Ю. Н. Макарычев
Н. Г. Миндюк

Элементы статистики
и теории вероятностей

АЛГЕБРА

классы
7–9

•Просвещение•

Ю. Н. Макарычев
Н. Г. Миндюк

АЛГЕБРА

Элементы статистики и теории вероятностей

Учебное пособие
для учащихся 7— 9 классов
общеобразовательных учреждений

Под редакцией С. А. Теляковского

*Допущено
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

3-е издание

Москва
«Просвещение»
2005

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
М15

Макарычев Ю. Н.

М15 Алгебра : элементы статистики и теории вероятностей : учеб. пособие для учащихся 7—9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк; под ред. С. А. Теляковского.— 3-е изд.— М. : Просвещение, 2005.— 78 с. : ил.— ISBN 5-09-014164-9.

Данное пособие предназначено для изучения вероятностно-статистического материала при работе по учебникам «Алгебра, 7», «Алгебра, 8», «Алгебра, 9» Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой, под ред. С. А. Теляковского.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 5-09-014164-9

© Издательство «Просвещение», 2003
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2003
Все права защищены

7 класс

§ 1. Статистические характеристики

1. Среднее арифметическое, размах и мода

При изучении учебной нагрузки учащихся выделили группу из 12 семиклассников. Их попросили отметить в определенный день время (в минутах), затраченное на выполнение домашнего задания по алгебре. Получили такие данные:

23, 18, 25, 20, 25, 25, 32, 37, 34, 26, 34, 25.

Имея этот ряд данных, можно определить, сколько минут в среднем затратили учащиеся на выполнение домашнего задания по алгебре.

Для этого указанные числа надо сложить и сумму разделить на 12:

$$\frac{23+18+25+20+25+25+32+37+34+26+34+25}{12}=\frac{324}{12}=27.$$

Число 27, полученное в результате, называют *средним арифметическим* рассматриваемого ряда чисел.

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Мы нашли, что на выполнение домашнего задания по алгебре учащиеся затратили в среднем по 27 мин. Проводя аналогичные наблюдения за этой группой учащихся, можно проследить, какова была средняя затрата времени на выполнение домашнего задания по алгебре в течение недели, сравнить среднюю затрату времени на выполнение в какой-либо день домашних заданий по алгебре и русскому языку и т. п.

Обычно среднее арифметическое находят тогда, когда хотят определить среднее значение для некоторого ряда данных: среднюю урожайность пшеницы с 1 га в районе, средний суточный удой молока от одной коровы на ферме, среднюю выработку одного рабочего бригады за смену и т. п. Заметим, что среднее арифметическое находят только для однородных величин. Не имеет, например, смысла использовать в качестве обобщающего показателя среднюю урожайность зерновых и бахчевых культур в фермерском хозяйстве. Причем и для однородных величин вычисление среднего арифметического бывает иногда лишено смысла, например нахождение средней температуры больных в госпитале, среднего размера обуви, которую носят учащиеся школы.

В рассмотренном примере мы нашли, что в среднем учащиеся затратили на выполнение домашнего задания по алгебре по 27 мин. Однако анализ приведенного ряда данных показывает, что время, затраченное некоторыми учащимися, существенно отличается от

27 мин, т. е. от среднего арифметического. Наибольший расход равен 37 мин, а наименьший — 18 мин. Разность между наибольшим и наименьшим расходом времени составляет 19 мин. В этом случае говорят, что *размах* ряда равен 19.

Размахом ряда чисел называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

Размах ряда находят тогда, когда хотят определить, как велик разброс данных в ряду. Пусть, например, в течение суток отмечали каждый час температуру воздуха в городе. Для полученного ряда данных полезно не только вычислить среднее арифметическое, показывающее, какова среднесуточная температура, но и найти размах ряда, характеризующий колебание температуры воздуха в течение этих суток.

При анализе сведений о времени, затраченном семиклассниками на выполнение домашнего задания по алгебре, нас могут интересовать не только среднее арифметическое и размах полученного ряда данных, но и другие показатели. Интересно, например, знать, какой расход времени является типичным для выделенной группы учащихся, т. е. какое число встречается в ряду данных чаще всего. Нетрудно заметить, что таким числом является число 25. Говорят, что число 25 — *мода* рассматриваемого ряда.

Модой ряда чисел называется число, наиболее часто встречающееся в данном ряду.

Ряд чисел может иметь более одной моды или не иметь моды совсем.

Например, в ряду чисел 47, 46, 50, 52, 47, 52, 49, 45, 43, 53 две моды — это числа 47 и 52, так как каждое из этих чисел встречается два раза, а остальные числа встречаются в ряду менее двух раз, а в ряду чисел

69, 68, 66, 70, 67, 71, 74, 63, 73, 72

моды нет.

Моду ряда данных обычно находят тогда, когда хотят выявить некоторый типичный показатель. Например, если изучаются данные о размерах мужских сорочек, проданных в определенный день в универмаге, то удобно воспользоваться таким показателем, как мода, который характеризует размер, пользующийся наибольшим спросом. Находить в этом случае среднее арифметическое не имеет смысла. Мода является наиболее приемлемым показателем при выявлении расфасовки некоторого товара, которой отдают предпочтение покупатели, цены на товар данного вида, распространенной на рынке, и т. п.

Рассмотрим еще пример. Пусть, проведя учет деталей, изготовленных за смену рабочими одной бригады, получили такой ряд данных:

36, 35, 35, 36, 37, 37, 36, 37, 38, 36, 36, 36, 39, 39, 37, 39, 38, 38, 36, 39, 36.

Найдем для него среднее арифметическое, размах и моду. Для этого удобно предварительно составить из полученных данных *упорядоченный ряд чисел*, т. е. такой ряд, в котором каждое последующее число не меньше (или не больше) предыдущего. Получим

35, 35, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39.

Вычислим среднее арифметическое:

$$\frac{35 \cdot 2 + 36 \cdot 8 + 37 \cdot 4 + 38 \cdot 3 + 39 \cdot 4}{21} = \frac{776}{21} \approx 37.$$

Размах ряда равен $39 - 35 = 4$. Мода данного ряда равна 36, так как число 36 чаще всего встречается в этом ряду.

Итак, средняя выработка рабочих за смену составляет примерно 37 деталей; различие в выработке рабочих не превосходит 4 деталей; типичной является выработка, равная 36 деталям.

Заметим, что среднее арифметическое ряда чисел может не совпадать ни с одним из этих чисел, а мода, если она существует, обязательно совпадает с двумя или более числами ряда. Кроме того, в отличие от среднего арифметического, понятие «мода» относится не только к числовым данным. Например, проведя опрос учащихся, можно получить ряд данных, показывающий, каким видом спорта они предпочитают заниматься, какую из развлекательных телевизионных программ они считают наиболее интересной. Модой будут служить те ответы, которые встретятся чаще всего. Этим и объясняется само название «мода».

Такие характеристики, как среднее арифметическое, размах и мода, находят применение в *статистике* — науке, которая занимается получением, обработкой и анализом количественных данных о разнообразных массовых явлениях, происходящих в природе и обществе. Слово «статистика» происходит от латинского слова *status*, которое означает «состояние, положение вещей». Статистика изучает численность отдельных групп населения страны и ее регионов, производство и потребление разнообразных видов продукции, перевозку грузов и пассажиров различными видами транспорта, природные ресурсы и т. п. Результаты статистических исследований широко используются для практических и научных выводов.

7.1. Найдите среднее арифметическое и размах ряда чисел:

а) 24, 22, 27, 20, 16, 31; в) 30, 5, 23, 5, 28, 30;
б) 11, 9, 7, 6, 2, 0, 1; г) 144, 146, 114, 138.

7.2. Найдите среднее арифметическое, размах и моду ряда чисел:

а) 32, 26, 18, 26, 15, 21, 26;
б) 21, 18,5, 25,3, 18,5, 17,9;
в) 67,1, 68,2, 67,1, 70,4, 68,2;
г) 0,6, 0,8, 0,5, 0,9, 1,1.

7.3. Найдите среднее арифметическое, размах и моду ряда чисел:

а) 16, 22, 16, 13, 20, 17;
б) -21, -33, -35, -19, -20, -22;
в) 61, 64, 64, 83, 61, 71, 70;
г) -4, -6, 0, 4, 0, 6, 8, -12.

7.4. Как могут измениться размах и мода ряда чисел, если:
а) дополнить его числом, превосходящим все остальные;
б) вычеркнуть из него число, меньшее всех остальных;
в) дополнить его числом, равным наибольшему из чисел?

7.5. В таблице показан расход электроэнергии некоторой семьей в течение года:

Месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Расход электроэнергии, кВт·ч	85	80	74	61	54	34	32	32	62	78	81	83

Найдите средний ежемесячный расход электроэнергии этой семьей.

7.6. В таблице приведены данные о продаже в течение недели картофеля, завезенного в овощную палатку:

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Количество картофеля, кг	275	286	250	290	296	315	325

Сколько картофеля в среднем продавали ежедневно в эту неделю?

7.7. Среднее арифметическое ряда, состоящего из десяти чисел, равно 15. К этому ряду приписали число 37. Чему равно среднее арифметическое нового ряда чисел?

7.8. Среднее арифметическое ряда, состоящего из девяти чисел, равно 13. Из этого ряда вычеркнули число 3. Чему равно среднее арифметическое нового ряда чисел?

7.9. В ряду чисел

$$2,\ 7,\ 10,\ \_\_,\ 18,\ 19,\ 27$$

одно число оказалось стертым. Восстановите его, зная, что среднее арифметическое этих чисел равно 14.

7.10. В ряду чисел

$$3,\ 8,\ 15,\ 30,\ \_\_,\ 24$$

пропущено одно число. Найдите его, если:

а) среднее арифметическое ряда равно 18;
б) размах ряда равен 40;
в) мода ряда равна 24.

7.11. В таблице показано число деталей, изготовленных за смену рабочими одной бригады:

№ п/п	Фамилия	Число деталей	№ п/п	Фамилия	Число деталей
1	Иванов	38	7	Семенов	45
2	Лазарев	42	8	Лукин	42
3	Ильин	36	9	Андреев	40
4	Бережной	45	10	Попов	47
5	Егоров	48	11	Сурков	39
6	Петров	45			

Для представленного в таблице ряда чисел найдите среднее арифметическое, размах и моду. Каков смысл каждого из этих показателей?

7.12. На соревнованиях по фигурному катанию судьи поставили спортсмену следующие оценки:

5,2, 5,4, 5,5, 5,4, 5,1, 5,1, 5,4, 5,5, 5,3.

Для полученного ряда чисел найдите среднее арифметическое, размах и моду. Что характеризует каждый из этих показателей?

7.13. В аттестате о среднем образовании у четырех друзей — выпускников школы — оказались следующие оценки:

Ильин: 4, 4, 5, 5, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 4, 4, 5, 4, 4;
Семенов: 3, 4, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 4;
Попов: 5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4;
Романов: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 5, 3, 4, 4.

С каким средним баллом окончил школу каждый из этих выпускников? Укажите наиболее типичную для каждого из них оценку в аттестате. Какие статистические характеристики вы использовали при ответе?

7.14. В фермерском хозяйстве отведены под пшеницу три участка, площади которых равны 12 га, 8 га и 6 га. Средняя урожайность на первом участке составляет 18 ц с 1 га, на втором — 19 ц с 1 га, на третьем — 23 ц с 1 га. Чему равна средняя урожайность пшеницы в этом хозяйстве?

7.15. Проведя учет числа бракованных деталей в 10 ящиках с одинаковым числом деталей, получили следующий ряд данных:

1, 2, 2, 3, 0, 2, 3, 1, 1, 2.

Найдите для этого ряда среднее арифметическое и моду. Что характеризует каждый из этих показателей?

7.16. Каждый из 24 участников соревнований по стрельбе произвел по десять выстрелов. Отмечая всякий раз число попаданий в цель, получили следующий ряд данных:

6, 5, 5, 6, 8, 3, 7, 6, 8, 5, 4, 9,
7, 7, 9, 8, 6, 6, 5, 6, 4, 3, 6, 5.

Найдите для этого ряда размах и моду. Что характеризует каждый из этих показателей?

7.17. В таблице записаны результаты ежедневного измерения на метеостанции в полдень температуры воздуха (в градусах Цельсия) в течение первой декады марта:

Число месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Температура, °С	–2	–1	–3	0	1	2	2	3	4	3

Найдите среднюю температуру в полдень в эту декаду. Составьте таблицу отклонений от средней температуры воздуха в полдень в каждый из дней декады.

Упражнения для повторения

7.18. Найдите значение выражения:

а) $\frac{9^3 \cdot 4^5}{6^{12}}$; б) $\frac{25^2 \cdot 4^3}{10^3}$.

7.19. Площадь комнаты приближенно равна 12,5 м^2 (с точностью до 0,1 м^2). Оцените относительную погрешность этого приближения.

7.20. Упростите выражение:

а) $(-0{,}2a^2b)^2 \cdot 0{,}4ab^3$; б) $(-0{,}1xy^2)^3 \cdot 1000x^4y$.

7.21. Постройте график функции:

а) $y = 1{,}5x$; б) $y = -2x - 1$.

2. Медиана как статистическая характеристика

Рассмотрим еще одну статистическую характеристику.

Начнем с примера. В таблице показан расход электроэнергии в январе жильцами девяти квартир:

Номер квартиры	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Расход электроэнергии, кВт·ч	85	64	78	93	72	91	72	75	82

Составим из данных, приведенных в таблице, упорядоченный ряд:

$$64,\ 72,\ 72,\ 75,\ \underbrace{78},\ 82,\ 85,\ 91,\ 93.$$

В полученном упорядоченном ряду девять чисел. Нетрудно заметить, что в середине ряда расположено число 78: слева от него записано четыре числа и справа тоже четыре числа. Говорят, что число 78 является срединным числом, или, иначе, *медианой*, рассматриваемого упорядоченного ряда чисел (от латинского слова *mediana*, которое означает «среднее»). Это число считают также медианой исходного ряда данных.

Приведем теперь другой пример. Пусть при сборе данных о расходе электроэнергии к указанным девяти квартирам добавили еще десятую. Получили такую таблицу:

Номер квартиры	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Расход электроэнергии, кВт·ч	85	64	78	93	72	91	72	75	82	88

Так же как в первом случае, представим полученные данные в виде упорядоченного ряда чисел:

$$64,\ 72,\ 72,\ 75,\ \underbrace{78,\ 82},\ 85,\ 88,\ 91,\ 93.$$

В этом числовом ряду четное число членов и имеются два числа, расположенные в середине ряда: 78 и 82. Найдем среднее арифметическое этих чисел: $\frac{78+82}{2}=80$. Число 80, не являясь членом ряда, разбивает этот ряд на две одинаковые по численности группы: слева от него находится пять членов ряда и справа тоже пять членов ряда:

$$64,\ 72,\ 72,\ 75,\ 78,\ \boxed{80}\ 82,\ 85,\ 88,\ 91,\ 93.$$

Говорят, что в этом случае медианой рассматриваемого упорядоченного ряда, а также исходного ряда данных, записанного в таблице, является число 80.

Медианой упорядоченного ряда чисел с нечетным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с четным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

Медианой произвольного ряда чисел называется медиана соответствующего упорядоченного ряда.

Если в упорядоченном числовом ряду содержится $2n-1$ членов, то медианой ряда является n-й член, так как $n-1$ членов стоит до n-го члена и $n-1$ членов — после n-го члена. Если в упорядоченном числовом ряду содержится $2n$ членов, то медианой является среднее арифметическое членов, стоящих на n-м и $n+1$-м местах.

В каждом из рассмотренных выше примеров, определив медиану, мы можем указать номера квартир, для которых расход электроэнергии жильцами превосходит срединное значение, т. е. медиану.

Рассмотрим еще пример. Известно, что 34 сотрудника отдела приобрели акции некоторого акционерного общества. Данные о числе акций, приобретенных сотрудниками, представлены в виде следующего упорядоченного ряда:

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\quad \underbrace{3,\ 3,\ \ldots,\ 3}_{12\ \text{раз}},\quad \underbrace{4,\ 4,\ \ldots,\ 4}_{16\ \text{раз}},\quad 100.$$

Найдем медиану этого ряда. Так как всего в ряду 34 числа, то медиана равна среднему арифметическому 17-го и 18-го членов, т. е. равна $(3+4):2=3{,}5$.

Вычисляя среднее арифметическое этого ряда, найдем, что оно приближенно равно 6,2, т. е. в среднем сотрудники отдела приобрели примерно по 6 акций. Мы видим, что в данном случае медиана лучше отражает реальную ситуацию, так как все сотрудники, кроме одного, приобрели не более 4 акций.

Такие показатели, как среднее арифметическое, мода и медиана, по-разному характеризуют данные, полученные в результате наблюдений. Поэтому на практике при анализе данных в зависимости от конкретной ситуации используют либо все три показателя, либо некоторые из них.

Если, например, анализируются сведения о годовых доходах нескольких туристических фирм города, то удобно использовать все три показателя. Среднее арифметическое покажет средний годовой доход фирм, мода будет характеризовать типичный показатель годового дохода, медиана позволит определить туристические фирмы, годовой доход которых ниже срединного показателя.

Если изучаются данные о размерах мужской обуви, проданной в определенный день в универмаге, то удобно воспользоваться таким показателем, как мода, который характеризует размер, пользующийся наибольшим спросом. Находить в этом случае среднее арифметическое или медиану не имеет смысла.

При анализе результатов, показанных участницами заплыва на дистанцию 100 м, наиболее приемлемой характеристикой является медиана. Знание медианы позволит выделить для участия в соревнованиях группу спортсменок, показавших результат выше срединного.

7.22. Найдите медиану ряда чисел:

а) 30, 32, 37, 40, 41, 42, 45, 49, 52;
б) 102, 104, 205, 207, 327, 408, 417;
в) 16, 18, 20, 22, 24, 26;
г) 1,2, 1,4, 2,2, 2,6, 3,2, 3,8, 4,4, 5,6.

7.23. Найдите среднее арифметическое и медиану ряда чисел:

а) 27, 29, 23, 31, 21, 34;
б) 56, 58, 64, 66, 62, 74;
в) 3,8, 7,2, 6,4, 6,8, 7,2;
г) 21,6, 37,3, 16,4, 12,6.

7.24. Известно, что ряд данных состоит из натуральных чисел. Может ли для этого ряда быть дробным числом:

а) среднее арифметическое; б) размах;
в) мода; г) медиана?

7.25. В таблице показано число посетителей выставки в разные дни недели:

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Число посетителей	604	638	615	636	625	710	724

Найдите медиану указанного ряда данных. В какие дни недели число посетителей выставки было больше медианы?

7.26. В таблице показано число изделий, изготовленных за месяц членами артели:

№ п/п	Фамилия	Число изделий	№ п/п	Фамилия	Число изделий
1	Антонов	185	7	Квитко	178
2	Астафьев	194	8	Лазарев	149
3	Баранов	179	9	Осокин	156
4	Бобков	185	10	Рылов	185
5	Васильев	136	11	Сухов	168
6	Егоров	158	12	Чернышев	174

Найдите медиану этого ряда данных. У кого из членов артели выработка за месяц была больше медианы?

7.27. В таблице показано, сколько акций одинаковой стоимости некоторого акционерного общества приобрели сотрудники отдела:

№ п/п	Фамилия	Число акций	№ п/п	Фамилия	Число акций
1	Астахова	5	9	Муравьев	1
2	Бодров	4	10	Николаева	4
3	Волков	10	11	Осипов	12
4	Ерин	3	12	Павлов	6
5	Ильин	2	13	Петрова	8
6	Куликова	10	14	Райков	10
7	Лаврова	25	15	Тимофеев	2
8	Михайлов	3	16	Федоров	4

Найдите медиану этого ряда данных. У кого из сотрудников отдела число приобретенных акций превосходит медиану?

7.28. Зная, что в упорядоченном ряду содержится m чисел, где m — нечетное число, укажите номер члена, являющегося медианой, если m равно:

а) 5; б) 17; в) 47; г) 201.

7.29. Для упорядоченного ряда, содержащего m чисел, где m — четное число, укажите номера двух последовательных членов, между которыми заключена медиана, если m равно:

а) 6; б) 18; в) 56; г) 240.

7.30. Ниже указана среднесуточная переработка сахара (в тыс. ц) заводами сахарной промышленности некоторого региона:

12,2, 13,2, 13,7, 18,0, 18,6, 12,2, 18,5, 12,4, 14,2, 17,8.

Для представленного ряда данных найдите среднее арифметическое, моду, размах и медиану. Что характеризует каждый из этих показателей?

7.31. Отмечая время (с точностью до минут), которое токари бригады затратили на обработку одной детали, получили такой ряд данных:

30, 32, 32, 38, 36, 31, 32, 38, 35, 36, 32, 40, 42, 36, 33, 35, 32, 32, 40, 38.

Для полученного ряда данных найдите размах, моду и медиану. Объясните практический смысл этих статистических показателей.

7.32. В организации вели ежедневный учет поступивших в течение месяца писем. В результате получили такой ряд данных:

39, 43, 40, 0, 56, 38, 24, 21, 35, 38, 0, 58, 31, 49, 38, 25, 34, 0, 52, 40, 42, 40, 39, 54, 0, 64, 44, 50, 38, 37, 32.

Для полученного ряда данных найдите среднее арифметическое, размах, моду и медиану. Каков практический смысл этих показателей?

Упражнения для повторения

7.33. Сравните значения выражений:

а) $(-7{,}2)^4 \cdot 5{,}6$ и $-7{,}2^4 \cdot 5{,}6$; б) $-0{,}8^2 \cdot 16$ и $(-0{,}8)^2 \cdot (-16)$.

7.34. Постройте график функции:

а) $y = -2{,}5x$; б) $y = -x + 4$.

7.35. График функции, заданной формулой $y = kx + b$, пересекает оси координат в точках $A(0; 2{,}5)$ и $B(-3{,}5; 0)$. Найдите k и b.

Контрольные вопросы

1. Что называется средним арифметическим ряда чисел? Может ли среднее арифметическое ряда чисел не совпадать ни с одним из этих чисел?
2. Что называется размахом ряда чисел?
3. Что называется модой ряда чисел? Любой ли ряд чисел имеет моду? Может ли ряд чисел иметь более одной моды? Может ли мода ряда чисел не совпадать ни с одним из этих чисел?
4. Что называется медианой ряда чисел? Может ли медиана ряда чисел не совпадать ни с одним из этих чисел? Какое число является медианой упорядоченного ряда, содержащего $2n-1$ чисел; $2n$ чисел?

Дополнительные упражнения к § 1

7.36. Среднее арифметическое некоторого ряда данных, состоящего из 10 чисел, равно 7. К этому ряду приписали числа 17 и 18. Чему равно среднее арифметическое нового ряда чисел?

7.37. Сколько чисел в ряду, если его медианой служит: а) пятнадцатый член; б) среднее арифметическое семнадцатого и восемнадцатого членов?

7.38. В ряду чисел

$$12,\ \_\_,\ \_\_,\ 7,\ 15,\ 20$$

пропущены два числа, одно из которых вдвое больше другого. Найдите эти числа, если известно, что среднее арифметическое ряда равно 13.

7.39. В ряду чисел

$$8,\ 16,\ 26,\ \_\_,\ 48,\ \_\_,\ 46$$

два числа оказались стертыми. Найдите эти числа, если известно, что одно из них на 20 больше другого, а среднее арифметическое этого ряда чисел равно 32.

7.40. В ряду данных, состоящем из 12 чисел, наибольшее число увеличили на 6. Изменятся ли при этом и как: а) среднее арифметическое; б) размах; в) мода; г) медиана?

7.41. В ряду данных, состоящем из 15 чисел, наименьшее число уменьшили на 5. Изменятся ли при этом и как: а) среднее арифметическое; б) размах; в) мода; г) медиана?

8 класс

§ 2. Статистические исследования

1. Сбор и группировка статистических данных

Для изучения различных общественных и социально-экономических явлений, а также некоторых процессов, происходящих в природе, проводятся специальные статистические исследования. Всякое статистическое исследование начинается с целенаправленного сбора информации об изучаемом явлении или процессе. Этот этап называется этапом статистического наблюдения.

Для обобщения и систематизации данных, полученных в результате статистического наблюдения, их по какому-либо признаку разбивают на группы и результаты группировки сводят в таблицы.

Рассмотрим такой пример. Администрация школы решила проверить математическую подготовку восьмиклассников. С этой целью был составлен тест, содержащий 9 заданий. Работу выполняли 40 учащихся школы. При проверке каждой работы учитель отмечал число верно выполненных заданий. В результате был составлен такой ряд чисел:

6, 5, 4, 0, 4, 5, 7, 9, 1, 6, 8, 7, 9, 5, 8, 6, 7, 2, 5, 7, 6, 3, 4, 4, 5, 6, 8, 6, 7, 7, 4, 3, 5, 9, 6, 7, 8, 6, 9, 8.

Для того чтобы удобно было анализировать полученные данные, упорядочим этот ряд:

0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4,
5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6,
7, 7, 7, 7, 7, 7, 7 8, 8, 8, 8, 8 9, 9, 9, 9.

Представим полученные данные в виде таблицы, в которой для каждого числа верно выполненных заданий, записанного в верхней строке, укажем в нижней строке количество появлений этого числа в ряду, т. е. *частоту*:

Число верно выполненных заданий	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	1	1	1	2	5	6	8	7	5	4

Такую таблицу называют *таблицей частот*.

В рассмотренном примере сумма частот равна общему числу проверяемых работ, т. е. 40.

Вообще, если результат исследования представлен в виде таблицы частот, то сумма частот равна общему числу данных в ряду.

При проведении статистического исследования после сбора и группировки данных переходят к их анализу, используя для этого различные обобщающие показатели. Простейшими из них являются такие известные вам статистические характеристики, как среднее арифметическое, мода, медиана, размах.

Проанализируем результаты проведенной проверки работ учащихся.

Чтобы найти среднее арифметическое, надо общее число верно выполненных заданий разделить на число учащихся, т. е. на 40. Получаем:

$$\frac{0\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 8+7\cdot 7+8\cdot 5+9\cdot 4}{40}=\frac{232}{40}=5{,}8.$$

Значит, в среднем учащиеся выполнили по 5,8 заданий, т. е. примерно $\frac{2}{3}$ общего объема работы.

Наибольшее число верно выполненных учащимися заданий равно 9, а наименьшее равно 0. Значит, размах ряда равен $9-0=9$, т. е. различие в числе верно выполненных заданий достаточно велико. Из таблицы ясно, что чаще всего встречаются работы, в которых верно выполнено 6 заданий, т. е. мода ряда равна 6.

Найдем медиану ряда. Так как в ряду всего 40 чисел, то медиана равна среднему арифметическому 20-го и 21-го членов соответствующего упорядоченного ряда. Для того чтобы определить, в какие группы попадают эти члены, будем последовательно суммировать частоты и сравнивать суммы с числами 20 и 21. Найдем, что $1+1+1+2+5+6=16$, $1+1+1+2+5+6+8=24$, т. е. 20-й и 21-й члены ряда попадают в ту группу, которую составляют учащиеся, верно выполнившие 6 заданий. Значит, медиана ряда равна $(6+6):2=6$.

В рассмотренном примере для анализа результатов выполнения теста учащимися была составлена таблица частот. Иногда составляют таблицу, в которой для каждого данного указывается не частота, а отношение частоты к общему числу данных в ряду. Это отношение, выраженное в процентах, называют *относительной частотой*, а саму таблицу — *таблицей относительных частот*.

В нашем примере общая численность совокупности — это число учащихся, писавших работу, т. е. 40. Таблица относительных частот выглядит следующим образом:

Число верно выполненных заданий	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Относительная частота, %	2,5	2,5	2,5	5	12,5	15	20	17,5	12,5	10

Нетрудно убедиться, что сумма относительных частот составляет 100%.

Вообще, если по результатам исследования составлена таблица относительных частот, то сумма относительных частот равна 100%.

Если в ряду имеется большое число данных и одинаковые значения встречаются редко, то таблицы частот или относительных частот становятся излишне громоздкими. В таких случаях для анализа данных строят *интервальный ряд*. Для этого разность между наибольшим и наименьшим значениями делят на несколько равных частей (примерно 5—10) и, округляя полученный результат, определяют длину интервала. За начало первого интервала часто выбирают наименьшее данное или ближайшее к нему целое число, расположенное левее. Для каждого интервала указывают число данных, попадающих в этот интервал, или выраженное в процентах отношение этого числа к общей численности совокупности. При этом граничное число обычно считают относящимся к последующему интервалу.

Пусть, например, на партии из 50 электроламп изучали продолжительность их горения (в часах). По результатам составили такую таблицу:

Продолжительность горения, ч	Частота
До 200	1
200—400	3
400—600	5
600—800	9
800—1000	16
1000—1200	9
1200—1400	5
1400—1600	2

Пользуясь составленной таблицей, найдем среднюю продолжительность горения. Для этого составим новую таблицу частот, заменив каждый интервал числом, которое является его серединой. Получим:

Продолжительность горения, ч	Частота
100	1
300	3
500	5
700	9
900	16
1100	9
1300	5
1500	2

Для полученного ряда данных найдем среднее арифметическое:

$(100\cdot 1+300\cdot 3+500\cdot 5+700\cdot 9+900\cdot 16+1100\cdot 9+1300\cdot 5+$
$+1500\cdot 2):50\approx 870$ (с точностью до десятков).

Значит, средняя продолжительность горения электроламп приближенно равна 870 ч.

В рассмотренном в начале пункта примере были проанализированы результаты выполнения теста восьмиклассниками одной школы. Тот же тест можно было бы использовать для более широкой проверки математической подготовки учащихся, например предложить его восьмиклассникам всех школ города или региона. Заметим, что организация такой проверки связана с серьезными трудностями по пересылке текстов заданий в школы, сбору и проверке работ учащихся, обработке полученных результатов. Вообще, проведение любого массового исследования требует больших организационных усилий и финансовых затрат. Например, перепись населения страны связана с подготовкой разнообразной документации, выделением и инструктажем переписчиков, сбором информации, обработкой собранных сведений.

В тех случаях, когда бывает сложно или даже невозможно провести сплошное исследование, его заменяют *выборочным*. При выборочном исследовании из всей изучаемой совокупности данных, называемой *генеральной совокупностью*, выбирается определенная ее часть, т. е. составляется *выборочная совокупность (выборка)*, которая подвергается исследованию. При этом выборка должна быть *представительной*, или, как говорят, *репрезентативной*, т. е. отражающей характерные особенности исследуемой генеральной совокупности.

Пусть, например, в ходе кампании по выборам мэра в городе со стотысячным населением хотят узнать, кто из кандидатов имеет наибольшие шансы на успех. Для этого проводят опрос, например, полутора тысяч избирателей, в ходе которого выясняется, за кого они собираются голосовать. При этом нельзя опрашивать только молодых избирателей или только пенсионеров, так как это может привести к неправильным выводам. Необходимо, чтобы среди опрашиваемых было примерно одинаковое число мужчин и женщин. Кроме того, должны быть представлены люди с разным социальным положением и образованием.

Выборочное исследование проводят также и тогда, когда проведение сплошного исследования связано с порчей или уничтожением продукции. Например, при исследовании продолжительности горения партии электроламп, выпущенных заводом, невозможно проверить всю партию, так как это просто привело бы к ее уничтожению.

8.1. На выборах мэра города будут баллотироваться три кандидата: Алексеев, Иванов, Карпов (обозначим их буквами А, И, К). Проводя опрос 50 избирателей, выясняли, за кого из кандидатов они собираются голосовать. Получили следующие данные:

И, А, И, И, К, К, И, И, И, А, К, А, А,
А, К, К, И, К, А, А, И, К, И, И, К, И,
К, А, И, И, И, А, И, И, К, И, А, И,
К, К, И, К, А, И, И, И, А, А, К, И.

Представьте эти данные в виде таблицы частот.

8.2. В ходе опроса 34 учащихся школы было выяснено, сколько времени (с точностью до 0,5 ч) в неделю они затрачивают на занятия в кружках и спортивных секциях. Получили следующие данные:

5, 1,5, 0, 2,5, 1, 0, 0, 2, 2,5, 3,5, 4,
5, 3,5, 2,5, 0, 1,5, 4,5, 3, 3, 5, 3,5, 4,
3,5, 3, 2,5, 2, 1, 2, 2, 4,5, 4, 3,5, 2, 5.

Представьте этот ряд данных в виде таблицы частот. Найдите, сколько времени в среднем тратят учащиеся на занятия в кружках и спортивных секциях.

8.3. Учащимся восьмых классов школ некоторого города была предложена контрольная работа по алгебре, содержащая 6 заданий. При подведении итогов составили таблицу, в которой указали число учащихся, верно выполнивших одно, два, три и т. д. задания:

Число выполненных заданий	Число учащихся
0	—
1	27
2	53
3	87
4	223
5	146
6	89

Пользуясь этой таблицей, составьте таблицу относительных частот (с точностью до 1%).

8.4. При проверке 70 работ по русскому языку отмечали число орфографических ошибок, допущенных учащимися. Полученный ряд данных представили в виде таблицы частот:

Число ошибок	0	1	2	3	4	5	6
Частота	4	6	15	26	12	4	3

Каково наибольшее различие в числе допущенных ошибок? Какое число ошибок является типичным для данной группы учащихся? Укажите, какие статистические характеристики были использованы при ответе на поставленные вопросы.

8.5. Ряд данных о количестве акций одинаковой стоимости, приобретенных сотрудниками лаборатории, представлен в виде таблицы частот:

Число акций	Частота
2	20
5	12
10	7
25	4
100	2

Для этого ряда данных найдите среднее арифметическое, размах и моду. Что характеризует каждый из этих показателей?

8.6. При изучении качества продукции, выпущенной цехом, определяли число бракованных деталей в каждом из 50 произвольным образом выбранных ящиков с одинаковым числом деталей. Получили такую таблицу:

Число бракованных деталей	0	1	2	3	4
Число ящиков	8	22	13	5	2

Найдите среднее арифметическое, размах и моду полученного ряда данных. Объясните практический смысл этих статистических характеристик.

8.7. Определяя степень засоренности цветочных семян, выясняли, сколько семян сорных растений содержится в каждом из 100 произвольным образом выбранных пакетов с одинаковым числом семян. Получили такую таблицу:

Число семян сорных растений	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Число пакетов	3	16	26	17	18	10	3	5	1	1

Для полученного ряда данных найдите среднее арифметическое и моду. Объясните практический смысл этих характеристик.

8.8. При изучении учебной нагрузки учащихся попросили 32 восьмиклассников отметить время (с точностью до 0,1 ч), которое они затратили в определенный день на выполнение домашних заданий. Получили следующие данные:

2,7, 2,5, 3,1, 3,2, 3,4, 1,6, 1,8, 4,2,
2,6, 3,4, 3,2, 2,9, 1,9, 1,5, 3,7, 3,6,
3,1, 2,9, 2,8, 1,5, 3,1, 3,4, 2,2, 2,8,
4,1, 2,4, 4,3, 1,9, 3,6, 1,8, 2,8, 3,9.

Представьте полученные данные в виде интервального ряда с интервалами длиной 0,5 ч.

8.9. Имеются следующие данные о распределении участников похода по возрасту:

Возраст, лет	18—22	22—26	26—30	30—34
Число участников	25	18	5	2

Заменив каждый интервал его серединой, найдите средний возраст участников похода.

8.10. Ниже показана среднесуточная переработка сахара (в тыс. ц) заводами сахарной промышленности некоторого региона:

12,0, 13,6, 14,7, 18,9, 17,3, 16,1,
20,1, 16,9, 19,1, 18,4, 17,8, 15,6,
20,8, 19,7, 18,9, 19,0, 16,1, 15,8.

Представьте эти данные в виде интервального ряда с интервалами длиной в три единицы. Найдите, сколько сахара в среднем перерабатывал в сутки завод региона:
а) заменив каждый интервал его серединой;
б) используя заданный ряд.
В каком случае средняя выработка найдена точнее?

8.11. Является ли выборка представительной, если при изучении времени, которое затрачивают на выполнение уроков восьмиклассники:
а) опрашивали только девочек;
б) опрос проводили только по четвергам;
в) опрашивали только учащихся гимназий и лицеев?

Упражнения для повторения

8.12. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2a^{-1}}{b^{-2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{4a^2}\right)^{-1}$; б) $\left(\frac{9x^{-1}}{4y^3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2y}{3x}\right)^{-2}$.

8.13. Представьте в стандартном виде число:

а) 23 700; б) 1524; в) 0,0076.

8.14. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}5(2-x)-1{,}5x<6x-1, \\ 1{,}3(2+x)+0{,}7x<3x+2{,}4. \end{cases}$$

8.15. Упростите выражение:

$$2\sqrt{5}(\sqrt{2}-\sqrt{5})-(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2.$$

2. Наглядное представление статистической информации

(3 ч)

Для наглядного представления данных, полученных в результате статистического исследования, широко используются различные способы их изображения.

Одним из хорошо известных вам способов наглядного представления ряда данных является построение столбчатой диаграммы.

Столбчатые диаграммы используют тогда, когда хотят проиллюстрировать динамику изменения данных во времени или распределение данных, полученных в результате статистического исследования.

В таблице показан расход электроэнергии (с точностью до 5 кВт · ч) некоторой семьей в течение года:

Месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Расход электроэнергии, кВт·ч	110	100	110	85	70	65	10	70	90	100	100	105

Соответствующая столбчатая диаграмма построена на рисунке 1. Она состоит из 12 прямоугольников с выбранными произвольно равными основаниями, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. Высота каждого прямоугольника равна (при выбранном масштабе) расходу электроэнергии в указанный месяц.

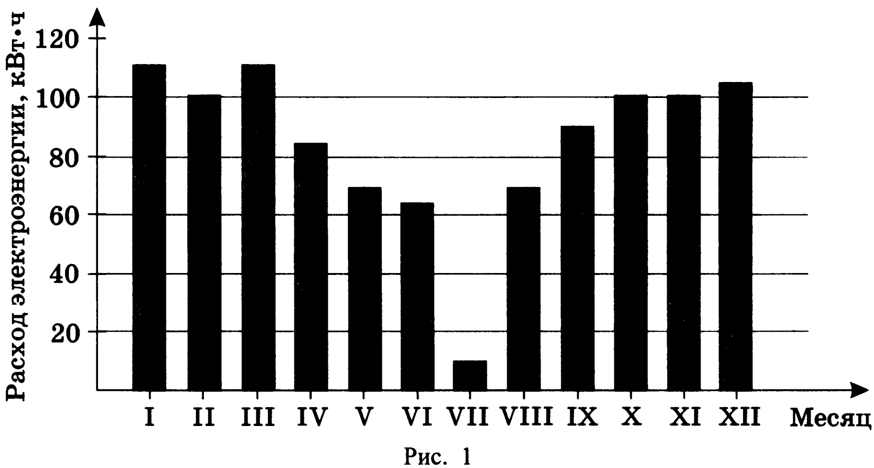

Рис. 1

Если в ходе статистического исследования проведена группировка одинаковых данных и для каждой группы указана соответствующая частота (или относительная частота), то каждая группа изображается на столбчатой диаграмме прямоугольником, высота которого при выбранном масштабе равна соответствующей частоте (или относительной частоте).

Пусть, например, на основе изучения вопроса о количестве детей в семьях, проживающих в поселке, была составлена таблица частот:

Количество детей	Частота
0	12
1	23
2	32
3	10
4	5
5	2

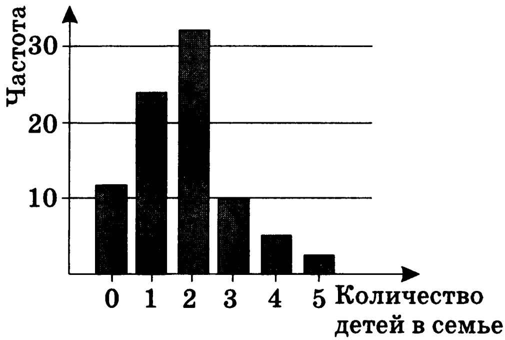

Рис. 2

Соответствующая столбчатая диаграмма построена на рисунке 2. Высота каждого столбца (при выбранном масштабе) равна частоте, с которой в ряду данных встречается указанное количество детей.

Допустим, что на основе изучения затрат времени на изготовление одной детали рабочими цеха была составлена таблица относительных частот:

Соответствующая столбчатая диаграмма построена на рисунке 3.

Время, ч	Относительная частота, %
0,5	16
0,6	21
0,7	39
0,8	24

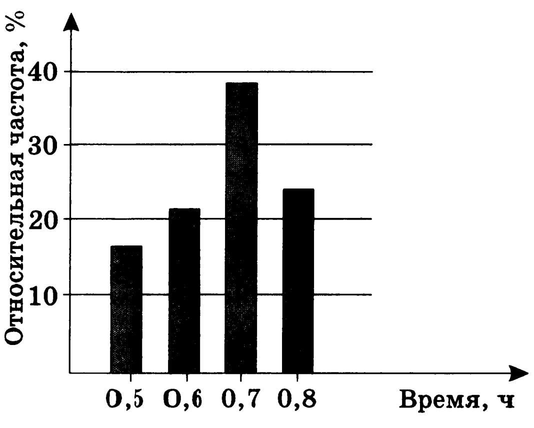

Рис. 3

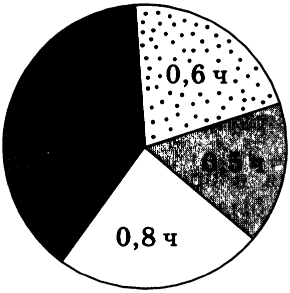

Рис. 4

Для наглядного изображения соотношения между частями исследуемой совокупности удобно использовать *круговые диаграммы.*

Если результат статистического исследования представлен в виде таблицы относительных частот, то для построения круговой диаграммы круг разбивается на секторы, центральные углы которых пропорциональны относительным частотам, определенным для каждой группы данных.

Построим, например, круговую диаграмму, иллюстрирующую распределение рабочих цеха по времени, которое они затратили на изготовление одной детали (см. табл. на с. 23). Так как $360°:100=3{,}6°$, то одному проценту соответствует центральный угол, равный $3{,}6°$. Учитывая это, определим для каждой группы соответствующий центральный угол:

$$3{,}6°\cdot 16=57{,}6°,$$
$$3{,}6°\cdot 21=75{,}6°,$$
$$3{,}6°\cdot 39=140{,}4°,$$
$$3{,}6°\cdot 24=86{,}4°.$$

Разбив круг на секторы, получим круговую диаграмму, изображенную на рисунке 4.

В тех случаях, когда результат статистического исследования представлен в виде таблицы частот, удобно для построения круговой диаграммы предварительно заменить ее таблицей относительных частот.

Заметим, что круговая диаграмма сохраняет свою наглядность и выразительность лишь при небольшом числе частей совокупности. В противном случае ее применение малоэффективно.

Динамику изменения статистических данных во времени часто иллюстрируют с помощью *полигона.* Для построения полигона отмечают в координатной плоскости точки, абсциссами которых служат моменты времени, а ординатами — соответствующие им статистические данные. Соединив последовательно эти точки отрезками, получают ломаную, которую называют полигоном.

Имеются, например, следующие данные о производстве заводом приборов в первом полугодии 2002 г. (по месяцам):

Месяц	I	II	III	IV	V	VI
Число приборов (тыс. шт.)	2,3	2,2	2,5	2,6	2,8	1,9

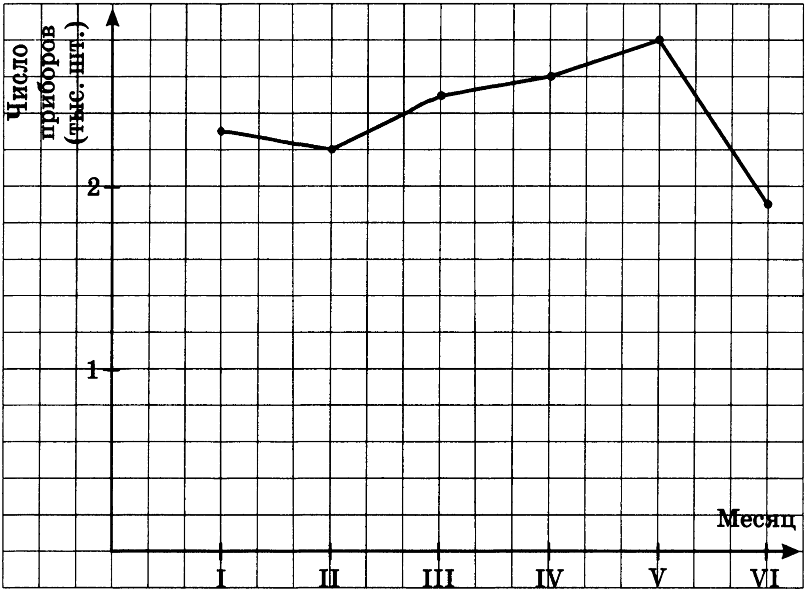

Рис. 5

Полигон, иллюстрирующий производство заводом приборов в первом полугодии 2002 г., построен на рисунке 5.

Полигоны используют также для наглядного изображения распределения данных, полученных в результате статистического исследования.

Если данные представлены в виде таблицы частот или относительных частот, то для построения полигона отмечают в координатной плоскости точки, абсциссами которых служат статистические данные, а ординатами — их частоты или относительные частоты. Соединив последовательно эти точки отрезками, получают полигон распределения данных.

Пусть, например, проверочную работу по алгебре выполняли 180 учащихся. В результате группировки работ по полученным оценкам составили таблицу:

Оценка	Частота
1	0
2	16
3	77
4	65
5	22

Рис. 6

Отметим в координатной плоскости точки с координатами (1; 0), (2; 16), (3; 77), (4; 65), (5; 22). Соединив последовательно эти точки отрезками, получим полигон распределения оценок за проверочную работу (рис. 6).

Интервальные ряды данных изображают с помощью *гистограмм*. Гистограмма представляет собой ступенчатую фигуру, составленную из сомкнутых прямоугольников. Основание каждого прямоугольника равно длине интервала, а высота — частоте или относительной частоте. Таким образом, в гистограмме, в отличие от обычной столбчатой диаграммы, основания прямоугольников выбираются не произвольно, а строго определены длиной интервала.

Построим, например, гистограмму для интервального ряда, характеризующего продолжительность горения 50 электроламп, воспользовавшись таблицей, приведенной на с. 17. Пусть единица на горизонтальной оси соответствует продолжительности горения в 200 ч, а единица на вертикальной оси — частоте, равной 1. Гистограмма представляет собой фигуру, составленную из восьми сомкнутых прямоугольников (рис. 7). Сумма высот прямоугольников равна общей численности исследуемой совокупности, т. е. 50.

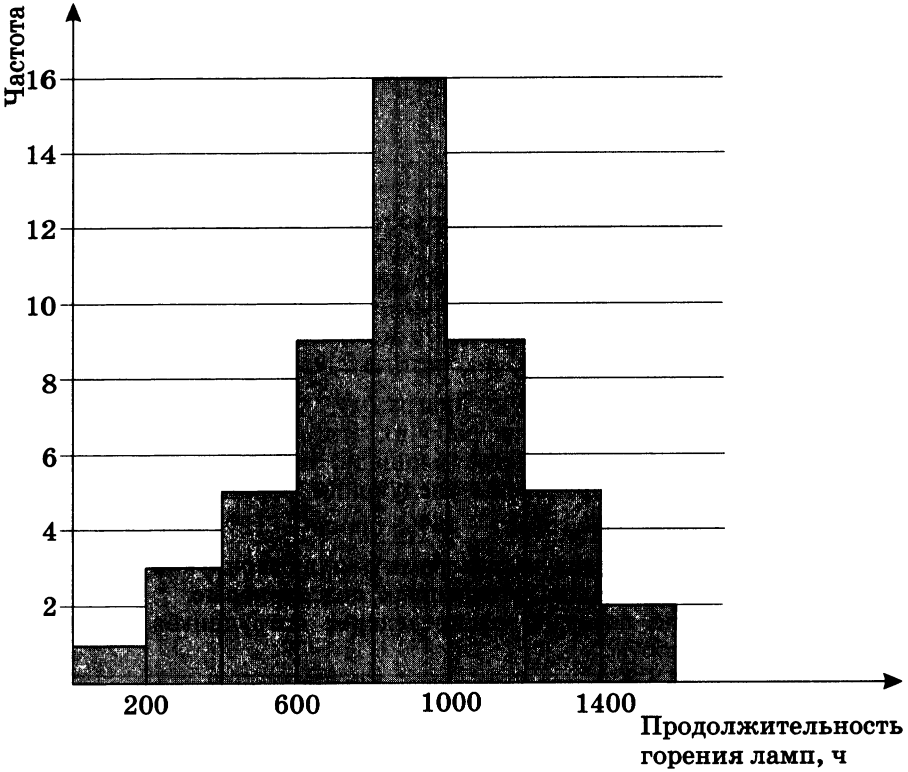

Рис. 7

8.16. По четвертным оценкам по геометрии учащиеся одного класса распределились следующим образом:

«5» — 4 ученика,
«4» — 10 учеников,
«3» — 18 учеников,
«2» — 2 ученика.

Постройте столбчатую диаграмму, характеризующую распределение учащихся по четвертным оценкам по геометрии.

8.17. Постройте столбчатую диаграмму, показывающую распределение рабочих цеха по тарифным разрядам, которое представлено в следующей таблице:

Тарифный разряд	1	2	3	4	5	6
Число рабочих	4	2	10	16	8	4

8.18. Изучая профессиональный состав рабочих механического цеха, составили таблицу:

Профессия	Число рабочих
Наладчик	4
Револьверщик	2
Сверловщик	1
Слесарь	8
Строгальщик	3
Токарь	12
Фрезеровщик	5

Постройте столбчатую диаграмму, характеризующую профессиональный состав рабочих этого цеха.

8.19. В фермерском хозяйстве площади, отведенные под посевы зерновых, распределены следующим образом:

пшеница — 63%, овес — 16%, просо — 12%, гречиха — 9%.

Постройте круговую диаграмму, иллюстрирующую распределение площадей, отведенных под зерновые.

8.20. В таблице показано распределение сотрудников отдела по стажу работы:

Стаж работы, лет	3 и менее	4	5	6	7 и более
Относительная частота, %	8	12	16	24	40

Постройте круговую диаграмму, иллюстрирующую распределение сотрудников отдела по стажу работы.

8.21. В таблице показана урожайность зерновых в 43 хозяйствах района.

Постройте полигон распределения хозяйств по урожайности зерновых.

Урожайность, ц/га	Число хозяйств
18	3
19	9
20	13
21	11
22	7

8.22. В таблице приведены значения среднемесячных температур воздуха (в градусах Цельсия) в городе за год:

Месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Среднемесячная температура, °C	–16	–10	–6	4	8	16	22	19	10	6	–3	–11

Постройте полигон, иллюстрирующий изменения среднемесячных температур за год.

8.23. При изучении распределения семей, проживающих в доме, по количеству членов семьи была составлена таблица, в которой для каждой семьи с одинаковым числом членов указана относительная частота:

Количество членов семьи	Относительная частота, %
1	12
2	18
3	22
4	30
5	11
6	7

Пользуясь таблицей, постройте полигон относительных частот.

8.24. На рисунке 8 построен полигон, иллюстрирующий производство растительного масла в России в 1992 и 1993 гг. (по кварталам). Пользуясь рисунком:

а) охарактеризуйте динамику изменения производства растительного масла в 1992 и 1993 гг.;

б) укажите два квартала, следующие друг за другом, когда произошло наибольшее падение производства растительного масла;

в) укажите два квартала, следующие друг за другом, когда произошел наибольший прирост производства растительного масла.

8.25. В таблице показано, сколько курток изготовила мастерская за каждый квартал 2000 и 2001 гг.:

Год	2000				2001			
Квартал	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Число курток	780	625	645	810	850	760	720	910

Постройте полигон, иллюстрирующий выработку мастерской в 2000 и в 2001 гг. (по кварталам).

Пользуясь рисунком:

а) охарактеризуйте динамику изменения производства курток в 2000 и 2001 гг. (по кварталам);

б) укажите два квартала, следующие друг за другом, когда произошло наибольшее увеличение выработки.

8.26. На рисунке 9 построены полигоны, иллюстрирующие продажу магазином в течение недели компьютеров (сплошная линия) и телевизоров (пунктирная линия). Укажите два дня, следующие друг за другом, когда:

а) число проданных телевизоров возросло больше, чем число проданных компьютеров;

б) число проданных телевизоров возросло, а число проданных компьютеров уменьшилось;

в) число проданных компьютеров возросло, а число проданных телевизоров осталось тем же.

8.27. На основе опроса была составлена следующая таблица распределения учащихся по времени, которое они затратили в определенный учебный день на просмотр телепередач:

Время, ч	Частота
0—1	12
1—2	24
2—3	8
3—4	5

Пользуясь таблицей, постройте соответствующую гистограмму.

8.28. В таблице показано распределение призывников района по росту:

Рост, см	Частота
155—160	6
160—165	10
165—170	28
170—175	36
175—180	48
180—185	26
185—190	16
190—195	8

Постройте гистограмму, характеризующую распределение призывников по росту.

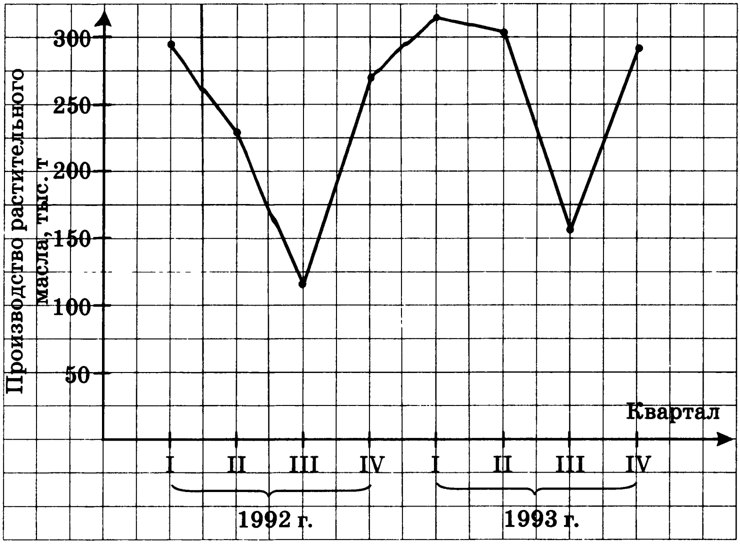
Производство растительного масла, тыс. т
300
250
200
150
100
50
Квартал
I
II
III
IV
I
II
III
IV
1992 г.
1993 г.

Рис. 8

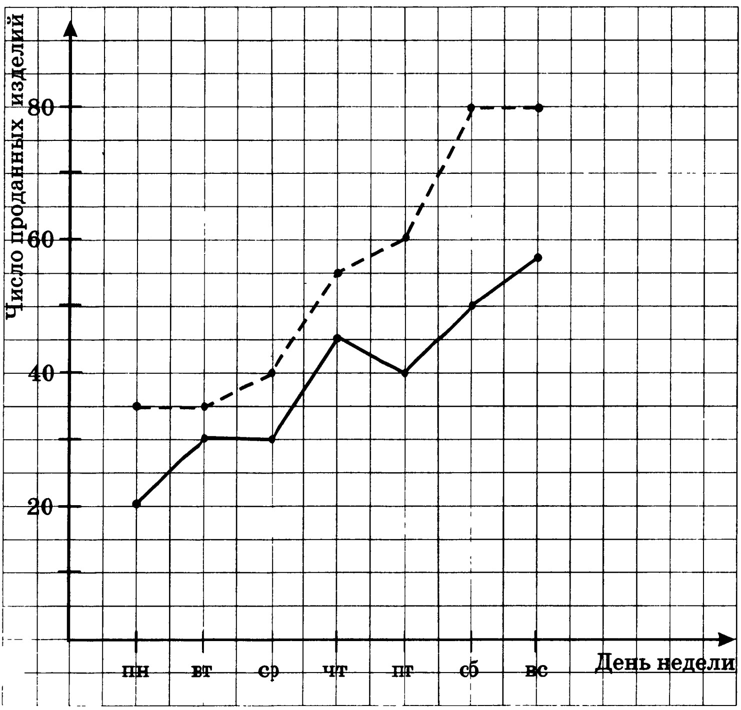
Число проданных изделий
80
60
40
20
пн
вт
ср
чт
пт
сб
вс
День недели

Рис. 9

8.29. В оздоровительном лагере были получены следующие данные о весе 28 мальчиков (с точностью до 0,1 кг):

21,8,	29,3,	30,2,	20,0,	23,8,	24,5,	24,0,
20,8,	22,0,	20,8,	22,0,	25,0,	25,5,	28,2,
22,5,	21,0,	24,5,	24,8,	24,6,	24,3,	26,0,
26,8,	23,2,	27,0,	29,5,	23,0,	22,8,	31,2.

Используя эти данные, заполните таблицы (перечертив их в тетрадь):

Вес, кг	Частота
20—22	
22—24	
24—26	
26—28	
28—30	
30—32	

Вес, кг	Частота
20—23	
23—26	
26—29	
29—32	

По данным этих таблиц постройте на разных рисунках в одном и том же масштабе две гистограммы. Что общего у этих гистограмм и чем они различаются?

8.30. На гистограмме (рис. 10) представлены данные о распределении рабочих цеха по возрастным группам. Пользуясь гистограммой, найдите:

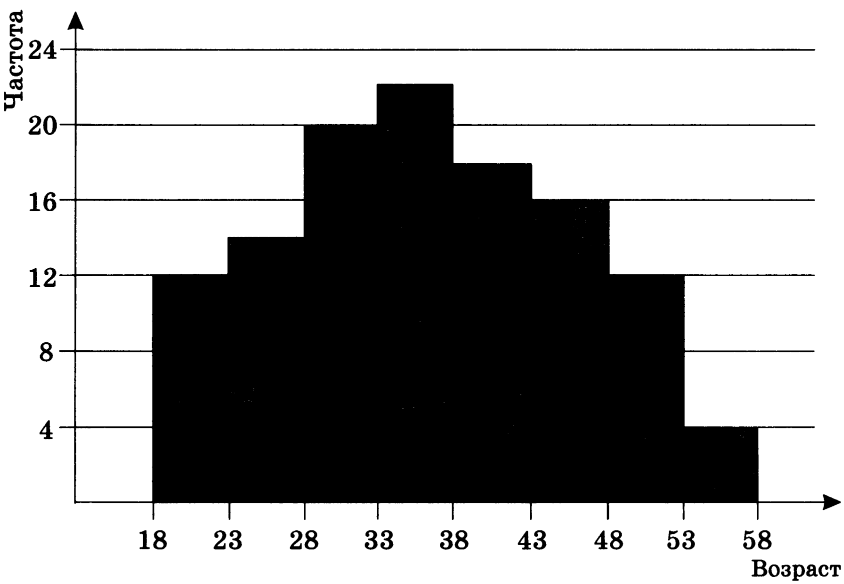

Рис. 10

а) число рабочих цеха в возрасте от 18 до 23 лет;

б) возрастную группу, к которой относится наибольшее число рабочих;

в) общее число рабочих цеха.

8.31. Наблюдая за работой бригады токарей, установили, сколько времени тратили они на обработку одной детали. Обобщая полученные данные, составили таблицу:

Время, мин	Число токарей
10—12	2
12—14	6
14—16	11
16—18	7
18—20	5

Пользуясь таблицей, постройте гистограмму, характеризующую распределение токарей бригады по времени, затрачиваемому на обработку одной детали. Преобразуйте гистограмму в полигон, заменяя каждый интервал его серединой.

8.32. Учащихся одного класса попросили отметить, сколько минут в определенный день они затратили на дорогу от дома до школы.

Получили следующие результаты:

15,	16,	25,	10,	24,	13,
18,	14,	20,	10,	23,	19,
15,	22,	16,	12,	17,	14,
12,	25,	12,	21,	18,	20.

Используя эти данные, составьте интервальный ряд с интервалом в 3 мин.

Постройте соответствующую гистограмму и преобразуйте ее в полигон, заменив каждый интервал его серединой. Найдите, сколько времени в среднем затратили учащиеся на дорогу от дома до школы.

Упражнения для повторения

8.33. Найдите значение выражения:

$$(9-4a^2)\left(\frac{4a}{2a-3}-1\right) \text{ при } a=-6{,}2.$$

8.34. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{10}-\dfrac{x}{6}\leqslant\dfrac{x}{10}+\dfrac{1-x}{30}, \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{x+5}{12}<\dfrac{x}{4}-\dfrac{x-5}{24}. \end{cases}$$

8.35. Сравните значения выражений:

а) $5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ и $3\sqrt{7}+\sqrt{45}$;

б) $6\sqrt{2}-2\sqrt{7}$ и $4\sqrt{3}-\sqrt{28}$.

Контрольные вопросы

1. Объясните на примере, как по таблице частот находят среднее арифметическое, размах, моду и медиану.

2. Какие способы наглядного представления статистической информации вам известны? Обьясните, в чем состоит каждый из этих способов.

3. Что называется гистограммой? Как изображается на гистограмме общий объем исследуемой совокупности?

Дополнительные упражнения к § 2

8.36. В ходе опроса предстоит определить, строительству каких культурных и спортивных сооружений отдают предпочтение жители района. Какие категории жителей должны быть включены, на ваш взгляд, в составляемую выборку?

8.37. В таблице частот, характеризующей распределение членов артели по числу изготовленных изделий, одно число оказалось стертым:

Число изделий	Частота
12	1
13	3
14	—
15	6
16	2

Восстановите его, зная, что в среднем члены артели изготовили по 14,2 изделия.

8.38. Проведя учет бракованных деталей в контрольной партии ящиков, составили таблицу, в которой два числа оказались стертыми:

Число бракованных деталей	Число ящиков
0	12
1	28
2	—
3	—
4	7
5	2

Восстановите их, зная, что ящиков с двумя бракованными деталями оказалось вдвое больше, чем ящиков с тремя бракованными деталями, а в среднем в каждом ящике было по 1,85 бракованных деталей.

8.39. Проводя подсчет числа орфографических ошибок, допущенных учащимися, составили таблицу частот, в которой три числа оказались стертыми:

Число ошибок	Частота
0	4
1	—
2	—
3	—
4	7
5	4

Восстановите их, зная, что среднее из этих чисел на 4 больше предыдущего и на 3 меньше последующего, а в среднем учащиеся допустили по 2,5 ошибки.

8.40. Имеются следующие данные о годовых удоях молока на молочной ферме:

Годовой удой молока, л	Число коров
до 1000	2
1000—2000	8
2000—3000	23
3000—4000	13
4000—5000	2

Заменив каждый интервал его серединой, найдите средний годовой удой молока от одной коровы на этой ферме.

8.41. По данным таблицы распределения призывников по росту, представленной в упражнении 8.28, составьте новую таблицу с интервалом в 10 см.

8.42. В ходе статистического исследования были опрошены 80 учащихся, которых попросили указать время (в минутах), затраченное на дорогу от дома до школы. По результатам исследования были составлены два интервальных ряда: один с интервалом длиной в 5 мин, а другой с интервалом длиной в 10 мин. Для каждого интервального ряда построили гистограмму. Чем различаются эти гистограммы и что у них общего?

9 класс

§ 3. Элементы комбинаторики

1. Примеры комбинаторных задач

В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций. Такие задачи получили название комбинаторных задач, а раздел математики, в котором рассматриваются подобные задачи, называют *комбинаторикой.* Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare*, которое означает «соединять, сочетать». Методы комбинаторики находят широкое применение в физике, химии, биологии, экономике и других областях знаний.

Рассмотрим некоторые комбинаторные задачи.

Пример 1. Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека — Антонов, Григорьев, Сергеев и Федоров, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях. Сколько существует вариантов выбора такой пары?

Составим сначала все пары, в которые входит Антонов (для краткости будем писать первые буквы фамилий). Получим три пары: АГ, АС, АФ.

Выпишем теперь пары, в которые входит Григорьев, но не входит Антонов. Таких пар две: ГС, ГФ.

Далее составим пары, в которые входит Сергеев, но не входят Антонов и Григорьев. Такая пара только одна: СФ.

Других вариантов составления пар нет, так как все пары, в которые входит Федоров, уже составлены.

Итак, мы получили шесть пар:

АГ, АС, АФ,
ГС, ГФ,
СФ.

Значит, всего существует шесть вариантов выбора тренером пары теннисистов из данной группы.

Способ рассуждений, которым мы воспользовались при решении задачи, называют *перебором возможных вариантов.*

Пример 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

Чтобы ответить на вопрос задачи, выпишем все такие числа.

Пусть на первом месте стоит цифра 1. На втором месте может быть записана любая из цифр 3, 5, 7. Запишем, например, на втором месте цифру 3. Тогда в качестве третьей цифры можно взять 5 или 7. Получим два числа 135 и 137. Если на втором месте записать цифру 5, то в качестве третьей цифры можно взять цифру 3 или 7. В этом случае получим числа 153 и 157. Если же, наконец, на втором месте записать цифру 7, то получим числа 173 и 175.

Итак, мы составили все числа, которые начинаются с цифры 1. Таких чисел шесть:

135, 137, 153, 157, 173, 175.

Аналогичным способом можно составить числа, которые начинаются с цифры 3, с цифры 5, с цифры 7.

Полученные результаты запишем в четыре строки, в каждой из которых шесть чисел:

135,	137,	153,	157,	173,	175,
315,	317,	351,	357,	371,	375,
513,	517,	531,	537,	571,	573,
713,	715,	731,	735,	751,	753.

Таким образом из цифр 1, 3, 5, 7 (без повторения цифр) можно составить 24 трехзначных числа.

Проведенный перебор вариантов проиллюстрирован на схеме, изображенной на рисунке 11. Такую схему называют *деревом возможных вариантов.*

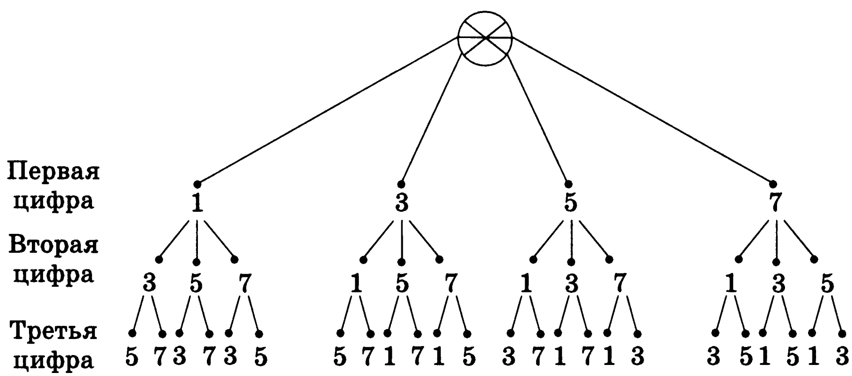

Рис. 11

Заметим, что ответ на вопрос, поставленный в примере 2, можно получить, не выписывая сами числа. Будем рассуждать так. Первую цифру можно выбрать четырьмя способами. Так как после выбора первой цифры останутся три, то вторую цифру можно выбрать уже тремя способами. Наконец, третью цифру можно выбрать (из оставшихся двух) двумя способами. Следовательно, общее число искомых трехзначных чисел равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2$, т. е. 24.

Мы нашли ответ на поставленный в примере 2 вопрос, используя так называемое *комбинаторное правило умножения.* В общем виде это правило формулируется так. Пусть имеется n элементов и требуется выбрать один за другим некоторые k элементов.

Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, после чего второй элемент можно выбрать из оставшихся элементов n_2 способами, затем третий элемент — n_3 способами и т. д., то число способов, которыми могут быть выбраны все k элементов, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пример 3. Из города A в город B ведут две дороги, из города B в город C — три дороги, из города C до пристани — две дороги (рис. 12). Туристы хотят проехать из города A через города B и C к пристани. Сколькими способами они могут выбрать маршрут?

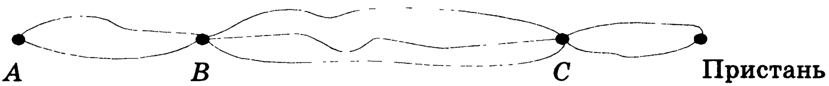

Рис. 12

Путь из A в B туристы могут выбрать двумя способами. Далее в каждом случае они могут проехать из B в C тремя способами. Значит, имеются $2 \cdot 3$ вариантов маршрута из A в C. Так как из города C на пристань можно попасть двумя способами, то всего существует $2 \cdot 3 \cdot 2$, т. е. 12, способов выбора туристами маршрута из города A к пристани.

9.1. В кафе предлагают два первых блюда: борщ, рассольник — и четыре вторых блюда: гуляш, котлеты, сосиски, пельмени. Укажите все обеды из двух блюд, которые может заказать посетитель. Проиллюстрируйте ответ, построив дерево возможных вариантов.

9.2. У Ирины пять подруг: Вера, Зоя, Марина, Полина и Светлана. Она решила двух из них пригласить в кино. Укажите все возможные варианты выбора подруг. Сколько таких вариантов?

9.3. Стадион имеет четыре входа: A, B, C и D. Укажите все возможные способы, какими посетитель может войти через один вход, а выйти через другой. Сколько таких способов?

9.4. Укажите все способы, какими можно разложить три яблока в две вазы (учтите при этом случаи, когда одна из ваз окажется пустой).

9.5. Составьте все возможные двузначные числа из указанных цифр, используя в записи числа каждую из них не более одного раза:
а) 1, 6, 8; б) 0, 3, 4.

9.6. Из цифр 1, 2, 3 составьте все возможные двузначные числа при условии, что:
а) цифры в числе не повторяются;
б) допускается повторение цифр в числе.

9.7. Используя цифры 0, 2, 4, 6, составьте все возможные трехзначные числа, в которых цифры не повторяются.

9.8. В шахматном турнире участвуют 9 человек. Каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?

9.9. В соревнованиях по футболу участвовало 12 команд. Каждая команда провела с каждой из остальных по одной игре на своем поле и по одной игре на поле соперника. Сколько всего игр было сыграно?

9.10. При встрече 8 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

9.11. Учащиеся 9 класса решили обменяться фотографиями. Сколько фотографий для этого потребуется, если в классе 24 учащихся?

9.12. На входной двери дома установлен домофон, на котором нанесены цифры 0, 1, 2, ..., 8, 9. Каждая квартира получает кодовый замок из двух цифр типа 0—2, 3—7, 7—3, 8—8 и т. п., позволяющий открывать входную дверь. Хватит ли кодовых замков для всех квартир дома, если в доме 96 квартир?

9.13. Из села Дятлова в село Матвеевское ведут три дороги, а из села Матвеевское в село Першино — четыре дороги. Сколькими способами можно попасть из Дятлова в Першино через Матвеевское?

9.14. В кафе имеются три первых блюда, пять вторых блюд и два третьих. Сколькими способами посетитель кафе может выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?

9.15. Петр решил пойти на новогодний карнавал в костюме мушкетера. В ателье проката ему предложили на выбор различные по фасону и цвету предметы: пять видов брюк, шесть камзолов, три шляпы, две пары сапог. Сколько различных карнавальных костюмов можно составить из этих предметов?

Упражнения для повторения

9.16. Представьте выражение в виде степени с основанием a:

а) $\frac{(a^{-3})^4 \cdot (a^{-6})^{-1}}{(a^2)^{-5}}$; б) $\frac{(a^2)^{-3}}{(a^4)^{-5} \cdot (a^{-7})^{-3}}$.

9.17. Решите неравенство:

а) $(2{,}5x+3)(4x-1)-2{,}5x(4x+2)<3$;

б) $(1-4x)^2-(8x-1)(2x+1)>0$.

9.18. Изобразите схематически график функции и укажите область ее значений:

а) $y=x^2+15$; б) $y=(x-16)^2$; в) $y=-x^2+8$.

2. Перестановки

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются *перестановки*.

Рассмотрим пример. Пусть имеются три книги. Обозначим их буквами a, b и c. Эти книги можно расставить на полке по-разному.

Если первой поставить книгу a, то возможны такие расположения книг:

$$abc, \ acb.$$

Если первой поставить книгу b, то возможными являются такие расположения:

$$bac, \ bca.$$

И наконец, если первой поставить книгу c, то получим такие расположения:

$$cab, \ cba.$$

Каждое из этих расположений называют *перестановкой* из трех элементов.

Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.

Число перестановок из n элементов обозначают символом P_n (читается «P из n»).

В рассмотренном примере мы установили, что $P_3=6$. Для того чтобы найти число перестановок из трех элементов, можно не выписывать эти перестановки, а воспользоваться правилом умножения. Будем рассуждать так. На первое место можно поставить любой из трех элементов. Для каждого выбора первого элемента есть две возможности выбора второго из оставшихся двух элементов. Наконец, для каждого выбора первых двух элементов остается единственная возможность выбора третьего элемента. Значит, число перестановок из трех элементов равно $3 \cdot 2 \cdot 1$, т. е. 6.

Выведем теперь формулу числа перестановок из n элементов. Воспользуемся таким же способом рассуждений, который был использован для нахождения P_3.

Пусть мы имеем n элементов. На первое место можно поставить любой из них. Для каждого выбора первого элемента на второе место можно поставить один из оставшихся $n-1$ элементов. Для каждого выбора первых двух элементов на третье место можно поставить один из оставшихся $n-2$ элементов и т. д. В результате получим, что

$$P_n=n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Расположив множители в порядке возрастания, получим:

$$\mathbf{P_n=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.}$$

Для произведения первых n натуральных чисел используют специальное обозначение: $n!$ (читается «n факториал»).

Например, $2!=1 \cdot 2=2$; $5!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5=120$.

По определению считают, что $1!=1$.

Таким образом, число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{P_n = n!}.$$

Пример 1. Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

Число способов равно числу перестановок из 8 элементов. По формуле числа перестановок находим, что

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320.$$

Значит, существует 40 320 способов расстановки участниц забега на восьми беговых дорожках.

Пример 2. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

Из цифр 0, 2, 4, 6 можно получить P_4 перестановок. Из этого числа надо исключить те перестановки, которые начинаются с 0, так как натуральное число не может начинаться с цифры 0. Число таких перестановок равно P_3. Значит, искомое число четырехзначных чисел (без повторения цифр), которые можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, равно $P_4 - P_3$.

Получаем:

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18.$$

Пример 3. Имеется девять различных книг, четыре из которых — учебники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не девять, а шесть книг. Это можно сделать P_6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить P_4 перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению $P_6 \cdot P_4$.

Получаем:

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 720 \cdot 24 = 17\,280.$$

9.19. Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?

9.20. Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов может он выбрать?

9.21. Сколькими способами 9 человек могут встать в очередь в театральную кассу?

9.22. Сколько существует выражений, тождественно равных произведению *abcde*, которые получаются из него перестановкой множителей?

9.23. Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры следуют. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы дозвониться подруге.

9.24. Сколько шестизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр:
а) 1, 2, 5, 6, 7, 8; б) 0, 2, 5, 6, 7, 8?

9.25. Сколько среди четырехзначных чисел (без повторения цифр), составленных из цифр 3, 5, 7, 9, таких, которые:
а) начинаются с цифры 3; б) кратны 15?

9.26. Найдите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 3, 5, 7 (без их повторения).

9.27. Сколько чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, таких, которые:
а) больше 3000; б) больше 2000?

9.28. Семь мальчиков, в число которых входят Олег и Игорь, становятся в ряд. Найдите число возможных комбинаций, если:
а) Олег должен находиться в конце ряда;
б) Олег должен находиться в начале ряда, а Игорь — в конце ряда;
в) Олег и Игорь должны стоять рядом.

9.29. В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия, биология, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли рядом?

9.30. Сколько существует перестановок букв слова «конус», в которых буквы *к, о, н* стоят рядом?

9.31. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг — это сборники стихов, так, чтобы сборники стихов стояли рядом в произвольном порядке?

9.32. Сколькими способами 5 мальчиков и 5 девочек могут занять в театре в одном ряду места с 1 по 10? Сколькими способами они могут это сделать, если мальчики будут сидеть на нечетных местах, а девочки — на четных?

9.33. Делится ли число 30! на:
а) 90; б) 92; в) 94; г) 96?

9.34. Делится ли число 14! на:
а) 168; б) 136; в) 147; г) 132?

9.35. Найдите значение выражения:
а) $\frac{15!}{14!}$; б) $\frac{8!}{10!}$; в) $\frac{42!}{40!}$; г) $\frac{16!}{14!\cdot 3!}$.

9.36. Что больше и во сколько раз:
а) $6!\cdot 5$ или $5!\cdot 6$; б) $(n+1)!\cdot n$ или $n!\cdot (n+1)$?

Упражнения для повторения

9.37. Найдите значение выражения:
а) $\frac{125^{-1}\cdot 343^{-2}}{25^{-1}\cdot 49^{-4}}$; б) $\frac{81^{5}\cdot 100^{-1}}{10^{-4}\cdot 3^{16}}$.

9.38. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 7-3x-4(3-1{,}5x)<0, \\ -6(1+2{,}5x)-10x-4>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2(1{,}5x-1)-(x+4)\geqslant 0, \\ -(2-x)-0{,}75x\leqslant 0. \end{cases}$

9.39. Найдите нули функции, если они существуют, и изобразите схематически ее график:

а) $y=x^2+5x-14$; б) $y=-x^2+5x-6$.

3. Размещения

Пусть имеется 4 шара и 3 пустых ячейки. Обозначим шары буквами a, b, c, d. В пустые ячейки можно по-разному разместить три шара из этого набора шаров. Если мы поместим шар a в первую ячейку, шар b во вторую ячейку, а шар c в третью ячейку, то получим одну из возможных упорядоченных троек шаров:

a	*b*	*c*

Выбирая по-разному первый, второй и третий шары, будем получать различные упорядоченные тройки шаров, например:

a	*c*	*b*

b	*a*	*c*

d	*c*	*b*

Каждую упорядоченную тройку, которую можно составить из четырех элементов, называют *размещением* из четырех элементов по три.

Размещением из n элементов по k ($k\leqslant n$) называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов.

Число размещений из n элементов по k обозначают A_n^k (читают: «A из n по k»).

Из определения следует, что два размещения из n элементов по k считаются различными, если они отличаются самими элементами или порядком их расположения.

Составим из элементов a, b, c, d все размещения по три элемента. Выпишем сначала те размещения, которые начинаются с элемента a. Получим:

abc, abd, acb, acd, adb, adc.

Аналогично можно составить размещения, которые начинаются с элемента b, с элемента c, с элемента d. В результате получим:

abc,	*abd,*	*acb,*	*acd,*	*adb,*	*adc,*
bac,	*bad,*	*bca,*	*bcd,*	*bda,*	*bdc,*

cab, cad, cba, cbd, cda, cdb,
dab, dac, dba, dbc, dca, dcb.

Из составленной таблицы видно, что $A_4^3=24$.

Число размещений из четырех элементов по три можно найти, не выписывая самих размещений. Будем рассуждать так. Первый элемент можно выбрать четырьмя способами, так как им может быть любой из четырех элементов. Для каждого выбранного первого элемента можно тремя способами выбрать из трех оставшихся второй элемент. Наконец, для каждых первых двух элементов можно двумя способами выбрать из двух оставшихся третий элемент. В результате получаем, что $A_4^3=4\cdot 3\cdot 2$, т. е. $A_4^3=24$.

С помощью тех же рассуждений нетрудно подсчитать, сколько можно составить размещений из n элементов по k, где $k\leqslant n$. Первый элемент можно выбрать n способами. Так как после этого остается $n-1$ элементов, то для каждого выбора первого элемента можно $n-1$ способами выбрать второй элемент. Далее, для каждого выбора первых двух элементов можно $n-2$ способами выбрать третий элемент (из $n-2$ оставшихся) и т. д. Наконец, для каждого выбора первых $k-1$ элементов можно $n-(k-1)$ способами выбрать k-й элемент (из $n-(k-1)$ оставшихся).

Значит,

$$\boldsymbol{A_n^k=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)).}$$

Мы получили формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k.

Число размещений из n элементов по k равно произведению k последовательных натуральных чисел, из которых наибольшим является n.

Заметим, что размещения из n элементов по n отличаются друг от друга только порядком элементов, т. е. представляют собой перестановки из n элементов.

В этом случае по формуле числа размещений получаем, что

$$\boldsymbol{A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-1)),}\ \textbf{т. е.}$$

$$\boldsymbol{A_n^n=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)n.}$$

Мы пришли к уже известной вам формуле числа перестановок $P_n=n!$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Учащиеся второго класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?

Любое расписание на один день, составленное из 4 различных предметов, отличается от другого либо предметами, либо порядком следования предметов. Значит, в этом примере речь идет о размещениях из 8 элементов по 4. Имеем:

$$A_8^4=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=1680.$$

Расписание можно составить 1680 способами.

Пример 2. Сколько трехзначных чисел (без повторения цифр в записи числа) можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Если среди семи цифр нет нуля, то число трехзначных чисел (без повторения цифр), которые можно составить из этих цифр, равно числу размещений из 7 элементов по 3. Однако среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число. Поэтому из размещений из 7 элементов по 3 надо исключить те размещения, у которых первым элементом является цифра 0. Их число равно числу размещений из 6 элементов по 2.

Значит, искомое число трехзначных чисел равно $A_7^3 - A_6^2$.

Получаем:

$$A_7^3 - A_6^2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 180.$$

Из данных цифр можно составить 180 трехзначных чисел (без повторения цифр).

9.40. Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?

9.41. Из 30 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

9.42. Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м?

9.43. На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

9.44. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 7 различных цветов?

9.45. На соревнования по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменок. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4×100 м на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

9.46. Сколькими способами организаторы конкурса могут определить, кто из 15 его участников будет выступать первым, вторым и третьим?

9.47. Сколькими способами 6 студентов, сдающих экзамен, могут занять места в аудитории, в которой стоит 20 одноместных столов?

9.48. На странице альбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные места: а) 2 фотографии; б) 4 фотографии; в) 6 фотографий?

9.49. На плоскости отметили 5 точек. Их надо обозначить латинскими буквами. Сколькими способами это можно сделать (в латинском алфавите 26 букв)?

9.50. Сколько четырехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр:
а) 1, 3, 5, 7, 9; б) 0, 2, 4, 6, 8?

9.51. Из трехзначных чисел, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторения цифр), сколько таких, в которых:

а) не встречаются цифры 6 и 7;
б) цифра 8 является последней?

9.52. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различные и первая цифра отлична от нуля?

9.53. Сколько различных трехзначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, таких, которые являются:
а) четными; б) кратными 5?

Упражнения для повторения

9.54. Решите двойное неравенство:

а) $-2<\frac{4x-1}{5}<2$; б) $0{,}2\leqslant\frac{1-5x}{20}\leqslant 0{,}4$.

9.55. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}3y-2x=10,\\7x+5y=27;\end{cases}$ б) $\begin{cases}0{,}4x-0{,}2y=0{,}4,\\x+11y=12{,}5.\end{cases}$

9.56. Найдите значение выражения:

а) $\frac{8!}{6!\cdot 2!}$; б) $\frac{12!}{9!\cdot 3!}$; в) $\frac{7!\cdot 5!}{8!\cdot 4!}$.

4. Сочетания

Пусть имеются пять гвоздик разного цвета. Обозначим их буквами *a, b, c, d, e*. Требуется составить букет из трех гвоздик. Выясним, какие букеты могут быть составлены.

Если в букет входит гвоздика *a*, то можно составить такие букеты:

$$abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ ade.$$

Если в букет не входит гвоздика *a*, но входит гвоздика *b*, то можно получить такие букеты:

$$bcd,\ bce,\ bde.$$

Наконец, если в букет не входят ни гвоздика *a*, ни гвоздика *b*, то возможен только один вариант составления букета:

$$cde.$$

Мы указали все возможные способы составления букетов, в которых по-разному сочетаются три гвоздики из данных пяти. Говорят, что мы составили все возможные *сочетания* из 5 элементов по 3.

Сочетанием из *n* элементов по *k* называется любое множество, составленное из *k* элементов, выбранных из данных *n* элементов.

В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Два сочетания из n элементов по k отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k (читают «C из n по k»).

В рассмотренном примере, составив все сочетания из 5 элементов по 3, мы нашли, что $C_5^3=10$.

Выведем формулу числа сочетаний из n элементов по k, где $k \leqslant n$. Для этого сначала выясним, как C_5^3 выражается через A_5^3 и P_3.

Мы нашли, что из 5 элементов a, b, c, d, e можно составить следующие сочетания по 3 элемента:

$$abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ ade,\ bcd,\ bce,\ bde,\ cde.$$

В каждом сочетании выполним все перестановки. Число таких перестановок равно P_3. В результате получим все возможные комбинации из 5 элементов по 3, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов, т. е. все размещения из 5 элементов по 3. Всего мы получим A_5^3 размещений.

Значит,

$$C_5^3 \cdot P_3 = A_5^3.$$

Отсюда

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3}.$$

Аналогично будем рассуждать в общем случае. Допустим, что имеется множество, содержащее n элементов, и из его элементов составлены все возможные сочетания по k элементов. Число таких сочетаний равно C_n^k. В каждом сочетании можно выполнить P_k перестановок. В результате мы получим все размещения, которые можно составить из n элементов по k. Их число равно A_n^k.

Значит,

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k.$$

Отсюда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Мы получили формулу:

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}}.$$

Формулу числа сочетаний можно записать в другом виде. Умножим числитель и знаменатель дроби на $(n-k)!$, где $n \neq k$. Получим:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))(n-k)!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k\cdot(n-k)!}.$$

Очевидно, что в числителе дроби записано произведение всех натуральных чисел от n до 1, взятых в порядке убывания, т. е. числитель дроби равен $n!$.

Получаем формулу:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Заметим, что эту формулу можно использовать и в случае, когда $n=k$, если принять по определению, что $0!=1$.

Приведем примеры.

Пример 1. Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 15 элементов по 3. Имеем:

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3} = 455.$$

Следовательно, трех дежурных можно выбрать 455 способами.

Пример 2. Из вазы с фруктами, в которой лежит 9 яблок и 6 груш, надо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

Выбрать 3 яблока из 9 можно C_9^3 способами, а выбрать 2 груши из 6 можно C_6^2 способами. Так как при каждом выборе яблок груши можно выбрать C_6^2 способами, то сделать выбор фруктов, о котором говорится в задаче, можно $C_9^3\cdot C_6^2$ способами. Имеем:

$$C_9^3\cdot C_6^2 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 1260.$$

Значит, указанный выбор фруктов можно сделать 1260 способами.

9.57. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

9.58. В магазине «Филателия» продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

9.59. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

9.60. Из лаборатории, в которой работают заведующий и 10 сотрудников, надо отправить 5 человек в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) заведующий лабораторией должен ехать в командировку;

б) заведующий лабораторией должен остаться?

9.61. На полке стоит 12 книг: англо-русский словарь и 11 художественных произведений на английском языке. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги, если:

а) словарь нужен ему обязательно;

б) словарь ему не нужен?

В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории требуется выделить четырех мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?

В библиотеке читателю предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 4 журнала. Сколькими способами он может выбрать из них 3 книги и 2 журнала?

В задачах **9.64—9.71** *рассматриваются различные комбинации элементов (перестановки, размещения, сочетания).*

Сколько среди всех перестановок букв слова «высота» таких, которые:

а) начинаются с буквы *в*;

б) начинаются с буквы *а*, а оканчиваются буквой *т*?

Пять мальчиков и четыре девочки хотят сесть на девятиместную скамейку так, чтобы каждая девочка сидела между двумя мальчиками. Сколькими способами они могут это сделать?

Из 12 солдат, в число которых входят Иванов и Петров, надо отправить в наряд трех человек. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) Иванов и Петров должны пойти в наряд обязательно;

б) Иванов и Петров должны остаться;

в) Иванов должен пойти в наряд, а Петров — остаться?

В шахматном кружке занимаются 16 человек. Сколькими способами тренер может выбрать из них для предстоящего турнира:

а) команду из четырех человек;

б) команду из четырех человек, указав при этом, кто из членов команды будет играть на первой, второй, третьей и четвертой досках?

Для ремонта школы прибыла бригада, состоящая из 12 человек. Трех из них надо отправить на четвертый этаж, а четырех из оставшихся на пятый этаж. Сколькими способами это можно сделать?

Номер машины в некотором городе состоит из двух различных букв, взятых из набора М, Н, К, Т, С, и трех различных цифр. Сколько машин можно обеспечить такими номерами?

Из группы туристов четырех дежурных можно выбрать в 13 раз большим числом способов, чем двух дежурных. Сколько туристов в группе?

Упражнения для повторения

Постройте график функции $y=-2x^2+8$.

Решите неравенство:

а) $x^2 - 0{,}5x - 5 < 0$; б) $x^2 - 2x + 12{,}5 > 0$.

9.73. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=1, \\ xy=240; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=65, \\ 2x-y=15. \end{cases}$

9.74. Решите уравнение:

а) $5\sqrt{x}=1$; б) $\sqrt{x-4}=15$.

Контрольные вопросы

1. Объясните, в чем состоит комбинаторное правило умножения, используемое для подсчета числа возможных вариантов.
2. Что называется перестановкой из n элементов? Запишите формулу для вычисления числа перестановок из n элементов. Какой смысл имеет запись $n!$?
3. Что называется размещением из n элементов по k? Запишите формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k.
4. Что называется сочетанием из n элементов по k? Запишите формулы для вычисления числа сочетаний из n элементов по k.

§ 4. Начальные сведения из теории вероятностей

5. Вероятность случайного события

В повседневной жизни, в практической и научной деятельности мы часто наблюдаем те или иные явления, проводим определенные эксперименты.

Событие, которое может произойти, а может и не произойти в процессе наблюдения или эксперимента, называют *случайным событием*. Например, поражение мишени или промах при выстреле — случайные события. Выигрыш команды во встрече с соперником, проигрыш или ничейный результат — это тоже случайные события. Закономерности случайных событий изучает специальный раздел математики, который называется *теорией вероятностей.*

Зарождение теории вероятностей произошло в поисках ответа на вопрос: как часто наступает то или иное событие в большой серии испытаний со случайными исходами, которые происходят в одинаковых условиях?

Рассмотрим такой пример. Бросают игральный кубик, т. е. небольшой куб, на гранях которого выбиты очки 1, 2, 3, 4, 5, 6 (рис. 13). При бросании игрального кубика на его верхней грани может выпасть одно очко, два очка, три очка и т. д. Каждый из этих исходов является случайным.

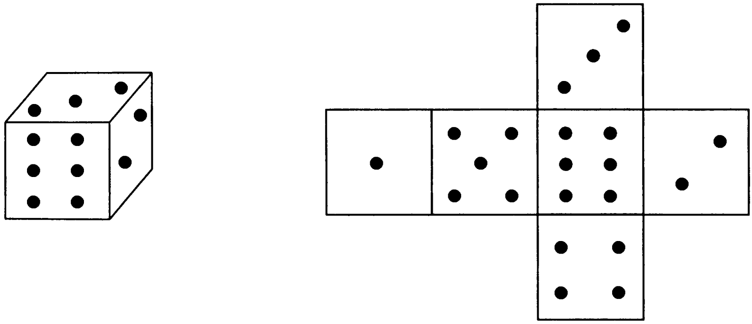

Рис. 13

Провели такое испытание. Игральный кубик бросали 100 раз и наблюдали, сколько раз произойдет событие «на кубике выпало 6 очков». Оказалось, что в данной серии экспериментов «шестерка» выпала 9 раз. Число 9, которое показывает, сколько раз в этом испытании произошло рассматриваемое событие, называют *частотой* этого события, а отношение частоты к общему числу испытаний, равное $\frac{9}{100}$, называют *относительной частотой* этого события.

Вообще, пусть определенное испытание проводится многократно в одних и тех же условиях и при этом каждый раз фиксируется, произошло или нет интересующее нас событие A. Обозначим буквой n общее число испытаний, а буквой m число испытаний, при которых произошло событие A. Число m называют частотой события A, а отношение $\frac{m}{n}$ — относительной частотой.

Относительной частотой случайного события в серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых это событие наступило, к числу всех испытаний.

В ходе статистических исследований установлено, что при многократном повторении отдельных опытов или наблюдений в одних и тех же условиях относительная частота появления ожидаемого события остается примерно одинаковой, незначительно отличаясь от некоторого числа p. Например, при бросании монеты она может упасть кверху орлом или решкой. Если монета однородна и имеет правильную геометрическую форму, то шансы выпадения орла или решки одинаковы. При небольшом числе испытаний выпадение орла может, например, произойти чаще, чем решки. Однако если эти испытания проводятся достаточно большое число раз, то относительная частота выпадения орла близка к относительной частоте выпадения решки.

Многие исследователи проводили испытания с бросанием монеты и вычисляли относительную частоту выпадения орла. В таблице указано число бросков монеты в проводимых ими испытаниях и относительные частоты выпадения орла.

Число бросков	Относительная частота выпадения орла
4040	0,5070
4092	0,5005
10 000	0,4979
20 480	0,5068
24 000	0,5005
80 640	0,4923

Из таблицы видно, что относительная частота выпадения орла незначительно отличается от $\frac{1}{2}$. Говорят, что вероятность выпадения орла близка к $\frac{1}{2}$.

Вообще, если в длинной серии экспериментов со случайными исходами значения относительных частот близки к некоторому определенному числу, то это число принимают за вероятность данного случайного события. Такое определение называют *статистическим определением вероятности.*

Вероятность случайного события находят, когда в ходе статистического исследования анализируют относительную частоту наступления этого события при многократном повторении в одних и тех же условиях эксперимента или наблюдения. Так, например, поступают, когда хотят определить ожидаемую всхожесть семян некоторого растения, предсказать результат выступления спортсмена в соревнованиях по стрельбе и т. п.

Для того чтобы найти вероятность интересующего нас события, необходимо предварительно провести достаточно большое число экспериментов или наблюдений. В то же время если рассматриваются испытания со случайными исходами и все исходы этих испытаний равновозможны, т. е. имеются основания считать, что шансы их наступления одинаковы, то вероятность наступления случайного события удается найти путем рассуждений, не прибегая к испытанию.

Вернемся к рассмотренному примеру с бросанием игрального кубика. Будем считать, что этот кубик имеет правильную форму и сделан из однородного материала и поэтому при его бросании шансы выпадения на его верхней грани любого числа очков от 1 до 6 одинаковы. Говорят, что существует шесть *равновозможных исходов* этого испытания: выпадение очков 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Рассмотрим событие B, которое означает выпадение числа очков, кратного 3. Это событие происходит лишь при двух исходах испытания: когда выпало 3 очка и когда выпало 6 очков. Эти исходы называют *благоприятными исходами* для события B. При бросании кубика из 6 равновозможных исходов испытания благоприятными для события B являются лишь два исхода. Отношение числа благоприятных исходов к числу всех равновозможных исходов равно $\frac{2}{6}$. Это отношение называют *вероятностью* события B и пишут: $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Вероятностью события называется отношение числа благоприятных для него исходов испытания к числу всех равновозможных исходов.

В отличие от статистического определения вероятности это определение называют *классическим определением.*

Что означает на практике, что вероятность рассмотренного события B равна $\frac{1}{3}$? Разумеется, это не означает, что при шести бросках число очков, кратное 3, выпадает ровно два раза. Возможно, что оно выпадает один раз, три раза или не выпадет совсем. Однако если провести большое число испытаний, то относительная частота появления события B будет мало отличаться от $\frac{1}{3}$. Вообще, при увеличении числа испытаний относительная частота появления случайного события приближается к его вероятности.

Сопоставляя классическое и статистическое определения вероятности, можно сделать вывод, что нахождение классической вероятности не требует, чтобы испытание было проведено в действительности, а нахождение статистической вероятности (относительной частоты) предполагает фактическое проведение испытания.

Для того чтобы найти вероятность некоторого события, надо правильно определить число равновозможных исходов испытания и число благоприятных для этого события исходов.

Рассмотрим, например, известную задачу Даламбера (1717—1783): «Найти вероятность того, что при подбрасывании двух монет на обеих монетах выпадут решки».

При бросании монет равновозможными являются следующие исходы: $(o;\ o)$, $(o;\ p)$, $(p;\ p)$, $(p;\ o)$, где в каждой паре на первом месте записан результат бросания первой монеты, а на втором — результат бросания второй монеты, причем выпадение орла обозначено буквой o, а выпадение решки — буквой p.

Благоприятным для события A, состоящего в том, что оба раза выпадут решки, является один исход. Значит, $p(A)=\frac{1}{4}$.

Введем теперь понятия достоверного и невозможного события.

Пусть C — событие, состоящее в том, что при бросании игрального кубика выпадет менее 7 очков. Так как каждый из исходов 1, 2, 3, 4, 5, 6 является благоприятным для события C, то вероятность наступления события C равна:

$$P(C)=\frac{6}{6}=1.$$

Событие, которое происходит всегда, сколько бы раз ни повторялось испытание, называется *достоверным* событием. Вероятность достоверного события равна 1.

Обозначим буквой F событие, означающее, что при бросании игрального кубика выпадет 7 очков. Очевидно, что это событие произойти не может. Число благоприятных для него исходов равно нулю, т. е. $P(F)=\frac{0}{6}=0$. Такие события называют *невозможными* событиями.

Пусть некоторое испытание имеет n равновозможных исходов, из которых m исходов благоприятны для события A. Тогда $P(A)=\frac{m}{n}$. Так как $m \leqslant n$, то $\frac{m}{n} \leqslant 1$, т. е. $P(A) \leqslant 1$. С другой стороны, всегда $P(A) \geqslant 0$. Следовательно, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Приведем примеры вычисления вероятностей.

Пример 1. Из 25 экзаменационных билетов по геометрии ученик успел подготовить 11 первых и 8 последних билетов. Какова вероятность того, что на экзамене ему достанется билет, который он не подготовил?

Общее число равновозможных исходов при выборе билетов на экзамене 25. Пусть M — событие, заключающееся в том, что ученику достанется на экзамене билет, к которому он не подготовился. Число благоприятных для события M исходов (но не для ученика) равно $25-(11+8)$, т. е. 6. Значит,

$$P(M)=\frac{6}{25}=0{,}24.$$

Пример 2. Антон и Игорь бросают белый и черный игральные кубики и подсчитывают сумму выпавших очков. Они договорились, что если при очередной попытке в сумме выпадет 8 очков, то выигрывает Антон, а если в сумме выпадет 7 очков, то выигрывает Игорь. Является ли такая игра справедливой?

При бросании кубиков на белом кубике может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Каждому числу очков, выпавших на белом кубике, соответствует шесть вариантов числа очков, выпавших на черном кубике. Все равновозможные исходы этого испытания приведены в таблице:

(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)	(6; 1)
(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)	(6; 2)
(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)
(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)
(1; 5)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)
(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)

В каждой паре на первом месте записано число очков, выпавших на белом кубике, а на втором месте — число очков, выпавших на черном кубике. Общее число равновозможных исходов равно 36.

Пусть событие A означает, что при бросании кубиков в сумме выпало 8 очков, а событие B означает, что в сумме выпало 7 очков.

Для события A благоприятными являются следующие 5 исходов:

(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2),

Для события B благоприятными являются следующие 6 исходов:

(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1).

Отсюда:

$$P(A)=\frac{5}{36},\ P(B)=\frac{6}{36}.$$

Поэтому шансов выиграть у Игоря больше, чем у Антона. Значит, такая игра не является справедливой.

Пример 3. Из 16 собранных велосипедов 4 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

Пусть A — событие, при котором 2 выбранных велосипеда окажутся без дефектов. Любой выбор 2 велосипедов из 16, является равновозможным исходом. Значит, общее число равновозможных исходов равно числу сочетаний из 16 по 2, т. е. C_{16}^2. Исходом, благоприятным для события A, является выбор 2 исправных велосипедов из имеющихся 12 исправных ($16-4=12$). Значит, число благоприятных для события A исходов равно C_{12}^2. Отсюда получаем, что

$$P(A)=\frac{C_{12}^2}{C_{16}^2}=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}:\frac{16\cdot 15}{1\cdot 2}=\frac{11}{20}=0{,}55.$$

Пример 4. Группа туристов, в которой 7 юношей и 4 девушки, выбирает по жребию четырех дежурных. Какова вероятность того, что будут выбраны 2 юноши и 2 девушки?

Число исходов при выборе четырех дежурных равно C_{11}^4. Все эти исходы равновозможны.

Пусть A — событие, при котором выбраны 2 юноши и 2 девушки. Выбрать двух юношей из 7 можно C_7^2 способами, а выбрать двух девушек из 4 можно C_4^2 способами. Каждому выбору двух юношей соответствует C_4^2 выборов двух девушек. Значит, число исходов, благоприятных для события A, равно $C_7^2\cdot C_4^2$. Отсюда получаем, что

$$P(A)=\frac{C_7^2\cdot C_4^2}{C_{11}^4}=\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}:\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{21}{55}.$$

9.75. В партии из 1000 деталей отдел технического контроля обнаружил 12 нестандартных деталей. Какова относительная частота появления нестандартных деталей?

9.76. Выберите какой-нибудь текст, содержащий 150 слов. Подсчитайте число слов, составленных из шести букв. Найдите относительную частоту появления слов, которые составлены из шести букв.

9.77. Выберите 7 строк произвольного текста. Проведя подсчет букв, найдите относительную частоту появления буквы:
а) *о*; б) *е*; в) *а*; г) *ю*.

9.78. Проделайте дома такой опыт: подбросьте 50 раз монету в 1 р. и подсчитайте, сколько раз выпадет орел. Запишите результаты в тетради. В классе подсчитайте, сколько всеми учениками было проведено опытов и каково общее число выпадений орла. Вычислите относительную частоту выпадения орла при бросании монеты.

9.79. На учениях по стрельбе из винтовки относительная частота поражения цели у некоторого стрелка оказалась равной 0,8. Сколько попаданий в цель можно ожидать от этого стрелка на соревнованиях, если каждый участник произведет по 20 выстрелов?

9.80. Многократная проверка показала, что всхожесть семян огурцов определенного сорта равна 0,9. Посадили 85 семян этого сорта. Найдите ожидаемое число проросших семян.

9.81. Для новогодней лотереи отпечатали 1500 билетов, из которых 120 выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?

9.82. Какова вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет:
а) 1 очко; б) более 3 очков?

9.83. Ученик записал в тетради произвольное двузначное число. Какова вероятность того, что сумма цифр этого числа окажется равной 6?

9.84. В кооперативном доме 93 квартиры, из которых 3 находятся на первом этаже, а 6 — на последнем. Квартиры распределяются по жребию. Какова вероятность того, что жильцу не достанется квартира, расположенная на первом или на последнем этаже?

9.85. Андрей и Олег договорились, что если при бросании двух игральных кубиков в сумме выпадет число очков, кратное 5, то выигрывает Андрей, а если в сумме выпадет число очков, кратное 6, то выигрывает Олег. Справедлива ли эта игра и если нет, то у кого из мальчиков больше шансов выиграть?

9.86. Набирая номер телефона, состоящий из 7 цифр, абонент забыл, в какой последовательности идут три последние цифры. Помня лишь, что это цифры 1, 5 и 9, он набрал первые четыре цифры, которые знал, и наугад комбинацию из цифр 1, 5 и 9. Какова вероятность того, что абонент набрал верный номер?

9.87. Чтобы открыть сейф, надо набрать в определенной последовательности пять цифр (без их повторения): 1, 2, 3, 4 и 5. Какова вероятность того, что если набирать цифры в произвольном порядке, то сейф откроется?

9.88. На четырех карточках написаны буквы *о, т, к, р*. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад последовательно одну за другой эти карточки и положили их в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «крот»?

9.89. В пачке находятся одинаковые по размеру 7 тетрадей в линейку и 5 в клетку. Из пачки наугад берут 3 тетради. Какова вероятность того, что все 3 тетради окажутся в клетку?

9.90. В ящике находится 10 деталей, одна из которых нестандартная. Наугад берут 2 детали. Какова вероятность того, что обе детали окажутся стандартными?

9.91. Четыре билета на елку распределили по жребию между 15 мальчиками и 12 девочками. Какова вероятность того, что билеты достанутся 2 мальчикам и 2 девочкам?

9.92. В коробке лежит 8 красных карандашей и 4 синих. Из коробки наугад вынимают 5 карандашей. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся красными, а 2 — синими?

9.93. На полке стоит 12 книг, из которых 4 — это учебники. С полки наугад снимают 6 книг. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся учебниками?

Упражнения для повторения

9.94. Найдите значение выражения:

$$\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}} \cdot 6(x+y)^{-1} \text{ при } x=\frac{1}{3},\ y=0{,}5.$$

9.95. Решите неравенство:

а) $4x-5x^2<0$; б) $9x^2 \leqslant -5x$.

9.96. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{4}{x+5}+\dfrac{76}{25-x^2}=0$;

б) $\dfrac{7x}{x^2-36}+\dfrac{3}{6-x}=\dfrac{7}{x+6}$.

6*. Сложение и умножение вероятностей

Рассмотрим пример.

Пусть в коробке находится 19 шаров: 10 белых, 4 красных и 5 зеленых. Из коробки наугад вынимают один шар. Рассмотрим такие события:

событие A — шар оказался красным;

событие B — шар оказался зеленым;

событие C — шар оказался цветным (т. е. красным или зеленым).

События A и B являются несовместными, так как наступление одного из них исключает наступление другого. Событие C означает наступление одного из событий: A или B.

Выясним, как вероятность события C связана с вероятностями каждого из событий A и B. Найдем вероятности событий A, B и C. Для каждого из проведенных испытаний (извлечение из коробки одного шара) равновозможными являются 19 исходов. Из них для события A благоприятными являются 4 исхода, для события B — 5 исходов, для события C — 9 исходов. Отсюда

$$P(A)=\frac{4}{19},\ P(B)=\frac{5}{19},\ P(C)=\frac{9}{19}.$$

Мы видим, что $P(C)=P(A)+P(B)$.

Вообще, справедливо следующее утверждение:

если событие C означает, что наступает одно из двух несовместных событий: A или B, то вероятность события C равна сумме вероятностей событий A и B.

Пример 1. На карточках написали натуральные числа от 1 до 10 включительно, после чего карточки перевернули и перемешали. Затем наугад открыли одну карточку. Какова вероятность того, что на ней будет написано простое число или число, большее 7?

Пусть событие A означает, что на карточке написано простое число, а событие B означает число, большее 7. Для события A благоприятными являются 4 исхода из 10 равновозможных (появление одного из чисел 2, 3, 5, 7), т. е. вероятность события A равна 0,4. Для события B благоприятными являются 3 исхода из 10 равновозможных (появление чисел 8, 9, 10), т. е. вероятность события B равна 0,3.

Нас интересует событие C, когда на карточке написано простое число или число, большее 7. Событие C наступает тогда, когда наступает одно из событий: A или B. Очевидно, что эти события являются несовместными. Значит, вероятность события C равна сумме вероятностей событий A и B, т. е.

$$P(C)=P(A)+P(B)=0{,}4+0{,}3=0{,}7.$$

При решении некоторых задач бывает удобно воспользоваться свойством вероятностей противоположных событий.

Разъясним смысл понятия «противоположные события» на примере бросания игрального кубика. Пусть событие A означает, что выпало 6 очков, а событие B — что не выпало 6 очков. Всякое наступление события A означает ненаступление события B, а ненаступление события A — наступление события B. В таких случаях говорят, что A и B — противоположные события.

Найдем вероятности событий A и B.

Для события A благоприятным является один исход из шести равновозможных исходов, а для события B — пять исходов из шести. Значит:

$$P(A)=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{5}{6}.$$

Нетрудно заметить, что

$$P(A)+P(B)=1.$$

Вообще, **сумма вероятностей противоположных событий равна 1**.

Действительно, пусть проводится некоторое испытание и рассматриваются два события: событие A и противоположное ему событие, которое принято обозначать $\overline{A}$.

События A и $\overline{A}$ — несовместные события. Событие, означающее наступление хотя бы одного из них, т. е. A или $\overline{A}$, является достоверным событием. Отсюда следует, что сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1, т. е.

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Пример 2. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух кубиках, меньше 11?

Общее число равновозможных исходов этого испытания равно 36.

Пусть событие A означает, что сумма очков, выпавших на двух кубиках, меньше 11. Так как благоприятными для события A является большое число исходов, то удобно сначала найти вероятность противоположного ему события $\overline{A}$, которое означает, что сумма выпавших очков больше или равна 11.

Благоприятными для события $\overline{A}$ являются три исхода:

$$(5;\ 6),\ (6;\ 5),\ (6;\ 6).$$

Поэтому

$$P(\overline{A})=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

Так как события A и $\overline{A}$ являются противоположными, то

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Отсюда

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}.$$

Рассмотрим теперь, как можно вычислить вероятность события, состоящего в совместном появлении двух независимых событий.

Два события называются независимыми, если наступление одного из них не зависит от наступления или ненаступления другого.

Приведем пример.

Пусть в одном из двух ящиков находится 15 деталей, из которых 2 нестандартные, а в другом — 20 деталей, из которых 3 нестандартные. Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что обе детали окажутся нестандартными?

Рассмотрим такие события:

A — из первого ящика вынимают нестандартную деталь;

B — из второго ящика вынимают нестандартную деталь.

Для события A благоприятными являются 2 исхода из 15, а для события B благоприятными являются 3 исхода из 20. Значит,

$$P(A)=\frac{2}{15},\ P(B)=\frac{3}{20}.$$

Очевидно, что события A и B являются независимыми. Рассмотрим событие, состоящее в совместном появлении событий A и B. Обозначим его буквой C.

Общее число равновозможных исходов испытания, в которых событие C наступает или не наступает, равно $15 \cdot 20$.

Действительно, каждому из 15 извлечений из первого ящика соответствует 20 возможностей извлечения детали из второго ящика.

Благоприятными для события C являются те исходы, при которых обе вынутые детали являются нестандартными. Каждому из двух возможных извлечений нестандартной детали из первого ящика соответствует три возможности извлечения нестандартной детали из второго ящика, т. е. число исходов, благоприятных для события C, равно $2 \cdot 3$. Следовательно,

$$P(C)=\frac{2\cdot 3}{15\cdot 20}=\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{20}, \text{ т. е.}$$

$$P(C)=P(A)\cdot P(B).$$

Вообще, справедливо следующее утверждение:

если событие C означает совместное наступление двух независимых событий A и B, то вероятность события C равна произведению вероятностей событий A и B.

Пример 3. В непрозрачном пакете лежат девять жетонов с номерами 1, 2, ..., 9. Из пакета наугад вынимают один жетон, записывают его номер и жетон возвращают в пакет. Затем опять вынимают жетон и записывают его номер. Какова вероятность того, что оба раза будут вынуты жетоны, номера которых являются простыми числами?

Пусть событие A состоит в том, что в первый раз вынут жетон, номер которого является простым числом, а событие B — в том, что во второй раз вынут жетон, номер которого является простым числом. Тогда $P(A)=\frac{4}{9}$ и $P(B)=\frac{4}{9}$, так как из чисел 1, 2, ..., 9 четыре числа являются простыми. Рассмотрим событие

C, которое состоит в том, что оба раза вынуты жетоны, номера которых являются простыми числами.

Событие B не зависит от события A, так как на повторное извлечение жетона не влияет то, какой жетон был вынут в первый раз (извлеченный в первый раз жетон был возвращен в пакет).

Значит,

$$P(C)=P(A)\cdot P(B), \text{ т. е. } P(C)=\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{16}{81}\approx 0{,}2.$$

Заметим, что если бы после первого извлечения жетон не возвращался обратно, то события A и B были бы зависимыми, так как вероятность события B зависела бы от того, вынут ли в первом случае жетон, номер которого является простым числом, или нет.

Пример 4. В результате многократных наблюдений установили, что вероятность попадания в мишень одного стрелка равна 0,9, а другого — 0,8. Каждый из стрелков сделал по одному выстрелу по мишени. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

Рассмотрим такие события:

A — первый стрелок попал в мишень;

B — второй стрелок попал в мишень;

C — мишень поражена.

События A и B независимые. Однако воспользоваться в этом случае умножением вероятностей нельзя, так как событие C наступает не только тогда, когда оба стрелка попали в мишень, но и тогда, когда в мишень попал хотя бы один из них.

Поступим иначе. Рассмотрим события $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$, противоположные соответственно событиям A, B и C. События $\overline{A}$ и $\overline{B}$ являются независимыми, так как промах при выстреле по мишени первого стрелка (событие $\overline{A}$) не зависит от непоражения мишени вторым стрелком (событие $\overline{B}$). Событие $\overline{C}$ означает совместное появление событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Поэтому

$$P(\overline{C})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}).$$

Из свойства вероятностей противоположных событий вытекает, что

$$P(\overline{A})=1-0{,}9=0{,}1,\quad P(\overline{B})=1-0{,}8=0{,}2.$$

Отсюда получаем, что

$$P(\overline{C})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}02.$$

Так как события C и $\overline{C}$ противоположные, то теперь несложно найти вероятность события C:

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-0{,}02=0{,}98.$$

Значит, вероятность того, что мишень будет поражена, равна 0,98.

9.97. Для украшения елки принесли коробку, в которой находится 10 красных, 7 зеленых, 5 синих и 8 золотых шаров. Из коробки наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что он окажется:

а) красным; б) золотым; в) красным или золотым?

9.98. В денежно-вещевой лотерее на 100 000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность:

а) вещевого выигрыша; б) денежного выигрыша; в) какого-либо выигрыша?

9.99. Многократные испытания показали, что для некоторого стрелка вероятность выбить при стрельбе 10 очков равна 0,1, а вероятность выбить 9 очков равна 0,3. Чему равна для этого стрелка вероятность выбить не менее 9 очков?

9.100. Взяли четыре карточки. На первой написали букву *о*, на второй *т*, на третьей *с*, на четвертой *п*. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад одну карточку за другой и положили рядом. Какова вероятность того, что в результате получилось слово «стоп» или слово «пост»?

9.101. На карточках написали цифры 1, 2, 3, после чего карточки перевернули и перемешали. Затем последовательно открыли карточки и положили в ряд. Какова вероятность того, что получится трехзначное число, большее 300?

9.102. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что на одном кубике выпадет одно очко, а на другом — более трех очков?

9.103. В одной партии электролампочек 3% бракованных, а в другой 4% бракованных. Наугад берут по одной лампочке из каждой партии. Какова вероятность того, что обе лампочки окажутся бракованными?

9.104. На одной полке стоит 12 книг, две из которых — сборники стихов, а на другой — 15 книг, три из которых — сборники стихов. Наугад берут с каждой полки по одной книге. Какова вероятность того, что обе книги окажутся сборниками стихов?

9.105. В одном мешке находится 3 красных шара и 2 синих, в другом мешке — 2 красных и 3 синих. Из каждого мешка наугад вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся красными?

9.106. В мешке находится 5 белых шаров и 3 черных. Из мешка наугад вынимают один шар. Его цвет записывают, шар возвращают в мешок и шары перемешивают. Затем снова из мешка вынимают один шар. Какова вероятность того, что оба раза будут вынуты:

а) белые шары; б) черные шары?

9.107. Вероятность остановки за смену одного станка, работающего в цехе, равна 0,15, а другого — 0,16. Какова вероятность того, что оба станка за смену не остановятся?

9.108. При стрельбе по мишени на полигоне одно из двух орудий имеет 800 попаданий из 1000, а другое — 750 попаданий из 1000. Оба орудия выстрелили по мишени по одному разу. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

9.109. В некоторой настольной игре игрок бросает сразу два кубика и делает столько ходов, какова сумма выпавших очков. Какова вероятность того, что игрок сделает менее 10 ходов?

9.110. В вазе 11 гвоздик, из которых 4 красные. В темноте наугад вынимают три гвоздики. Какова вероятность того, что хотя бы одна из них будет красной?

Упражнения для повторения

9.111. Найдите значение:

а) многочлена $5x^2-20x+7$ при $x=2+\sqrt{3}$;

б) дроби $\frac{y^2+3y-3}{y+2}$ при $y=\sqrt{5}-2$.

9.112. Найдите область определения и область значений функции:

а) $f(x)=x^2-10x-17$; б) $g(x)=\frac{1}{|x|-x}$.

9.113. Упростите выражение:

а) $(a-4ab(a+b)^{-1}+b)(a-b)^{-1}+1$;

б) $((x-y)^{-2}-(x+y)^{-2})\cdot(x^2-y^2)^2$.

Контрольные вопросы

1. Что называется относительной частотой случайного события?
2. Сформулируйте классическое определение вероятности случайного события.
3. Пусть событие C состоит в наступлении одного из двух несовместных событий A и B. Как найти в этом случае вероятность события C?
4. Известно, что событие C состоит в совместном наступлении двух независимых событий A и B. Как найти в этом случае вероятность события C?
5. Приведите пример противоположных событий. Чему равна сумма вероятностей двух противоположных событий?

Дополнительные упражнения

К § 3

9.114. Сколько существует четырехзначных чисел, кратных 10, если цифры в числах могут повторяться?

9.115. Пешеход должен пройти один квартал на север и три квартала на запад. Выпишите все возможные маршруты пешехода.

9.116. Выпишите все пятизначные числа, записанные тремя четверками и двумя единицами.

9.117. Из цифр 1, 2, 3, 5 составили все возможные четырехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких чисел, которые больше 2000, но меньше 5000?

9.118. Сколько четных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно записать с помощью цифр:
а) 1, 2, 3, 7; б) 1, 2, 3, 4?

9.119. Делится ли число 50! на:
а) 100; б) 305; в) 1550?

9.120. Найдите наименьшее значение n, при котором число $n!$ оканчивается:
а) одним нулем; б) двумя нулями; в) тремя нулями.

9.121. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составили все возможные трехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких, которые:
а) кратны 2; б) кратны 3?

9.122. Сократите дробь:
а) $\frac{(n+1)!}{n!}$; б) $\frac{n!}{(n+2)!}$; в) $\frac{(n+1)!(n+3)}{(n+4)!}$.

9.123. Решите уравнение:
а) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=42$; б) $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}=\frac{5}{6}$.

9.124. На плоскости отметили точку. Из нее провели 9 лучей. Сколько получилось при этом углов?

9.125. Сколькими способами из класса, где учатся 24 учащихся, можно выбрать: а) двух дежурных; б) старосту и помощника старосты?

9.126. У Антона шесть друзей. Он может пригласить в гости одного или нескольких из них. Определите общее число возможных вариантов.

9.127. Сколько команд участвовало в финале первенства, если известно, что каждая команда сыграла с каждой из остальных по одной игре на своем поле и по одной игре на поле соперника, причем всего было сыграно 30 игр?

9.128. Сколькими способами четыре пассажира: Алексеев, Смирнов, Федоров и Харитонов — могут разместиться в девяти вагонах поезда, если:

а) все они хотят ехать в разных вагонах;

б) Алексеев и Смирнов хотят ехать в одном вагоне, а Федоров и Харитонов — в других вагонах, причем различных?

9.129. На плоскости отметили несколько точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две точки провели прямую. Сколько точек было отмечено, если всего было проведено 28 прямых?

9.130. В 9 «А» классе учатся 25 учащихся, в 9 «Б» — 20 учащихся, а в 9 «В» — 18 учащихся. Для работы на пришкольном участке надо выделить трех учащихся из 9 «А», двух — из 9 «Б» и одного — из 9 «В». Сколько существует способов выбора учащихся для работы на пришкольном участке?

9.131. Из группы туристов требуется выбрать дежурного и его помощника. Если туристов было бы на одного больше, то возможностей выбора было бы в 1,25 раза больше. Сколько туристов в группе?

9.132. Сколькими способами группу из 12 человек можно разбить на две группы:

а) по 4 и 8 человек; б) по 5 и 7 человек?

9.133. В отделе работают 5 ведущих и 8 старших научных сотрудников. В командировку надо послать двух ведущих и трех старших научных сотрудников. Сколькими способами может быть сделан выбор сотрудников, которых надо послать в командировку?

9.134. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составили все возможные трехзначные числа (с повторением цифр). Сколько среди них таких, сумма цифр которых равна:

а) 3; б) 4; в) 6?

9.135. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 составили все возможные трехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких, сумма цифр которых равна:

а) 6; б) 9?

9.136. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{P_6-P_4}{P_5}$; б) $\dfrac{A_8^4-A_8^3}{A_7^3-A_7^2}$; в) $\dfrac{C_6^3-C_6^2}{A_6^2}$.

9.137. Сколько надо взять элементов, чтобы число размещений из них по четыре было в 12 раз больше, чем число размещений из них по два?

9.138. Число размещений из n элементов по четыре в 14 раз больше числа размещений из $n-2$ элементов по три. Найдите n.

9.139. Решите уравнение:

а) $14C_n^{n-2}=15A_{n-3}^2$;

б) $6C_n^{n-3}=11A_{n-1}^2$;

в) $13C_{2n}^{n+1}=7C_{2n+1}^{n-1}$;

г) $21C_{2n}^{n+1}=11C_{2n+1}^{n-1}$.

К § 4

9.140. Для натуральных чисел от 1 до 99 включительно найдите частоту появления простых чисел в первом, втором, третьем и т. д. десятке. Сравните относительные частоты для:
а) первого и третьего десятков;
б) второго и десятого десятков.

9.141. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад последовательно одну за другой три карточки, расположив их в ряд слева направо. Какова вероятность того, что в результате получилось:
а) число 123; б) число 312 или 321;
в) число, первая цифра которого 2?

9.142. Для экзамена подготовили билеты с номерами от 1 до 25. Какова вероятность того, что взятый наугад учеником билет имеет:
а) однозначный номер; б) двузначный номер?

9.143. Из ящика, в котором находятся шары с номерами от 1 до 100, наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не имеет цифры 6?

9.144. В мешке находятся жетоны с номерами от 1 до 15. Из мешка наугад вынимают один жетон. Какова вероятность того, что номер вынутого жетона не делится ни на 2, ни на 3?

9.145. В ящике лежит 6 красных шаров и 4 зеленых. Наугад вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что 2 шара из них окажутся красными, а один — зеленым?

9.146. На столе лежит 28 костей домино. Наугад берут одну кость.
а) Найдите вероятность того, что взятая кость содержит 6 очков.
б) Докажите, что вероятность взять кость с числом очков 5 равна вероятности взять кость с числом очков 4.

9.147. Из 40 деталей, лежащих в ящике, три бракованные. Из ящика наугад вынимают одну деталь. Какова вероятность того, что эта деталь окажется без брака?

9.148. На каждой карточке написана одна из букв *о, п, р, с, т*. Несколько карточек наугад выкладывают одну за другой в ряд. Какова вероятность, что при выкладывании:
а) 3 карточек получится слово *рот*;
б) 4 карточек получится слово *сорт*;
в) 5 карточек получится слово *спорт*?

9.149. В коробке находятся шары с номерами 1, 2, 3, 4, 5. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность того, что сумма номеров на них равна:
а) 3; б) 5?

9.150. В коробке находится 12 шаров, среди которых n белых, а остальные цветные. Вероятность того, что вынутый наугад шар окажется белым, равна $\frac{1}{6}$. Сколько белых шаров в коробке?

9.151. В мешке содержится 24 шара. Среди них красных шаров в два раза больше, чем белых, а остальные шары синие. Вероятность того, что вынутый наугад шар окажется белым, равна $\frac{1}{8}$. Найдите вероятность того, что вынутый наугад шар окажется синим.

9.152. В мешке содержатся жетоны с номерами от 1 до 50 включительно. Какова вероятность того, что извлеченный наугад из мешка жетон содержит только одну цифру 3?

9.153. Монету бросают три раза подряд. Какова вероятность того, что каждый раз выпадет решка?

9.154. Чемодан можно открыть, если правильно набрать шифр 22 075 (при наборе шифра цифра каждого разряда может быть любой от 0 до 9). Какова вероятность того, что человек, набрав произвольно номер из пяти цифр, сможет открыть чемодан?

9.155. При изготовлении детали совершается две операции. Вероятность брака при первой операции равна 0,01, а при второй — 0,02. Какова вероятность того, что после двух операций деталь окажется стандартной?

9.156. Бросают три игральных кубика. Какова вероятность того, сумма выпавших на них очков будет равна:
а) 3; б) 4; в) 5; г) 7?

9.157. Миша и Костя по очереди бросают три игральных кубика. Они договорились, что если при очередном броске выпадет 5 очков, то выигрывает Миша, а если выпадет 16 очков, то выигрывает Костя. Справедлива ли эта игра?

9.158. Игральный кубик бросают три раза подряд. Какова вероятность того, что каждый раз на нем выпадет число очков:
а) кратное 2; б) кратное 3?

Методический комментарий

Данное пособие предназначено для изучения вероятностно-статистического материала при работе по учебникам «Алгебра, 7», «Алгебра, 8», «Алгебра, 9» авторов Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой под редакцией С. А. Теляковского. Структура пособия аналогична структуре этих учебников. Материал делится на параграфы, параграфы — на пункты. В каждом пункте содержатся теоретические сведения и соответствующие упражнения. В конце пункта приводятся упражнения для повторения. К каждому параграфу даются дополнительные упражнения более высокого уровня сложности по сравнению с основными упражнениями.

Представленный в пособии материал распределяется между 7, 8 и 9 классами.

В 7 классе учащиеся знакомятся с такими простейшими статистическими характеристиками, как среднее арифметическое, размах, мода и медиана. Их содержательный смысл разъясняется на доступных примерах. Учащиеся должны научиться в несложных случаях находить эти характеристики для ряда числовых данных, понимать их практический смысл. Этот материал рекомендуется рассматривать в конце курса алгебры 7 класса. Он естественным образом завершает представленную в этом курсе вычислительную линию и может быть включен в курс за счет более компактного изучения других тем.

Изучение элементов статистики продолжается в 8 классе. Здесь учащиеся получают начальные представления о сборе и группировке статистических данных, составлении таблиц частот и относительных частот. Они знакомятся с нахождением по таблице частот основных статистических характеристик — среднего арифметического, размаха, моды и медианы. Вводятся понятия генеральной совокупности и выборки. Рассматриваются различные способы наглядного изображения результатов статистических исследований — построение столбчатых и круговых диаграмм, полигонов, гистограмм.

Статистический материал рекомендуется изучать в 8 классе в конце учебного года после рассмотрения § 13 «Степень с целым показателем и ее свойства» из учебника «Алгебра, 8». При этом § 14 «Приближенные вычисления» не изучается.

Включение в курс алгебры начальных сведений из статистики направлено на формирование у учащихся таких важных в современном обществе умений, как понимание и интерпретация результатов статистических исследований, широко представленных в средствах массовой информации.

В 9 классе завершается изучение вероятностно-статистического материала. Здесь учащиеся знакомятся с комбинаторным правилом умножения, которое получает применение при выводе формул числа перестановок, размещений, сочетаний. Вводятся начальные понятия теории вероятностей: формируется представление о случайных, достоверных и невозможных событиях, даются статистическое и классическое определения вероятности. При вычислении вероятностей используются формулы комбинаторики. Параграф «Начальные сведения из теории вероятностей» завершается пунктом «Сложение и умножение вероятностей». Этот материал рассчитан на учащихся, проявляющих интерес к математике, и может быть использован для индивидуальных занятий или во внеклассной работе с учащимися. Если учитель сочтет возможным рассмотреть этот материал со всеми учащимися, то на изучение его рекомендуется отвести 3 урока.

В связи с включением в курс алгебры 9 класса указанного блока вопросов рекомендуется внести некоторые коррективы в содержание курса, представленного в учебнике «Алгебра, 9». Следует отказаться от изучения ряда вопросов, которые дублируются в старшей школе в курсе алгебры и начал анализа. Например, можно не рассматривать такие вопросы, как решение неравенств методом интервалов, четные и нечетные функции, функция $y=x^n$, степень с рациональным показателем и ее свойства. При изучении сведений о корне n-й степени можно ограничиться введением понятия корня n-й степени и вычислением значений корней. В главе V «Тригонометрические выражения и их преобразования» рекомендуется отказаться от изучения формул приведения, а также формул сложения и следствий из них.

Распределение вероятностно-статистического материала по классам и возможности включения его в общую канву курса алгебры 7—9 классов показаны в приведенном ниже планировании. Планирование составлено из расчета, что на изучение математики в 7—9 классах отводится 5 ч в неделю. В случае, когда на преподавание математики отводится более 5 ч, рекомендуется использовать дополнительное время на расширение круга рассматриваемых задач и тематическое повторение.

Планирование

7 класс

(I четверть — 5 ч в неделю, II, III, IV четверти — 3 ч в неделю, всего 120 ч)

№ параграфа	Тема	Число уроков
1	Выражения	5
2	Преобразование выражений	5
	Контрольная работа № 1	1
3	Уравнения с одной переменной	8
	Контрольная работа № 2	1
4	Функции и их графики	6
5	Линейная функция	7
	Контрольная работа № 3	1
6	Степень и ее свойства	7
7	Одночлены	6
8	Абсолютная и относительная погрешности	3
	Контрольная работа № 4	1
9	Сумма и разность многочленов	4
10	Произведение одночлена и многочлена	6
	Контрольная работа № 5	1
11	Произведение многочленов	7
	Контрольная работа № 6	1
12	Квадрат суммы и квадрат разности	5
13	Разность квадратов. Сумма и разность кубов	5
	Контрольная работа № 7	1
14	Преобразование целых выражений	8
	Контрольная работа № 8	1
15	Линейные уравнения с двумя переменными и их системы	5
16	Решение систем линейных уравнений	10
	Контрольная работа № 9	1
	Статистические характеристики	4
	Повторение	8
	Итоговая контрольная работа	2

8 класс

(3 ч в неделю, всего 102 ч)

№ параграфа	Тема	Число уроков
1	Рациональные дроби и их свойства	5
2	Сумма и разность дробей	6
	Контрольная работа № 1	1
3	Произведение и частное дробей. Функция $y=\frac{k}{x}$ и ее график	10
	Контрольная работа № 2	1
4	Действительные числа	2
5	Арифметический квадратный корень. Функция $y=\sqrt{x}$ и ее график	5
6	Свойства арифметического квадратного корня	3
	Контрольная работа № 3	1
7	Применение свойств арифметического квадратного корня	8
	Контрольная работа № 4	1
8	Квадратное уравнение и его корни	3
9	Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета	7
	Контрольная работа № 5	1
10	Дробные рациональные уравнения. Графический способ решения уравнений	9
	Контрольная работа № 6	1
11	Числовые неравенства и их свойства	6
12	Неравенства с одной переменной и их системы	10
	Контрольная работа № 7	1
	Степень с целым показателем и ее свойства. Стандартный вид числа	6
	Сбор и группировка статистических данных	2
	Наглядное представление статистической информации	3
	Контрольная работа № 8	1
	Повторение	7
	Итоговая контрольная работа	2

9 класс

(3 ч в неделю, всего 102 ч)

№ параграфа	Тема	Число уроков
1	Функции и их свойства	4
2	Квадратный трехчлен	4
3	Квадратичная функция и ее график	8
	Контрольная работа № 1	1
4	Решение неравенств	4
5	Целое уравнение и его корни. Уравнения, приводимые к квадратным	7
	Контрольная работа № 2	1
6	Системы уравнений с двумя переменными	9
	Контрольная работа № 3	1
7	Последовательности. Арифметическая прогрессия.	7
	Контрольная работа № 4	1
8 (п. 18, 19)	Геометрическая прогрессия.	5
	Контрольная работа № 5	1
9	Степенная функция	3
10	Корень *n*-й степени	3
	Контрольная работа № 6	1
12	Тригонометрические функции любого аргумента	5
13 (п. 31, 32)	Основные тригонометрические формулы	5
	Контрольная работа № 7	1
	Комбинаторные задачи. Перестановки, размещения, сочетания	8
	Вероятность случайного события	3
	Контрольная работа № 8	1
	Повторение	17
	Итоговая контрольная работа	2

Ответы

7 класс

7.5. 63 кВт · ч. **7.6.** 291 кг. **7.7.** 17. **7.8.** 14,25. **7.9.** 15. **7.10.** а) 28; б) 43; -10; в) 24. **7.14.** $\approx 19{,}5$ ц/га. **7.19.** $\approx 0{,}8\%$. **7.20.** а) $0{,}016a^5b^5$; б) $-x^7y^7$. **7.28.** в) $m=24$. **7.29.** в) 28 и 29. **7.36.** 8,75. **7.38.** 8 и 16. **7.39.** 30 и 50.

8 класс

8.5. ≈ 10 акций; 98 акций; 2 акции. **8.7.** ≈ 3; 2. **8.14.** $(0{,}25; +\infty)$. **8.15.** -17. **8.33.** $-88{,}36$. **8.34.** $[0{,}5; 15)$. **8.37.** 13. **8.38.** 34 и 17. **8.42.** Указание. Сравните основания прямоугольников, их число и сумму высот.

9 класс

9.2. 10 вариантов. **9.3.** 12 способов. **9.8.** 36 партий. **9.9.** 132 игры. **9.10.** 28 рукопожатий. **9.11.** 552 фотографии. **9.12.** Хватит. **9.13.** 12 способами. **9.14.** 30 способами. **9.15.** 180 костюмов. **9.16.** а) a^4; б) a^{-7}. **9.17.** а) $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{7}\right)$. **9.19.** 24 способами. **9.20.** 5040 маршрутов. **9.21.** 362 880 способами. **9.22.** 119 выражений. **9.23.** 6 вариантов. **9.24.** а) 720; б) 600. **9.25.** а) 6; б) 6. **9.26.** 384. **9.27.** а) 12; б) 18. **9.28.** а) 720; б) 120; в) 1440. **9.29.** 240 способами. **9.30.** 36 анаграмм. **9.31.** 4 838 400 способами. **9.32.** 3 628 800 способами; 14 400 способами. **9.35.** а) 15; б) $\frac{1}{90}$; в) 1722; г) 40. **9.36.** а) Первое произведение больше в 5 раз. **9.37.** а) 9,8; б) 8100. **9.38.** а) $(-\infty; -0{,}4)$; б) $[3; 8]$. **9.40.** 24 способами. **9.41.** 870 способами. **9.42.** 336 способами. **9.43.** 840 способами. **9.44.** 210 способами. **9.45.** 11 880 способами. **9.46.** 2730 способами. **9.47.** 27 907 200 способами. **9.48.** а) 30 способами; б) 360 способами; в) 720 способами. **9.49.** 7 893 600 способами. **9.50.** а) 120; б) 96. **9.51.** а) 210; б) 56. **9.52.** 544 320 номеров. **9.53.** а) 24; б) 12. **9.54.** а) $(-2{,}25; 2{,}75)$; б) $[-1{,}4; -0{,}6]$. **9.55.** а) $x=1$, $y=4$; б) $x=1{,}5$, $y=1$. **9.56.** а) 28; б) 220; в) $\frac{5}{8}$.

9.57. 21 способом. **9.58.** 56 способами. **9.59.** 210 способами. **9.60.** а) 210 способами; б) 252 способами. **9.61.** а) 55 способами; б) 165 способами. **9.62.** 400 400 способами. Указание. $C_{16}^4 \cdot C_{12}^3$. **9.63.** 720 способами. **9.64.** а) 120; б) 24. **9.65.** 2880 способами. Указание. $P_5 \cdot P_4$. **9.66.** а) 10 способами; б) 120 способами; в) 45 способами. **9.67.** а) 1820 способами; б) 43 680 способами. **9.68.** 27 720 способами. Указание. $C_{12}^3 \cdot C_9^4$. **9.69.** 14 400 способами. Указание. $A_5^2 \cdot A_{10}^3$. **9.70.** 15 туристов. **9.71.** 6 кандидатов. **9.72.** а) $(-2; 2{,}5)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **9.73.** а) $x_1=-15$, $y_1=-16$; $x_2=16$, $y_2=15$; б) $x_1=8$, $y_1=1$; $x_2=4$, $y_2=-7$. **9.74.** а) 0,04; б) 229. **9.75.** 0,012. **9.79.** 16 попаданий. **9.80.** ≈ 77. **9.81.** 0,08. **9.82.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$. **9.83.** $\frac{1}{15}$. **9.84.** $\frac{28}{31}$. **9.85.** Игра несправедлива. У Андрея больше шансов выиграть, чем у Олега. **9.86.** $\frac{1}{6}$. **9.87.** $\frac{1}{120}$. **9.88.** $\frac{1}{24}$. **9.89.** $\frac{1}{22}$. Указание. $\frac{C_5^3}{C_{12}^3}$. **9.90.** 0,8. Указание. $\frac{C_9^2}{C_{10}^2}$.

9.91. $\frac{77}{195} \approx 0{,}39$. Указание. $\frac{C_{15}^2 \cdot C_{12}^2}{C_{27}^4}$.

9.92. $\frac{14}{33}$. Указание. $\frac{C_8^3 \cdot C_4^2}{C_{12}^5}$.

9.93. $\frac{8}{33}$. Указание. $\frac{C_4^3 \cdot C_8^3}{C_{12}^6}$.

9.94. 36. **9.95.** а) $(-\infty; 0) \cup (0{,}8; +\infty)$; б) $\left[-\frac{5}{9}; 0\right]$.

9.96. а) –8; 7; б) 8. **9.97.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{15}$; в) $\frac{3}{5}$.

9.98. а) 0,012; б) 0,008; в) 0,02. **9.99.** 0,4. **9.100.** $\frac{1}{12}$. **9.101.** $\frac{1}{3}$.

9.102. $\frac{1}{6}$. **9.103.** 0,0012. **9.104.** $\frac{1}{30}$. **9.105.** $\frac{6}{25}$. **9.106.** а) $\frac{25}{64}$; б) $\frac{9}{64}$.

9.107. 0,714. **9.108.** 0,95. **9.109.** $\frac{5}{6}$. **9.110.** $\frac{26}{33}$. Указание. $1-\frac{C_7^3}{C_{11}^3}$.

9.111. а) 2; б) -1. **9.112.** а) $(-\infty; +\infty)$; $[-42; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$. **9.113.** а) $\frac{2a}{a+b}$; б) $4xy$. **9.114.** 900. **9.117.** 12. **9.118.** а) 6; б) 12. **9.119.** а) Да; б) нет; в) да. **9.120.** а) $n=5$; б) $n=10$; в) $n=15$. **9.121.** а) 24. Указание. $2 \cdot A_4^2$; б) 24. Указание. $4 \cdot P_3$. **9.122.** а) $n+1$; б) $\frac{1}{n^2+3n+2}$; в) $\frac{1}{n^2+6n+8}$. **9.123.** а) $n=6$; б) $n=5$. **9.124.** 36. **9.125.** а) 276 способами; б) 552 способами. **9.126.** 63. Указание. $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$. **9.127.** 6 команд. **9.128.** а) 3024; б) 504. **9.129.** 8 точек. **9.130.** 7 866 000. Указание. $C_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_{18}^1$. **9.131.** 9 туристов. **9.132.** а) 495; б) 792. **9.133.** 560. **9.134.** а) Одно; б) три; в) десять. **9.135.** а) 14; б) 16.

9.136. а) 5,8; б) 8; в) $\frac{1}{6}$. **9.137.** 6. **9.138.** 7 или 8. **9.139.** а) 10; б) 11; в) 19; г) 31. **9.140.** а) $0,4>0,2$; б) $0,4>0,1$. **9.141.** а) $\frac{1}{24}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{4}$. **9.142.** а) $\frac{9}{25}$; б) $\frac{16}{25}$. **9.143.** 0,81. **9.144.** $\frac{1}{3}$. **9.145.** $\frac{1}{2}$. Указание. $\frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3}$. **9.146.** $\frac{1}{7}$. **9.147.** $\frac{37}{40}$. **9.148.** а) $\frac{1}{60}$; б) $\frac{1}{120}$; в) $\frac{1}{120}$. **9.149.** а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{5}$. **9.150.** 2. **9.151.** $\frac{5}{8}$. **9.152.** 0,26. **9.153.** $\frac{1}{8}$. **9.154.** 0,00001. Указание. Каждую цифру шифра можно выбрать 10 способами. Поэтому 5 цифр можно выбрать 10^5 способами. **9.155.** $\approx 0,97$. Указание. $(1-0,01)(1-0,02)$. **9.156.** а) $\frac{1}{216}$; б) $\frac{1}{72}$; в) $\frac{1}{36}$; г) $\frac{5}{72}$. **9.157.** Игра справедлива. **9.158.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{27}$.

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОТ 10 ДО 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3669	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич
Миндюк Нора Григорьевна

АЛГЕБРА
Элементы статистики и теории вероятностей

Учебное пособие
для учащихся 7—9 классов
общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. Б. Грызлова*
Компьютерная графика *М. В. Бакулина*
Художественный редактор *А. В. Крикунов*
Технический редактор *Н. Н. Бажанова*
Корректоры *Н. В. Бурдина, О. А. Ильинская, Н. Д. Цухай*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 29.06.05. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Усл. печ. л. 5. Усл. кр.-отт. 5,5. Уч.-изд. л. 4,33. Доп. тираж 30000 экз. Заказ № 15122.

Федеральное государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени «Издательство «Просвещение» Федерального агентства по печати и массовым коммуникациям. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфический комбинат»
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.