точка C делила отрезок AB в отношении $AC : CB = m : n$, необходимо и достаточно, чтобы для произвольной точки Q плоскости выполнялось равенство

$$\overline{QC} = \frac{n}{m+n}\overline{QA} + \frac{m}{m+n}\overline{QB}.$$

Докажите.

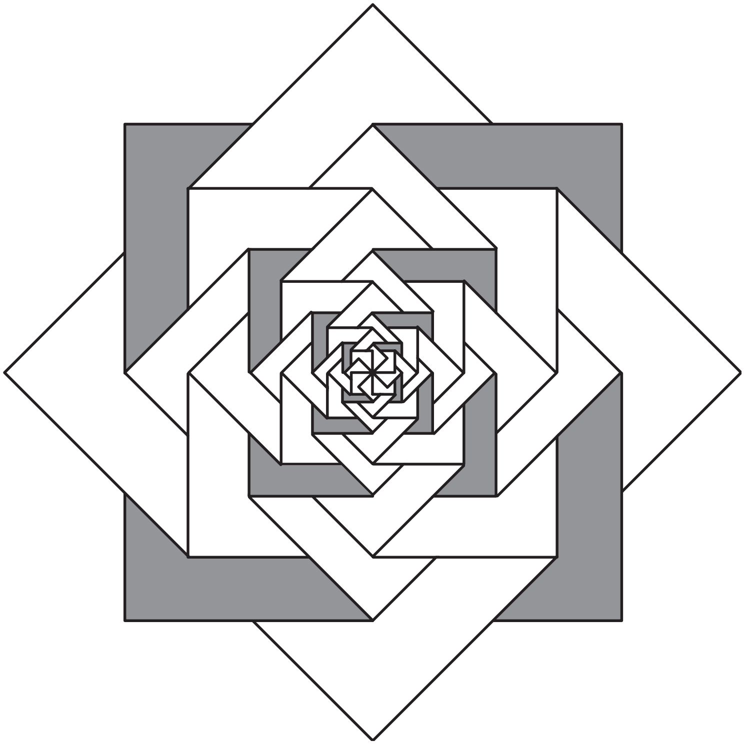
18.19. Известно, что $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$. При каких k_1, k_2, k_3 верно равенство $k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c} = \bar{0}$ ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ попарно неколлинеарны)?

18.20. Докажите, что любой вектор $\overline{m}$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде $\overline{m} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$, где α, β — числа, а $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — неколлинеарные векторы. Можно ли обобщить задачу на случай большего числа слагаемых?

18.21. Пусть вектор $\overline{m}$ представляет собой линейные комбинации векторов $\overline{a_1}$ и $\overline{b_1}$, $\overline{a_2}$ и $\overline{b_2}$, где $\overline{a_1}$ и $\overline{b_1}$ неколлинеарны, а $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$, $\overline{b_1}$ и $\overline{b_2}$ соответственно коллинеарны. Докажите, что соответствующие слагаемые этих линейных комбинаций равны. (*Линейной комбинацией векторов* $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, ..., $\overline{a_n}$ называется выражение вида $k_1\overline{a_1} + k_2\overline{a_2} + \ldots + k_n\overline{a_n}$, где k_1, k_2, ..., k_n — числа.)

Часть II

ЗАДАЧИ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ТЕМАМ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ



Тема Д1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

1. Понятие геометрического преобразования

Основное теоретическое содержание

Если каждой точке одной фигуры по некоторому правилу ставится в соответствие единственный элемент другой фигуры, то такой процесс в геометрии называют *геометрическим преобразованием* или просто *преобразованием*.

Термины и обозначения

Используется такая терминология: при геометрическом преобразовании точка A переходит в точку A_1; точку A_1 иногда называют образом точки A. Фигура Ф переходит в фигуру $Ф_1$ при геометрическом преобразовании; преобразование (геометрическое) переводит точку в точку, а фигуру в фигуру.

Д1.1. Даны две пары точек $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$. Сколько различных преобразований одной пары в другую можно построить? Обратимы ли полученные преобразования?

Д1.2. Сколькими способами можно преобразовать множество, состоящее из двух точек, в множество, состоящее из одной точки. Обратимо ли полученное преобразование. Приведите примеры необратимых преобразований фигур.

Д1.3. Преобразуйте каким-либо способом: а) окружность в ей концентрическую; б) хорду в стягиваемую ею дугу окружности; в) луч в параллельный ему луч (рассмотрите различные случаи расположения лучей); г) прямую в параллельную ей прямую; д) катет в гипотенузу прямоугольного треугольника. Обратимы ли полученные преобразования?

Д1.4. Даны треугольник ABC и ломаная $AKDMB$ (рис. Д1.1), причем $AK \perp AB$ и $BM \perp AB$. Ответьте на вопросы:

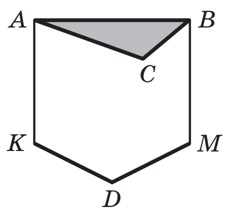


Рис. Д1.1

1. Можно ли преобразовать треугольник ABC в объединение отрезков KD и DM? Обратимо ли полученное преобразование?

2. Можно ли тем же способом преобразовать треугольник ABC в ломаную $AKDMB$?

Д1.5. 1. Сколькими различными способами можно преобразовать множество, состоящее из трех элементов, в множество, состоящее из 1, 2, 3 элементов? 2. Можно ли преобразовать это множество в множество, состоящее из четырех элементов?

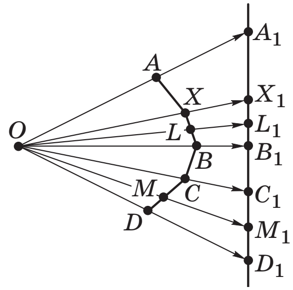


Рис. Д1.2

Д1.6. На рисунке Д1.2 задано преобразование f ломаной $AXBCD$ в отрезок A_1D_1: каждой точке X ломаной соответствует та точка отрезка, которая лежит на луче OX. Ответьте на вопросы:

1. Какая точка является образом точки A? точки X? точки L?

2. Какая точка ломаной переходит в точку M_1? в точку L_1? в точку D_1?

3. Образом какой точки является точка A_1? точка X_1? точка C_1?

4. Является ли преобразование f обратимым?

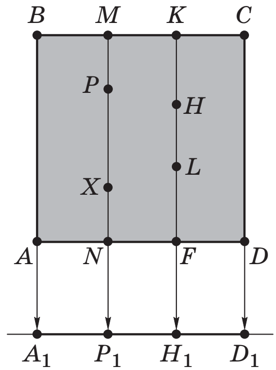


Рис. Д1.3

Д1.7. На рисунке Д1.3 задано преобразование квадрата $ABCD$ в отрезок A_1D_1: каждой точке X квадрата соответствует основание перпендикуляра, проведенного через точку X к прямой A_1D_1. Ответьте на вопросы:

1. В какую точку перейдет точка C? точка D? точка A?

2. Образом какой точки является точка H_1? точка P_1?

3. Обратимо ли это преобразование?

Д1.8. Постройте образы нескольких точек при преобразовании:

1) отрезка AB в отрезок CD (рис. Д1.4, *а*), если соответствующие точки отрезков лежат на лучах с началом M;

2) луча OM в луч ON (рис. Д1.4, *б*), если соответствующие точки этих лучей лежат на окружности с центром O и точка O переходит в O;

3) замкнутой ломаной ABC в окр. $(O; r)$ (рис. Д1.4, *в*), если соответствующие точки лежат на лучах с началом O. Обратимы ли эти преобразования?

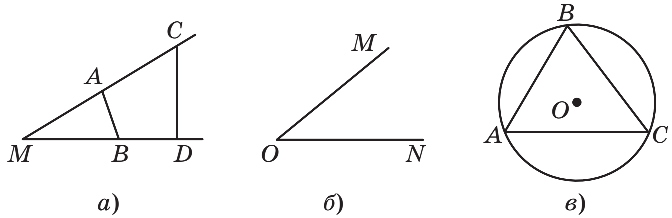


Рис. Д1.4

У

Д1.9. Две окружности касаются: 1) внешним образом; 2) внутренним образом. Покажите, выполнив рисунки, как можно перевести одну из этих окружностей в другую.

Д1.10. На данной окружности отметьте точку M. Укажите образ этой точки при: а) тождественном преобразовании этой окружности; б) симметрии относительно центра окружности.

Д1.11. Задайте (выполните рисунок) преобразование, отличное от тождественного, при котором переходят в себя: а) отрезок AB; б) замкнутая ломаная ABC; в) квадрат $ABCD$; г) окружность $(O; r)$.

Д1.12. На рисунках Д1.5, *а*, *б* заданы преобразования ломаных в отрезки. Ответьте на вопросы:

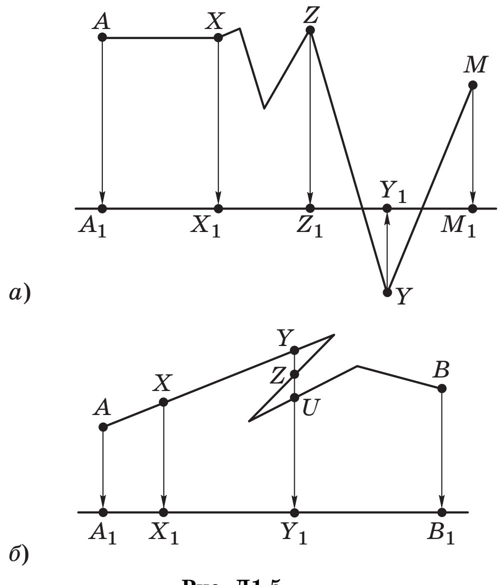


Рис. Д1.5

1. Какие из этих преобразований обратимы?

2. Выполняются ли для этих преобразований равенства: $AX = A_1X_1$, $XY = X_1Y_1$?

3. Сохраняются ли при этих преобразованиях расстояния между соответствующими точками?

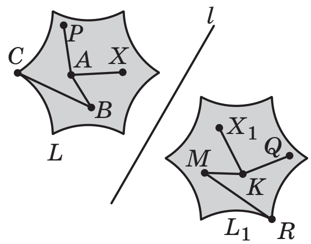


Рис. Д1.6

Д1.13. Задано преобразование фигуры L в фигуру L_1. Произвольной точке X фигуры L соответствует симметричная ей относительно оси l точка X_1 фигуры L_1 (рис. Д1.6). Ответьте на вопросы:

1. Назовите образы точек A, B, C.

2. Образами каких точек являются точки Q, X_1, K?

3. Какому отрезку соответствует отрезок KM? отрезок KX_1?

4. В какие фигуры перейдут: точка P; отрезок BC; ломаная $PABC$?

5. Верно ли равенство $XP = X_1Q$? Сохраняются ли при этом преобразовании расстояния?

6. Докажите, что это преобразование обратимо. Укажите образы нескольких точек ν фигур при преобразовании, обратном данному.

Д1.14. На рисунке Д1.7 задано преобразование отрезка AB в отрезок CD. Ответьте на вопросы:

1. Какая точка является образом точки Y? В какие фигуры перейдут отрезки XY и AY?

2. Образами каких фигур являются отрезки DX_1 и CD?

3. Является ли рассматриваемое преобразование обратимым?

4. Сохраняются ли при этом преобразовании расстояния между соответствующими точками?

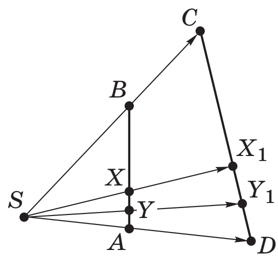


Рис. Д1.7

Д1.15. Каждой точке полуокружности соответствует точка ее диаметра (рис. Д1.8). Точки A и B переходят в себя. Ответьте на вопросы:

1. Преобразование какой фигуры в какую здесь задано?

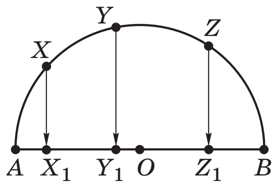


Рис. Д1.8

2. Обратимо ли это преобразование?

3. Сохраняются ли при этом преобразовании расстояния между соответствующими точками? (Проверьте измерением.)

Д1.16. Верны ли предположения: 1) любое преобразование сохраняет расстояния между соответствующими точками; 2) любое сохраняющее расстояние преобразование обратимо?

Д1.17. 1) Укажите все сохраняющие расстояния между соответствующими точками преобразования фигуры, состоящей из точек A, B и C в себя, если: а) $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$; б) $AB = BC = 4$, $AC = 5$; в) $AB = BC = AC = 5$.

2) Для каждого из найденных преобразований укажите преобразование, ему обратное.

Д1.18. Дан угол MON. Каждой точке стороны OM соответствует та точка стороны ON, которая лежит на окружности с центром O; вершина угла переходит в себя (см. рис. Д1.4, *б*). Ответьте на вопросы:

1. Преобразование какой фигуры в какую здесь задано?

2. В какой отрезок перейдет отрезок OY? Образом какого отрезка является отрезок OL?

3. Сохраняются ли при этом преобразовании расстояния?

Покажите, что это преобразование обратимо. Укажите образы нескольких точек и фигур при преобразовании, обратном данному.

2. Понятие изометрии и ее свойства

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Геометрическое преобразование, сохраняющее расстояние между соответствующими точками, называется *изометрией*.

Термины и обозначения

Термины «изометрия» и «движение» мы считаем синонимами.

Д1.19. На какую фигуру изометрия переводит: а) точку; б) пару точек; в) отрезок; г) луч; д) прямую; е) окружность; ж) круг; з) угол?

Д1.20. Приведите примеры преобразований фигур, сохраняющих расстояния между соответствующими точками. Можно ли эти преобразования считать изометриями?

Д1.21. Докажите, что изометрия является обратимым преобразованием фигуры и обратное ему преобразование также является изометрией.

Д1.22. Пусть даны прямая a и некоторая фигура F. Из каждой точки $X_1 \in F$ проведите перпендикуляр X_1O_1 на прямую a ($O \in a$). На продолжении этого перпендикуляра за прямую a постройте точку X_1', такую, что $X_1X_1' = 2X_1O_1$. Точкам X_n фигуры F ставятся в соответствие точки X_n', а точкам прямой a — они сами. Ответьте на вопросы:

1. Сохраняются ли при таком преобразовании фигуры F расстояния между соответствующими точками?
2. Сохраняются ли при таком преобразовании величины углов, перпендикулярность прямых?
3. Если фигура F — отрезок, в какую фигуру он переходит?
4. Если фигура F — треугольник, в какую фигуру он переходит?
5. Есть ли в этом преобразовании неподвижные точки?
6. Является ли это преобразование изометрией?

У **Д1.23.** Даны две концентрические окружности: окр. (O; r_1) и окр. (O; r_2). С помощью лучей с началом в точке O зададим преобразование одной окружности в другую (рис. Д1.9). Ответьте на вопросы:

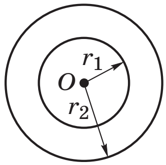


Рис. Д1.9

1. Сохраняет ли это преобразование расстояния между соответствующими точками?
2. Является ли это преобразование изометрией?

3. Преобразование подобия

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если при геометрическом преобразовании фигуры Ф точки X и Y переходят соответственно в точки X_1 и Y_1 фигуры $Ф_1$ так, что отношение расстояний X_1Y_1 к XY остается постоянным, то это преобразование называется *преобразованием подобия*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отношение $\frac{X_1Y_1}{XY} = k$ называется *коэффициентом преобразования подобия*.

Т **Д1.24.** Даны две различные точки A и B и две различные точки A_1 и B_1. Докажите, что существуют два и только два преобразования подобия, переводящие A в A_1 и B в B_1.

Д1.25. Даны две пары точек (A, A_1) и (B, B_1), причем $AB \neq A_1B_1$. Постройте неподвижные точки двух преобразований подобия, в которых A переходит в A_1, B — в B_1.

Д1.26. Даны три полосы (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1) одинаковой ширины d. Прямые a, b, c задают треугольник ABC, а прямые a_1, b_1, c_1 — треугольник $A_1B_1C_1$, содержащийся в первом. Зная площадь S и периметр $2p$ первого треугольника, вычислите площадь S_1 и периметр $2p_1$ второго.

Д1.27. Дан четырехугольник $ABCD$. Постройте второй четырехугольник $PQRS$, чтобы его стороны и диагонали были параллельны сторонам и диагоналям четырехугольника $ABCD$.

Д1.28. Найдите зависимость между длинами сторон a, b, c треугольника ABC, если треугольник ABG (G — точка пересечения медиан треугольника ABC) подобен треугольнику, длины сторон которого равны длинам медиан данного треугольника.

Д1.29. Через точку P к двум пересекающимся в точке Q прямым проведены перпендикуляры PA и PB. Пусть H — ортоцентр треугольника QAB. Докажите, что преобразование, переводящее P в H, есть преобразование подобия, и найдите коэффициент преобразования подобия. (Угол φ между прямыми отличен от прямого.)

Д1.30. Дан четырехугольник $ABCD$, A_1 и C_1 — ортогональные проекции вершин A и C на диагональ BD; B_1 и D_1 — ортогональные проекции B и D на диагональ AC. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ подобен данному и вычислите коэффициент подобия. (Диагонали AC и BD не перпендикулярны.)

Д1.31. В окружность с центром O вписан треугольник ABC. Поворот около O на угол α, отличный от $180°$, переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$: точка A перешла в точку A_1, точка B — в точку B_1, точка C — в точку C_1. Соответствующие в повороте прямые BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, AB и A_1B_1 пересекаются в точках A_0, B_0, C_0. Докажите, что треугольник $A_0B_0C_0$ подобен треугольнику ABC. Найдите коэффициент подобия.

Д1.32. Квадрат $ABCD$ со стороной a повернут около своего центра на угол α, причем точка A перешла в точку A_1, точка B — в точку B_1, точка C — в точку C_1, точка D — в точку D_1. Докажите, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1, DA и D_1A_1 являются вершинами квадрата. Выразите его сторону через a и α.

Д1.33. При повороте около своего центра квадрат $ABCD$ перешел в квадрат $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 пересекаются в точках, являющихся вершинами квадрата. Вычислите сторону a_1 этого квадрата, если угол поворота равен α, а сторона данного квадрата равна a.

Д1.34. Докажите, что серединные перпендикуляры сторон неравнобокой трапеции определяют трапецию, подобную данной. Вычислите коэффициент подобия.

Д1.35. Дан треугольник ABC. На прямых BC, CA и AB найдите соответственно точки A_1, B_1 и C_1, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был подобен треугольнику ABC и одинаково с ним ориентирован.

Д1.36. Даны два подобных и одинаково ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что если O — произвольная точка и четырехугольники AA_1OA_0, BB_1OB_0, CC_1OC_0 — параллелограммы, то треугольник $A_0B_0C_0$ подобен данным и с ними одинаково ориентирован.

Д1.37. Постройте треугольник, подобный и одинаково ориентированный данному, чтобы одна его вершина совпала с данной точкой, а две другие принадлежали двум данным: а) окружностям; б) прямым.

Д1.38. Даны две концентрические окружности. Постройте квадрат $ABCD$, чтобы вершины A и B принадлежали одной окружности, а вершины C и D — другой.

Тема д2

ПРИМЕНЕНИЕ ИЗОМЕТРИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

4. Повороты. Композиции поворотов

Основное теоретическое содержание

Пусть даны два поворота $R_{O_1}^{\alpha_1}$ и $R_{O_2}^{\alpha_2}$. Последовательное выполнение поворота данной фигуры $R_{O_2}^{\alpha_2}$, а затем поворота $R_{O_1}^{\alpha_1}$ называется *композицией* этих поворотов.

Термины и обозначения

Композиция поворотов $R_{O_1}^{\alpha_1}$ и $R_{O_2}^{\alpha_2}$ обозначается $R_{O_2} \circ R_{O_1}^{\alpha_1}$. Запись $R_{O_2}^{\alpha_2} \circ R_{O_1}^{\alpha_1}(X) = X_1$ читается так: при композиции поворотов $R_{O_1}^{\alpha_1}$ и $R_{O_2}^{\alpha_2}$ точка X переходит в точку X_1.

Д2.1. 1. Докажите, что каждой прямой при данном повороте принадлежит только одна пара соответствующих при повороте точек при условии, что поворот отличен от центральной симметрии.

2. Выясните, как обстоит дело в случае центральной симметрии.

Д2.2. Найдите множество M всех точек X, которые при данном повороте переходят в такие точки X', что прямые XX': а) проходят через данную точку S; б) параллельны данной прямой l.

Д2.3. Постройте такой равносторонний треугольник, чтобы одна его вершина совпала с данной точкой O, а две другие принадлежали двум данным окружностям.

Д2.4. На сторонах BC, CA и AB равностороннего треугольника ABC даны соответственно точки M, N и P. Известно, что

$$BM : MC = CN : NA = AP : PB = k.$$

1. Докажите, что MNP — равносторонний треугольник.

2. Вычислите MN, если $BC = a$, $k = 2$.

Д2.5. Даны равносторонний треугольник ABC и его центр O. При повороте около центра O на угол α треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$.

1. Докажите, что точка C_2 пересечения прямых AB и A_1B_1, точка A_2 пересечения прямых BC и B_1C_1, точка B_2 пересечения прямых CA и C_1A_1 являются вершинами равностороннего треугольника.

2. Вычислите A_2B_2, если $AB = m$.

Д2.6. Даны два равных равносторонних одинаково ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что центры трех поворотов, переводящих соответственно вершины A, B, C в A_1, B_1, C_1; A, B, C в B_1, C_1, A_1; A, B, C в C_1, A_1, B_1, принадлежат одной прямой.

Д2.7. Через данную внутри круга точку проведите хорду данной длины.

Д2.8. На двух пересекающихся в точке M прямых даны два отрезка AB и A_1B_1 одинаковой длины. Докажите, что окружности AA_1M и BB_1M пересекаются в точке, являющейся центром поворота, переводящего A в A_1 и B в B_1.

Д2.9. Постройте квадрат $ABCD$ по его центру O и точкам M и N, если известно, что M принадлежит AB, N принадлежит BC, $OM \neq ON$.

Д2.10. На сторонах BC, CD, DA и AB квадрата $ABCD$ даны соответственно точки P, Q, R и S. Известно, что

$$BP : PC = CQ : QD = DR : RA = AS : SB = k.$$

1. Докажите, что $PQRS$ — квадрат.
2. Вычислите PQ, если $AB = a$, $k = 3$.

Д2.11. Докажите, что композиция двух поворотов R_A^{α} и R_B^{β}, где $A \neq B$, $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, $0° \leqslant \beta \leqslant 360°$, есть поворот $R_C^{\alpha+\beta}$ (или $R_C^{\alpha+\beta-360°}$), если $\alpha + \beta \neq 360°$, или же перенос, если $\alpha + \beta = 360°$.

Д2.12. На сторонах AB и BC треугольника ABC как на основаниях построены одинаково ориентированные квадраты $ABMN$ и $BCQP$. Обозначим их центры O_1 и O_2, середину стороны AC — через K, середину отрезка MP — через L. Докажите, что четырехугольник O_1LO_2K — квадрат.

Д2.13. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены разносторонние треугольники ACB_1 и BCA_1. Найдите углы треугольника MA_1O, где M — середина стороны AB, O — центр треугольника ACB_1.

Д2.14. Дан четырехугольник $ABCD$, у которого диагонали перпендикулярны и равны. Пусть точка M — центр поворота, переводящего A в B и C в D, а точка N — центр поворота, переводящего A в D и C в B.

Докажите, что середина отрезка MN есть точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$.

Д2.15. Боковые стороны BC и AD трапеции $ABCD$ повернуты около своих середин на угол $+\,90°$, после чего они заняли положения B_1C_1 и A_1D_1.

1. Докажите, что $D_1C_1 = A_1B_1$.

2. Выразите длину отрезка C_1D_1 через длины оснований трапеции.

5. Параллельный перенос и центральная симметрия

Д2.16. Даны две пересекающиеся прямые a и b. Постройте прямую c, параллельную третьей данной прямой d, чтобы отрезок AB, где $A = a \cap c$, $B = b \cap c$, имел данную длину.

Д2.17. Даны четыре различные точки A, B, C и D. Проведите через них соответственно четыре параллельные прямые a, b, c и d, чтобы ширина полосы с границей (a, b) была равна ширине полосы с границей (c, d).

Д2.18. Постройте трапецию по ее диагоналям, углу между ними и одной из сторон.

Д2.19. Докажите, что если прямая, проходящая через середины оснований трапеции, образует равные углы с прямыми, содержащими ее боковые стороны, то трапеция равнобедренная.

Д2.20. Две равные окружности касаются внешним образом в точке K. Секущая, параллельная линии центров, пересекает окружности последовательно в точках A, B, C, D. Докажите, что величина угла AKC не зависит от выбора секущей.

Д2.21. Определите площадь трапеции, все стороны которой известны.

Д2.22. На окружности с центром O даны такие три точки A, B и C, что $\angle AOB = \angle BOC = 60°$. Докажите, что расстояние от точки B до произвольного диаметра окружности равно или сумме, или модулю разности расстояний от точек A и C до этого диаметра.

Д2.23. Через точку M, лежащую вне окружности ω, проведите прямую m, пересекающую ω в двух точках A и B так, чтобы $AM = BM$.

Д2.24. Постройте пятиугольник (семиугольник) по заданным серединам его сторон.

Д2.25. Четыре равные окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 проходят через точку M и вторично пересекаются в шести точках:

$$A_{12} = \omega_1 \cap \omega_2, A_{23} = \omega_2 \cap \omega_3, \ldots, A_{43} = \omega_4 \cap \omega_3.$$

Докажите, что отрезки $A_{12}A_{43}$, $A_{23}A_{14}$, $A_{13}A_{24}$ имеют общую середину.

6. Композиции осевых симметрий и других изометрий

Д2.26. Даны два равных отрезка AB и CD. Последовательное выполнение каких двух осевых симметрий переводит отрезок AB в отрезок CD?

Д2.27. Даны две перпендикулярные прямые m, n и точки $M_1 = S_m(M)$ и $M_2 = S_n(M)$. Докажите, что точки M_1 и M_2 центрально симметричны.

Д2.28. В треугольнике ABC проведены три его биссектрисы, принадлежащие трем прямым l_A, l_B и l_C. Докажите, что композиция $S_{l_C} \circ S_{l_B} \circ S_{l_A}$ есть симметрия, ось которой проходит через центр вписанной в треугольник окружности перпендикулярно к стороне AC.

Д2.29. В треугольнике ABC проведены серединные перпендикуляры m, n, p его сторон BC, CA и AB. Докажите, что композиция $S_p \circ S_n \circ S_m$ трех осевых симметрий есть симметрия с осью OB, где O — центр описанной около данного треугольника окружности.

Д2.30. Дан равносторонний треугольник ABC. Пусть $BC = p$, $CA = q$, $AB = r$. Докажите, что композиция $S_r \circ S_q \circ S_p$ переводит прямую, содержащую среднюю линию треугольника ABC, параллельную AC, в себя.

Д2.31. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 — основания его высот. Докажите, что прямая A_1C_1 переходит в себя при композиции симметрии с осями BC, CA и AB.

Д2.32. Постройте треугольник ABC по трем данным серединным перпендикулярам p, q, r к его сторонам.

Д2.33. В данную окружность впишите треугольник, стороны которого параллельны трем данным прямым.

Д2.34. Докажите, что прямая, проведенная через точку пересечения высот треугольника ABC, переходит при симметриях с осями BC, CA, AB в три прямые, пересекающиеся в одной точке.

Д2.35. На диаметре AB полукруга дана точка P, а на его полуокружности — точки M, M_1 и N, N_1, такие, что $\angle MPA = \angle M_1PB$, $\angle NPA = \angle N_1PB$. Докажите, что точка Q пересечения хорд MN_1 и M_1N принадлежит перпендикуляру, проведенному к диаметру AB через точку P.

Д2.36. Около треугольника ABC описана окружность, пересекающая биссектрису e_C угла C в точке M. Из ортоцентра H треугольника проведен перпендикуляр HD к биссектрисе так, что $D \in e_C$. Докажите, что $CD : CM = \cos \angle C$.

Д2.37. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что если $\angle A = \angle B$ и $\angle C = \angle D$, то четырехугольник имеет ось симметрии.

Д2.38. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$. Построены лучи OM, ON, OP и OQ, где M, N, P, Q — середины хорд AB, BC, CD, DA. Докажите, что $\angle MON + \angle POQ = 180^\circ$ или же $\angle MON = \angle POQ$.

Д2.39. Около окружности с центром O описан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

Д2.40. В плоскости треугольника ABC дана точка P, не принадлежащая AB, BC, CA. Прямые PA, PB, PC преобразуются в симметриях относительно осей, содержащих биссектрисы соответствующих углов треугольника. Докажите, что полученные прямые либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

Д2.41. Дан треугольник ABC. Докажите, что композиция шести осевых симметрий S_a, S_b, S_c, S_a, S_b, S_c, где $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, есть параллельный перенос, отличный от тождественного преобразования.

Д2.42. В данную окружность впишите пятиугольник, стороны которого параллельны пяти данным прямым.

Д2.43. На бильярдном столе прямоугольной формы лежит шар. В каком направлении необходимо произвести удар по шару, чтобы, отразившись от всех бортов, шар прошел через свое первоначальное положение?

Д2.44. Докажите, что композиция трех симметрий, оси которых имеют общую точку (параллельны), есть симметрия, ось которой проходит через эту точку (параллельна данным осям).

Д2.45. Докажите, что композиция трех симметрий, оси которых определяют треугольник, не есть осевая симметрия.

Д2.46. Докажите, что композиция любого нечетного числа центральных симметрий есть центральная симметрия.

Д2.47. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты с центрами D и E, причем точки C и D расположены по одну сторону от AB, а точки A и E — по разные стороны от BC. Докажите, что угол между прямыми AC и DE равен 45°.

Д2.48. Три равные окружности имеют общую точку. Докажите, что окружность, проведенная через вторые точки пересечения данных трех окружностей, равна данным.

Д2.49. На плоскости даны четыре равные окружности, проходящие через одну точку и пересекающиеся вторично в шести точках. Докажите, что четыре окружности, проходящие через каждые три из этих шести точек, взятых по одной на каждой из данных окружностей, пересекаются в одной точке.

Тема Д3
ГОМОТЕТИЯ И ПОДОБИЕ

7. Понятие гомотетии и ее свойства

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Гомотетией с центром O и коэффициентом* $k \neq 0$ называется преобразование, при котором каждая точка X переходит в точку X_1, такую, что $\overline{OX_1} = k\,\overline{OX}$.

Если при гомотетии фигура Φ_1 переходит в фигуру Φ_2, то эти фигуры Φ_1 и Φ_2 называют *гомотетичными*.

Если $k = 1$, то каждая точка X переходит сама в себя.

Если $k > 0$, то гомотетичные фигуры располагаются по одну сторону от центра гомотетии.

Если $k < 0$, то гомотетичные фигуры располагаются по разные стороны от центра.

ТЕОРЕМА. *Если при гомотетии с коэффициентом k точки X и Y переходят в точки* X_1 *и* Y_1, *то* $X_1Y_1 = k \cdot XY$.

Из этой теоремы можно получить следствия — свойства гомотетии.

Следствие 1. При гомотетии с коэффициентом k расстояние между точками умножается на $|k|$.

Следствие 2. При гомотетии всякая прямая переходит в параллельную ей прямую.

ТЕОРЕМА. *Гомотетия есть преобразование подобия.*

Термины и обозначения

Гомотетия с центром в точке O и коэффициентом k обозначается H_O^k. Запись $H_O^k\,(X) = X_1$ читается так: «образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k является точка X_1» или «при гомотетии с центром O и коэффициентом k точка X переходит в точку X_1». Запись $H_O^k\,(\Phi) = \Phi_1$ читается так: «фигура Ф при гомотетии с центром O и коэффициентом k переходит в фигуру Φ_1».

Д3.1. В какую фигуру перейдет при гомотетии: а) угол; б) параллелограмм; в) трапеция?

Д3.2. Как расположены соответственные точки относительно центра гомотетии, если: а) $k < 0$; б) $0 < k < 1$; в) $k > 1$?

Д3.3. Как изменяются расстояния между соответствующими точками при гомотетии, если: а) $|k| < 1$; б) $|k| > 1$?

Д3.4. Каков коэффициент подобия фигур Ф и Φ_1, которые гомотетичны с коэффициентом гомотетии $k = -3$?

Д3.5. Сколько центров гомотетии могут иметь два круга?

Д3.6. Посмотрите на рисунок Д3.1, *а—г* и ответьте на вопросы:

1. Гомотетичны ли изображенные на них фигуры?
2. Какая фигура переходит в какую?
3. Где находится центр гомотетии?
4. Как определить в каждом случае коэффициент гомотетии?

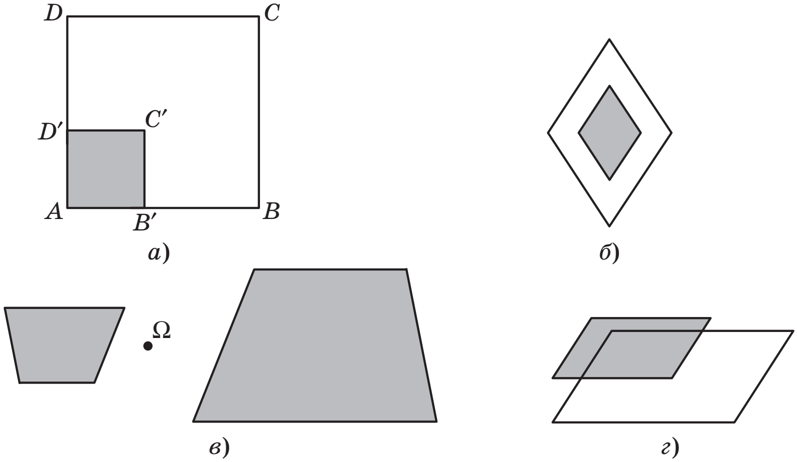


Рис. Д3.1

Д3.7. В каком случае гомотетия: а) переводит фигуру в себя? б) является центральной симметрией?

Д3.8. Как можно задать гомотетию?

Д3.9. Как построить многоугольник, подобный данному?

Д3.10. Можно ли найти центр гомотетии, если известна: а) только одна пара соответствующих точек; б) две пары соответствующих точек?

Д3.11. Определите, верны ли утверждения:

а) если фигуры подобны, то они гомотетичны;

б) если фигура Ф равна фигуре $Ф_1$ и фигура $Ф_1$ гомотетична фигуре $Ф_2$, то фигура Ф подобна фигуре $Ф_2$;

в) если фигура Ф гомотетична фигуре $Ф_1$ и фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_2$, то фигура Ф подобна фигуре $Ф_2$.

Д3.12. Можно ли построить треугольник, подобный данному, но не гомотетичный ему?

Д3.13. Определите, верны ли утверждения:

1. При гомотетии с положительным коэффициентом всякий луч переходит в сонаправленный ему луч.

2. При гомотетии с отрицательным коэффициентом всякий луч переходит в сонаправленный ему луч.

3. Всякая прямая при гомотетии переходит в параллельную ей прямую.

4. Всякий угол при гомотетии переходит в равный ему угол.

Д3.14. Сохраняется ли при гомотетии параллельность прямых?

Д3.15. Стороны угла A (рис. Д3.2) пересечены рядом параллельных прямых так, что $\frac{AK}{KL} = 1$; $\frac{KL}{LM} = 2$. Через точки K' и L' проведены прямые, параллельные прямой AM. Какие из образовавшихся пар точек пересечения прямых можно считать гомотетичными с центрами гомотетии в точках: а) A; б) K'; в) L'?

Укажите для каждой из этих пар коэффициенты гомотетии. Образовались ли на рисунке другие пары гомотетичных точек с другими центрами гомотетии?

Д3.16. Возьмите рисунок какой-либо детали, выполненный в натуральную величину. Выполните в тетради рисунок той же детали в масштабе 1 : 3, используя гомотетию.

Д3.17. Даны два параллельных отрезка AB и A_1B_1, не лежащие на одной прямой. При каком условии существует гомотетия, переводящая точку A в точку A_1 и точку B в точку B_1?

Д3.18. Даны два параллельных, но не равных отрезка AB и A_1B_1. Постройте центры гомотетии, при которых первый отрезок переходит во второй при условии, что отрезки AB и A_1B_1 различны.

Д3.19. Даны два сонаправленных вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ (рис. Д3.3). Ответьте на вопросы:

1. Какая гомотетия переводит первый из них во второй?

2. Как вектор $\overline{CD}$ выражается через вектор $\overline{AB}$?

3. Как вектор $\overline{OD}$ выражается через вектор $\overline{OB}$?

4. Как вектор $\overline{OA}$ выражается через вектор $\overline{OC}$?

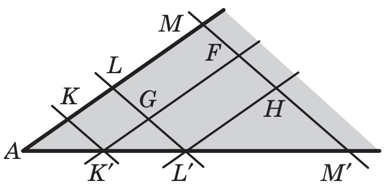


Рис. Д3.2

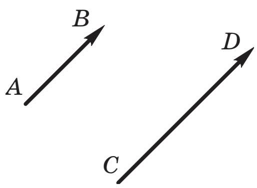


Рис. Д3.3

Д3.20. Даны два противоположно направленных вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ (рис. Д3.4). Ответьте на вопросы:

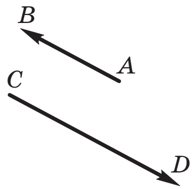


Рис. Д3.4

1. Какая гомотетия переводит первый из них во второй?

2. Как вектор $\overline{CD}$ выражается через вектор $\overline{AB}$?

3. Как вектор $\overline{OB}$ выражается через вектор $\overline{OD}$? (Точка O — центр гомотетии.)

Д3.21. Постройте треугольник, гомотетичный данному треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии k, равным: 2; −1; −2. За центр гомотетии выберите: а) одну из вершин треугольника; б) середину одной из сторон; в) точку пересечения медиан треугольника; г) точку, лежащую вне треугольника.

Д3.22. Постройте четырехугольник, гомотетичный данному четырехугольнику $ABCD$ с коэффициентом гомотетии k, равным: −1; 3; $\frac{1}{2}$, приняв за центр гомотетии: а) одну из вершин четырехугольника; б) точку пересечения диагоналей; в) точку, лежащую вне четырехугольника.

Д3.23. Постройте фигуру, гомотетичную квадрату, приняв за центр гомотетии центр квадрата. Может ли при различных центрах гомотетии получиться один и тот же квадрат?

Т **Д3.24.** Треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC. Докажите, что медианы, биссектрисы и высоты треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетичны соответствующим медианам, биссектрисам и высотам треугольника ABC.

Д3.25. Через точку G пересечения медиан треугольника ABC проведите прямую, параллельную одной из его сторон. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь образовавшегося треугольника?

Д3.26. На сторонах данного прямоугольника с неравными сторонами построены вне прямоугольника четыре квадрата. Ответьте на вопросы:

1. Сколько пар гомотетичных прямоугольников при этом образовалось?

2. Укажите центры гомотетии для каждой из этих пар.

3. Чему равны коэффициенты гомотетии, если длины сторон данного прямоугольника равны a и b?

Д3.27. На каждом из оснований трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что прямая, соединяющая третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

Д3.28. На каждом из оснований трапеции $ABCD$ построены вне трапеции квадраты. Докажите, что эти квадраты гомотетичны с центром гомотетии, лежащим в точке пересечения диагоналей трапеции.

Д3.29. Даны два подобных квадрата. Постройте третий квадрат, равный одному из данных и гомотетичный другому.

Д3.30. Даны угол и принадлежащая ему точка M.

1. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся сторон угла.

2. Проведите через M прямую так, чтобы отрезок ее с концами A и B на сторонах угла делился точкой M в данном отношении.

8. Гомотетия окружностей

Термины и обозначения

Запись H_0^k (окр. (B; r_1)) = окр. (A; r_2) читается так: «при гомотетии с центром O и коэффициентом k окружность с центром B и радиусом r_1 переходит в окружность с центром A и радиусом r_2».

Д3.31. В какую фигуру при гомотетии переходят: а) окружность; б) круг? Сколько центров гомотетии имеют две окружности?

Д3.32. Можно ли построить окружность, подобную данной, но не гомотетичную ей?

Д3.33. Могут ли две окружности не иметь центра гомотетии?

Д3.34. Постройте круг, гомотетичный данному, приняв за центр гомотетии центр круга и взяв коэффициент гомотетии равным: а) 1,5; б) 0,25.

Д3.35. Постройте центр гомотетии двух окружностей, одна из которых расположена внутри другой.

Д3.36. Постройте фигуру, гомотетичную данной окружности, приняв за центр гомотетии центр окружности, а коэффициент гомотетии: а) $k = \frac{1}{3}$; б) $k = -\frac{1}{3}$.

Д3.37. Постройте фигуру, гомотетичную данной окружности, приняв за центр гомотетии центр окружности, а коэффициент гомотетии: а) $k = -1$; б) $k = 2$.

Д3.38. Постройте фигуру F_1, гомотетичную окружности F, приняв за центр гомотетии точку, принадлежащую окружности. Докажите, что F_1 есть окружность, касающаяся окружности F в центре гомотетии. Рассмотрите два случая: коэффициент гомотетии положителен и отрицателен.

T **Д3.39.** Докажите, что если общая точка двух окружностей служит центром гомотетии, переводящей одну окружность в другую, то окружности в этой точке касаются.

Д3.40. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Проведите через точку A прямую p так, чтобы отношение длин хорд M_1A и M_2A, высекаемых окружностями на прямой p, было равно данному числу k: $M_1A : M_2A = k$.

Д3.41. Через точку M, принадлежащую открытому кругу, проведите хорду AB, чтобы она точкой M делилась в данном отношении.

Д3.42. Дана трапеция $ABCD$, основания которой AB и CD, M — точка пересечения ее диагоналей AC и BD. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABM и CDM, касаются в точке M.

Д3.43. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN (M — середина стороны AC, N — середина стороны BC). Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и MNC, касаются в точке C. Найдите отношение радиусов этих окружностей.

Д3.44. Дана окружность. Проведены все хорды, имеющие общий конец. Найдите множество точек, делящих эти хорды в равных отношениях, считая от их общего конца.

Д3.45. Через точку, принадлежащую кругу, проведены все хорды, отрезки которых разделены в равных отношениях, считая от общей точки. Найдите множество точек деления.

Д3.46. Средние линии данного треугольника определяют другой треугольник, около которого описана окружность. Докажите, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса окружности, описанной около данного треугольника.

9. Две и более гомотетии

Д3.47. Даны две гомотетии с коэффициентами k и $\frac{1}{k}$ и различными центрами. Какое преобразование представляет собой последовательное выполнение этих гомотетий?

Д3.48. Какое преобразование представляет собой последовательное выполнение двух гомотетий, если их коэффициенты k и $-\frac{1}{k}$?

Д3.49. Докажите, что последовательное выполнение переноса и гомотетии есть гомотетия с тем же коэффициентом. Постройте центр этой гомотетии.

Д3.50. Даны две гомотетии с различными центрами. Какие прямые переходят в себя при последовательном выполнении этих гомотетий?

Д3.51. Даны две гомотетии. Постройте общую пару точек этих двух гомотетий.

Д3.52. Даны две параллельные прямые a и b, Найдите множество центров гомотетий с коэффициентом $k = 3$, переводящих прямую a в прямую b.

Д3.53. Даны два угла, стороны которых — соответственно сонаправленные лучи. Найдите множество центров гомотетий, переводящих один угол в другой (углы отличны от развернутых).

Д3.54. Через точку M, принадлежащую стороне AB треугольника ABC, проведены прямые, параллельные прямым AC и BC. Образовавшиеся треугольники гомотетичны данному. Вычислите сумму коэффициентов гомотетий.

Д3.55. Через внутреннюю точку M треугольника проведены секущие, параллельные его сторонам. Каждые две секущие и сторона определяют треугольник, гомотетичный данному. Вычислите сумму коэффициентов полученных трех гомотетий.

Д3.56. Даны три гомотетии плоскости. Постройте такую прямую, которая при всех трех гомотетиях переходят в одну и ту же прямую.

Д3.57. Даны две неравные полосы (a, b) и (a_1, b_1) с параллельными краями. Найдите множество всех гомотетий, переводящих первую полосу во вторую.

Д3.58. Докажите, что композиция двух гомотетий есть либо гомотетия, либо перенос, либо тождественное преобразование.

Д3.59. При каком условии две различные гомотетии имеют общую пару соответственных точек? Постройте такую пару точек, если она существует.

Д3.60. Докажите, что гомотетия с любым центром и любым коэффициентом переводят окружность в окружность.

Д3.61. Докажите, что одну из двух неравных окружностей можно перевести в другую посредством двух гомотетий.

Д3.62. На прямой l даны две пары точек A, B и A_1, B_1, причем $AB \neq A_1B_1$. Постройте центр гомотетии, переводящий A в A_1 и B и B_1.

Д3.63. Даны угол и принадлежащая ему точка. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся сторон угла.

Д3.64. Две окружности ω_1 и ω_2 различных радиусов касаются в точке M. Построены произвольные перпендикулярные хорды MA_1, точка A_1 принадлежит окружности ω_1 и MA_2, точка A_2 — окружности ω_2. Докажите, что множество прямых A_1A_2 содержится в центральном пучке прямых.

Д3.65. Даны три окружности, которые попарно касаются внешним образом. Постройте посредством одной линейки центры этих окружностей (точки касания окружностей заданы).

Д3.66. Дан треугольник ABC и некоторая точка X. Постройте параллелограмм $BXCY$, а затем другой параллелограмм $YXAZ$. Докажите, что существует гомотетия, переводящая X в Z, и найдите ее коэффициент и центр.

10. Пропорциональные отрезки

Д3.67. Докажите, что медиана треугольника есть множество середин отрезков с концами на двух сторонах треугольника и параллельных третьей стороне, к которой проведена медиана.

Д3.68. Две пересекающиеся прямые a и b пересечены тремя параллельными прямыми соответственно в точках A_1 и B_1, A_2 и B_2, A_3 и B_3. Докажите, что середины отрезков A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 принадлежат одной прямой.

Д3.69. Прямая, проведенная через точку пересечения S диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ параллельно основаниям, пересекает ее боковые стороны BC и AD соответственно в точках M и N. Докажите, что $NS = SM$.

Д3.70. Докажите, что если середины M и N двух противоположных сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ и точка S пересечения прямых BC и AD принадлежат одной прямой, то четырехугольник — трапеция.

Д3.71. Прямая, параллельная основаниям AB и CD трапеции $ABCD$, рассекает ее на две гомотетичные трапеции $ABMN$ и $MNDC$. Вычислите MN, если $AB = a$, $CD = b$.

Д3.72. В параллелограмме $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Прямая, параллельная стороне AB, пересекает отрезки AD, AC, BC и BD соответственно в точках P, Q, R и S. Докажите, что $PQ = RS$.

Д3.73. Докажите, что если прямая, проходящая через середины противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей, то четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

Д3.74. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная одной из его сторон. Докажите, что если пересечение этой прямой и четырехугольника есть отрезок, который делится точкой O пополам, то $ABCD$ — трапеция.

Д3.75. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1. Докажите, что если прямая l такая, что она пересекает отрезок AC в точке P, отрезок CC_1 в точке Q, отрезок BC в точке R и $PQ = QR$, то $l \parallel AB$.

Д3.76. Через точку M, принадлежащую стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC и пересекающие отрезки AC и AB соответственно в точках P и Q. Докажите, что $\dfrac{AP}{AC} + \dfrac{AQ}{AB} = 1$.

Д3.77. Дан параллелограмм $ABCD$. M — середина стороны AD, N — середина отрезка CD. Отрезок AN пересекает отрезок

CM в точке P; отрезок BM пересекает отрезок AC в точке Q. Докажите, что 1) $PQ \parallel AD$, 2) $PQ = \frac{1}{3}AD$.

Д3.78. В данный четырехугольник $ABCD$ впишите параллелограмм $PQRS$ так, чтобы точка P принадлежала AB, а точка Q принадлежала BC, точка R принадлежала CD, точка S принадлежало DA и чтобы стороны параллелограмма были параллельны диагоналям данного четырехугольника.

Д3.79. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Постройте прямую, параллельную основаниям трапеции, чтобы ее отрезок, принадлежащий трапеции, делился диагоналями на три равные части.

Д3.80. В параллелограмме $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Постройте прямую, параллельную стороне AB параллелограмма, чтобы ее отрезок, принадлежащий параллелограмму, делился диагоналями на части, длины которых пропорциональны числам 1, 2, 4.

Д3.81. Прямые AA_1, BB_1, CC_1, проходящие через соответствующие вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, параллельны. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения медиан данных треугольников, параллельна прямой AA_1.

Д3.82. Через точку пересечения медиан G треугольника ABC проведена прямая p так, что вершины A и B расположены по одну сторону от p, а вершина C — по другую сторону. Докажите, что сумма расстояний от вершин A и B до прямой p равна расстоянию от вершины C до прямой p.

Д3.83. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ BD. На стороне AD дана точка P, через которую проведена прямая l, параллельная прямой AB, пересекающая отрезок BD в точке R, а отрезок BC — в точке Q. Вычислите $\left|\overline{PR}\right| : \left|\overline{RQ}\right|$, если $\left|\overline{AP}\right| : \left|\overline{PD}\right| = k$.

Д3.84. На прямой a даны три точки P, Q и R, а на прямой a_1 — три точки P_1, Q_1 и R_1, причем $PQ : QR = P_1Q_1 : Q_1R_1$. Через точки P, Q и R проведены три параллельные прямые p, q и r, а через точки P_1, Q_1 и R_1 — три параллельные прямые p_1, q_1

и r_1 ($p_1 \nparallel p$). Докажите, что точки $P_0 = p \cap p_1$, $Q_0 = q \cap q_1$, $R_0 = r \cap r_1$ принадлежат одной прямой.

Д3.85. Дан треугольник ABC; точка A_1 принадлежит стороне BC, точка B_1 — стороне CA, точка C_1 — стороне AB, причем $\overline{BA_1} = k\overline{A_1C}$, $\overline{CB_1} = k\overline{B_1A}$, $\overline{AC_1} = k\overline{C_1B}$. Докажите, что медианы треугольника $A_1B_1C_1$ проходят через точку пересечения медиан данного треугольника.

Д3.86. В окружности проведены два радиуса. Постройте хорду этой окружности, чтобы она этими радиусами делилась на три равных отрезка.

Д3.87. Стороны BC, CA, AB равностороннего треугольника разделены точками A_1, B_1, C_1 в равных отношениях k:

$$\frac{\overline{|AB_1|}}{\overline{|B_1C|}} = \frac{\overline{|CA_1|}}{\overline{|A_1B|}} = \frac{\overline{|BC_1|}}{\overline{|C_1A|}} = k.$$

Стороны B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ разделены точками A_2, B_2, C_2 в равных отношениях $\frac{1}{k}$:

$$\frac{\overline{|A_1B_2|}}{\overline{|B_2C_1|}} = \frac{\overline{|C_1A_2|}}{\overline{|A_2B_1|}} = \frac{\overline{|B_1C_2|}}{\overline{|C_2A_1|}} = \frac{1}{k}.$$

Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$ гомотетичен треугольнику ABC. Вычислите коэффициент гомотетии.

Д3.88. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны a и b. Прямая l, параллельная прямой AB, пересекает стороны BC и DA соответственно в точках M и N.

1. Дано отношение $AN : ND = k$. Вычислите длину d отрезка NM.

2. Дана длина d отрезка MN. Вычислите отношение $AN : ND$.

Д3.89. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Прямая l, параллельная основанию AB, пересекает AD и AC в точках M и N, а BC и BD — в точках P и Q. Докажите, что $MN = PQ$.

11. Применение гомотетии и подобия

Д3.90. Даны три различные параллельные прямые a, b, c и еще две параллельные прямые a_1 и b_1. Постройте прямую c_1, параллельную a_1, чтобы фигура, состоящая из прямых a, b, c, была подобна фигуре, состоящей из прямых a_1, b_1, c_1.

Д3.91. Даны три различные параллельные прямые a, b, c и треугольник $A_0B_0C_0$. Постройте треугольник ABC, подобный треугольнику $A_0B_0C_0$, чтобы $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$.

Д3.92. На прямой даны две пары точек M, N и P, Q. Проведите через точки M и N две параллельные прямые, а через точки P и Q — также две параллельные прямые, чтобы обе пары параллельных прямых своим пересечением образовали квадрат.

Д3.93. На сторонах угла C указаны точки A и B, через которые проведены перпендикуляры к сторонам, пересекающиеся в точке P. Найдите множество M точек P, если перпендикуляры к сторонам угла проведены через точки этих сторон, являющиеся концами отрезков, параллельных отрезку AB.

Д3.94. Через внутреннюю точку M треугольника ABC проведены прямые, параллельные его сторонам. Докажите, что площади треугольников S_1, S_2, S_3, отсекаемых от данного треугольника этими прямыми, и площадь данного треугольника S связаны соотношением $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = 2\sqrt{S}$.

Д3.95. Через точку G пересечения медиан треугольника ABC проведены два луча, параллельные сторонам AC и BC и пересекающие сторону AB в точках A_1 и B_1. Докажите, что площадь треугольника A_1B_1G составляет $\frac{1}{9}$ площади данного треугольника.

Д3.96. Вершины треугольников, имеющих общее основание, принадлежат некоторой прямой. Найдите множество M точек пересечения медиан этих треугольников.

Д3.97. На стороне AB треугольника ABC от его вершин отложены равные отрезки, через концы которых проведены прямые, параллельные сторонам BC и AC. Докажите, что построенные прямые пересекаются на прямой, которой принадлежит медиана CM треугольника.

Д3.98. Постройте треугольник по трем его высотам.

Д3.99. Постройте треугольник по данной высоте, углу при вершине и отношению длин отрезков, на которые высота делит основание.

Д3.100. Через точку K пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная AB и пересекающая прямые AC и BC соответственно в точках D и E. Докажите, что $DE = \frac{c(a+b)}{a+b+c}$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

Д3.101. Биссектриса AA_1 треугольника ABC пересекает биссектрису CC_1 в точке K. Докажите, что точка K делит биссектрису CC_1 в отношении $CK : KC_1$, равном отношению $(a + b) : c$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

Д3.102. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC в точке их пересечения делятся в равных отношениях, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

Д3.103. Через основание C_1 биссектрисы CC_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой AC и пересекающая прямую BC в точке D. Выразите длину отрезка CD через длины a, b и c сторон треугольника.

Д3.104. Дан треугольник ABC, у которого $\angle B = 90^\circ + \angle A$. Найдите зависимость между длинами a, b и c сторон этого треугольника.

Д3.105. Два треугольника $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$, площади которых равны S_0 и S_1, расположены так, что лучи A_0B_0 и A_1B_1, B_0C_0 и B_1C_1, C_0A_0 и C_1A_1 параллельны, но противоположно направлены. Найдите площадь треугольника с вершинами в серединах отрезков A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1.

Д3.106. Постройте прямую, параллельную стороне AC данного треугольника ABC и пересекающую его стороны AB и BC в таких точках D и E соответвтенно, что $AD = BE$.

Д3.107. Докажите признаки подобия треугольников с использованием гомотетии и ее свойств.

Д3.108. Дан треугольник ABC, у которого $\angle B = 2\,\angle A$. Найдите зависимость между длинами сторон a, b и c этого треугольника.

Д3.109. Угол C равнобедренного треугольника ABC, в котором $CA = CB$, равен $36°$. Найдите зависимость между длиной боковой стороны a и длиной основания c в этом треугольнике.

Д3.110. В треугольник ABC вписан квадрат $PQRS$, где точки P и Q принадлежат отрезку AB, точка R — отрезку BC, точка S — отрезку CA. Зная, что $AB = c$ и $CC_1 = h_c$, где CC_1 — высота треугольника, вычислите длину стороны квадрата.

Д3.111. Постройте прямоугольник по стороне и отношению другой стороны к диагонали.

Д3.112. Постройте четырехугольник по четырем его сторонам, если известно, что сумма двух противоположных углов равна $180°$.

Д3.113. Используя гомотетию, докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции принадлежат одной прямой.

Д3.114. Через точку M, принадлежащую диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведены две прямые, параллельные его сторонам. Докажите, что при этом образовались два параллелограмма, гомотетичные данному, причем $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$, где S_1, S_2, S — площади образовавшихся и данного параллелограммов.

Д3.115. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD, пересекающиеся в точке M (AB и CD — основания трапеции). Докажите, что площади треугольников ABM и CDM, равные соответственно S_1 и S_2, и площадь S трапеции связаны соотношением $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$.

Д3.116. Две окружности радиусами R_1 и R_2, пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через A, пересекает окружности вторично в точках M и N соответственно. Докажите, что $BM : BN = R_1 : R_2$.

Д3.117. К окружности проведены две параллельные касательные a и b. Третья касательная пересекает a и b соответственно в точках A и B и касается окружности в точке C. Вычислите расстояние между a и b, если $AC = m$, $BC = n$.

Д3.118. Даны два подобных прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ ($\angle C = \angle C_1 = 90°$). Докажите, что $aa_1 + bb_1 = cc_1$, где a, b, c — соответственно катеты и гипотенуза первого треугольника, а a_1, b_1, c_1 — второго.

Д3.119. Около треугольника ABC описана окружность, к которой в точке A проведена касательная. Через вершину B проведена прямая, параллельная касательной и пересекающая отрезок AC в точке D. Докажите, что треугольники ABD и ABC подобны и $AB^2 = AD \cdot AC$.

Д3.120. Докажите, что расстояние d от точки A окружности радиуса R до ее хорды BC вычисляется по формуле

$$d = \frac{AB \cdot AC}{2R}.$$

Д3.121. Касательные в точках A и B к окружности пересекаются в точке S. Докажите, что расстояние любой точки окружности до прямой AB есть среднее пропорциональное ее расстояний до прямых AS и BS.

Д3.122. На окружности даны четыре точки A, B, C, D. Докажите, что произведения расстояний от любой точки M окружности до пар прямых AC и BD, BC и AD, CD и AB равны.

Д3.123. В данный сегмент впишите квадрат так, чтобы две вершины принадлежали дуге, а две другие — основанию сегмента.

Д3.124. Дан треугольник ABC. Постройте квадрат так, чтобы две его вершины принадлежали прямой AB, а две другие — соответственно прямым AC и BC.

Д3.125. В данный сектор впишите квадрат так, чтобы две вершины принадлежали дуге, а две другие — радиусам.

Д3.126. В данный сектор впишите квадрат, чтобы одна вершина принадлежала дуге, вторая — радиусу, две другие — второму радиусу.

Тема Д4

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

12. Задачи на треугольники

Д4.1. Даны два треугольника ABC и AB_1C_1, имеющие общую медиану AA_1. Докажите, что $\overline{CB_1} = \overline{C_1B}$.

Д4.2. Даны треугольник ABC и точка M. Докажите, что если M — точка пересечения медиан, то $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \bar{0}$.

Д4.3. Дан треугольник ABC. G — точка пересечения его медиан. Докажите, что для любой точки M имеет место соотношение $\overline{MG} = \frac{1}{3}(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC})$.

Д4.4. M и M_1 — точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\overline{MM_1} = \frac{1}{3}(\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1})$.

Д4.5. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC даны соответственно точки A_1, B_1 и C_1, такие, что $\overline{AC_1} = k\overline{AB}$, $\overline{BA_1} = k\overline{BC}$, $\overline{CB_1} = k\overline{CA}$. Вычислите сумму векторов $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ и $\overline{CC_1}$.

Д4.6. Через середину M медианы CC_1 треугольника ABC проведена прямая AM, пересекающая сторону BC в точке P. Докажите, что $|\overline{CP}| : |\overline{PB}| = 1 : 2$.

Д4.7. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общую точку пересечения медиан. Докажите, что $\overline{CC_1} = \overline{A_1B} + \overline{B_1A}$.

Д4.8. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC даны соответственно пары точек A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, причем $BA_1 = A_2C$, $CB_1 = B_2A$, $AC_1 = C_2B$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно точки пересечения медиан данного треугольника.

Д4.9. Через вершины A, B и C треугольника ABC параллельно направлению вектора $\bar{s}$ проведены прямые, пересекающие прямые BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma = 0$, если $\bar{s} = \alpha\overline{CC_1} = \beta\overline{BB_1} = \gamma\overline{AA_1}$.

Д4.10. На прямых BC, CA и AB, определяющих треугольник ABC, даны соответственно точки A_1, B_1 и C_1, такие, что

$$\overline{AC_1} = \alpha\overline{C_1B},\ \overline{BA_1} = \beta\overline{A_1C},\ \overline{CB_1} = \gamma\overline{B_1A}.$$

Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой, то $\alpha\beta\gamma = -1$. Проверьте истинность обратного предложения.

Д4.11. На плоскости даны четыре прямые, из которых никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны. Докажите, что если одна из четырех прямых параллельна медиане треугольника, определяемого тремя другими, то аналогичными свойствами обладает каждая из трех остальных данных прямых.

Д4.12. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены соответственно прямые l, m и n, пересекающиеся в точке S. Докажите, что прямые l_1, m_1 и n_1, проходящие соответственно через середины A_0, B_0 и C_0 сторон BC, CA и AB параллельно l, m и n, также пересекаются в одной точке.

Д4.13. Даны треугольник ABC и точка M; точки A_1, B_1 и C_1 — середины его сторон BC, CA и AB. Через вершины A, B и C проведены прямые, параллельные прямым MA_1, MB_1 и MC_1 соответственно. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

Д4.14. На сторонах треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{0}$.

Д4.15. На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

Д4.16. На продолжениях высот AA_1 и BB_1 треугольника ABC за его вершины A и B отложены отрезки AA_2 и BB_2, причем $AA_2 = BC$ и $BB_2 = AC$. Докажите, что $CA_2 = CB_2$ и $CA_2 \perp CB_2$.

Д4.17. Даны треугольник ABC и центр O вписанной в него окружности. Докажите равенство $a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{AC} = \overline{0}$, где a, b и c — длины отрезков BC, CA и AB соответственно.

Д4.18. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1.

1) Докажите, что $CC_1 < \frac{1}{2}(CA + CB)$.

2) Прямая g, параллельная прямой CC_1, пересекает прямые AB, BC и CA соответственно в точках C_0, A_0, B_0. Докажите, что сумма $\overline{A_0B_0} + \overline{A_0C_0}$ не зависит от выбора прямой g.

3) Прямая p пересекает отрезки AC, BC и CC_1 соответственно в точках P, Q и M. Докажите, что $\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} + \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}\right) = \frac{\overline{C_1M}}{\overline{MC}}$.

Д4.19. Дан треугольник ABC. Докажите, что $\overline{OM} < \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$, где M — точка пересечения медиан треугольника, O — произвольная точка плоскости.

Д4.20. В треугольнике ABC проведена биссектриса CC_1. Докажите, что $\overline{CC_1} = \frac{a\overline{CA} + b\overline{CB}}{a+b}$, где a и b — длины отрезков CB и CA соответственно.

Д4.21. В окружность с центром O вписан треугольник ABC. Докажите, что $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$, где H — точка пересечения высот треугольника.

Д4.22. Дан треугольник ABC, в котором проведены медианы. Докажите, что если A_1, B_1, C_1 — середины медиан, то для любой точки Q плоскости выполняется равенство $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} = \overline{QA_1} + \overline{QB_1} + \overline{QC_1}$.

Д4.23. Докажите, что медианы произвольного треугольника ABC пересекаются в одной точке M, которая обладает следующим свойством: расстояние от точки M до каждой вершины треугольника равно $\frac{2}{3}$ длины соответствующей медианы.

Д4.24. Существует ли в плоскости треугольника ABC точка Q, удовлетворяющая равенству $\overline{QA} + 2\overline{QB} + 3\overline{QC} = \bar{0}$?

Д4.25. Из точки M, лежащей внутри треугольника ABC, проведены перпендикуляры на стороны BC, AC, AB и на этих перпендикулярах отложены отрезки MA_1, MB_1, MC_1, равные соответствующим сторонам треугольника. Докажите, что M — центр масс треугольника $A_1B_1C_1$.

Д4.26. На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты, имеющие центры соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \bar{0}$.

Д4.27. На сторонах CA и CB треугольника ABC вне его построены квадраты CAA_1C_1 и CBB_1C_1'. Докажите, что медиана треугольника CC_1C_1', проведенная через вершину C, перпендикулярна стороне AB и равна ее половине.

13. Задачи на параллелограммы

Д4.28. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка O — его центр. Докажите, что $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 4\overline{PO}$, где P — любая точка плоскости.

Д4.29. Дан параллелограмм $ABCD$. На прямой AB взята такая точка M, что $\overline{AM} = k\overline{AB}$. Прямая DM пересекает прямую AC в точке N, для которой $\overline{AN} = l\overline{AC}$. Вычислите l.

Д4.30. Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена прямая l, пересекающая прямые AB и AD соответственно в точках M и N. Докажите, что если $\overline{DC} = k\overline{AM}$, $\overline{BC} = l\overline{AN}$, то $k + l = 1$.

Д4.31. Дан параллелограмм $ABCD$. Найдите на плоскости такую точку Q, чтобы выполнялось равенство $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} + \overline{QD} = \bar{0}$. Сколько существует таких точек?

Д4.32. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$, где O — произвольная точка пространства.

Д4.33. $ABCD$ — параллелограмм, O — его центр, Q — произвольная точка плоскости. Выразите вектор $\overline{QO}$ через векторы $\overline{QA} = \bar{a}$, $\overline{CD} = \bar{b}$, $\overline{AD} = \bar{c}$.

Д4.34. Два параллелограмма $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ имеют общую вершину A. Докажите, что $CC_1 \leqslant BB_1 + DD_1$.

Д4.35. Даны два параллелограмма $OABC$ и $OA_1B_1C_1$. Докажите, что каждый из трех отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не больше суммы двух других отрезков.

Д4.36. $ABCD$ и $ACEF$ — два параллелограмма с центрами O и D. Выразите векторы $\overline{AC}$, $\overline{BF}$, $\overline{EO}$, $\overline{FO}$, $\overline{AF}$, $\overline{BE}$ через векторы $\overline{EC} = \bar{a}$ и $\overline{FD} = \bar{b}$.

Д4.37. Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — соответственно середины сторон AB и CD и для построенного параллелограмма $ABDD'$ точка O — середина отрезка CD', то $MN = AO$ и $MN \parallel AO$.

Д4.38. На стороне AB четырехугольника $ABCD$ построен параллелограмм $ABCC'$ и взята точка O — середина отрезка $C'D$. Докажите, что если M и N — соответственно середины сторон AB и CD, то отрезок AO равен отрезку MN по длине и параллелен ему.

Д4.39. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что в общем случае середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 являются вершинами параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$. Постройте два таких параллелограмма, чтобы точки A_0, B_0, C_0, D_0 совпали или принадлежали одной прямой.

Д4.40. Докажите, что если A, B, C, D, E, F — соответственно середины последовательных сторон шестиугольника, то $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \bar{0}$.

Д4.41. $ABCD$ и $BDCF$ — два параллелограмма и O — центр первого из них. Выразите векторы $\overline{AD}$, $\overline{BO}$, $\overline{CF}$, $\overline{OF}$, $\overline{DF}$, $\overline{CD}$ через векторы $\overline{BF} = \bar{a}$ и $\overline{CO} = \bar{b}$.

Д4.42. Даны четыре компланарных вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ одинаковой длины. Докажите, что если $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \bar{0}$, то четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

Д4.43. При каждой вершине треугольника ABC построены ромбы, стороны которых равны и направлены по сторонам треугольника; AA_1, BB_1, CC_1 — диагонали этих ромбов. Докажите, что $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \bar{0}$.

Д4.44. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда для любой точки Q выполнялось равенство $\overline{QA} + \overline{QC} = \overline{QB} + \overline{QD}$.

Д4.45. Докажите, что если точки O, A, B не принадлежат одной прямой и $\overline{OC} = \overline{OA} - \overline{OB}$, то четырехугольник $OBAC$ — параллелограмм.

Д4.46. В четырехугольнике $ABCD$ точки M, N, P, Q — соответственно середины последовательных сторон. Докажите, что $MNPQ$ — параллелограмм.

14. Задачи на трапеции

Д4.47. Дана трапеция $ABCD$. Прямая, параллельная ее основаниям AB и CD, пересекает боковые стороны AD и BC соответственно в точках M и N. Докажите, что если $AN \parallel CM$, то $DN \parallel BM$.

Д4.48. Дана трапеция $ABCD$, у которой AB и CD — основания, а точки M и N — середины ее боковых сторон AD и BC. Докажите, что $AN \nparallel CM$.

Д4.49. Через точку пересечения O диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны AD и BC в точках M и N. Докажите, что $\overline{MN} = \dfrac{b\overline{AB} + a\overline{DC}}{a+b}$, где a и b — длины отрезков AB и CD.

Д4.50. Докажите, что если длина средней линии MN четырехугольника $ABCD$ равна полусумме длин его сторон AB и CD (точка M принадлежит стороне BC, точка N принадлежит стороне DA), то $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

15. Задачи на многоугольники

Д4.51. Даны четырехугольник $ABCD$ и точки M и N (M принадлежит стороне AB, а N — стороне CD). Докажите, что вектор $\overline{Y_1Y_2}$, где Y_1 и Y_2 — точки пересечения средних линий четырехугольников $AMND$ и $CBMN$, не зависит от выбора точек M и N.

Д4.52. Даны четырехугольник $ABCD$ и точка M. Построены точки M_1, M_2, M_3, M_1, симметричные M относительно середин сторон четырехугольника. Докажите, что $\overline{MM_1} + \overline{MM_3} = \overline{MM_2} + \overline{MM_4}$.

Д4.53. Дан четырехугольник $ABCD$. Построен второй четырехугольник с вершинами в точках пересечения медиан треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что средние линии обоих четырехугольников пересекаются в одной точке.

Д4.54. На сторонах AB и CD четырехугольника $ABCD$ даны соответственно точки M и N, такие, что $\overline{AM} = k\overline{AB}$, $\overline{DN} = k\overline{DC}$. Докажите, что середины отрезков BC, MN и AD принадлежат одной прямой.

Д4.55. В пятиугольнике $ABCDE$ точки M, P, Q — соответственно середины четырех последовательных сторон, начиная от AB. Найдите зависимость между векторами $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ и $\overline{AE}$.

Д4.56. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке M. Выразите вектор $\overline{OM}$ через векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$.

Д4.57. Дан правильный n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$ с центром O. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{OA} = \bar{0}$.

Д4.58. Даны правильный n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$ с центром O и точка M. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{MA_i} = n \cdot \overline{MO}$.

Д4.59. Даны два произвольно расположенных правильных n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ с центрами O_1 и O_2. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{A_iB_i} = n \cdot \overline{O_1O_2}$.

Д4.60. Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ с центром O. Выразите векторы $\overline{OA_3}$, $\overline{OA_4}$ и $\overline{OA_5}$ через $\overline{OA_1}$ и $\overline{OA_2}$.

Д4.61. На сторонах четырехугольника $ABCD$ вне его построены квадраты ABB_1A_1, BCC_1B_1', CDD_1C_1' и $DAA_1'D_1'$ с центрами P, Q, R, S соответственно. Докажите, что отрезки PR и QS равны и перпендикулярны.

Д4.62. Дан четырехугольник $ABCD$. Найдите на плоскости такую точку Q, чтобы выполнялось равенство $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} + \overline{QD} = \overline{0}$. Сколько существует таких точек?

Д4.63. Пусть S — точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ и Q — произвольная точка плоскости. Докажите, что имеет место равенство $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} + \overline{QD} = 4\overline{OS}$.

Д4.64. Дан четырехугольник $ABCD$. Его средние линии пересекаются в точке M. Построена ломаная $MAUV$, где $\overline{AU} = \overline{MB}$, $\overline{UV} = \overline{MC}$. Докажите, что M — середина отрезка VD.

Д4.65. Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — произвольный многоугольник, а $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — середины его сторон. Докажите, что для произвольной точки Q справедливо соотношение $\overline{QA_1} + \overline{QA_2} + \ldots + \overline{QA_n} = \overline{QB_1} + \overline{QB_2} + \ldots + \overline{QB_n}$.

Д4.66. Точки M и N являются соответственно серединами диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$ и $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB})$.

16. Задачи на окружность и круг

Д4.67. Проведены четыре радиуса OA, OB, OC и OD окружности с центром O. Докажите, что если $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{0}$, то $ABCD$ — прямоугольник.

Д4.68. На окружности с центром O даны точки A и B. Касательные к окружности в этих точках пересекаются в точке C. Выразите вектор $\overline{OC}$ через векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, если: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 120°$.

Д4.69. Дана окружность с центром O; A и B — точки этой окружности. Биссектриса угла AOB пересекает окружность в точке C. Выразите вектор $\overline{OC}$ через векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, если: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 120°$.

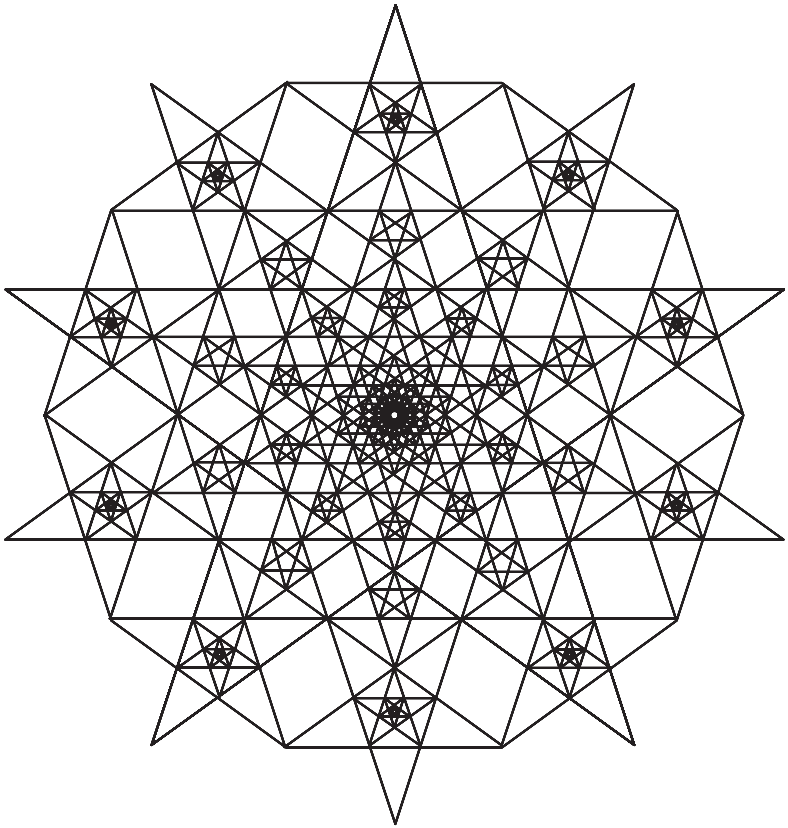
Д4.70. Дана окружность с центром O. Проведены две равные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. Докажите, что сумма векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ коллинеарна вектору $\overline{OM}$.

Д4.71. Дана окружность с центром O. Проведены две перпендикулярные хорды AB и CD. Хорды или их продолжения пересекаются в точке M.

1. Докажите, что $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$.

2. Докажите, что середины хорд AC и BD, точка M и центр O данной окружности являются вершинами параллелограмма.

ОТВЕТЫ. РЕШЕНИЯ. УКАЗАНИЯ



Часть I

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕМАМ ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Глава I

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Тема 1

ПЛОСКОСТИ, ТОЧКИ, ПРЯМЫЕ

1. Плоскости

1.1. 6 граней.

1.2. 8 граней; 6 граней.

1.4. Три части, включая саму плоскость.

1.5. Крышка стола — прямоугольный параллелепипед.

1.6. Могут.

1.10. Да.

1.11. 20 плоскостей. Указание. Из восьми вершин куба можно составить 56 различных троек. Но из этого числа следует взять только те тройки, которые определяют различные плоскости.

1.12. Одну, пять, семь, десять плоскостей.

1.13. Две плоскости могут разбивать пространство на 3 или 4 части (области). Три плоскости могут разбивать пространство на 4, 6, 7 частей (областей).

2. Точки и прямые

1.14. Прямая содержит бесконечное множество точек.

1.15. 1. Прямая a проходит через точки A, K и B, прямая b — через точки A, M и C, прямая c — через точки C, D и B.

2. На прямой b лежат точки A, M и C.

3. На прямой c не лежат точки M, A и K.

1.17. Через две точки можно провести прямую и притом только одну (аксиома прямой).

1.18. Расположение прямой и точки включает два случая: точка принадлежит прямой и точка не принадлежит прямой. Прямая и две точки могут быть расположены так: обе точки лежат на прямой; одна точка принадлежит прямой, а другая — нет; обе точки не принадлежат этой прямой.

1.19. Две точки.

1.21. 1. Прямой a принадлежат точки O и K; прямой b — точки O и M.

2. Прямой a не принадлежат точки P, M, D; прямой b — точки P, K, D.

3. Прямым a и b принадлежит точка O.

1.22. Одна прямая — AB (аксиома о прямой).

1.23. Таких прямых бесчисленное множество.

1.24. Из точки A можно провести три прямые, из точки B — две прямые, так как прямая AB уже проведена, из точки C — одну прямую; ответ: $3 + 2 + 1 = 6$.

1.25. Для трех точек ответ такой: одна прямая, если точки лежат на одной прямой, и три прямые, если не лежат. Пусть все 4 (n) точки лежат на одной прямой. Число прямых — 1 (1). «Отнесем в сторону от прямой» одну точку, тогда будет одна первоначальная прямая плюс три прямые, соединяющие эту точку с точками прямой. Число прямых — $1 + 3 = 4$ ($1 + n - 1 = n$). Аналогично поступим и со второй точкой, тогда число прямых будет $1 + 1 + 2$ ($1 + 1 + n - 2 + n - 2 = 2n - 2$). Так будем рассуждать, пока на первой прямой не останутся две точки ($1 + 1 + 1 + 1 + n - 3 + n - 3 + n - 3 = 3n - 5$ для трех точек, «снесенных» из n точек, и т.д.).

1.26. На рис. 1.20, *а—е* изображены все случаи возможного расположения пяти точк на плоскости и проведены соответствующие прямые. Пять точек в пространстве могут совпадать с вершинами четырехугольной пирамиды.

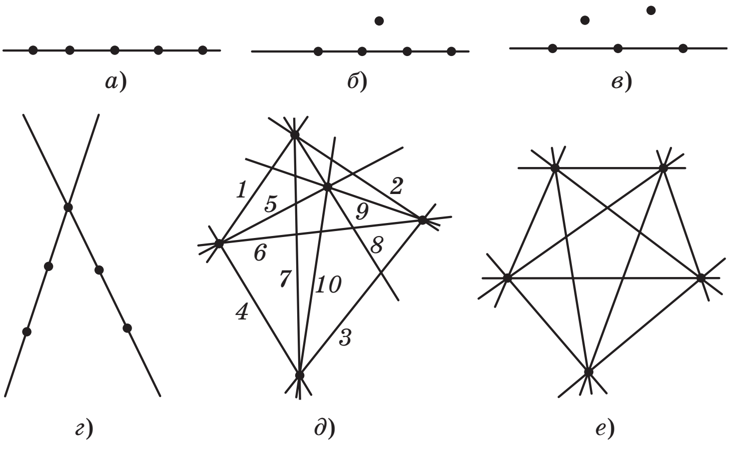


Рис. 1.20

1.27. Точка A не принадлежит прямой a; точка B принадлежит прямой b; точка C не принадлежит прямой m; точка K принадлежит прямой c.

1.29. $A \in a$; $A \in b$; $B \notin a$; $B \notin b$; $C \in a$; $C \notin b$; $M \notin a$; $M \in b$.

1.31. 1) 8 прямых; 2) 12 прямых; 3) 18 прямых.

1.33. Из восьми вершин куба можно составить $\frac{8 \cdot 7}{2}$ различных пар точек.

1.34. Одна прямая, шесть, восемь, девять, десять, одиннадцать, тринадцать, пятнадцать прямых.

1.36. Случай $n = 3$ невозможен. Случаи $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ возможны.

1.37. Каждая из прямых AB, AC и BC имеет с прямой a две общие точки, а значит, совпадает с ней.

1.38. Прямые l_1 и l_2 совпадают.

1.40. Шесть прямых не могут пересекаться в восьми точках. На рис. 1.21 изображены 8 точек и через них проведены 6 прямых.

1.41. Предположим, что такое расположение 7 точек и 7 прямых существует. Будем называть эти прямые и точки данными. Прежде всего докажем, что прямая, проходящая через любые две данные точки M и P, является данной. Так как точка M данная, то через нее проходят три данные прямые, и на каждой из прямых есть еще по две данные точки. Одной из шести точек должна быть точка P, так как отмеченных точек всего 7. Это и означает, что прямая MP является данной.

Так же доказывается, что любые две данные прямые пересекаются в данной точке.

Пусть A, B, C — данные точки, лежащие на данной прямой l так, что B лежит между A и C, D — та из остальных данных точек, которая ближе к l (рис. 1.22). По доказанному прямые AD, BD, CD данные.

По условию через точку B проходит еще одна прямая, отличная от l и от BD. Она пересекает отрезок AD или отрезок CD в данной точке E, которая ближе к прямой l, чем точка D. Противоречие.

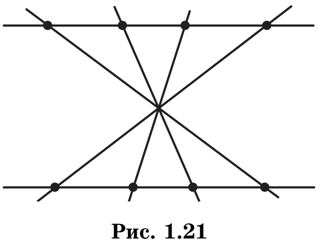


Рис. 1.21

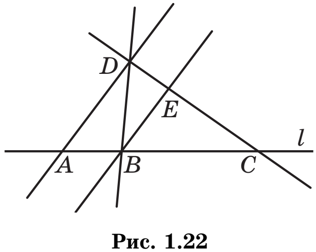


Рис. 1.22

1.42. Взаимное расположение 8 точек и 7 прямых показано на рис. 1.23. Семь прямых могут вообще не иметь точек пересечения, могут пересекаться в одной точке, иметь от 6 до 21 точки пересечения. (Попробуйте получить все случаи.)

1.43. Конфигурация Паскаля изображена на рис. 1.24.

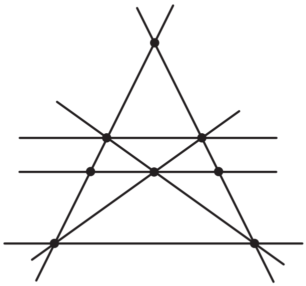


Рис. 1.23

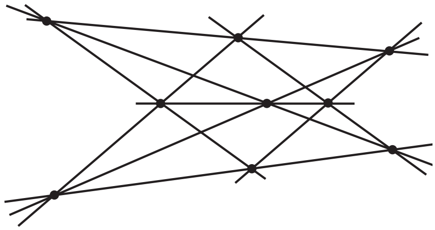


Рис. 1.24

1.44. Конфигурация Дезарга изображена на рис. 1.25.

1.45. Можно рассмотреть эту ситуацию в пространстве, например, на модели правильной треугольной пирамиды — тетраэдра. Точки расположить так: четыре — в вершинах тетраэдра, шесть — в серединах ребер, четыре — в центрах граней, одну — в центре самого тетраэдра.

1.46. На рис. 1.8 показано, как 16 точек можно расположить на 12 прямых по 4 точки в каждом ряду. Расположить 16 точек в 15 рядах по 4 точки в каждом ряду можно — см. рис. 1.26.

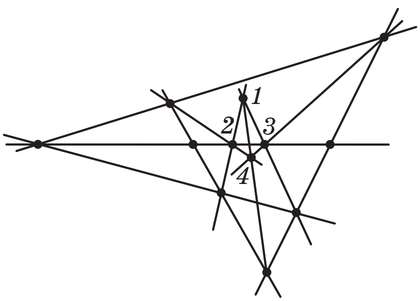


Рис. 1.25

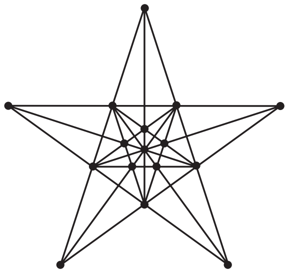


Рис. 1.26

1.47. Примем обозначения: p — число точек, l — число прямых. 1. См. рис. 1.27, *а*.

2. См. рис. 1.27, *б*.

4. Ответом служит расположение точек (тюльпанов), три из которых находятся в вершинах треугольника (лучше всего равностороннего), три — в серединах его сторон, а еще одна (седьмая) — в центре треугольника (рис. 1.27, *в*). Для строгого обоснования решения этой задачи нужно знать, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

5. См. рис. 1.27, *г*.

6. См. рис. 1.27, *д*.

7. См. рис. 1.27, *е*.

Можно добавить еще один случай: 11 точек и 16 прямых. Решение см. на рис. 1.27, *ж*. Этот случай трудный, и далее строить подобные конфигурации сложно.

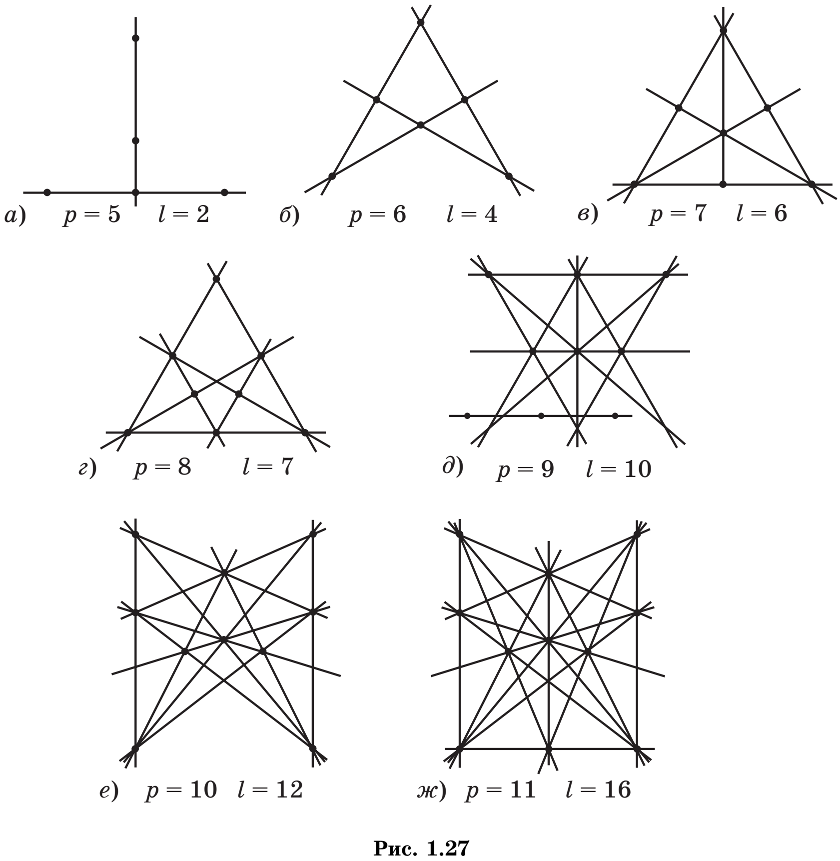


Рис. 1.27

3. Взаимное расположение точек, прямых и плоскостей

1.48. Точки прямой принадлежат плоскости.

1.49. 1. Точка A не лежит в грани DCC_1D_1. 2. Точка C лежит в трех гранях, например в грани DCC_1D_1. 3. Точка D принадлежит трем плоскостям: DCC_1D_1; $ABCD$; ADD_1A_1. 4. Прямая AD_1 принадлежит грани ADD_1A_1. 5. D_1C принадлежит грани DCC_1D_1. 6. Например, прямая CC_1.

1.51. Три точки, не лежащие на одной прямой.

1.52. На основании аксиомы для определения плоскости необходимо иметь 3 точки. Если эти точки лежат на одной прямой, то они определяют бесконечное множество плоскостей, пересекающихся по этой прямой.

1.53. Одна плоскость.

1.54. У штативов фотоаппаратов и геодезических приборов — по три опорные ножки, так как для задания плоскости необходимы три различные точки, не лежащие на одной прямой. На основании аксиомы 2 эти точки определяют плоскость, а поэтому создают устойчивость. Стол, имеющий четыре ножки, не всегда устойчив, так как концы его ножек не определяют единственной плоскости.

1.55. Плоскость, проходящая через три точки P, K, C, существует всегда, но не всегда единственная. Если три точки расположены на одной прямой, то они определяют бесконечное множество плоскостей.

1.56. а) Может; б) может; в) не может.

1.57. 1. Верно. 2. Не всегда верно.

1.58. Ее две точки лежат в плоскости α.

1.59. Лежит.

1.62. Прямая может лежать в плоскости, быть параллельной плоскости или пересекать плоскость.

1.64. Следует рассмотреть различные случаи расположения этих точек.

1.65. Бесконечное множество.

1.67. Полуплоскость и полупространство имеют границы.

1.68. Одну и две данные точки могут содержать бесконечное множество плоскостей. Три данные точки могут содержать бесконечное множество плоскостей, если они лежат на одной прямой.

1.69. Книгу или кусок жесткого картона удержать на концах двух карандашей невозможно. Необходимы три карандаша (на основании аксиомы о плоскости).

1.70. Возможны три случая: 1) четыре точки A, B, C, D могут лежать на одной прямой. В этом случае они определяют бесконечное множество плоскостей, пересекающихся по прямой, на которой расположены эти точки (рис. 1.28, *а*);

2) четыре точки A, B, C, D определяют одну плоскость (рис. 1.28, *б*, *в*);

3) четыре точки A, B, C, D определяют четыре плоскости (рис. 1.28, *г*).

1.73. 1. Бесконечное множество прямых, из которых только одна параллельна прямой a (эта прямая проходит через основания перпендикуляров, проведенных через точки прямой a к плоскости α). 2. Две прямые, параллельные прямой a.

1.74. 1. а) Проходят через основание перпендикуляра — точку T; б) не проходят через точку T.

2. Такой прямой в плоскости α не существует.

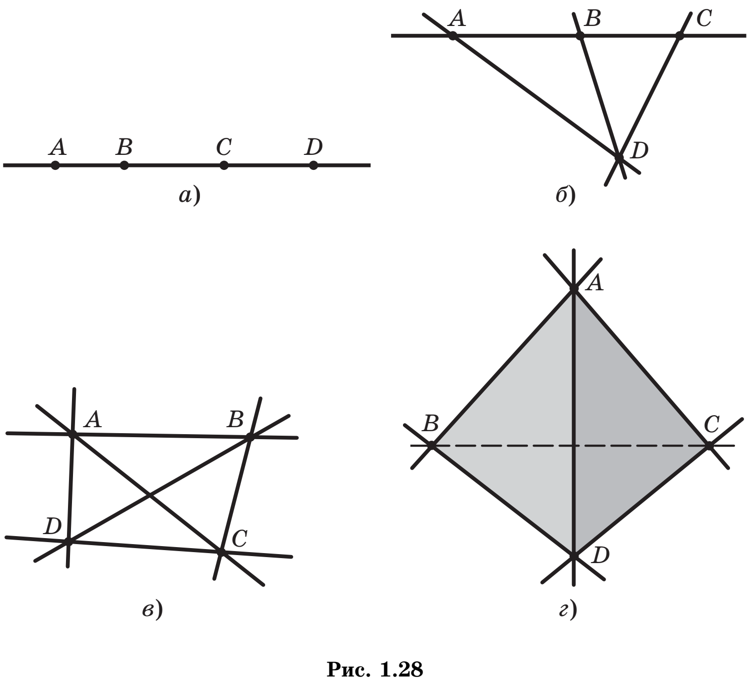


Рис. 1.28

4. Взаимное расположение прямых

1.76. В каждой вершине прямоугольного параллелепипеда пересекаются три прямые.

1.78. На рис. 1.15 представлены все виды расположения прямых: пересекающиеся, параллельные, скрещивающиеся.

1.79. Нет.

1.80. Не могут.

1.81. Нет.

1.82. а, б) Могут.

1.84. Одну общую точку.

1.85. Прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

1.89. Не принадлежит.

1.91. На 7 частей.

1.92. Точки P и O лежат на одной прямой.

1.98. Нельзя.

1.99. Нельзя.

1.105. а) 12 прямых; б) 4 прямые (включая прямую AB).

1.106. а) Ребра A_1B_1, D_1C_1, BB_1, CC_1; б) ребро A_1B_1.

1.107. 12 прямых: LM, K_1N_1, MN, K_1L_1, L_1N_1, LN, LK_1, L_1M, MN_1, NK_1, NN_1, LL_1 (см. рис. 1.17).

1.108. Предположим, что через точку A проходят две прямые, пересекающие прямые a и b. Тогда эти две пересекающиеся в точке A прямые определяют единственную плоскость α. Данные прямые a и b имеют, по предположению, общие точки с каждой из проведенных прямых, и эти точки различны. Из этого следует, что как прямая a, так и прямая b лежат в плоскости α. Но эти прямые по условию скрещиваются. Пришли к противоречию. Следовательно, через точку A не могут проходить две прямые, пересекающие данные прямые a и b.

1.109. Рассмотрим два случая. 1) Прямая b проходит через точку M пересечения прямой a с плоскостью α, тогда $a \neq b$.

2) Прямая b не проходит через точку M. Предположим, что $a \parallel b$. Тогда прямые a и b лежат в одной плоскости β, которая имеет с плоскостью α общую точку M. Но прямая b и точка M определяют единственную плоскость α. Следовательно, плоскости α и β совпадают. Однако прямая a не может лежать в плоскости α, так как по условию она имеет с этой плоскостью только одну общую точку. Пришли к противоречию. Следовательно, $a \nparallel b$.

1.110. Проведем в плоскости α некоторую прямую a. Прямая a и точка M определяют единственную плоскость β. Затем в плоскости β через точку M проводим прямую $b \parallel a$; $a \subset \alpha$; $b \parallel a$. Следовательно, $b \parallel \alpha$. Из построения следует, что любая прямая, проходящая через точку M и параллельная какой-либо прямой, лежащей в плоскости α, будет параллельна и плоскости α.

1.111. а) 10 прямых; б) 16 прямых.

5. Взаимное расположение плоскостей

1.112. 1) 12 пар; 2) 3 пары; 3) 6 плоскостей.

1.113. Общие точки — точки отрезка, по которому они пересекаются.

1.114. Три пары параллельных плоскостей.

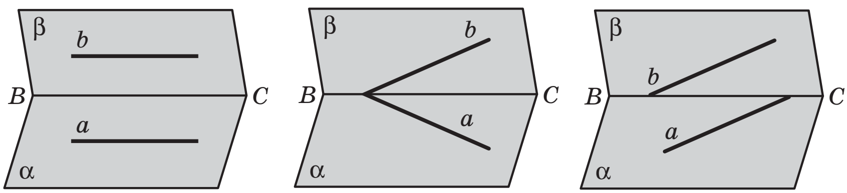
1.115. Девять плоскостей.

1.116. Должны.

1.117. О двух плоскостях нужно знать, что они имеют общую точку.

1.119. Случаи а), б) возможны; случай в) невозможен.

1.120. Все три случая возможны (рис. 1.29, *а—в*).



а)　*б*)　*в*)

Рис. 1.29

1.121. 1) Неверно; 2) верно.

1.123. У треугольной пирамиды 4 грани.

1.124. Может.

1.125. Прямая, проходящая через две точки, принадлежащие каждой из рассматриваемых плоскостей, будет целиком лежать в каждой из этих плоскостей (по аксиоме прямой к плоскости). Следовательно, если две различные плоскости имеют две общие точки, то они имеют и общую прямую, проходящую через эти точки.

Тема 2

ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУРАХ

6. Геометрические фигуры, их объединение и пересечение

2.3. 1) Точка A; 2) прямая AB; 3) плоскость α.

2.4. Не может.

2.5. Может.

2.6. Может.

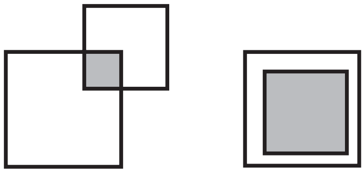
2.7. Не может.

2.8. а, б) Не может; в) может; г) не может.

2.9. Бесконечное число плоскостей должно пересекаться по одной прямой.

2.10. а) Точка — если кубы расположены один вне другого и имеют общие одну вершину или точку ребра; б) отрезок — если ребро одного куба принадлежит грани или ребру другого куба; в) квадрат — если грань одного куба является частью грани другого.

2.13. См. рис. 2.31, *а*, *б*.



а) *б*)

Рис. 2.31

2.14. Поскольку у куба три измерения, то счет следует начать спереди (в верхнем слое два параллелепипеда, передняя грань каждого из которых является квадратом. Умножим это на два — $2 \cdot 2 = 4$). Аналогично поступаем с правой и верхней гранями (итого $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$, $8 + 4 = 12$). Далее куб можно представить разрезанным тремя плоскими разрезами сверху, спереди и сбоку на параллелепипеды, одно измерение которых равно ребру куба, а два других — удвоенному ребру ($2 \cdot 3 = 6$). Результаты суммируются ($12 + 6 = 18$). Можно поступить и так: 6 больших параллелепипедов содержат по два маленьких. Значит, всего будет $6 + 6 \cdot 2 = 18$ параллелепипедов.

2.15. Мысленно представим большой куб и посчитаем по граням, сколько кубиков помещается в выемку.

1. В первом, самом простом случае не хватает лишь одного кубика, во втором, более сложном случае, не хватает уже двух кубиков в правом среднем, двух — в правом верхнем и двух — в верхнем среднем слое ($2 + 2 + 2 = 6$).

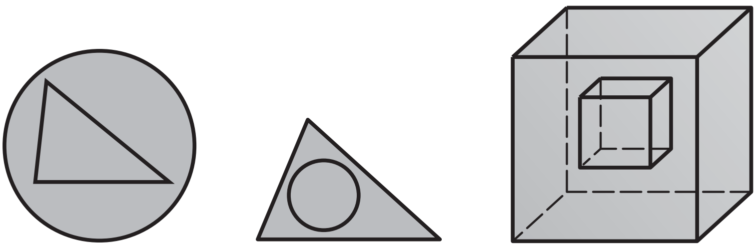
2. В целом кубе $4 \cdot 4 \cdot 4$ содержатся 64 кубика. Из них затемненные грани имеют только те кубики, которые лежат на поверхности. Это 8 кубиков по углам (3 затемненные грани), $2 \cdot 12 = 24$ — лежащих на 12 ребрах куба, но не угловые (2 затемненные грани) и $4 \cdot 6 = 24$ — кубики, находящиеся внутри грани. Всего в целом кубе находится $8 + 24 + 24 = 56$ окрашенных кубиков и $64 - 56 = 8$ неокрашенных. В данном кубе не хватает во втором слое четырех окрашенных кубиков, в третьем — на 1 кубик больше, т.е. 5 окрашенных кубиков, а в четвертом — на три больше, чем в третьем слое, значит, 8. Получаем $56 - 4 - 5 - 8 = 39$ кубиков с затемненными гранями. Лишь одного кубика вообще без затемнений не хватает в этом кубе, значит, всего их $8 - 1 = 7$ кубиков.

2.16. На рис. 2.6, *а* конструкция состоит из $4 + 6 \cdot 4 = 28$, на рис. 2.6, *б* из $4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 44$ кубиков. Можно заметить, что вторая конструкция получается из первой добавлением четырех элементов по 4 кубика в каждом.

2.17. При пересечении двух произвольных четырехугольников может получиться: 1) точка; 2) отрезок; 3) треугольник; 4) четырехугольник; 5) пятиугольник; 6) шестиугольник.

2.18. а) Треугольник находится внутри круга; б) круг помещен внутри треугольника; в) куб расположен внутри куба; см. рис. 2.32, *а—в*; г) пирамида находится внутри пирамиды.

2.19. Наиболее простой ответ — цилиндр (конус) внутри цилиндра (конуса).



а) *б*) *в*)

Рис. 2.32

2.20. а) Два одинаковых треугольника, имеющих одну общую точку (можно рассмотреть взаимное расположение треугольников в разных плоскостях); б) пересечение двух пространственных фигур, например, двух кубов, когда пересечение происходит по граням; в) две полуплоскости с общей границей.

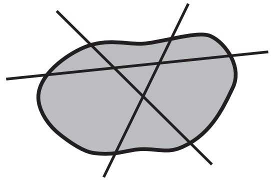


Рис. 2.33

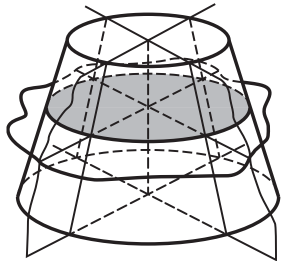


Рис. 2.34

2.21. На 7 частей. См. рис. 2.33.

2.22. 8 частей. См. рис. 2.34.

2.23. Например, при $n = 4$ всего 64 кубика: 8 неокрашенных, 8 — с тремя окрашенными гранями, 24 — с двумя окрашенными гранями и 24 — с одной окрашенной гранью.

2.26. а) 4; б) 7; в) 6; г) 8.

2.27. а) Треугольник; б) треугольник, четырехугольник; в) треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник; г) треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник, семиугольник.

2.28. Пусть точки X и Y принадлежат общей части данных кругов — фигуре F. Все точки отрезка XY принадлежат как первому, так и второму кругу. Следовательно, отрезок XY принадлежит фигуре F. Из этого следует, что фигура F выпуклая.

2.29. Решение дадим в краткой записи. Пусть $F_1 \cap F_2 = F$, $X \in F$, $Y \in F$. Тогда, если $X \in F$ и $Y \in F$, то $X \in F_1$ и $X \in F_2$; если $Y \in F_1$ и $Y \in F_2$, то отрезок XY принадлежит F_1 и отрезок XY принадлежит F_2, а тогда отрезок XY принадлежит F.

7. Взаимное расположение плоскостей и геометрических фигур

2.35. Всегда.

2.36. Не всегда.

2.37. Не лежат.

2.38. Может.

2.39. Например, через две параллельные диагонали противоположных граней.

2.41. Точка, отрезок, треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник.

8. Изображение геометрических фигур

2.46. При расположении куба прямо перед глазами видна только передняя грань и все ребра, принадлежащие этой грани: переднее правое, левое, верхнее, нижнее. Не видны остальные пять граней и восемь ребер.

2.48. а) Одну грань куба можно увидеть, расположив его прямо перед глазами, т.е. глядя спереди; б) две грани куба можно увидеть спереди справа, справа сверху, слева сверху и т.д.; в) три грани куба можно увидеть, например, спереди справа сверху, спереди слева снизу.

2.50. Случаи *а*), *б*), *д*) (см. рис. 2.15) неправильные. Правильными являются изображения *в*) и *г*). Для каждого из них полезно уточнить, откуда виден куб: *в*) спереди справа сверху, *г*) спереди слева снизу.

2.51. Можно.

2.52. Ребра, которые нам не видны, изображаются пунктиром, а видимые — сплошными линиями. У видимых граней все ребра видимые, т.е. сплошные, а у невидимых граней есть невидимые ребра.

2.59. а) Куб слева снизу. Не видны грани: передняя, задняя, верхняя, правая. Не видны ребра: заднее верхнее и заднее правое; переднее верхнее и переднее правое ребра; правое верхнее ребро. Аналогично поступаем и в случаях б)—г).

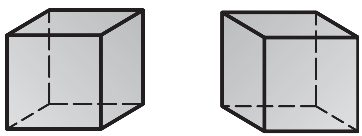
2.60. См. рис. 2.35, *а* и *б*: а) спереди сверху справа; б) спереди слева сверху.

2.61. Да, на рис. 2.22 помещены верные изображения куба: а) вид спереди, б) вид спереди справа.

2.62. Обычно дорисовывают фигуру на рис. 2.23, не видя никакой ловушки. Она становится ясна только при взгляде на рис. 2.24, *а*. Таких фигур, как на рис. 2.24, *а*, в реальности не существует.

2.63. Фигуры, изображенные на рис. 2.24, существовать не могут.

2.64. Нельзя.



а) *б*)

Рис. 2.35

2.65. См. рис. 2.36, *а—в*.

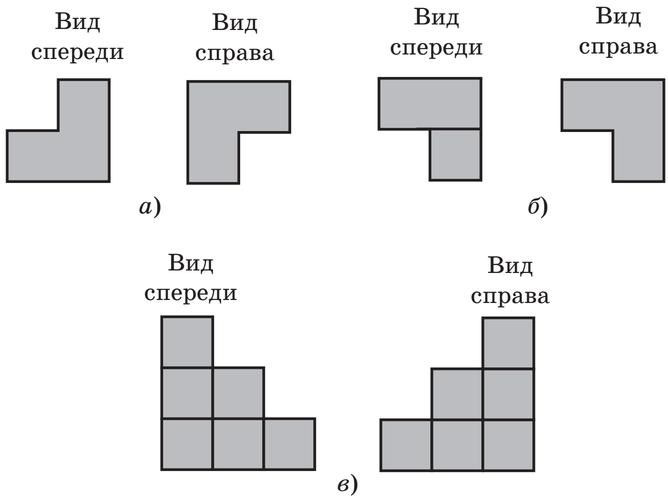


Рис. 2.36

2.66. См. рис. 2.37, *а—в*.

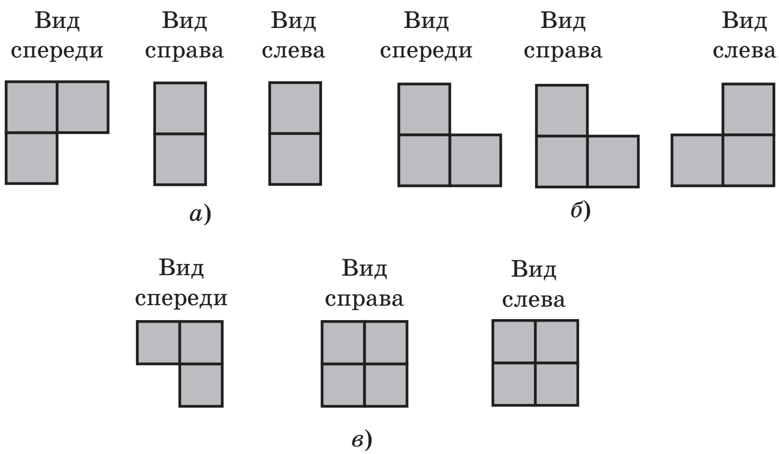


Рис. 2.37

2.67. См. рис. 2.38.

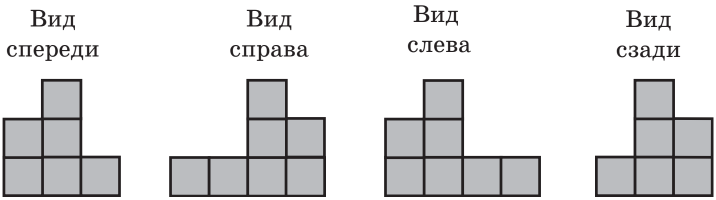


Рис. 2.38

2.68. Ошибочным является изображение на рис. 2.29, *в*.

2.69. Парные для A: *1*, *7*, *8*; для B — нет; для C — *1*, *7*, *8*.

Тема 3

ОТРЕЗКИ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

9. Понятие отрезка

3.1. Три отрезка.

3.2. На рис. 3.2, *а* — 3 отрезка, на рис. 3.2, *б* — 6 отрезков.

3.3. 1) 3 отрезка; 2) 12 ребер; 3) 6 граней.

3.4. См. ответ к задаче 3.3.

3.5. Два отрезка могут лежать в одной плоскости (рис. 3.12, *а*—*в*): *а*) не иметь общих точек; *б*) иметь общий конец; *в*) пересекаться, т.е. иметь общую внутреннюю точку. Два отрезка могут лежать в разных плоскостях (рис. 3.13, *а*—*в*).

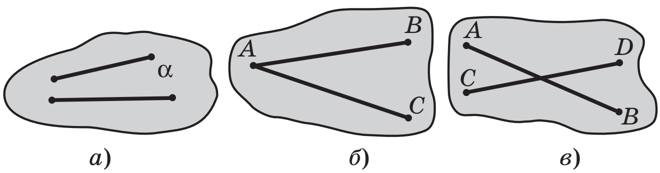


Рис. 3.12

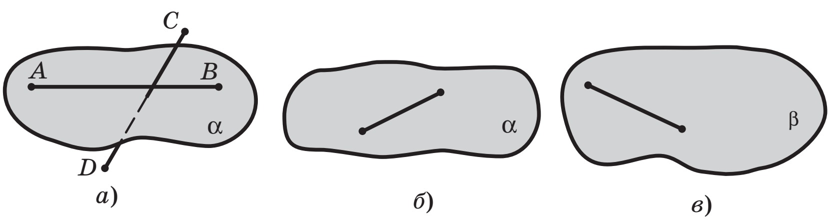


Рис. 3.13

3.8. а) Отрезок может принадлежать прямой (рис. 3.14, *а*). б) Прямой может принадлежать лишь один из концов отрезка (рис. 3.14, *б*). в) Отрезок может пересекать прямую (рис. 3.14,*в*). г) Отрезок и прямая могут лежать в разных плоскостях и не иметь общих точек (рис. 3.14, *г*). д) Отрезок и прямая могут лежать в одной плоскости и не иметь общих точек (рис. 3.14, *д*).

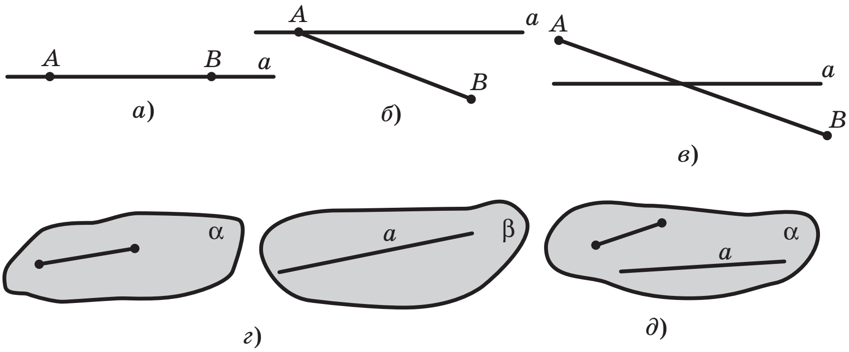


Рис. 3.14

3.9. а) Отрезок может принадлежать плоскости. б) Плоскости может принадлежать лишь один из концов отрезка. в) Отрезок может пересекать плоскость. г) Отрезок и плоскость могут не иметь общих точек.

3.12. Могут.

3.15. Соответственно 3, 6 и 10 отрезков.

3.16. а) Есть 3 различных отрезка, оба конца которых принадлежат фигуре, состоящей из точек A, B и C; б) есть 6 различных отрезков, оба конца которых принадлежат фигуре, состоящей из точек A, B, C и D.

3.19. 1. Чтобы на прямой получить три отрезка, нужно отметить три точки.

2. Если на прямой надо получить n отрезков, то можно найти число необходимых точек, решив уравнение $\frac{k(k-1)}{2} = n$. Можно найти значение k подбором так, чтобы оно удовлетворяло неравенству $1 + 2 + ... + (k - 1) \geqslant n$.

3.22. См. рис. 3.15.

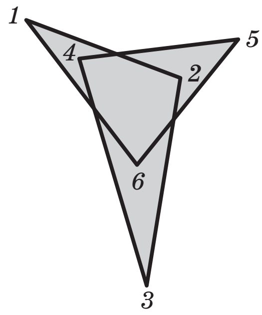


Рис. 3.15

3.23. а) Множество всех точек отрезка AB, кроме точки B; б) точка, которая является серединой отрезка AB; в) отрезок AC, где C — середина отрезка AB; г) все точки отрезка AB, кроме его середины.

3.24. а) Все точки луча BA, кроме внутренних точек отрезка AB и точки B; б) все точки луча AB, кроме внутренних точек отрезка AB и точки A; в) множество точек отрезка AB.

3.25. В треугольной пирамиде и кубе из одной вершины исходят 3 отрезка (ребра); в многограннике, полученном объединением двух четырехугольных пирамид (у них совпадают основания), из каждой вершины исходят по 4 отрезка; в произвольной пирамиде из ее вершины может исходить n отрезков (ребер). Получится n-угольная пирамида.

3.26. См. рис. 3.16, *а*, *б*.

3.27. Треугольная пирамида; наименьшее число граней 4, ребер 6, вершин 4, диагоналей нет (рис. 3.17).

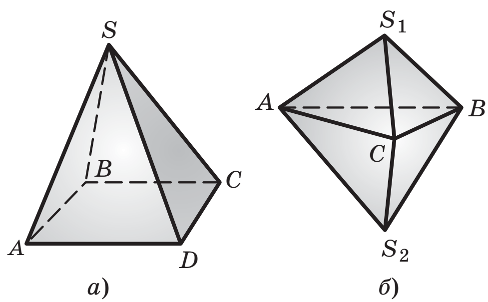


Рис. 3.16

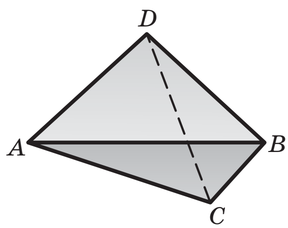


Рис. 3.17

10. Измерение отрезков

3.29. 120 мм.

3.30. 0,9 см.

3.31. 5,4 дм; 0,54 м.

3.32. 540 см; 5,4 м.

3.33. Два отрезка.

3.34. $CP + PM = CM$, тогда точка P лежит между точками C и M.

3.35. Точки A, B и C лежат на одной прямой.

3.36. Если A, B, C — три различные точки, то может случиться, что $AB + BC = AC$, тогда точки A, B, C лежат на одной прямой (рис. 3.18, *а*). Если $AB + BC > AC$, то точки A, B, C образуют треугольник ABC (рис. 3.18, *б*).

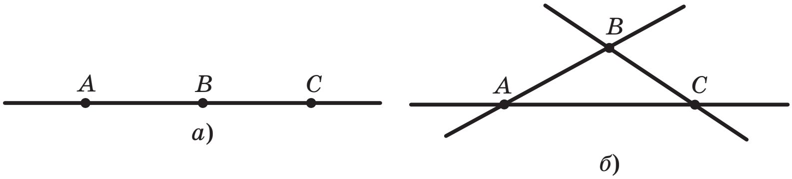


Рис. 3.18

3.37. Не могут. Для трех точек A, B, C прямой одновременно равенства выполняться не могут, так как из трех точек на прямой только одна лежит между двумя другими. А так как сумма ее расстояний до двух других точек равна расстоянию между ними, то это свойство для остальных точек не выполняется.

3.38. Да, лежит; $AB = BA$ и $AB + AC = BC$, откуда $BA + AC = BC$, а значит, точка A лежит между точками B и C.

3.39. Точка A лежит между точками B и C или точки B и C совпадают, и тогда ни одна из точек не лежит между двумя точками.

3.40. О трех точках на окружности нельзя сказать, что каждая лежит между двумя другими, так как понятие «лежать между» относится к точкам прямой. К тому же равенство $AB + BC = AC$ для дуг окружности определено неоднозначно.

3.41. Данное предложение нельзя считать определением середины отрезка, так как в нем нет указания на принадлежность точки B прямой AC. Возможен вариант $AB + BC$ и $B \notin AC$. Таких точек B может быть бесконечное множество.

3.42. Когда столяр распиливает доску, пусть даже очень тщательно, все равно будет образовываться стружка. Поэтому общая длина получившихся двух половин меньше длины доски.

3.43. $AC < 7$ см.

3.44. а) 2 м = 200 см = 2000 мм; б) 0,001 м = 0,1 см = 1 мм; в) 0,5 м = 50 см = 500 мм.

3.45. $BC = 3$.

3.46. $10x$ см.

3.47. $AB = 30$ см = 3 дм.

3.48. 1. Сказать, какой город находится между двумя другими, нельзя. 3. Город X находится между городами Y и Z. 4. Город X находится между городами Y и Z.

3.49. См. рис. 3.19, *а*, *б*.

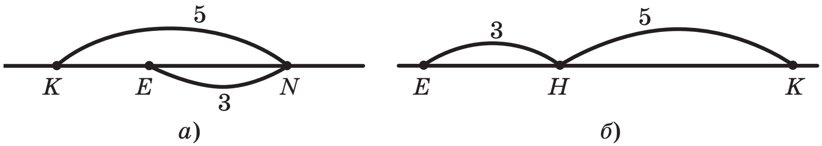


Рис. 3.19

3.50. Точка M лежит между точками P и K.

3.51. 1) Неверно; 2) верно; 3, 4) неверно; 5) верно.

3.52. Расстояние от пункта A до пункта C может быть равным 8 км (рис. 3.20, *а*). Это наименьшее из возможных значений: $BC = 12$ км, $AB = 20$ км, $AC = AB - BC = 8$ км. Расстояние AC может быть равным 32 км (рис. 3.20, *б*). Это наибольшее из возможных значений: $AC = AB + BC = 32$ км. В общем же случае $8 \leqslant AC \leqslant 32$, что следует из неравенства $AB + BC \geqslant AC$ (рис. 3.20, *в*).

3.53. а) $AC = 18$ см; б) $AC = 18$ м; в) $AC = 18$ км.

3.54. а) $AC = 612$ см $= 6{,}12$ м; б) $AC = 1206$ см $= 12{,}06$ м; в) $AC = 600\,012$ см $= 6{,}00012$ км.

Здесь складываются величины, выраженные в разных единицах — метрах, сантиметрах, километрах, т.е. разнородные. Поэтому, прежде чем проводить сложение, требуется привести величины к одному и тому же роду, не важно к какому.

3.55. В ответах задачи **3.53** во всех трех случаях получено одно и то же число, так как складываются однородные величины.

3.56. За единицу длины можно взять любой отрезок. Установление одной универсальной единицы длины дало бы однородность всех величин,

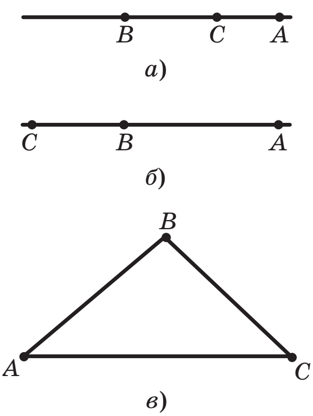


Рис. 3.20

но, с другой стороны, достаточно большие или достаточно малые расстояния имели бы громоздкую запись.

3.57. 1 м = 100 см. Следовательно, всего кубиков со стороной 1 см будет равно $100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$. Длина ряда 1 000 000 см = = 10 000 м = 10 км.

3.58. Мальчики использовали разные единичные отрезки, что полностью согласуется со свойствами расстояний. Единичный отрезок Пети в 12 раз меньше единичного отрезка Вовы, но в том и другом случаях отрезок BC в 2,5 раза больше отрезка AB.

3.59. а) Нельзя; б) можно; в) нельзя.

3.62. Для таких «расстояний» все их свойства выполняться не будут, так как, например, время спуска не равно времени подъема, а следовательно, $AB \neq BA$.

11. Расстояние между фигурами

3.66. Обозначим: *С* — Солнце, *Л* — Луна, *З* — Земля.

а) При солнечном затмении (рис. 3.21, *а*)

$$СЛ = СЗ - ЛЗ = 150 \text{ млн км} - 400 \text{ тыс. км} = 149\,600 \text{ тыс. км}.$$

б) При лунном затмении (рис. 3.21, *б*):

$$СЛ = СЗ + ЗЛ = 150 \text{ млн км} + 400 \text{ тыс. км} = 150\,400 \text{ тыс. км}.$$

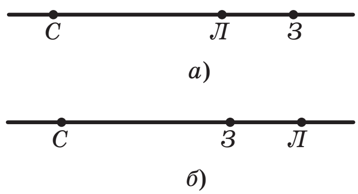


Рис. 3.21

3.67. а) Отрезок DA; б) отрезок DT; в) перпендикуляр, опущенный из точки D на отрезок KT; г) отрезок DA; д) отрезок DC.

Тема 4

ЛОМАНАЯ

12. Понятие ломаной

4.1. 1) На рис. 4.1, *а* ломаная имеет 6 вершин и 5 звеньев, на рис. 4.1, *б* — 6 вершин и 5 звеньев; 2) на рис. 4.1, *а* изображена простая ломаная; 3) звенья A_2A_3 и A_4A_5, не соседние по порядку, имеют общую точку.

4.2. Примеры ломаных из окружающей обстановки: схема линий метрополитена, схема движения электричек, выкройка детали одежды, маршрут движения автотранспорта, радиоэлектронная схема, план здания, структура кристалла и т.д. (во многих этих случаях рассматриваются и многоугольники как замкнутые ломаные).

4.3. Простые ломаные изображены на рис. 4.2, *а—г*, *е*, *з*.

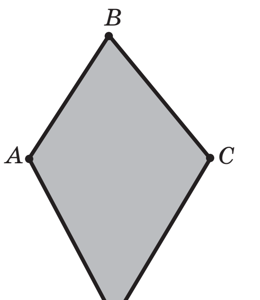
4.4. На рис. 4.2, *а* — замкнутая простая ломаная.

4.5. а) На модели куба звеньями ломаных, лежащих в одной плоскости, могут служить и диагонали одной и той же грани. Любая двухзвенная ломаная, а также ломаная, все звенья которой образуют некий многоугольник или часть его, будут расположены в одной плоскости.

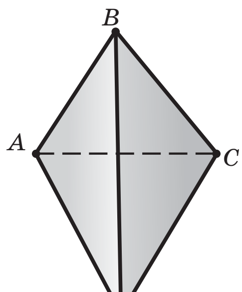
б) Ломаная, состоящая из более чем двух звеньев, не принадлежит одной грани и может служить примером ломаной, все звенья которой не лежат в одной плоскости.

4.6. У замкнутой ломаной может быть не менее трех звеньев, так как попытка построить двухзвенную замкнутую ломаную приведет к простому совпадению двух отрезков.

4.7. Замкнутая ломаная на рис. 4.3 состоит из четырех звеньев. Из рисунка неясно, лежат ли все ее звенья в одной плоскости. Если данное изображение соответствует плоскому четырехугольнику, то все звенья ломаной лежат в одной плоскости (рис. 4.14, *а*). Если все звенья ломаной являются ребрами пирамиды, то вся ломаная не будет принадлежать одной плоскости (рис. 4.14, *б*). И в том и в другом случае изображение ломаной $ABCD$ будет выглядеть одинаково.



а)
$ABCD$ — четырехугольник



б)
$ABCD$ — тетраэдр

Рис. 4.14

4.8. Простая ломаная изображена на рис. 4.4, *а*, простая замкнутая ломаная — на рис. 4.4, *в*.

4.9. Решением задачи являются всякие верные попытки построить нужные ломаные. Некоторые из таких ломаных изображены на рис. 4.15, *а*—*е*.

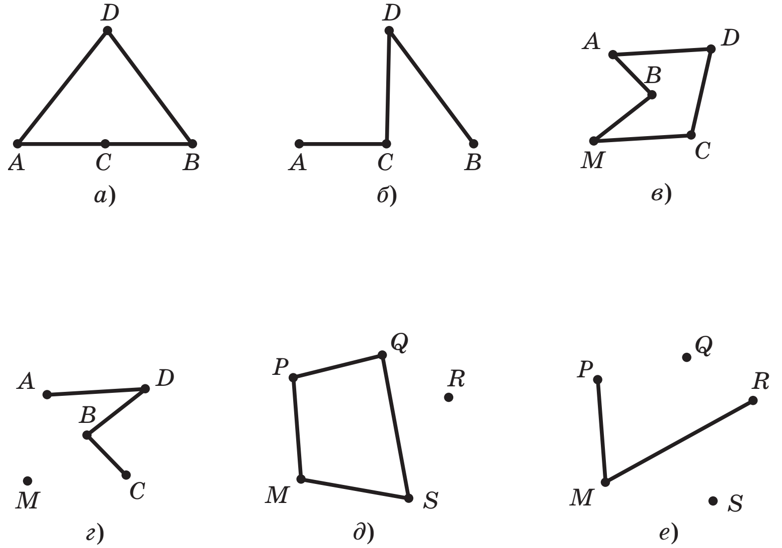


Рис. 4.15

4.10. Чтобы прямая KH рассекала некоторый отрезок на два отрезка, нужно концы исходного отрезка расположить в разных полуплоскостях относительно данной прямой.

Рассмотрим случай самой короткой ломаной, состоящей из двух звеньев. Пусть A_1, A_2, A_3 — вершины этой ломаной. Чтобы построить первое звено A_1A_2 ломаной $A_1A_2A_3$, нужно расположить точки A_1 и A_2 в разных полуплоскостях относительно прямой KH. Взяв вершину A_3 в полуплоскости, отличной от той, в которой находится вершина A_2 относительно прямой KH, мы получим второе звено A_2A_3 ломаной $A_1A_2A_3$, которое также пересекается с прямой KH (рис. 4.16, *а*). Таким образом, взяв точку в полуплоскости, отличной от той, в которой находится последняя вершина двухзвенной ломаной, мы получим следующую вершину A_4 трехзвенной ломаной $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 4.16, *б*). И так для любого количества звеньев.

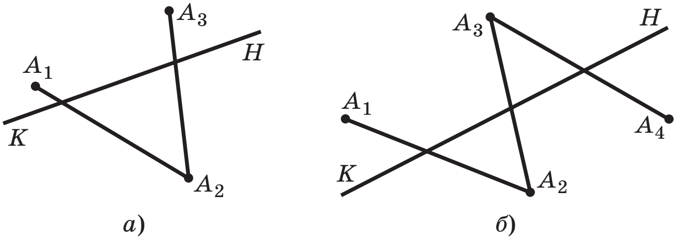


Рис. 4.16

4.11. Две точки, принадлежащие одной полуплоскости, можно соединить ломаной, не пересекающейся с прямой l (рис. 4.17, *а*); а две точки, лежащие в разных полуплоскостях, такой ломаной соединить нельзя (рис. 4.17, *б*).

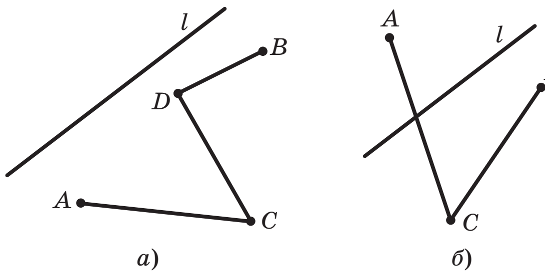


Рис. 4.17

4.12. Построить ломаную, соединяющую две данные точки, находящиеся в различных полуплоскостях, задаваемых плоскостью α, нельзя.

4.13. Ломаная, два звена которой лежат на одной прямой, должна иметь не менее четырех звеньев, так как два звена, принадлежащие одной прямой, не могут быть соседними на основании правила построения ломаной. Следовательно, два звена должны разделяться как минимум одним звеном, которое также не может принадлежать этой прямой. Отсюда вытекает необходимость четвертого звена для соединения всех звеньев в единое целое (рис. 4.18, *а—г*).

Чтобы получить замкнутую ломаную с наименьшим количеством звеньев, два из которых лежат на одной прямой, необходимо иметь 6 звеньев (рис. 4.18, *д*, *е*).

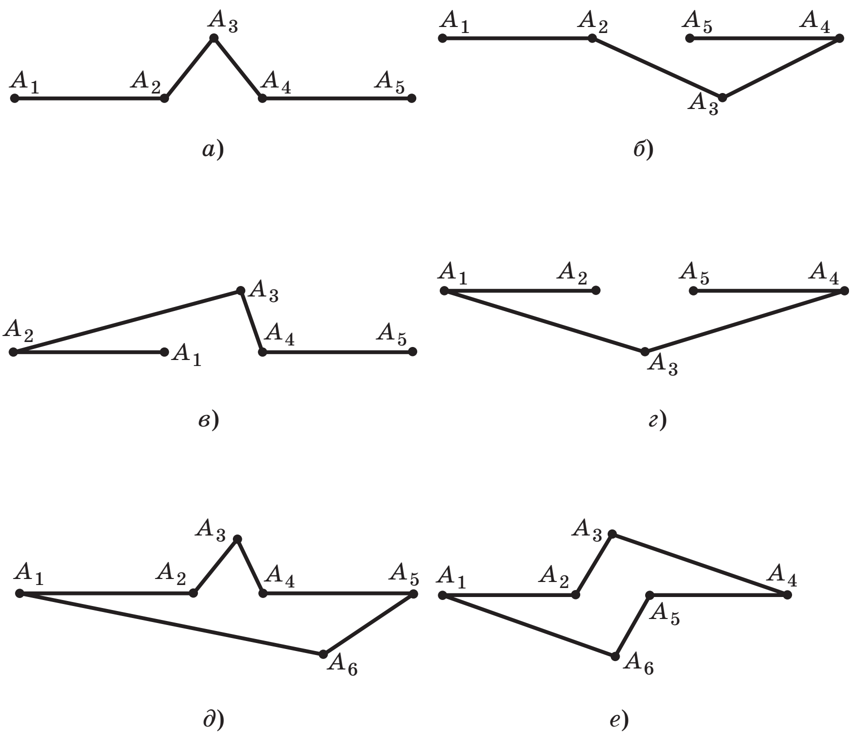


Рис. 4.18

4.14. Для подсчета количества ломаных важно учесть тот факт, что точки A, B и C на рис. 4.5, *а* принадлежат одной прямой, а на рис. 4.5, *б* точки A, B, C лежат на одной прямой и точки M, B, D также лежат на одной прямой.

1. Подсчитаем число двухзвенных ломаных.

а) Двухзвенных ломаных, вершинами которых являются точки, изображенные на рис. 4.5, *а*, а сторонами — отрезки с концами в этих точках, будет 9 (рис. 4.19, *а*—*и*).

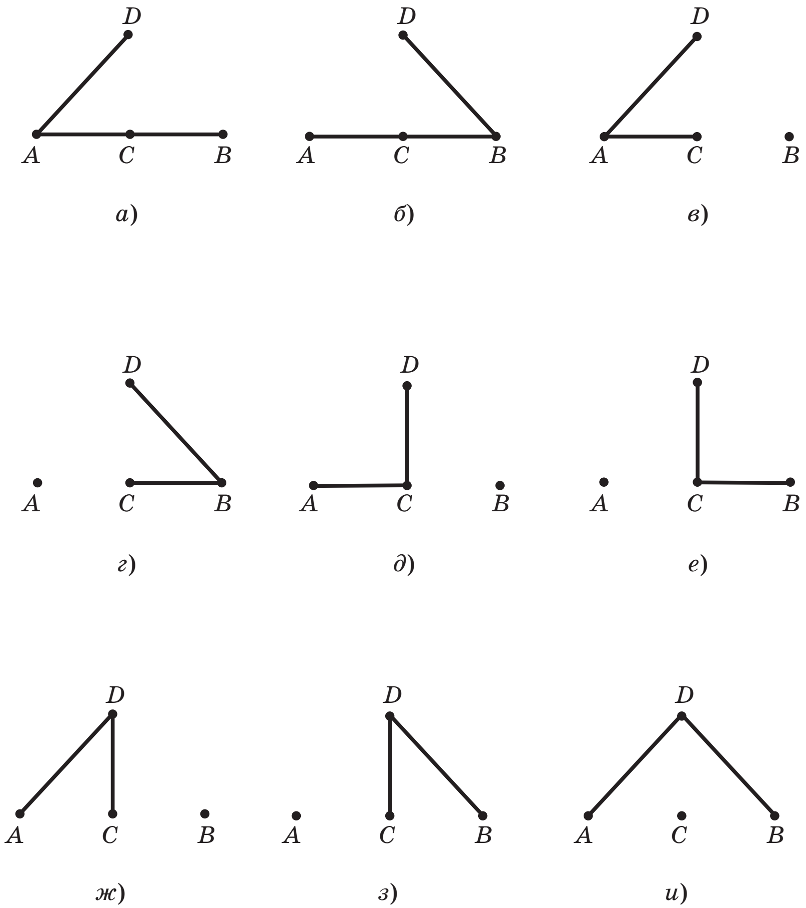


Рис. 4.19

б) Для точек, изображенных на рис. 4.5, *б*, таких ломаных существует 24. Это число ломаных складывается из видов ломаных, изображенных на рис. 4.20, *а—е* (этих видов шесть), а для каждого вида есть четыре варианта расположения звеньев.

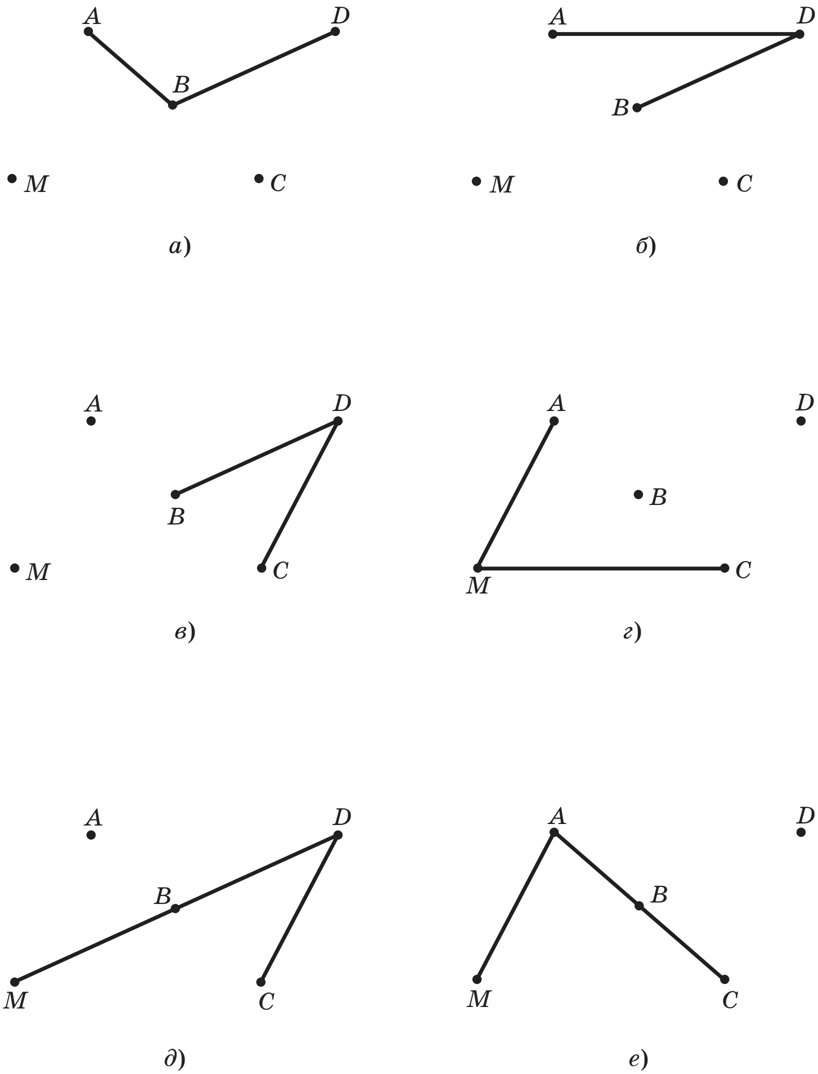


Рис. 4.20

2. Подсчитаем число трехзвенных ломаных.

а) На рис. 4.21, *а—в* показаны три варианта замкнутых ломаных для точек, изображенных на рис. 4.5, *а*, и четыре варианта простых незамкнутых ломаных (рис. 4.22, *а—г*) для тех же точек. Таким образом, мы имеем 7 вариантов ломаных рис. 4.5, *а*.

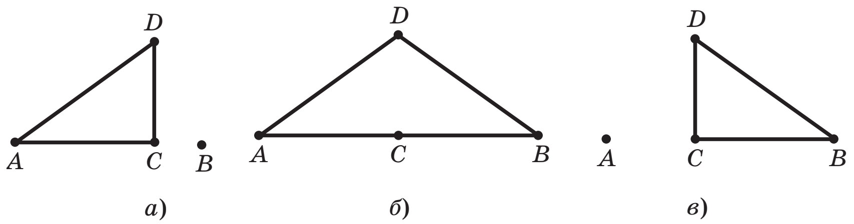


Рис. 4.21

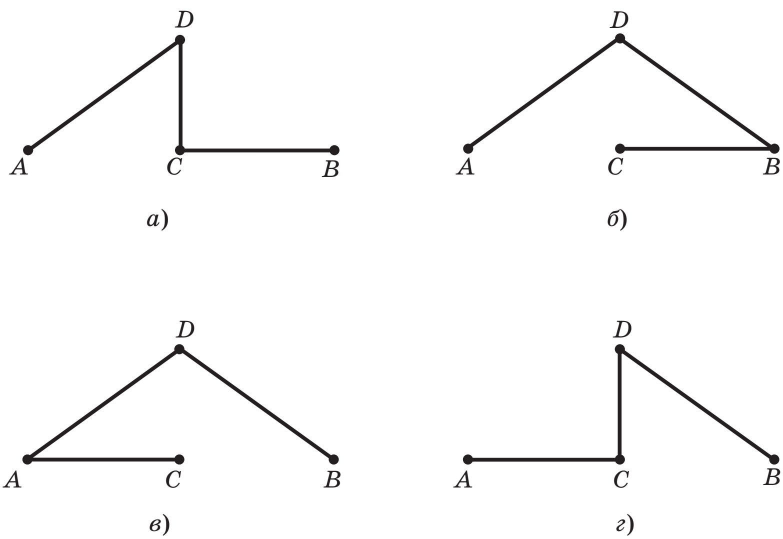
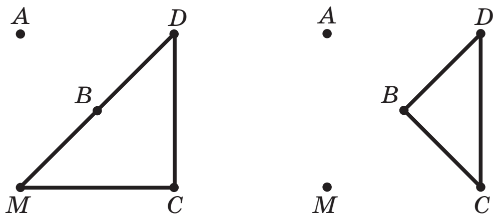


Рис. 4.22

б) Рассмотрим точки, изображенные на рис. 4.5, *б*. Имеем восемь вариантов замкнутых ломаных: типа MDC (рис. 4.23, *а*) — 4 (MDC, ACM, DMA, ACD); типа BDC (рис. 4.23, *б*) — тоже 4 (DBC, BCM, BMA, BAD).

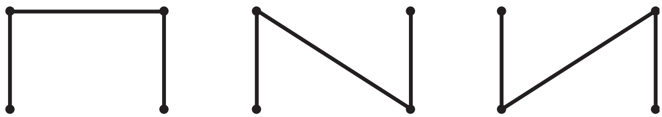


а) *б*)

Рис. 4.23

Вообще же для образования трехзвенной простой ломаной необходимы четыре различные точки, каждые три из которых не лежат на одной прямой, или набор из четырех точек, где только одна точка не принадлежит прямой, на которой расположены три остальные.

Причем возможны случаи: а) если каждые три точки из четырех не принадлежат одной прямой, тогда для каждого вида ломаных (рис. 4.24, *а—в*) есть по 4 возможных варианта; б) если только одна точка из четырех не принадлежит прямой, на которой расположены остальные три, то смотри рис. 4.24.



а) *б*) *в*)

Рис. 4.24

В нашем случае количество наборов по четыре точки из пяти точек дает 5 вариантов, из них 4 варианта типа б) и 1 вариант типа а).

Следовательно, всего трехзвенных ломаных на рис. 4.5, *б*:

$$S = 8 + 1 \cdot 12 + 4 \cdot 4 = 36.$$

4.15. 1. См. рис. 4.25, *а—д*.

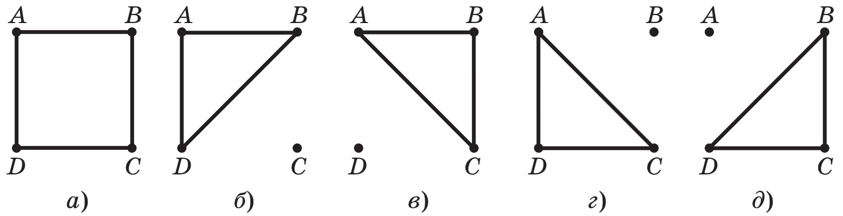


Рис. 4.25

2. Данная задача является частным случаем задачи **4.14** (см. рис. 4.5, *б*). Учитывая рис. 4.24, получаем 12 простых незамкнутых ломаных. В результате подсчета двухзвенных ломаных для рис. 4.5, *б* задачи **4.14** получаем еще 12 ломаных. Итого 24 возможных варианта. В задаче требуется показать лишь 20 возможных простых незамкнутых ломаных. Это можно сделать, выбрав любые 20 из 24.

4.18. Всего 12 ломаных.

4.19. Можно только в случае а).

4.20. У замкнутой ломаной из 5 звеньев будет 5 точек самопересечения, у семизвенной ломаной — 17 точек, у ломаной с четным числом звеньев — $2n$. Если она замкнутая, то точек самопересечения будет столько же, что и для незамкнутой ломаной с числом звеньев $2n - 1$ (последнее звено данных точек не дает); для незамкнутой ломаной число точек определяется тем же способом, что и раньше.

4.21. Противоречие есть. Изменить нужно второе и третье условия, каждое звено должно пересекаться два раза и ломаная должна иметь 5 звеньев.

4.22. а—в) Да; г) нет; д) да.

4.24. а) $n(n - 3)$; б) $n(n - 4) + 1$.

13. Длина ломаной

4.29. 1. Любая трехзвенная ломаная, звеньями которой являются ребра куба, всегда будет иметь длину 3 см. Если же хотя бы одно из звеньев будет являться диагональю грани куба, то длина соответствующей трехзвенной ломаной будет больше 3 см. Таким образом, длина любой трехзвенной ломаной, вершинами которой являются вершины куба, будет не менее 3 см.

2. Любая четырехзвенная ломаная, звеньями которой являются ребра куба, всегда имеет длину 4 см. Если же хотя бы

одно из звеньев будет являться диагональю куба, то длина соответствующей четырехзвенной ломаной будет больше 4 см. Это означает, что длина любой четырехзвенной ломаной, вершинами которой являются вершины куба, будет не меньше 4 см.

4.30. а) Может, так как

$$AB + BC + CD > AD,\ 6 > 0{,}5;$$
$$0{,}5 + 3 > AC, \quad AC < 3{,}5,$$
$$3 + AC > 0{,}5, \quad AC > -2{,}5,$$
$$AC + 0{,}5 > 3, \quad AC > 2{,}5;$$

б) не может, так как $AB = AB + BC + CD$, $6 = 6$, что противоречит теореме о длине ломаной;

в) может, так как $AD < AB + BC + CD$, $1 < 6$. Далее см. п. а);

г) не может, так как $AD > AB + BC + CD$, $7 > 6$. Далее см. п. б).

4.31. 1) $0{,}5 < AB < 10{,}5$; 2) $0 \leqslant AB < 12$ см.

4.34. Ломаная, состоящая из ребер заданного куба, может иметь 5 звеньев. Длина ломаной, все звенья которой — ребра куба, может иметь длину, большую 10 см.

4.39. Варианты решений см. на рис. 4.26, *а* и *б*.

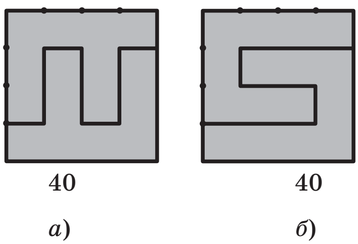


Рис. 4.26

4.40. Если длина каждого ребра 1 см, то необходима проволока длиной: а) 7 см (рис. 4.27, *а*); б) 9 см (рис. 4.27, *б*); в) 15 см (рис. 4.27, *в*).

Цифрами на рисунках обозначен порядок обхода.

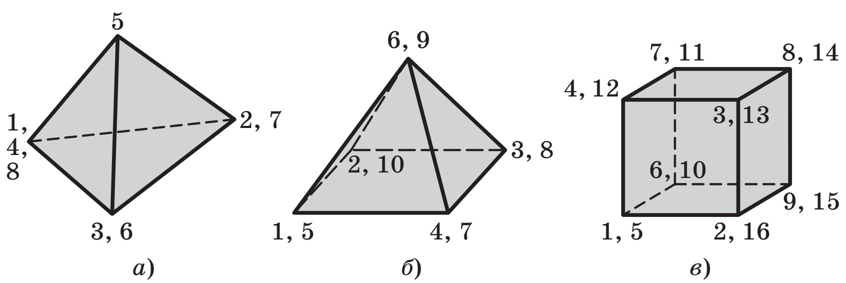


Рис. 4.27

Первую часть задачи можно свести к следующей: не отрывая карандаш от бумаги, обвести все отрезки фигур, изображенных на рис. 4.28, *а*—*в*.

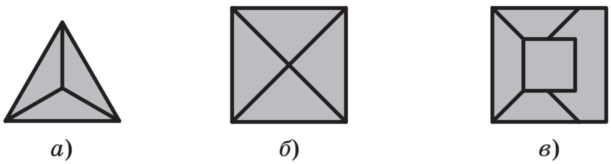


Рис. 4.28

4.41. Выполнить требуемое в задаче, имея в виду только простую ломаную, не удается. Поэтому построим четырехзвенную ломаную, пусть даже не простую.

Введем обозначения, как показано на рис. 4.29, *а*. Заметим, что построить четырехзвенную ломаную, проходящую через все точки A_1, ..., A_9, не выходя за рамки квадрата $A_1A_7A_9A_3$, не удастся. Для этого требуется как минимум 5 звеньев некоторой ломаной. Следовательно, чтобы построить четырехзвенную ломаную, проходящую через все точки A_1, ..., A_9, нужно выйти за границы квадрата $A_1A_7A_9A_3$ (рис. 4.29, *б*). $A_1BCA_1A_9$ — искомая ломаная, причем звену A_1B принадлежат 4 точки — A_1, A_2, A_3, B; звену BC — 4 точки — B, A_6, A_8, C; звену CA_1 — 4 точки — A_1, A_4, A_7, C; на звене A_1A_9 — 3 точки. В качестве четвертой точки, принадлежащей звену A_1A_9, нельзя взять точку K, так как тогда на звене BC будут лежать 5 точек, что противоречит условию задачи. Следовательно, четвертая точка, принадлежащая последнему звену ломаной, должна лежать либо на отрезке A_1K, либо на луче KA_9. Это точка D (рис. 4.29, *в*).

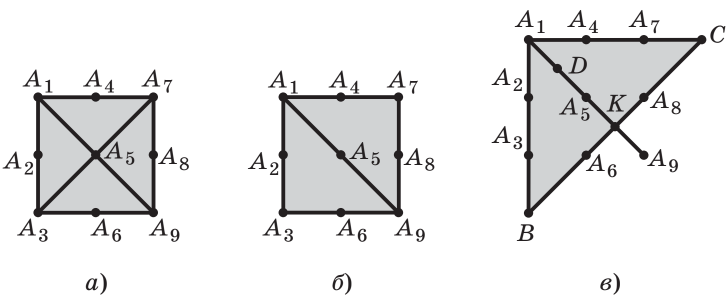


Рис. 4.29

Тема 5

УГЛЫ

14. Лучи. Направления

5.1. Прямая AB, точка C, лучи CA и CB.

5.2. Каждая отмеченная на прямой точка задает два луча. Следовательно, на рис. 5.2 три точки задают **6** лучей.

5.3. Две точки задают два различных направления.

5.4. На плоскости существует бесконечное множество различных направлений.

5.5. Для того чтобы получить на прямой две полупрямые с общим началом, нужно на ней отметить одну точку.

5.6. б) Три разных луча с общим началом могут располагаться так, как показано на рис. 5.27, *а*, *б*. На рис. 5.27, *б* лучи не лежат в одной плоскости.

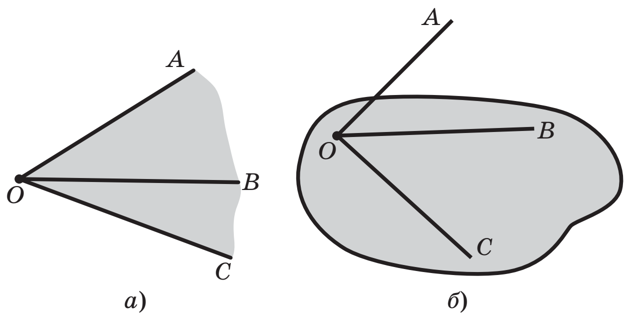


Рис. 5.27

5.7. Два луча с различными начальными точками могут лежать в одной плоскости (рис. 5.28, *а*), а могут и не лежать (рис. 5.28, *б*). Два луча с общей начальной точкой всегда лежат в одной плоскости.

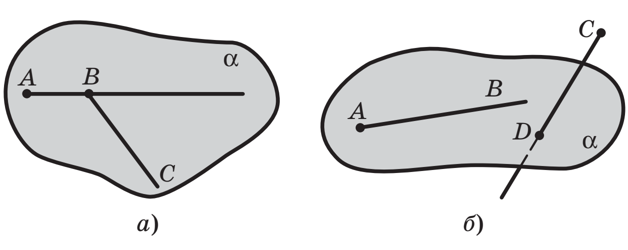


Рис. 5.28

5.8. Три луча с общим началом не всегда лежат в одной плоскости.

5.9. Бесконечное множество. Направлений будет столько же, сколько лучей.

5.11. В общем случае вершины куба задают: 6 различных направлений, определенных ребрами граней; 8 направлений, задаваемых диагоналями граней; 8 направлений, задаваемых диагоналями самого куба. Всего 22 различных направления.

5.16. а) Пересечением двух лучей, не лежащих на одной прямой, может быть только точка.

5.19. а) Два; б) в общем случае шесть, однако если эти точки лежат на одной прямой, то они определяют только два направления; в) в общем случае 12. Но возможны следующие случаи: 1) точки — вершины трапеции — 10 направлений; 2) точки — вершины параллелограмма — 8 направлений; 3) три точки на одной прямой и одна вне ее — 8 направлений; 4) все точки расположены на одной прямой — только два направления.

5.21. Пять различных точек определяют 10 лучей с началами в этих точках.

5.23. а) Вершины треугольной пирамиды не могут задавать одинаковые направления, так как среди ребер треугольной пирамиды нет параллельных прямых. б) Вершины треугольной пирамиды задают 8 различных направлений.

5.24. На рис. 5.6 видно, что $\angle MNP + \angle NPQ = (180^\circ - 2\angle BNP) + (180^\circ - 2\angle BPN) = 360^\circ - 2(\angle BNP + \angle BPN) = 180^\circ$; значит, $NM \parallel PQ$, т. е. луч MN, отразившись от поверхности зеркал AB и BC, поменял направление (луч PQ).

15. Понятие угла

5.25. Лучи OA и OB с общим началом O определяют два угла. Объединение получившихся углов — вся плоскость, пересечение — два луча OA и OB (рис. 5.29).

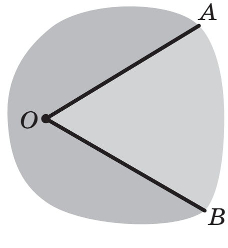


Рис. 5.29

5.27. 12 углов, так как у треугольной пирамиды 4 грани, а в каждой грани расположено по 3 угла.

5.28. 24 различных угла: 1) 6 — число граней куба, 4 — число углов в каждой грани: $6 \cdot 4 = 24$ угла;

2) 8 — число вершин куба, 3 — число углов, исходящих из каждой вершины: $8 \cdot 3 = 24$ угла.

5.29. Чтобы образовался угол, два луча должны иметь общее начало. При этом образуются два угла.

5.30. Чтобы получить два угла, следует взять два луча с общим началом.

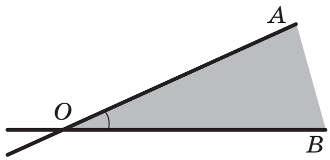


Рис. 5.30

5.31. У развернутого угла сто́роны должны являться полупрямыми одной прямой, так как в противном случае угол не будет развернутым. Угол AOB, изображенный на рис. 5.30, не развернутый.

5.32. 1. На рис. 5.31 мы имеем: а) $2 \cdot (1 + 2 + 3) = 12$ углов; б) $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 20$ углов.

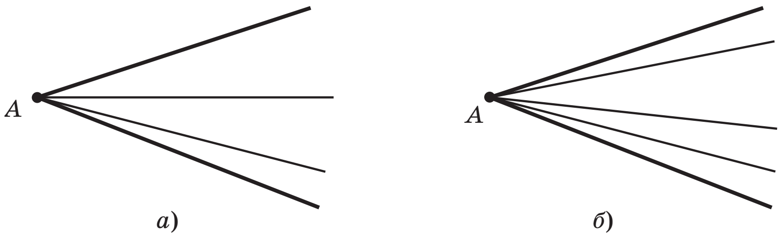


Рис. 5.31

2. Между сторонами угла A проведем n лучей, где $n > 3$; S_1 — число углов, расположенных внутри угла A, вместе с самим углом будет равно сумме $(n + 1)$ первых натуральных чисел, т.е. $S_1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

В общем случае два луча с общим началом определяют два угла. Следовательно, число углов

$$S = 2S_1 = (n + 1)(n + 2).$$

5.33. а) У углов общая вершина (рис. 5.32, *а*); б) у двух углов общая сторона (рис. 5.32, *б*); в) прямые, которым принадлежат стороны двух углов, могут пересекаться (рис. 5.32, *в*); г) стороны одного угла пересекают стороны другого угла (рис. 5.32, *г*); д) см. рис. 5.32, *д*, *е*; е) см. рис. 5.32, *ж*, *з*; ж) см. рис. 5.32, *и—л*.

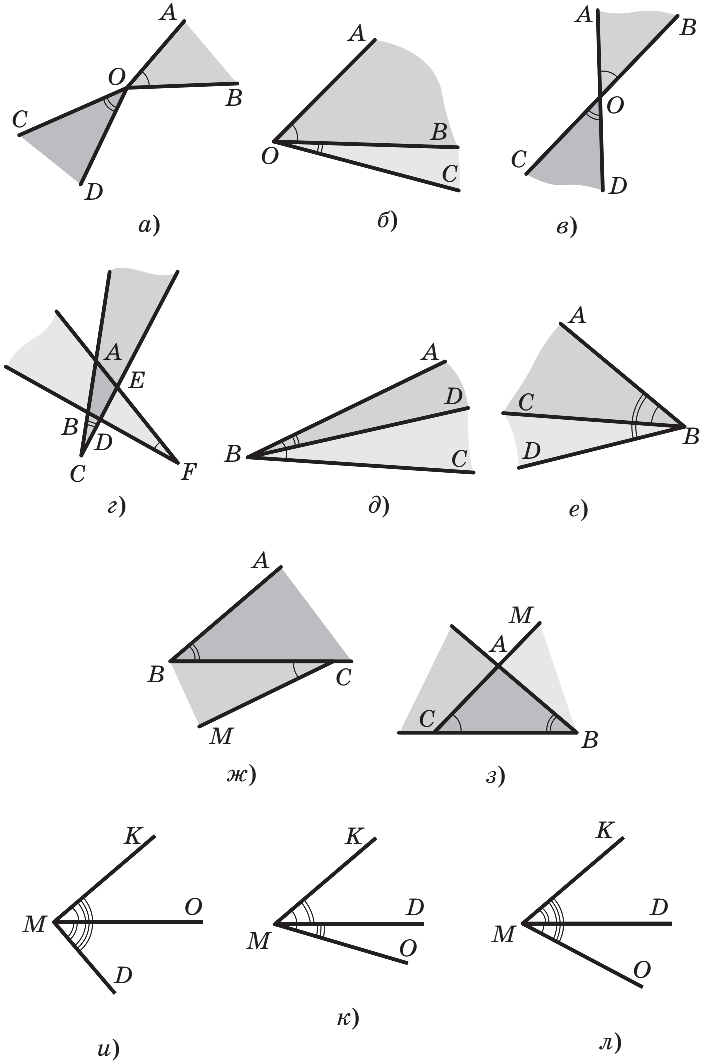


Рис. 5.32

5.34. Возможны углы, обозначенные дужками на рис. 5.33.
5.35. См. рис. 5.34, *а—г*.

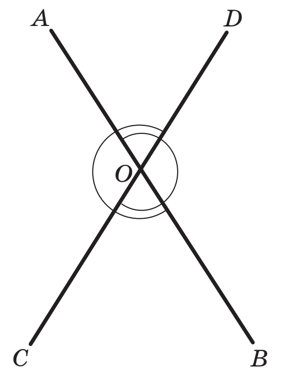


Рис. 5.33

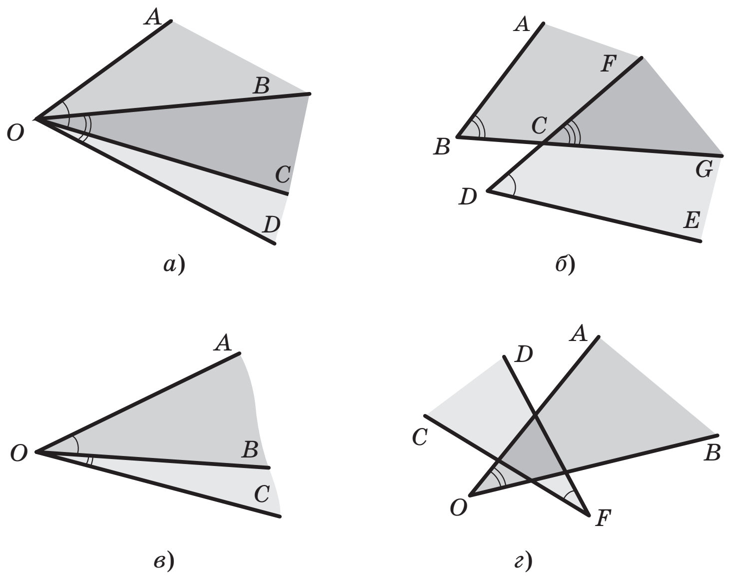


Рис. 5.34

5.36. Результат объединения и пересечения двух углов будет зависеть от того, какую часть плоскости мы имеем в виду, рассматривая углы AOB, COD, AOC. а) Объединением двух углов на рис. 5.35 является затемненная часть плоскости. б) Пересечением двух углов на рис. 5.36 является затемненная часть плоскости.

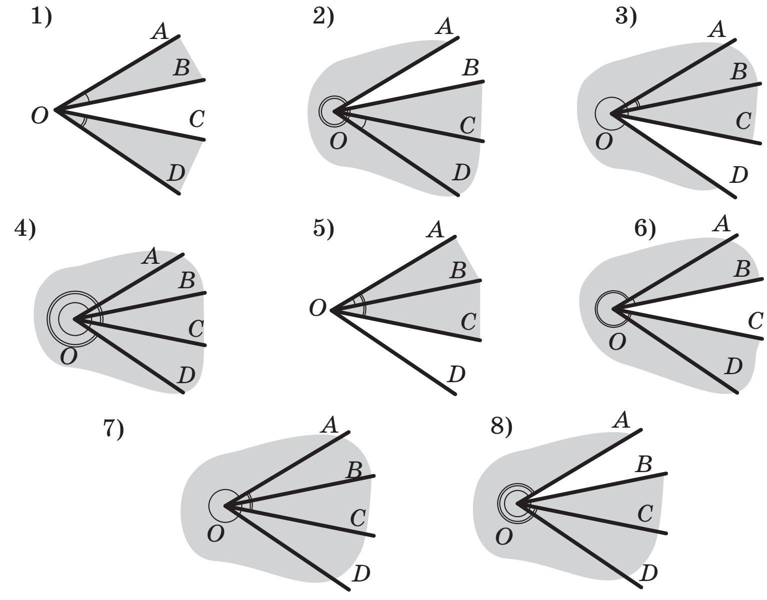


Рис. 5.35

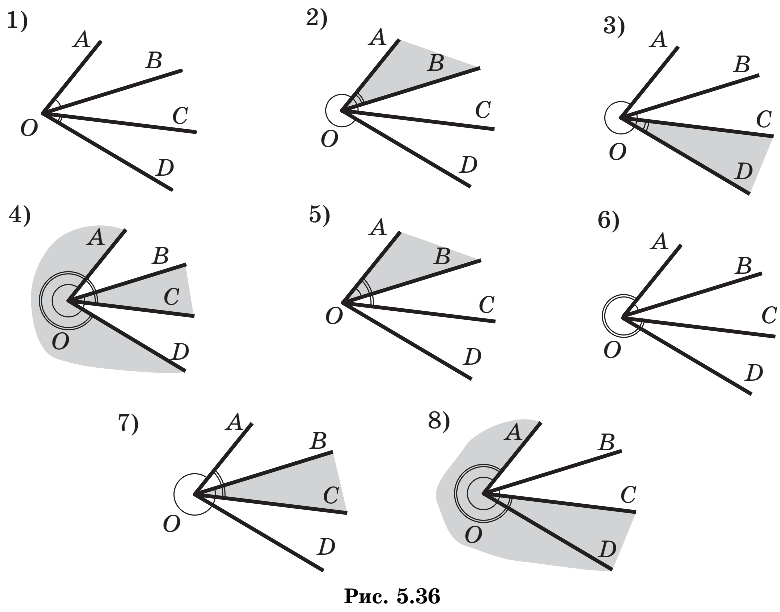


Рис. 5.36

5.37. а) При пересечении двух углов, отличных от развернутого, всего возможны 19 случаев (рис. 5.37, *а*, *б*): 1) пустое множество; 2) точка; 3) отрезок; 4) луч; 5) два луча OA, OB; 6) $\angle BOC$; 7) два угла с общим началом; 8) треугольник; 9) четырехугольник и другие части плоскости.

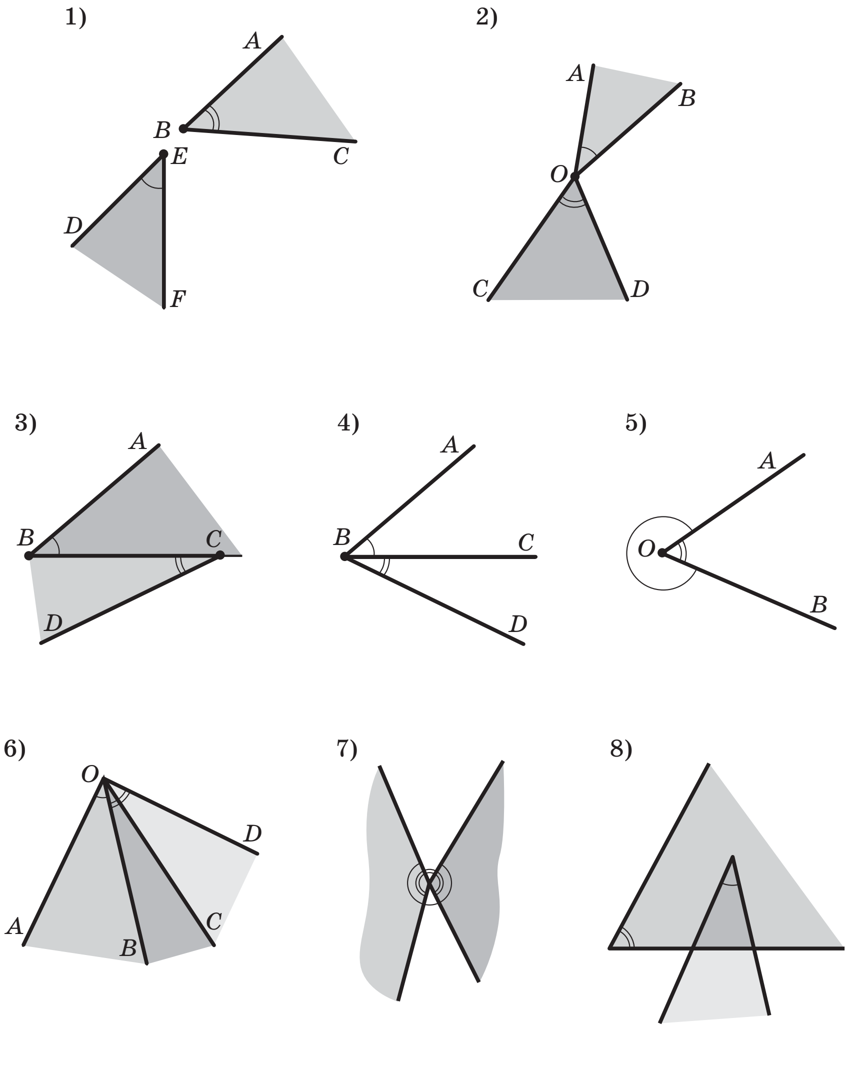


Рис. 5.37, *а*

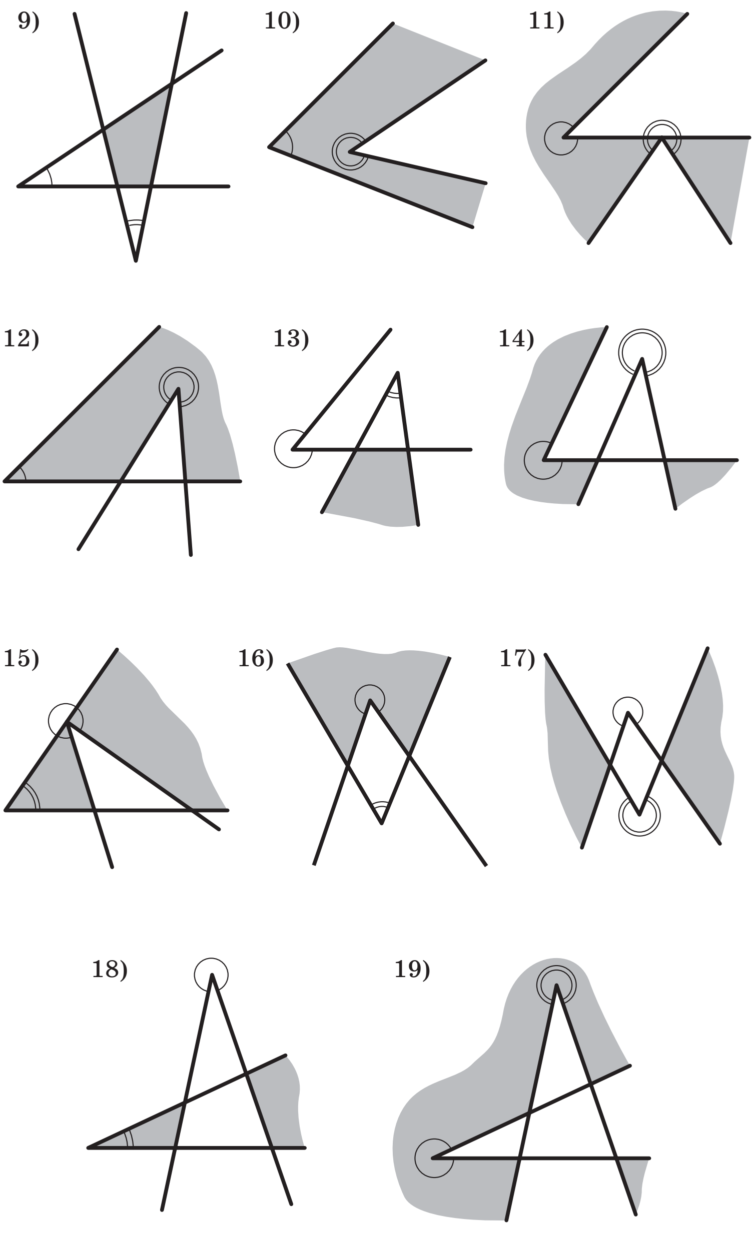


Рис. 5.37, *б*

б) Объединением двух углов, отличных от развернутого, является затемненная часть плоскости (рис. 5.38).

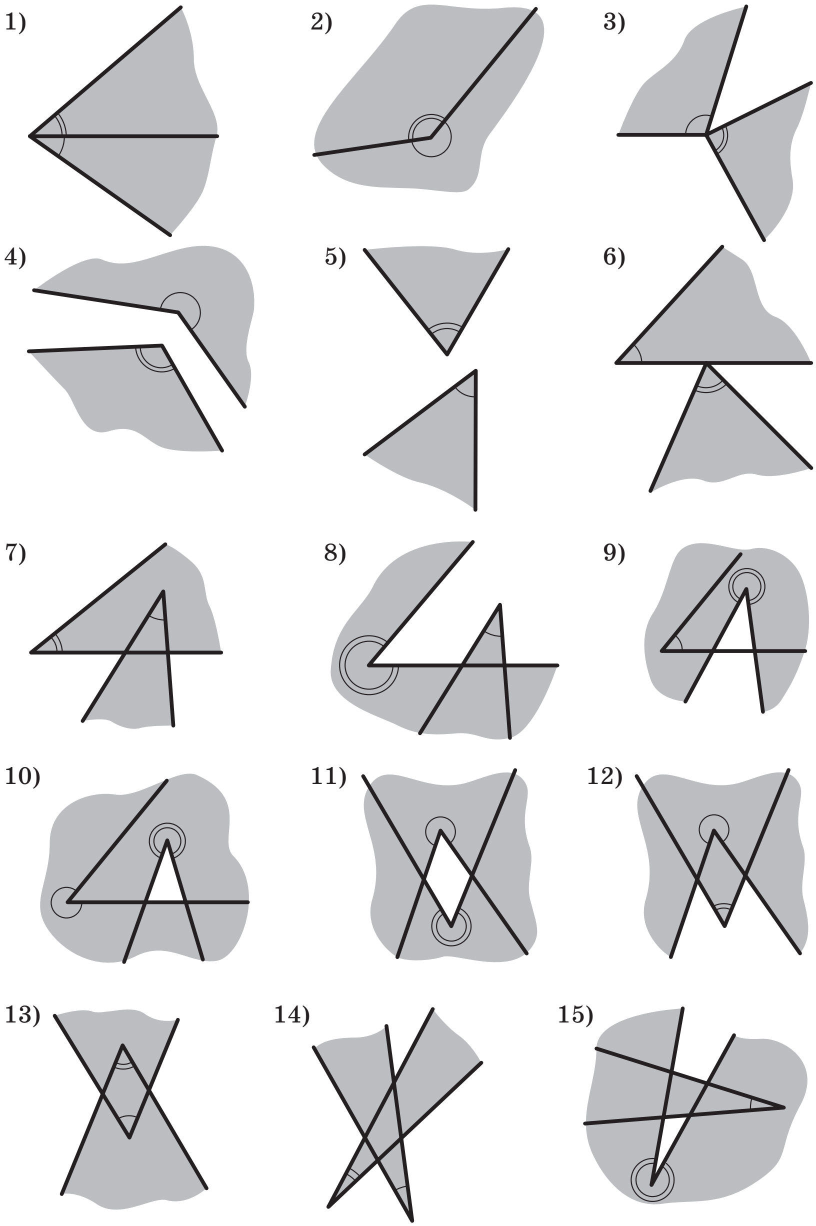


Рис. 5.38

5.38. Согласно условию, точка M дана во внутренней области $\angle AOB$. Следовательно, чтобы отрезок MX имел общую точку хотя бы с одной стороной $\angle AOB$, точка X должна принадлежать углу, который дополняет $\angle AOB$ до полного. Причем если X принадлежит сторонам $\angle AOB$, то этой общей точкой будет сама точка X.

16. Измерение углов

5.40. Можно отложить два угла, равных $60°$, находящихся в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей данную полупрямую.

5.43. Из условия задачи следует, что судно движется: а) на восток; б) на север; в) на юг.

5.44. а) Луч OC не проходит между сторонами $\angle AOB$; луч OA проходит между сторонами $\angle BOC$.

б) Возможны случаи: луч OC не проходит между сторонами $\angle AOB$. Так как $\angle AOC = \angle AOB + \angle COB$, т.е. $100° = \angle AOB + 90°$, то луч OB в данном случае проходит между сторонами $\angle AOC$ (рис. 5.39, *а*); луч OC не проходит между сторонами $\angle AOB$. Так как луч OC не пересекает ни один отрезок с концами на сторонах $\angle AOB$, то луч OC в данном случае проходит между сторонами $\angle AOB$ (рис. 5.39, *б*).

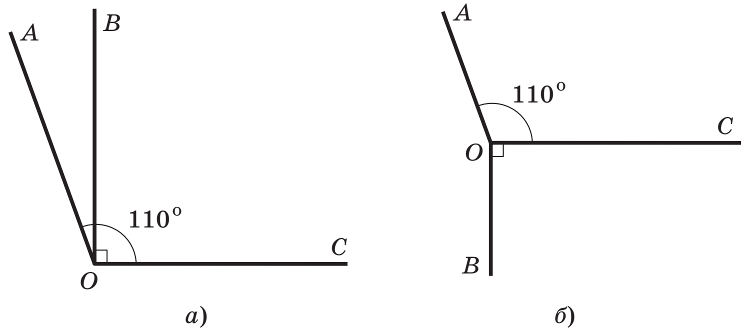


Рис. 5.39

в) Возможны случаи: когда луч OC будет проходить между сторонами $\angle AOB$, $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC$ (рис. 5.40, *а*); когда $\angle AOB$ — развернутый, то луч OC в любом расположении будет проходить между сторонами $\angle AOB$ (рис. 5.40, *б*, *в*); когда луч OC не будет проходить между сторонами $\angle AOB$, $\angle BOC = \angle BOA + \angle AOC$, тогда луч AO проходит между сторонами $\angle BOC$ (рис. 5.40, *г*).

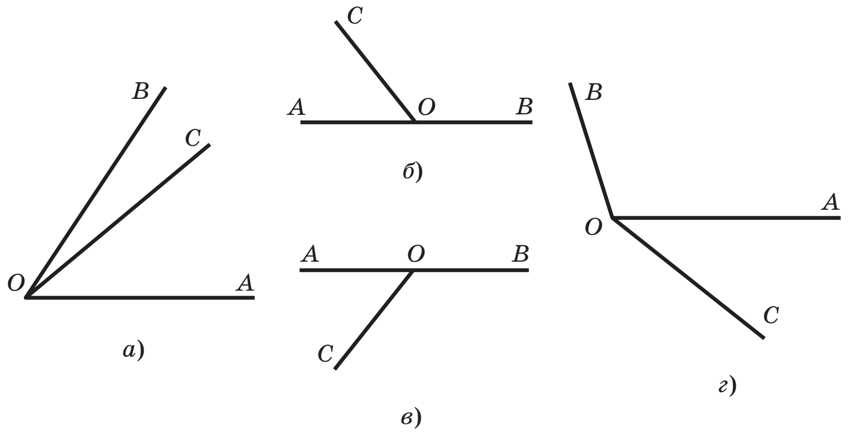


Рис. 5.40

5.45. Пусть $\angle AOB$ — неразвернутый, следовательно, $\angle AOB < 180°$. Биссектриса угла делит данный угол пополам $(\angle AOB/2) < 90°$. Значит, биссектриса неразвернутого угла образует с каждой его стороной острый угол.

5.55. 61°.

5.56. а) 110°; б) 119°; в) 179°.

5.57. $\angle AOB = 40°$.

5.60. 25°36″, 25°36′, 25°36′24″, 25°36′40″.

5.62. а) 180°; б) 30°; в) 90°.

5.63. а) 97°30′; б) 90°; в) 172°30′.

5.64. а) $\angle BOC = 15°$, $\angle AOC = 45°$; б) $\angle BOC = 20°$, $\angle AOC = 40°$; в) $\angle BOC = 30°$, $\angle AOC = 30°$; г) $\angle BOC = 36°$, $\angle AOC = 24°$.

5.65. 130° (рис. 5.41).

5.66. а) $\angle BOC = 20°$; б) $\angle BOC = 40°$; в) $\angle BOC = 90°$.

5.67. $\angle A_1OB = 120°$; $\angle A_1OC = 150°$; $\angle BOC = 30°$.

5.68. 180°.

5.69. Определить пеленг предмета — значит определить угол, вершина которого совпадает с точкой, из которой этот пеленг определяется, а сторонами являются направления на север и на предмет. Пеленг маяка равен 90°.

5.70. 90°.

5.71. 48°.

5.72. 1. Азимут направления от Москвы: а) 315°; б) 124°; в) 162°; г) 187°; д) 308°; е) 253°.

2. Азимут направления: а) 198°; б) 316°; в) 87°; г) 297°.

5.74. $\angle BAC = 80° - 30° = 50°$, где 80° — курс судна, 30° — пеленг маяка.

5.75. $140° - 75° = 65°$.

5.76. Луч BA сонаправлен направлению на север, так как точки A и B лежат на одном меридиане, причем B южнее A (рис. 5.42). Для того чтобы определить местоположение озера C на плане, нужно с помощью транспортира построить: 1) $\angle NAM = 130°$ — азимут озера C из точки A; 2) $\angle NBL = 130°$ — азимут озера C из точки B. Пересечение лучей BL и AM дает точку C — место расположения озера на плане.

5.77. Луч MA указывает искомое направление на маяк A из точки M (рис. 5.43).

5.78. Для нанесения точки A на плане выберем масштаб: 1 см = 200 м, и построим отрезок MA = 4 см. Точка A — место расположения лагеря на плане (рис. 5.44).

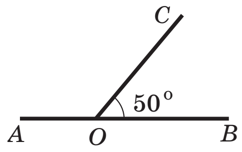


Рис. 5.41

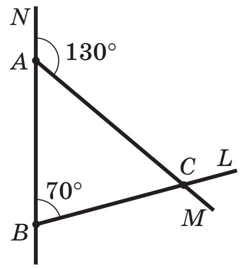


Рис. 5.42

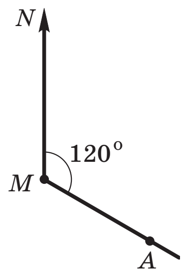


Рис. 5.43

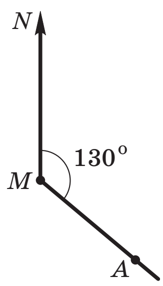


Рис. 5.44

5.80. а) 15°; б) 26°; в) 86°.

5.81. а) 120°; б) 150°; в) 178°.

5.85. Следует воспользоваться равенством углов с соответственно параллельными сторонами или свойствами параллельного переноса. Самая простая иллюстрация показана на рис. 5.45.

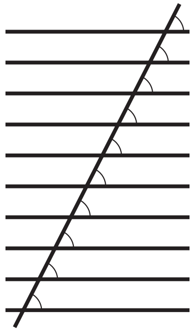


Рис. 5.45

5.86. Надо приложить веревку так, чтобы она образовала треугольник ABC на сторонах данного угла (рис. 5.46); затем отметить, например, краской или мелом соответствующие места на веревке и восстановить равный треугольник в любом месте пола или поверхности земли.

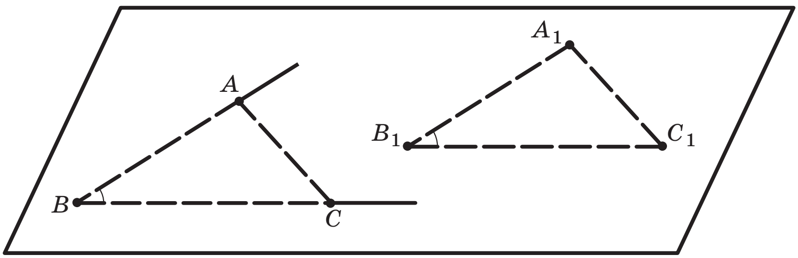


Рис. 5.46

5.88. 1. Если бы один из лучей проходил между сторонами угла, образованного двумя другими лучами, то градусная мера этого угла была бы равна сумме градусных мер углов.

17. Смежные углы

5.93. Нет, так как у смежных углов две стороны должны быть дополнительными лучами.

5.94. Нет. Затемненные углы α и β на рис. 5.47 в сумме равны 180°, однако они не являются смежными.

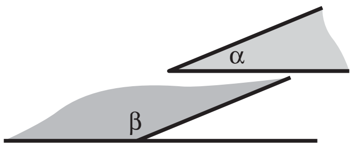


Рис. 5.47

5.96. а) Не могут быть оба острыми; б) не могут быть оба тупыми; в) могут быть оба прямыми.

5.100. Для угла AOB можно построить два смежных с ним угла AOB_1 и BOA_1 (рис. 5.48).

5.101. Для луча l можно с помощью построения двух лучей получить смежные углы, как показано на рис. 5.49, *а*, *б*.

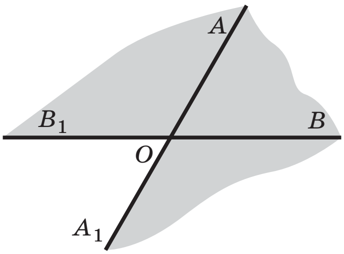
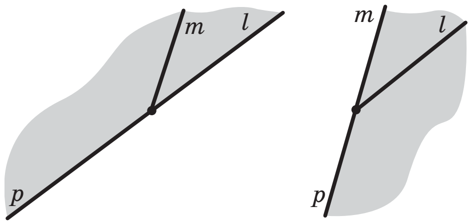


Рис. 5.48



а) *б*)

Рис. 5.49

5.102. 150°, 135°, 90°, 164°30′, 97°18′.

5.103. а) Нет (рис. 5.50, *а*, *б*); б) нет (рис. 5.50, *в*); в) да (рис. 5.50, *г*).

5.105. а) 112°30′; б) решение сводится к решению систем:

$$\begin{cases} x - y = 50°, \\ x + y = 180° \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y - x = 50°, \\ x + y = 180°; \end{cases}$$

в) решение сводится к решению систем:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 5, \\ x + y = 180° \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x} = 5, \\ x + y = 180°; \end{cases}$$

г) 90°.

5.106. а) 36°; б) 18°; в) 5°; г) 4°.

5.107. 130°.

5.109. 90°.

5.110. Воспользуйтесь свойствами смежных углов.

5.111. Так как смежные углы равны, а их сумма равна 180°, то каждый из них равен 180° : 2 = 90°, т.е. они прямые.

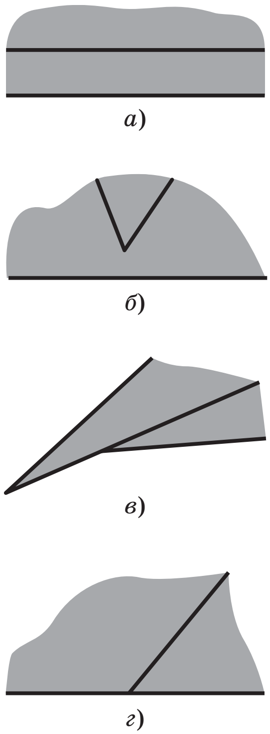


Рис. 5.50

5.113. Пусть $\angle ABC$ и $\angle ABD$ — прямые углы с общей стороной AB. Прямые BC и BD перпендикулярны прямой AB и проходят через точку B этой прямой, т. е. прямые совпадают. Значит, точки B, C и D лежат на одной прямой. Кроме того, точки C и D не могут лежать в одной полуплоскости относительно прямой AB (от данной полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить только один угол, равный 90°). Поэтому лучи BC и BD — дополнительные полупрямые. Это означает, что данные прямые углы смежные.

5.114. Пусть угол (ac) равен α. Если $\alpha < 90°$, то угол $(bc) = 90° - \alpha$. Если $\alpha > 90°$, то $\angle(bc) = \alpha - 90°$, что также меньше 90°, так как $\alpha < 180°$ (по условию угол (ac) отложен в полуплоскость, а значит, не является развернутым). В обоих случаях угол (bc) острый.

5.116. Возьмите на лучах a, a_1 (дополнительный к a) и b точки A, A_1 и B соответственно.

5.117. Отрезок CD пересекает прямую AB, т.е. луч AB или дополнительный к нему. Рассмотрите эти случаи отдельно.

5.118. Прямая AP разбивает плоскость на две полуплоскости. Точка B лежит в одной из них. Если точка C лежит в другой полуплоскости, то отрезок BC пересекает прямую AP, что и требовалось доказать. Рассмотрите случай, когда точки B и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AP. Тогда углы APB и APC отложены от полупрямой PA в одну полуплоскость и угол BPC равен их разности.

18. Вертикальные углы

5.119. При пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов, которые равны между собой.

5.120. Две пары вертикальных углов и четыре пары смежных.

5.121. Шесть углов.

5.122. Могут. Вертикальные.

5.123. а, б) Могут; в) не могут.

5.124. Нет.

5.125. а) Острыми; б) тупыми; в) прямыми.

5.127. Например, через противоположные вершины граней.

5.128. 30°, 150°, 30°, 150°.

5.130. Вспомните определение вертикальных углов и теорему об их равенстве.

5.131. 60°.

5.132. Неверно.

5.134. 110°, 70°, 110°, 70°.

5.135. Надо рассмотреть разные случаи образования неизвестных углов и воспользоваться аглебраическим методом.

5.136. 65°, 115°.

5.137. 36°, 114°.

5.138. Если сумма трех углов равна 270°, то четвертый угол равен 90°.

5.139. Углы (a_1b) и (ab_1) вертикальные.

5.140. 180°.

5.142. По 90° каждый.

5.144. Обозначим через b_1 полупрямую, дополнительную к b. Углы (a_1b) и (a_2b_1) вертикальные, а значит, равны. Поэтому углы (a_2c) и (a_2b_1) тоже равны. А так как они отложены от полупрямой a_2 в одну полуплоскость, то луч c совпадает с лучом b_1, т.е. данные углы (a_1b) и (a_2c) вертикальные.

Тема 6

ТРЕУГОЛЬНИКИ

19. Определение треугольника

6.1. Три стороны и три вершины.

6.2. Три.

6.3. На рис. 6.2 изображены треугольники: *DEA*, *DEC*, *CEA*, *BEA*, *ABC*, *DAC*, *DAB*, *DCB*. Итого 8 треугольников.

6.4. На рис. 6.3: *а*) 5; *б*) 9; *в*) 5 треугольников.

6.6. Для решения задачи нужно выйти в пространство. См. рис. 6.49.

6.9. Является.

6.11. Нельзя.

6.12. 22 см.

6.14. Меньше 11 см.

6.15. 30 см.

6.16. 23 см.

6.17. $BC = 5$ см, $AB = 4$ см, $AC = 8$ см.

6.18. 15 см.

6.19. $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см.

6.20. $BC = 10$ см, $AC = 8$ см.

6.21. $AC = 12$ см, $AB = 14$ см, $BC = 9$ см.

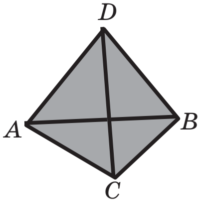


Рис. 6.49

6.23. 1) $AB = 8$ см, $BC = 11$ см, $AC = 11$ см; 2) $AB = 8$ см, $BC = 8$ см, $AC = 14$ см.

6.24. $AB = BC = 20$ см, $AC = 10$ см.

6.25. $AB = BC = 5$ см, $AC = 3$ см.

6.26. $AB = BC = 9$ см, $AC = 3$ см.

6.28. Рис. 6.50. 1. Вершины A, C, B_1; A, C, D_1; D, B, A_1; D, B, C_1; A_1, C_1, B; A_1, C_1, D; D_1, B_1, A; D_1, B_1, C образуют равносторонние треугольники. Всего возможны 8 различных случаев. Стороной треугольника является диагональ грани. Каждая диагональ определяет два треугольника так, как показано на рисунке. Всего же 6 граней, в каждой грани по 2 диагонали. Итого: $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ треугольника.

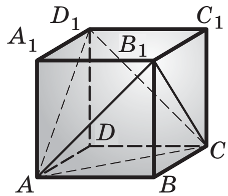


Рис. 6.50

При такой системе подсчета каждый треугольник учитывается трижды. Следовательно, общее количество различных равносторонних треугольников с вершинами в вершинах куба равно $24 : 3 = 8$.

Если взять вершины треугольников на ребрах куба, то тоже можно получить равносторонние треугольники. Для этого нужно взять точки, расположенные на ребрах куба на одинаковом расстоянии от данной вершины куба.

2. В принципе любой равносторонний треугольник — равнобедренный, поэтому 8 различных вариантов равнобедренных треугольников у нас уже есть. Так же равнобедренные треугольники получаются, если в качестве вершин каждого из них взять любые три вершины куба, принадлежащие одной грани. В данном случае равными сторонами будут являться ребра куба, а основаниями — диагональ грани. Таких треугольников будет $6 \cdot 4 = 24$ (6 граней, в каждой по 4 различных треугольника). Равнобедренный треугольник с вершинами на ребрах куба может быть получен способом, указанным в п. 1, а также если в качестве вершин треугольника взять точки, расположенные на одинаковом расстоянии от данной грани куба.

6.29. Можно. В пространстве — это тетраэдр.

6.32. 13 треугольников.

6.33. 27 треугольников.

6.34. На рис. 6.8, *а* — 27; на рис. 6.8, *б* — 47.

6.36. См. рис. 6.51.

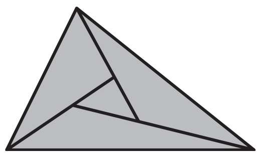


Рис. 6.51

6.37. 10 способов (2 способа — пристроить к наибольшей стороне, по 4 способа — к двум другим).

6.38. а, б) Можно. См. рис. 6.52, *а* и *б*.

6.40. Если на прямой взяты 3 точки, мы имеем 3 треугольника; для 4 точек — 6 треугольников, для 5 точек — 10 треугольников; для n точек — $n(n - 1)$ треугольников.

6.41. На рис. 6.53 показано, как требуемым образом расположить на плоскости 6 треугольников.

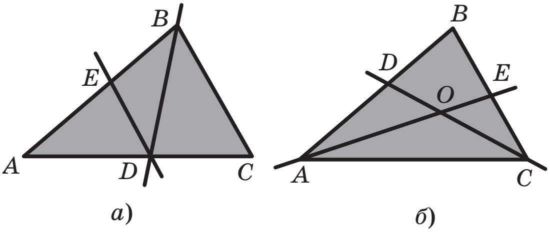


Рис. 6.52

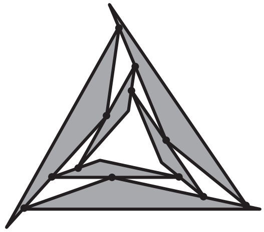


Рис. 6.53

20. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Сумма углов треугольника

6.43. Три.

6.44. AB, BC, CA — стороны $\triangle ABC$; $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ — углы $\triangle ABC$.

6.45. Против стороны AB лежит угол C, против стороны CB — угол A, против стороны AC — угол B.

6.46. а) Против угла P лежит сторона KM, против угла K — сторона KM, против угла M — сторона KP; б) смотри п. а); в) к стороне PK прилежат углы K и P, к стороне KM — углы K и M, к стороне PM — углы P и M.

6.47. Три внешних угла, или считать по одному у каждой вершины.

6.48. 120°.

6.49. Может (рис. 6.54).

6.50. Не может.

6.52. Меньше $(180° - \alpha)$.

6.56. 80°.

6.57. Треугольник ABC можно считать пересечением: а) трех углов, отлич-

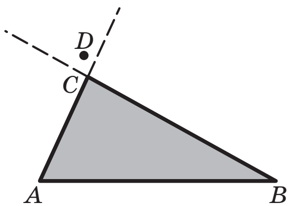


Рис. 6.54

ных от развернутого, так как любая точка $\triangle ABC$ принадлежит как углу A, так и углам B и C; б) трех полуплоскостей, так как любая точка $\triangle ABC$ принадлежит одновременно трем различным полуплоскостям, границами которых являются прямые AB, BC и AC соответственно; в) двух углов, отличных от развернутого, так как любая точка $\triangle ABC$ принадлежит как углу A, так и углу C.

6.59. а) $\angle A$ и $\angle B$; б) $\angle A$; в) такой треугольник не существует.

6.60. а) c; б) b; в) a.

6.61. а) b, c, a; б) наибольшая сторона c, $a = b$.

6.62. a, b, c.

6.63. а) $AB > AC$; б) $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

6.64. а) $a + c$; б) $\angle ACB = \angle ABC = 70°$, следовательно, треугольник ABC равнобедренный.

6.66. Надо рассмотреть два случая: а) дан угол при основании; б) дан угол при вершине.

6.67. 45°, 45°, 90°.

6.71. а) 30°, 60°, 90°; б) 30°, 70°, 80°; в) 36°, 36°, 108°.

21. Признаки равенства треугольников

6.85. 1) $A_1B_1 = 5$ см, $\angle A_1 = 90°$; 2) $A_1B_1 = 2$ см, $B_1C_1 = 4$ см, $C_1A_1 = 8$ см; 3) $\angle A_1 = 34°$, $\angle B_1 = 56°$, $\angle C = \angle C_1 = 180° - (34° + 56°) = 90°$; 4) $\angle A = 76°$, $AB = 10$ см, $CA = 5$ см.

6.86. $BO = 10$ см, $OC = 8$ см, $CB = 4$ см или $OC = 4$ см, $CB = 8$ см.

6.90. 1. Надо выяснить, равны ли треугольники, в которые данные отрезки или углы входят как соответствующие элементы.

6.91. Надо использовать признаки равенства треугольников или определить изометрию, переводящую один треугольник в другой.

6.92. 1) Верно; 2, 3) неверно; 4) в правильной пирамиде существует грань, являющаяся остроугольным треугольником, — это основание пирамиды, а боковая грань может являться как остроугольным, так и тупоугольным треугольником.

6.104. $\triangle AOB = \triangle COB$ по трем сторонам.

6.105. $\triangle ABD = \triangle CDB$ по трем сторонам.

6.117. $\triangle ABC = \triangle ADC$ по двум сторонам и углу между ними.

6.118. $\triangle ABD = \triangle ADC$ по двум сторонам и углу между ними.

6.119. В общем случае нельзя доказать, что если прямая, проходящая через вершину треугольника, разбивает его на два равнобедренных треугольника, то данный треугольник равнобедренный. Треугольник может быть разбит прямой на два равнобедренных треугольника и не являться равнобедренным. Например, на рис. 6.55 $\triangle ABC = \triangle BCD$ — равнобедренные, а $\triangle ABD$ не является равнобедренным.

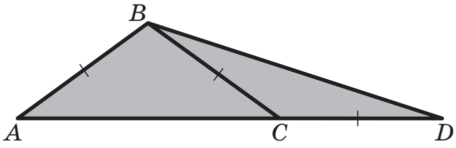


Рис. 6.55

22. Свойства прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора

6.146. 1) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, откуда $c : b = a : h$ или $h = \dfrac{ab}{c}$. Это же равенство можно вывести и так: $h = \sqrt{a_c b_c}$. Но $a_c = \dfrac{a^2}{c}$, $b_c = \dfrac{b^2}{c}$, поэтому $h = \sqrt{\dfrac{a^2b^2}{c^2}} = \dfrac{ab}{c}$.

Можно также воспользоваться формулами площади прямоугольного треугольника: $\dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2}ch$, откуда $h = \dfrac{ab}{c}$.

2) Так как $a^2 = ca_c$ и $b^2 = cb_c$, $c = \dfrac{a^2}{a_c} = \dfrac{b^2}{b_c}$.

3) Равенство $h^2 = a_c b_c$ следует из пропорции $h : a_c = b_c : h$.

23. Свойства равнобедренного треугольника

6.168. При решении этой задачи воспользуйтесь неравенством треугольника.

6.170. Можно отложить от произвольного луча этой прямой два равных угла. Объединение этих углов и даст искомый угол.

6.171. В качестве основания этого треугольника можно взять любой отрезок, к которому данная прямая является серединным перпендикуляром.

6.173. Проведем биссектрису данного угла A и через данную внутри угла точку проведем перпендикуляр к построенной биссектрисе. Полученный треугольник ABC — равнобедренный, следовательно, $AB = AC$.

6.177. Если бы разносторонний треугольник имел ось симметрии, то он имел бы и равные стороны.

6.178. При симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису угла при вершине, эти медианы, высоты и биссектрисы отобразятся друг на друга.

6.179. В треугольниках BEC и BAD $\angle B$ — общий, $BA = BC$, $\angle BAD = \angle BCE$, а это значит, что эти треугольники равны. Тогда $CE = AD$ и $\angle AEC = \angle ADC$. Треугольники AED и CED равны, следовательно, $\angle BED = \angle BDE$, откуда следует, что $\triangle BDE$ равнобедренный.

6.188. Известно, что если треугольник переходит в себя при некотором нетождественном повороте, то вершины этого треугольника переходят в соответствующие вершины этого же треугольника, а это возможно только в случае равенства его сторон.

Тема 7

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

24. Прямоугольник и квадрат

7.1. У квадрата 4 стороны, 4 угла, 4 вершины. Все углы равны $90°$, все стороны равны.

7.2. 1) Существует несколько определений квадрата через понятие параллелограмма: а) квадратом называется параллелограмм, у которого один угол прямой и две смежные стороны равны; б) квадратом называется параллелограмм, у которого диагонали равны и взаимно перпендикулярны; в) квадратом называется параллелограмм, у которого диагонали равны и принадлежат его осям симметрии.

2) Существует несколько определений квадрата через понятие ромба: а) квадратом называется ромб, у которого один из углов прямой; б) квадратом называется ромб, у которого все углы прямые; в) квадратом называется ромб, у которого диагонали равны.

3) Существует несколько определений квадрата через понятие четырехугольника, например: а) квадратом называется четырехугольник, у которого все стороны равны и один из углов прямой; б) квадратом называется четырехугольник, у которого все стороны и все углы равны; в) квадратом называется четырехугольник, у которого диагонали равны, взаимно перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам; г) квадратом называется четырехугольник, у которого имеются четыре оси симметрии, и т. д.

7.3. В прямоугольнике 4 стороны, 4 угла, 4 вершины. Все углы равны 90°. Противоположные стороны прямоугольника равны.

7.4. Нет.

7.5. Прямоугольник имеет центр симметрии.

7.6. Квадрат имеет центр симметрии и четыре оси симметрии.

7.7. Центральная и осевая симметрия.

7.9. У квадрата все стороны равны.

7.10. Симметрия относительно прямой BD или поворот по часовой стрелке относительно центра симметрии квадрата на 90°.

7.11. Симметрия относительно прямой AC, поворот по часовой стрелке относительно центра симметрии квадрата на 90°.

7.12. Треугольник: а) BAD; б) DCB; в) CDA.

7.13. Ромб; отрезок AB должен образовывать с линиями сгиба углы в 45°.

7.14. а) Может, если $AB \perp KL$ (рис. 7.55, *а*); б) может, если выполнятся условия: $OB = OA$, $AB \perp OL$ (рис. 7.55, *б*).

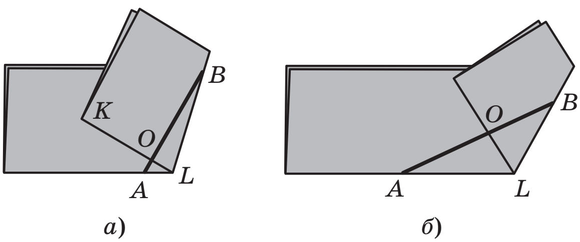


Рис. 7.55

7.16. Все зависит от расположения этих прямоугольников. В случае, изображенном на рис. 7.56, это может быть и осевая симметрия, и параллельный перенос. Чаще всего перевести оси прямоугольника в равный ему можно с использованием композиции изометрий.

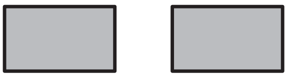


Рис. 7.56

7.17. У прямоугольника все углы равны 90°.

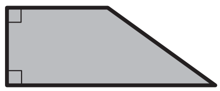


Рис. 7.57

7.18. Да.

7.19. Да.

7.20. Если квадрат лежит в одной плоскости, то это осевая симметрия, параллельный перенос, центральная симметрия. Если квадрат лежит в разных плоскостях, то это может быть вращение вокруг оси.

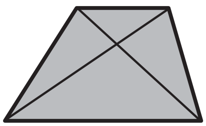


Рис. 7.58

7.21. См. рис. 7.57.

7.22. См. рис. 7.58.

7.26. а) У квадрата все стороны равны; б) у квадрата все углы прямые.

7.27. $2b$.

7.29. Например, поворот вокруг этой вершины.

7.32. а) Сначала строится треугольник AED по стороне AE и двум углам A и E (рис. 7.59, *а*): $45° = \dfrac{90°}{2}$, $22{,}5° = \dfrac{45°}{2}$; б) сначала строится треугольник AED по стороне AE и двум углам (рис. 7.59, *б*): $\angle EAD = 45°$, $\angle EDA = 22{,}5°$.

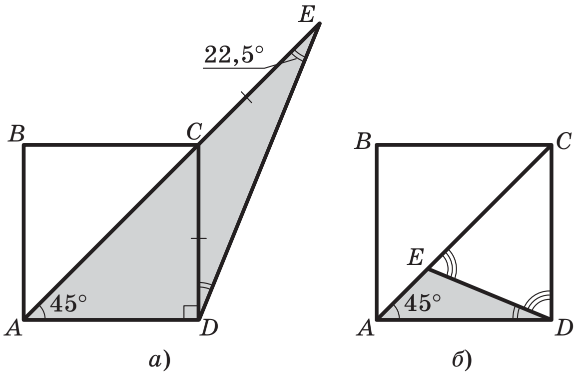


Рис. 7.59

7.33. Недостаточно, так как равные отрезки могут пересекаться под прямым углом не обязательно в середине каждого из них.

7.34. Так как образующиеся треугольники оба раза точно совмещаются, то диагонали данного четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, данный четырехугольник — параллелограмм. Его стороны равны между собой, значит, он — ромб. Но о диагоналях четырехугольника по результатам данной проверки ничего сказать нельзя. Поэтому, является ли данный четырехугольник квадратом, окончательного вывода сделать нельзя.

7.35. На ширине листа поместится 300 : 60 = 5 шайб. Чтобы 50 шайб уложить вдоль длины листа, нужно будет 50 : 5 = 10 рядов. Длина листа должна быть: 60 · 10 = 600 (мм).

7.36. Надо отметить равные отрезки AD, AB и BC (рис. 7.60), потом обрезать по диагонали квадрата $ABCD$. Ясно, что $\angle ABD = \angle ADB = 45°$.

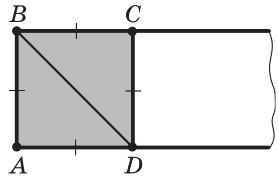


Рис. 7.60

7.37. Для составления квадрата потребуется не менее 7 палочек, поэтому нельзя составить квадрат со стороной менее 7 см. С другой стороны, сумма длин всех палочек равна 45 см, поэтому из них нельзя составить квадрат со стороной более 11 см. Из палочек данного набора можно составить отрезки длиной в 7, 8, 9 см следующими способами:

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3,$$
$$8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3,$$
$$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4.$$

7.44. а) На отрезок DC; б) на прямоугольник с диагональю OD и вершинами на сторонах данного прямоугольника (кроме вершины O); в) на диагональ AC; г), д), е) на себя.

7.45. Покажите, что середины сторон четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, — вершины прямоугольника.

7.46. 1. Множество вершин C — отрезок AQ без точек A и Q, $\angle QAB = 45°$, $AQ = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$; множество вершин D — отрезок BN без точек B и N, $\angle DBA = 45°$; $BN = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$ (рис. 7.61).

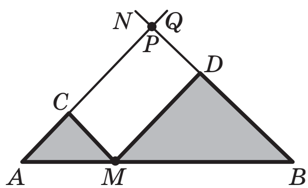


Рис. 7.61

7.49. б) Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по катету (стороне прямоугольника) и его гипотенузе (диагонали прямоугольника) и дополнении его до прямоугольника.

в) Первый этап одного из способов построения приведен на рис. 7.62, *а*, *б*, возможен и другой способ — строится равнобедренный треугольник по известным боковым сторонам (половина диагонали прямоугольника) и углу при вершине (угол между диагоналями).

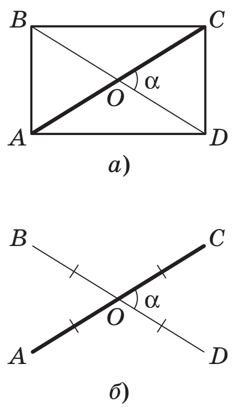


Рис. 7.62

г) Пусть прямоугольник $ABCD$ искомый (рис 7.63, *а*). На продолжении луча AD от точки D отложим отрезок DK, равный отрезку CD. Длина отрезка AK равна заданной сумме длин двух его неравных сторон. Так как $CD = DK$, то $\angle DCK = \angle CKD = 45°$.

Отсюда следует построение. Строим треугольник ACK по его сторонам AC и AK и углу CKD, равному 45° (рис. 7.63, *б*). Из точки C (C_1) проводим перпендикуляр CD (C_1D) к отрезку AK, D принадлежит отрезку AK. Полученный треугольник ACD достраиваем до прямоугольника $ABCD$. Этот прямоугольник искомый.

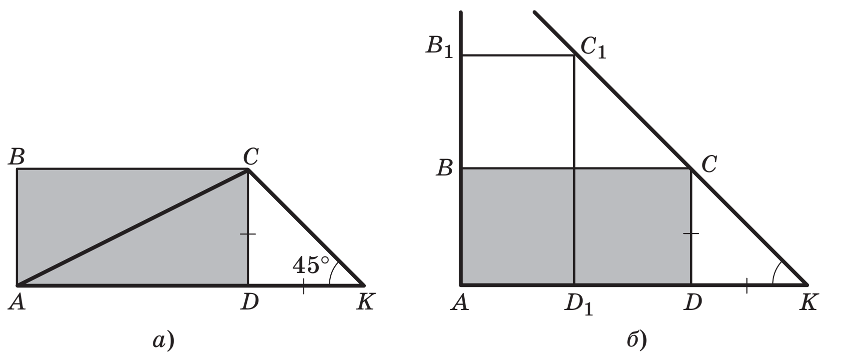


Рис. 7.63

7.60. Постройте сначала равнобедренный прямоугольный треугольник, периметр которого равен данной полусумме.

7.69. 4 см.

7.70. Квадрат.

7.71. Диагонали заданного четырехугольника должны быть: а) взаимно перпендикулярны; б) равны; в) взаимно перпендикулярны и равны.

7.78. Повернем треугольник ABL на $90°$ по часовой стрелке относительно точки B. Так как $\angle ABC = \angle LBL_1 = 90°$, то L_1F — отрезок прямой (рис. 7.64). В треугольнике CFL_1 $CM_1 = M_1L_1$ и $L_1B = BF$, следовательно, M_1B — его средняя линия и $M_1B \parallel CF$, откуда $BM \perp CF$.

7.79. Построим на стороне AD равносторонний треугольник ADK (рис. 7.65), проведем отрезок MK и рассмотрим треугольник AMK — он равнобедренный, так как $\angle KAM = \angle KMA = 75°$ (заметим, что точки M и K принадлежат оси симметрии построенной фигуры). Отсюда четырехугольник $ABMK$ — параллелограмм, у которого $AB = AK$. Следовательно, $BM = AB = BC = CM$, что и требовалось доказать.

7.80. Обозначим величину угла POD через α, тогда $\angle P_1OA - \angle P_1OC = \alpha$ (рис. 7.66).

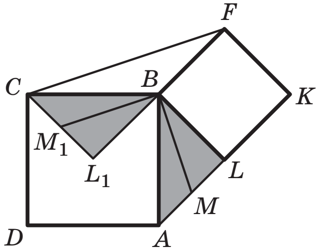


Рис. 7.64

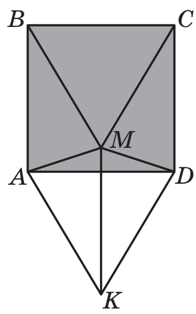


Рис. 7.65

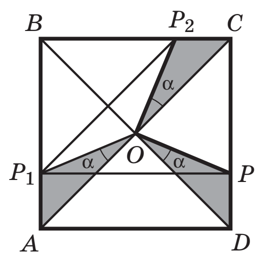


Рис. 7.66

7.81. См. рис. 7.67.

7.82. См. рис. 7.68.

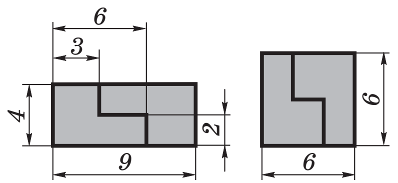


Рис. 7.67

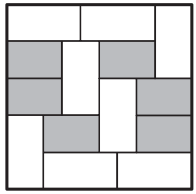


Рис. 7.68

7.83. 3. На рис. 7.69 показано разбиение квадрата на 21 попарно неравных квадратов, придуманное голландским математиком Дьювестином в 1978 году. Цифры указывают длины сторон соответствующих квадратов, если длина исходного — 112. Это построение — своеобразный рекорд: в нем наименьшее пока число попарно неравных квадратов (21).

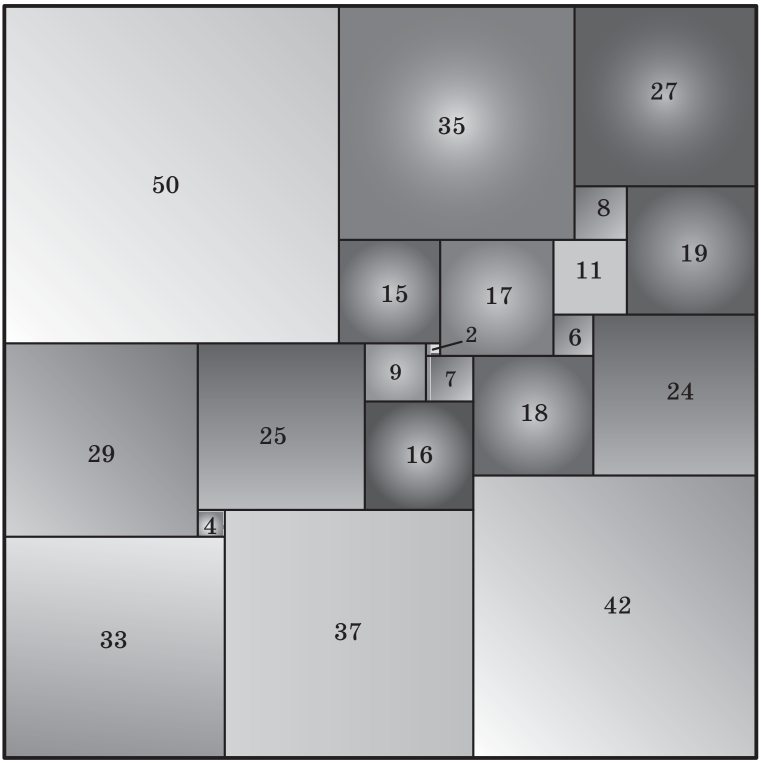


Рис. 7.69

25. Параллелограмм

7.90. Треугольники и их периметры равны.

7.93. Нет; нет; да. Нет.

7.94. а) Нет; б) нет; в) да.

7.95. Нет.

7.96. 55°, 125°, 125°.

7.97. 3 см, 4 см.

7.98. 50°, 50°, 130°, 130°.

7.99. 67,5°, 67,5°, 112,5°, 112,5°.

7.100. 36°, 36°, 144°, 144°.

7.101. 72°, 72°, 108°, 108°.

7.102. 80°, 80°, 100°, 100°.

7.103. $CD = 5$ см, $AD = 7$ см, $P_{ABCD} = 24$ см.

7.104. $\frac{P}{2} - a$.

7.105. 30 см, $P = 80$ см.

7.106. а) 16 см, $P = 44$ см; б) 23 см, $P = 72$ см или 3 см, $P = 32$ см.

7.107. Надо доказать равенство треугольников, в которые отрезки прямой входят как элементы.

7.108. 4,8 м.

7.109. а) 13 и 17 см; б) составим уравнение $2(x + x + 4) = 60$, с помощью которого получим, что стороны параллелограмма равны 13 и 17 см; в) 7,5 и 22,5 см; г) 11,5 и 18,5 см.

7.110. 6 и 18 см.

7.111. 14 и 15 см. Очевидно, что 28 см — сумма двух противоположных сторон (если бы это была сумма двух соседних сторон, то на две оставшиеся стороны приходилось бы также 28 см, а у нас — 30 см).

7.112. 45°, 45°, 135°, 135°.

7.113. 90°, 45°.

7.114. 50°, 50°, 130°, 130°.

7.115. 45°, 135°.

7.116. 30°, 150°. Учесть, что в прямоугольном треугольнике катет, равный половине гипотенузы, лежит против угла в 30°.

7.117. $\angle MNP = 105°$.

7.118. 50°, 50°, 130°, 130°.

7.119. $\angle CEF = \angle CBF = 60°$, $\angle BCE = \angle BFE = 120°$.

7.120. а) 112°, 112°, 68°, 68°, б) 140°, 140°, 40°, 40°.

7.121. 60°, 60°, 120°, 120°.

7.122. 25°, 25°, 155°, 155°.

7.123. 60°, 60°, 120°, 120°, P_{ABCD} = 24 см.

7.124. $CK = DE$ = 4 см, EK = 10 см. Следует вспомнить, что в прямоугольном треугольнике против угла в 30° лежит катет, равный половине гипотенузы.

7.125. 6 см, 6 см, 8 см, 8 см, 60°, 60°, 120°, 120°.

7.126. 12 см, 12 см, 16 см, 16 см.

7.127. 1) P = 10 см, 2) P = 12 см, 3) P = 14 см.

7.128. 2,5 см.

7.129. 10 см.

7.130. 15 см, 15 см, 10 см, 10 см.

7.131. $h = a/2$.

7.132. BD = 1,1 м, $AD = BC$ = 0,8 м, $AB = CD$ = 1,1 м.

7.133. $P_{\Delta COD}$ = 28 см.

7.134. P = 56 см.

7.135. $P_{\Delta AOD}$ = 20 см.

7.136. P_{ABCD} = 18 см, P_{ABDC} = 20 см, P_{ADBC} = 22 см. Следует рассмотреть три случая.

7.138. $P_{ABCD} = 2a + 4b$.

7.139. 1) P = 28 см; 2) P = 26 см. Следует рассмотреть два случая: 1) BE = 4 см, EC = 5 см; 2) BE = 5 см, EC = 4 см.

7.140. 3 и 2 см.

7.141. P = 32 см.

7.142. 3 см, 2 см, 3 см.

7.143. Вспомните, что сумма двух углов, противолежащих одной стороне, равна 180°. Значит, половины углов (проведены биссектрисы) в сумме равны 90°.

7.145. Достаточно доказать равенство ΔAOP и ΔCOK, в которые отрезки AC и PK входят как элементы. ($\Delta AOP = \Delta COK$ по второму признаку.)

7.147. Симметрия относительно точки O; поворот на 180°.

7.148. а) Нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет.

7.149. а) Да; б) нет; в) нет.

7.152. Надо доказать параллельность сторон четырехугольника $ABMK$.

7.153. Противоположные стороны четырехугольника параллельны, так как перпендикулярны параллельным сторонам. Следовательно, четырехугольник — параллелограмм.

7.154. Следует доказать, что противоположные стороны четырехугольника параллельны (сумма односторонних углов равна 180°), тогда по определению этот четырехугольник — параллелограмм.

7.155. Надо доказать параллельность сторон четырехугольника $ABCD$.

7.158. Следует доказать, что диагонали четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ делятся пополам и воспользоваться признаком параллелограмма через диагонали.

7.161. Достаточно доказать равенство противоположных сторон четырехугольника (доказать равенство треугольников).

7.163. Следует доказать равенство и параллельность сторон AD и MC.

7.164. Следует доказать равенство двух пар противоположных сторон четырехугольников.

7.166. Следует доказать, что диагонали четырехугольника $EGFH$ делятся пополам.

7.167. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними; затем достроить его до параллелограмма.

7.169. Построить треугольник по трем сторонам; затем достроить его до параллелограмма.

7.170. Диагональ и две стороны образуют прямоугольный треугольник. Строим этот треугольник, достраиваем его до параллелограмма.

7.172. Следует вспомнить, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, можно построить треугольник по двум сторонам и углу между ними; затем достроить его до параллелограмма.

7.173. Следует вспомнить, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, можно построить треугольник по трем сторонам; затем достроить его до параллелограмма.

7.176. Нет решения.

7.179. Диагональ рассматриваем как сегмент, вмещающий данный угол; строим треугольник по двум сторонам и углу, прилежащему к одной стороне; достраиваем до параллелограмма.

7.182. Решение задачи сводится к построению треугольника по стороне, противолежащему углу (угол между диагоналями) и сумме двух других сторон (полусумма суммы длин диагоналей).

7.186. Следует доказать параллельность и равенство противоположных сторон четырехугольника.

7.187. Свойства симметрии позволяют установить, что диагонали четырехугольника, имеющего центр симметрии, этим центром делятся пополам.

7.190. Докажите, что две пары противоположных вершин шестиугольника являются вершинами параллелограмма.

7.191. Докажите, что две пары противоположных сторон параллелограмма $EFNK$ равны.

7.193. Докажите, что две пары противоположных сторон параллелограмма $EGFH$ равны.

7.195. Расстояние от любой точки внутри параллелограмма до прямых, на которых лежат его стороны, равна сумме длин высот параллелограмма.

7.199. См. рис. 7.43: 1) $\angle K = \angle KAB = \angle DAL = \angle L$ как половины внешнего $\angle A$; 2) ΔKBA и ΔADL — равнобедренные $\Rightarrow$ боковые стороны равны и соответственно равны сторонам параллелограмма, каждая боковая сторона ΔKCL равна сумме соседних сторон параллелограмма $\Rightarrow$ сумма длин боковых сторон ΔKCL равна периметру параллелограмма.

7.201. Рис. 7.70: 1) достроим ΔABC до параллелограмма $ABCK$; 2) рассмотрим ΔABK ($\angle K = \angle 1$, $AK = a$): $b > a$, откуда $\angle 1 > \angle 2$, так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

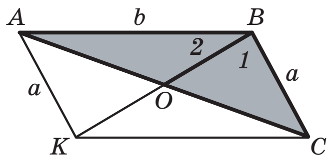


Рис. 7.70

26. Ромб

7.207. а) Параллелограмм, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, называется ромбом; б) параллелограмм, у которого одна из диагоналей лежит на прямой, являющейся его осью симметрии, называется ромбом; в) параллелограмм, у которого две смежные стороны равны, называется ромбом; г) четырехугольник, у которого все стороны равны, называется ромбом.

7.209. Нет.

7.210. а) Нет; б) да.

7.211. а) Если диагонали ромба равны, то точкой, равноудаленной от всех вершин ромба, является точка пересечения его диагоналей. В общем случае такой точки нет.

б) Точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от всех его сторон.

7.212. 1) в; 2) б; 3) а.

7.218. 32 см.

7.219. 60°, 60°, 120°, 120°.

7.220. $\angle KOM = 90°$, $\angle MKO = 40°$, $\angle KMO = 50°$.

7.222. $AM = 1$ см, $MD = 1$ см, $BD = 2$ см.

7.223. 60°, 60°, 120°, 120°.

7.224. 30°, 30°, 150°, 150°.

7.225. 22°30′, 67°30′.

7.226. 60°, 60°, 120°, 120°.

7.227. 80°, 80°, 100°, 100°.

7.229. Докажите, что все стороны параллелограмма равны.

7.234. Утверждение «Если диагонали четырехугольника равны и перпендикулярны, то этот четырехугольник — квадрат» в общем случае неверно, так как существуют четырехугольники, у которых диагонали равны и перпендикулярны, но эти четырехугольники не являются квадратами. Например, четырехугольник на рис. 7.71.

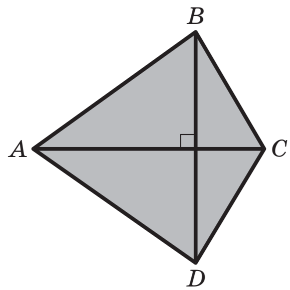


Рис. 7.71

7.235. Докажите, что все углы ромба прямые, т.е. он является прямоугольником, а значит, и квадратом.

7.241. $\angle ANB = 110°$.

7.247. Если заданные точки не лежат на одной прямой, то задача имеет три решения (рис. 7.72). Если заданные точки A, B и C лежат на одной прямой, то задача имеет решение в том случае, когда одна из этих точек, например точка B, принадлежит отрезку AC и делит его пополам. В остальных случаях задача не имеет решения.

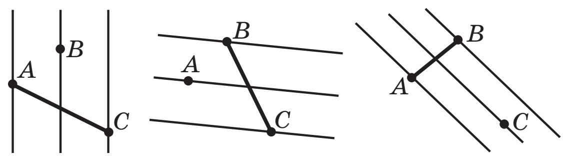


Рис. 7.72

7.248. 60° и 120°.

7.249. Оси симметрии этих ромбов совпадают.

7.250. Углы равны 60° и 120°. Некоторые возможные варианты укладки паркета показаны на рис. 7.73, *а—в*.

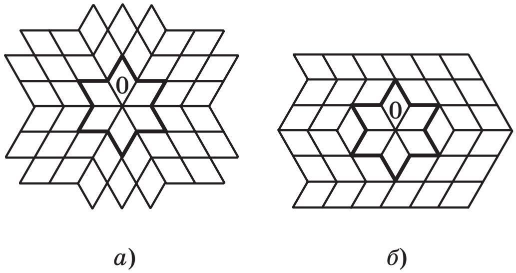


Рис. 7.73

7.251. На рис. 7.74, *а*, *б* показано, как из частей равнобедренного треугольника можно сложить ромб.

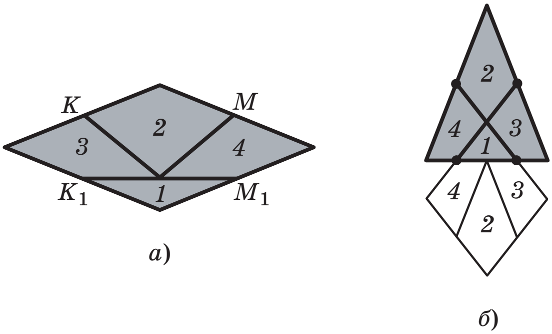


Рис. 7.74

27. Трапеция

7.256. Две параллельные стороны.

7.257. 180°.

7.258. 360°.

7.259. Две диагонали.

7.260. а) Нет; б) нет.

7.261. а, б) Да; в) нет.

7.262. Да.

7.264. 112°, 106°.

7.265. 40°, 140°, 80°, 100°.

7.266. а) Нет; б) да.

7.267. Докажите, что четырехугольник с тремя прямыми углами — прямоугольник.

7.272. Эти треугольники симметричны относительно оси симметрии равнобокой трапеции.

7.276. Пусть MN — прямая, проведенная через середину отрезка AD перпендикулярна этому отрезку: точка M принадлежит отрезку AD, а точка N — BC (рис. 7.75). Для доказательства того, что прямая MN — ось симметрии трапеции $ABCD$, достаточно доказать, что точки B и C симметричны относительно этой прямой. Так как точки A и D симметричны относительно прямой MN и $\angle A = \angle D$, то при симметрии относительно прямой MN луч DC перейдет в луч AB; так как $MN \perp BC$, то луч NC перейдет в луч NB и точка C перейдет в точку B. Таким образом, точки B и C симметричны относительно прямой MN, следовательно, прямая MN — ось симметрии трапеции $ABCD$.

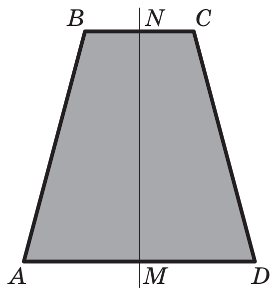


Рис. 7.75

7.288. Треугольник AKD равнобедренный, так как $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 7.76). Проведем через вершину K прямую m, перпендикулярную основанию AD (она будет перпендикулярна и основанию BC): прямая AD пересекает прямую m в точке M, $AM = MD$, так как высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является и его медианой. Прямая m — ось симметрии треугольника AKD. Точки B и C симметричны относительно прямой m (при осевой симметрии луч AK перейдет в луч DK, так как $AM = DM$ и $\angle 1 = \angle 2$. Точка B перейдет в точку C, так как $AB = DC$. Следовательно, отрезки AC и DB симметричны и точка их пересечения принадлежит прямой KM.

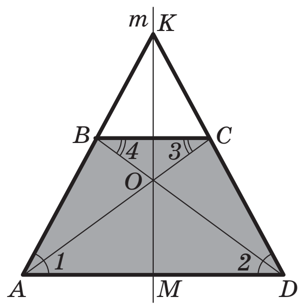


Рис. 7.76

7.289. 20 см.

7.290. 10 см и 34 см.

7.291. 132 см.

7.292. 60°, 120°.

7.293. 11,5 см.
7.294. 42 см.
7.295. 28 см.

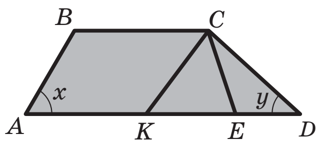


Рис. 7.77

7.296. $\frac{a-b}{2}$. Длина искомого отрезка равны длине медианы прямоугольного треугольника KCD, $\angle KCD = 90°$ (рис. 7.77).

7.297. $\frac{a-b}{2}$.

7.298. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. K и M — середины AB и CD. Пусть $KM = \frac{1}{2}(BC + AD)$. Если P — середина AC, то $KP = \frac{1}{2}BC$, $PM = \frac{1}{2}AD$. Значит, $KP + PM = KM$, т.е. P лежит на KM. И т. д.

7.299. $\frac{c-a}{b-c}$.

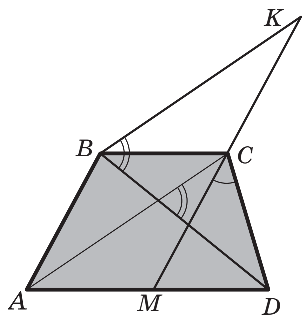


Рис. 7.78

7.300. Рассмотрим трапецию $ABCD$ (рис. 7.78, AD и BC — основания). Пусть M на AD такая точка, что $CM \parallel AB$. Треугольник MCD можем построить (знаем MC, CD и $\angle MCD$). Продолжим MC за точку C и возьмем K так, что $CK = MC$. Тогда $ABKC$ — параллелограмм. Угол KBD известен (он равен углу между диагоналями, либо дополняет его до 180°). Теперь можем построить точку B как точку пересечения прямой, параллельной MD, и дуги окружности, проходящей через D и K, соответствующей заданному углу. Из условия следует, что около данной трапеции можно описать окружность.

7.302. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, P — точка пересечения прямых AB и CD, Q — точка пересечения диагоналей AC и BD, M и N — середины AD и BC. Из параллельности AD и BC следует, что точки P, M и N лежат на одной прямой и точки Q, M и N лежат на одной прямой, т.е. все четыре точки Q, P, M и N лежат на одной прямой.

7.303. Заметим сначала, что если по одной из двух параллельных прямых перемещается отрезок постоянной длины KM, а по другой отрезок PL, то точка пересечения прямых PK и LM описывает прямую, параллельную данным. Нужное построение следует теперь из задачи **7.302** (см. рис. 7.79: числа указывают порядок проведения прямых).

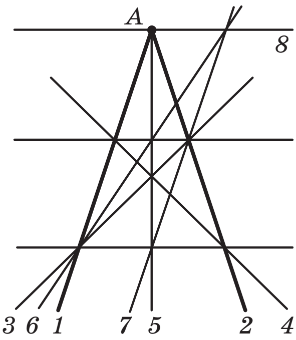


Рис. 7.79

7.304. Обозначим через L точку пересечения PM и AD (рис. 7.80). Имеем

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AL}{LD} = \frac{AL}{NB} \cdot \frac{NB}{LD} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{MB}{MD} = \frac{AD}{BC} \cdot \frac{KB}{AD} = \frac{KB}{BC} = \lambda.$$

Отсюда следует, что $\frac{BN}{BC} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$. Например, если $\lambda = \frac{1}{2}$ (K — середина BC; см. задачу **7.302**), то $\frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{1}{3}$. И вообще, если $\lambda = \frac{1}{n}$, то $\frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{1}{n+1}$.

7.305. $\frac{2ab}{a+b}$.

7.306. См. рис. 7.81 (на этом рисунке квадрат разделен на 8 частей).

7.308. 20 см.

7.312. Так как точки K и E лежат на пересечении биссектрис, то они равноудалены от прямых AD и BC и, следовательно, MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 7.82).

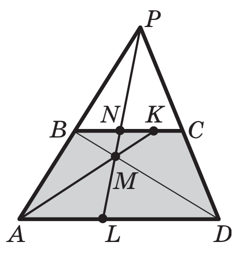


Рис. 7.80

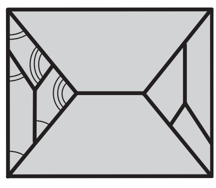


Рис. 7.81

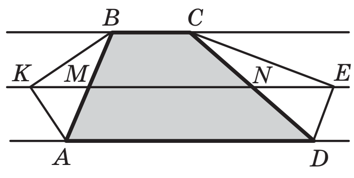


Рис. 7.82

Треугольники ABK и DCE прямоугольные, откуда $AB = 2KM$ и $CD = 2EN$. Периметр трапеции

$$P_{ABCD} = AD + BC + AB + CD =$$
$$= 2MN + 2KM + 2EN = 2 \cdot 2a = 4a.$$

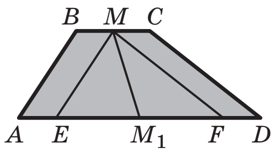


Рис. 7.83

7.313. Пусть M и M_1 — середины оснований BC и AD трапеции (рис. 7.83). Проведя $ME \parallel AB$ и $MF \parallel CD$, получим $M_1E = M_1F = \frac{1}{2}(AD - BC)$. Так как по условию и $MM_1 = \frac{1}{2}(AD - BC)$, то $EM_1 = M_1F = M_1M$ и поэтому $\angle EMF = 90°$ (опирается на диаметр окружности, описанной около ΔEMF). Следовательно, искомый угол тоже равен $90°$.

7.314. Через точку B проведем прямую, параллельную диагонали AC, до пересечения с прямой AD в точке M (рис. 7.84). Тогда по теореме о свойстве катета прямоугольного треугольника имеем

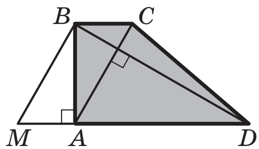


Рис. 7.84

$$BD = \sqrt{DM \cdot AD}, \ BM = \sqrt{DM \cdot AM}.$$

Учитывая, что $AC = BM$, $AM = BC$, находим

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BD}{BM} = \frac{\sqrt{DM \cdot AD}}{\sqrt{DM \cdot AM}} = \sqrt{\frac{AD}{BC}} = \sqrt{k}.$$

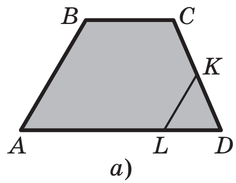
7.315. Пусть h_1 и h_2 — расстояния от точки пересечения диагоналей до оснований трапеции, а x_1 и x_2 — длины отрезков, на которые делит точка пересечения диагоналей искомый отрезок. Тогда из подобия треугольников следует, что

$$\frac{x_1}{b} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \ \frac{x_2}{b} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \ \frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}.$$

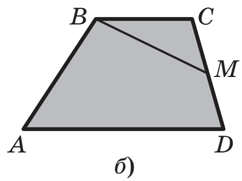
Отсюда находим $x_1 + x_2 = \frac{2ab}{a + b}$.

7.318. 1) По отрезку KL: $KL \parallel AB$, $CK = KD$ (рис. 7.85, *а*);

2) по отрезку BM: $DM = MC$ (рис. 7.85, *б*).



а)



б)

Рис. 7.85

Тема 8

МНОГОУГОЛЬНИКИ

28. Понятие многоугольника

8.1. Выпуклые многоугольники: треугольник, квадрат, прямоугольник, правильный пятиугольник, правильный шестиугольник и т. д.

8.2. а) 1; б) 2; в) 3; г) $n - 3$.

8.3. а) 2; б) 5; в) 9; г) $\frac{(n-3)n}{2}$.

8.4. Точки D и K принадлежат одной области в случаях б) и в); точки E и T принадлежат одной области в случае а).

8.8. Треугольник всегда является выпуклой фигурой.

8.9. Четырехугольник может быть как выпуклым (рис. 8.31, *а*), так и невыпуклым (рис. 8.31, *б*).

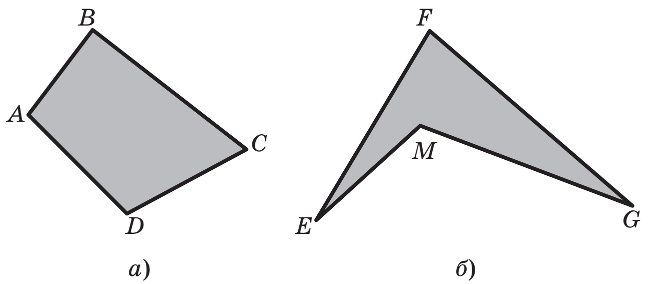


Рис. 8.31

8.10. Любой многоугольник с числом сторон, большим, чем 3, имеет диагонали.

8.11. Неверно (рис. 8.32).

8.13. Угол и четырехугольник могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми фигурами; луч, отрезок, полуплоскость, плоскость, треугольник — всегда выпуклые фигуры.

8.14. а) 11 треугольников: a, c, d, e, f, af, fe, ed, dc, be, fed. б) Равнобедренные треугольники ABK и KLM, квадрат $ABLM$, прямоугольники $ABCD$ и $LCDM$, пятиугольники $BCDMK$ и $ADCLK$, шестиугольники $ABCDMK$, $BADCLK$ и др. (см. рис. 8.6).

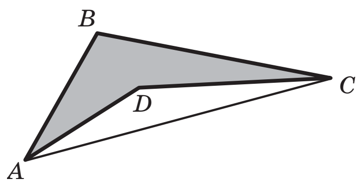


Рис. 8.32

8.15. а) Четырехугольник $ABCD$; б) четырехугольник $ACDE$; в, г) пятиугольник $ABCDE$.

8.17. а) 3; б) $n - 2$.

8.22. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — данный многоугольник, a — длина его стороны, S — площадь и h_1, h_2 и h_n — расстояния от точки M до прямых A_1A_2, A_2A_4, ..., A_nA_i. По условию $A_1A_2 \dots A_n$ — выпуклый многоугольник, поэтому он является объединением треугольников MA_1A_2, MA_2A_3, ..., MA_nA_1, не имеющих общих внутренних точек. По известному свойству площадей

$$S = S_{MA_1A_2} + S_{MA_2A_3} + \dots + S_{MA_nA_1},$$

т.е.

$$S = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \dots + \frac{1}{2}ah_n, \; S = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + \dots + h_n),$$

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n = \frac{2S}{a}.$$

Заметим, что S и a не зависят от выбора точки M.

8.23. Треугольники, на которые данная диагональ разбивает четырехугольник, легко построить.

8.25. Вспомним, что число диагоналей n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Составим уравнение, которому должно удовлетворять число сторон искомого многоугольника. Решая это уравнение, получим ответ: а) $n = 7$; б) $n = 4$; в) такого многоугольника не существует.

8.26. Предварительно полезно сформулировать и доказать известную теорему: *равным проекциям соответствуют равные наклонные*. Для доказательства достаточно заметить, что если точка O — проекция точки A на данную прямую p и $OM = ON$, где M, $N \in p$, то точки M и N симметричны относительно прямой OA. С помощью этого предложения, пользуясь условием, последовательно получаем

$$AB = BC,\ CD = DA,\ DA = AB,$$

т.е. все стороны данного четырехугольника равны и, значит, этот четырехугольник — ромб.

8.30. а) 30 треугольников; б) 32 треугольника; в) 88 треугольников.

8.32. а) Многоугольник, число диагоналей которого равно числу его сторон, существует. б) Число сторон многоугольника больше 5.

8.33. а) Многоугольник со 103 сторонами имеет 5150 диагоналей. б) Многоугольник с n сторонами имеет $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей.

8.34. В 11-угольнике образуются 9 треугольников, а в 35-угольнике — 33 треугольника.

8.35. Во внутренней области четырехугольника, пятиугольника или вообще любого n-угольника берется точка, которая последовательно соединяется с вершинами данного многоугольника. В результате многоугольник разделяется на n треугольников.

Для выпуклых фигур можно указать еще один способ разбиения его на треугольники. Известно, что любой выпуклый 4-угольник делится своими диагоналями на 4 треугольника. Если многоугольник имеет $n > 4$ вершин, то необходимо сначала выделить любые 4 последовательные вершины, образующие некий 4-угольник, и разделить его на треугольники указанным образом. Затем, взяв одну из вершин данного 4-угольника, прилегающую к оставшейся внутренней части многоугольника, соединить ее диагональными отрезками с оставшимися незарезервированными вершинами. В результате выпуклый n-угольник разделится на n треугольников.

29. Углы многоугольника

8.49. В многоугольнике число сторон равно числу углов. Пусть n — число сторон или углов в многоугольнике. Находим:

1) $180°(n-2) = 144°n$, $n = 10$; 2) $180°(n-2) = 150°n$, $n = 12$;
3) $180°(n-2) = 170°n$, $n = 36$; 4) $180°(n-2) = 171°n$, $n = 40$.

8.50. 1) $180°(n-2) = 1080°$, $n = 8$; 2) $180°(n-2) = 1620°$, $n = 11$; 3) $180°(n-2) = 3960°$, $n = 24$; 4) $180°(n-2) = 1800°$, $n = 12$; 5) $180°(n-2) = 4140°$, $n = 25$.

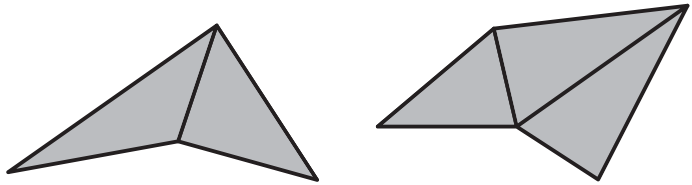
8.51. Ответ на вопрос зависит от существования целого решения уравнения $180°(n-2) = \alpha$, где α — сумма углов многоугольника, n — число сторон. Получим: 1) $180°(n-2) = 9180°$, $n = 53$; 2) $180°(n-2) = 3600°$, $n = 22$; 3) $180°(n-2) = 2040°$, $n = 13^1/_3$; 4) $180°(n-2) = 990°$, $n = 7{,}5$; 5) $180°(n-2) = 1620°$, $n = 11$. Вывод: сумма углов многоугольника может быть равной 9180°, 3600°, 1620°.

8.54. Может существовать многоугольник, у которого сумма внутренних углов равна 540°, 1800°, 1080°.

8.55. Может существовать многоугольник с равными углами, у которого один угол равен 120° (6-угольник) или 108° (5-угольник).

8.56. а) $n = 3$, $180°(3 - 2) = 180°$ — сумма всех углов многоугольника; $180° : 3 = 60°$ — каждый угол многоугольника с тремя сторонами; б) $n = 5$; $180°(5 - 2) = 1440°$ — сумма всех углов многоугольника; в) $n = 10$; $1440° : 10 = 144°$ — каждый угол многоугольника с 10 сторонами; г) $n = 12$; $180°(12 - 2) = 180°$ — сумма всех углов многоугольника; $1800° : 12 = 150°$ — каждый угол многоугольника с 12 сторонами.

8.59. Разбейте заданный многоугольник на треугольники (рис. 8.33): а) $4d$ или $360°$; б) $6d$ или $540°$.



а) *б)*

Рис. 8.33

8.63. $130°$.

8.64. $\angle M = \angle P = 30°$, $\angle Q = 120°$.

8.65. Сначала надо доказать, что этот внешний угол равен $90°$. Составляем уравнение: $180° (n - 2) = 2250° - x$, где x — величина заданного внешнего угла, откуда $18n = 261° - 0{,}1x$, $x = 90°$ и $n = 14$.

8.66. 5.

30. Правильные многоугольники

8.73. 10 см.

8.79. б) 9; в) 10; г) 18.

8.83. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$.

Тема 9

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

31. Определения окружности и круга

9.3. 1) Нет; 2) да.

9.4. а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) нет.

9.5. 10 см.

9.6. а) $A \notin$ окр. $(O; r)$; б) $D \in$ окр. $(O; r)$; в) $L \notin$ окр. $(O; r)$.

9.12. а) Открытый круг, т.е. кр.(O; r) без точек окр. (O; r); б) все точки плоскости без точек, принадлежащих кр. (O; r); в) все точки плоскости без точек, принадлежащих открытому кр. (O; r); г) кр. (O; r) без своего центра.

9.13. При правильной игре всегда выигрывает тот, кто делает первый ход. Задача сводится к разбиению 10-угольника на треугольники. В любом варианте игры игроки сделают по 5 ходов (10 отрезков — стороны 10-угольника). Остаются возможности внутреннего (диагонального) расположения отрезков. 10 точек зададут 8 треугольников: $8 \cdot 3 = 24$ стороны; 10 из них — это стороны многоугольника ($24 - 10 = 14$), каждая сторона принадлежит двум различным треугольникам ($14 : 2 = 7$), $10 + 7 = 17$ ходов. Выигрывает первый.

9.15. Идея задачи сводится к тому, что центр окружности (круга) есть точка пересечения его диаметра.

32. Взаимное расположение прямой и окружности. Взаимное расположение окружностей

9.18. 1. Неверно. 2. Верно.

9.19. а) Часть плоскости, расположенная внутри окружности; б) часть плоскости, расположенная вне окружности; в) часть плоскости, расположенная вне окружности, и сама окружность; г) часть плоскости, расположенная внутри окружности, и сама окружность.

9.20. а) Окружности имеют одну общую точку, т.е. касаются; б) окружности имеют две общие точки, т.е. пересекаются; в) окружности не имеют общих точек, т.е. не пересекаются; г) окружности касаются; д) окружности пересекаются; е) окружности пересекаются, причем каждая окружность проходит через центр второй окружности.

9.23. Окружности имеют две общие точки. Расстояние между их центрами равно радиусу каждой окружности.

9.24. а) Задача имеет решение, если эти окружности пересекаются или касаются (внутренним или внешним образом), т.е. когда $|a - b| < AB < a + b$.

9.25. а) Можно построить две такие окружности; б) в этом случае задача имеет одно решение; в) можно построить две такие окружности.

9.26. а) Можно построить бесконечное множество таких окружностей.

9.27. См. основное теоретическое содержание данного раздела.

9.28. а) Две точки A и B; б) отрезок AB; в) множество внутренних точек отрезка AB; г) лучи с началом в точках A и B, лежащие на прямой AB, находящиеся во внешней области относительно окр. $(O;\ r)$; д) те же лучи, что и в предыдущем случае, но без точек A и B (открытые лучи); е) прямая AB без двух точек A и B.

9.32. а) Объединение двух открытых кругов $(O_1;\ r_1)$ и $(O_2;\ r_2)$. б) Все точки плоскости, кроме точек, принадлежащих объединению кругов $(O_1;\ r_1)$ и $(O_2;\ r_2)$. в) Все точки плоскости, кроме точек отрезка O_1O_2.

9.33. а) $O_1O_2 = r_1 + r_2$ (рис. 9.4, *а*), $O_1O_2 = r_1 - r_2$ (рис. 9.4, *б*); б) $O_1O_2 < r_1 + r_2$ (рис. 9.4, *в*), $O_1O_2 \leqslant r_1$ (рис. 9.4, *г*); в) $O_1O_2 > r_1 + r_2$ (рис. 9.4, *д*), $O_1O_2 < r_1 - r_2$ (рис. 9.4, *е*).

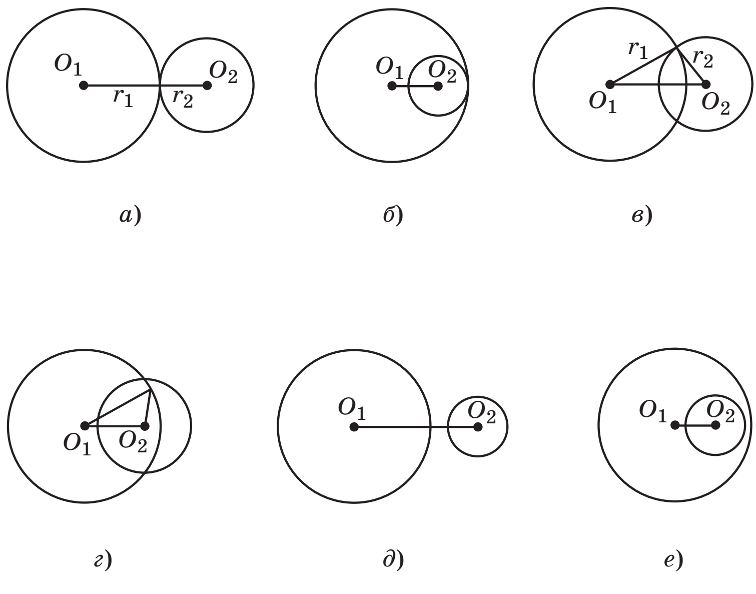


Рис. 9.4

9.34. Расстояние от пункта A до пункта C может быть равным 8 км (рис. 9.5, *а*). Это наименьшее из возможных значений: $BC = 12$ км, $AB = 20$ км, $AC = AB - BC = 8$ км. Это расстояние может быть равным 32 км (рис. 9.5, *б*). Это наибольшее из возможных значений $AC = AB + BC = 32$ км. В общем же случае $8 \leqslant AC \leqslant 32$, что следует из неравенства треугольника $AB + BC \geqslant AC$ (рис. 9.5, *в*).

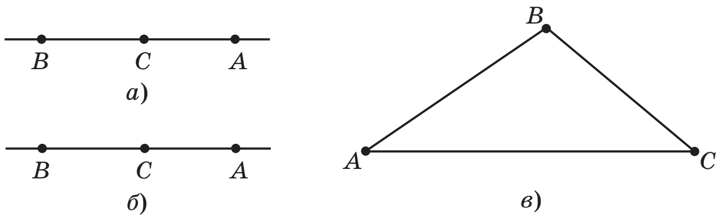


Рис. 9.5

9.35. а) $AB = 9$ км, $AC = CB = BC_1 = C_1A = 10$ км, $AK = K_1B =$ $= 1$ км (рис. 9.6, *а*); б) $K_1B = AK = 10$ км (рис. 9.6, *б*).

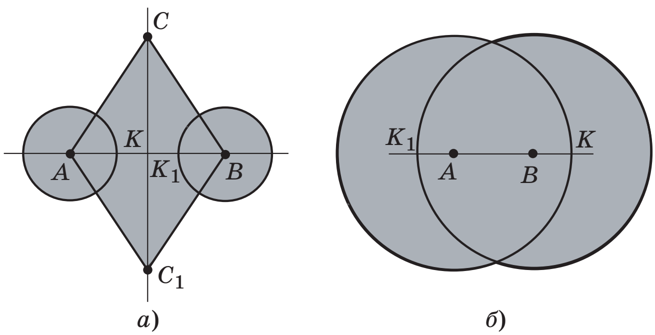


Рис. 9.6

33. Касательные к окружности

9.48. Центр искомой окружности лежит на перпендикуляре к данной прямой, проходящем через данную точку, и находится от данной точки на расстоянии, равном данному радиусу. Задача имеет два решения — две окружности, симметричные друг другу относительно данной прямой.

9.49. Проведем радиус, соединяющий центр с данной точкой окружности. Построим перпендикуляр к радиусу через точку, лежащую на окружности.

9.50. 1. Построим биссектрису угла и через любую ее точку проведем перпендикуляры к сторонам угла. Расстояние от этой точки до точки пересечения перпендикуляров со сторонами и есть радиус искомой окружности. 2. Проведем перпендикуляр через данную точку до пересечения с биссектрисой.

9.52. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная линии центров, — искомая. Доказательство следует из свойств касательной.

9.53. Следует воспользоваться свойствами биссектрисы углов треугольника.

9.59. Так как искомая окр. $(O_1; R)$ касается данной прямой l, точка O_1 удалена от l на расстояние R и, значит, принадлежит одной из двух прямых l_1 и l_2, параллельных l и отстоящих от нее на расстояние R. Кроме того, поскольку окр. $(O; r)$ касается окр. $(O_1; R)$, точка O_1 удалена от точки O на расстояние $R + r$ (случай внешнего касания) или $|R - r|$ (случай внутреннего касания). Значит, точка O_1 должна принадлежать окр. $(O; R + r)$ или окр. $(O; |R - r|)$. Остается найти точки пересечения этих окружностей с l_1 и l_2.

9.60. Искомая окружность может касаться одной из данных окружностей внутренним образом, а другой — внешним, в этом случае центр O — точка прямой O_1O_2, удаленная от точки M касания данных окружностей на расстояние R. Существуют также окружности, касающиеся обеих данных окружностей внешним образом (точка O удалена от O_1 на расстояние $R + r_1$, а от точки O_2 — на расстояние $R + r_2$ или, если $R = r_1 + r_2$, то O — середина отрезка M_1M_2, где M_1 и M_2 — точки данных окружностей, диаметрально противоположные M).

9.61. а) Искомая прямая p — касательная к окр. (A, l), проведенная из точки M; б) p — касательная к окр. $(O, R + l)$, проходящая через M; здесь O — центр данной окружности, а R — ее радиус.

9.65 Центр окружности лежит на перпендикуляре к данной прямой, проходящей через данную точку, и находится от данной точки на расстоянии, равном данному радиусу. Задача имеет два решения — две окружности, симметричные друг другу относительно данной прямой.

9.66. Центр искомой окружности является точкой пересечения биссектрисы данного угла и перпендикуляра, проведенного через данную точку к той стороне угла, на которой лежит эта точка.

9.67. Пусть даны прямая a и точка M ($M \notin a$). Центр искомой окружности является точкой пересечения окр. (M; r) и прямой b, параллельной прямой a, лежащей в той же полуплоскости с границей a, что и точка M, на расстоянии r от прямой a. Задача может иметь два решения, одно или не иметь ни одного решения.

9.68. Пусть $LB = MB = x$, $CL = CK = r$, $AK = AM = y$ (рис. 9.7). Вычислим разность суммы катетов и гипотенузы:

$$x + r + r + y - x - y = 2r,$$

что и требовалось доказать.

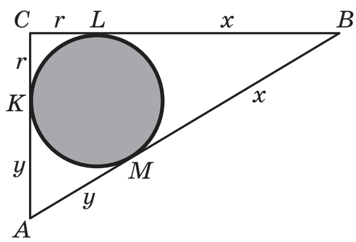


Рис. 9.7

9.69. 16 см^2.

9.70. Предположим, что четырехугольник $KLMN$ — прямоугольник. Для решения нужно доказать, что $KL = KN$ (рис. 9.8). Обозначим катеты и гипотенузу данного прямоугольного p-треугольника через a, b и c соответственно. Тогда

$$KL = \frac{c}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} = 0{,}5(a + b + c),$$

$$KN = MN = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = 0{,}5(a + b + c),$$

т.е. $KL = KN$ и четырехугольник $KLMN$ — квадрат.

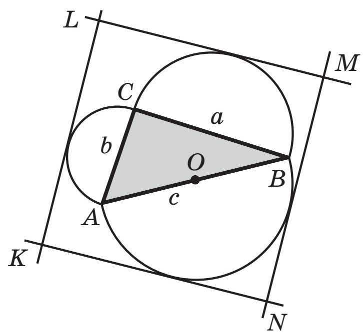


Рис. 9.8

9.71. Обозначим данную длину отрезка касательной через a, радиус данной окружности — через r. Построим прямоугольный треугольник по катетам a и r. Пусть его гипотенуза будет c. Искомая точка X находится на расстоянии c от центра данной окружности и лежит на данной прямой. Задача может иметь два решения, одно или не иметь ни одного решения.

9.72. Пусть ABC — данный треугольник, $\angle ACB$ — прямой, O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов R и r соответственно; D и E — точки касаний окружностей катета CA (рис. 9.9).

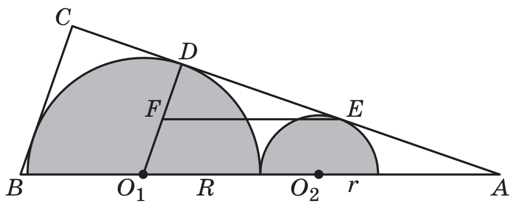


Рис. 9.9

Проведем $EF \parallel AB$ и обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда из $\Delta\ FDE$ имеем

$$\sin\alpha = \frac{R-r}{R+r}. \qquad (1)$$

Заметив, что $CD = R$, и обозначив $AC = \alpha$, из ΔODA получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{b-R}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$1 + \left(\frac{b-R}{R}\right)^2 = \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2, \qquad (3)$$

откуда, решая уравнение (3) относительно b, получим

$$b = r + \frac{2R}{R-r}\sqrt{Rr}.$$

Теперь можно найти другой катет и гипотенузу.

34. Расстояние от центра окружности до ее хорды

9.73. Надо провести к хорде перпендикулярный диаметр.

9.74. Самую большую длину имеет диаметр, проходящий через данную точку. Наименьшую длину имеет хорда, перпендикулярная диаметру, проходящему через данную точку.

9.75 Соединим центр окружности с шипами хорд и найдем высоту образовавшегося равнобедренного треугольника.

9.77. Расстояние от центра круга до хорды выразите по теореме Пифагора через половину длины хорды и радиус.

9.78. $\sqrt{3}\,r$.

9.81. Прежде всего заметим, что данная точка A может; 1) совпадать с центром окружности — точкой O; 2) лежать на окружности; 3) лежать внутри окружности; 4) лежать вне окружности. В четвертом случае задача не имеет решения. В первом случае имеет бесконечное множество решений — любой диаметр окружности. Во втором случае такой хорды не существует. В третьем случае построим прямую OA и к ней проведем перпендикуляр через точку A. Обозначим через B и C точки пересечения этого перпендикуляра с данной окружностью. Хорда BC искомая (рис. 9.10).

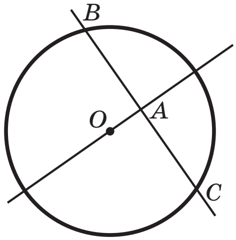


Рис. 9.10

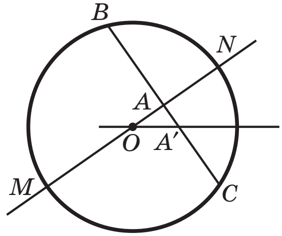


Рис. 9.11

9.82. Допустим, что прямая OA не перпендикулярна хорда BC. Тогда перпендикуляр к прямой BC, проходящий через точку O, пересекает прямую BC в точке $A' \neq A$ и $BA' = A'C$ (рис. 9.11). Получаем, что у отрезка BC две середины — это противоречие.

9.84. Для любой хорды AB окружности мы имеем $AB \leqslant AO + BO = 2R$, где O — центр окружности.

9.87. Точка пересечения диагоналей квадрата равноудалена от его вершин. Поэтому центр искомой окружности лежит в точке пересечения диагоналей квадрата.

9.88. 8 см. Обозначим данные хорды через AB и AC. Тогда отрезок BC будет диаметром данной окружности. Отрезок перпендикуляра, проведенного через центр окружности к хорде AB, будет средней линией треугольника ABC.

9.91. 4 см.

9.92. 12 см.

35. Части окружности и круга

9.101. а) Две; б) двенадцать.

9.102. Пусть даны окр. $(O;\ r)$ и точка A, $A \neq O$. Постройте прямую OA и диаметр MN, перпендикулярный прямой OA. Окр. $(A;\ AM)$ искомая.

9.103. Воспользуйтесь осевой симметрией.

9.104. Через данную точку проведите перпендикуляр к другой стороне угла и от основания перпендикуляра отложите отрезки на этой стороне угла, длина каждого из которых равна половине заданной длины. Если данный угол острый, то задача либо имеет одно решение, либо не имеет решения; если угол прямой или тупой, задача не имеет решения.

9.107. Пусть c — окр. $(O;\ r)$, а c_1 — окр. $(O;\ OA)$. Проведем прямую AB так, чтобы $AB = d$ (рис. 9.12). Точки пересечения прямой AB с окружностью c, точки M и N определят искомую хорду.

9.108. См. рис. 9.13. Расстояние от центра до хорды.

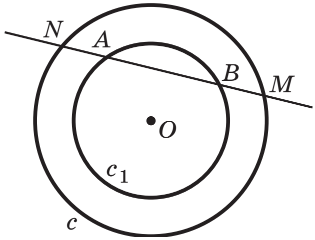


Рис. 9.12

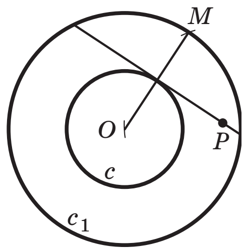


Рис. 9.13

Тема 10

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

36. Вписанный угол

10.6. $80°$ или $100°$.

10.7. $40°$, $60°$, $80°$.

10.8. $82°30'$, $277°30'$.

10.9. а) $102°$; б) $70°$; в) $34°$; г) $59°$; д) $51°$.

10.10. $\cup AB = \cup DC = \cup CB = \cup AD$, следовательно, равны и углы *1*, *2* и *3* (рис. 10.46), как вписанные, опирающиеся на дуги, угловые величины которых равны.

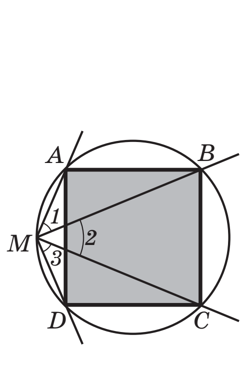


Рис. 10.46

10.42. Так как $AB = BC$, то $\cup AB = \cup BC$. Обозначим угловую величину дуги AB через α, тогда $\angle 1 = \alpha$ (рис. 10.47), так как $\angle 1$ — центральный, опирающийся на дугу, угловая величина которой равна α; $\angle 2 = \alpha$, так как $\angle 2$ — вписанный угол, опирающийся на дугу, угловая величина которой равна 2α и $OB \parallel CD$.

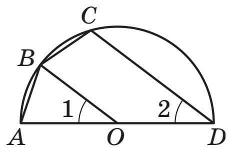


Рис. 10.47

10.43. Через точку A проводим перпендикуляр к заданной прямой. Пусть он пересечет окружность в точке K (рис. 10.48). Искомый отрезок диаметра лежит на луче KO.

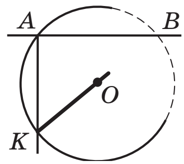


Рис. 10.48

10.45. 36°, 36°, 108°.

10.46. Каждый из углов треугольника KLM равен полусумме двух из углов треугольника ABC.

10.47. Рассмотрите окружность, описанную около данного треугольника.

10.50. Пусть отрезки AC и BD пересекаются в точке P. $\angle ABD = \angle ACD$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, но $\angle ACD \cong \angle KBD$, как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами, т.е. $\angle ABD = \angle KBD$.

10.51. 1. Центр O окружности c_2 лежит на диаметре AB окружности c_1. Радиус OK, проведенный в точку касания, перпендикулярен BD. Угол ADB прямой, так как опирается на диаметр, поэтому отрезки AD и OK параллельны, а углы DAK и AKO равны как накрест лежащие. В равнобедренном треугольнике AOK углы AKO и KAO равны, следовательно, AK делит угол DAB пополам.

2. Точка P лежит на пересечении биссектрис треугольника ABC. Следовательно, из треугольника ABP получим следующие соотношения:

$$\angle APB = 180° - \left(\frac{1}{2}\angle CAB + \frac{1}{2}\angle CBA\right) =$$

$$= 180° - \frac{1}{2}\left(180° - \angle ACB\right) = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Величина угла ACB не меняется, поэтому величина угла APB также постоянна. В таком случае точка P целиком пробегает дугу окружности, проходящей через точки A и P.

10.78. Треугольник ADE равнобедренный (рис. 10.49), KA — биссектриса его угла A. Пусть прямая AK пересекает дугу окружности c_1, лежащую внутри треугольника ADE в точке O_1. Тогда $\cup DO_1 = \cup O_1E$. Поэтому $\angle ADO_1 = \angle O_1DE$. Следовательно, O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник DAE.

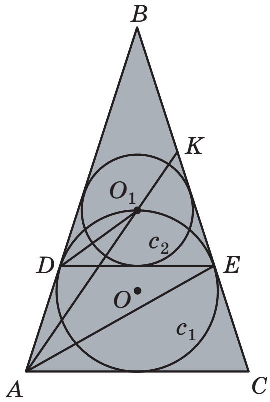


Рис. 10.49

10.79. Продлите отрезок AO до пересечения с окружностью в точке D и заметьте, что $\angle ADC = \angle ABC$ (рис. 10.50).

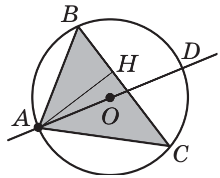


Рис. 10.50

10.80. Пусть $AB \geqslant BC$, K, L, N — точки касания диагоналей с окружностями, вписанными в треугольники ABC, ACD, ABD, BCD соответственно; O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Имеем

$$OK = AK - AO =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + AC - BC)\ \frac{AC}{2} = \frac{1}{2}(AB - BC).$$

Аналогично $OL = OM = ON = OK = \frac{1}{2}(AB - BC)$.

Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — прямоугольник.

10.81. Малые треугольники подобны большому, следовательно, $\frac{r_1}{r} = \frac{p_1}{p}$, $\frac{r_2}{r} = \frac{p_2}{p}$, $\frac{r_3}{r} = \frac{p_3}{p}$, откуда $rp_1 = r_1p$, $rp_2 = r_2p$, $rp_3 = r_3p$ (p, p_1, p_2, p_3 — периметры соответствующих треугольников). Складывая почленно три последних равенства, получим $r(p_1 + p_2 + p_3) = (r_1 + r_2 + r_3)p$, но $p_1 + p_2 + p_3 = p$. Следовательно, $r = r_1 + r_2 + r_3$.

10.82. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 10.51), a, b, c — длины его сторон, p — полупериметр; имеем

$$\angle AOB = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 90^\circ + \frac{\angle C}{2} \text{ и}$$

$$\angle AMX = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}.$$

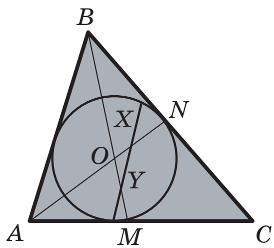


Рис. 10.51

Так как $\angle MAX = \angle BAX$, то $\angle AXM = \frac{\angle B}{2}$. По теореме синусов из треугольника AMX имеем $\frac{MX}{AM} = \frac{\sin\frac{\angle A}{2}}{\sin\frac{\angle B}{2}}$, откуда после несложных преобразований получим $MX = a \sin \frac{\angle C}{2}$. Ясно, что $NY = b \sin \frac{\angle C}{2}$. Далее,

$$XY = MX + NY - MN =$$
$$= (a + b) \sin \frac{\angle C}{2} - 2(p - c) \sin \frac{\angle C}{2} = c \sin \frac{\angle C}{2}.$$

Следовательно,

$$MX : NY : XY = a : b : c.$$

10.83. Обозначим длины сторон треугольника, противолежащих вершинам A, B, C, через a, b, c соответственно. Пусть $b > c$ ($b \neq c$, так как иначе прямые MO и AH не пересекались бы, а совпадали). Проведем перпендикуляр $OP = r$ на прямую BC. Тогда

$$MC = \frac{a}{2},\ PC = \frac{a+b-c}{2},\ HC = \frac{a^2+b^2-c^2}{a(b-c)},$$

$$\frac{EH}{OP} = \frac{HM}{PM} = \frac{HC-MC}{PC-MC} = \frac{2HO-a}{b-c} = \frac{a^2+b^2-c^2-a^2}{a(b-c)} = \frac{b+c}{a}$$

и т. д.

10.84. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC, $2p$ — его периметр, S — площадь, AH — высота, проведенная из вершины A (рис. 10.52). Из очевидных равенств

$$2AN + 2BK + 2KC =$$
$$= 2p \text{ и } AN + BK = c$$

получаем, что $KC = p - c$.

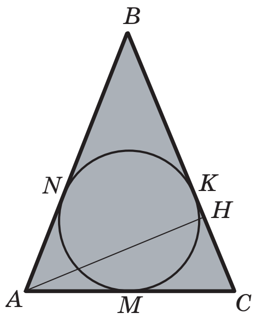


Рис. 10.52

Далее имеем

$$\operatorname{ctg}\angle AKC = \frac{KC - HC}{AH} =$$

$$= \frac{|p-c| - \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}}{AH} = \frac{a(a+b-c)-a^2-b^2+c^2}{2a|AH|} =$$

$$= \frac{a(b-c)-(b-c)(b+c)}{4S} = \frac{(c-b)(b+c-a)}{4S}. \qquad (1)$$

Аналогично

$$\operatorname{ctg}\angle BMA = \frac{(a-c)(a+c-b)}{4S}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\angle CNB = \frac{(b-a)(a+b-c)}{4S}. \qquad (3)$$

Из полученных трех равенств **(1)** — **(3)** можно вывести доказываемое равенство.

10.86. Обозначим $\angle ACM = x$, $\angle BCM = y$. Из треугольников ACM и BCM имеем $\dfrac{AM}{b} = \dfrac{\sin x}{\sin\angle AMC}$, $\dfrac{BM}{a} = \dfrac{\sin y}{\sin\angle BMC}$. Поэтому $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin y}$. Из треугольников ACS и BCS имеем

$$\frac{\sin x}{AS} = \frac{\sin(\angle A+\angle C)}{CS},$$

$$\frac{\sin y}{BS} = \frac{\sin(\angle B+\angle C)}{CS}.$$

Отсюда (так как $AS = BS$) $\dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{\sin(\angle A+\angle C)}{\sin(\angle B+\angle C)} = \dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{a}$.

Следовательно,

$$\frac{AM}{BM} = \frac{b^2}{a^2}.$$

10.87. Пусть r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности, $2a$ — основание треугольника, l — боковая сторона. Тогда

$$\frac{r}{a} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ \frac{a}{l} = \cos\alpha,$$

$$R = \frac{l}{2\sin\alpha},\ \frac{r}{R} = \sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

38. Четырехугольники, вписанные в окружность

10.103. Так как $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180°$ (рис. 10.53), то легко получить ответ.

10.105. а) Всегда; б) если $\angle C = 110°$, $\angle D = 78°$.

10.107. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. В четырехугольнике $KNML$ (рис. 10.54):

$$\angle L = 180° - 0{,}5(\angle B + \angle C),\ \angle N = 180° - 0{,}5(\angle A + \angle D),$$
$$\angle L + \angle N = 180°,$$

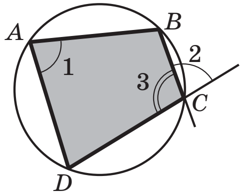


Рис. 10.53

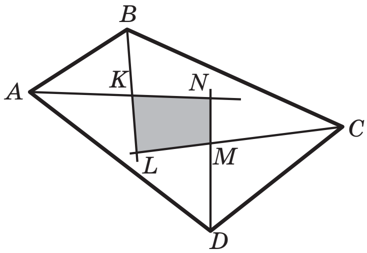


Рис. 10.54

следовательно, около четырехугольника $KNML$ можно описать окружность.

10.110. В четырехугольнике AB_1KC_1 $\angle C_1 = \angle B_1 = 90°$, так как BB_1 и CC_1, по условию, — высоты треугольника и, следовательно, $BB_1 \perp AC$ и $CC_1 \perp AB$. Таким образом, $\angle A + \angle K = 180°$. Следовательно, около четырехугольника AC_1KB_1 можно описать окружность.

10.113. Пусть R — радиус окружности, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BDA = x$, тогда диагональ $d = 2R \sin \alpha$, высота $h = d \sin x$, средняя линия трапеции равна $d \cos x$. Площадь трапеции $S = \dfrac{d^2}{2} \sin 2x$. Так как $x \leqslant \alpha$, то для $\alpha < 45°$ функция S достигает максимума при $x = \alpha$. Но в этом случае искомая трапеция вырождается в треугольник, и, строго говоря, трапеции с наибольшей площадью не существует. Для $x \geqslant 45°$ наибольшее значение площади будет при $x = 45°$. Построение очевидно.

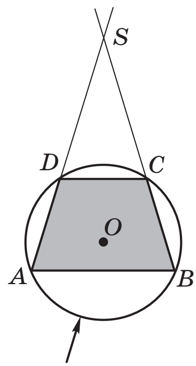


Рис. 10.55

10.114. Пусть O — центр окружности, описанной около данной трапеции $ABCD$. (рис. 10.55). Тогда $\angle SCO + \angle SDO = \angle SDO +$

$+ \angle OAD = 180°$. Следовательно, около четырехугольника $AOCS$ можно описать окружность. Аналогично доказывается, что окружность можно описать и около четырехугольника $DOBS$. Итак, окружности, проведенные через точки A, C, S и B, D, S, проходят также через O.

39. Четырехугольники, описанные около окружности

10.125. Пусть задаче удовлетворяет четырехугольник $ABCD$, у которого $\angle A = 45°$, $\angle B = \angle D = 90°$, $\angle C = 135°$. В задаче требуется вычислить углы AOB, BOC, COD, DOA, где O — центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$. Так как центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис углов, то

$$\angle AOB = \angle AOD = 112°30', \quad \angle BOC = COD = 67°30'.$$

10.127. Точка O лежит на пересечении биссектрис углов, прилежащих к боковой стороне, сумма этих углов равна 180°, следовательно, из точки O боковая сторона видна под углом 90°.

10.131. $\frac{9\sqrt{3}}{7}r^2$. Докажите, что $\angle DKE = \angle CKE$. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Выразив углы DKE и DAB через угол AMB, докажите, что $\angle DAB = \angle DKE$.

10.141. Можно показать, что боковые стороны при продолжении пересекутся под прямым углом. Пусть P — точка их пересечения (рис. 10.56), K — середина AB ($AB = 6$ см), O — центр искомой окружности, M — точка касания с CD ($CD = 8$ см). $PKOM$ — прямоугольник. Радиус искомой окружности есть $OM = KP$. Поскольку $BC = 10 = \frac{1}{2}AD$, то BC — средняя линия в треугольнике APD. Значит, $R = KP = KB + BP = 3 + 6 = 9$ (см).

10.142. Если r — радиус окружности, то $r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) = a$, $r\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) = b$.

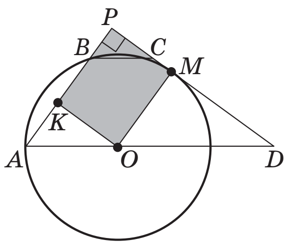


Рис. 10.56

Разделив второе равенство на первое, получим

$$\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}} \times$$

$$\times \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Вторая часть доказывается методом от противного. Построим окружность, касающуюся боковых сторон и одного основания. Предположим, что эта окружность не касается второго основания. Построим к этой окружности вторую касательную, параллельную основаниям. Получим две трапеции, для каждой из которых выполняется наше условие. Отсюда докажем, что они должны совпасть.

10.143. К каждой из образовавшихся трапеций применим критерий, сформулированный в предыдущей задаче.

10.144. $\frac{1}{\alpha}$.

40. Вписанные и описанные произвольные многоугольники

10.147. Продолжив стороны CB, CD, FA и FE данного шестиугольника (рис. 10.57), получим четырехугольник $PCQF$, который является ромбом, описанным около данной окружности; диагональ CF проходит через центр окружности. Диагонали AD и BE шестиугольника также проходят через центр окружности O (докажите!). Пусть OK и OL — высоты треугольников AOF и COD, тогда $OK = OL = R$. Так как $\Delta AOF \sim \Delta\, COD$ и их высоты, проведенные к соответственным сторонам, равны, то $\Delta\, AOF = \Delta\, COD$ и $AF = CD$. Аналогично доказывается равенство длин других противоположных сторон.

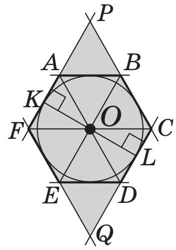


Рис. 10.57

10.149. Пусть $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CD \parallel C_1D_1$, $DE \parallel D_1E_1$. Требуется доказать, что $A_1E \parallel AE_1$. Действительно, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $\angle CDE = \angle C_1D_1E_1$ как углы с соответственно паралельными сторонами. Следовательно, $\angle AB_1C = \angle A_1BC_1$, откуда $\angle ABC = \angle A_1B_1C$. Аналогично докажем, что $\angle CDE = \angle C_1D_1E_1$. Складывая полученные равенства, имеем $\angle ACE = \angle A_1C_1E_1$. Проведя прямую EE_1, заметим, что $\angle A_1EE_1 = \angle AE_1E$. Из равенства величин этих углов следует паралельность сторон A_1E и AE_1.

10.150. Так как длина каждой стороны больше R, то число сторон многоугольника меньше шести. Покажем, что оно больше четырех. Известно, что среди вписанных в окружность треугольников наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник, площадь которого равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. Так как $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 < 2R^2$, то никакой вписанный треугольник не удовлетворяет условию задачи.

Среди выпуклых четырехугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат, площадь которого равна $2R^2$. Следовательно, ни один из вписанных четырехугольников также не удовлетворяет условию задачи. Нетрудно проверить, что, например, правильный пятиугольник удовлетворяет всем условиям задачи.

Глава II

ПЛОЩАДИ ФИГУР

Тема 11

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

41. Площади квадрата и прямоугольника

11.1. а) Увеличится в 4 раза; б) увеличится в 9 раз; г) уменьшится в 4 раза.

11.2. а) Увеличится в 4 раза; б) уменьшится в 9 раз; в) все останется на месте; г) увеличится в 2 раза.

11.3. а) Увеличится в 3 раза; б) уменьшится в 2 раза; в) увеличится в 16 раз; г) увеличится в $\frac{4}{3}$ раза; д) увеличится в 6 раз.

11.4. а) Увеличится в 2 раза; б) увеличится в 3 раза; в) увеличится в 4 раза.

11.5. Воспользуйтесь формулой нахождения площади прямоугольника.

11.7. Все грани куба — квадраты.

11.14. а) 87 см^2; б) 204 см^2; в) 5,6 м^2.

11.15. а) 18 см; б) 4 м; в) 4 км; г) 320 м.

11.16. 1) а) 25 000 м^2; б) 0,025 км^2; в) 2,5 га. 2) а) 0,24 км^2; б) 240 000 м^2; в) 2400 а. 3) а) 0,35 км^2; б) 3500 а; в) 35 га.

11.17. а) 20,8 км; б) 8 км.

11.18. 1) 4 м и 9 м; 2) $\approx$ 50,9 см.

11.19. 1) 21%; 2) 19%.

11.21. а) $ab - (a - 2d)(b - 2c)$; б) $ab - (a - c)(b - d)$; в) $ab - (a - 2c)d$.

11.22. а) 40 мм; б) 10 мм.

11.29. 20 и 22 см.

11.30. 124 см.

11.46. $\sqrt{2(a^2 - S)}$. Докажите, что стороны вписанного прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

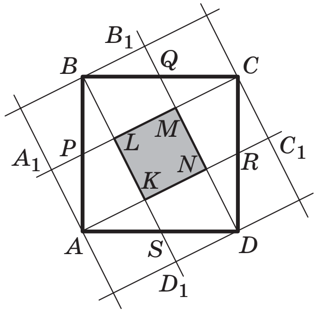


Рис. 11.46

11.50. Из равенства треугольников DAR и ASB (рис. 11.46) следует, что $\angle DAR = \angle ABS$, поэтому $\angle ASK + \angle SAK = 90°$, и, следовательно, все углы четырехугольника $KLMN$ прямые. Проводя через A прямую параллельно BS до пересечения с продолжением CL, получим точку A_1. Аналогично строим точки B_1, C_1, D_1. Восемь треугольников с гипотенузами, равными половинам сторон данного квадрата, очевидно, равны, следовательно, равны их большие катеты — стороны прямоугольника $KLMN$, который является, таким обрзом, квадратом. С другой стороны, из равенства этих треугольников следует, что получившийся «крест» равновелик данному квадрату и состоит из пяти квадратов, равных $KLMN$, т.е. $S_{KLMN} = \frac{1}{5} S_{ABCD}$.

42. Площади параллелограмма и ромба

11.51. 1-й случай: *а*), *д*), *ж*); 2-й случай: *б*), *в*), *е*), *и*).

11.53. Заметим, что $S_{ABCD} = mh$ (рис. 11.47). Так как $h \leqslant \frac{n}{2}$, то

$$0 < S_{ABCD} \leqslant \frac{mn}{2}. \tag{1}$$

Можно также доказать, что S_{ABCD} принимает любое значение S_0, удовлетворяющее неравенству (1). Для этого достаточно показать, что задача построения параллелограмма, имеющего диагонали m, n и заданную высоту, имеет решение при $m \geqslant h$, $n \geqslant h$.

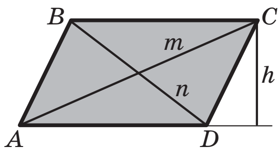


Рис. 11.47

11.54. Перпендикуляр короче наклонной. Поэтому высота h параллелограмма меньше 2 см. Следовательно,

$$0 < S = ah < 4 \text{ см}^2.$$

11.55. 1) $0 < S \leqslant a^2$.

11.57. 1) 12 см^2; 2) 50 см^2.

11.59. 1) 4 см; 2) 8,2 см и 4,1 см.

11.60. $\approx$ 3,33 см или 7,5 см.

11.62. $S_{ABCD} = 2S_{ADC} = 2 \cdot AC \cdot DM =$ $= 128$ см^2 (рис. 11.48), а так как $S_{ABCD} =$ $= AB \cdot DK$, то $DK = \dfrac{128}{12} \approx 10{,}7$ см.

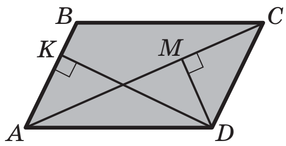


Рис. 11.48

11.63. Из условия следует, что высота h параллелограмма, равновеликого данному, равна $\dfrac{S_{ABCD}}{a}$, т.е. постоянна. Следовательно, искомое множество — объединение двух прямых, параллельных данному основанию AB и отстоящих от прямой AB на расстояние, равное высоте параллелограмма $ABCD$, проведенной к данному основанию.

11.70. Прямые, проведенные из вершины B ромба $ABCD$, должны делить стороны AD и CD в отношении 2 : 1 и 1 : 2 соответственно.

11.76. 1. 30°. 2. Прямоугольник, так как высота его больше, чем высота параллелограмма (при одном и том же основании).

11.77. Треугольники *1* и *2* и треугольники *3* и *4* равновелики; так как $S_{1+2} = S_{3+4}$, то $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

11.79. Надо разделить боковую сторону параллелограмма в отношении 3 : 4.

11.80. б) Одна из искомых прямых, проходящих через вершину B, пересекает сторону AD и должна отсекать треугольник ABK_1, имеющий площадь $\dfrac{S}{5}$, где S — площадь параллелограмма (рис. 11.49), т.е.

$$\frac{AD \cdot h}{5} = \frac{AK_1 \cdot h}{2}, \quad AK_1 = \frac{2}{5}AD.$$

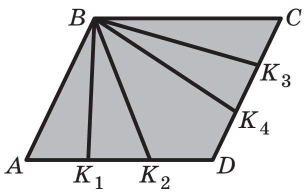


Рис. 11.49

Аналогично доказывается, что точки K_2, K_3, K_4 должны удовлетворять условиям: $K_1K_2 = \frac{2}{5}AD$, $CK_3 = K_3K_4 = \frac{2}{5}CD$. Прямые BK_1, BK_2, BK_3, BK_4 — искомые, так как площадь каждого из треугольников ABK_1, BK_1K_2, CBK_3 и K_3BK_4 равна $\frac{S}{5}$, а площадь четырехугольника BK_2DK_4 равна $S - 4\frac{S}{5} = \frac{S}{5}$.

11.82. $S = (a + b)\, t = \frac{1}{2}mt$ (рис. 11.50).

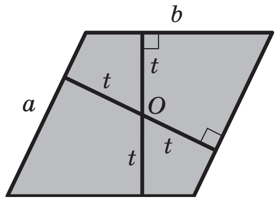


Рис. 11.50

11.85. Прямая, проходящая через данную точку M и точку O пересечения диагоналей параллелограмма, делит этот параллелограмм на две центрально-симметричные и, следовательно, равновеликие части. Можно доказать, что любая прямая, разбивающая параллелограмм на две равновеликие части, проходит через его центр симметрии. Отсюда следует, что если $M \neq 0$, то решение единственно; если $M = 0$, решений бесконечное множество.

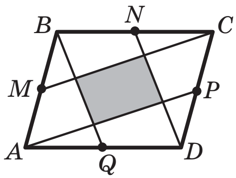


Рис. 11.51

11.88. Четырехугольник является параллелограммом, так как противоположные стороны принадлежат параллельным прямым (рис. 11.51). Построенные прямые отсекают от параллелограмма треугольники, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{4}$ площади данного параллелограмма. Видим, что $\triangle MBK = \triangle PDE$, откуда $S_{MKQA} = S_{DEA}$ и далее $S_{MKFA} = S_{OFED}$, так как треугольник AFQ является их общей частью. Следовательно, $S_{APQ} = S_{MBK}$, но $S_{MBK} = \frac{1}{4}S_{ABF}$; значит, $S_{MBK} = \frac{1}{20}S_{ABGD}$, а $S_{FKRS} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$.

11.89. $S_{ADM} = S_{ANB} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, откуда $S_{PND} = S_{MPB}$; но $S_{PND} = S_{ANP}$ и $S_{MPB} = S_{AMP}$, откуда $S_{AMPN} = \frac{2}{3}S_{AMD}$, т.е. $S_{AMPN} = \frac{1}{6}S_{ABCD}$.

11.90. $\dfrac{kl(k+l+2)}{2(k+1)(l+1)(k+l+1)}$.

11.91. Рассмотрите параллелограмм $MOQD$ (рис. 11.52), площадь которого равна $\frac{1}{4}$ площади параллелограмма $ABCD$;

$$S_{FORE} = S_{FOR} + S_{RFE} =$$
$$= \frac{1}{4}S_{MOQ} + \frac{1}{12}S_{NOQ} =$$
$$= \frac{1}{3}S_{MOQ} = \frac{1}{6}S_{MOQD}.$$

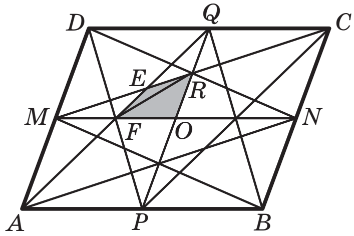


Рис. 11.52

43. Площадь треугольника

11.92. 1-й случай: *а*), *г*), *д*); 2-й случай: *б*), *з*).

11.93. а), б), в) да.

11.98. а) 14 см^2; б) 210 дм^2.

11.99. 3 см.

11.105. а) 6 ед^2; б) $\approx$ 1,78; в) 2,4 ед.

11.106. 3 : 1.

11.107. 4,8 см.

11.108. 2 см.

11.109. Задача имеет бесконечное множество решений, так как по данному основанию и высоте можно построить сколько угодно треугольников.

11.111. 2) а), б) да, в) нет.

11.112. 1) а) 2080 мм^2; б) 1190 мм^2.

11.113. 26 мм.

11.118. Надо доказать, что стороны образа данного треугольника при повороте $R_O^{60^\circ}$ отсекают от сторон данного треугольника отрезки со стороной $\frac{a}{3}$, где a — сторона данного треугольника. Площадь каждого из этих «маленьких» треугольников равна $\frac{S}{9}$. Следовательно, площадь искомой фигуры равна

$$S + 3\frac{S}{9} = S + \frac{S}{3} = \frac{4}{3}S.$$

11.119. Задача решается аналогично предыдущей.

11.121. При любом положении данного отрезка отсекаемый им треугольник — прямоугольный с гипотенузой a. Высота h_a этого треугольника, опущенная на гипотенузу, меньше или равна медиане m_a, которая, как известно, равна $\frac{a}{2}$. Так как $m_a = h_a$ лишь для равнобедренного треугольника, площадь отсеченного треугольника максимальна, если отрезок образует со сторонами данного прямого угла углы в 45°.

11.123. а) 1 : 1; б) 3 : 2; в) 3 : 5; г) 1 : 4; д) 4 : 5. Используйте тот факт, что $S_{DLC} = S_{DLK} = \frac{1}{6} S_{ABCD}$.

11.126. 1) $S_{ABO} + S_{CDO} = 0{,}5AB \times \times OK + 0{,}5CD \cdot OL = 0{,}5AB \cdot KL = = 0{,}5S_{ABCD}$ (рис. 11.53). Следовательно, $S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{DAO}$.

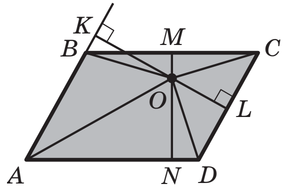


Рис. 11.53

11.127. а) Треугольники ABC и BAD (рис. 11.54) равны, так как имеют по три соответственно равных стороны, а так как в равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы, то $\angle BAD = = \angle ABC$.

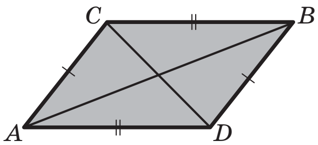


Рис. 11.54

б) Сначала докажите равенство треугольников ACD и BDC.

11.131. Обозначим искомую сумму через s, тогда в силу центральной симметрии фигуры (рис. 11.55) $s = = 2(h_1 + h_2)$; $S_{AOB} = 0{,}25a^2$. Находим

$$S_{AOB} = 0{,}5|MO|(h_1 + h_2) = = 0{,}25b(h_1 + h_2),$$

откуда $0{,}25a^2 = 0{,}25b(h_1 + h_2)$ и $s = \frac{2a^2}{b}$.

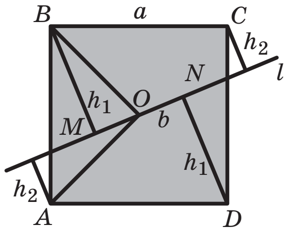


Рис. 11.55

11.136. Отобразим точки M_a и M_b относительно точки M. Получим точки E и D. Поскольку M — центр тяжести треугольника ABC, то эти точки принадлежат гипотенузе AB, а точке M, будет соответствовать точка K и $MM_c = MK$. Значит, M_aM — медиана в треугольнике M_aKM_c, M_cM — медиана в треугольнике M_aKM_c, а M_bM — медиана в треугольнике M_bKM_c, следовательно, $S_{M_aMK} = S_{MM_aM_c}$, $S_{M_aKM} = S_{M_bMM_c}$, а это доказывает утверждение задачи.

11.137. Нужно доказать два утверждения: (1) если площади треугольников AOB и DOC равны, то прямые BC и AD параллельны; (2) если прямые BC и AD параллельны, то площади треугольников AOB и DOC равны.

11.138. Проведите через точку M прямую, параллельную AK, и найдите с ее помощью отношения отрезков BK и BC.

11.140. Соедините точки M и B, P и C, A и K.

11.141. Если точка M находится на медиане, то $S_{\triangle ABK} = S_{\triangle CBK}$, $S_{\triangle AMK} = S_{\triangle CMK}$ и потому $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$. В одну сторону утверждение задачи доказано. Осталось доказать обратное: если $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$, то точка M лежит на медиане BK. Предположим, что M не лежит на BK. Тогда один из отрезков MA или MC пересекает BK. Пусть это будет MC (если медиану пересекает MA, то рассуждение аналогично), и N — точка пересечения MC и BK. Тогда $S_{\triangle ABM} < S_{\triangle ABN}$, поскольку треугольник ABM лежит внутри треугольника ABN, и $S_{\triangle CBM} > S_{\triangle CBN}$, поскольку треугольник CBN лежит внутри треугольника CBM. Но $S_{\triangle ABN} = S_{\triangle CBN}$, ведь точка N лежит на медиане. Следовательно, $S_{\triangle ABM} < S_{\triangle CBM}$. А мы предположили, что $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$. Получили противоречие. Задача полностью решена.

11.143. Пусть W — точка пересечения прямых SC и BV, D — точка пересечения прямых SC и AB;

$$S_{ADWV} = 2S_{ACV},\ S_{ACMN} = 2S_{ASC},$$

но

$$S_{ACV} = S_{ASG}$$

($ASCV$ — параллелограмм), поэтому $S_{ACMN} = S_{ADWV}$.

Аналогично $S_{DBUW} = S_{BGPQ}$.

11.144. Пусть данная точка K принадлежит стороне BC треугольника ABC (рис. 11.56). Если K — середина BC, то AK — искомая прямая. Если $BK < BM$, где M — середина BC, то, построив $MN \parallel AK$, получим искомую прямую KN. Действительно, так как $S_{AMN} = S_{KMN}$, то

$S_{KCN} = S_{ACM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

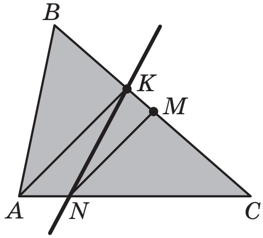


Рис. 11.56

11.145. Если прямая, проведенная через точку пересечения медиан, параллельна стороне треугольника, то указанное в условии отношение площадей равно $\frac{4}{5}$, в остальных случаях оно больше.

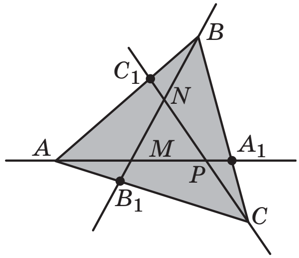


Рис. 11.57

11.146. Примем $S_{ABC} = 1$ (рис. 11.57). Заметим, что $S_{CNA_1} = S_{A_1NA_2} = S_{A_2NB} = z$, где точка A_2 — середина отрезка A_1B; $S_{C_1NB} = \frac{1}{3} - 3z$, но $S_{ANC_1} = 2S_{C_1NB}$. Так как $S_{AA_1B} = S_{ANC_1} + S_{CC_1B} - S_{CNA_1}$, то $\frac{2}{3} = 2\left(\frac{1}{3} - 3z\right) + \frac{1}{3} - z$, откуда $z = \frac{1}{21}$. Значит, $S_{MNP} = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{21} = \frac{1}{7}$.

11.148. Строим высоту CH треугольника ABC. Пусть HB_1 — перпендикуляр к стороне AC, а $HA_1 \perp BC$. Тогда около четырехугольника HB_1CA_1 можно описать окружность, диаметром которой служит $CH = h$. По теореме синусов $A_1B_1 = h \sin C$. Докажите далее, что $\angle BCH = \angle ACO$, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда

$$CO \perp A_1B_1 \text{ и } S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2}\, CO \cdot A_1B_1,$$

$$S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2}\, R \cdot h \sin \angle C = \frac{1}{2}\, \frac{c}{2\sin C} \cdot h \sin \angle C = \frac{1}{2} \cdot \frac{ch}{2},$$

т.е. $S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2}\, S_{ABC}$.

11.149. $\frac{3}{16}$ площади всего квадрата.

44. Площадь трапеции

11.154. Да.

11.156. Воспользуйтесь формулой площади трапеции: площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

11.160. а) 976,5 мм^2; б) 1100 мм^2.

11.161. а) 126 мм; б) 75 мм.

11.163. Сначала докажите равновеликость треугольников ADM и MCB (рис. 11.58), затем равновеликость треугольников APM и MQB и равновеликость треугольников ADP и BCQ.

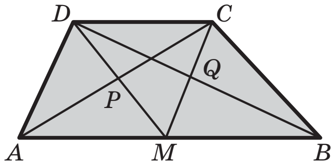


Рис. 11.58

11.164. $\frac{a^2\sqrt{19}}{20} \approx 0{,}22a^2$.

11.165. Площадь трапеции $ABCD$ равна площади S параллелограмма $ABEK$ (рис. 11.59). Здесь точка M — середина CD, $KE \parallel AB$. Так как площадь треугольника ABK равна $\frac{1}{2}S$, то прямая BK — одно из решений.

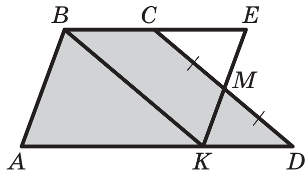


Рис. 11.59

11.166. Пусть M и N — середины оснований трапеции. Тогда легко доказать, что трапеции $ABMN$ и $NMCD$ равновелики. Снова разделив отрезки BM и MC, AN и MD пополам, получим решение (рис. 11.60).

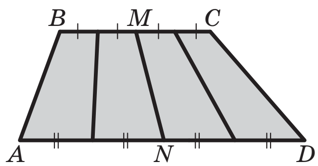


Рис. 11.60

11.167. 1) Проведя среднюю линию KM трапеции и высоты треугольников KBM и KMA (рис. 11.61), получим

$$S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2}KM \cdot BB_1 + \frac{1}{2}KM \cdot AA_1 =$$

$$= \frac{1}{2}KM \cdot (BB_1 + AA_1) =$$

$$= \frac{1}{2}KM \cdot h = \frac{1}{2}S_{ABCD};$$

h — высота трапеции.

2) Заметим, что $AB \cdot EK = 2S_{\triangle KBA}$. Как мы только что доказали, $2S_{KBA} = S_{ABCD}$.

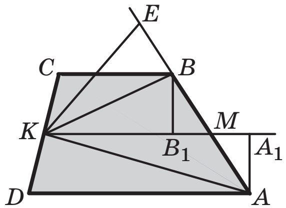


Рис. 11.61

11.168. Пусть AL и BK — медианы треугольника ABC (рис. 11.62). $AL \perp BK$. Проведем отрезок KL. Докажем, что $S_{\Delta KLC} = 0{,}25 S_{\Delta ABC}$, т.е.

$$S_{KLBA} = 0{,}75 S_{\Delta ABC} \text{ и } S_{KLBA} = \frac{m_a \cdot m_b}{2},$$

откуда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{4}{3}\frac{m_a \cdot m_b}{2} = \frac{2}{3} m_a m_b.$$

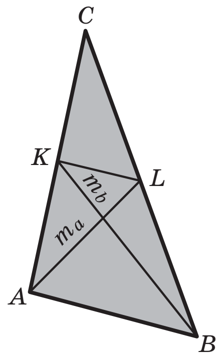


Рис. 11.62

11.169. Так как $AB = BC$, то точка M одинаково удалена от сторон AB и BC. Множеством таких точек является биссектриса BD треугольника ABC, исключая точку B.

11.170. $1{,}875\sqrt{2}$ см^2 ≈ 2,64 см^2.

11.172. ≈ 4,6 см^2.

11.173. $7{,}68a^2$.

11.177. Построим через середину K стороны AB прямую, параллельную CD, пусть M и N — точки ее пересечения с BC и AD. Треугольники KBM и KNA равновелики, поэтому площадь трапеции $ABCD$ равна площади параллелограмма $MNDC$, т.е. $S_{ABCD} = ab$.

11.179. Проведем через одну из вершин трапеции прямую, параллельную противоположной боковой стороне. Получим треугольник со сторонами c, d и $|d - c|$, который можно построить.

11.180. Площадь трапеции равна площади треугольника со сторонами m, n и $2l$. (Проведите через какую-то вершину прямую, параллельную другой диагонали.)

11.181. Проведем через какую-то вершину трапеции прямую, параллельную диагонали. Получим треугольник со сторонами 6, 8 и медианой между ними, равной 5. Этот треугольник равновелик трапеции. Продолжая медиану на расстояние, равное ей, получим окончательно треугольник со сторонами 6, 8 и 10 (он прямоугольный), равновеликий трапеции.

11.182. Для произвольного выпуклого четырехугольника имеет место равенство $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$, где S_i — площади треугольников, на которые данный четырехугольник разбивается диагоналями (нумерация в порядке обхода.) (Докажите это равенство.) Как мы знаем, площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам, равны. Обозначим их через x. Имеем $x^2 = 4 \cdot 9$, $x = 6$. Площадь равна $2x + 4 + 9 = 25$ (ед^2).

11.185. $\dfrac{ab(a+b)}{2(|a-b|\operatorname{ctg}\beta - (a+b)\operatorname{ctg}\alpha)}$.

45. Площади произвольных многоугольников

11.195. Отрезки A_1B_1 и C_1D_1 — средние линии треугольников ABC и ACD (рис. 11.63). Поэтому $A_1B_1 \parallel AC \parallel C_1D_1$, $A_1B_1 = C_1D_1 = \dfrac{AC}{2}$, и значит, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что основание и высота треугольника A_1BB_1 в два раза меньше основания и высоты треугольника ABC. Отсюда получаем, что площадь треугольника, отсеченного от данного его средней линией, в четыре раза меньше площади этого треугольника. Следовательно,

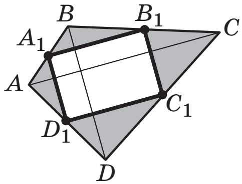


Рис. 11.63

$$S_{A_1BB_1} + S_{C_1DD_1} = \frac{1}{4}\, S_{ABC} + \frac{1}{4}\, S_{ACD} = \frac{1}{4}\, S_{ABCD}.$$

Аналогично доказывается, что

$$S_{AA_1D_1} + S_{B_1CC_1} = \frac{1}{4}\, S_{ABCD}.$$

Итак,

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} - (S_{ABB_1} + S_{C_1DD_1}) - (S_{C_1CB_1} + S_{A_1AD_1}) =$$

$$= S_{ABCD} - 2 \cdot \frac{1}{4}\, S_{ABCD} = \frac{1}{2}\, S_{ABCD}.$$

11.196. $S = (a + b)c$ (данная фигура — объединение двух равных трапеций с основаниями a и b и высотой c).

11.197. Соединим вершины B и D с точкой K. Площадь четырехугольника $BCDK$ равна (см. рис. 11.38):

$$S_{BCDK} = S_{BCK} + S_{CDK} = \frac{1}{2} CK \cdot BO + \frac{1}{2} CK \cdot OD =$$

$$= \frac{1}{2} CK\, (BO + OD) = \frac{1}{2} CK \cdot BD.$$

Заметим также, что

$$S_{ABK} + S_{KDE} = \frac{1}{2} OK \cdot AK + \frac{1}{2} OK \cdot KE =$$

$$= \frac{1}{2}\ OK \cdot (AK + KE) = \frac{1}{2}\ OK \cdot AE.$$

Итак,

$$S_{ABCDE} = S_{BCDK} + S_{ABK} + S_{KDE} =$$
$$= \frac{1}{2}\ (CK \cdot BD + OK \cdot AE).$$

11.198. Докажите, что средняя линия треугольника отсекает треугольник, площадь которого составляет $\frac{1}{4}$ часть площади данного четырехугольника.

11.199. Две смежные вершины четырехугольника удалены на равные расстояния от противолежащей стороны. Средняя линия проходит через середины оснований трапеции.

11.200. Средние линии четырехугольника $ABCD$ являются диагоналями параллелограмма $PQRS$ и разбивают его на четыре равновеликие части. Суммы площадей треугольников BPQ, DSR и ASP, CQR равны, так как каждая равна $\frac{1}{4}$ площади данного четырехугольника.

11.201. 12 см^2. Сначала докажите, что середины сторон данного четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого вдвое меньше площади данного четырехугольника.

11.203. Проведите диагонали данного четырехугольника и воспользуйтесь свойством средней линии треугольника.

11.206. Пусть $AM = \frac{1}{n} AB$, $CN = \frac{1}{n} CD$, тогда $S_{BDM} = \frac{n-1}{n}\ S_{ABD}$, $S_{DBN} = \frac{n-1}{n}\ S_{BCD}$, откуда

$$S_{BDM} + S_{DBN} = S_{MBND} = \frac{n-1}{n}\ S_{ABCD}.$$

Аналогично $S_{MCNA} = \frac{1}{n} S_{ABCD}$, значит, $S_{MBND} + S_{MCNA} = S_{ABCD}$ или $S_{ABCD} - S_{MQNP} + S_{BCQ} + S_{DPA} = S_{ABCD}$, откуда

$$S_{MQNP} = S_{BCQ} + S_{DPA}.$$

11.207. Убедитесь, что $S_{DMM_1} = S_{N_1MM_1}$. Постройте диагональ DB, заметьте, что $S_{ADM} = \frac{1}{3} S_{ADB}$ и $S_{CBN_1} = \frac{1}{3} S_{CBD}$.

11.208. Докажите, что каждый отрезок делится точками пересечения с другими на три равные части.

11.210. $\angle BCM = \angle CMD = \angle MDA$ (рис. 11.64) и $\angle CBM = \angle DMA$, откуда $\Delta BCM \sim \Delta MDA$, тогда $\frac{BC}{MD} = \frac{CM}{AD}$, значит, $\frac{BC}{MD} \cdot \frac{MC}{MC} = \frac{CM}{AD} \cdot \frac{MD}{MD}$, откуда $\frac{S_{BCM}}{S_{AMD}} = \frac{S_{MDC}}{S_{AMD}}$.

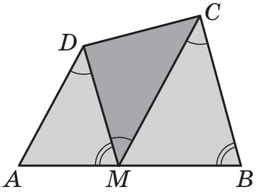


Рис. 11.64

11.211. Нет. Достаточно рассмотреть выпуклый четырехугольник, диагональ BD которого делит диагональ AC пополам. Точкой M взять середину BD.

11.212. 10 ед.^{2}, 15 ед.^{2}, 12 ед.^{2}, 8 ед.^{2}.

11.213. а) $\frac{m^2}{2}$; б) $4{,}5 + 3(m - 3) = 3m - 4{,}5$; в) $16 - 0{,}5(8 - m)^2$; г) $24 - 0{,}5(10 - m)^2$.

11.215. Проведите через точку D прямую, параллельную диагонали AC.

11.218. Середины сторон четырехугольника являются вершинами ромба, у которого диагонали — средние линии четырехугольника, Площадь ромба равна половине площади четырехугольника.

11.219. $S = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

11.220. $\approx 14{,}6$ см^2.

11.221. Докажите, что треугольники KOL и KON и треугольники LOM и NOM попарно равновелики, отрезки KM и LN пересекаются в точке O.

11.222. Надо рассмотреть три различных случая (рис. 11.65, *а—в*): а) 6 см^2 ; б) 1,5 см^2; в) $\frac{2}{3}$ см^2.

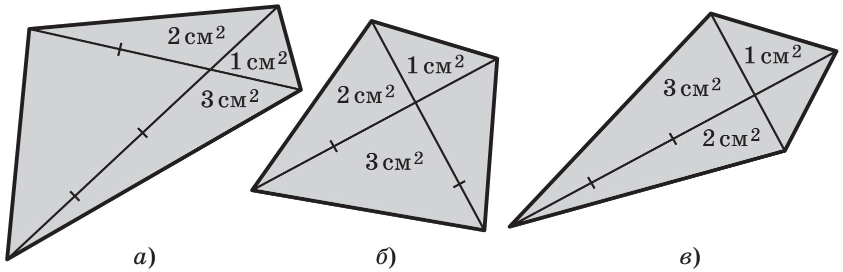


Рис. 11.65

11.228. $18{,}25a^2\sqrt{3} \approx 31{,}6a^2$.

11.229. $0{,}5(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5})$ ед^2.

11.230. $\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)b^2$.

11.233. Площади треугольников ACE и BDF сравните с площадью данного шестиугольника и площадью треугольника, сторонами которого являются отрезки, равные разностям противоположных сторон шестиугольника.

11.234. Воспользуйтесь следующим положением. Если на медиане AM треугольника ABC взять любую точку O, то $S_{ABO} = S_{ACO}$. Дан пятиугольник $ABCDF$. Пусть отрезки, проходящие через вершины A, B, D и E, пересекаются в точке O. Чтобы пятый отрезок содержал точку O, достаточно доказать, что $S_{EOC} = S_{AOC}$. Можно записать, что

$$S_{EOC} = S_{EOB},\ S_{EOB} = S_{DOB},\ S_{DOB} = S_{DOA},\ S_{DOA} = S_{AOC},$$

откуда $S_{EOC} = S_{AOC}$, значит, CO пересекает AE в его середине.

Тема 12

ПЛОЩАДИ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И КРУГА

46. Площади правильных многоугольников

12.2. Сначала развернем коробку на плоскость, сделав соответствующие разрезы (рис. 12.14), а потом отрежем два треугольника. Приставив их к оставшейся части, получаем нужный квадрат.

12.3. $a^2 - 2ab = a(a - 2b)$, $b < 0{,}5a$.

12.4. Возникает гипотеза, что полученный многоугольник правильный. Все его углы равны и величина каждого равна 135°. Проверим, равны ли стороны. Для этого достаточно проверить равенство длин двух смежных сторон (см. рис. 12.3):

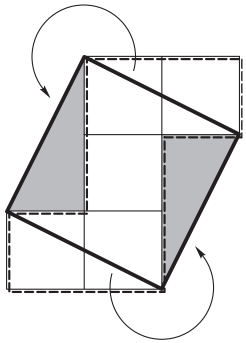


Рис. 12.14

$$BL = a - \frac{a\sqrt{2}}{2} = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$LM = a - 2a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a\,(\sqrt{2} - 1),$$

$$KL = BL\sqrt{2} = a\,(\sqrt{2} - 1).$$

Таким образом, полученный многоугольник правильный.

12.8. $a^2\,(1 + \sqrt{2}\,) \approx 2{,}41\,a^2$.

47. Площадь круга

12.11. а) В 16 раз; б) в 9 раз.

12.12. а) 12,6 см^2; б) 78,5 м^2.

12.13. $\frac{lr}{2}$, где l — длина окружности, r — радиус окружности.

12.14. а) $\frac{4}{\pi}$; б) π; в) 25π.

12.15. а) 2,25 мм^2; б) $0{,}01\pi$ мм^2.

12.16. а) $\frac{1936}{\pi}$ см^2; б) $\frac{4}{\pi}$ дм^2.

12.20. а) ≈ 105 см^2; б) ≈ 314 см^2.

48. Площади частей круга

12.34. $25(1 - 0{,}25\pi)$ см^2 $\approx 5{,}4$ см^2 или $25(1 + 0{,}75\pi)$ см^2 $\approx$ $\approx 41{,}1$ см^2.

12.35. $S_1 \approx 1{,}28a^2$, $S_2 = S_3 \approx 0{,}28a^2$, $S_4 \approx 0{,}43a^2$; S_2 — разность площади полукруга радиуса a и половины площади квадрата с диагональю AB.

12.36. 1. $\frac{\pi d^2}{16}$. 2. $\frac{\pi d^2}{4n}$.

12.37. $\approx 2{,}14R^2$.

12.40. а) $\frac{7\pi}{6}a$; $\frac{a^2}{48}(19 - 12\sqrt{3})$; б) $2\pi a$; $0{,}5a^2(\pi - 2)$; в) $0{,}5(\pi a + \pi b + 4\sqrt{a^2 + b^2})$; $0{,}25(\pi a^2 + \pi b^2 + 4ab)$; г) $2\pi a(1 + \sqrt{2})$; $2a^2$.

Глава III

ПОДОБИЕ ФИГУР

Тема 13

ПОНЯТИЕ ПОДОБИЯ ФИГУР. ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

49. Понятие подобия фигур. Подобие треугольников

13.1. Например, самолет на взлетном поле и его модель в музее.

13.2. Например, любые две окружности, любые два круга, любые два квадрата.

13.4. Да, подобны.

13.5. Подобные фигуры не обязателньо равны. Подобные фигуры равны, если их коэффициент подобия равен 1.

13.6. Нельзя.

13.7. Да, следует.

13.9. Умножьте длины сторон данного треугольника на 1,6.

13.10. $k_1 = 10$, $k_2 = 100$.

13.12. Воспользуйтесь определением подобных треугольников.

13.14. Коэффициент подобия треугольников равен $\frac{2}{3}$.

50. Признаки подобия треугольников

13.21. Да.

13.22. Да.

13.23. Да.

13.24. а) Да; б) не обязательно.

13.25. 1) Разделите сторону треугольника пополам; 2) разделите сторону треугольника на три равные части; 3) разделите сторону треугольника на четыре равные части.

13.28. Три пары.

13.30. Четыре пары.

13.31. а, б) Нет; в) да.

13.33. Да.

13.35. 1) $3\sqrt{3}$; 2) $\frac{9\sqrt{15}}{5}$.

13.37. 1) $7\sqrt{3}$; 2) $16\sqrt{3}$.

13.41. 3 : 5.

13.44. 1) 0,75 см; 2) $1\frac{103}{105}$ см; 3) 5,4 см.

13.50. Можно.

13.51. Может.

13.52. Не может.

13.55. Рассмотрите подобные треугольники AMC и A_0MC_0. (рис. 13.28).

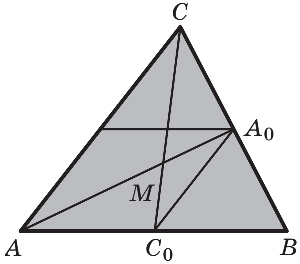


Рис. 13.28

13.56. 1) Треугольник ABC равнобедренный с основанием AB.

2) ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C.

13.57. 36°, 72°, 72°.

13.58. По двум углам.

13.59. Из подобия прямоугольных треугольников AA_1C и BB_1C следует пропорция $\frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$. Кроме того, в треугольниках A_1B_1C и ABC общий угол C.

13.60. Выполните поворот одного треугольника на 90°. Углы одного треугольника равны углам другого.

13.61. 4.

13.62. Рассмотрите подобные треугольники BHA_1 и CAA_1, HAB_1 и BCB_1.

13.63. 10,4.

13.65. Проводим $BR \parallel AC$ (см. рис. 13.10). На прямой BR находим точку D, такую, что $BD : DR = AC : CK$. Направление CD есть искомое.

13.66. Через точку B проводим прямую CD, пересекающую стороны угла A. Через точку C_1 на стороне AC проводим $C_1D_1 \parallel CD$. Делим отрезок C_1D_1 в отношении $CB : BD$, т. е. $C_1B_1 : B_1D_1 = CB : BD$. Через точки B и B_1 проводим прямую (провешиваем искомую прямую).

13.67. Выбираем точку C (рис. 13.29). На прямой AC откладываем $CD = \frac{1}{k}AC$ и прямой CB откладываем $CE = \frac{1}{k}BC$. Тогда $DE \parallel AB$. Поставив на DE какие-либо две отметки (вехи) M и N, откладываем отрезки $CA_1 = k \cdot CM$ и $CB_1 = k \cdot CN$. Ясно, что точки A_1 и B_1 находятся на прямой AB; AA_1 и BB_1 — направления просеки.

13.70. 1. Построенные треугольники подобны треугольнику ABC (рис. 13.30), поэтому

$$\frac{r_1}{r} = \frac{FO}{AC};\ \frac{r_2}{r} = \frac{ED}{AC};\ \frac{r_3}{r} = \frac{OH}{AC}.$$

Сложив эти равенства почленно, получим

$$\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} = \frac{FO + ED + OH}{AC} = \frac{AE + ED + DC}{AC} = 1,$$

откуда $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

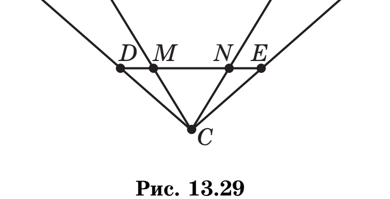


Рис. 13.29

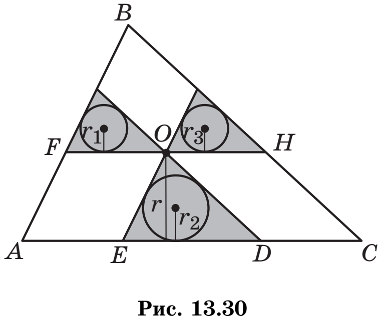


Рис. 13.30

2. Из подобия треугольников $AB'B$ и $AC'C$ (рис. 13.31), следует, что $\frac{AC'}{AB'} = \frac{AC}{AB}$, поэтому и треугольники $AC'B'$ и ABC подобны, так как угол A у них общий, а стороны, заключающие этот угол, пропорциональны. Аналогично можно доказать, что подобны треугольники $CA'B'$ и ABC, $BA'C'$ и ABC. Следовательно, $\angle AB'C' = \angle CB'A' = \angle ABC$, откуда $\angle C'B'B = \angle A'B'B$. Аналогично доказывается, что $A'A$ и $C'C$ являются биссектрисами треугольника $A'B'C'$.

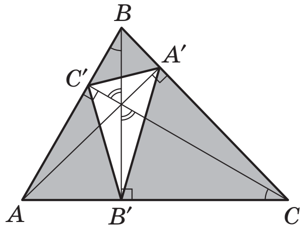


Рис. 13.31

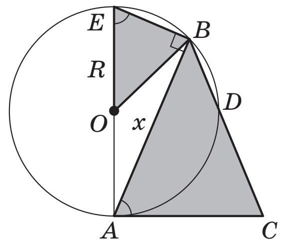


Рис. 13.32

3. Пусть $AB = x$. Заметим, что треугольники ABC и EOB подобны (рис. 13.32). Действительно, оба они равнобедренные, а углы при основаниях измеряются половиной одной и той же дуги BDA. Поэтому $\frac{x}{R} = \frac{CA}{BE}$. Учитывая, что $BE^2 = 4R^2 - x^2$ по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABE, $CA^2 = CD \cdot CB$ по теореме о касательной и секущей и $x = BC = BD + CD = (k + 1) \cdot CD$, получаем уравнение $\frac{x^2}{R^2} = \frac{\frac{x}{k+1}x}{4R^2 - x^2}$, из которого находим $x = R\sqrt{\frac{4k+3}{k+1}}$.

4. Пусть $AB = 2x$. Треугольники AMP и NBP подобны (см. рис. 13.12). Поэтому $\frac{a}{x} = \frac{x}{a+b}$, откуда $x = \sqrt{a(a+b)}$, $AB = 2\sqrt{a(a+b)}$.

5. Прежде всего заметим, что центрами окружностей будут точки O_1 и O_2 пересечения серединного перпендикуляра к стороне AB с диагоналями ромба (см. рис. 13.13). Теперь нетрудно видеть, что треугольники AO_2E, O_1BE и CBO (или ABO) подобны. Пусть $CO = x$, $BO = y$ и $CB = z$, тогда

$$\frac{z}{2r} = \frac{x}{z}, \ \frac{z}{2R} = \frac{y}{z}.$$

Выразив из этих равенств x и y и воспользовавшись теоремой Пифагора, найдем $z^2 = \dfrac{4r^2R^2}{r^2+R^2}$ и площадь ромба

$$S = 2xy = \frac{z^4}{2rR} = \frac{8r^3R^3}{(r^2+R^2)^2}.$$

6. По условию задачи $BD < AC$, т. е. диаметр окружности меньше основания треугольника, поэтому точка O лежит на продолжении BD за точку B (см. рис. 13.14). Пусть $BD = 2x$, $AC = 2y$. Тогда

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{BD^2+AD^2}}{2AD} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{BD^2}{AD^2}+1}.$$

7. По свойству биссектрисы $\dfrac{BG}{GD} = \dfrac{AB}{AD}$, а по теореме Пифагора $AB = \sqrt{BD^2+AD^2}$, поэтому $\dfrac{BG}{GD} = \dfrac{\sqrt{BD^2+AD^2}}{AD} = \sqrt{\dfrac{BD^2}{AD^2}+1}$ (см. рис. 13.15); точка O может лежать и между B и G). Теперь заметим, что $\angle ABD = \angle CBD = \angle FAC$, следовательно, треугольники AOD и BAD подобны. Поэтому $\dfrac{AD}{OD} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $AD^2 = OD \cdot BD$ и $\dfrac{BG}{GD} = \sqrt{\dfrac{BD}{OD}+1} = \sqrt{\dfrac{BO+OD}{OD}+1} = \sqrt{n+2}$.

8. Заметим, что $\angle ACD = \angle BAC$ (как накрест лежащие), $\angle ABC = \angle CAD$ (оба они измеряются половиной дуги AEC, см. рис. 13.16). Следовательно, треугольники ABC и CAD подобны. Поэтому $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{DC}$, откуда $AC = \sqrt{ab}$.

9. Обозначим искомое отношение через x. Тогда из подобия треугольников AFB и CFD (см. рис. 13.17) получим

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AF}{CF} = \frac{FB}{DF} = \frac{FL+LB}{DF} = \frac{FL+DF}{DF},$$

откуда $\dfrac{FL}{DF} = x - 1$. С другой стороны, из подобия треугольников ADF и CLF имеем

$$\frac{FL}{DF} = \frac{FC}{AF} = \frac{1}{x}.$$

Следовательно, для определения x получаем квадратное уравнение $x^2 - x - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (поскольку $x > 0$).

10. Обозначим искомое отношение через x. Проведем $DL \parallel BC$ (см. рис. 13.18) и заметим, что $x = \frac{BK}{KC} = \frac{AD}{DC}$. Далее решаем задачу, пользуясь подобием треугольников ABC, ALD и DKC: с одной стороны, $S_{\Delta ALD} + S_{\Delta DKC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BDK} = \frac{5}{8} S_{\Delta ABC}$, а с другой стороны, $S_{\Delta ALD} + S_{\Delta DKC} = S_{\Delta ABC} \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$, отсюда $\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{5}{8}$, или $3x^2 - 10x + 3 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

13.71. 1. Для доказательства теоремы Менелая следует из вершин треугольника провести параллельные друг другу отрезки до пересечения с секущей прямой (см. рис. 13.19). Образуются три пары подобных треугольников. Составим пропорции:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{m}{n}, \quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{n}{l}, \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{l}{m}.$$

Осталось перемножить получившиеся пропорции:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{m \cdot n \cdot l}{n \cdot l \cdot m} = 1.$$

Теорема доказана.

2. Очевидно, что отношение площадей треугольников ABP и CBP равно отношению отрезков AP и PC. Итак, решение задачи сводится к нахождению отношения $\frac{AP}{PC}$.

3. Предположим противное, т. е. точка C_1 не лежит на прямой A_1B_1 (см. рис. 13.21). Пусть C' — точка пересечения прямых A_1B_1 и AB. Тогда, согласно прямой теореме Менелая, $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$.

Но очевидно, что $\frac{BC_1}{C_1A} \neq \frac{BC'}{C'A}$. Поэтому соотношение в условии теоремы не может быть выполнено. Мы получили противоречие. Теорема доказана.

4. Пусть радиусы окружностей с центрами O_1, O_2, O_3 равны r_1, r_2, r_3 соответственно (см. рис. 13.22). Тогда $\frac{O_1C}{CO_2} = \frac{r_1}{r_2}$, так как окружности с центрами O_1 и O_2 гомотетичны относительно точки C, а отношение радиусов $\frac{r_1}{r_2}$ — коэффициент гомотетии. Аналогично, $\frac{O_2A}{AO_3} = \frac{r_2}{r_3}$, $\frac{O_3B}{BO_1} = \frac{r_3}{r_1}$. Таким образом,

$$\frac{O_1C}{CO_2} \cdot \frac{O_2A}{AO_3} \cdot \frac{O_3B}{BO_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} = 1.$$

По теореме, обратной теореме Менелая, точки A, B, C принадлежат одной прямой.

13.72. 1. Доказательство необходимости. Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M внутри треугольника ABC (см. рис. 13.26). Обозначим через S_1, S_2, S_3 площади треугольников AMC, CMB и AMB, а через h_1, h_2 — расстояния соответственно от точек A и B до прямой MC. Тогда $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{S_1}{S_2}$; аналогично $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_3}{S_1}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_2}{S_3}$. Перемножив полученные пропорции, убеждаемся в справедливости теоремы.

Доказательство достаточности. Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB треугольника и выполнено соотношение (*), M — точка пересения отрезков AA_1 и BB_1, а отрезок CM пересекает сторону AB в точке Q. Тогда, по уже доказанному,

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

так что

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{AC_1}{C_1B}.$$

3. Доказательство необходимости легко получить, если заметить, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 (см. рис. 13.27) лежат в одной плоскости (это плоскость, проходящая через прямые A_1C_1 и B_1D_1, пересекающиеся в точке M), и применить теорему Менелая.

Обратная теорема доказывается так же, как и обратная теорема Менелая в пространстве: нужно провести плоскость через точки A_1, B_1, C_1 и доказать с помощью леммы, что эта плоскость пересечет ребро DA в точке D_1.

Тема 14

ПОДОБИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

51. Свойства и признаки подобных многоугольников

14.3. 1) Неверно; 2) верно.

14.6. Построим какой-либо прямоугольник $ABCD$. Второй прямоугольник имеет стороны $A_1B_1 = k \cdot AB$ и $A_1D_1 = k \cdot AD$.

14.10. *в*; $\frac{a^2 - b^2}{a}$; 1) 6 и 3,5 см; 2) 4,8 и 2,8 см.

14.11. Секущая параллельна меньшей стороне прямоугольника и отстоит от нее на расстоянии $\frac{a^2}{b}$, если a — длина меньшей из сторон.

14.12. Если a — сторона меньшей длины, то прямая, параллельная a и удаленная от нее на расстояние $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$, делит прямоугольник на два подобных. Если $b < 2a$, то прямая не существует; если $b = 2a$, то прямая единственная; если $b > 2a$, то существуют две прямые.

14.13. $b^2 = 2a^2$, где a — длина меньшей стороны.

14.14. 22,5, 9, 18, 13,5 и 27 см.

14.15. Докажите равенство соответствующих углов этих параллелограммов и пропорциональность сторон.

14.17. $d = \sqrt{ab}$.

14.18. Воспользуйтесь свойствами вписанных в окружность углов и определением подобных многоугольников.

14.20. Искомая прямая должна проходить через точку, делящую бóльшую сторону данного прямоугольника в отношении 1 : 4, перпендикулярно этой стороне.

14.21. При условии $a > b$ на стороне a от вершины следует отложить отрезок длиной $\frac{b^2}{a}$ и через его конец провести прямую, параллельную стороне b.

14.23. Воспользуйтесь пропорциональностью сходственных сторон прямоугольных треугольников, которые также подобны (они возникают при пересечении диагоналей ромба).

52. Периметры и площади подобных фигур

14.24. 1) Увеличится в n^2 раз; 2) уменьшится в k^2 раз.

14.25. д) $k^2 : l^2$.

14.26. г) $\sqrt{p} : \sqrt{t}$.

14.27. 2, 4 и 5 м.

14.28. 6,4; 8 и 11,2 дм.

14.29. 60 и 100 см.

14.30. 105 см.

14.31. 72 см.

14.32. 9 : 1; 9 : 4.

14.33. $\frac{b^2S}{a^2}$.

14.34. $n^2 : (m^2 + 2mn)$.

14.35. $h_1 = \frac{2S_1}{a_1}$; $a_2 = \frac{a_1\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}$; $h_2 = \frac{2\sqrt{S_1S_2}}{a_1}$.

14.36. 14,4 м^2.

14.37. $\left(\frac{ah}{a+h}\right)^2$; 1) 16 см^2; 2) 9 см^2; 3) 100 дм^2.

14.38. 10^6.

14.39. $4 \cdot 10^6$.

14.41. а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{2}{3}$.

14.43. Следует построить квадрат, сторона которого равна: а) половине стороны данного квадрата; б) половине диагонали данного квадрата.

14.44. а) На стороне a данного треугольника отложите от вершины отрезок $a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и через полученную точку проведите прямую, параллельную стороне, противолежащей этой вершине; б) проведите среднюю линию треугольника.

14.45. $\dfrac{a^2h^2}{(a+h)^2}$; $\dfrac{a^4b^4}{(a+h)^6}$.

14.46. $\dfrac{a^2h^2}{(a+2h)^2}$; 36 см^2.

14.47. $\sqrt{ab}$.

Глава IV

ИЗОМЕТРИИ

Тема 15

ПОВОРОТ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

53. Поворот

15.1. 1. Точка A перейдет в точку A_1, точка B перейдет в точку B_1, точка C перейдет в точку C_1.

2. Стороны AB, BC и CA перейдут в стороны A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1. Длины сторон при этом сохраняются.

3. $\angle ABC$, $\angle BCA$ и $\angle CAB$ перейдут соответственно в равные им $\angle A_1B_1C_1$, $\angle B_1C_1A_1$ и $\angle C_1A_1B_1$.

4. Треугольник ABC перейдет в равный ему треугольник $A_1B_1C_1$.

5. Сохраняются длины сторон треугольников. Кроме того, будут соответственно равны расстояния от центра поворота до вершин треугольников.

6. На месте останется центр поворота.

15.2. Неподвижной точкой всегда является центр поворота. При произвольном повороте нет неподвижных прямых. При повороте на 180° прямая переходит в себя, если центр поворота принадлежит этой прямой.

15.6. Прямая перейдет в прямую.

15.7. Окружность (круг) преходит в окружность (круг). Нужно построить точку, в которую перейдет центр окружности, и провести окружность данного радиуса. Если центр окружности совпадает с точкой поворота, окружность (круг) переходит сама в себя при любом угле поворота.

15.12. Поворотом на угол $180°$ или $90°$, если прямые перпендикулярны, относительно точки пересечения этих прямых.

15.13. Поворотами на углы $0°$, $60°$, $120°$ и $180°$.

15.14. Центром поворота может быть любая точка серединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему центры данных окружностей.

15.17. Бесконечно много.

15.18. Поворотом на углы $0°$, $72°$, $144°$.

15.19. На серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему центры данных окружностей, постройте точки, из которых данный отрезок виден под углом $45°$.

15.20. Точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA_1 и BB_1. Если $AA_1 \parallel BB_1$ и прямые AA_1 и BB_1 не совпадают, то центра поворота не существует. Если прямые AA_1 и BB_1 совпадают, а середины отрезков AA_1 и BB_1 не совпадают, то поворота также не существует.

15.21. Центры поворотов — точки пересечения биссектрис углов, образованных прямыми a и b с серединным перпендикуляром к отрезку AB. Если серединный перпендикуляр к отрезку AB совпадает с одной из биссектрис, то один из центров найдется как точка пересечения перпендикуляров к прямым a и b, проведенным через точки A и B.

15.23. Заметьте, что точка M принадлежит серединному перпендикуляру отрезка A_1A_2, причем различным точкам M этого перпендикуляра соответствуют различные углы поворота.

15.25. Убедитесь в том, что для того, чтобы точки P, Q, S принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы точка M принадлежала окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Предварительно докажите, что основания перпендикуляров, проведенных из точки M на прямые BC, CA, AB, принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда точка M принадлежит описанной вокруг треугольника ABC окружности.

15.26. Рассмотрите поворот плоскости вокруг точки M на угол $90°$.

15.27. 1. Центром симметрии является точка O.

2. Точка A перейдет в точку A_1, точка B — в точку B_1, точка C — в точку C_1, точка D — в точку D_1.

3. Точкам A_1 и D_1 симметричны точки A и D.

4. Равными отрезками являются, например, все стороны квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

5. Равными, например, являются сами квадраты.

15.28. 1. Центр симметрии переходит сам в себя.

2. Прямые, проходящие через центр симметрии, переходят в себя.

3. Центром симметрии является середина отрезка AA_1.

15.29. а) В луч OC_1, где C_1 — точка, симметричная точке C относительно центра O; б) в угол A_1BC_1, где точки A_1 и C_1 симметричны точкам A и C относительно точки B.

15.30. Фигуры на рис. 15.4, *а*, *б* имеют центры симметрии. Они переходят в себя при поворотах соответственно на углы, кратные ≈ 51,4° и 60°.

15.31. Да; например, прямая.

15.39. б) Два равных угла центрально-симметричны, если их стороны — противоположно направленные лучи (рис. 15.6, *а*, *б*).

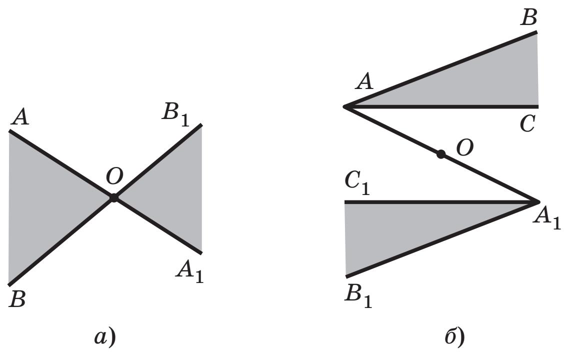


Рис. 15.6

в) Во всех случаях центром симметрии будет середина отрезка, соединяющего центры этих окружностей (рис. 15.7, *а—в*).

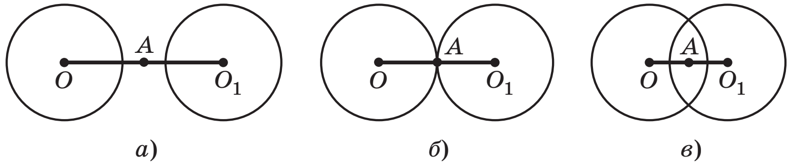


Рис. 15.7

г) Два равных треугольника могут быть центрально-симметричны, если соответственные стороны этих треугольников параллельны (рис. 15.8) и нет параллельного переноса, переводящего один на другой.

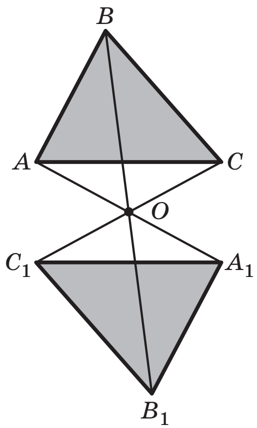


Рис. 15.8

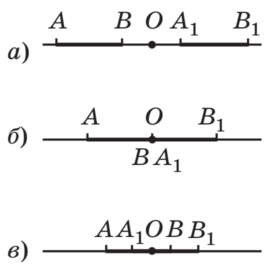


Рис. 15.9

15.40. См. рис. 15.9, *а—в*.

15.41. Центрально-симметричные отрезки должны иметь равные длины и быть параллельными.

15.45. Искомой является общая хорда данной окружности и окружности, ей симметричной относительно данной точки.

15.47. Центр симметрии параллелограмма есть точка пересечения его диагоналей. Для построения этой точки можно воспользоваться тем свойством, что через нее проходят прямые, параллельные сторонам и делящие высоты параллелограмма на равные отрезки.

Тема 16

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

55. Осевая симметрия

16.1. 1. Точки A, B и C перейдут в точки A_1, B_1 и C_1. 2. Стороны ΔABC перейдут в стороны $\Delta A_1B_1C_1$. 3. Сохраняются, например, длины сторон треугольников. 4. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

16.2. При осевой симметрии с осью l точки оси l переходят в себя. В себя переходят прямые, перпендикулярные оси l.

16.3. Одну ось симметрии имеет, например, равнобедренный треугольник. Две оси симметрии имеет, например, прямоугольник.

16.4. Одной парой соответствующих точек.

16.5. а) Луч имеет одну ось симметрии; б) и в) прямая и плоскость имеют бесконечно ясного осей симметрии.

16.8. Треугольник имеет одну ось симметрии, если он равнобедренный. Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии.

16.9. Пользуясь определением осевой симметрии, установите равенство сторон треугольника.

16.10. Дельтоид, равнобокая трапеция — одну; прямоугольник, ромб — две; квадрат — четыре.

16.11. 8.

16.13. Фигура на рис. 16.2, *а—г* имеет: а) 3 оси симметрии; б) 2 оси симметрии; в) 3 оси симметрии; г) 4 оси симметрии.

16.21. Возьмем на одной из сторон данного угла две точки A и B и построим образы этих точек при осевой симметрии относительно другой стороны, это будут точки A_1 и B_1. Угол B_1SB искомый (рис. 16.7).

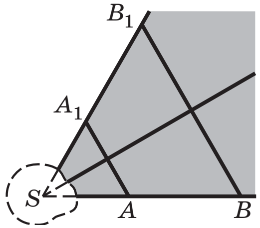


Рис. 16.7

16.23. Строим образы данных углов относительно любой прямой и находим расстояние между образами вершин этих углов.

16.24. Выполняем построение, как показано на рис. 16.8. Углы равны, так как осевая симметрия есть изометрия.

16.25. Построим образ A_1 точки A при осевой симметрии относительно прямой p (рис. 16.9). Через точки A_1 и B проводим прямую, которая пересечет p в точке M. Взяв на прямой другую точку C, соединив ее с точками A_1 и B, получим треугольник BA_1C; $AC - BC = A_1C - BC \leqslant A_1B$. Искомая разность будет максимальной, если точки A_1, B и C будут лежать на одной прямой, т. е. на прямой A_1C. Эта разность будет наибольшей, существует при условии, если $BB_1 \neq A_1C_1$, и не существует, если $BB_1 = A_1C_1$.

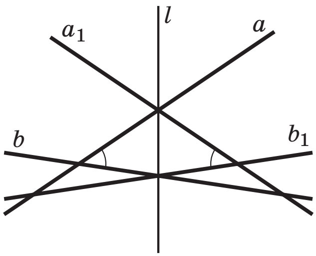


Рис. 16.8

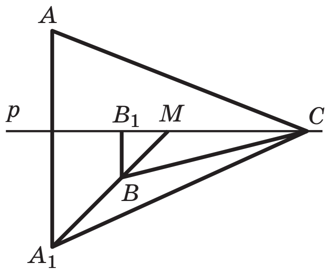


Рис. 16.9

16.26. а) Надо взять одну вершину на оси симметрии, две другие — не на оси и построить им симметричные; б) пятиугольник, у которого две оси симметрии, правильный.

16.27. 1. В симметрии относительно биссектрисы угла между двумя пересекающимися прямыми. 2. В симметрии относительно прямой, равноудаленной от двух параллельных прямых.

16.28. Только точка пересечения двух осей симметрии является сдвоенной парой в двух симметриях.

16.29. Воспользуйтесь осевой симметрией, переводящей одну прямую в другую.

16.30. Переведите меньшую сторону относительно биссектрисы угла, противолежащего данной стороне.

16.31. После применения симметрии относительно серединного перпендикуляра, проведенного к третьей стороне, задача сводится к построению треугольника по двум сторонам и углу, заключенному между ними.

16.32. Постройте точки M_1 и M_2, симметричные точке M относительно сторон угла. Прямая M_1M_2 пересекает стороны угла в точках A и B.

16.33. Рассматриваемые отрезки лежат на одной прямой и имеют общую точку или перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам.

16.34. Возможные случаи показаны на рис. 16.10, *а*, *б*.

16.35. а) Две оси симметрии. б) Одна ось симметрии.

16.36. См. рис. 16.11.

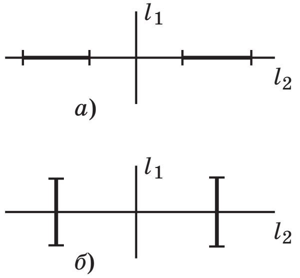


Рис. 16.10

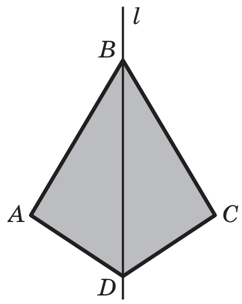


Рис. 16.11

16.37. См. рис. 16.12.

16.38. Две оси симметрии, если прямая проходит через центр окружности. Одну ось симметрии — в остальных случаях.

16.40. Построение сводится к нахождению точки $O_1 = S_l \notin (O)$.

16.41. См. рис. 16.13, *а*, *б*.

16.42. В полуплоскости с границей l лежат фигуры: луч AZ, отрезок AX и отрезок ZX.

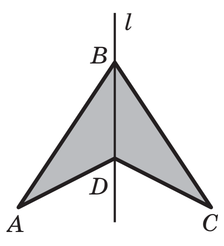


Рис. 16.12

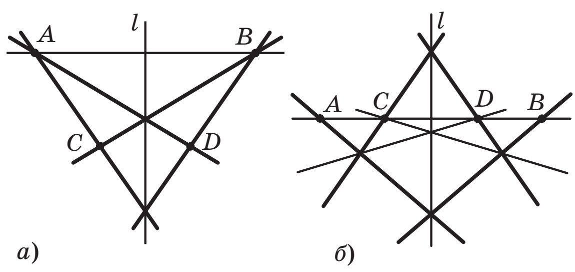


Рис. 16.13

16.43. Общей частью построенных треугольников является четырехугольник с двумя осями симметрии (рис. 16.14) или четырьмя, если получится квадрат.

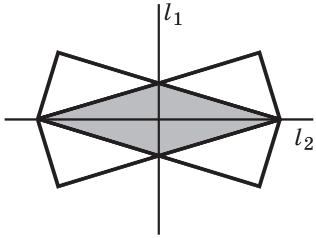


Рис. 16.14

16.46. а) Центры искомых окружностей лежат на биссектрисах прямых углов, образованных двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на равном расстоянии от точки пересечения прямых.

б) Фигура является объединением трех концентрических окружностей.

в) Три окружности имеют центры на одной прямой. По крайней мере две из этих окружностей равны и центры их находятся на равных расстояниях от центра средней окружности.

16.47. Решение то же, что и в предыдущей задаче, но расстояние центров окружностей от точки пересечения прямых следует взять меньшим, чем радиус окружности.

16.48. Оси симметрии шестиугольника проходят через его противолежащие вершины, причем эти оси пересекаются в центре окружности. Воспользуйтесь тем, что углы шестиугольника, взятые через один, равны.

16.49. У равноугольного шестиугольника, вписанного в окружность, противоположные стороны попарно параллельны. Оси симметрии каждой пары проходят через центр окружности. Эти оси являются осями симметрии шестиугольника.

56. Параллельный перенос

16.50. 1. См. рис. 16.4. Точка A переходит в точку A_1.

2. Отрезок BC переходит в отрезок B_1C_1.

3. Все стороны обоих квадратов равны, квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны.

16.51. Фигура F перейдет в равную ей фигуру, так как параллельный перенос является изометрией.

16.52. а) Да; б) нет.

16.55. а) 2; б) 6 или 4; в) возможны следующие случаи: 1) 12; 2) 8; 3) 10; 4) 6.

16.56. Окружность переходит в равную ей окружность с помощью параллельного переноса, задаваемого центрами этих окружностей. Отрезок может перейти в отрезок с помощью параллельного переноса в том случае, если эти отрезки параллельны и имеют одинаковую длину.

16.57. Здесь надо различать два случая: 1) при любом параллельном переносе; 2) при каком-нибудь конкретном параллельном переносе. В случае 2) можно привести больше примеров: прямая, если направление переноса параллельно данной прямой; полуплоскость, если направление переноса параллельно ее границе; полоса при том же условии.

Глава V

ВЕКТОРЫ

Тема 17

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

57. Понятие вектора. Равенство векторов

17.1. Два.

17.2. Лучи AB и CD имеют одинаковое направление и $AB = CD$.

17.3. а) 6 векторов; б, в) 3 вектора.

17.5. Нет.

17.7. Можно.

17.8. Нельзя.

17.10. а) Нельзя; б) можно; в) можно.

17.11. Нет.

17.12. Нет.

17.13. Возможно, если это нулевые векторы.

17.14. а) Прямую (вернее, две прямые); б) отрезок (вернее, два отрезка).

17.15. Можно.

17.16. Нет.

17.19. а) Два; б) надо учесть случай, когда пары точек лежат на одной прямой; в) шесть; г) восемь; д) надо рассмотреть все случаи расположения этих точек.

17.20. Могут, если это нулевые векторы.

17.26. См. рис. 17.12.

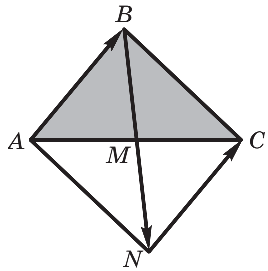


Рис. 17.12

17.27. Вектор $\bar{c}$.

17.28. Вектор $\overline{AC}$.

17.30. а) Не может; б) может только в случае нулевых векторов; в) может только, если векторы нулевые; г) не может; д) может.

17.31. Не может.

17.32. При условии, если их сумма равна нулевому вектору.

17.33. При условии, если векторы имеют разные длины.

17.38. а) $\overline{AD}$; б) $\overline{MF}$; в) $\bar{0}$.

17.39. а) $\overline{DQ}$; б) $\overline{AK}$; в) $\overline{FE}$; г) $\bar{0}$.

17.43. Вспомните теорему о неравенстве треугольника.

17.46. $\overline{AA_1} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{BB_1} = \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA}$, $\overline{CC_1} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$. Отсюда

$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \frac{3}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = \bar{0}.$$

17.47. Так как $\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = \bar{0}$, а $\overline{BC} = \overline{OA_1}$, $\overline{CA} = \overline{OB_1}$, $\overline{AB} = \overline{OC_1}$, то $\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} = \bar{0}$ (рис. 17.13). Из последнего равенства следует, что $\overline{OA_1} + \overline{OB_1} = -\overline{OC_1}$. Но $\overline{OA_1} + \overline{OB_1} = 2\overline{OC_2}$, где C_2 — середина отрезка A_1B_1. Тогда $2\overline{OC_2} = -\overline{OC_1}$, значит, точка O принадлежит медиане C_1C_2. Аналогично можно показать, что точка O принадлежит медианам A_1A_2 и B_1B_2 треугольника $A_1B_1C_1$, следовательно, O совпадает с точкой пересечения медиан.

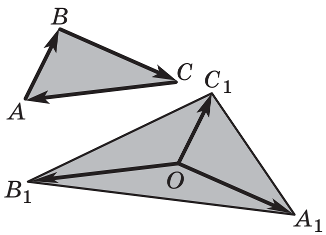


Рис. 17.13

17.49. $\overline{MA} + \overline{MC} = \bar{0}$, $\overline{MB} + \overline{MD} = \bar{0}$, а тогда $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \bar{0}$.

59. Разность векторов

17.51. $\overline{BA}$.

17.52. $\overline{BA}$.

17.53. $\overline{AC} - \overline{AB}$.

17.56. Может, если четырехугольники со смежными сторонами CA и CB имеют равные диагонали.

60. Умножение вектора на число

17.77. Направление вектора $\bar{a}$ и длины их равны $|\bar{a}|$ и $3|\bar{a}|$.

17.78. Смотрите определение умножения вектора на число.

17.81. См. рис. 17.14.

17.83. $\overline{CD} = -\frac{b}{a}\overline{AB}$. См. рис. 17.15.

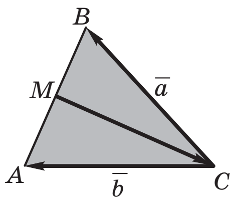


Рис. 17.14

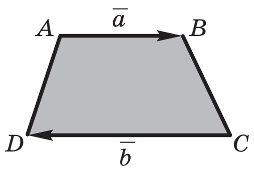


Рис. 17.15

17.84. См. рис. 17.16; $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, $\overline{PA} + \overline{AC} = \overline{PC}$,

$PC = -\frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$.

17.85. См. рис. 17.17; $\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{CD}$, $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{CA} =$

$= \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$.

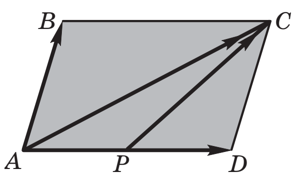


Рис. 17.16

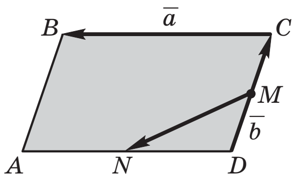


Рис. 17.17

17.89. См. рис. 17.18; $\overline{QA_1} + \overline{QB_1} + \overline{QC_1} = \overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC}$, $\overline{QA_1} - \overline{QA}$, $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$.

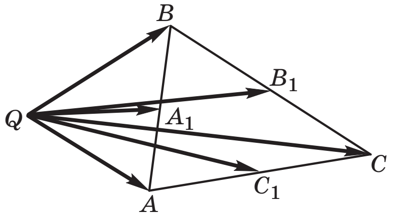


Рис. 17.18

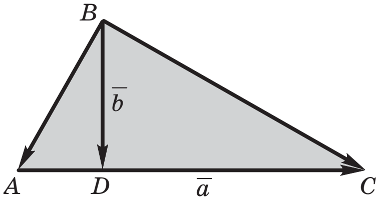


Рис. 17.19

17.90. $\frac{AC}{DC} = \frac{m}{n}$. См. рис. 17.19; $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$, $\overline{DC} = \frac{n}{m}\overline{AC}$, $\overline{BC} = \bar{b} + \frac{n}{m}\bar{a}$. $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{BA} + \bar{a} = \bar{b}$, $\overline{BA} = \bar{b} + \left(\frac{n}{m} + 1\right)\bar{a}$.

Тема 18

ДЛИНА ВЕКТОРА.
КОЛЛИНЕАРНОСТЬ ВЕКТОРОВ.
ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

18.2. По условию $\overline{OA} + \overline{OB} = \lambda\overline{OC}$ и $\overline{OC} + \overline{OA} = \mu\overline{OB}$. Вычтем из первого векторного равенства второе:

$$\overline{OB} - \overline{OC} = \lambda\overline{OC} - \mu\overline{OB}.$$

Так как $\lambda = -1$, $\mu = -1$, то тогда $\overline{OA} + \overline{OB} = -\overline{OC}$, откуда $\overline{OB} + \overline{OC} = -\overline{OA}$; следовательно, вектор $\overline{OA}$ коллинеарен вектору $\overline{OB} + \overline{OC}$.

18.3. По условию задачи

$$\lambda\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD},$$
$$\mu\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OA},$$
$$\nu\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{OA} + \overline{OB}.$$

Выберем любую пару векторных равенств и вычтем, например, из первого векторного равенства третье. Получим

$$\lambda\overline{OA} - \nu\overline{OC} = \overline{OC} - \overline{OA},$$

тогда $\lambda = \nu = -1$, значит, $-\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}$, откуда $-\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. Следовательно, вектор $\overline{OD}$ коллинеарен вектору $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

18.4. Отложим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ от точки O. Тогда вектор $\bar{a} + \bar{b}$ есть диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, как на его сторонах, и выходящая из точки O. Вектор $\bar{a} - \bar{b}$ есть другая диагональ того же параллелограмма.

По условию $|\bar{a}| = |\bar{b}|$, значит, параллелограмм, построенный на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, является ромбом. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, отсюда $(\bar{a} + \bar{b}) \perp (\bar{a} - \bar{b})$. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то один из векторов $\bar{a} + \bar{b}$ или $\bar{a} - \bar{b}$ — нуль-вектор. А нуль-вектор перпендикулярен любому вектору.

18.7. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ отложим от одной точки O. Тогда параллелограмм, построенный на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, — прямоугольник. Векторы $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$ — диагонали этого прямоугольника. Но диагонали прямоугольника равны, поэтому

$$|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|.$$

Обратная теорема. Если для двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется равенство $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$, то $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — два данных вектора. Отложим их от одной точки O. По условию $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$, значит, в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, диагонали имеют равную длину. Такой параллелограмм является прямоугольником, поэтому $\bar{a} \perp \bar{b}$.

18.8. Пусть $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ и $OC \perp AB$. Из подобия прямоугольных треугольников OAC и BAO имеем $a^2 = AC \cdot AB$.

Аналогично $\Delta OCB \backsim \Delta AOB$, тогда $b^2 = BC \cdot BA$. Отсюда $\frac{AC}{CB} = \frac{a^2}{b^2}$, значит, точка C делит отрезок в отношении $\frac{a^2}{b^2}$. Тогда $\overline{AC} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overline{AB}$. Но $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$, $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, поэтому $\overline{OC} - \overline{OA} = \frac{a^2}{a^2+b^2}(\overline{OB} - \overline{OA})$, а $\overline{OC} = \frac{a^2\overline{OB} + b^2\overline{OA}}{a^2+b^2}$.

18.9. Для данных точек A, B, C выполняется равенство $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. Тогда для любой точки O плоскости запишем

$$\overline{OB} - \overline{OA} = 2(\overline{OC} - \overline{OB}),\ \overline{OB} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{OC}.$$

Аналогично

$$\overline{OA} = 3\overline{OB} - 2\overline{OC}, \quad \overline{OC} = \frac{3}{2}\overline{OB} - \frac{1}{2}\overline{OA}.$$

18.10. $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$, откуда $\overline{OC} - \overline{OA} = \lambda\overline{OB} - \lambda\overline{OC}$; $\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \lambda\overline{OB}}{1+\lambda}$.

18.11. Пусть точки A, B и C принадлежат одной прямой, тогда векторы $\overline{BC}$ и $\overline{BA}$ коллинеарны и $\overline{BC} = k\overline{BA}$. Но $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}$, $\overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB}$. Отсюда $\overline{OC} - \overline{OB} = k(\overline{OA} - \overline{OB})$, тогда $\overline{OC} = k\overline{OA} + (1-k)\overline{OB}$.

О б р а т н о. Пусть выполняется равенство $\overline{OC} = k\overline{OA} + (1-k)\overline{OB}$, значит, $\overline{OC} - \overline{OB} = k(\overline{OA} - \overline{OB})$ или $\overline{BC} = k\overline{BA}$, т.е. векторы $\overline{BC}$ и $\overline{BA}$ коллинеарны, а точки A, B, C принадлежат одной прямой.

18.12. Для произвольной точки O плоскости запишем

$$\overline{OA_0} = \frac{\overline{OA_1} + \alpha\overline{OA_2}}{1+\alpha},\ \overline{OB_0} = \frac{\overline{OB_1} + \alpha\overline{OB_2}}{1+\alpha},\ \overline{OC_0} = \frac{\overline{OC_1} + \alpha\overline{OC_2}}{1+\alpha}.$$

Отсюда

$$\overline{A_0B_0} = \frac{\overline{A_1B_1} + \alpha\overline{A_2B_2}}{1+\alpha},\ \overline{B_0C_0} = \frac{\overline{B_1C_1} + \alpha\overline{B_2C_2}}{1+\alpha}.$$

По условию, $\overline{A_1B_1} = m\overline{B_1C_1}$, $\overline{A_2B_2} = m\overline{B_2C_2}$, поэтому $\overline{A_0B_0} = m\overline{B_0C_0}$; следовательно, точки A_0, B_0, C_0 принадлежат одной прямой (рис. 18.1).

18.13. Пусть точки M, N, P, Q, R и S — середины отрезков AB, CD, AC, BD, AD и BC соответственно (рис. 18.2). Если O — произвольная точка плоскости, то

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}),$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OD}),$$

$$\overline{OP} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC}),$$

$$\overline{OQ} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OD}),\ \overline{OR} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OD}),\quad \overline{OS} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC}).$$

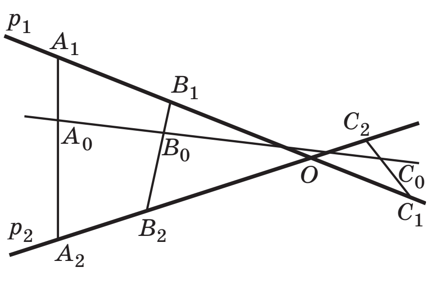


Рис. 18.1

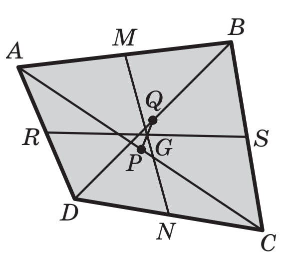


Рис. 18.2

Отсюда вектор $\overline{OG_1}$, где G_1 — середина отрезка MN, равен $\frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}$. Аналогично векторы $\overline{OG_2}$ и $\overline{OG_3}$, где G_2 и G_3 — середины отрезков PQ и RS, также равны $\frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$. Следовательно, отрезки PQ, MN и RS имеют общую середину $G = G_1 = G_2 = G_3$.

18.14. По свойству симметрии с центром S запишем $\overline{SB} = -\overline{SA}$. Тогда для произвольной точки O плоскости $\overline{OB} - \overline{OS} = \overline{OS} - \overline{OA}$, отсюда $\overline{OB} = 2\overline{OS} - \overline{OA}$.

Часть II

ЗАДАЧИ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ТЕМАМ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Тема Д1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

1. Понятие геометрического преобразования

Д1.1. Точки A и B могут перейти в точки C и D следующими способами: точка A перейдет в точку C; точка B — в точку D или точка A перейдет в точку D; точка B — в точку C. Таким образом, возможны два различных преобразования. Каждое из этих преобразований обратимо, так как двум точкам первой пары соответствуют две различные точки второй пары.

Д1.2. Пару точек A, B можно преобразовать в множество, состоящее из одной точки C, одним способом: точка A перейдет в точку C, точка B — в точку C. Полученное преобразование необратимо, так как двум различным точкам первого множества соответствует одна точка второго множества. Примеры других необратимых преобразований фигур показаны на рис. Д1.10, *а*, *б*.

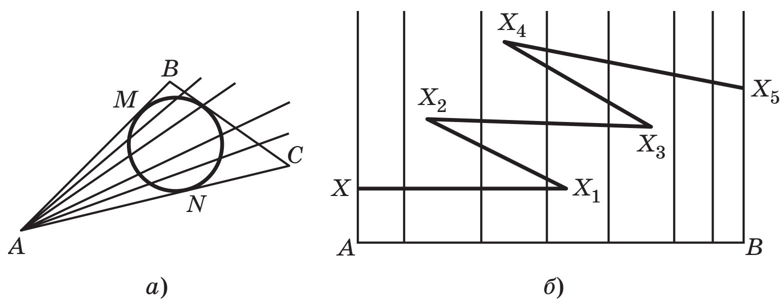


Рис. Д1.10

Д1.3. Ответы к этим задачам показаны на рис. Д1.11, *а—д*.

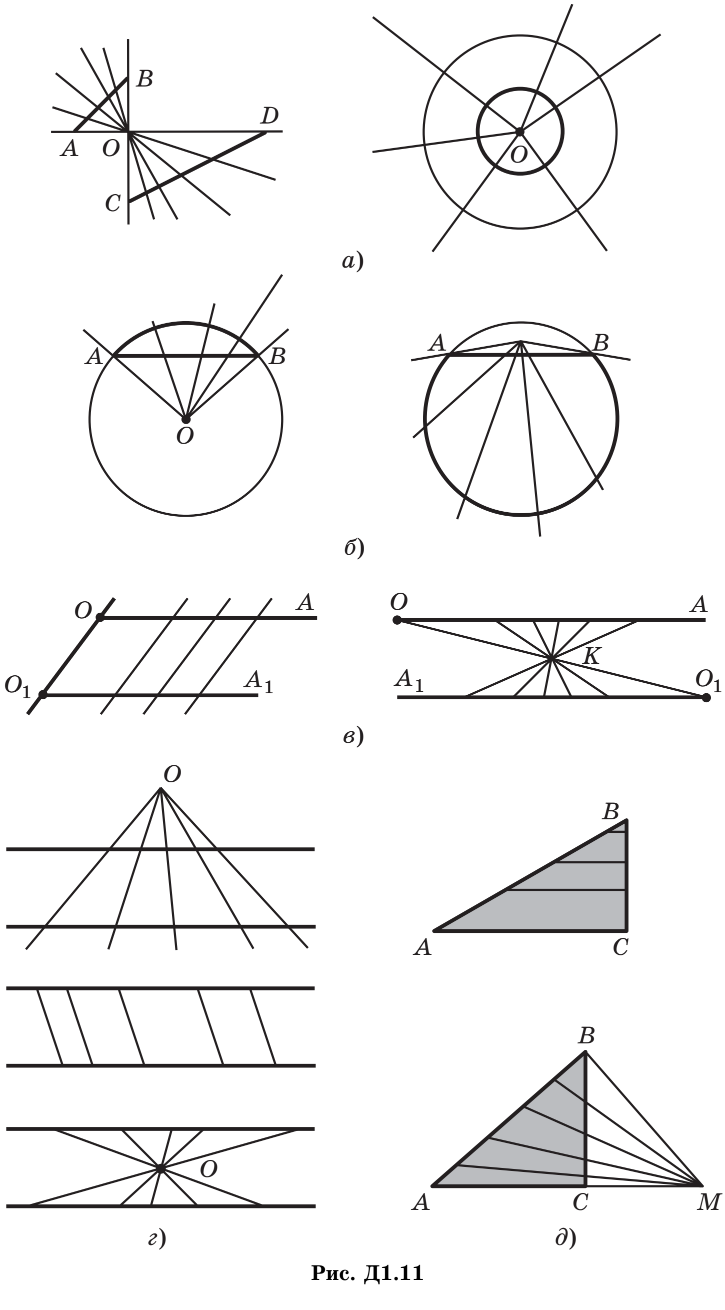


Рис. Д1.11

Д1.4. 1. Преобразование треугольника ABC в отрезки KD и DM, показанное на рис. Д1.12, оно необратимо.

2. Преобразовать точки треугольника ABC в точки ломаной $AKDMB$ нельзя, так как неизвестно, какую точку можно взять в качестве образа точек A и B.

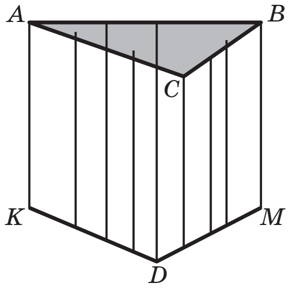
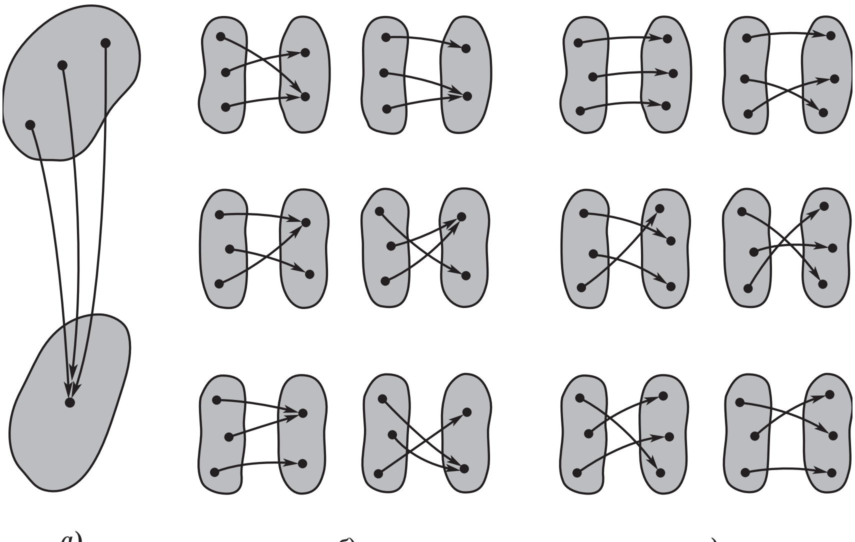


Рис. Д1.12

Д1.5. 1. Множество, состоящее из трех элементов, можно преобразовать в множество, состоящее из одного элемента, одним способом (рис. Д1.13, *а*), в множество, состоящее из двух элементов, — шестью способами (рис. Д1.13, *б*), в множество, состоящее из трех элементов, — тоже шестью способами (рис. Д1.13, *в*).

2. Множество, состоящее из трех элементов, нельзя преобразовать в множество, состоящее из четырех элементов, так как в каждом случае будут оставаться элементы, которые не являются образами элементов первого множества.



а) *б*) *в*)

Рис. Д1.13

2. Понятие изометрии и ее свойства

Д1.19. а) Точка переходит в точку.

б) Пара точек переходит в пару точек, расстояние между которыми то же, что и у исходной пары.

в) Концы отрезка переходят в пару точек, расстояние между которыми равно длине данного отрезка. Любая точка, принадлежащая данному отрезку, переходит в точку, лежащую между образами концов данного отрезка (по определению изометрии). Это и значит, что образом отрезка является отрезок.

г) Начало луча — точка O переходит в некоторую точку O_1. Любая точка X луча переходит в точку X_1 так, что $OX = O_1X_1$. Образом всех точек данного луча являются точки луча O_1X_1.

д) Прямая при изометрии перейдет в прямую. Произвольные точки прямой X, Y, T переходят в точки X_1, Y_1, T_1 так, что $X_1Y_1 + Y_1T_1 = X_1T_1$, — это значит, что точка Y_1 лежит между точками X_1 и T_1. А мы знаем, что если точка лежит между двумя точками, то все они принадлежат одной прямой.

е) Образами множества точек первой окружности с центром в точке O является множество точек, лежащих на расстоянии первого радиуса от образа центра первой окружности, а это по определению и есть окружность.

ж) Круг перейдет в круг.

з) Для решения этой задачи полезно представлять угол как пересечение двух полуплоскостей. В этом случае доказательство сводится к доказательству следующих утверждений: изометрия переводит полуплоскость в полуплоскость и изометрия переводит пересечение двух множеств в пересечение их образов.

3. Преобразование подобия

Д1.24. Убедитесь, что существует преобразование подобия, в котором точка A переходит в точку A_1, точка B — в точку B_1. Это преобразование подобия есть композиция гомотетии и изометрии. Каждое из двух преобразований подобия переводит заданную полуплоскость с границей AB соответственно в различные полуплоскости с границей A_1B_1.

Д1.26. Заметим, что оба треугольника гомотетичны, причем центр гомотетии совпадает с общим центром вписанных в треугольники окружностей. Коэффициент гомотетии равен $k = \frac{r-d}{r}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Д1.27. Обратите внимание на то, что если соответственные стороны четырехугольника параллельны, но при этом параллельны несоответственные диагонали, то четырехугольники не гомотетичны. В привычном случае достаточно рассмотреть два гомотетичных треугольника.

Д1.28. $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Д1.29. Точка Q есть центр преобразования подобия второго рода, оси симметрии данных прямых — двойные прямые преобразования подобия, коэффициент преобразования подобия равен $|\cos \varphi|$.

Д1.30. Воспользуйтесь свойством, что прямая, проходящая через основания двух высот треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному и противоположно с ним ориентированный. Коэффициент подобия равен $|\cos \varphi|$, где φ — угол между диагоналями; полученное подобие второго рода.

Д1.31. Преобразование подобия первого рода с центром в центре данной окружности, с коэффициентом подобия $\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|$ и углом поворота $\frac{\alpha}{2}$ переводит треугольник $A'B'C'$ (A', B', C' — середины сторон BC, CA и AB) в треугольник $A_0B_0C_0$. Поэтому треугольник $A_0B_0C_0$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|}$.

Д1.34. Убедитесь в том, что четырехугольник, определяемый серединными перпендикулярами к сторонам трапеции, обладает тем свойством, что его диагонали перпендикулярны соответствующим диагоналям данной трапеции. Поэтому поворот полученного четырехугольника на 90° около любого центра переводит его в четырехугольник, гомотетичный данному. Коэффициент подобия равен котангенсу угла наклона средней линии трапеции к ее основанию.

Д1.35. Точку A_1 выберите произвольно. Преобразованием подобия с центром в этой точке с коэффициентом подобия и углом поворота, определяемыми из треугольника ABC, переводят прямую AC в прямую, пересекающую прямую AB в искомой точке C_1.

Д1.36. Если $AB = c$, то $A_1B_1 = c_1 = kc$. Докажите, что $A_0B_0 = c_0 = c\sqrt{1 + k^2 - 2k\cos\varphi}$, где φ — угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$; $k_0 = \sqrt{1 + k^2 - 2k\cos\varphi}$ есть коэффициент преобразования подобия, переводящего треугольник ABC в треугольник $A_0B_0C_0$.

Д1.38. Для произвольного квадрата $A_1B_1C_1D_1$ постройте ось симметрии l, не содержащую его диагональ. Найдите на этой оси точки, отношение расстояний которых до двух вершин квадрата, расположенных по одну сторону от оси, равно отношению радиусов данных окружностей. Далее воспользуйтесь преобразованием подобия.

Тема Д2

ПРИМЕНЕНИЕ ИЗОМЕТРИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

4. Повороты. Композиции поворотов

Д2.1. 1. Возьмем любую прямую l (рис. Д2.1). Пусть в заданном повороте прямая l_2 переходит в прямую l и прямая l переходит в прямую l_1 ($l \cap l_1 = L_1$, $l \cap l_2 = L_2$). Так как $L_2 \in l_2$, то соответствующая ей точка L_2 принадлежит l; аналогично $L_2 \in l$, а точка $L_2' \in l_1$, т.е. $L_2' = L_1$. Если бы прямой l принадлежала еще одна пара соответствующих в этом повороте точек, то прямая l перешла бы в себя.

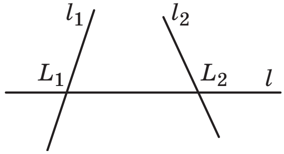


Рис. Д2.1

2. В случае центральной симметрии ответ иной. Если прямая проходит через центр симметрии, то каждая точка этой прямой перейдет в точку этой прямой. На прямой, не проходящей через центр, нет ни одной пары.

Д2.2. Каждой прямой принадлежит пара соответствующих точек: точка X переходит в точку X'.

Д2.3. Постройте образ одной из окружностей при повороте на угол 60°, центр которого — точка O. Точка пересечения второй из данных окружностей и построенной является второй вершиной треугольника.

Д2.4. Поворот вокруг центра треугольника на угол 120° переводит точку M в N, точку N в P, а точку P в M; $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Д2.5. Рассмотрите поворот с центром O на угол 120° (рис. Д2.2). Поворот вокруг точки O на угол 120° переводит прямую AB в прямую BC, а прямую A_1B_1 в прямую B_1C_1, а значит, точка C_2 перейдет в точку A_2.

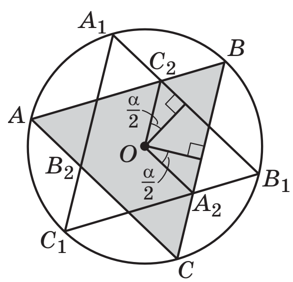


Рис. Д2.2

Аналогично $R_0^{120°}(A_2) = B_2$, значит, $A_2B_2C_2$ — равносторонний треугольник; $A_2B_2 = \dfrac{m}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Д2.6. При каждом из поворотов центр O треугольника ABC перейдет в центр O_1 треугольника $A_1B_1C_1$, следовательно, центр каждого поворота принадлежит серединному перпендикуляру отрезка OO_1. Если $O = O_1$, то центры поворота совпадают с O.

Д2.7. Постройте хорду окружности данной длины и окружность, концентрическую данной, проходящую через данную точку. Рассмотрите поворот вокруг центра окружностей, при котором данной точке соответствует точка пересечения построенных хорды и окружности.

Д2.8. Заметьте, что угол между лучами AB и A_1B_1 (рис. Д2.3) равен углу поворота φ. Также $\angle AOA_1 = \varphi$, где O — центр поворота. Отсюда центр поворота принадлежит окружности MAA_1. Аналогично $\angle BOB_1 = \varphi$ и точка O принадлежит окружности MBB_1.

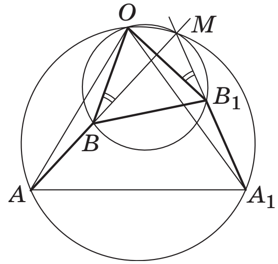


Рис. Д2.3

Д2.9. Постройте точку M', соответствующую M при повороте вокруг O на угол 90°. Сторона квадрата принадлежит прямой $M'N$. Расстояние от точки O до прямой $M'N$ равно половине длины стороны квадрата.

Д2.10. Поворот вокруг центра квадрата на угол 90° переводит точку P в Q, точку Q в R, точку R в S, а точку S в P; $PQ = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Д2.11. Рассматриваем поворот как композицию двух осевых симметрий, оси которых проходят через центр поворота и образуют угол, равный половине угла поворота (рис. Д2.4). Запишем $R_A^\alpha = w \circ u$, $R_B^\beta = v \circ w$, тогда

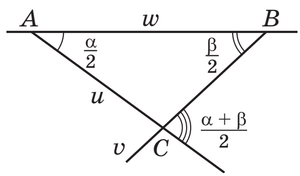


Рис. Д2.4

$R_B^\beta \circ R_A^\alpha = v \circ \ w \circ w \circ u = v \circ u.$

Убедитесь в том, что при $\alpha + \beta < 360°$ углы треугольника ABC таковы: $\angle CAB = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CBA = \frac{\beta}{2}$, и треугольник ориентирован отрицательно, если $\alpha + \beta > 360°$, то $\angle CAB = 180° - \frac{\alpha}{2}$, $\angle CBA = 180° - \frac{\beta}{2}$ и треугольник ABC ориентирован положительно.

Д2.12. Рассмотрите случай, когда данные квадраты расположены во внешней по отношению к треугольнику области. Заметьте, что композиция $R_{O_2}^{270^\circ} \circ R_{O_1}^{270^\circ}$ переводит A в C, поэтому $R_{O_2}^{270^\circ} \circ R_{O_1}^{270^\circ} = R_K^{180^\circ}$. Отсюда треугольник O_1O_2K — прямоугольный равнобедренный ($\angle K = 90^\circ$).

Аналогично $R_{O_2}^{90^\circ} \circ R_{O_1}^{90^\circ} = R_L^{180^\circ}$, поэтому треугольник O_1O_2L также прямоугольный равнобедренный ($\angle L = 90^\circ$). Следовательно, O_1LO_2K — квадрат (рис. Д2.5, *а*).

Для случая, когда квадраты построены по другую сторону от прямых AB и BC, задача решается аналогично (рис. Д2.5, *б*).

Д2.13. Очевидно, что $R_O^{120^\circ}(A) = C$, $R_{A_1}^{60^\circ}(C) = B$. Но $R_M^{180^\circ}(A) = B$. Значит, $R_{A_1}^{60^\circ} \circ R_O^{120^\circ} = R_M^{180^\circ}$, отсюда $\angle MOA_1 = 60^\circ$, $\angle MA_1O = 30^\circ$ (см. рис. Д2.4).

Д2.14. Докажите, что центры поворотов и середины диагоналей четырехугольника $ABCD$ являются вершинами квадрата (рис. Д2.6).

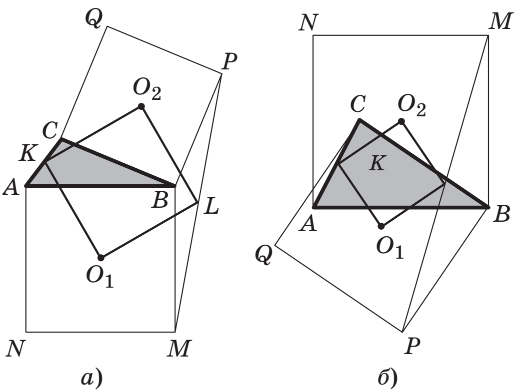


Рис. Д2.5

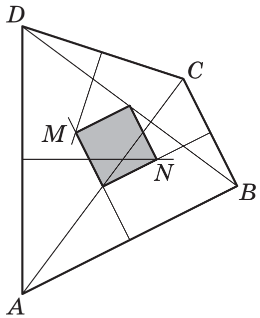


Рис. Д2.6

5. Параллельный перенос и центральная симметрия

Д2.16. Рассмотрите образ прямой a (или b) при параллельном переносе на данное расстояние в направлении, параллельном прямой d.

Д2.17. Пусть $T_{CD}(B) = B'$, E — середина отрезка AB'. Через точки A, B, C, D проведите прямые, параллельные прямой BE.

Д2.18. Пусть $BC \parallel AD$. Рассмотрите образ диагонали AC при параллельном переносе T_{AD}.

Д2.19. Пусть $BC \parallel AD$. Рассмотрите образы отрезков AB и CD при параллельных переносах T_{BM} и T_{CM}. Докажите, что биссектриса угла полученного треугольника является одновременно медианой (рис. Д2.7).

Д2.20. Рассмотрите параллельный перенос T_{AC}. Построив для точки K соответствующую точку L, получаем параллельные отрезки AK и CL. $\angle KCL = 90°$, следовательно, $\angle AKC = 90°$.

Д2.21. Параллельным переносом боковой стороны в направлении и на расстояние, определяемые основанием трапеции, получите треугольник. Вычислите высоту треугольника.

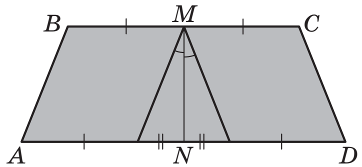


Рис. Д2.7

Д2.22. Заметьте, что суммы или разности расстояний противоположных вершин параллелограмма $OABC$ до любой прямой равны, так как они равны удвоенному расстоянию точки пересечения диагоналей до прямой.

Д2.23. Постройте вспомогательную окружность, которая равна данной, касается ее и проходит через точку M (рис. Д2.8). Заметьте, что $OO' = 2R$, $MO' = R$; B — точка касания.

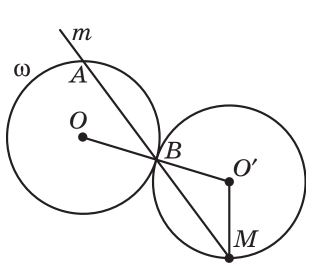


Рис. Д2.8

Д2.24. Рассмотрите композицию центральных симметрий: $Z_R \circ Z_Q \circ Z_P \circ Z_N \circ Z_M = \delta$, $\delta(A) = A$, $\delta = Z_A$ (рис. Д2.9). Пусть $Z_P \circ Z_N \circ Z_M = Z_S$, тогда $Z_R \circ Z_Q \circ Z_S = Z_A$. Постройте параллелограммы $MNPS$ и $SQRA$.

Д2.25. Убедитесь, что отрезок, соединяющий центры двух окружностей, равен и параллелен отрезку, соединяющему точки пересечения третьей окружности с двумя первыми (рис. Д2.10).

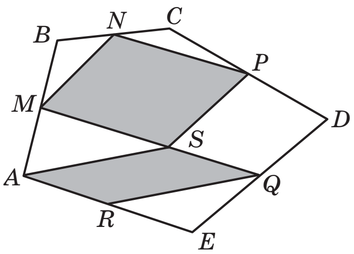


Рис. Д2.9

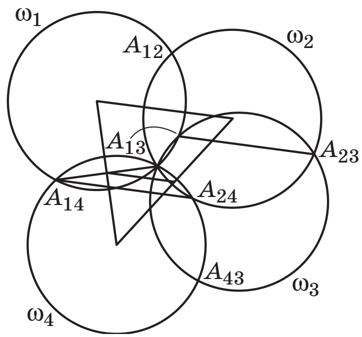


Рис. Д2.10

6. Композиции осевых симметрий и других изометрий

Д2.26. Построим серединный перпендикуляр к отрезку AC. Это и будет первая ось симметрии. Вторая ось симметрии — биссектриса угла B_1CD (рис. Д2.11).

Д2.27. $OM_1 = OM_2$, M_1M_2 — отрезок (рис. Д2.12).

Д2.30. Обозначим прямые, содержащие средние линии треугольника ABC, параллельные прямым BC, CA, AB, соответственно p_1, q_1, r_1, тогда $S_r \circ S_q \circ S_p\,(q_1) = S_r \circ S_q\,(r_1) = S_r\,(p_1) = q_1$.

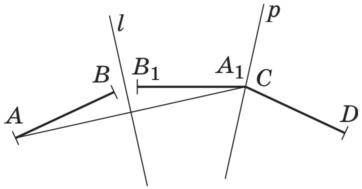


Рис. Д2.11

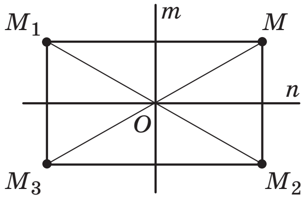


Рис. Д2.12

Д2.31. Докажите, что $\angle C_1A_1A = \angle AA_1B_1$, $\angle A_1B_1B = \angle BB_1C_1$, $\angle B_1C_1C = \angle CC_1A_1$.

Д2.32. Композиция осевых симметрий $S_r \circ S_q \circ S_p$ есть симметрия с осью t и $S_r \circ S_q \circ S_p\,(A) = A$, тогда $S_t\,(A) = A$, т.е. $A \in t$. Постройте прямую t, учитывая, что $\angle(p, q) = \angle(t, r)$. Вершиной A может служить любая точка прямой t.

Д2.33. Через центр окружности проведите три прямые, перпендикулярные данным. Воспользуйтесь результатом задачи Д2.32.

Д2.34. Проведем прямую p через точку H пересечения высот треугольника ABC. Обозначим линию пересечения прямой p с прямыми AB, BC и CA соответственно C_0, A_0 и B_0. Далее надо доказать, что точки C_1, B_1, A_1, симметричные точке H относительно сторон треугольника ABC, принадлежат окружности, описанной около треугольника. Следовательно, симметрия S_a переводит p в прямую A_1A_0, симметрия S_b переводит p в прямую B_1B_0 и симметрия S_c — в прямую C_1C_0. Пусть N — точка пересечения прямых C_0C_1 и B_0B_1. Замечаем, что $\angle NC_1B = \angle BHA_0 = \angle B_0HB_1 = \angle B_0B_1H = \angle NC_1B = \angle B_0B_1B$. Возможно также, что углы NC_1B и B_0B_1B имеют сумму, равную 180°. Значит, около четырехугольника BB_1C_1N можно описать окружность, т.е. прямые C_1C_0 и B_1B_0 пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.

Аналогично можно доказать, что прямые A_1A_0 и B_1B_0 пересекаются на окружности, значит, прямые A_1A_0, B_1B_0 и C_1C_0 пересекаются в одной точке.

Д2.35. Постройте точки K и L, симметричные соответственно точкам M и N относительно прямой AB (рис. Д2.13). Точки K, P, M_1, а также и точки L, P, N_1 принадлежат двум прямым. Около четырехугольника PQN_1M_1 можно описать окружность, следовательно, $\angle QPN_1 = \angle N_1M_1Q$ либо их сумма равна 180°. Далее рассмотрите четырехугольник $PQNM$, обладающий тем же свойством: $\angle NPQ = \angle NMQ$. Из равенства углов NMQ и N_1M_1Q следует, что $\angle NPQ = \angle N_1PQ$ и $PQ \perp AB$.

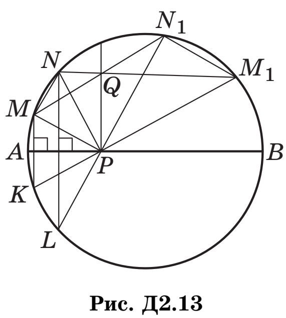


Рис. Д2.13

Д2.36. Пусть H — точка пересечения прямых DH и CD (рис. Д2.14), а C' — диаметрально противоположна C. Лучи CH и CO симметричны относительно CM, значит, $CD : CM = CH' : CC' = CH : CC' = 2R\cos\angle C : 2R = \cos\angle C$.

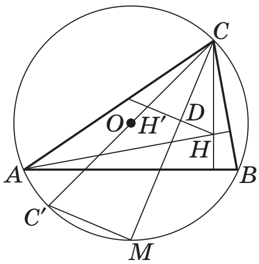


Рис. Д2.14

Д2.46. Композиция нечетного числа центральных симметрий есть изометрия, которая каждый луч переводит в противоположно направленный луч. Следовательно, такая изометрия есть центральная симметрия.

Д2.47. Рассмотрим композицию двух поворотов: $R_D^{90^\circ}$ и $R_E^{270^\circ}$. Получаем перенос T_{AC}. При этом переносе точка D переходит в F, причем $\overline{DF} = \overline{AC}$. Но $\angle FDE = 45^\circ$, поэтому и искомый угол равен 45°.

Д2.48. Пусть M — общая точка данных окружностей ω_1, ω_2, ω_3. Точки A, B, C — вторые точки пересечения ω_2 и ω_3, ω_3 и ω_1, ω_1 и ω_2. Рассмотрим композицию трех осевых симметрий S_{MA}, S_{MB}, S_{MC}, являющуюся симметрией с осью MO_2, где O_2 — центр окружности ω_2. Если точка P диаметрально противоположна точке M на ω_2, то $S_{MA}(P) = Q$, $S_{MB}(Q) = R$, $S_{MC}(R) = P$, причем $PA = AQ$, $QB = BR$, $RC = CP$. Следовательно, AB, BC, CA — средние линии в треугольнике PQK, а поэтому окружность, описанная вокруг треугольника ABC, имеет тот же радиус, что и окружности, описанные вокруг треугольников QAB, RBC, PCA.

Тема Д3

ГОМОТЕТИЯ И ПОДОБИЕ

7. Понятие гомотетии и ее свойства

Д3.1. При гомотетии: а) угол перейдет в равный ему угол; б) параллелограмм — в параллелограмм; в) трапеция — в трапецию.

Д3.2. а) По разные стороны от центра; б) по одну сторону от центра, ближе к центру; в) по одну сторону от центра, дальше от центра.

Д3.3. а) Уменьшатся; б) увеличатся.

Д3.4. 3.

Д3.5. Или один, или ни одного.

Д3.7. 1) Гомотетия переводит фигуру в себя, если ее коэффициент равен 1; 2) гомотетия является центральной симметрией, если ее коэффициент равен (−1).

Д3.8. Гомотетии можно задать с помощью центра и коэффициента гомотетии или с помощью центра и пары соответствующих точек.

Д3.9. Постройте многоугольник, гомотетичный данному.

Д3.10. а) Нельзя; б) можно.

Д3.11. а) Не всегда; б) верно; в) верно.

Д3.12. Можно.

Д3.13. 1) Верно; 2) неверно; 3) верно; 4) верно.

Д3.14. Сохраняется.

Д3.17. $\overline{AA_1} \neq \overline{BB_1}$.

Д3.18. Постройте точку пересечения прямых AA_1, BB_1, AB_1 и A_1B.

Д3.23. Может, если коэффициенты гомотетий — противоположные числа.

Д3.24. Воспользуйтесь свойствами гомотетии: отношение длин отрезков параллельных прямых при гомотетии равно отношению длин образов этих отрезков; угол при гомотетии отражается на равный ему угол.

Д3.25. $\frac{4}{9}$.

Д3.30. Для одной из сторон угла постройте гомотетичный ей луч с центром гомотетии M и коэффициентом, равным данному отношению. Точку пересечения построенного луча со второй стороной угла соедините прямой с точкой M.

8. Гомотетия окружностей

Д3.31. Окружность при гомотетии переходит в окружность. Круг переходит в круг. Две окружности имеют один центр гомотетии.

Д3.32. Нельзя.

Д3.33. Не могут.

Д3.35. Если окружности равны, то существует одна гомотетия ($k = -1$), переводящая одну из окружностей в другую.

Если окружности концентрические, то все гомотетии имеют общий центр — центр окружностей.

Во всех остальных случаях два центра гомотетии.

Любые две окружности имеют центр гомотетии. Если окр. (O_1; R_1) и окр. (O_2; R_2) — данные окружности и O_2A_2, O_2A_2' — радиусы второй окружности, параллельные радиусу O_1A_1 первой, то центры гомотетии есть точки пересечения прямых A_1A_2 и A_1A_2' с линией центров O_1O_2.

Д3.37. Окружность F имеет центр O. O_1 — образ точки O при заданной гомотетии. F_1 — множество точек, удаленных от точки O_1 на расстояние kR (k — коэффициент гомотетии), т. е. окружность с центром O_1 и радиусом kR. Так как центр гомотетии переходит в себя, то он принадлежит и окружности F_1. Если предположить, что окружности F и F_1 имеют еще общую точку, то эта вторая точка также гомотетична себе при той же гомотетии, т. е. является центром, что невозможно.

Д3.39. В общей точке обеих окружностей постройте к одной из них касательную. При гомотетии она переходит в себя и, кроме того, остается касательной к другой окружности.

Д3.40. Переведите окружность ω_2 в окружность ω_2 при гомотетии с центром A и коэффициентом k. Окружность ω_2 пересекает окружность ω_1 в искомой точке M_1.

Д3.41. Постройте окружность, гомотетичную данной, приняв за центр гомотетии точку M, а за коэффициент гомотетии — данное отношение (с противоположным знаком). Эта окружность пересекает данную в двух точках, которые являются концами двух искомых хорд. Если окружности не пересекаются, задача решений не имеет, если они касаются — одно решение.

Д3.42. Треугольники гомотетичны с центром M, следовательно, и окружности, описанные около этих треугольников, гомотетичны и центр гомотетии принадлежит окружностям, т. е. является их точкой касания.

Д3.44. Пусть точки делят хорды в отношении $m : n$. Искомое множество точек есть образ данной окружности при гомотетии с центром в общей для хорд точке и с коэффициентом $k = \frac{m}{m+n}$, т. е. окружность, касающаяся внутренним образом данной окружности в точке, общей для хорд, и имеющая радиус $r = \frac{n}{m+n}R$, где R — радиус данной окружности.

9. Две и более гомотетии

Д3.47. Если произведение коэффициентов двух гомотетий отлично от единицы, то получаем гомотетию. В противном случае — либо параллельный перенос, либо тождественное преобразование. Поскольку центры данных гомотетий различны, имеем параллельный перенос.

Д3.48. Центральная симметрия.

Д3.49. Параллельный перенос и гомотетия переводят каждую прямую в параллельную ей прямую. Длина отрезка умножается на $|k|$, где k — коэффициент данной гомотетии. А это значит, что в результате получаем гомотетию. Для построения центра искомой гомотетии выберите произвольно точки A и B, постройте их образы A_1 и B_1 в параллельном переносе, затем A_2 и B_2 — в гомотетии. Прямые AA_2 и BB_2 пересекаются в искомой точке.

Д3.50. Если выполняется гомотетия, то любая прямая, проходящая через центр этой гомотетии, переходит в себя; если — параллельный перенос, то в себя переходит любая прямая, параллельная направлению переноса.

Д3.51. Пусть $H_{O_1}^{k_1}(X) = Y$ и $H_{O_2}^{k_2}(X) = Y$. Очевидно, $H_{O_1}^{\frac{1}{k_1}}(Y) = X$, поэтому $H_{O_1}^{\frac{1}{k_1}} \circ H_{O_2}^{k_2}(X) = X$. Но $H_{O_2}^{\frac{1}{k_2}} \circ H_{O_1}^{k_1}$ есть гомотетия, если $k_1 \neq k_2$, причем точка X — центр этой гомотетии. Таким образом, при $k_1 \neq k_2$ существует единственная общая пара точек обеих гомотетий X и Y. Если $k_1 = k_2$, общих пар точек нет.

Д3.52. Прямая, параллельная прямым a и b и удаленная от a на расстояние, равное половине расстояния между a и b.

Д3.53. Если O_1 и O_2 — вершины углов, то искомое множество точек — все точки прямой O_1O_2, кроме точек отрезка O_1O_2.

Д3.54. $k_1 = \frac{AM}{AB}$, $k_2 = \frac{MB}{AB}$, $k_1 + k_2 = 1$.

Д3.55. $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

Д3.57. Центры гомотетий принадлежат двум прямым, параллельным краям данных полос. Коэффициент гомотетии равен $\pm\frac{d_1}{d}$, где d — ширина полосы (a, b), d_1 — ширина полосы (a_1, b_1).

Д3.58. Рассмотрите две гомотетии $H_{O_1}^{k_1}$ и $H_{O_2}^{k_2}$. Пусть $H_{O_1}^{k_1}(A_1) = A_2$, $H_{O_2}^{k_2}(A_2) = A_3$, $H_{O_1}^{k_1}(B_1) = B_2$, $H_{O_2}^{k_2}(B_2) = B_3$, где A_1 и B_1 — произвольные различные точки. Убедитесь в том, что композиция $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$ переводит A_1 в A_3, B_1 в B_3, причем $A_1B_1 \parallel A_3B_3$, $A_3B_3 = k_1k_2 \cdot A_1B_1$. Если $k_1k_2 = 1$, то композиция есть гомотетия с коэффициентом k_1k_2; если $k_1k_2 = 1$, но $O_1 \neq O_2$, то композиция есть перенос $T_{A_1A_3}$; если $k_1k_2 = 1$, $O_1 = O_2$, то получаем тождественное преобразование.

Д3.59. Пусть $H_{O_1}^{k_1}$ и $H_{O_2}^{k_2}$ — данные гомотетии. Если $k_1 \neq k_2$, то обе гомотетии имеют общую пару соответствующих точек. В самом деле, если точка A_1 — центр гомотетии, являющейся композицией $\left(H_{O_2}^{k_2}\right)^{-1} \circ H_{O_1}^{k_1}$, то $\left(H_{O_2}^{k_2}\right)^{-1} \circ H_{O_1}^{k_1}(A_1) = A_1$.

Отсюда получаем

$$H_{O_1}^{k_1}(A_1) = A_2,\ \left(H_{O_2}^{k_2}\right)^{-1}(A_2) = A_1,\ H_{O_2}^{k_2}(A_1) = A_2.$$

Пара точек (A_1, A_2) является общей парой соответствующих точек. Если $k_1 = k_2$, то общих пар данные гомотетии не имеют.

Д3.60. Обратите внимание, что при гомотетии центр данной окружности переходит в точку, которая должна быть центром окружности, гомотетичной данной.

Д3.61. Если окружности не концентрические, то центры гомотетий делят отрезок, соединяющий центры окружностей, внутренним и внешним образом в отношении $R_2 : R_1$. Если окружности концентрические, то оба центра гомотетии совпадают с общим центром окружностей.

Д3.62. Постройте треугольник ABC и треугольник $A_1B_1C_1$, чтобы $AC \parallel A_1C_1$ и $BC \parallel B_1C_1$. Прямая CC_1 пересекает AB в искомой точке.

Д3.63. Постройте произвольную окружность, касающуюся сторон угла. Луч, проведенный через вершину угла и данную точку, пересекает окружность в двух точках. Рассмотрите две гомотетии с центром в вершине угла, переводящие каждую из этих точек в данную точку.

Д3.64. Если O_1 — центр окружности ω_1, то симметрия Z_{O_1} переводит точку A_1 в точку A_1', а гомотетия с центром M и коэффициентом $-\dfrac{R_2}{R_1}$ переводит точку A_1' в точку A_2 (рис. Д3.5). Но композиция центральной симметрии и гомотетии есть гомотетия. Следовательно, преобразование, переводящее точку A_1 в точку A_2, есть гомотетия, центр которой совпадает со вторым центром гомотетии данных окружностей.

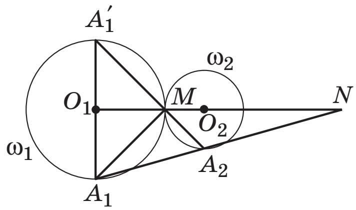


Рис. Д3.5

Д3.65. Рассмотрите композицию трех гомотетий с центрами в точках касания и коэффициентами: $-\dfrac{R_2}{R_1}$, $-\dfrac{R_3}{R_2}$, $-\dfrac{R_1}{R_3}$ (рис. Д3.6).

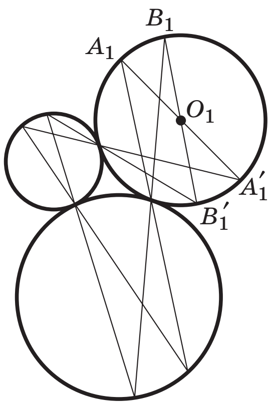


Рис. Д3.6

Эта композиция есть гомотетия с коэффициентом k, равным произведению указанных коэффициентов, т.е. $k = -1$. Полученная центральная симметрия переводит первую окружность в себя и каждую ее точку — в диаметрально противоположную. Для точки A_1 строим A_1', а для точки B_1 — точку B_1'. Диаметры A_1A_1' и B_1B_1' пересекаются в центре первой окружности.

10. Пропорциональные отрезки

Д3.67. Через точку R медианы CC_1 треугольника ABC проведите прямую, параллельную прямой AB и пересекающую прямые AC и BC соответственно в точках P и Q. Запишите равные отношения:

$$\frac{AC_1}{PR} = \frac{CC_1}{CR} = \frac{C_1B}{RQ}.$$

Согласно условию задачи, $AC_1 = C_1B$, следовательно, $RP = RQ$.

Д3.68. Пусть C_1, C_2, C_3 соответственно середины отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (рис. Д3.7). Гомотетия с центром $O = a \cap b$ и коэффициентом $k_1 = \dfrac{OA_2}{OA_1}$ (или $-k_1$) переводит точку C_2 в точку C_1, а гомотетия с тем же центром, но с коэффициентом $k_2 = \dfrac{OA_3}{OA_1}$ (или $-k_2$) переводит точку C_3 в точку C_1. Это значит, что как точки O, C_1, C_2, так и точки O, C_1, C_3 принадлежат одной прямой. Очевидно, эти прямые совпадают, следовательно, точки C_1, C_2, C_3 принадлежат прямой, проходящей через O.

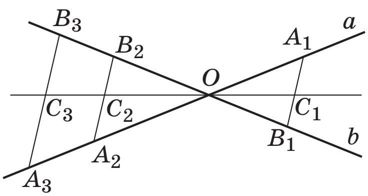


Рис. Д3.7

Д3.69. Запишите равные отношения:

$$\frac{AB}{NS} = \frac{BD}{SD} = \frac{AC}{SC} = \frac{AB}{SM},$$

отсюда $NS = SM$.

Д3.70. Пусть четырехугольник не является трапецией; AB не параллельна CD. Гомотетия с центром S и коэффициентом $k = \frac{SD}{SA}$ переводит точку B в точку B_1, а точку M — в точку M_1. Средняя линия NM_1 треугольника CDB_1 не параллельна основанию, что невозможно.

Д3.71. Из подобия трапеций следует, что $\frac{a}{MN} = \frac{MN}{b}$, откуда $MN = \sqrt{ab}$.

Д3.73. При доказательстве следует воспользоваться методом от противного.

Пусть сторона DC не параллельна стороне AB, причем середины сторон AB и CD и точка S пересечения диагоналей четырехугольника принадлежат одной прямой (рис. Д3.8). Проводим отрезок DC_1, параллельный отрезку AB, C_1 принадлежит прямой AC. Прямая MN пересекает отрезок DC_1 в его середине P. Но тогда NP — средняя линия треугольника DCC_1 и $NP \parallel CC_1$, что противоречит принадлежности точки S прямой NP.

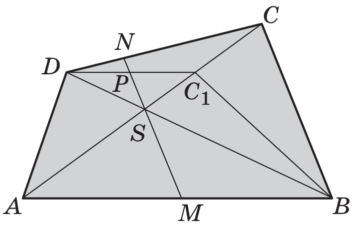


Рис. Д3.8

Д3.74. Пусть прямая, проходящая через O, пересекает отрезок BC в точке M, отрезок AD в точке N. Запишем пропорции: $\frac{AB}{NO} = \frac{BD}{OD}$, $\frac{AC}{OC} = \frac{AB}{OM}$. Отсюда $\frac{BD}{OD} = \frac{AC}{OC}$, значит, $AB \parallel CD$.

Д3.75. При доказательстве воспользуйтесь методом от противного.

Д3.76. Заметьте, что $\frac{AP}{AC} = \frac{BM}{BC}$, $\frac{AQ}{AB} = \frac{CM}{CB}$.

Д3.77. Убедитесь, что $MP : PC = 1 : 2$, используя свойства медиан треугольника ADC, и что $AQ : QC = 1 : 2$, рассматривая трапецию $ABCM$.

Д3.78. Проведите через P прямую, параллельную прямой AC и пересекающую прямую BC в точке Q, через Q — прямую, параллельную прямой BD и пересекающую прямую CD в точке R, через R прямую, параллельную прямой AC и пересекающую прямую AD в точке S. Докажите, что $PS \parallel QR$. Задача имеет бесчисленное множество решений.

Д3.79. Задача имеет два решения. Например, середину M основания AB соедините с вершиной D. Если луч AC пересекает отрезок DM в точке P, то прямая, проходящая через P параллельно AB, — искомая.

Д3.80. Разделите сторону AB точкой P в отношении $2 : 1$. Через точку пересечения прямых BD и PC проведите прямую, параллельную AB. Задача имеет два решения.

Д3.81. Пусть M и M_1 — середины сторон BC и B_1C_1 (рис. Д3.9). Прямая MM_1 параллельна прямой AA_1. Точки пересечения медиан G и G_1 делят отрезки AM и A_1M_1 в равных отношениях $2 : 1$, следовательно, $GG_1 \parallel AA_1$.

Д3.82. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции вершин треугольника на прямую p (рис. Д3.10). Обозначьте проекцию середины M стороны AB на p через M_1. Заметьте, что $MM_1 = \frac{1}{2}CC_1$, $MM_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$. Следовательно, $CC_1 = AA_1 + BB_1$.

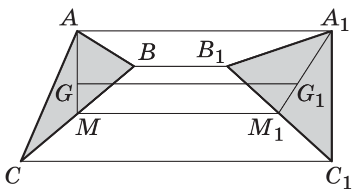


Рис. Д3.9

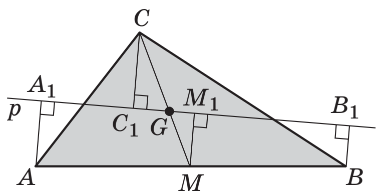


Рис. Д3.10

Д3.83. $|\overline{PR}| : |\overline{RQ}| = 1 : k$ $(k \neq 0)$.

Д3.84. Постройте прямую P_0Q_0. Пусть прямая P_0Q_0 пересекает r в точке R_0' и прямая P_0Q_0 пересекает r_1 в точке R_0^n. Убедитесь, что $\dfrac{P_0Q_0}{Q_0R_0'} = \dfrac{P_0Q_0}{Q_0R_0^n}$.

Д3.85. Проведите медианы CM и B_1N (рис. Д3.11). Докажите, что точка пересечения этих медиан делит каждую из них в отношении $2 : 1$. Для этого проведите через A_1 прямую, параллельную прямой AC и пересекающую прямую AB в точке P. Заметьте, что $AC_1 = BP$, поэтому точка M — середина отрезка C_1P, значит, $MN \parallel A_1P$ и $MN = \frac{1}{2}B_1C$. Но $A_1P = B_1C$, откуда $MN \parallel B_1C$, $MN = \frac{1}{2}B_1C$. Это значит, что $CS : SM = B_1S : SN = 2 : 1$. Итак, S — общая точка пересечения медиан обоих треугольников.

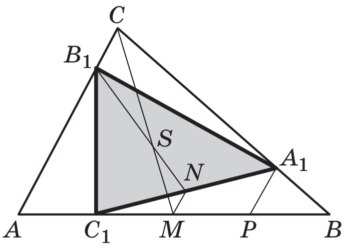


Рис. Д3.11

Д3.86. Через концы A и B радиусов проведите прямую, постройте на ней два отрезка AC и BD, равные отрезку AB. Гомотетия с центром в центре окружности переводит отрезок CD в искомую хорду C_1D_1 (рис. Д3.12).

Д3.87. Композиция поворота и гомотетии переводит ΔABC в $\Delta A_1B_1C_1$, а композиция другой гомотетии и другого поворота переводит $\Delta A_1B_1C_1$ в $\Delta A_2B_2C_2$ (рис. Д3.13). При этом центры гомотетий и центры поворотов совпадают с центром O данного треугольника. Коэффициенты гомотетий равны, а углы поворотов отличаются знаком. Произведение коэффициентов гомотетий равно $\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}$, а сумма углов поворота равна 0°. Таким образом, треугольник $A_2B_2C_2$ гомотетичен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}$.

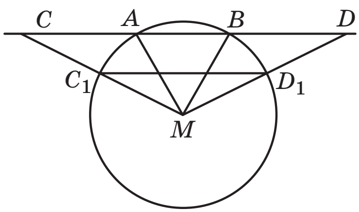


Рис. Д3.12

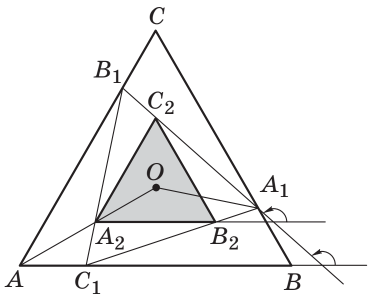


Рис. Д3.13

Д3.88. Проведите через точку N прямую, параллельную прямой CB, пересекающую прямую AB в точке Q, а через D — прямую, параллельную прямой BC и пересекающую прямые MN и AB соответственно в точках P и R (рис. Д3.14). Запишите равные отношения:

$$k = \frac{AN}{ND} = \frac{AQ}{QR} = \frac{AQ}{NP} = \frac{a-d}{d-b}, \text{ отсюда } d = \frac{a+kb}{1+k}.$$

Д3.89. Соедините середины K и Z оснований AB и CD отрезком, который пройдет через точку S пересечения диагоналей и пересечет MP в точке R (рис. Д3.15). Заметьте, что R — середина отрезка MP и R также середина отрезка NQ, следовательно, $MN = OP$.

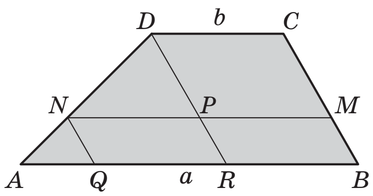


Рис. Д3.14

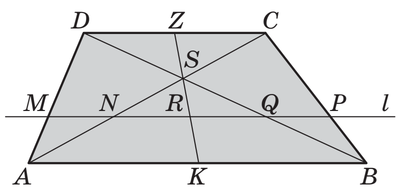


Рис. Д3.15

11. Применение гомотетии и подобия

Д3.90. Постройте любую прямую, пересекающую прямые a, b, c, и воспользуйтесь отношением отрезков, полученных при этом построении.

Д3.91. Через вершины треугольника $A_0B_0C_0$ проведите три параллельные прямые a_0, b_0, c_0, которые образуют фигуру, подобную фигуре, состоящей из прямых a, b, c. Затем постройте фигуру, образованную тройкой прямых a_1, b_1, c_1, равную фигуре a, b, c, причем $a \parallel a_0$. Остается построить $\Delta ABC = \Delta A_0B_0C_0$, вершины которого по одной принадлежат прямым a_1, b_1, c_1, наконец, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Д3.92. Прямые, проходящие через точки M и N, наклонены к прямой MN под углом α, где $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{MN}{PQ}$, через P и Q — перпендикулярные к ним (рис. Д3.16).

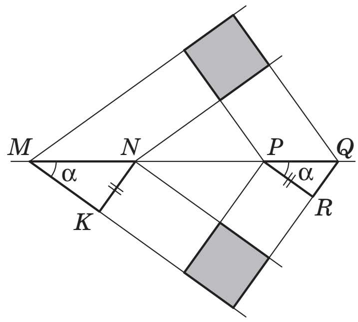


Рис. Д3.16

Д3.100. Обозначим $DK = DA = x$, $EK = EB = y$; $\dfrac{b}{x} = \dfrac{a}{y} = \dfrac{a+b}{x+y}$; $\dfrac{c}{x+y} = \dfrac{b}{b-x}$, тогда $\dfrac{b}{x} = \dfrac{(a+b)b}{c(b-x)}$, $x(a + b + c) = bc$.

Аналогично $y(a + b + c) = ac$.

Д3.101. Дважды воспользуйтесь следующим фактом: биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Д3.102. Если Y — точка пересечения биссектрис, то $\dfrac{AY}{YA_1} = \dfrac{b+c}{a}$, $\dfrac{BY}{YB_1} = \dfrac{a+c}{b}$, a, b, c — стороны треугольника, тогда (см. задачу **Д3.100**) $\dfrac{a+c}{b} = \dfrac{b+c}{a}(a - b)(a + b + c) = 0$, следовательно, $a = b$.

Д3.103. $\dfrac{ab}{a+b}$.

Д3.104. $(b^2 - a^2)^2 = c^2(a^2 + b^2)$. Из подобия треугольников ABC и BDC (рис. Д3.17): $\dfrac{a}{CD} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{BD}$, откуда $CD = \dfrac{a^2}{b}$, $BD = \dfrac{ac}{b}$, $AD = \dfrac{b^2 - a^2}{b}$. Но $AD^2 = BD^2 + AB^2$ или $(b^2 - a^2)^2 = c^2(a^2 + b^2)$.

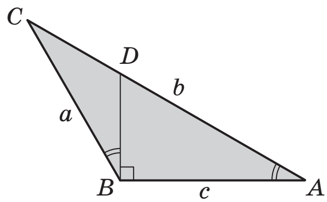


Рис. Д3.17

Д3.108. BD — биссектриса угла ABC (рис. Д3.18). Из подобия треугольников CBD и ABC имеем: $\dfrac{a}{CD} = \dfrac{c}{BD} = \dfrac{b}{a}$, $CD = \dfrac{a^2}{b}$, $BD = \dfrac{ac}{b}$.

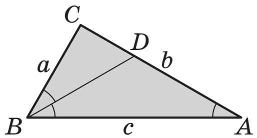


Рис. Д3.18

В треугольнике ABD углы при основании равны, следовательно, $BD = AD = b - CD$, тогда $b^2 - a^2 = ac$.

Д3.110. $\dfrac{ch_c}{c + h_c}$.

Д3.111. Постройте прямоугольный треугольник по известному отношению катета к гипотенузе, затем ему гомотетичный, используя известную сторону прямоугольника.

Д3.112. Рассмотрите подобные треугольники ABE и CDE (рис. Д3.19), значит,

$$a : c = (d + y) : x = (b + x) : y,$$

откуда $x = \dfrac{c(bc + ad)}{a^2 - c^2}$, $x + b = \dfrac{a(ab + cd)}{a^2 - c^2}$. Аналогично находим y. Отрезки EC и ED можно построить циркулем и линейкой.

Д3.116. B — центр преобразования подобия, переводящего одну из окружностей в другую, M и N — пара соответственных в преобразовании подобия точек.

Д3.117. $2\sqrt{mn}$.

Д3.118. Треугольники подобны, значит, $a = ka_1$, $b = kb_1$, $c = kc_1$, $a^2 + b^2 = c^2$, или $aa + bb = cc$. Подставив вместо a, b, c их выражения через a_1, b_1, c_1, получим $aa_1 + bb_1 = cc_1$.

Д3.119. В треугольниках ABC и ABD (рис. Д3.20) угол BAC — общий, угол ABD равен углу ACB, так как их величины равны угловой величине дуги AB. Из подобия треугольников следует, что $AB^2 = AD \cdot AC$.

Д3.121. MN, MD и MC — расстояния от точки M до прямых AB, SA и BS соответственно (рис. Д3.21). Треугольники MAD и MBN, MNA и MCB подобны, следовательно, $\dfrac{MD}{MN} = \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AD}{BN}$ и $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MN}{MC} = \dfrac{NA}{CB}$, откуда $\dfrac{MD}{MN} = \dfrac{MN}{MG}$.

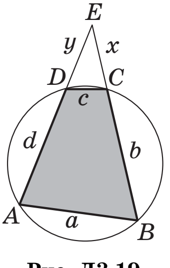


Рис. Д3.19

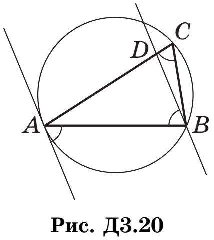


Рис. Д3.20

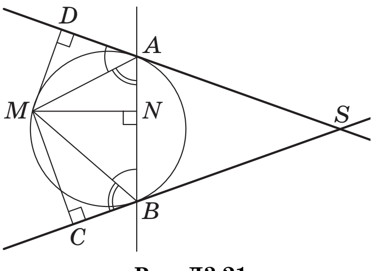


Рис. Д3.21

Д3.122. Проведите к окружности касательные в точках A, B, C и D.

Д3.123. Через середину основания сегмента проведите луч, образующий с основанием угол α, для которого $\operatorname{tg}\alpha = 2$ (рис. Д3.22). Этот луч пересекает дугу сегмента в одной из вершин искомого квадрата.

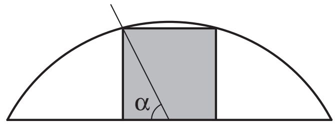


Рис. Д3.22

Тема Д4

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

12. Задачи на треугольники

Д4.1. Так как AA_1 — медиана треугольника ABC, то $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$. Аналогично AA_1 — медиана треугольника AB_1C_1, значит, $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}(\overline{AB_1} + \overline{AC_1})$ (рис. Д4.1). Отсюда $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AB_1} + \overline{AC_1}$, а тогда $\overline{AB} - \overline{AC_1} = \overline{AB_1} - \overline{AC_1}$, откуда $\overline{C_1B} = \overline{CB_1}$.

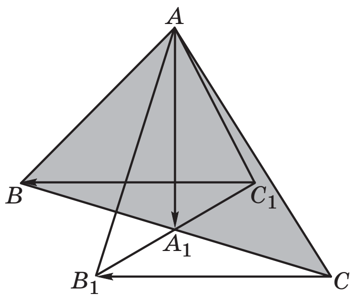


Рис. Д4.1

Д4.3. $\begin{cases} \overline{MG} = \overline{MA} + \overline{AQ}, \\ \overline{MG} = \overline{MB} + \overline{BQ}, \\ \overline{MG} = \overline{MC} + \overline{CQ}. \end{cases}$

Из этой системы получим

$$3\overline{MG} = (\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) + (\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG}),$$

откуда

$$3\overline{MG} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}.$$

Д4.4. Пусть O — произвольная точка плоскости. Согласно результату задачи **Д4.3,**

$$\overline{OM_1} = \frac{1}{3}(\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}),$$

$$\overline{MO} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$

Вычтем из первого векторного равенства второе:

$$\overline{OM_1} - \overline{MO} = \frac{1}{3}(\overline{OA_1} - \overline{OA} + \overline{OB_1} - \overline{OB} + \overline{OC_1} - \overline{OC}),$$

$$\overline{MM_1} = \frac{1}{3}(\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}).$$

Д4.5. $\overline{AA_1} = \overline{AB} + \overline{BA_1} = \overline{AB} + k\overline{BC}$,

$\overline{BB_1} = \overline{BC} + \overline{CB_1} = \overline{BC} + k\overline{CA_1}$,

$\overline{CC_1} = \overline{CA} + \overline{AC_1} = \overline{CA} + k\overline{AB}$,

тогда $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = (1 + k)(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$. Учитывая, что $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \bar{0}$, получим

$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \bar{0}.$$

Д4.6. Точка P принадлежит отрезку BC, значит, $\overline{CP} = \alpha\overline{CB}$. С другой стороны, $\overline{CP} = \overline{CA} + \beta\overline{AM}$, поэтому $\alpha\overline{CB} = \overline{CA} + \beta\overline{AM}$. Но

$$\overline{AM} = \overline{CM} - \overline{CA} = \frac{1}{2}\overline{CC_1} - \overline{CA} =$$

$$= \frac{1}{4}(\overline{CA} + \overline{CB}) - \overline{CA} = \frac{1}{4}\overline{CB} - \frac{3}{4}\overline{CA}.$$

Отсюда

$$\alpha\overline{CB} = \overline{CA} + \beta\left(\frac{1}{4}\overline{CB} - \frac{3}{4}\overline{CA}\right),$$

$$\left(\alpha - \frac{\beta}{4}\right)\overline{CB} = \left(1 - \frac{3}{4}\beta\right)\overline{CA}.$$

Так как векторы $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ неколлинеарны, то равенство выполняется, если $\begin{cases} \alpha - \dfrac{\beta}{4} = 0, \\ 1 - \dfrac{3}{4}\beta = 0, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} \alpha = \dfrac{\beta}{4}, \\ \beta = \dfrac{4}{3}, \end{cases}$ откуда $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Таким образом, $\overline{CP} = \dfrac{1}{3}\overline{CB}$, а значит, $|\overline{CP}| : |\overline{PB}| = 1 : 2$.

Д4.7. По условию $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$, где O — произвольная точка. Это равенство можно записать так:

$$\overline{OC_1} - \overline{OC} = (\overline{OB} - \overline{OA_1}) + (\overline{OA} + \overline{OB_1}),$$

откуда

$$\overline{CC_1} = \overline{A_1B} + \overline{B_1A}.$$

Д4.8. Примем за полюс[1] точку G пересечения медиан треугольника ABC. Тогда

$$\overline{GA_1} = \overline{GB} + \overline{BA_1}, \quad \overline{GA_2} = \overline{GC} + \overline{GA_2},$$
$$\overline{GB_1} = \overline{GC} + \overline{GB_1}, \quad \overline{GB_2} = \overline{GA} + \overline{AB_2},$$
$$\overline{GC_1} = \overline{GA} + \overline{AC_1}, \quad \overline{GC_2} = \overline{GB} + \overline{BC_2}.$$

Если G_1 и G_2 — соответственно точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, то

$$\overline{GG_1} = \frac{1}{3}(\overline{GA_1} + \overline{GB_1} + \overline{GC_1}),$$
$$\overline{GG_2} = \frac{1}{3}(\overline{GA_2} + \overline{GB_2} + \overline{GC_2}).$$

Учитывая, что $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \bar{0}$ и $\overline{BA_1} = \overline{CA_2}$, $\overline{CB_1} = -\overline{AB_2}$, $\overline{AC_1} = -\overline{BC_2}$, получим $\overline{GG_1} + \overline{GG_2} = \bar{0}$, откуда следует, что точки G_1 и G_2 симметричны относительно G.

[1] Точку, от которой откладываются рассматриваемые в задаче векторы, называют иногда *полюсом*.

Д4.9. Пусть точка C — полюс (рис. Д4.2). В силу коллинеарности вектора $\overline{s}$ и векторов $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ имеем:

$$\overline{s} = \alpha\overline{CC_1},\ \overline{s} = \beta(\overline{CB_1} - \overline{CB}),$$
$$\overline{s} = \gamma(\overline{CA_1} - \overline{CA}).$$

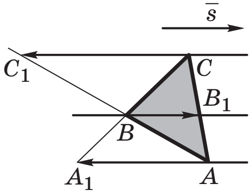


Рис. Д4.2

Кроме того, $\overline{CA_1} = l\overline{CB}$, $\overline{CB_1} = n\overline{CA}$, $\overline{CC_1} = m\overline{CA} + (1 - m)\overline{CB}$. Учитывая все эти равенства, можно записать

$$\alpha(m\overline{CA} + (1 - m)\overline{CB}) = \beta(n\,\overline{CA} - \overline{CB}),$$
$$\beta(n\overline{CA} - \overline{CB}) = \gamma(l\overline{CB} - \overline{CA}),$$

откуда $\alpha m = \beta n$, $\alpha(1 - m) = -\beta$, $\beta n = -\gamma$, $\gamma l = -\beta$. Выразим γ через α и β: $m - 1 = \frac{\beta}{\alpha}$, $m = \frac{\beta}{\alpha} + 1$; $n = \frac{\alpha m}{\beta} = \frac{\beta+\alpha}{\beta}$; $\gamma = -\beta n = -\beta - \alpha$. Следовательно, $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Д4.10. $\overline{OA_1} = \frac{\overline{OB} + \beta\overline{OC}}{1+\beta}$, $\overline{OB_1} = \frac{\overline{OC} + \gamma\overline{OA}}{1+\gamma}$, $\overline{OC_1} = \frac{\overline{OA} + \alpha\overline{OB}}{1+\alpha}$. Примем C_1 за полюс ($C_1 = O$), тогда $\overline{C_1A} = -\alpha\overline{C_1B}$. Так как C_1 принадлежит прямой A_1B_1, то $\overline{C_1A} = \mu\overline{C_1B_1}$. Подставим в это равенство значения $\overline{OA_1}$ и $\overline{OB_1}$:

$$\frac{\overline{OB} + \beta\overline{OC}}{1+\beta} = \mu\frac{\overline{OC} + \gamma\overline{OA}}{1+\gamma},$$
$$\frac{\overline{OB} + \beta\overline{OC}}{1+\beta} = \mu\frac{\overline{OC} + \gamma(-\alpha\overline{OB})}{1+\gamma},\ \overline{OB} \nparallel \overline{OC}.$$

В силу единственности разложения имеем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+\beta} = \dfrac{-\alpha\gamma\mu}{1+\gamma}, \\ \dfrac{\beta}{1+\beta} = \dfrac{\mu}{1+\gamma}, \end{cases}$$

откуда $\mu = \frac{\beta(1+\gamma)}{1+\beta}$, $\alpha\beta\gamma = -1$.

О б р а т н о, $\overline{A_1} = \dfrac{\overline{B}+\beta\overline{C}}{1+\beta}$, $\overline{B_1} = \dfrac{\overline{C}+\gamma\overline{A}}{1+\gamma}$, $\overline{C_1} = \dfrac{\overline{A}+\alpha\overline{B}}{1+\alpha}$; $\alpha\beta\gamma = -1$, $\gamma = -\dfrac{1}{\alpha\beta}$, C_1 — полюс;

$$\overline{B_1} = \frac{\overline{C}-\alpha\gamma\overline{B}}{1+\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha\beta-1}(\overline{B}+\beta\overline{C}) = \frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha\beta-1}\overline{A_1}.$$

Следовательно, $\overline{C_1B_1} \parallel \overline{C_1A_1}$, т.е. C_1 принадлежит прямой A_1B_1.

Д4.11. Пусть R — середина отрезка ML и дано, что d параллельна прямой OR (рис. Д4.3). Докажем, например, что в этом случае прямая c параллельна прямой OE, где E — середина отрезка NP. Имеем $\overline{OP} = m\overline{OL}$, $\overline{ON} = n\overline{OM}$, $NP \parallel OR$, т.е. $\overline{OP} - \overline{ON} = k(\overline{OM} + \overline{OL})$. Подставим в последнее равенство значения $\overline{OP}$ и $\overline{ON}$:

$$m\overline{OL} - n\overline{OM} = k\overline{OM} + k\overline{OL}, \text{ т.е. } (m-k)\overline{OL} = (k+n)\overline{OM}.$$

Так как векторы $\overline{OL}$ и $\overline{OM}$ неколлинеарны, то $m - k = 0$, $k + n = 0$, т.е. $m = k$, $n = k$. Тогда $\overline{OP} = k\overline{OL}$, $\overline{ON} = k\overline{OM}$. Рассмотрим вектор $(\overline{ON} + \overline{OP})$, коллинеарный $\overline{OE}$:

$$\overline{ON} + \overline{OP} = -k\overline{OM} + k\overline{OL} = k(\overline{OL} - \overline{OM}) = k\overline{ML}.$$

Следовательно, $\overline{OE}$ параллелен прямой ML. Аналогично можно доказать указанное свойство и для других прямых.

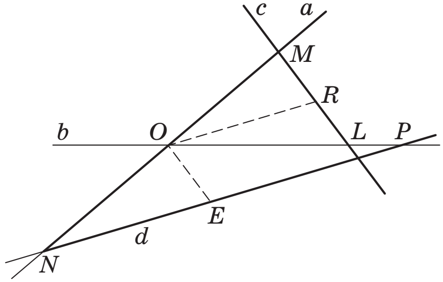


Рис. Д4.3

Д4.12. Пусть $m_1 \cap l_1 = K$ (рис. Д4.4). Докажем, что прямая KC_0 параллельна n:

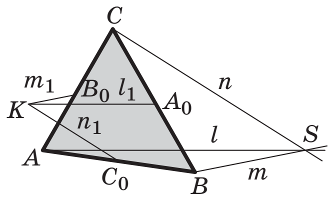


Рис. Д4.4

$$\overline{KC_0} = \overline{SC_0} - \overline{SK};$$

$$\overline{SC_0} = \frac{1}{2}\overline{SA} + \frac{1}{2}\overline{SB};$$

$$\overline{SK} = \overline{SA_0} + \overline{A_0B_0} + \overline{B_0K} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{SB} + \frac{1}{2}\overline{SC} + \frac{1}{2}\overline{SA} - \frac{1}{2}\overline{SB} +$$

$$+ m\overline{SB} = m\overline{SB} + \frac{1}{2}\overline{SA} + \frac{1}{2}\overline{SC}.$$

С другой стороны,

$$\overline{SK} = \overline{SB_0} + \overline{B_0A_0} + \overline{A_0K} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{SB} + \frac{1}{2}\overline{SC} + \frac{1}{2}\overline{SB} - \frac{1}{2}\overline{SA} + n\overline{SA} =$$

$$= n\overline{SA} + \frac{1}{2}\overline{SB} + \frac{1}{2}\overline{SC}.$$

Тогда

$$m\overline{SB} + \frac{1}{2}\overline{SA} + \frac{1}{2}\overline{SC} = n\overline{SA} + \frac{1}{2}\overline{SB} + \frac{1}{2}\overline{SC}$$

или

$$m\overline{SB} + \frac{1}{2}\overline{SA} = n\overline{SA} + \frac{1}{2}\overline{SB},$$

откуда $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$. Поэтому $\overline{SK} = \frac{1}{2}(\overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC})$.

Тогда

$$\overline{KC_0} = \frac{1}{2}\overline{SA} + \frac{1}{2}\overline{SB} - \frac{1}{2}(\overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC}) = -\frac{1}{2}\overline{SC},$$

вследствие чего $KC_0 \parallel SC$, т.е. прямая n_1 проходит через точку пересечения прямых l_1 и m_1.

Д4.14. $\overline{AA_1} = \overline{CA_1} - \overline{CA}$, $\overline{BB_1} = \overline{AB_1} - \overline{AB}$, $\overline{CC_1} = \overline{BC_1} - \overline{BC}$ (рис. Д4.5); $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = (\overline{CA_1} + \overline{AB_1} + \overline{BC_1}) - (\overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BC})$; $\overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BC} = \bar{0}$.

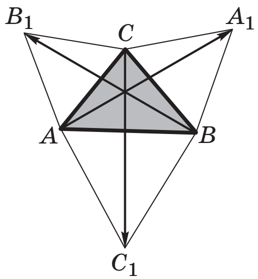


Рис. Д4.5

Векторы $\overline{CA_1}$, $\overline{AB_1}$ и $\overline{BC_1}$ могут быть получены соответственно поворотом на $60°$ векторов $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BA}$. При этом повороте сумма векторов $\overline{CB} + \overline{AC} + \overline{BA}$ перейдет в сумму векторов $\overline{CA_1} + \overline{AB_1} + \overline{BC_1}$. Но $\overline{CB} + \overline{AC} + \overline{BA} = \bar{0}$, поэтому и $\overline{CA_1} + \overline{AB_1} + \overline{BC_1} = \bar{0}$. Следовательно,

$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \bar{0}.$$

Д4.15. $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \bar{0}$. Поэтому $\overline{OA_1} - \overline{OA} + \overline{OB_1} - \overline{OB} + \overline{OC_1} - \overline{OC} = \bar{0}$.

Если O — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \bar{0}$, следовательно, и $\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} = \bar{0}$. Отсюда следует, что O — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

Д4.16. $\overline{CA_2} = \overline{A_2A} + \overline{AC}$. При повороте на $90°$ $\overline{A_2A}$ переходит в $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ — в $\overline{BB_2}$, т.е. $\overline{CA_2}$ переходит в $\overline{CB} + \overline{BB_2} = \overline{CB_2}$, откуда следует, что $\overline{CA_2} \perp \overline{CB_2}$ и $\overline{CA_2} = \overline{CB_2}$.

Д4.17. Основание C_1 биссектрисы угла C треугольника ABC делит сторону AB в отношении $\lambda_1 = \frac{b}{a}$, $\overline{AC_1} = \lambda_1\overline{C_1B}$, а центр O вписанной окружности делит биссектрису CC_1 в отношении $\lambda_2 = \frac{a+b}{c}$, $\overline{CD} = \lambda_2\overline{OC_1}$. Поэтому $\overline{OC_1} = \frac{a\overline{OA} + b\overline{OB}}{a+b}$; с другой стороны, $\overline{OC_1} = -\frac{c}{a+b}\overline{OC}$. Приравняв правые части полученных равенств, докажем утверждение задачи.

Д4.18. 1) Пусть CC_1 — медиана треугольника ABC, тогда

$$\overline{CC_1} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB}); \ \overline{CC_1} = \frac{1}{2}\overline{CA} + \overline{CB}.$$

Так как $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ неколлинеарны, то $\overline{CA} + \overline{CB} < \overline{CA} + \overline{CB}$. Отсюда $CC_1 < \frac{1}{2}(CA + CB)$.

2) Пусть C_1 — полюс. Тогда $\overline{C_1A} = \overline{C_1B}$, $\overline{C_1C_0} = \alpha\overline{C_1B}$, $\overline{A_0C_0} = \overline{C_1C}$, так как прямая g параллельна CC_1. С другой стороны, $\overline{A_0C_0} = \overline{C_1C_0} - \overline{A_0C_1} = \alpha\overline{C_1B} - (m\overline{C_1B} + (1 - m)\overline{C_1C})$, учитывая, что точки A_0, B, C принадлежат одной прямой. Так как

$$k\overline{C_1C} = (\alpha - m)\ \overline{C_1B} - (1 - m)\overline{C_1C},$$

то $k = m - 1$, $\alpha - m = 0$, т.е. $m = \alpha$, $k = \alpha - 1$. Итак,

$$\overline{A_0C_0} = (\alpha - 1)\overline{C_1C}.$$

Аналогично выразим вектор $\overline{B_0C_0}$ через $\overline{C_1C}$:

$$\overline{B_0C_0} = l\overline{C_1C};$$

$$\overline{B_0C_0} = \overline{C_1C_0} - \overline{C_1B_0} = \alpha\overline{C_1B} - (n\overline{C_1A} + (1 - n)\overline{C_1C}) =$$
$$= (\alpha + n)\overline{C_1B} - (1 - n)\overline{C_1C},$$

откуда $n - 1 = l$, $\alpha + n = 0$, т.е. $n = -\alpha$, $l = -\alpha - 1$; $\overline{B_0C_0} = -(\alpha + 1)\overline{C_1C}$.

Таким образом,

$$\overline{A_0C_0} + \overline{B_0C_0} = (\alpha - 1)\overline{C_1C} - (\alpha + 1)\overline{C_1C} = -2\overline{C_1C},$$

т.е. сумма векторов $\overline{A_0C_0} + \overline{B_0C_0}$ не зависит от α и, значит, от выбора прямой g, параллельной прямой CC_1.

3) Пусть $\overline{AP} = \alpha\overline{PC}$, $\overline{BQ} = \beta\overline{QC}$, $\overline{C_1M} = \gamma\overline{MC}$. Требуется доказать, что $\alpha + \beta = 2\gamma$. Примем точку C за полюс. Тогда $\overline{CP} - \overline{CA} =$

$= -\alpha\overline{CP}$, $\overline{CQ} - \overline{CB} = -\beta\overline{CQ}$, $\overline{CM} - \overline{CC_1} = -\gamma\overline{CM}$, причем $\overline{CC_1} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$. Вследствие этого $\overline{CP} = \frac{1}{1+\alpha}\overline{CA}$, $\overline{CQ} = \frac{1}{1+\beta}\overline{CB}$, $\overline{CM} = \frac{1}{2(1+\gamma)}(\overline{CA} + \overline{CB})$. Учитывая, что точки M, P и Q принадлежат одной прямой, запишем

$$\overline{CM} = m\overline{CP} + (1-m)\overline{CQ}$$

или

$$\frac{1}{2(1+\gamma)}(\overline{CA} + \overline{CB}) = \frac{m}{1+\alpha}\overline{CA} + \frac{1-m}{1+\beta}\overline{CB},$$

откуда

$$\frac{1}{2(1+\gamma)} = \frac{m}{1+\alpha}, \ \frac{1}{2(1+\gamma)} = \frac{1-m}{1+\beta}.$$

Исключив из полученных уравнений m, установим, что $\alpha + \beta = 2\gamma$.

Д4.19. Известно, что $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \bar{0}$, отсюда $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$, O — произвольная точка плоскости. Так как векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ неколлинеарны, то $\overline{OM} < \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$, а тогда $OM < \frac{1}{3}(OA + OB + OC)$.

Д4.20. По свойству биссектрисы угла треугольника

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{CB}{CA} = \frac{a}{b}.$$

Отсюда

$$\frac{BC_1}{BA} = \frac{a}{a+b}.$$

Но $\overline{BC_1} = \overline{CC_1} - \overline{CB}$, $\overline{BA} = \overline{CA} - \overline{CB}$, поэтому $(\overline{CC_1} - \overline{CB}) = \frac{a}{a+b}(\overline{CA} - \overline{CB})$; $\overline{CC_1} = \frac{a}{a+b}\overline{CA} + \frac{b}{a+b}\overline{CB}$.

Д4.21. Проведем отрезки OM и ON соответственно перпендикулярные отрезкам AB и BC (рис. Д4.6). Треугольники AHC и NOM подобны, $\frac{AC}{MN} = 2$, значит, $\overline{CH} = 2\overline{OM}$, откуда $\overline{OH} - \overline{OC} = 2 \cdot \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$, а тогда $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

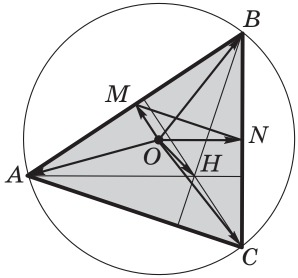


Рис. Д4.6

Д4.26. $\overline{AA_1} = \overline{BA_1} - BA$, $\overline{BB_1} = \overline{CB_1} - CB$, $\overline{CC_1} = \overline{AC_1} - AC$; $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = (\overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1}) - (\overline{BA} + \overline{CB} + \overline{AC})$; $\overline{BA} + \overline{CB} + \overline{AC} = \bar{0}$.

Векторы $\overline{BA_1}$, $\overline{CB_1}$, $\overline{AC_1}$ могут быть получены соответственно из векторов $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ и $\overline{AB}$ поворотом на $45°$ и умножением на $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому сумма векторов $\overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1}$ может быть получена поворотом на $45°$ вектора $\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB})$. Но $\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = \bar{0}$, поэтому и $\overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1} = \bar{0}$.

Таким образом, $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \bar{0}$.

Д4.27. Пусть D — середина отрезка C_1C_1' (рис. Д4.7); $\overline{CD} = (\overline{CC_1} + \overline{CC_1'})$. При повороте на $90°$ векторы $\overline{CC_1}$ и $\overline{CC_1'}$ перейдут соответственно в векторы $\overline{CA}$ и $-\overline{CB}$. Следовательно, при этом повороте сумма векторов $(\overline{CC_1} + \overline{CC_1'})$ перейдет в вектор $(\overline{CA} - \overline{CB})$, т.е. в вектор $\overline{BA_1}$. Поэтому $(\overline{CC_1} + \overline{CC_1'}) \perp \overline{BA}$, $\overline{CC_1} + \overline{CC_1'} = \overline{BA}$, откуда следует утверждение задачи.

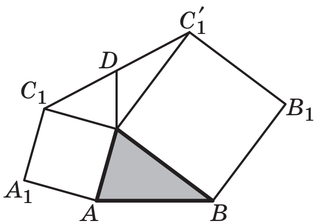


Рис. Д4.7

13. Задачи на параллелограммы

Д4.28. По условию точка O есть центр параллелограмма $ABCD$, поэтому $2\overline{PO} = \overline{PA} + \overline{PC}$ и $2\overline{PO} = \overline{PB} + \overline{PD}$, следовательно, $4\overline{PO} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$.

Д4.29. Обозначим $\frac{\overline{MN}}{\overline{ND}} = m$. Тогда $\overline{AN} = \frac{\overline{AM} + m\overline{AD}}{1+m}$, или $\overline{AN} = \frac{k\overline{AB} + m\overline{AD}}{1+m}$. С другой стороны, $\overline{AN} = l\,(\overline{AB} + \overline{AD})$. В силу единственности разложения $\overline{AN}$ по неколлинеарным векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ имеем $\frac{k}{1+m} = l$, $\frac{m}{1+m} = l$, откуда $l = \frac{k}{1+k}$.

Д4.30. Пусть $\frac{\overline{MC}}{\overline{CN}} = m$. Тогда $\overline{AC} = \frac{\overline{AM} + m\overline{AN}}{1+m}$. С другой стороны, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, т.е. $\overline{AC} = k\overline{AM} + l\overline{AN}$. Следовательно, $\frac{1}{1+m} = k$, $\frac{m}{1+m} = l$, в силу чего $k + l = 1$.

Д4.35. Примем точку O за полюс. Тогда $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{OC}$, $\overline{OB_1} = \overline{OA_1} + \overline{OC_1}$, $\overline{AA_1} = \overline{OA_1} - \overline{OA}$, $\overline{BB_1} = \overline{OB_1} - \overline{OB} = \overline{OA_1} + \overline{OC_1} - \overline{OA} - \overline{OC}$; $\overline{CC_1} = \overline{OC_1} - \overline{OC}$. Заметим, что $\overline{AA_1} - \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{0}$. Это доказывает, что из отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 можно построить треугольник. Поэтому каждый из этих отрезков не больше суммы двух других.

14. Задачи на трапеции

Д4.47. Пусть векторы DA и CB пересекаются в точке O (рис. Д4.8). Тогда $\overline{OD} = \alpha\overline{OA}$, $\overline{OC} = \alpha\overline{OB}$. По условию $AN \parallel CM$, отсюда $\overline{OM} = \beta\overline{OA}$, $\overline{OC} = \beta\overline{ON}$. Следовательно, $\overline{OD} = \frac{\alpha}{\beta}\overline{OM}$, $\overline{ON} = \frac{\alpha}{\beta}\overline{OB}$, значит, $DN \parallel MB$.

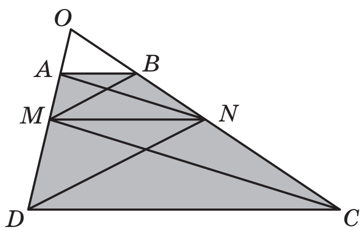


Рис. Д4.8

Д4.50. Докажем сначала, что в любом четырехугольнике $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{CD} + \overline{BA})$, где M и N — соответственно середины отрезков CB и DA;

$$\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CD} + \overline{DN}, \ \overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BA} + \overline{AN}.$$

Сложив эти равенства и учтя, что $\overline{MC} + \overline{MB} = \bar{0}$, $\overline{DN} + \overline{AN} = \bar{0}$, получим $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{CD} + \overline{BA})$. Если бы векторы $\overline{CD}$ и $\overline{BA}$ не были коллинеарны, то $\overline{MN} < \frac{1}{2}(\overline{CD} + \overline{BA})$, что нетрудно доказать, используя свойство сторон треугольника. Следовательно, $CD \parallel BA$, т.е. данный четырехугольник $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

15. Задачи на многоугольники

Д4.51. Пусть точки K, L, P, Q, R, S, T — соответственно середины отрезков AM, MB, BC, CN, ND, DA, MN. Докажем сначала, что точка G_1 является общей серединой средних линий четырехугольника $AMND$. Выберем произвольную точку O. Тогда запишем

$$\overline{OK} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OM}), \quad \overline{OR} = \frac{1}{2}(\overline{OD} + \overline{ON}),$$

$$\overline{OS} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OD}), \quad \overline{OT} = \frac{1}{2}(\overline{OM} + \overline{ON}).$$

Если G_1' и G_1'' — середины отрезков KR и ST, то $\overline{OG_1'} = \overline{OG_1''} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OM} + \overline{OD} + \overline{ON})$; это доказывает, что $G_1' = G_1'' = G_1$.

Следовательно, $\overline{OG_1} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OD})$.

Аналогично

$$\overline{OG_2} = \frac{1}{4}(\overline{OM} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{ON});$$

$$\overline{G_1G_2} = \frac{1}{4}(\overline{OB} - \overline{OA} + \overline{OC} - \overline{OD}),$$

т.е. вектор $\overline{G_1G_2}$ не зависит от выбора точек M и N, $\overline{G_1G_2} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$.

Д4.52. Примем точку M за начало всех векторов:

$$\overline{MM_1} = \overline{MA} + \overline{MB}, \ \overline{MM_3} = \overline{MC} + \overline{MD},$$

$$\overline{MM_2} = \overline{MB} + \overline{MC}, \ \overline{MM_4} = \overline{MA} + \overline{MD},$$

Очевидно, $\overline{MM_1} + \overline{MM_3} = \overline{MM_2} + \overline{MM_4}$.

Д4.53. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — соответственно точки пересечения медиан треугольников BCD, CDA, DAB, ABC:

$$\overline{OA_1} = \frac{1}{3}(\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}), \ \overline{OB_1} = \frac{1}{3}(\overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OA}),$$

$$\overline{OC_1} = \frac{1}{3}(\overline{OD} + \overline{OA} + \overline{OB}), \ \overline{OD_1} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}). \quad (1)$$

Если M и M_1 — соответственно точки пересечения средних линий четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то

$$\overline{OM} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}),$$

$$\overline{OM_1} = \frac{1}{4}(\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} + \overline{OD_1})$$

(см. решение задачи **Д4.51**). Учитывая равенства (1), получим $\overline{OM_1} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$, что доказывает, что $M_1 = M$.

Д4.54. Пусть O — полюс; K, E, F — середины отрезков AD, BC, MN. Тогда

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + k\overline{AB} =$$

$$= \overline{OA} + k(\overline{OB} - \overline{OA}) = k\overline{OB} + (1-k)\overline{OA},$$

$$\overline{ON} = k\overline{OC} + (1-k)\overline{OD},$$

$$\overline{OE} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC}), \ \overline{OK} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OD}),$$

$$\overline{OF} = \frac{1}{2}(k(\overline{OB} + \overline{OC}) + (1-k)(\overline{OA} + \overline{OD})),$$

$$\overline{KE} = \overline{OE} - \overline{OK} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC} - \overline{OA} - \overline{OD}),$$

$$\overline{KF} = \overline{OF} - \overline{OK} = \frac{1}{2}k(\overline{OB} + \overline{OC} - \overline{OA} - \overline{OD}).$$

Так как $\overline{KE} \parallel \overline{EF}$, то точки K, E, F принадлежат одной прямой.

Д4.56. Обозначим через E и F соответственно середины диагоналей AC и BD. Тогда

$$\overline{OM} = \overline{OE} + \overline{OF} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC}) + \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OD}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

Д4.57. Вектор $\sum_{i=1}^{n} \overline{OA_1}$ при повороте на $\frac{360°}{n}$ $(n \geqslant 3)$ переходит сам в себя, так как при этом повороте вектор $\overline{OA_1}$ переходит в $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$ — в $\overline{OA_3}$, ..., $\overline{OA_n}$ — в $\overline{OA_1}$. Таким свойством может обладать только нуль-вектор.

Д4.58. Следует учесть, что $\overline{MA_i} = \overline{MO} + \overline{OA_i}$, а $\sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} = \bar{0}$.

Д4.59. Следует учесть, что $\overline{A_iB_i} = \overline{A_iO_i} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2B_i}$ и $\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iO_1} = \bar{0}$, $\sum_{i=1}^{n} \overline{O_2B_i} = \bar{0}$.

Д4.60. $\overline{OA_3} = -\overline{OA_1} + (2\sin 72°)\overline{OA_2}$.

Д4.61. Докажем, что вектор $\overline{PR}$ получается из вектора $\overline{SQ}$ поворотом на 90° (рис. Д4.9):

$$\overline{SQ} = \overline{SL} + \overline{LK} + \overline{KQ}$$

или

$$\overline{SQ} = \overline{SL} + \frac{1}{2}(\overline{DC} + \overline{AB}) + \overline{KQ}.$$

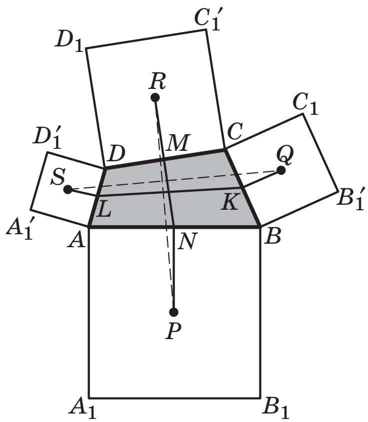


Рис. Д4.9

Повернем каждый вектор правой части последнего равенства на 90°. Тогда

$$\overline{SL} \to \overline{DL} = \frac{1}{2}\overline{AD},\ \frac{1}{2}\overline{DC} \to \overline{MR},$$
$$\frac{1}{2}\overline{AB} \to \overline{PN},\ \overline{KQ} \to \frac{1}{2}\overline{BC};$$

$$\overline{SQ} \to \left(\frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{MR} + \overline{PN} + \frac{1}{2}\overline{BC}\right) = \overline{PN} + \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) + \overline{MR} =$$
$$= \overline{PN} + \overline{NM} + \overline{MR} = \overline{PR}.$$

Значит, $\overline{PR}$ получается из $\overline{SQ}$ поворотом на 90°. Следовательно, $\overline{PR} \perp \overline{SQ}$, $\overline{PR} = \overline{SQ}$.

16. Задачи на окружность и круг

Д4.67. Можно записать $\overline{OA} + \overline{OB} = -(\overline{OC} + \overline{OD})$. Вектор $\overline{OC} + \overline{OD} = \overline{OE}$ противоположен вектору $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OF}$, поэтому $\overline{OE} = \overline{OF}$. Кроме того, каждый из этих векторов является диагональю ромба, построенного на векторах равной длины, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$. Следовательно, построенные ромбы $OAFB$ и $OCED$ равны. Известно, что диагональ ромба является его осью симметрии, значит, EF — ось симметрии, проходящая через общую вершину O двух равных ромбов. Отсюда $\angle AOC = \angle BOD = 180°$ и AC и BD — два диаметра. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

Д4.68. а) Постройте $CM \parallel OB$ и $CN \parallel OA$, четырехугольник $OMCN$ — ромб (рис. Д4.10). В треугольнике MCA $MA = \frac{1}{2}MC$, откуда $MA = \frac{1}{2}MO$, т.е. $\overline{OM} = \frac{2}{3}\overline{OA}$. Очевидно, $\overline{ON} = \frac{2}{3}\overline{OB}$. Но $\overline{OC} = \overline{OM} + \overline{ON}$, а тогда $\overline{OC} = \frac{2}{3}(\overline{OA} + \overline{OB})$.

б) $\overline{OC} = 2(\overline{OA} + \overline{OB})$.

Д4.69. а) $\overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\overline{OA} + \overline{OB})$, б) $\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$, в) $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$.

Д4.71. 1) Проведите два диаметра окружности d_1 и d_2, соответственно перпендикулярные хордам AB и CD (рис. Д4.11). Пересечением d_1 и отрезка AB является точка K, а d_2 и отрезка

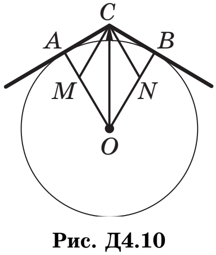


Рис. Д4.10

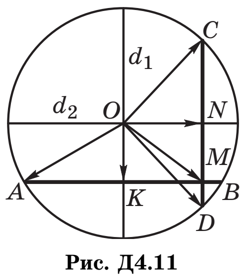


Рис. Д4.11

CD — точка N. Четырехугольник $OKMN$ — прямоугольник и OM — диагональ этого прямоугольника, отсюда $\overline{OM} = \overline{OK} + \overline{ON}$. Но $\overline{OK} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$, а $\overline{ON} = \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OD})$, поэтому

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

2) Точка K — середина хорды AC, поэтому $\overline{OK} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC})$ (рис. Д.4.12), L — середина хорды $\overline{BD}$, тогда

$$\overline{OL} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OD});$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

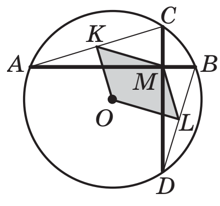
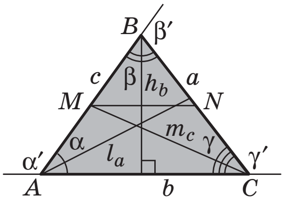


Рис. Д4.12

Отсюда $\overline{LM} = \overline{OM} - \overline{OL} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC})$. Таким образом, $\overline{OK} = \overline{LM}$, значит, четырехугольник $OKML$ — параллелограмм.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И СООТНОШЕНИЯ

I. Треугольники



a, b, c — стороны треугольника.

α, β, γ — внутренние углы треугольника.

α′, β′, γ′ — внешние углы треугольника.

h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, опущенные из вершин треугольника на прямые, содержащие соответствующие противоположные стороны a, b, c.

m_a, m_b, m_c — медианы треугольника, соединяющие вершины треугольника с серединами противолежащих сторон a, b, c.

l_a, l_b, l_c — биссектрисы треугольника, соединяющие вершины треугольника с точками на противолежащих сторонах a, b, c.

MN — средняя линия треугольника.

P — периметр треугольника.

p — полупериметр треугольника.

R — радиус окружности, описанной около треугольника.

r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

$S_{\Delta ABC}$ — площадь треугольника ABC.

Сумма углов треугольника

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Свойства внешних углов треугольника

$$\alpha' = \beta + \gamma,\ \beta' = \alpha + \gamma,\ \gamma' = \alpha + \beta,$$

$$\alpha' > \beta,\ \alpha' > \gamma,\ \beta' > \alpha,\ \beta' > \gamma,\ \gamma' > \alpha,\ \gamma' > \beta.$$

Неравенство треугольника

$$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b.$$

Периметр и полупериметр треугольника

$$P = a + b + c,\ p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Свойства средней линии треугольника

$$MN \parallel AC,\ MN = \frac{b}{2}.$$

Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}ah_a,\ S = \frac{1}{2}bh_b,\ S = \frac{1}{2}ch_c;$$

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\beta,\ S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,\ S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ ***(формула Герона).***

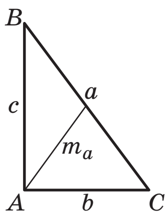
Равнобедренный треугольник

$$a = c,\ \angle\alpha = \angle\gamma,$$
$$h_b = m_b = l_b.$$

Равносторонний треугольник

$$a = b = c,\ \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ;$$
$$h_a = l_a = m_a,\ h_b = l_b = m_b,\ h_c = l_c = m_c;$$
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ r = \frac{a\sqrt{3}}{6},\ S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Прямоугольный треугольник



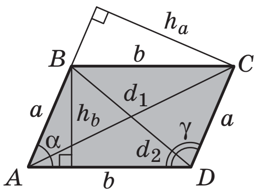
$\alpha = 90^\circ$, b, c — катеты, a — гипотенуза,

$a^2 = b^2 + c^2$ (***теорема Пифагора***);

$$R = \frac{a}{2} = m_a,\ S = \frac{1}{2}bc.$$

II. Четырехугольники

Параллелограмм



a, b — стороны параллелограмма.

h_a, h_b — высоты параллелограмма, опущенные из вершин параллелограмма на прямые, содержащие стороны параллелограмма a, b.

d_1, d_2 — диагонали параллелограмма.

α, γ — углы параллелограмма, $\alpha + \gamma = 180^\circ$.

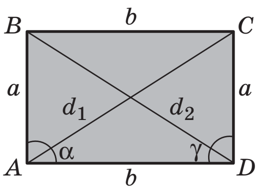
Площадь параллелограмма

$$S = ah_a,\ S = bh_b,\ S = ab\sin\alpha.$$

Связь между сторонами и диагоналями параллелограмма

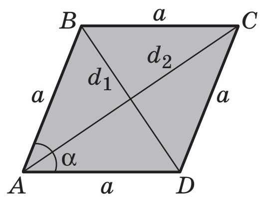
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Прямоугольник



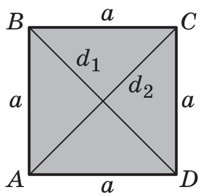
$\alpha = \gamma = 90^\circ$,
$d_1 = d_2$,
$S = ab$,
$d_1^2 = a^2 + b^2$.

Ромб



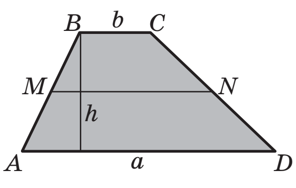
$d_1 \perp d_2$,
$S = a^2 \sin\alpha$,
$S = \dfrac{1}{2} d_1 d_2$,
$d_1^2 = d_2^2 = 4a^2$.

Квадрат



$\alpha = \gamma = 90^\circ$,
$d_1 = d_2,\ d_1 \perp d_2$,
$S = a^2$,
$d_1 = a\sqrt{2}$.

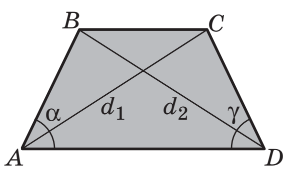
Трапеция



$MN = \dfrac{a+b}{2}$ — средняя линия трапеции;

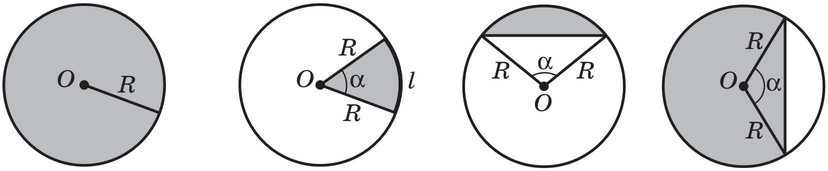
$S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$.

Равнобедренная трапеция



$AB = CD$,
$\alpha = \gamma$,
$d_1 = d_2$.

III. Окружность и круг



R — радиус окружности (круга),

$C = 2\pi R$ — длина окружности,

$l = \dfrac{\pi R\alpha}{180}$ — длина дуги (α — градусная мера соответствующего центрального угла),

$S = \pi R^2$ — площадь круга,

$S_{\text{сект}} = \dfrac{\pi R^2\alpha}{360}$ — площадь кругового сектора,

$S_{\text{сегм}} = \dfrac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_\Delta$ — площадь кругового сегмента,

где α — градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, S_Δ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и в концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «+» надо брать, если $\alpha > 180°$, а знак «−», — если $\alpha < 180°$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

К читателю 3
Литература 6

Часть I

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕМАМ ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Глава I. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Тема 1. Плоскости, точки, прямые 8
1. Плоскости 8
2. Точки и прямые 10
3. Взаимное расположение точек, прямых и плоскостей 14
4. Взаимное расположение прямых 18
5. Взаимное расположение плоскостей 21

Тема 2. Общие представления о геометрических фигурах 23
6. Геометрические фигуры, их объединение и пересечение 23
7. Взаимное расположение плоскостей и геометрических фигур 31
8. Изображение геометрических фигур 35

Тема 3. Отрезки и их измерение 39
9. Понятие отрезка 39
10. Измерение отрезков 42
11. Расстояние между фигурами 46

Тема 4. Ломаная 47
12. Понятие ломаной 47
13. Длина ломаной 52

Тема 5. Углы 54
14. Лучи. Направления 54
15. Понятие угла 57
16. Измерение углов 59
17. Смежные углы 64
18. Вертикальные углы 66

Тема 6. Треугольники 69
19. Определение треугольника 69
20. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Сумма углов треугольника 74

21. Признаки равенства треугольников 78
22. Свойства прямоугольного треугольника.
Теорема Пифагора 89
23. Свойства равнобедренного треугольника 92

Тема 7. Четырехугольники 94
24. Прямоугольник и квадрат 94
25. Параллелограмм 106
25. 1. Определение и свойства параллелограмма. . . . 107
25. 2. Признаки параллелограмма. 111
26. Ромб 116
27. Трапеция 121

Тема 8. Многоугольники 127
28. Понятие многоугольника 127
29. Углы многоугольника 133
30. Правильные многоугольники 136

Тема 9. Окружность и круг 140
31. Определения окружности и круга 140
32. Взаимное расположение прямой и окружности.
Взаимное расположение окружностей 142
33. Касательные к окружности 146
34. Расстояние от центра окружности до её хорды 148
35. Части окружности и круга 150

Тема 10. Вписанные и описанные многоугольники 151
36. Вписанный угол 151
37. Вписанные и описанные треугольники 161
38. Четырехугольники, вписанные в окружность 167
39. Четырехугольники, описанные около окружности . 172
40. Вписанные и описанные
произвольные многоугольники 174

Глава II. ПЛОЩАДИ ФИГУР

Тема 11. Площади многоугольников 177
41. Площади квадрата и прямоугольника 177
42. Площади параллелограмма и ромба. 183
43. Площадь треугольника 187
44. Площадь трапеции 195
45. Площади произвольных многоугольников 199

Тема 12. Площади правильных многоугольников и круга 206
46. Площади правильных многоугольников 206
47. Площадь круга 207
48. Площади частей круга 209

Глава III. ПОДОБИЕ ФИГУР

Тема 13. Понятие подобия фигур. Подобные треугольники 212
49. Понятие подобия фигур. Подобие треугольников . . 212
50. Признаки подобия треугольников 214

Тема 14. Подобие многоугольников 227
51. Свойства и признаки подобных многоугольников . . 227
52. Периметры и площади подобных фигур 230

Глава IV. ИЗОМЕТРИИ

Тема 15. Поворот и центральная симметрия 236
53. Поворот 236
54. Центральная симметрия 240

Тема 16. Осевая симметрия. Параллельный перенос 243
55. Осевая симметрия 243
56. Параллельный перенос 248

Глава V. ВЕКТОРЫ

Тема 17. Элементы векторной алгебры 250
57. Понятие вектора. Равенство векторов 250
58. Сложение векторов 253
59. Разность векторов 256
60. Умножение вектора на число 258

Тема 18. Длина вектора. Коллиниарность векторов. Деление отрезка в данном отношении 261

Часть II

ЗАДАЧИ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ТЕМАМ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Тема Д1. Геометрические преобразования и их свойства 266
1. Понятие геометрического преобразования 266
2. Понятие изометрии и ее свойства 270
3. Преобразование подобия 271

Тема Д2. Применение изометрии к решению задач 273
4. Повороты. Композиции поворотов 273
5. Параллельный перенос и центральная симметрия . . 276
6. Композиции осевых симметрий и других изометрий. . 276

Тема Д3. Гомотетия и подобие 279
7. Понятие гомотетии и ее свойства 279
8. Гомотетия окружностей 283
9. Две и более гомотетии 285
10. Пропорциональные отрезки 286
11. Применение гомотетии и подобия 290

Тема Д4. Применение векторов к решению геометрических задач 294
12. Задачи на треугольники 294
13. Задачи на параллелограммы 297
14. Задачи на трапеции 299
15. Задачи на многоугольники 299
16. Задачи на окружность и круг 301

ОТВЕТЫ. РЕШЕНИЯ. УКАЗАНИЯ

Часть I

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕМАМ ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

ГЛАВА I. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ 304

Тема 1. Плоскости, точки, прямые. 304
Тема 2. Общие представления о геометрических фигурах 313
Тема 3. Отрезки и их измерение 318
Тема 4. Ломаная 323
Тема 5. Углы 335
Тема 6. Треугольники 350
Тема 7. Четырехугольники 355
Тема 8. Многоугольники 372
Тема 9. Окружность и круг 375
Тема 10. Вписанные и описанные многоугольники 383

Глава II. ПЛОЩАДИ ФИГУР 391

Тема 11. Площади многоугольников 391
Тема 12. Площади правильных многоугольников и круга 405

Глава III. ПОДОБИЕ ФИГУР 406

Тема 13. Понятие подобия фигур. Подобные треугольники 406
Тема 14. Подобие многоугольников 413

Глава IV. ИЗОМЕТРИИ 415

Тема 15. Поворот и центральная симметрия 415
Тема 16. Осевая симметрия. Параллельный перенос 419

Глава V. ВЕКТОРЫ 423

Тема 17. Элементы векторной алгебры 423
Тема 18. Длина вектора. Коллиниарность векторов. Деление отрезка в данном отношении 426

Часть II

ЗАДАЧИ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ТЕМАМ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Тема Д1. Геометрические преобразования и их свойства 431
Тема Д2. Применение изометрии к решению задач. 436
Тема Д3. Гомотетия и подобие. 443
Тема Д4. Применение векторов к решению геометрических задач. 456

Учебное издание

Гусев Валерий Александрович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

5 — 9 классы

Ответственный редактор *Е. С. Гридасова*
Редакторы *О. А. Фёдорова, Ю. А. Коновалова*
Младший редактор *К. А. Каширина*
Технический редактор *Л. Б. Чуева*
Корректор *Е. В. Морозова*

Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*

Подписано в печать 04.10.2004. Формат 60x90 $^{1}/_{16}$.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 30,00. Тираж 5000 экз. Заказ № .

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век».
Изд. лиц. ИД № 02795 от 11.09.2000.
105066, Москва, ул. Доброслободская, д. 5а.
Отдел реализации: тел. (095) 310-75-25, 110-02-50.
Internet: www.onyx.ru; e-mail: mail@onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001.
109193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.
Тел./факс (095) 120-51-47, 129-09-60, 742-43-54.
E-mail: mir-obrazovanie@rambler.ru