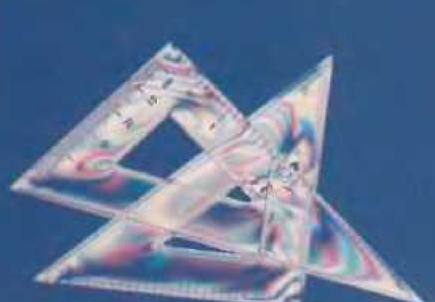
В помощь преподавателю

Геометрия

Опорные конспекты

Ключевые задачи



7–9 классы

Издательство «Учитель»

ГЕОМЕТРИЯ

7–9 КЛАССЫ

ОПОРНЫЕ КОНСПЕКТЫ. КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Автор-составитель Т. А. Лепехина

Издание 3-е

Волгоград

ВВЕДЕНИЕ

Цель данного пособия – оказать помощь учителю в организации индивидуальной дифференцированной работы при изучении геометрии, а также помочь учащимся наглядно представить изучаемый материал и быстро найти необходимые сведения.

Настоящее пособие написано в соответствии с программой основного общего образования по математике, поэтому его можно использовать независимо от того, по какому УМК изучается курс геометрии.

Пособие имеет следующую структуру. Весь материал разбит на три блока (7, 8, 9 классы), внутри каждого блока два раздела: опорные конспекты и ключевые задачи. Все конспекты представлены в виде таблиц, отличающихся максимальной наглядностью. В каждой таблице изложена теория конкретного вопроса (определения, теоремы, следствия, формулы). Часть таблицы для некоторых конспектов предусмотрительно оставлена чистой для пометок и добавлений. При первоначальном знакомстве с конспектом помогает усвоению материала не только детальный анализ доказательства теорем под руководством учителя, чтение конспекта (по пунктам), но и раскрашивание фигур, подчеркивание слов, предложений, новых терминов, приведенных в конспекте, а также чтение изучаемого материала по учебнику. Работа с конспектом помогает систематизировать знания, быстро и полно производить повторение логики доказательства той или иной теоремы.

Известно, что задача может служить не только целью, но и средством обучения. Учиться решать задачи с помощью ключевых (опорных, базисных) – идея древняя. При решении задачи можно пользоваться нужным конспектом, составлять план решения задачи, опираясь на введенные ранее алгоритмы, записи в изученных конспектах.

В блоки заданий по каждому классу включены задачи как базового уровня (с ориентацией на стандарт математического образования), так и более сложные, что дает широкие возможности для организации дифференцированной работы с учащимися.

Данными материалами можно пользоваться по-разному: по мере прохождения той или иной темы, при подготовке к зачету либо при итоговом повторении.

Представленное пособие допустимо использовать и как дидактический материал, который можно предложить для работы каждому учащемуся.

ОПОРНЫЕ КОНСПЕКТЫ

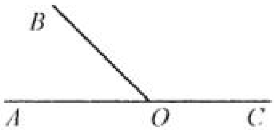
7 класс

КОНСПЕКТ № 1

СМЕЖНЫЕ УГЛЫ

Определение. Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются смежными.

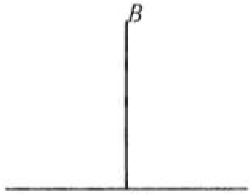
Теорема. Сумма смежных углов равна 180°.



Дано: $\angle AOB$ и $\angle BOC$ – смежные.
Доказать: $\angle AOB + \angle BOC = 180°$.

Доказательство:
$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$, $\angle AOC$ – развёрнутый, значит, $\angle AOB + \angle BOC = 180°$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если смежные углы равны, то они прямые.



Дано: $\angle AOB$ и $\angle BOC$ – смежные,
$\angle AOB = \angle BOC$.
Доказать: $\angle AOB$ и $\angle BOC$ – прямые.

Доказательство:

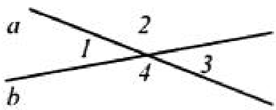
$\angle AOB + \angle BOC = 180°$, $\angle AOB = \angle BOC = \dfrac{180°}{2} = 90°$, значит, $\angle AOB$ и $\angle BOC$ – прямые, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 2

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

Определение. Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

Теорема. Вертикальные углы равны.



Дано: $\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 4$ - вертикальные.

Доказать: $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

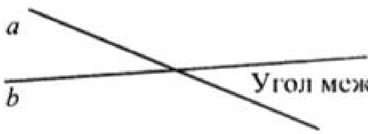
Доказательство:

$\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 2$ – смежные, значит,

$$\left.\begin{array}{l} \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \\ \angle 3 + \angle 2 = 180^\circ \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \angle 1 = 180^\circ - \angle 2 \\ \angle 3 = 180^\circ - \angle 2 \end{array} \Rightarrow \left| \angle 1 = \angle 3 \right.,$$

аналогично $\angle 2 = \angle 4$, что и требовалось доказать.

Определение. Угловая мера меньшего из вертикальных углов называется углом между прямыми.

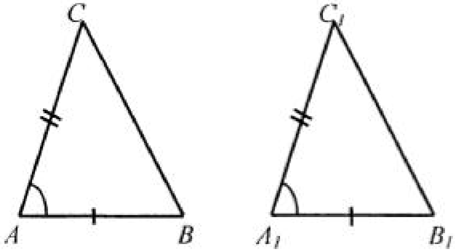


Угол между пересекающимися прямыми.

КОНСПЕКТ № 3

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,
$AB = A_1B_1$,
$AC = A_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

$\angle A = \angle A_1$, поэтому **можно наложить** ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$, так что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1.

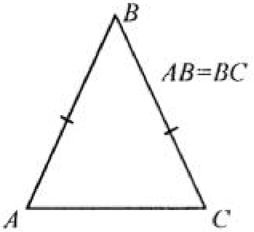
$AB = A_1B_1$	$AC = A_1C_1$				
AB	AC	B	C	BC	ΔABC
Совместятся при наложении					
A_1B_1	A_1C_1	B_1	C_1	B_1C_1	$\Delta A_1B_1C_1$

Таким образом, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 4

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК. РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК. СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Определение. Треугольник называется <u>равнобедренным</u>, если две его стороны равны.



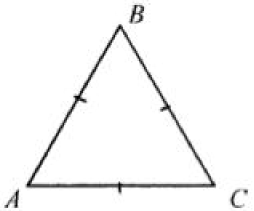
Основание AC.

Боковые стороны AB и BC.

Периметр $P = 2AB + AC$.

Углы при основании $\angle A$ и $\angle B$.

Угол при вершине $\angle B$.



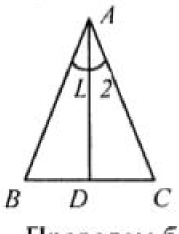
Определение. Треугольник, все стороны которого равны, называется <u>равносторонним</u>.

$AB = BC = AC$,

$P = 3 \cdot AB$.

Свойство I равнобедренного треугольника

Теорема. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.



Дано: ΔABC - равнобедренный ($AB = AC$).

Доказать: $\angle B = \angle C$.

Доказательство:

Проведем биссектрису AD ($\angle 1 = \angle 2$).

$\angle 1 = \angle 2$

$AB = AC$

AD – общая

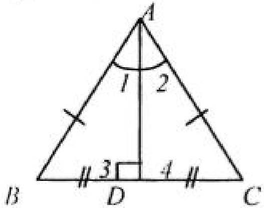
I $\Rightarrow \Delta BAD = \Delta CAD$, следовательно, $\angle B = \angle C$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 5

ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСЕ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Свойство II равнобедренного треугольника

Теорема. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.



Дано: ΔABC – равнобедренный $(AB = AC)$, AD – биссектриса.

Доказать: 1) AD – медиана,

2) AD – высота.

Доказательство:

1. По условию AD – биссектриса ΔABC, поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

2. $\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AD \text{ – общая} \end{array}\right| \overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow} \Delta ABD = \Delta ACD.$

3. $BD = CD$, следовательно, AD – медиана ΔABC, что и требовалось доказать.

4. $\angle 3 = \angle 4$

5. $\left.\begin{array}{l} \angle 3 \text{ и } \angle 4 \text{ – смежные} \\ \angle 3 = \angle 4 \end{array}\right| \Rightarrow \angle 3 = \angle 4 = 180° : 2 = 90°,$

поэтому AD – высота ΔABC, что и требовалось доказать.

Мы установили, что медиана, биссектриса и высота треугольника совпадают.

Справедливы теоремы:

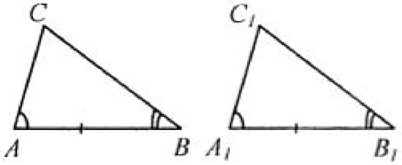
1. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.

2. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

КОНСПЕКТ № 6

ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,
$AB = A_1B_1$,
$\angle A = \angle A_1$,
$\angle B = \angle B_1$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

$AB = A_1B_1$, поэтому <u>можно наложить</u> ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, сторона AB – со стороной A_1B_1, а вершины C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1B_1.

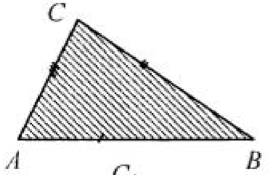
$\angle A = \angle A_1$	$\angle B = \angle B_1$				
Луч AC	Луч BC	$C = AC \cap BC$	AC	BC	ABC
Совместятся при наложении					
Луч A_1C_1	Луч B_1C_1	$C_1 = A_1C_1 \cap B_1C_1$	A_1C_1	B_1C_1	$A_1B_1C_1$

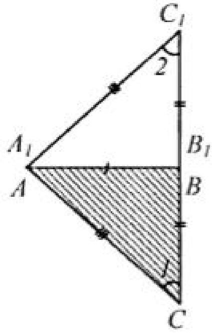
Таким образом, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

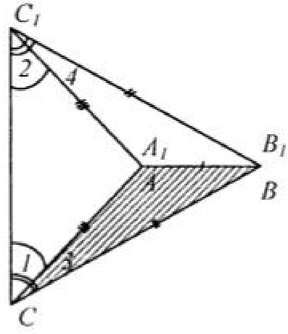
КОНСПЕКТ № 7

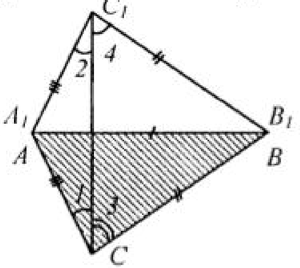
ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.









Дано: ΔABC, $\Delta\ A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$,
$BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta\ A_1B_1C_1$.

Доказательство:

$AB = A_1B_1$, поэтому <u>можно приложить</u> ΔABC к $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина B – с вершиной B_1, а вершины C и C_1 оказались по разные стороны от прямой A_1B_1.

Возможны три случая: луч C_1C – проходит внутри $\angle A_1C_1B_1$; луч C_1C – проходит вне $\angle A_1C_1B_1$; луч C_1C – совпадает с одной из сторон $\angle A_1C_1B_1$.

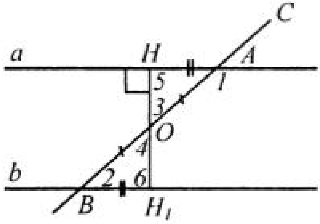
$$\left.\begin{cases} \Delta A_1C_1C \\ \Delta B_1C_1C \end{cases}\middle|\ \text{равнобедренные}\ \right\}\begin{matrix} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle 3 = \angle 4 \end{matrix}\ \Bigg|\ \angle ACB = \angle A_1C_1B_1,$$

$$\left.\begin{matrix} AC = A_1C_1 \\ BC = B_1C_1 \\ \angle C = \angle C_1 \end{matrix}\ \right|\ \overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow}\ \Delta\ ABC = \Delta A_1B_1C_1, \text{ что и требовалось доказать.}$$

КОНСПЕКТ № 8

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.



Дано: $a \cap c = A$, $b \cap c = B$,

$\angle 1$ и $\angle 2$ накрест лежащие,

$\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство:

I. Если $\angle 1 = \angle 2 = 90°$, то $a \perp AB$ и $b \perp AB$, тогда $a \parallel b$.

II. Пусть углы $\angle 1$ и $\angle 2$ не прямые.

1. Разделим отрезок AB пополам, получим O.

2. Проведем $OH \perp a$.

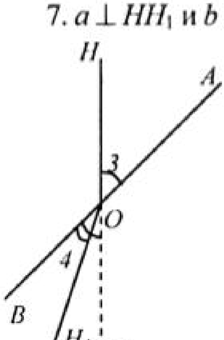
3. На прямой b от точки B отложим $BH_1 = AH$ и проведем отрезок OH_1.

4. $\Delta OHA = \Delta OH_1B$ по двум сторонам и углу между ними ($OA = OB$, $AH = BH_1$, $\angle 1 = \angle 2$).

5. $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6 = 90°$.

6. $\angle 3 = \angle 4$, поэтому точки H_1, O_1, H лежат на одной прямой.

7. $a \perp HH_1$ и $b \perp HH_1$, значит, $a \parallel b$, что и требовалось доказать.



Рассмотрим особо пункт 6.

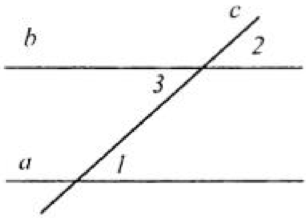
Пусть точки H, O и H_1 не лежат на одной прямой, тогда продолжим OH, получаем: $HM \cap AB = O$.

$\angle HOA = \angle BOM$ как вертикальные, но $\angle HOA = \angle BOH_1$, значит, $\angle BOM = \angle BOH_1$ и лучи OH_1 и OM совпадают.

КОНСПЕКТ № 9

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.



Дано: $a \cap c$, $b \cap c$,

$\angle 1$ и $\angle 2$ соответственные,

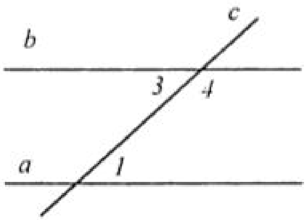
$\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство:

1. $\angle 2 = \angle 3$ как вертикальные.
2. $\angle 2 = \angle 1$ по условию.
3. Значит, $\angle 1 = \angle 3$.
4. Но $\angle 1$ и $\angle 3$ накрест лежащие, поэтому $a \parallel b$, что и требовалось доказать.

Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.



Дано: $a \cap c$, $b \cap c$,

$\angle 1$ и $\angle 4$ – односторонние,

$\angle 1 + \angle 4 = 180°$.

Доказать: $a \parallel b$.

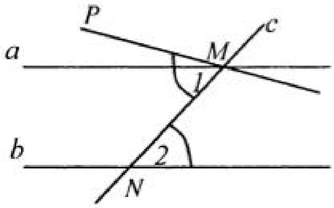
Доказательство:

1. $\angle 3$ и $\angle 4$ – смежные, значит, $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.
2. $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ по условию.
3. Отсюда $\angle 1 = \angle 3$.
4. Но $\angle 1$ и $\angle 3$ накрест лежащие, поэтому $a \parallel b$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 10

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

Теорема. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.



Дано: $a \parallel b$,
$a \cap c = M$,
$b \cap c = N$,
$\angle 1$ и $\angle 2$ накрест лежащие.
Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.

Доказательство (методом от противного):

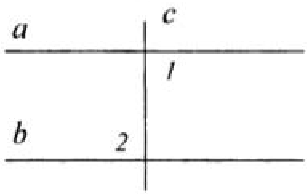
1. Пусть $\angle 1 \neq \angle 2$.

2. Тогда отложим от луча MN угол PMN, равный углу 2 так, чтобы $\angle PMN$ и $\angle 2$ были накрест лежащие при пересечении прямых PM и b секущей MN.

$\angle PMN = \angle 2 \Rightarrow PM \parallel b$. Мы получили, что $PM \cap a$, $PM \parallel b$ и $a \parallel b$, что противоречит аксиоме параллельных.

3. Поэтому $\angle 1 = \angle 2$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.



Дано: $a \parallel b$,
$c \perp a$.
Доказать: $c \perp b$.

Доказательство:

1. $c \cap a$, $a \parallel b \Rightarrow c \cap b$.

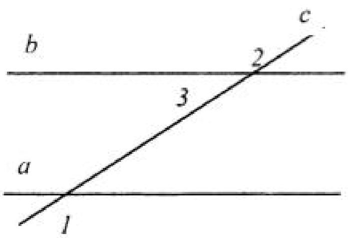
2. $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при параллельных a, b и секущей c.

3. $\angle 1 = 90° \Rightarrow \angle 2 = 90°$, то есть $c \perp b$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 11

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

Теорема. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.



Дано: $a \parallel b$,
$c \cap a$,
$c \cap b$.
$\angle 1$ и $\angle 2$ соответственные.
Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.

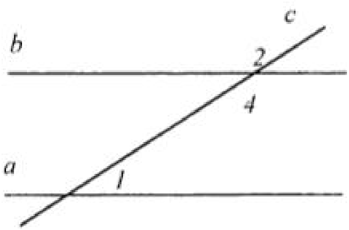
Доказательство:

1. $a \parallel b$, поэтому $\angle 1 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллельных a, b и секущей c.

2. $\angle 2 = \angle 3$ как вертикальные.

3. $\angle 1 = \angle 2$, что и требовалось доказать.

Теорема. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.



Дано: $a \parallel b$,
$c \cap a$, $c \cap b$,
$\angle 1$ и $\angle 4$ односторонние.
Доказать: $\angle 1 + \angle 4 = 180°$.

Доказательство:

1. $a \parallel b$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ как соответственные при параллельных a, b и секущей c.

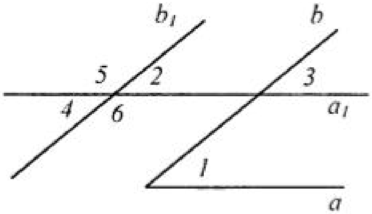
2. $\angle 2$ и $\angle 4$ – смежные, значит $\angle 2 + \angle 4 = 180°$.

3. $\left.\begin{array}{l} \angle 1 \\ \angle 2 + \angle 4 = 180° \end{array}\right| \Rightarrow$ $\angle 1 + \angle 4 = 180°$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 12

УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТОРОНАМИ

Теорема. Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны или в сумме составляют 180°.



Дано: $a \parallel a_1$,
$b \parallel b_1$.

Доказать: 1) $\angle 1 = \angle 2$;
2) $\angle 1 = \angle 4$;
3) $\angle 1 + \angle 5 = 180°$,
$\angle 1 + \angle 6 = 180°$.

Доказательство:

Рассмотрим три случая.

1. Пусть стороны углов 1 и 2 имеют одинаковое направление. $b_1 \parallel b$, $a_1 \cap b_1$, значит, $a_1 \cap b$, получаем $\angle 3$.

$\angle 3 = \angle 1$ и $\angle 3 = \angle 2$ как соответственные при параллельных, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

2. Пусть стороны углов 1 и 4 имеют противоположное направление. Продолжим стороны $\angle 4$, получим $\angle 2$. $\angle 4 = \angle 2$ как вертикальные и $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, $\angle 1 = \angle 4$.

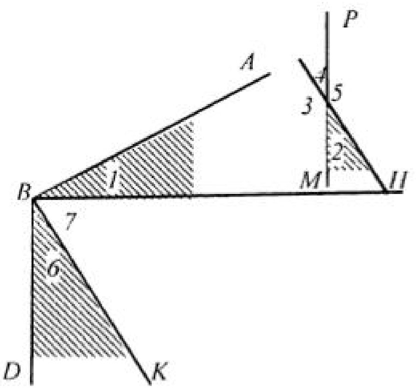
3. Пусть две стороны углов 1 и 5 (1 и 6) имеют одинаковое направление, а две другие – противоположное. Продолжим одну сторону $\angle 5$ ($\angle 6$), получим $\angle 2$. $\angle 5 + \angle 2 = 180°$ как смежные и $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, $\angle 5 + \angle 1 = 180°$.

Аналогично, $\angle 6 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, $\angle 6 + \angle 1 = 180°$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 13

УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ СТОРОНАМИ

Теорема. Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны к сторонам другого угла, то такие углы или равны или в сумме составляют 180°.



Дано: $BA \perp PH$,

$BC \perp PM$.

Доказать: 1) $\angle 1 = \angle 2$,

$\angle 1 = \angle 4$.

2) $\angle 1 + \angle 3 = 180°$,

$\angle 1 + \angle 5 = 180°$.

Доказательство:

Пусть $\angle 1$ – один из данных углов, за другой данный угол возьмем один из четырех углов: 2, 3, 4 или 5, образованных прямыми $PM \cap PH$.

1. Проведем $BD \perp BC$ и $BK \perp BA$, получим $\angle 6$.

2. Обозначим $\angle CBK = \angle 7$. $\angle 1 + \angle 7 = \angle 6 + \angle 7 = 90° \Rightarrow \angle 1 = \angle 6$.

3. $\left.\begin{array}{l} BD \perp BC \\ PM \perp BC \end{array}\right| \Rightarrow BD \parallel PM$ и $\left.\begin{array}{l} BK \perp BA \\ PH \perp BA \end{array}\right| \Rightarrow BK \parallel PH$.

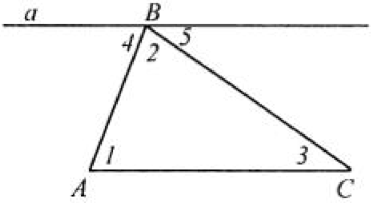
4. По свойству углов с соответственно параллельными сторонами $\angle 6 = \angle 2 = \angle 4$, $\angle 6 + \angle 3 = \angle 6 + \angle 5 = 180°$.

5. Так как $\angle 1 = \angle 6$, то, заменив $\angle 6$ равным ему углом 1, получим то, что требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 14

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180°.



Дано: ΔABC.

Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Доказательство:

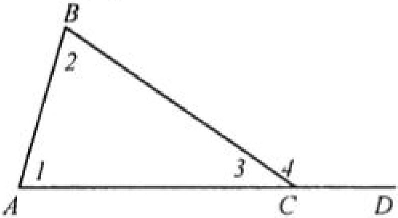
1. Проведем $a \parallel AC$.

2. $\angle 1$ и $\angle 4$, $\angle 3$ и $\angle 5$ – накрест лежащие. $AC \parallel a$, поэтому $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 3 = \angle 5$.

3. $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$, значит, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, что и требовалось доказать.

Определение. Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

Следствие 1. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.



Дано: ΔABC,

$\angle BCD$ – внешний.

Доказать: $\angle BCD = \angle 1 + \angle 2$.

Доказательство:

1. $\angle 4 + \angle 3 = 180°$ по свойству смежных углов.

2. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ по теореме о сумме углов треугольника.

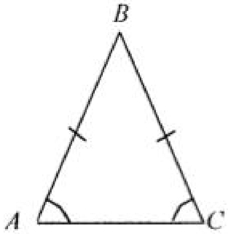
3. $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то и третьи углы равны.

КОНСПЕКТ № 15

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. В треугольнике: 1) против равных сторон лежат равные углы; 2) о б р а т н о : против равных углов лежат равные стороны.



Дано: ΔABC,
$AB = BC$.
Доказать: $\angle A = \angle C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

1. $AB = BC$, значит ΔABC – равнобедренный, поэтому углы, лежащие против этих сторон – $\angle A = \angle C$, как углы при основании.

2. Дано: ΔABC, $\angle A = \angle C$.
Доказать: $AB = BC$.

Д о к а з а т е л ь с т в о (методом от противного):

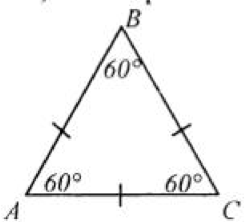
Пусть $AB \neq BC$, тогда либо $AB > BC$, либо $AB < BC$.

Если $AB > BC$, то $\angle C > \angle A$.

Если $AB < BC$, то $\angle C < \angle A$.

И то и другое противоречит условию: $\angle A = \angle C$.

Поэтому наше предположение неверно, следовательно, $AB = BC$, что и требовалось доказать.



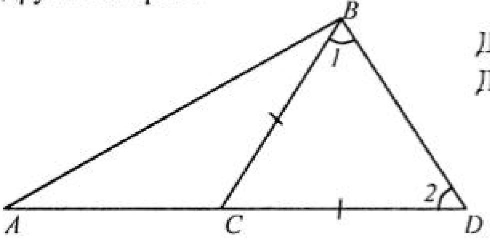
Следствие. В равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°.

$$\angle A = \angle B = \angle C = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ.$$

КОНСПЕКТ № 16

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.



Дано: ΔABC.

Доказать: $AB < AC + CB$,

$AC < AB + BC$,

$BC < BA + AC$.

Доказательство:

Если в треугольнике возьмем сторону не самую большую, то она будет меньше суммы двух других сторон. Поэтому докажем, что даже наибольшая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Пусть в ΔABC наибольшая сторона – AB.

1. Отложим на продолжении стороны AC отрезок $CD = CB$.

2. ΔBCD – равнобедренный, поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

3. Рассмотрим ΔABD: $\angle 1 < \angle ABD$, значит, $\angle 2 < \angle ABD$, тогда и $AB < AD$, так как в треугольнике против меньшего угла лежит меньшая сторона.

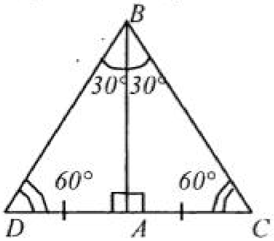
4. Так как $AD = AC + CD$, то $AB < AC + CD$.

5. Заменив CD на CB, получим $AB < AC + CB$, что и требовалось доказать.

Следствие. Каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

КОНСПЕКТ № 17
СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.



Дано: ΔABC – прямоугольный,
$\angle A = 90°$,
$\angle B = 30°$.

Доказать: $AC = \dfrac{1}{2}BC$.

Доказательство:

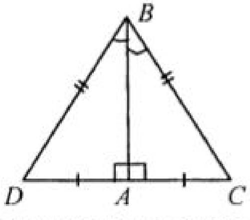
1. ΔABC – прямоугольный, $\angle A = 90°$, поэтому $\angle B + \angle C = 90°$, $\angle C = 90° - 30° = 60°$.

2. Приложим к ΔABC равный ему ΔABD так, чтобы вершины C и D лежали по разные стороны от AB.

3. Рассмотрим ΔBCD, в котором $\angle B = \angle D = 60°$, поэтому $DC = BC$.

4. $AC = \dfrac{1}{2}DC = \dfrac{1}{2}BC$, что и требовалось доказать.

Теорема (обратная). Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета равен 30°.



Дано: ΔABC – прямоугольный,
$\angle A = 90°$, $AC = \dfrac{1}{2}BC$.

Доказать: $\angle ABC = 30°$.

Доказательство:

1. Приложим к ΔABC равный ему ΔABD.

2. ΔBCD – равносторонний, значит, $\angle B = \angle C = \angle D = 60°$.

3. $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\angle DBC = 30°$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 18

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

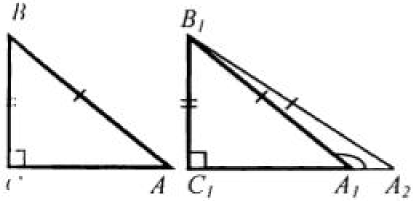
I. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

II. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны.

III. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

IV. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

КОНСПЕКТ № 18
(продолжение)



Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$,
$\Delta A_1B_1C_1$, $\angle C_1 = 90°$,
$AB = A_1B_1$,
$BC = B_1C_1$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

$\angle C = \angle C_1$, поэтому можно наложить ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, что вершина C совместится с вершиной C_1, а стороны CA и CB наложатся соответственно на лучи C_1A_1 и C_1B_1.

	$CB = C_1B_1$			
C	B	A	ABC	ΔABC
Совместятся				$\parallel$
C_1	B_1	? A_1	$A_1B_1C_1$	$\Delta A_1B_1C_1$

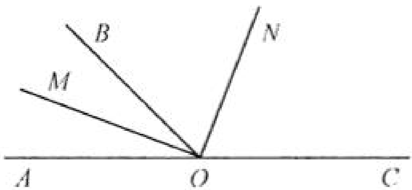
Точка A не может не совместиться с точкой A_1, потому что если бы она заняла положение, например, точки A_2 луча C_1A_1, то тогда мы имели бы равнобедренный $\Delta A_1B_1A_2$, в котором углы при основании A_1A_2 не равны: $\angle A_2$ – острый, а $\angle A_1$ – тупой, как смежный с острым углом $B_1A_1C_1$, что невозможно.

КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ

7 класс

ЗАДАЧА 1

Угол, образованный биссектрисами двух смежных углов, равен 90°. Доказать.



Дано: $\angle AOB$ и $\angle BOC$ – смежные,

OM – биссектриса $\angle AOB$,

ON – биссектриса $\angle BOC$.

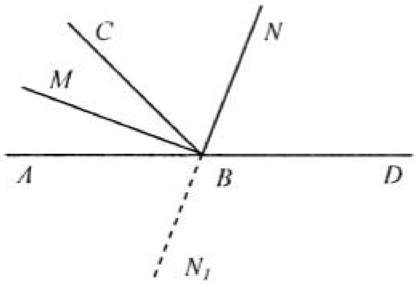
Доказать: $\angle MON = 90°$.

Доказательство:

$\angle MON = \angle MOB + \angle BON = \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle BOC) = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$. $\angle MON = 90°$, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА 2

Доказать, что если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A, B, D лежат на одной прямой.



Дано: $\angle ABC$ и $\angle CBD$,

BM – биссектриса $\angle ABC$,

BN – биссектриса $\angle CBD$,

$BN \perp BM$.

Доказать: точки A, B, D лежат на одной прямой.

Доказательство:

Заметим, что луч BN_1 (продолжение луча BN) не может быть биссектрисой $\angle CBD$, иначе $\angle CBD > 180°$. (Но $\angle CBD < 180°$.) По условию $BN \perp BM$, то есть $\angle MBN = 90°$. $\angle MBC + \angle CBN = 90°$.

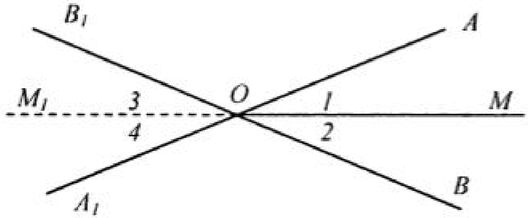
$2(\angle MBC + \angle CBN) = 2 \cdot 90°$.

$2 \cdot \angle MBC + 2 \cdot \angle CBN = 180°$, $\angle ABC + \angle CBD = 180°$.

$\angle ABD = 180°$, отсюда точки A, B, D лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА 3

Биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой. Доказать.



Дано: $\angle AOB$ и $\angle A_1OB_1$ – вертикальные.

Доказать: биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

Доказательство:

Пусть OM – биссектриса $\angle AOB$: $\angle 1 = \angle 2$.

Продолжим луч OM, получим луч OM_1.

Докажем, что $\angle 3 = \angle 4$. (Замена на аналогичную задачу.)

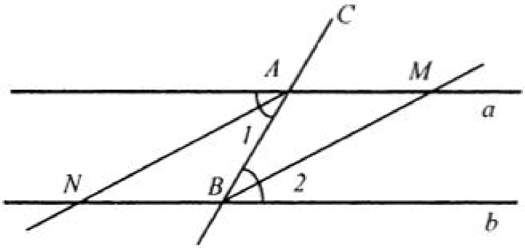
Луч OM_1 проходит внутри $\angle A_1OB_1$, $\angle 1$ и $\angle 4$, $\angle 2$ и $\angle 3$ – вертикальные, поэтому

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1 = \angle 2\\ \angle 1 = \angle 4\\ \angle 2 = \angle 3\end{array}\right| \Rightarrow \quad \angle 3 = \angle 4.$$ Значит, луч OM_1 – биссектриса $\angle A_1OB_1$.

Таким образом биссектрисы OM и OM_1 вертикальных углов AOB и A_1OB_1 лежат на одной прямой MM_1, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА 4

Две параллельные прямые пересечены секущей. Доказать, что биссектрисы накрест лежащих углов параллельны.



Дано: $a \parallel b$, $c \cap a$, $c \cap b$,

$\angle 1$ и $\angle 2$ накрест лежащие,

AN – биссектриса $\angle 1$,

BM – биссектриса $\angle 2$.

Доказать: $AN \parallel BM$.

Доказательство:

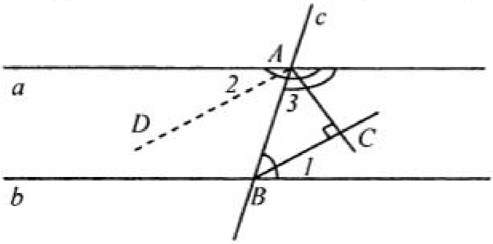
1. $a \parallel b$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$.
2. $\left.\begin{array}{l} AN \text{ – биссектриса } \angle 1 \\ BM \text{ – биссектриса } \angle 2 \end{array}\right| \Rightarrow \angle NAB = \angle MBA$,

так как половины равных углов равны.

3. $\angle NAB$ и $\angle MBA$ – накрест лежащие.
4. $AN \parallel BM$, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА 5

Две параллельные прямые пересечены секущей. Доказать, что биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.



Дано: $a \parallel b$, $c \cap a$, $c \cap b$,

$\angle 1$ и $\angle 3$ односторонние,

AC – биссектриса $\angle 3$,

BC – биссектриса $\angle 1$.

Доказать: $AC \perp BC$.

Доказательство:

1. Проведем биссектрису AD угла 2.

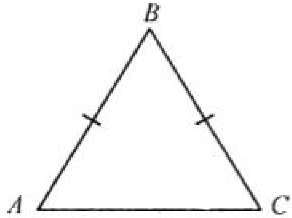
2. $a \parallel b$, $\angle 1$ и $\angle 2$ – накрест лежащие, значит, их биссектрисы параллельны: $AD \parallel BC$ (опорная задача 4).

3. $\angle 2$ и $\angle 3$ – смежные, поэтому их биссектрисы перпендикулярны: $AD \perp AC$ (опорная задача 1).

4. $\left.\begin{array}{l} AD \parallel BC \\ AC \perp AD \end{array}\right| \Rightarrow AC \perp BC$, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА 6

Если один из углов равнобедренного треугольника равен 60°, то этот треугольник равносторонний. Доказать.



1) Дано: $\triangle ABC$,
$AB = BC$,
$\angle A = 60°$.

2) Дано: $\triangle ABC$,
$AB = BC$,
$\angle B = 60°$.

Доказать: $\triangle ABC$ – равносторонний.

Доказательство:

1) $\triangle ABC$ – равнобедренный с основанием AC, поэтому $\angle A = \angle C = 60°$. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, отсюда
$\angle B = 180° - 2 \cdot 60° = 180° - 120° = 60°$.

Так как $\angle A = \angle B = \angle C$, то $BC = AC = AB$, то есть $\triangle ABC$ – равносторонний, что и требовалось доказать.

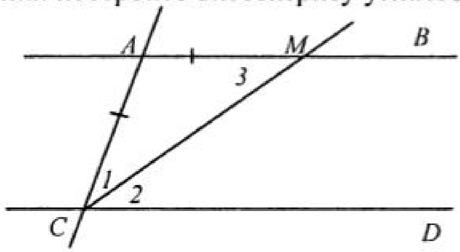
2) $\triangle ABC$ – равнобедренный с основанием AC, поэтому $\angle A = \angle C$. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, отсюда

$$2 \cdot \angle A = 180° - 60° = 120°,\ 2 \cdot \angle A = 120°,\ \angle A = \frac{120°}{2} = 60°.$$

Итак, $\angle A = \angle B = \angle C$, следовательно, $BC = AC = AB$, то есть $\triangle ABC$ – равносторонний, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА 7

Прямые AB и CD параллельны, AC – секущая. С помощью циркуля и линейки постройте биссектрису угла ACD.



Дано: $AB \parallel CD$,

AC – секущая.

Построить: биссектрису $\angle ACD$.

Анализ:

Пусть CM – биссектриса $\angle ACD$, тогда $\angle 1 = \angle 2$. $AB \parallel CD$, $\angle 2$ и $\angle 3$ – накрест лежащие, значит, $\angle 2 = \angle 3$. Получаем $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. В ΔACM углы при основании равны, поэтому $AC = AM$.

Построение:

Измеряем циркулем отрезок AC и на луче AB откладываем $AM = AC$. Проводим луч CM.

Луч CM – искомый.

Доказательство:

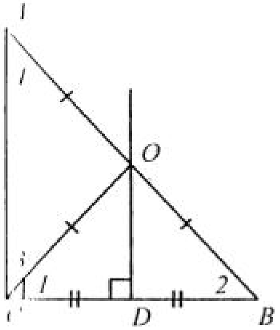
В ΔACM $AC = AM$, поэтому $\angle 1 = \angle 3$. $AB \parallel CD$, поэтому $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие. Таким образом, $\angle 1 = \angle 2$, значит, CM – биссектриса $\angle ACD$.

Исследование:

Задача имеет единственное решение.

ЗАДАЧА 8

В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине. Доказать.



Дано: ΔABC – прямоугольный, $\angle C = 90°$, CO – медиана.

Доказать: $CO = \frac{1}{2}AB$.

Доказательство:

1. Проведем через середину D отрезка CB прямую $DE \perp CB$ ($O = DE \cap AB$).

2. $\Delta COD = \Delta BOD$ по двум катетам, поэтому $CO = BO$ и $\angle 1 = \angle 2$.

3. $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 90°$.

4. $\angle 3 = \angle 4$, значит, в ΔAOC : $AO = CO$.

5. Получаем $CO = AO = BO = \frac{1}{2}AB$, что и требовалось доказать.

Справедливо обратное утверждение:
Если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.

Дано: ΔABC, CO – медиана, $CO = \frac{1}{2}AB$.

Доказать: ABC – прямоугольный ($\angle C = 90°$).

Доказательство:

1. $CO = \frac{1}{2}AB = OB \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$

2. $CO = \frac{1}{2}AB = AO \Rightarrow \angle 3 = \angle 4$ $\quad +$

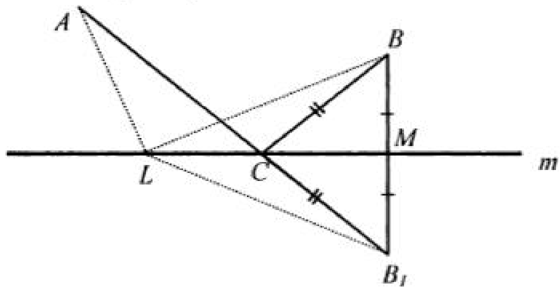
3. $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 \Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 3 + \angle 2 + \angle 4) =$

$\frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$. $\quad \angle 1 + \angle 3 = \angle C = 90°$,

значит, ΔABC – прямоугольный, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА 9

Два населенных пункта A и B находятся по одну сторону от прямой дороги. Где на дороге надо расположить автобусную остановку C, чтобы сумма расстояний $AC + CB$ была наименьшей?



Дано: m, $A \notin m$, $B \notin m$, точки A и B расположены по одну сторону от прямой m.

Найти: точку $C \in m$, чтобы сумма $AC + CB$ была наименьшей.

Построение:

1. Из точки B проведем прямую $BB_1 \perp m$ ($M = BB_1 \cap m$) и отложим $MB_1 = MB$.

2. Построим отрезок AB_1.

3. $C = AB_1 \cap m$.

Точка C – искомая.

Доказательство:

1. Прямоугольные ΔCMB и ΔCMB_1 равны по двум катетам: CM – общая, $MB = MB_1$ по построению, значит, $CB = CB_1$.

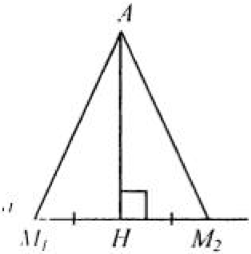
2. $AB_1 = AC + CB_1 = AC + CB$.

3. Пусть L – любая точка прямой m, отличная от C. Применяя неравенство треугольника для ΔALB_1, имеем: $AB_1 < AL + LB_1$, то есть $AC + CB_1 < AL + LB_1$, $AC + CB < AL + LB$. Таким образом, сумма расстояний $AC + CB$ будет наименьшей, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА 10

Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2.

Доказать, что если $HM_1 = HM_2$, то $AM_1 = AM_2$.



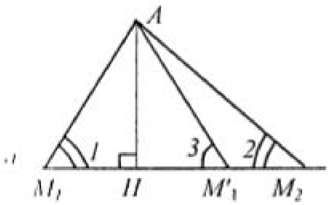
Дано: $AH \perp a$, $HM_1 = HM_2$.
Доказать: $AM_1 = AM_2$.

Доказательство:
Треугольники AHM_1 и AHM_2 равны по двум катетам, поэтому $AM_1 = AM_2$, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА 11

Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2.

Доказать, что если $HM_1 < HM_2$, то $AM_1 < AM_2$.



Дано: $AH \perp a$, $HM_1 < HM_2$.
Доказать: $AM_1 < AM_2$.

Доказательство:

1. Отложим $HM'_1 = HM_1$, проведем AM'_1.
2. $HM_1 = HM'_1$ и $AH \perp a$, значит, $AM_1 = AM'_1$ и $\angle 1 = \angle 3$.
3. $\angle 3$ - внешний в $\Delta AM'_1M_2$, поэтому $\angle 3 > \angle 2$, а значит, и $\angle 1 > \angle 2$.
4. В ΔAM_1M_2 $\angle 1 > \angle 2$, поэтому $AM_2 > AM_1$ или $AM_1 < AM_2$, что и требовалось доказать.

ОПОРНЫЕ КОНСПЕКТЫ

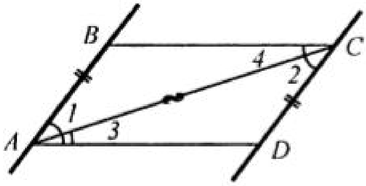
8 класс

КОНСПЕКТ № 1

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Определение. Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны ($ABCD$ – параллелограмм) $\Leftrightarrow$ ($AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$).

Теорема 1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник, $AB \parallel CD$, $AB = CD$.
Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство:

1. Проведем диагональ AC.

2. $AB \parallel CD$, AC – секущая, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие.

3. $\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ AC \text{ – общая} \\ \angle 1 = \angle 2 \end{array}\right| \overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow} \ \Delta B\underline{A}C = \Delta D\underline{C}A, \ \angle 3 = \angle 4.$

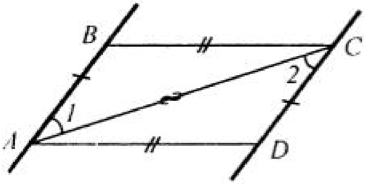
4. $\angle 3$ и $\angle 4$ – накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AC и $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $AD \parallel BC$.

5. $\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{array}\right| \overset{\text{опр.}}{\Rightarrow}$ $ABCD$ – параллелограмм, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 2

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Теорема 2. Если в четырехугольнике противоположные стороны <u>попарно равны</u>, то этот четырехугольник – параллелограмм.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник,
$AB = CD$, $AD = BC$.
Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство:

1. Проведем диагональ AC.

2. $\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ AC \text{ – общая} \end{array}\right| \overset{\text{III}}{\Rightarrow} \Delta B\underline{A}C = \Delta D\underline{C}A,$ $\angle 1 = \angle 2$.

3. $\angle 1$ и $\angle 2$ – накрест лежащие при пересечении прямых AB и CD секущей AC.

$\angle 1 = \angle 2$.

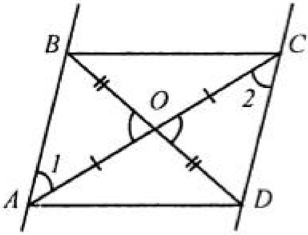
Поэтому $AB \parallel CD$.

4. $\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{array}\right| \Rightarrow$ $ABCD$ – параллелограмм (по первому признаку), что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 3

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Теорема 3. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник,

$AC \cap BD = O$,

$AO = OC$, $BO = OD$.

Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство:

1. $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные.

2. $\left.\begin{aligned} &AO = OC \\ &BO = OD \\ &\angle AOB = \angle COD \end{aligned}\right| \overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow} \begin{aligned} &\Delta \underline{A}OB = \Delta \underline{C}OD, \\ &AB = CD, \\ &\angle 1 = \angle 2. \end{aligned}$

3. $\angle 1$ и $\angle 2$ – накрест лежащие при пересечении прямых AB и CD секущей AC.

$\angle 1 = \angle 2$.

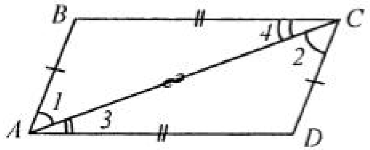
Поэтому $AB \parallel CD$.

4. $\left.\begin{aligned} &AB \parallel CD \\ &AB = CD \end{aligned}\right| \Rightarrow$ $ABCD$ – параллелограмм (по первому признаку), что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 4

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Теорема 1. В параллелограмме противоположные сторонЫ равны и противоположные углы равны.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм.
Доказать: $AB = CD$, $AD = BC$,
$\angle B = \angle D$, $\angle A = \angle C$.

Доказательство:

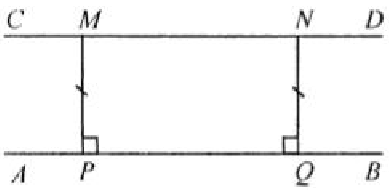
1. Проведем диагональ AC.

2. $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при параллельных прямых.

3. AC – общая; $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$ $\overset{\text{II}}{\Rightarrow}$ $\Delta BAC = \Delta DCA$, $BA = DC$, $BC = DA$, $\angle B = \angle D$.

4. $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$, что и требовалось доказать.

Следствие. Параллельные прямые везде одинаково удалены одна от другой.



Дано: $AB \parallel CD$,
$M \in CD$, $N \in CD$,
$MP \perp AB$, $NQ \perp AB$.
Доказать: $MP = NQ$.

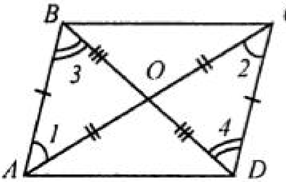
Доказательство:

1. $MP \parallel NQ$ и $AB \parallel CD$, поэтому $MNQP$ – параллелограмм (по определению).

2. $MP = NQ$ как противоположные стороны параллелограмма, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 5
СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Теорема 2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.



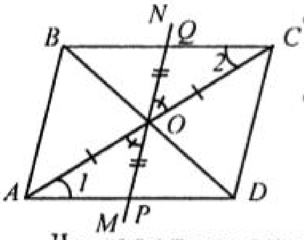
Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
$AC \cap BD = O$.
Доказать: $AO = OC$, $BO = OD$.

Доказательство:

1. $AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма.
2. $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при параллельных прямых.
3. $\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ \angle 1 = \angle 2 \\ \angle 3 = \angle 4 \end{array}\right| \overset{\text{II}}{\Rightarrow}$ $\Delta AOB = \Delta COD$,
$AO = CO$, $OB = OD$,
что и требовалось доказать.

ЦЕНТР СИММЕТРИИ

Теорема. Если через точку пересечения диагоналей параллелограмма провести какую-нибудь прямую, то эта прямая пересечет контур параллелограмма в двух точках, симметричных относительно точки пересечения диагоналей.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
$AC \cap BD = O$, $O \in MN$.
Доказать: $MN \cap AD = P$, $MN \cap BC = Q$,
$OP = OQ$ и точки P и Q лежат по разные стороны от O.

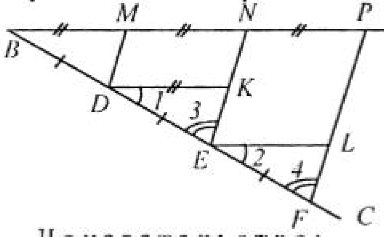
Доказательство:

$\left.\begin{array}{l} AO = OC \\ \angle 1 = \angle 2 \\ \angle AOP = \angle COQ \end{array}\right| \overset{\text{II}}{\Rightarrow}$ $\Delta AOP = \Delta COQ$, $OP = OQ$,
то есть точка пересечения диагоналей параллелограмма есть центр симметрии.

КОНСПЕКТ № 6

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Теорема. Если на одной стороне угла отложить от вершины равные между собой отрезки и через их концы провести параллельные прямые до пресечения с другой стороной, то и на этой стороне отложатся равные между собой отрезки.



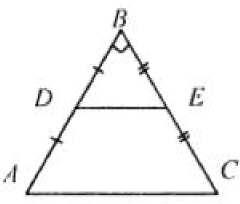
Дано: $\angle ABC$; $D \in BC$,
$E \in BC$, $F \in BC$;
$BD = DE = EF$;
$DM \parallel EN \parallel FP$.
Доказать: $BM = MN = NP$.

Доказательство:

1. Проведем $DK \parallel BA$ и $EL \parallel BA$.
2. $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как соответственные при параллельных прямых.
3. $$\left.\begin{array}{l} DE = EF \\ \angle 1 = \angle 2 \\ \angle 3 = \angle 4 \end{array}\right| \overset{\text{II}}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{c} \Delta \widehat{DKE} = \Delta \widehat{ELF}, \\ DK = EL. \end{array}$$
4. $\underline{DK} = MN$ и $\underline{EL} = NP$ как противоположные стороны параллелограммов.
5. $MN = NP$.
6. Аналогично $BM = MN$.

$BM = MN = NP$, что и требовлось доказать.

Следствие. Прямая, проведенная через середину стороны треугольника параллельно другой его стороне, делит третью сторону пополам.



Дано: ΔABC, $BD = DA$, $D \in AB$,
$DE \parallel AC$.
Доказать: $BE = EC$.

Доказательство:

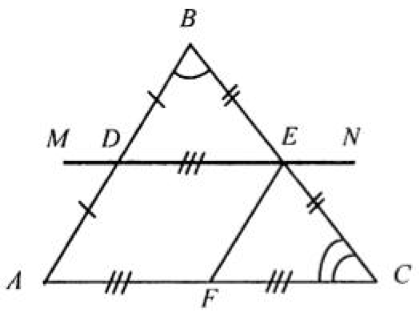
По теореме Фалеса для угла B имеем $BE = EC$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ №7

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Определение. Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.



Дано: ΔABC

$AD = DB$, $EC = BE$.

Доказать: 1) $DE \parallel AC$;

2) $DE = \frac{1}{2} AC$.

Доказательство:

1. Проведем через точку D прямую $MN \parallel AC$, тогда по теореме Фалеса для угла B прямая MN разделит сторону BC пополам и поэтому средняя линия $DE \subset MN$.

2. Проведем $EF \parallel AB$, тогда по теореме Фалеса для угла C имеем $AF = FC$.

3. $DE = AF$ как противоположные стороны параллелограмма $ADEF$, значит, $DE = AF$.

4. $DE = AF = \frac{1}{2} AC$, что и требовалось доказать.

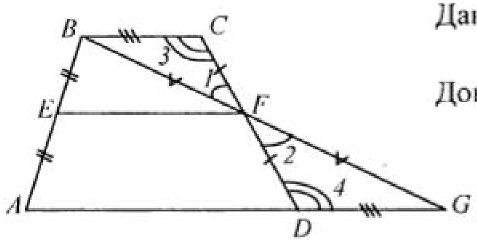
КОНСПЕКТ № 8

ТРАПЕЦИЯ И СВОЙСТВО ЕЕ СРЕДНЕЙ ЛИНИИ

Определение. Трапецией называется четырехугольник, у которого <u>две</u> стороны <u>параллельны</u>, а две другие стороны не параллельны.

Определение. <u>Средней линией</u> трапеции называется <u>отрезок</u>, соединяющий середины ее боковых сторон.

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



Дано: $ABCD$ – трапеция,
$AE = BE$, $CF = FD$.
Доказать: 1) $EF \parallel AD$;
2) $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Доказательство:

1. Проведем через точки B и F прямую до пересечения с продолжением стороны AD в точке G.

2. $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные.

3. $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при параллельных.

4. $CF = FD$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ $\xRightarrow{\text{II}}$ $\Delta BCF = \Delta GDF$, $BF = GF$ и $BC = GD$.

5. EF – средняя линия ΔABG, значит, $EF \parallel AG$ и $EF = \frac{1}{2}AG$, то есть $EF \parallel AD$ и $EF = \frac{1}{2}(AD + \underline{DG}) = \frac{1}{2}(AD + \underline{BC})$, что и требовалось доказать.

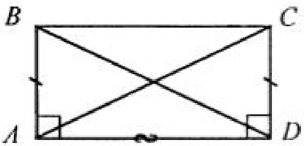
КОНСПЕКТ № 9

ПРЯМОУГОЛЬНИК

Определение. Прямоугольником называется параллелограмм у которого все углы прямые.

Особое свойство прямоугольника

Теорема. Диагонали прямоугольника равны.



Дано: $ABCD$ – прямоугольник.
Доказать: $BD = CA$.

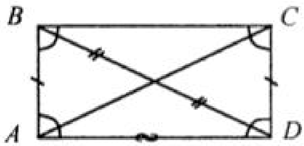
Доказательство:

1. $AB = CD$ как противоположные стороны.

2. $\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ AD \text{ – общая} \\ \angle A = \angle D = 90^\circ \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta\overset{\frown}{BAD}=\Delta\overset{\frown}{CDA} \text{ (по двум катетам),} \\ BD = CA, \text{ что и требовалось доказать.} \end{array}$

Признак прямоугольника

Теорема. Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм прямоугольник.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
$AC = BD$.
Доказать: $ABCD$ – прямоугольник.

Доказательство:

1. $\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ BD = CA \\ AD \text{ – общая} \end{array}\right| \overset{\text{III}}{\Rightarrow} \begin{array}{l} \Delta B\underline{A}D = \Delta C\underline{D}A, \\ \angle A = \angle D. \end{array}$

2. $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$ как противоположные углы параллелограмма.

3. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 360^\circ : 4 = 90^\circ$, поэтому параллелограмм $ABCD$ – прямоугольник (по определению), что и требовалось доказать.

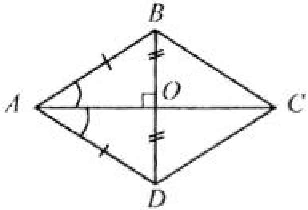
КОНСПЕКТ № 10

РОМБ И КВАДРАТ

Определение. Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Особое свойство ромба

Теорема. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.



Дано: $ABCD$ – ромб.

Доказать: 1) $AC \perp BD$;

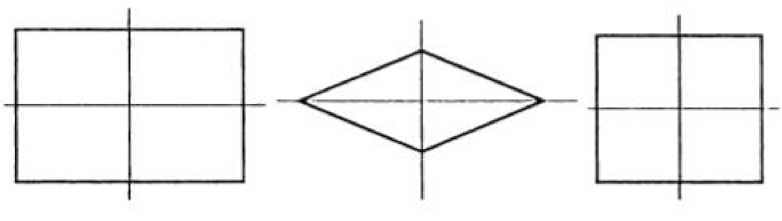
2) $\angle BAC = \angle DAC$.

Доказательство:

1. $AB = AD$, поэтому ΔBAD – равнобедренный.
2. $BO = OD$, значит, AO – медиана.
3. AO – высота и биссектриса ΔBAD, то есть $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$, что и требовалось доказать.
4. Рассматривая ΔABC, докажем, что $\angle B$ делится диагональю пополам и т. д.

Определение. Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

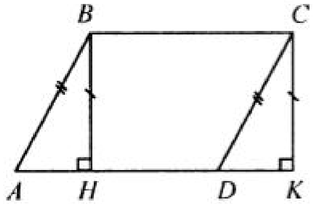
Ось симметрии



КОНСПЕКТ № 11

ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, ТРЕУГОЛЬНИКА, ТРАПЕЦИИ

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

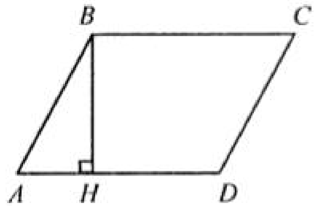


Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
$BK \perp AD$, $CK \perp AD$.
Доказать: $S = AD \cdot BH$.

Доказательство:

1. $\Delta ABH = \Delta DCK$ по катету и гипотенузе.
2. $S_{ABCK} = S_{ABCD} + S_{\Delta DCK} = S_{\Delta ABH} + S_{HBCK}$.
3. $S_{ABCD} = S_{HBCK} = BC \cdot BH = AD \cdot BH$, что и требовалось доказать.

Теорема. Площадь треугольника равна <u>половине</u> произведения его основания на высоту.

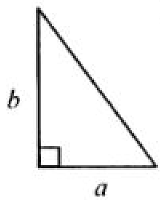


Дано: ΔABC, $CH \perp AB$.

Доказать: $S = \dfrac{1}{2} AB \cdot CH$.

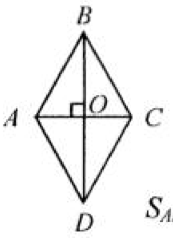
Доказательство:

1. Достроим ΔABC до параллелограмма.
2. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} S_{ABDC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CH$, что и требовалось доказать.



Следствие 1. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. $S = \dfrac{1}{2} ab$.

КОНСПЕКТ № 11
(продолжение)



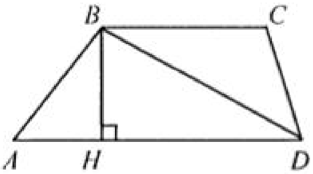
Следствие 2. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot OB = \frac{1}{2} AC \cdot BD. \ S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2.$$

Следствие 3. В прямоугольном треугольнике произведение катетов равно произведению гипотенузы на высоту, опущенную на гипотенузу.

$$\frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ch, \ ab = ch \text{ или } h = \frac{ab}{c}.$$

Теорема. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.



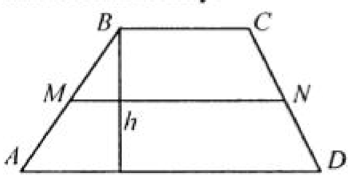
Дано: $ABCD$ – трапеция,
$BH \perp AD$.

Доказать: $S = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BH.$

Доказательство:

1. Проведем диагональ BD. $S = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}$.
2. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD \cdot BH + \frac{1}{2} BC \cdot BH = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BH$, что и требовалось доказать.

Следствие. Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot h = MN \cdot h.$$

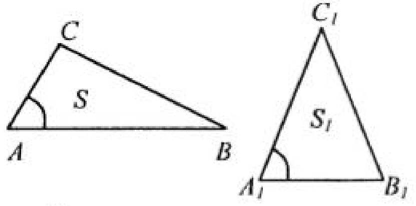
$S = MN \cdot h$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 12

ОТНОШЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ДВУХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ О ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

Теорема. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.



Дано: $S_{\Delta ABC} = S$, $S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_1$, $\angle A = \angle A_1$.

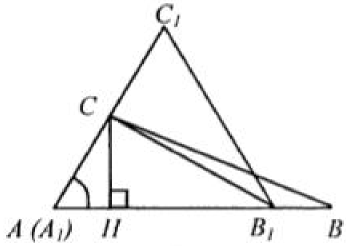
Доказать: $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$.

Доказательство:

1. Наложим $\Delta A_1B_1C_1$ на ΔABC так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной A, а стороны A_1B_1 и A_1C_1 наложились соответственно на лучи AB и AC.

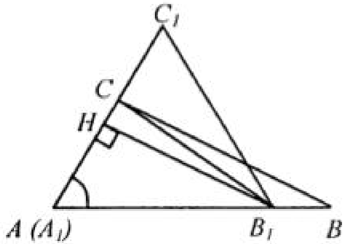
2. ΔABC и ΔAB_1C имеют общую высоту CH, поэтому

$$\frac{S}{S_{\Delta AB_1C}} = \frac{AB}{AB_1} \quad (1).$$



3. ΔAB_1C и ΔAB_1C_1 имеют общую высоту B_1H_1, поэтому

$$\frac{S_{\Delta AB_1C}}{S_1} = \frac{AC}{AC_1} \quad (2).$$



4. Перемножим равенства (1), (2):

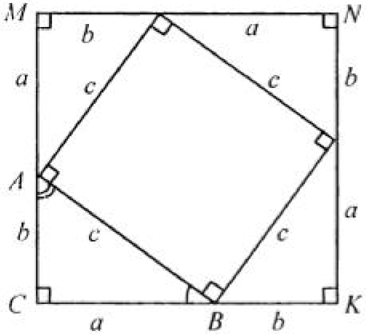
$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1},$$

что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 13

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Теорема. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$.

Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство:

1. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}ab$.

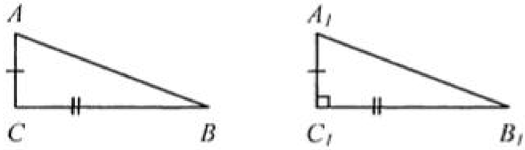
2. Достроим ΔABC до квадрата со стороной $(a + b)$, имеем

$$S = S_{MNKC} = (a + b)^2.$$

3. $S = 4 \cdot \dfrac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2$.

4. $(a + b)^2 = 2ab + c^2$; $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$; $c^2 = a^2 + b^2$, что и требовалось доказать.

Теорема, обратная теореме Пифагора. Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.



Дано: ΔABC,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Доказать: $\angle C = 90°$.

Доказательство:

1. Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$, у которого $\angle C_1 = 90°$, $A_1C_1 = AC$. $B_1C_1 = BC$. По теореме Пифагора: $A_1B_1{}^2 = A_1C_1{}^2 + B_1C_1{}^2$, но по условию $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

2. $A_1B_1{}^2 = AB^2$, поэтому $A_1B_1 = AB$.

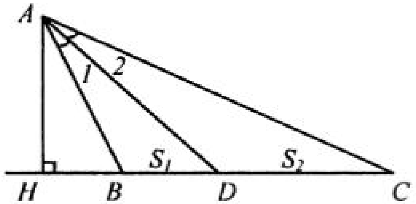
3. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по трем сторонам.

4. $\angle C = \angle C_1 = 90°$, значит, ΔABC – прямоугольный, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 14

СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.



Дано: ΔABC,

AD – биссектриса.

Доказать: $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}$.

Доказательство:

1. Рассмотрим ΔABD и ΔACD, они имеют общую высоту AH, поэтому

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{BD}{DC}. \qquad (1)$$

2. Они имеют по равному углу: $\angle 1=\angle 2$, значит,

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{AB\cdot AD}{AC\cdot AD}=\frac{AB}{AC}. \qquad (2)$$

3. Из (1) и (2) имеем:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

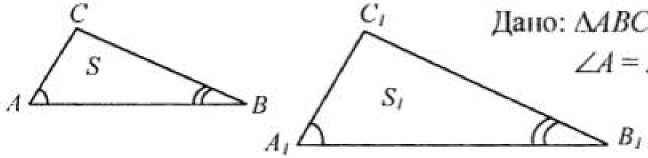
4. Используем (1) свойство производных пропорций:

$\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 15

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.



Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

1. Третьи углы треугольников равны по теореме о сумме углов треугольника: $\angle C = \angle C_1$.

2. $\underline{\angle A = \angle A_1}$, поэтому $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$. (1)

$\underline{\angle B = \angle B_1}$, значит, $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{BA \cdot BC}{B_1A_1 \cdot B_1C_1}$. (2)

$\underline{\angle C = \angle C_1}$, значит, $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot B_1C_1}$. (3)

3. Из равенств (1) и (2) имеем $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$.

Из равенств (1) и (3) имеем $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{CB}{C_1B_1}$

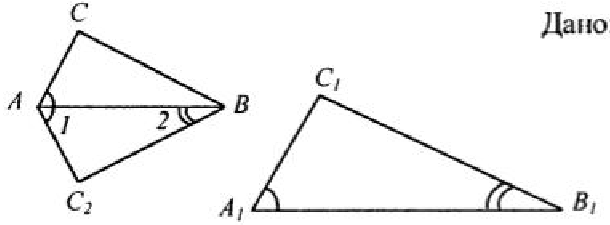
или $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$.

4. По определению подобных треугольников $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 16

ВТОРОЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны.



Дано: ΔABC,
$\Delta A_1B_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$,
$\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

1. Рассмотрим ΔABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$, $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$, по I признаку подобия треугольников,
$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC_2}{A_1C_1}$ $\ldots$ $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.

2. $AC_2 = AC$.

3. $\left.\begin{array}{l} AC = AC_2 \\ AB \text{ – общая} \\ \angle A = \angle A_1 = \angle 1 \end{array}\right| \overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow} \Delta ABC = \Delta ABC_2,\ \angle B = \angle 2.$

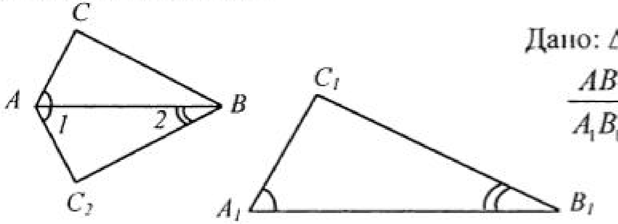
4. $\angle B = \angle 2 = \angle B_1$.

5. $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, следовательно,
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по I признаку подобия треугольников, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 17

ТРЕТИЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}.$$

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

1. Рассмотрим ΔABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$, $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ по I признаку подобия треугольников, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC_2}{B_1C_1}=\frac{C_2A}{C_1A_1}$, но по условию $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}$.

2. $BC_2 = BC$ и $C_2A = CA$.

3. $\left.\begin{array}{l} AC = AC_2 \\ BC = BC_2 \\ AB \text{ – общая} \end{array}\right| \overset{\text{III}}{\Rightarrow} \Delta ABC = \Delta ABC_2,\ \angle A = \angle 1.$

4. $\angle A = \angle 1 = \angle A_1$.

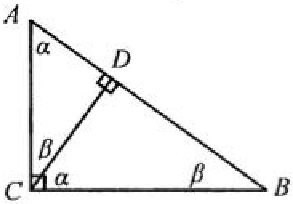
5. $\angle A = \angle A_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$, следовательно,

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по II признаку подобия треугольников, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 18

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Рассмотрим задачу. Доказать, что высота прямоугольного треугольника, опущенная <u>из вершины прямого угла</u>, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному.



Дано: ΔABC, $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$.

Доказать: 1) $\Delta ADC \sim \Delta CDB$;

2) $\Delta ADC \sim \Delta ACB$;

3) $\Delta CDB \sim \Delta ACB$.

Доказательство:

1. Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\alpha + \beta = 90^\circ$.
2. В ΔADC $\angle ACD = 90^\circ - \alpha = \beta$.

   В ΔCDB $\angle DCB = 90^\circ - \beta = \alpha$.

В каждой паре указанных треугольников есть по равному острому углу, значит, они подобны, что и требовалось доказать.

Теорема 1. Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.

Теорема 2. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, опущенной из вершины прямого угла.

1. $\Delta ADC \sim \Delta CDB$,

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB},$$

$CD^2 = \underline{AD \cdot DB}$,

$CD = \sqrt{AD \cdot DB}$.

2. $\Delta ACB \sim \Delta ADC$,

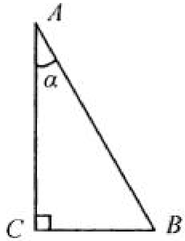
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD},$$

$AC^2 = \underline{AB \cdot AD}$,

$AC = \sqrt{AB \cdot AD}$.

КОНСПЕКТ № 19

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС



Катет → BC – противо- → лежащий к углу A.

Катет → AC – при- → лежащий к углу A.

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB},\ \cos\alpha=\frac{AC}{AB},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{AC}{BC}.$$

Катет прямоугольного треугольника равен:

– гипотенузе, умноженной на синус противолежащего угла, или

– гипотенузе, умноженной на косинус прилежащего угла, или

– другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего искомому катету, или

– другому катету, умноженному на котангенс угла, прилежащего искомому катету.

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна:

– катету, деленному на синус противолежащего угла, или

– катету, деленному на косинус прилежащего угла.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \sin\alpha^2+\cos\alpha^2=1.$$

Доказательство:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{BC}{AB}:\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{AC}=\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{AC}{BC}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=\frac{BC^2+AC^2}{AB^2}=\frac{AB^2}{AB^2}=1.$$

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

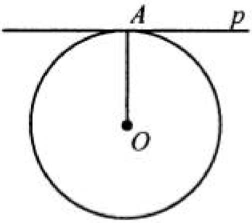
КОНСПЕКТ № 20

КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Определение. Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ

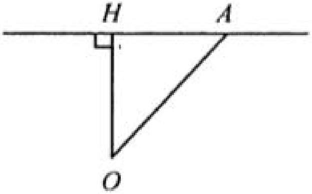
Теорема. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.



Дано: p – касательная к окружности с центром O, A – точка касания.

Доказать: $p \perp OA$.

Доказательство (методом от противного):



Пусть прямая P не перпендикулярна OA, тогда ($OA = R$) OA – наклонная к прямой P.

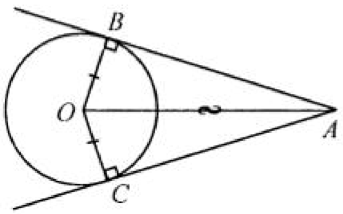
$OH \perp p$, $OH < \underline{OA = r}$, $d < r$.

Прямая p имеет с окружностью две общие точки, что противоречит условию: p – касательная.

Итак, $p \perp OA$, что и требовалось доказать.

Следствие. Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

КОНСПЕКТ № 20
(продолжение)



Дано: AB и AC касательные,
B и C – точки касания.
Доказать: 1) $AB = AC$;
2) $\angle BAO = \angle CAO$.

Доказательство:

1. $OB \perp AB$, $OC \perp AC$ (по свойству касательной).
2. $\Delta OBA = \Delta OCA$ (по катету и гипотенузе).

$BA = CA$ и $\angle BAO = \angle CAO$, то есть AO – биссектриса $\angle BAC$.

Определение. Окружность, касающаяся сторон угла, называется вписанной в этот угол.

Определение. Окружность, касающаяся всех сторон многоугольника, называется вписанной в этот многоугольник.

ПРИЗНАК КАСАТЕЛЬНОЙ

Теорема. Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

(Следует из второго случая расположения прямой и окружности).

Задача. Через данную точку A окружности с центром O провести касательную к этой окружности.

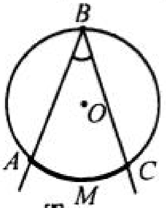
Решение:

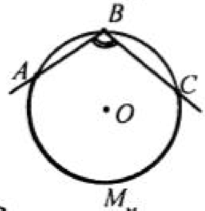
1. Проведем прямую OA.
2. Построим прямую p через точку A, $p \perp OA$.

Прямая p – искомая (по признаку касательной).

КОНСПЕКТ № 21
ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ

Определение. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.





$\angle ABC$ – вписанный, $\cup\ AMC$ расположена внутри $\angle ABC$.

Говорят, что вписанный угол ABC опирается на дугу AMC.

Теорема. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Дано: окружность с центром O;

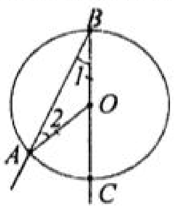
$\angle ABC$ – вписанный, опирающийся на $\cup AC$.

Доказать: $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\cup AC$.

Доказательство:

Рассмотрим три случая расположения луча BO относительно угла ABC.

1) Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC, например, со стороной BC.



$\cup AC < 180^\circ \Rightarrow \angle AOC = \cup AC$.

ΔAOB равнобедренный, $\angle 1 = \angle 2$.

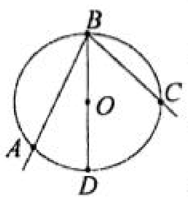
$\angle AOC$ – внешний ΔAOB, $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2 \cdot \angle 1$.

$\cup AC = 2 \cdot \angle 1$, значит, $\angle 1 = \dfrac{1}{2}\cup AC$,

что и требовалось доказать.

2) Луч BO делит угол ABC на два угла. Луч BO пересекает дугу AC в точке D, точка D разделяет дугу AC на две дуги:

$\cup AD$ и $\cup DC$.

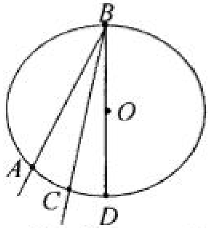


$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \dfrac{1}{2}\cup AD + \dfrac{1}{2}\cup DC =$

$= \dfrac{1}{2}(\cup AD + \cup DC) = \dfrac{1}{2}\cup AC$, что и требовалось доказать.

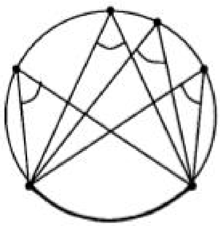
КОНСПЕКТ № 22
(продолжение)

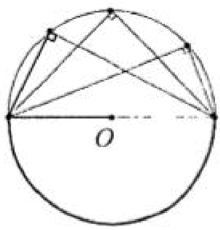
3) Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со сторонами этого угла.



$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} \cup AD - \frac{1}{2} \cup CD =$
$= \frac{1}{2}(\cup AD - \cup CD) = \frac{1}{2} \cup AC$, что и требовалось доказать.

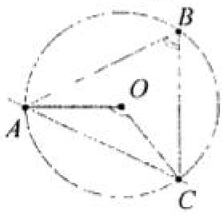
Следствие 1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



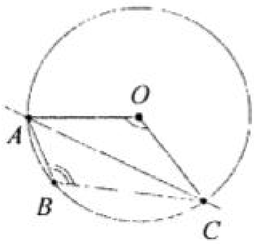


Следствие 2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, – прямой.

Следствие 3. Если вершина B и центр O лежат по одну сторону от прямой AC, то $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$; если вершина B и центр O лежат по разные стороны от прямой AC, то $\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOC$.



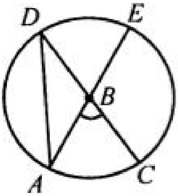
$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$



$\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOC$

КОНСПЕКТ № 22
УГЛЫ, ИЗМЕРЯЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ДУГ ОКРУЖНОСТИ

Теорема. Угол <u>с вершиной внутри окружности</u> измеряется <u>полусуммой двух дуг</u>, из которых одна заключена между его сторонами, а другая – между продолжениями сторон.



Дано: точка B внутри окружности, $\angle ABC$.

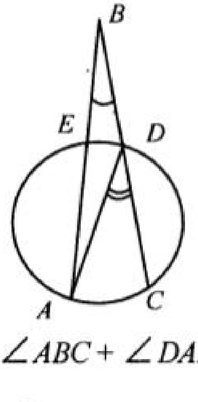
Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$.

Доказательство:

1. Проведем хорду AD, получим ΔABD.

2. $\angle ABC$ – внешний ΔABD, $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE = \frac{1}{2}\cup AC + \frac{1}{2}\cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$, что и требовалось доказать.

Теорема. Угол <u>с вершиной вне окружности</u>, стороны которого пересекаются с окружностью, измеряется <u>полуразностью двух дуг</u>, заключенных между его сторонами.



Дано: точка B вне окружности, $\angle ABC$,
A и C лежат на окружности.

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$.

Доказательство:

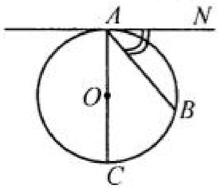
1. Проведем хорду AD, получим ΔABD.

2. $\angle ADC$ – внешний ΔABD, $\angle ADC = \angle ABC + \angle DAE$, $\angle ABC = \angle ADC - \angle DAE = \frac{1}{2}\cup AC - \frac{1}{2}\cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 23

УГОЛ МЕЖДУ ХОРДОЙ И КАСАТЕЛЬНОЙ

Теорема. Угол, образованный хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности, равен половине дуги, заключенной между его сторонами.



Дано: AN – касательная, AB – хорда.

Доказать: $\angle NAB = \frac{1}{2} \cup AB$.

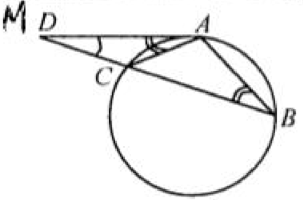
Доказательство:

1. Проведем диаметр AC.
2. Касательная $AN \perp AC$, $\angle CAN = 90°$.
3. $\cup CBA = 180°$.
4. $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC$ как вписанный.
5. $\angle NAB = 90° - \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 180° - \frac{1}{2} \cup BC = \frac{1}{2}(180° - \cup BC) =$

$= \frac{1}{2} \cup AB$, что и требовалось доказать.

СВОЙСТВО СЕКУЩЕЙ И КАСАТЕЛЬНОЙ

Теорема. Если из точки, взятой вне окружности, проведены к окружности секущая и касательная, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.



Дано: MA – касательная, MB – секущая.
Доказать: $MB \cdot MC = MA^2$.

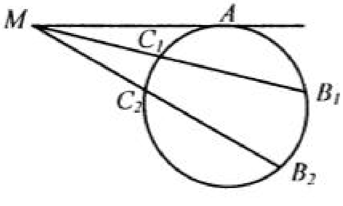
Доказательство:

1. Проведем хорды AB и AC.
2. $\angle MAC = \frac{1}{2} \cup AC$, $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$, поэтому $\angle MAC = \angle ABC$.
3. $\Delta AMC \sim \Delta BMA$ (по двум углам, $\angle M$ – общий).

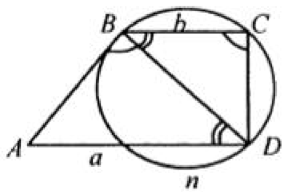
$\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MA}$, $MB \cdot MC = MA^2$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 23
(продолжение)

Следствие. Произведение каждой секущей на ее внешнюю часть есть число постоянное для всех этих секущих и равно квадрату касательной.



Задача. Окружность проходит через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке B. Найти длину диагонали BD, если длины оснований трапеции равны: $AD = a$, $BC = b$.



Решение:

1. AB – касательная, BD – хорда,

$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup BnD.$

2. $\angle BCD$ – вписанный,

$\angle BCD = \frac{1}{2} \cup BnD.$

3. $\angle ABD = \angle BCD.$

4. $AD \parallel BC$, поэтому $\angle ADB = \angle CBD.$

5. $\Delta BDA \sim \Delta CBD$ по двум углам, значит, $\frac{BD}{CB} = \frac{DA}{BD}$,

$BD^2 = DA \cdot CB,$

$BD^2 = a \cdot b,$

$BD = \sqrt{a \cdot b}.$

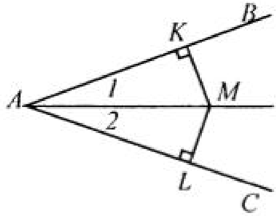
Ответ: $\sqrt{a \cdot b}$.

КОНСПЕКТ № 24

СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ УГЛА. ВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Теорема. Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.

Обратно. Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от его сторон, лежит на биссектрисе угла.



Дано: $\angle BAC$ – неразвернутый,

AM – биссектриса $\angle BAC$,

$MK \perp AB$, $ML \perp AC$.

Доказать: $MK = ML$.

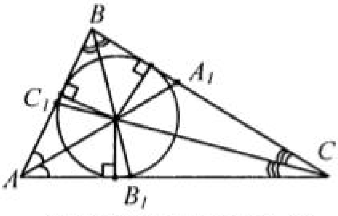
Доказательство:

1. $\angle 1 = \angle 2$, AM – общая $\Rightarrow$ $\Delta AMK = \Delta AML$ по гипотенузе и острому углу.
2. $MK = ML$, что и требовалось доказать.

Обратно:

1. $MK = ML$, AM – общая $\Rightarrow$ $\Delta AMK = \Delta AML$ по гипотенузе и катету.
2. $\angle 1 = \angle 2$, значит, луч AM – биссектриса $\angle BAC$, что и требовалось доказать.

Следствие. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



Доказательство:

1. Пусть O – точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1.
2. По свойству биссектрисы точка O - равноудалена от сторон <u>AB и AC</u>, а также от сторон <u>BA и BC</u>.
3. Поэтому точка O – равноудалена <u>от всех сторон</u> ΔABC, то есть она лежит на биссектрисе CC_1.
4. Значит, все три биссектрисы треугольника пересекаются в точке O, что и требовалось доказать.

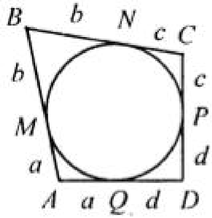
КОНСПЕКТ № 24
(продолжение 1)

Следствие. Для всякого треугольника существует одна и только одна вписанная окружность. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника.

Эта точка называется инцентром треугольника.

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

Теорема. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.



1. Пусть M, N, P и Q – точки касания. По свойству касательной $AM = AQ = a$, $BM = BN = b$, $CN = CP = c$, $DP = DQ = d$. Имеем: $\underline{AB + CD} = a + b + c + d = \underline{BC + AD}$.

2. Обратное утверждение. Пусть $AB + CD = BC + AD$.

1. Проведем биссектрисы углов A и B, они пересекаются в точке O.

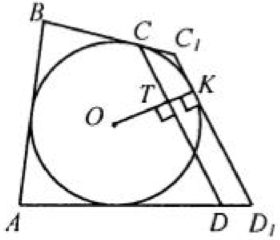
2. Точка O равноудалена от сторон AB, BC и AD. Проведем окружность, касающуюся этих сторон.

3. Докажем, что окружность касается четвертой стороны CD.

Пусть это не так. Допустим, что расстояние OT центра окружности до прямой CD не равно радиусу этой окружности, а отрезок $OK = r$. Проведем через точку K отрезок $C_1D_1 \perp OK$, причем $C_1 \in BC$, а $D_1 \in AD$, тогда

C_1D_1 – касательная к окружности, и эта окружность вписана в четырехугольник ABC_1D_1, значит, справедливо равенство $$AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1$$

КОНСПЕКТ №24
(продолжение 2)



При $OT < r$ имеем:

$AB + C_1D_1 = BC + CC_1 + AD + DD_1$,

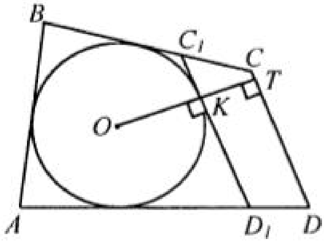
$\underline{AB + CD} + C_1D_1 = \underline{BC + AD} + CC_1 +$

$+ \underline{CD} + DD_1$,

$C_1D_1 = CC_1 + CD + DD_1$,

что противоречит

$C_1D_1 < CC_1 + CD + DD_1$, значит, OT не может быть меньше радиуса r.



При $OT > r$ имеем:

$AB + C_1D_1 = BC - CC_1 + AD - DD_1$,

$\underline{AB + CD} + C_1D_1 = \underline{BC + AD} + \underline{CD} -$

$- CC_1 - DD_1$,

$C_1D_1 = \underline{CD} - CC_1 - DD_1$,

$CD = CC_1 + C_1D_1 + DD_1$,

то противоречит

$CD < CC_1 + C_1D_1 + DD_1$, значит, OT не может быть больше радиуса r.

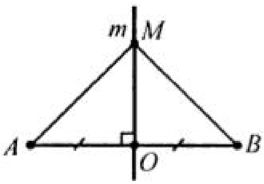
Таким образом, $\underline{OT = r}$, то есть окружность вписана в четырехугольник $ABCD$.

КОНСПЕКТ № 25

СВОЙСТВО СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ОТРЕЗКУ. ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Определение. Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему.

Теорема. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов. Обратно: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.



$\Updownarrow$ Дано: $m \perp AB$, O – середина AB, $M \in m$.
Доказать: $AM = BM$.

Доказательство:

$\underline{M \in m}$

Если M совпадает с O, то $MA = MB$ - верно.

Пусть M и O – различные точки.

1. $OA = OB$, OM – общая $\Rightarrow$ $\Delta OA\overset{\frown}{M} = \Delta OB\overset{\frown}{M}$ по двум катетам.

2. $\underline{AM = BM}$, что и требовалось доказать.

Обратно:

Если $M \in AB$ и $\underline{AM = BM}$, то M совпадает с O, поэтому $M \in m$.

Пусть $M \notin AB$.

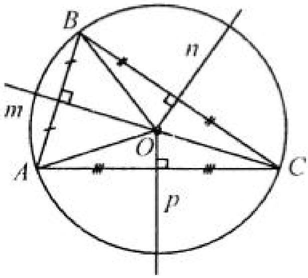
1. $AM = BM$, поэтому ΔAMB – равнобедренный.

2. $AO = OB$, значит, MO – медиана и высота ΔAMB, то есть $MO \perp AB$ и MO совпадает с m , отсюда $\underline{M \in m}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

1. Пусть O – точка пересечения серединных перпендикуляров m и n к сторонам AB и BC.

КОНСПЕКТ № 25
(продолжение 1)



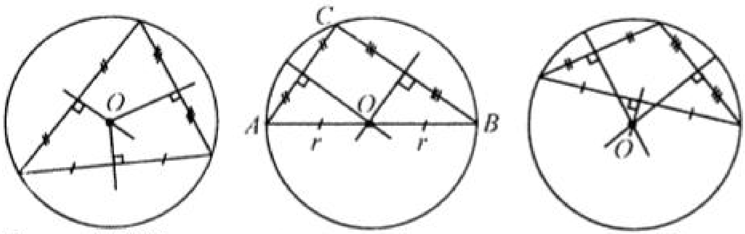
2. По свойству серединного перпендикуляра к отрезку точка O равноудалена от вершин A и B, а также от вершин B и C.

3. Поэтому точка O равноудалена от всех вершин $\triangle ABC$, то есть она лежит на серединном перпендикуляре p к отрезку AC.

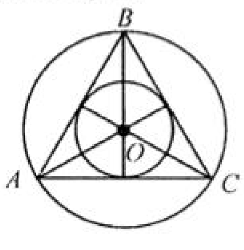
4. Следовательно, все три серединных перпендикуляра m, n и p к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O, что и требовалось доказать.

Следствие. Для всякого треугольника существует одна и только одна описанная окружность (проходящая через все вершины).

Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



Если $\triangle ABC$ – прямоугольный, то гипотенуза AB является диаметром описанной окружности. Центр O лежит на середине гипотенузы.

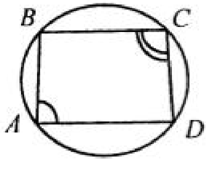


Если $\triangle ABC$ – равносторонний, то центр описанной окружности является одновременно и центром вписанной окружности этого треугольника.

Эту точку называют центром равностороннего треугольника (центром масс).

КОНСПЕКТ № 25
(продолжение 2)
ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Теорема. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.



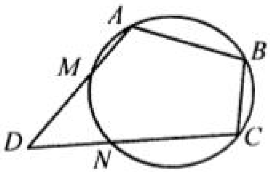
1. По свойству вписанных углов

$\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD; \angle C = \frac{1}{2} \cup BAD.$

$\underline{\angle A + \angle C} = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360° = \underline{180°}.$

2. Так как сумма всех углов четырехугольника равна 360°, то сумма $\underline{\angle B + \angle D = 180°}$, что и требовалось доказать.

Обратное утверждение.



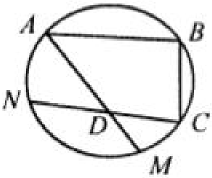
Пусть $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

Опишем окружность около $\underline{\Delta ABC}$.

Если точка D лежит вне круга, то

$\underline{\angle B + \angle D} = \frac{1}{2} \cup AMC + \frac{1}{2}(\cup ABC - \cup MN) =$

$= \frac{1}{2}(\cup AMC + \cup ABC) - \frac{1}{2} \cup MN = 180° - \frac{1}{2} \cup MN < \underline{180°}$, что противоречит условию $\angle B + \angle D = 180°$.



Если точка D лежит внутри круга, то

$\underline{\angle B + \angle D} = \frac{1}{2} \cup AMC + \frac{1}{2}(\cup ABC + \cup MN) =$

$= \frac{1}{2}(\cup AMC + \cup ABC) + \frac{1}{2} \cup MN =$

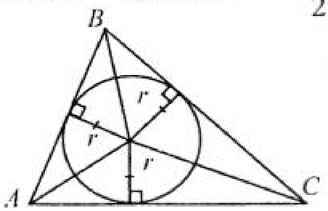
$= 180° + \frac{1}{2} \cup MN \underline{> 180°}$, что противоречит условию $\angle B + \angle D = 180°$.

Таким образом, точка D лежит на окружности, то есть около четырехугольника $ABCD$ описана окружность.

КОНСПЕКТ № 26

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА (ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА), В КОТОРЫЙ МОЖНО ВПИСАТЬ ОКРУЖНОСТЬ

Теорема. Для всякого треугольника ABC справедлива формула $S = rp$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Доказательство:
Пусть O – центр вписанной окружности.
Тогда $S = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} =$
$= \dfrac{1}{2}AB\cdot r + \dfrac{1}{2}BC\cdot r + \dfrac{1}{2}AC\cdot r =$
$= \dfrac{1}{2}r(AB + BC + AC) = \dfrac{1}{2}r\cdot 2p = rp$, что и требовалось доказать.

Замечание. Доказанная формула $S = rp$ справедлива для произвольного четырехугольника, в который можно вписать окружность, здесь $p = \dfrac{a+b+c+d}{2} = a+c = b+d$.

Следствие 1. Для всякого треугольника ABC $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$, где h_a, h_b, h_c – высоты ΔABC, проведенные к соответствующим сторонам.

Доказательство:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c;\ h_a = \frac{2S}{a};\ h_b = \frac{2S}{b};\ h_c = \frac{2S}{c}.$$

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}; \qquad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}; \qquad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}.$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{1}{2S}(a+b+c) = \frac{1}{2S}\cdot 2p = \frac{p}{S} = \frac{p}{pr} = \frac{1}{r},$$

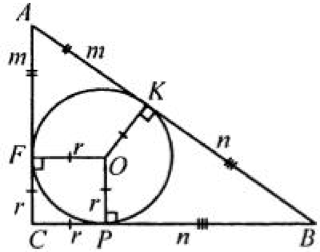
что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 26

(продолжение)

Следствие 2. В прямоугольном ΔABC $r + c = p$, $r = \frac{a+b+c}{2}$,

где c – гипотенуза.



Доказательство:

Пусть O – центр вписанной окружности, F, K, P – точки касания. Тогда по свойству касательных $FC = CP$, $AF = AK$, $BK = BP$.

Обозначим $AK = m$, $BK = n$.

$2r + 2m + 2n = 2p$; $r + \underline{m + n} = p$; $r + c = p$.

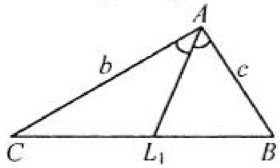
$r = p - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b-c}{2}$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 27*

СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника (конспект 14).

Следствие. Пусть AL_1 – биссектриса угла A треугольника ABC. Тогда отрезки CL_1 и L_1B находятся по формулам:



$$CL_1=\frac{ab}{b+c};\ BL_1=\frac{ac}{b+c}.$$

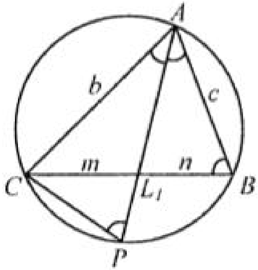
Доказательство:

По свойству биссектрисы $\frac{CL_1}{L_1B}=\frac{b}{c}$, поэтому существует число $x>0$, для которого $CL_1 = bx$; $L_1B = cx$.

Имеем: $\underline{a} = CL_1 + L_1B = bx + cx = \underline{x\,(b + c)}$, $x=\frac{a}{b+c}$, значит,

$CL_1=bx=b\cdot\frac{a}{b+c}=\frac{ab}{b+c}$, $BL_1=cx=c\cdot\frac{a}{b+c}=\frac{ac}{b+c}$, что и требовалось доказать.

Теорема. Пусть в ΔABC из вершины угла A проведена биссектриса l_A, которая делит сторону BC на отрезки $CL_1 = m$, $BL_1 = n$. Тогда справедливо равенство: $l_A^2 = bc - mn$.



Доказательство:

Опишем около ΔABC окружность и продолжим биссектрису AL_1 до пересечения с окружностью в точке P.

1. По свойству отрезков хорд имеем: $l_A\cdot L_1P=mn$.

2. $\Delta AL_1B \sim \Delta ACP$ по двум углам: AL_1 – биссектриса; $\angle ABL_1=\angle APC$ как вписанные, опирающиеся на дугу AC. Тогда $\frac{l_A}{b}=\frac{c}{l_A+L_1P}$.

$l_A^2+l_A\cdot L_1P=bc$; $l_A^2=bc-l_A\cdot L_1P=bc-mn$, что и требовалось доказать.

---

* Материал повышенной трудности.

КОНСПЕКТ № 27
(продолжение 1)

Теорема. Для всякого ΔABC:

$$l_A = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)},$$

$$l_B = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)},$$

$$l_C = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Доказательство:

Докажем первую формулу.

$$l_A{}^2 = bc - CL_1 \cdot L_1B = bc - \frac{ab}{b+c}\cdot\frac{ac}{b+c} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{bc\cdot 2p\cdot(2p-2a)}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{4bcp\cdot(p-a)}{(b+c)^2}.$$

$l_A = \dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$, что и требовалось доказать.

Аналогично получаются формулы для l_B и l_C.

Теорема. Расстояние от инцентра треугольника до его вершин вычисляется по формулам:

$$AJ = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}},$$

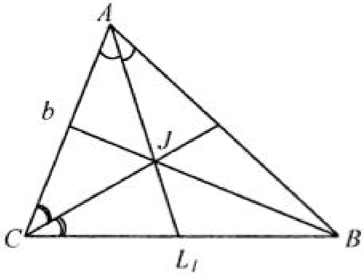
$$BJ = \sqrt{\frac{ac(p-b)}{p}},$$

$$CJ = \sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

КОНСПЕКТ № 27
(продолжение 2)

Доказательство:

Докажем первую формулу.



1. В ΔABC: $CL_1 = \dfrac{ab}{b+c}$.

2. В ΔACL_1: CJ – биссектриса.

$\dfrac{L_1J}{AJ} = \dfrac{L_1C}{AC} = \dfrac{ab}{b(b+c)} = \dfrac{a}{b+c}$.

3. Тогда при некотором $x > 0$ имеем: $L_1J = ax$; $AJ = (b + c)\,x$.

Имеем:

$\underline{L_1J + AJ} = ax + (b + c)\,x = 2px$,

$\underline{L_1J + AJ} = AL_1 = \dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$,

значит, $2px = \dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$,

$x = \dfrac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{p^2}} = \dfrac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{\dfrac{p-a}{p}}$;

$AJ = (b+c)\dfrac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{\dfrac{p-a}{p}} = \sqrt{\dfrac{bc(p-a)}{p}}$,

что и требовалось доказать.

КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ

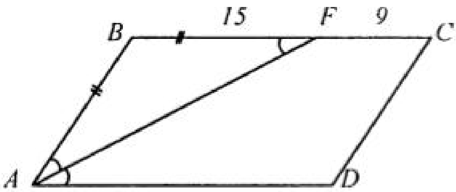
8 класс

Пусть в параллелограмме $ABCD$ AF – биссектриса угла A, тогда треугольник ABF – равнобедренный ($AB = BF$).

ЗАДАЧА 1

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке F. Найти периметр этого параллелограмма, если $BF = 15$, $FC = 9$.

Решение



1. $BC = BF + FC = 15 + 9 = 24$.

2. Рассмотрим ΔABC.

AF – биссектриса угла BAD: $\angle BAF = \angle FAD$. Углы BFA и FAD – накрест лежащие при параллельных BC, AD и секущей AF, значит, они равны. Итак, $\angle BAF = \angle FAD = \angle BFA$ и треугольник ABF – равнобедренный (по признаку).

Имеем $AB = BF = 15$.

3. В параллелограмме $AB = CD$ и $BC = AD$, поэтому

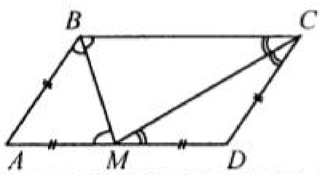
$$P_{ABCD} = 2\,(AB + BC) = 2\,(15 + 24) = 78.$$

Ответ: 78.

ЗАДАЧА 2

В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы BM и CM пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Найти стороны AB и AD, если периметр параллелограмма равен 24.

Решение



1. $AB + AD = \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$.

2. В параллелограмме $ABCD$ проведены биссектрисы BM и CM, $M \in AD$, поэтому треугольники ABM и DCM – равнобедренные и $AB = AM = MD = CD = x$, тогда $AD = 2x$.

$AB + AD = 12, \quad x + 2x = 12, \quad 3x = 12, \quad x = 4.$

$AB = 4, \quad AD = 8.$

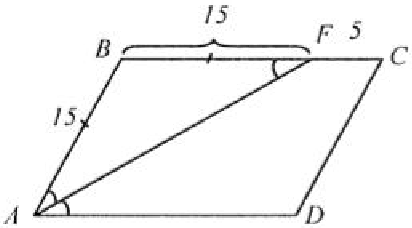
Ответ: 4; 8.

ЗАДАЧА 3

В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса AF угла A, пересекающая прямую BC в точке F. Длины отрезков BF и CF равны 15 и 5 соответственно. Найти периметр параллелограмма.

Решение

Рассмотри два возможных случая, когда биссектриса AF пересекает сторону BC и когда AF пересекает прямую BC, но не пересекает сторону BC.



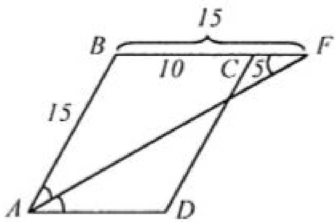
1. $BC = BF + FC = 20$.

2. ΔABF – равнобедренный, $AB = BF = 15$.

3. $ABCD$ – параллелограмм, поэтому $AB = CD = 15$, $BC = AD = 20$ и

$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$,

$P_{ABCD} = 2 \cdot (15 + 20) = 70$.



1. $BC = BF - FC = 10$.

2. ΔABF – равнобедренный, $AB = BF = 15$.

3. $ABCD$ – параллелограмм, поэтому $AB = CD = 15$, $BC = AD = 10$ и

$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$,

$P_{ABCD} = 2 \cdot (15 + 10) = 50$.

Ответ: 50 или 70.

Ключи к решению:

– свойства и признаки параллелограмма;

– теорема Фалеса.

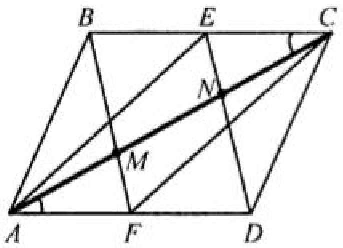
ЗАДАЧА 4

В параллелограмме $ABCD$ середины E и F сторон BC и AD соединены с вершинами. Доказать, что диагонали параллелограмма точками пересечения делятся на три равные части.

Доказательство проведем для диагонали AC.

Обозначим через M и N точки пересечения диагонали AC с прямыми BF и DE соответственно.

Доказательство:



1. $AF = FD = \frac{1}{2}AD$,

$BE = EC = \frac{1}{2}BC$, а так как в параллелограмме $ABCD$ $BC = AD$, то $FD = BE$ (по свойству).

2. $BEDF$ – параллелограмм (по признаку): $FD \# BE$.

3. Следовательно, $BF \| DE$ (по определению параллелограмма).

4. <u>По теореме Фалеса для угла CAD</u> имеем:

$AF = FD$ и $BF \| DE$, поэтому $AM = MN$.

Аналогично, <u>по теореме Фалеса для угла BCA</u>:

$CE = EB$ и $BF \| DE$, поэтому $CN = MN$.

Таким образом, $AM = MN = CN$.

Рассуждения для диагонали BD проводятся аналогично.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

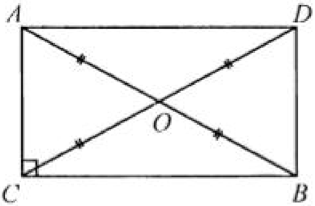
ЗАДАЧА 5

В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Доказать.

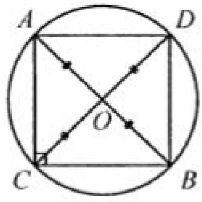
Доказательство:

Пусть ΔABC – прямоугольный, $\angle C = 90°$, CO – медиана. Достроим ΔABC до прямоугольника $CADB$.

AB – гипотенуза



AB – диаметр



Диагонали прямоугольника равны

$AB = CD$,

$$CO = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB.$$

где CO – медиана.

$AB = CD = 2R$,

$$AO = OB = CO = R = \frac{1}{2}AB.$$

Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

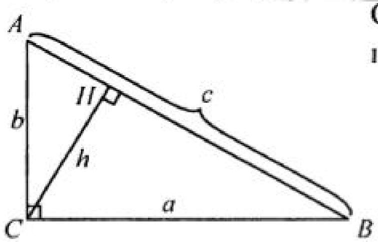
$$\boxed{m_c = \frac{1}{2}c = R}$$

МЕТРИЧЕСКОЕ СООТНОШЕНИЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

ЗАДАЧА 6

Пусть треугольник ABC – прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CH = h$ – <u>высота</u> треугольника, <u>a и b – катеты</u>, c – гипотенуза.

1. Теорема Пифагора: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$.

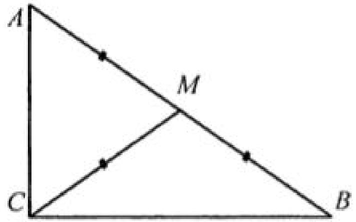
2. 

Свойство среднего пропорционального: $AC^2 = AB \cdot AH$;

$BC^2 = AB \cdot BH$;

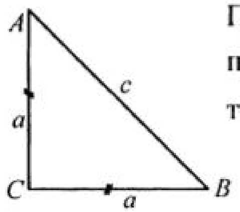
$CH^2 = AH \cdot HB$.

3. $$\left.\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} c \cdot h \\ S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} a \cdot b \end{aligned}\right| \quad c \cdot h = a \cdot b \qquad \boxed{h = \frac{a \cdot b}{c}}.$$

4. 

Пусть CM – медиана прямоугольного треугольника, тогда:

$$\boxed{CM = \frac{1}{2} AB}.$$

5. 

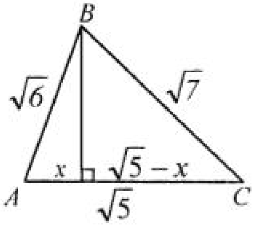
Пусть треугольник ABC – равнобедренный прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = a$, тогда $AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, $AB = a\sqrt{2}$.

$\boxed{c = a\sqrt{2}}$, $\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2}$.

К л ю ч и к р е ш е н и ю:
– теорема Пифагора;
– площадь треугольника.

ЗАДАЧА 7

Длины сторон треугольника равны $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$. Найти площадь треугольника, в ответе указать $\sqrt{26}\cdot S$.



Р е ш е н и е

Пусть в треугольнике ABC $AC=\sqrt{5}$, $AB=\sqrt{6}$, $BC=\sqrt{7}$, $AH=x$.

Тогда $HC=\sqrt{5}-x$.

Проведем высоту BH.

1. По теореме Пифагора для прямоугольных треугольников ABH и CBH:

$BH^2=AB^2-AH^2$ и $BH^2=BC^2-CH^2$.

Следовательно, $AB^2-AH^2=BC^2-CH^2$,

$(\sqrt{6})^2-x^2=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5}-x)^2$,

$6-x^2=7-(5+x^2-2x\sqrt{5})$, $6-x^2=2-x^2+2x\sqrt{5}$,

$2x\sqrt{5}=4$, $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

$BH^2=6-\dfrac{4}{5}=\dfrac{26}{5}$, $BH=\sqrt{\dfrac{26}{5}}$.

2. $S=\dfrac{1}{2}AC\cdot BH=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{\dfrac{26}{5}}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

3. $\sqrt{26}\cdot S=\sqrt{26}\cdot\dfrac{\sqrt{26}}{2}=13$.

О т в е т: 13.

Ключи к решению:

– площадь ромба $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$;

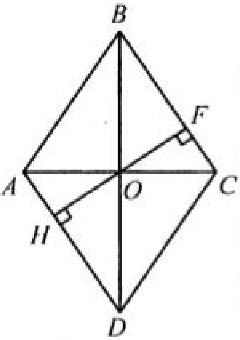
– свойство диагоналей ромба, теорема Пифагора;

– высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, $h = \frac{a \cdot b}{c}$;

– высота ромба равна $2h$.

ЗАДАЧА 8

Площадь ромба равна 600, а одна из его диагоналей равна 30. Найти высоту ромба.



Решение

Пусть $ABCD$ – ромб, $S = 600$, $AC = 30$, O – точка пересечения диагоналей ромба.

1. Проведем $OF \perp BC$ и продолжим OF до пересечения со стороной ромба – AD в точке H.

<u>O – центр симметрии ромба</u>, поэтому $OF = OH$ и <u>HF – высота ромба</u>; $HF = 2 \cdot OF$.

2. $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$, $S = 600$, $d_1 = 30$, значит,

$\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot d_2 = 600$, $d_2 = 600 : 15 = 40$, <u>$BD = 40$</u>.

3. $OC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$; $OB = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20$.

4. <u>Найдем BC по теореме Пифагора</u> для прямоугольного ΔBOC ($AC \perp BD$).

$BC^2 = OB^2 + OC^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$, $BC = 25$.

5. $\underline{OF} = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12$, $\underline{HF} = 2 \cdot 12 = 24$.

Ответ: 24.

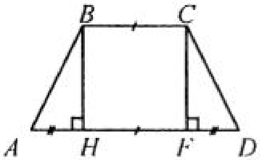
МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В РАВНОБЕДРЕННОЙ ТРАПЕЦИИ

ЗАДАЧА 9

Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $AB = CD$, $AD = a$, $BC = b \cdot (a > b)$, $BH \perp AD$, $CF \perp AD$, MN – средняя линия, S – площадь, h – высота.

1. $\boxed{MN = \dfrac{a+b}{2}}$, $\boxed{S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h}$, $\boxed{S = MN \cdot h}$.

2. Четырехугольник $HBCF$ – прямоугольник. $\boxed{HF = BC = b}$.



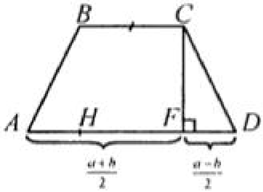
Доказательство:

$BC \parallel AD$ и $BH = CF = h$. $\boxed{AH = FD = \dfrac{a-b}{2}}$.

Доказательство:

Из равенства прямоугольных треугольников ABH и DCF (по катету и гипотенузе) следует, что $AH = FD$. Но $AD = AH + HF + FD$ и $HF = BC$, значит, $AH = \dfrac{AD - BC}{2}$.

3. В равнобедренной трапеции высота, проведенная к большему основанию, делит его на два отрезка, один из которых равен полуразности оснований, а другой – их полусумме.

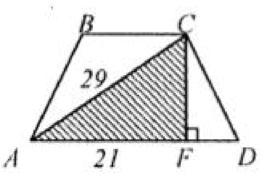


Доказательство:

$$AF = AD - FD = a - \frac{a-b}{2} = \frac{2a - a + b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

$\boxed{AF = \dfrac{a+b}{2} = HD = MN}$, $\boxed{FD = \dfrac{a-b}{2} = AH}$.

4. Средняя линия равнобедренной трапеции равна 21, а диагональ – 29. Найти высоту, проведенную к основанию.



Решение

$AF = MN = 21$, $AC = 29 \cdot (CF \perp AD)$.

По теореме Пифагора для ΔACF:

$AC^2 = AF^2 + CF^2$, $CF^2 = AC^2 - AF^2$.

$CF^2 = 29^2 - 21^2 = 400$, $CF = 20$.

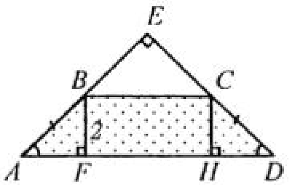
Ответ: 20.

Ключи к решению:
– свойства равнобедренной трапеции;
– свойство равнобедренного прямоугольного треугольника;
– свойство прямоугольного треугольника с острым углом в 45°;
– площадь трапеции.

ЗАДАЧА 10

Боковые стороны равнобедренной трапеции при их продолжении пересекаются под прямым углом. Найти длину большего основания трапеции, если ее площадь равна 12, а высота равна 2.

Решение



Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция ($AB = CD$), $AB \cap CD = E$, $\angle AED = 90$, $S = 12$.

Проведем высоты BF и CH;
$BF = CH = 2$.

Найдем AD, $AD = x$.

1. $\angle A = \angle D$ поэтому ΔAED – равнобедренный, а так как он и прямоугольный, то $\angle A + \angle D = 90°$, $\angle A = \angle D = 45°$.

2. Треугольники ABF и DCH – прямоугольные и $\Delta ABF = \Delta DCH$ по гипотенузе и острому углу, отсюда следует, что $AF = HD$.

3. Четырехугольник $FBCH$ – прямоугольник и $BC = FH = = AD - 2 \cdot AF$.

В ΔABF $\angle A + \angle B = 90°$, но $\angle A = 45°$, поэтому $\angle B = 45°$ и ΔABF – равнобедренный, то есть $AF = BF = 2$, $BC = x - 4$.

4. $S = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BF$ и $S = 12$.

Найдем x.

$\dfrac{(x-4)+x}{2} \cdot 2 = 12$,

$2x = 16$,

$x = 8$,

$AD = 8$.

Ответ: 8.

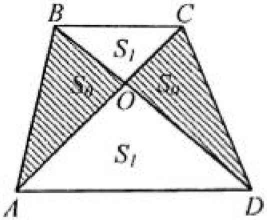
Ключи к решению:

– подобие треугольников;

– площадь треугольника, $S=\frac{1}{2}ah$.

ЗАДАЧА 11

Диагонали трапеции, пересекаясь, разбивают ее на четыре треугольника с общей вершиной. Найти площадь трапеции, если площади треугольников, прилежащих к основаниям, равны S_1 и S_2.



Решение

Пусть $ABCD$ – трапеция ($BC \parallel AD$), $BC = a$, $AD = b$, h – высота трапеции, O – точка пересечения диагоналей.

1. Из подобия треугольников BOC и DOA следует, что $\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$.

2. $S_{ABD} = S_{ACD} = \frac{1}{2}bh$, значит, $S_{AOB} + S_2 = S_{COD} + S_2$, то есть

$S_{AOB} = S_{COD}$, обозначим эту площадь S_0.

3. $S_{ABC} = S_0 + S_1 = \frac{1}{2}ah$, $S_{ACD} = S_0 + S_2 = \frac{1}{2}bh$, поэтому

$\frac{S_0+S_1}{S_0+S_2}=\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$, отсюда находим S_0: $\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}\cdot\frac{S_0+S_1}{S_0+S_2}=1$,

$\sqrt{S_2}\left(S_0+S_1\right)=\sqrt{S_1}\left(S_0+S_2\right)$,

$S_0\sqrt{S_2}-S_0\sqrt{S_1}=\sqrt{S_1S_2}\left(\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}\right)$,

$\boxed{S_0=\sqrt{S_1S_2}}$.

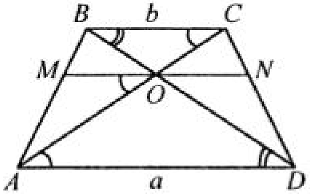
4. $S_{ABCD}=S_1+S_2+2S_0=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$.

Ответ: $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$.

К л ю ч к р е ш е н и ю:
– подобие треугольников.

ЗАДАЧА 12

В трапеции, основания которой a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти длину отрезка этой прямой, отсекаемого боковыми сторонами трапеции.



Р е ш е н и е

Пусть в трапеции $ABCD$ основания AD и BC соответственно равны a и b, $AC \cap BD = O, O \in MN$, $MN \| AD \| BC$.

1. $\Delta AMO \sim \Delta ABC$ по двум углам ($\angle BAC$ – общий и $\angle AOM = \angle ACB$ как соответственные при параллельных MO, BC и секущей AC).

Отсюда $\dfrac{MO}{BC} = \dfrac{AO}{AC}$.

2. $\Delta AOD \sim \Delta COB$ ($\angle OAD = \angle OCB$, $\angle ODA = \angle OBC$ как накрест лежащие при параллельных AD, BC и секущих AC, BD соответственно).

Отсюда $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{a}{b}$.

3. Имеем $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{AO}{AO + OC} = \dfrac{\frac{AO}{OC}}{\frac{AO}{OC} + 1} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + 1} = \dfrac{a}{a + b}$;

$MO = \dfrac{AO}{AC} \cdot BC = \dfrac{a}{a + b} \cdot b = \dfrac{ab}{a + b}$.

4. Аналогично $NO = \dfrac{ab}{a + b}$, поэтому $MN = \dfrac{2ab}{a + b}$.

О т в е т: $\dfrac{2ab}{a + b}$.

Ключи к решению:

– проведение $KF \parallel CM$;

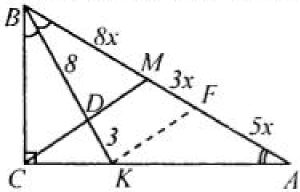
– обобщенная теорема Фалеса для $\angle ABK$, $\angle CAM$;

– свойство биссектрисы треугольника;

– теорема Пифагора для ΔBCK.

ЗАДАЧА 13

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) медиана CM пересекает биссектрису BK в точке D, при этом $BD = 8$ и $DK = 3$. Найти длину гипотенузы AB.



Решение

Проведем $KF \parallel CM$.

1. Применим обобщенную теорему Фалеса для $\angle ABK$: $\dfrac{BM}{MF} = \dfrac{BD}{DK} = \dfrac{8}{3}$, тогда $BM = 8x$, $MF = 3x$.

Учитывая, что $BM = MA$, имеем:

$FA = MA - MF = BM - MF = 8x - 3x = 5x$.

2. Применяя обобщенную теорему Фалеса для угла CAM, получаем $CK : AK = 3 : 5$.

3. По свойству биссектрисы треугольника $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{CK}{AK} = \dfrac{3}{5}$, то есть $BC = \dfrac{3}{5}AB$.

4. Пусть $BC = 3m$, тогда $AB = 5m$ и $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 25m^2 - 9m^2 = 16m^2$, $AC = 4m$, значит, $AC = \dfrac{4}{5}AB$.

5. $\dfrac{CK}{AK} = \dfrac{3}{5}$, поэтому $\dfrac{CK}{AC} = \dfrac{3}{8}$, $CK = \dfrac{3}{8}AC$, но $AC = \dfrac{4}{5}AB$, значит, $CK = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{4}{5}AB = \dfrac{3}{10}AB$.

6. По теореме Пифагора для прямоугольного ΔBCK: $/AB = y/$

$$\left(\frac{3}{5}y\right)^2 + \left(\frac{3}{10}y\right)^2 = 11^2,\ \frac{9}{25}y^2 + \frac{9}{100}y^2 = 121,\ y = \frac{22\sqrt{5}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{22\sqrt{5}}{3}$.

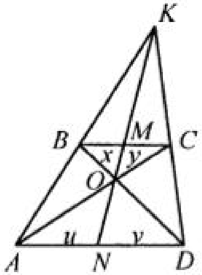
ТРАПЕЦИЯ

Ключ к решению:
– подобие треугольников.

ЗАДАЧА 14

Во всякой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Решение



• Пусть в трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагонали AC и BD пересекаются в точке O.

• А продолжения боковых сторон пересекаются в точке K.

• Через точки K и O проведем прямую KO.

• Докажем, что эта прямая проходит через середины оснований трапеции.

Обозначим $BM = x$, $MC = y$, $AN = u$, $ND = v$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta BKM \sim \Delta AKN \Rightarrow \dfrac{BM}{AN} = \dfrac{KM}{KN} \\ \Delta MKC \sim \Delta NKD \Rightarrow \dfrac{MC}{ND} = \dfrac{KM}{KN} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{BM}{AN} = \frac{MC}{ND}, \qquad \frac{x}{u} = \frac{y}{v}. \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta BMO \sim \Delta DNO \Rightarrow \dfrac{BM}{ND} = \dfrac{MO}{NO} \\ \Delta CMO \sim \Delta ANO \Rightarrow \dfrac{MC}{AN} = \dfrac{MO}{NO} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{BM}{ND} = \frac{MC}{AN}, \qquad \frac{x}{v} = \frac{y}{u}. \quad (2)$$

Перемножив равенства (1) и (2), получим:

$\dfrac{x^2}{u \cdot v} = \dfrac{y^2}{u \cdot v} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$; (2) $u = v$, то есть $BM = MC$, $AN = ND$, что и требовалось доказать.

Ключи к решению:

– $AC \perp BD$;

– свойство медианы, проведенной из вершины прямого угла, $m_c = \frac{1}{2}c$;

– свойство четырех точек трапеции;

– $BC + AD = 2MN$;

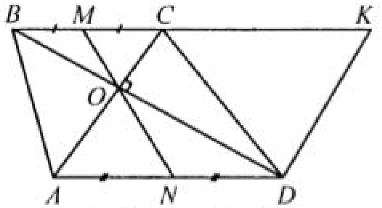
– свойство противоположных сторон параллелограмма;

– теорема Пифагора.

ЗАДАЧА 15

Диагонали трапеции перпендикулярны, одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найти другую диагональ.

Решение



Пусть в трапеции $ABCD$ $AC \cap BD = O$, $AC = 6$, $AC \perp BD$, $BM = MC$, $AN = ND$, $MN = 4{,}5$. Найдем BD.

Проведем $DK \parallel AC$, пусть $K = DK \cap BC$, тогда $\angle BDK = 90°$.

1. ΔAOD и ΔBOC – прямоугольные, ON и OM – медианы, проведенные из вершины прямого угла, поэтому

$$\underline{ON} = \frac{1}{2}AD \text{ и } \underline{OM} = \frac{1}{2}BC.$$

2. Точки M, O, N лежат на одной прямой (по свойству четырех точек трапеции), значит, $\underline{MN} = OM + ON = \frac{1}{2}(BC + AD)$, отсюда $\underline{BC + AD = 2MN} = 2 \cdot 4{,}5 = 9$.

3. В параллелограмме $ACKD$ $CK = AD$, поэтому $BK = BC + CK = 9$.

4. По теореме Пифагора для прямоугольного ΔBDK имеем: $BK^2 = BD^2 + DK^2$, $BK = 9$; $DK = AC = 6$. $\underline{BD^2} = BK - DK^2 = 9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45$, $BD = 3\sqrt{5}$.

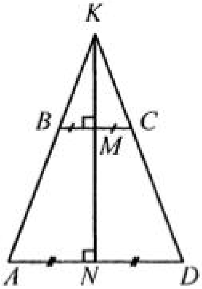
Ответ: $3\sqrt{5}$.

Ключ к решению:

– четыре точки – середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон – лежат на одной прямой.

ЗАДАЧА 16

В равнобедренной трапеции прямая, проходящая через середины оснований, перпендикулярна основаниям и является осью симметрии трапеции. Доказать.



Решение

1. Пусть в трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AB = CD$.

K – точка пересечения продолжений боковых сторон, M и N – середины оснований, тогда точки M, N и K лежат на одной прямой.

2. $\angle A = \angle D$ как углы при основании равнобедренной трапеции.

ΔKAD – равнобедренный (по признаку).

KN – медиана ($AN = ND$), значит, и высота, то есть $MN \perp AD$.

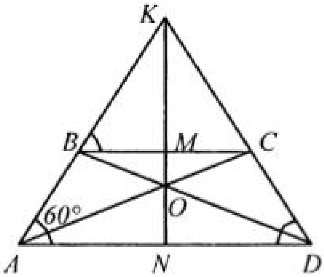
3. При симметрии относительно прямой MN точки A и B переходят в точки C и D и наоборот.

Прямая MN – ось симметрии трапеции, что и требовалось доказать.

Ключи к решению:
– свойство четырех точек равнобедренной трапеции;
– признак равностороннего треугольника;
– подобие треугольников.

ЗАДАЧА 17

В равнобедренной трапеции $ABCD$ длина боковой стороны равна $14\sqrt{3}$, длина основания AD равна $56\sqrt{3}$, угол A при основании равен 60°, O – точка пересечения диагоналей, а K – точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции. Найти длину отрезка KO.



Решение

$ABCD$ – равнобедренная трапеция.

• Прямая KO проходит через середины оснований и $KO \perp BC$; $KO \perp AD$. Пусть M и N – середины оснований.

• $\angle A = \angle D = 60°$, поэтому ΔAKD – равносторонний.

• $BC \parallel AD$, поэтому ΔBKC – равносторонний.

1. $AK = AD = 56\sqrt{3}$, $BK = AK - AB = 42\sqrt{3}$.

2. $\Delta BKC \sim \Delta AKD$, $k = \dfrac{BK}{AK} = \dfrac{3}{4}$.

3. KM – высота ΔBKC, $KM = \dfrac{42\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 63$. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

KN – высота ΔAKD, $KN = \dfrac{4}{3}\cdot KM = 84$. $\underline{KM = 63}$.

$MN = KN - KM = 21$.

4. $\Delta BOC \sim \Delta DOA$, $k = \dfrac{3}{4}$; обозначим $MO = x$, тогда $NO = 21 - x$.

$\dfrac{MO}{NO} = \dfrac{3}{4}$, $\dfrac{x}{21-x} = \dfrac{3}{4}$; $4x = 63 - 3x$, $x = 9$. $\underline{MO = 9}$.

$KO = KM + MO = 63 + 9 = 72$.

Ответ: 72.

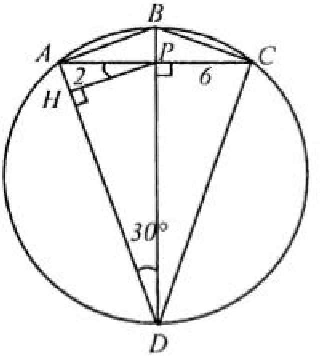
Ключи к решению:

– <u>отношение площадей треугольников, имеющих равные основания,</u> равно отношению высот, проведенных к этим основаниям;

– свойство отрезков пересекающихся хорд.

ЗАДАЧА 18

Хорды AC и BD окружности перпендикулярны и пересекаются в точке P. PH – высота в треугольнике ADP. Угол ADP равен 30°, $AH = 2$, $PC = 6$. Найти отношение площади треугольника ADC к площади треугольника ABC.



Решение

1. $\dfrac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}AC \cdot DP}{\frac{1}{2}AC \cdot BP} = \dfrac{DP}{BP}$.

2. Найдем DP.

В прямоугольном треугольнике APD PH – высота (по условию), $\angle APH = \angle ADP = 30°$.

Поэтому в ΔAPH:

$AP = 2 \cdot AH = 2 \cdot AH = 2 \cdot 2 = 4$,

а в ΔADP: $AD = 2 \cdot AP = 2 \cdot 4 = 8$.

По теореме Пифагора для ΔADP:

$AD^2 = DP^2 + AP^2$, $DP^2 = 8^2 - 4^2 = 48$, $DP = 4\sqrt{3}$.

3. Найдем BP.

По свойству пересекающихся хорд:

$BP \cdot DP = AP \cdot PC$,

$BP \cdot 4\sqrt{3} = 4 \cdot 6$, $BP = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$.

4. $DP : BP = 4\sqrt{3} : \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$.

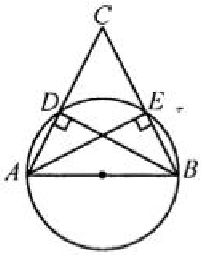
Ответ: 2.

Ключ к решению:

– вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, – прямой, а соответствующий треугольник – прямоугольный.

ЗАДАЧА 19

В равнобедренном треугольнике ABC основание AB является диаметром окружности, которая пересекает боковые стороны AC и CB в точках D и E соответственно. Найти периметр треугольника ABC и его площадь, если $AD = 2$, $AE = \frac{8}{3}$.



Решение

1. Проведем хорду BD. $\angle ADB = \angle AEB = 90°$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр AB.

2. $\angle CAB = \angle CBA$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

$\Delta ADB = \Delta BEA$ по гипотенузе и острому углу. Тогда $BE = AD = 2$.

3. Из прямоугольного треугольника AEB по теореме Пифагора найдем AB. $AB^2 = AE^2 + EB^2$.

$$AB^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2^2 = \frac{64}{9} + 4 = \frac{100}{9}.\ AB^2 = \frac{100}{9},\text{ значит, } AB = \frac{10}{3}.$$

4. Пусть $CD = x$, тогда $AC = x + 2$. Так как $AC = BC$ и $AD = BE$, то $DC = CE$. $CE = x$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольному ΔACE, имеем $(x+2)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + x^2$,

$$x^2 + 4x + 4 = \frac{64}{9} + x^2,\ 4x = \frac{28}{9},\ x = \frac{7}{9},\ x + 2 = 2\frac{7}{9},\ BC = 2\frac{7}{9}.$$

5. $P_{\Delta ABC} = 2 \cdot AC + AB$, $P_{\Delta ABC} = 2 \cdot 2\frac{7}{9} + 3\frac{1}{3} = 8\frac{8}{9}$.

Найдем площадь ΔABC.

Высотой является отрезок AE, основанием – BC, поэтому

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE. \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{7}{9} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{9} \cdot \frac{8}{3} = \frac{100}{27} = 3\frac{19}{27}.$$

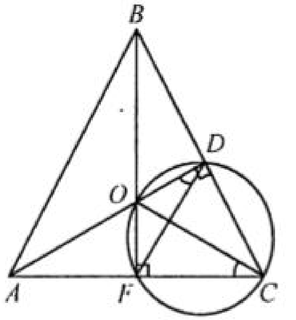
Ответ: $8\frac{8}{9}$; $3\frac{19}{27}$.

Ключ к решению:

– четыре точки O, D, C и F принадлежат одной окружности с диаметром OC.

ЗАДАЧА 20

В треугольнике ABC проведены высоты AD и BF, пересекающиеся в точке O. Требуется доказать, что углы ODF и OCF равны.



Решение

1. Треугольник ODC – прямоугольный, следовательно, вершина D прямого угла лежит на окружности с диаметром OC.

Аналогично треугольник OFC – прямоугольный, следовательно, вершина F прямого угла лежит на окружности с диаметром OC.

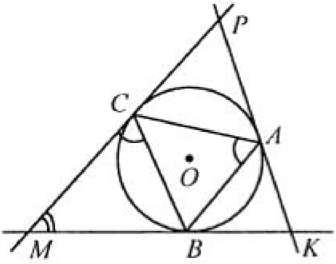
2. Углы ODF и OCF – вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу OF, значит, они равны.

Ключ к решению:

– искомый угол β, данный угол α, $\beta = 180° - 2 \cdot \alpha$.

ЗАДАЧА 21

Около треугольника ABC с углами 50° и 66° описана окружность. Найти углы треугольника, вершинами которого являются точки пересечения касательных к окружности в точках A, B, C.



Решение

Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle A = 50°$, $\angle B = 66°$. A, B, и C – точки касания окружности со сторонами треугольника, образованного касательными KP, MK и PM соответственно, $\angle C = 64°$.

1. $\angle CAB$ – <u>вписанный</u>: $\angle CAB = \frac{1}{2} \cup BC$.

$\angle MCB$ – <u>угол, образованный касательной MC и хордой CB</u>: $\angle MCB = \frac{1}{2} \cup BC$. Следовательно, $\angle CAB = \angle MCB$.

2. <u>По свойству касательных, проведенных из точки к окружности</u>: $MC = MB$.

3. ΔMCB – равнобедренный: $\angle MCB = \angle MBC$.

По теореме о сумме углов треугольника для ΔMCB:

$\angle CMB = 180° - 2 \cdot \angle MCB$.

Окончательно получаем: $\angle CMB = 180° - 2 \cdot \angle CAB$.

4. Вычислим все углы ΔMPK:

$\angle M = 180° - 2 \cdot 50° = 80°$,

$\angle P = 180° - 2 \cdot 66° = 48°$,

$\angle K = 180° - 2 \cdot 64° = 52°$,

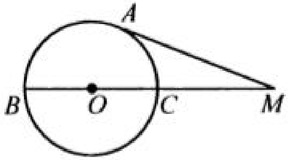
Ответ: 48°, 52°, 80°.

Ключ к решению:

– свойство секущей и касательной. Если из точки, взятой вне окружности, проведены к окружности секущая и касательная, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

ЗАДАЧА 22

Радиус окружности равен r. Из точки M проведена секущая MB, проходящая через центр окружности, и касательная MA, причем $\underline{MB = 2MA}$. Найти, на каком расстоянии от центра окружности находится точка M.



Решение

Пусть O – центр окружности, A – точка касания, C – точка пересечения секущей MB с окружностью. Тогда по свойству секущей и касательной справедливо равенство $MB \cdot MC = MA^2$.

Обозначим $\underline{OM = x}$, тогда $MB = x + r$, $MC = x - r$,

$$MA = \frac{1}{2}MB = \frac{1}{2}(x+r),$$

$$(x+r)(x-r) = \frac{1}{4}(x+r)^2.$$

Разделим почленно на $x + r$, получим:

$$(x-r) = \frac{1}{4}(x+r),$$

$$4(x-r) = x+r,$$

$$3x = 5r,\ x = \frac{5}{3}r.$$

Ответ: $1\frac{2}{3}r$.

Ключ к решению:

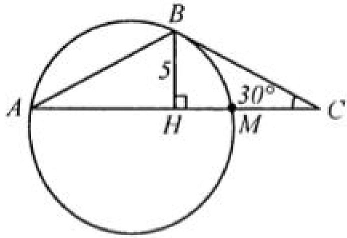
– свойство секущей и касательной;

– свойство катета, лежащего в прямоугольном треугольнике против угла в 30°.

ЗАДАЧА 23

В треугольнике ABC: $AC = 20$, $\angle C = 30°$. Через точки A и B проведена окружность, касающаяся стороны BC и пересекающая AC в точке M. Найти отношение $\dfrac{AM}{MC}$, если расстояние от точки B до AC равно 5.

Решение



1. Проведем перпендикуляр BH из вершины B к стороне AC, тогда $BH = 5$.

2. В прямоугольном треугольнике катет BH лежит против угла в 30°, поэтому

$$BC = 2 \cdot BH,\ BC = 2 \cdot 5 = 10.$$

3. BC – касательная, проведенная из точки C, AC – секущая, проведенная из той же точки C, следовательно, по свойству касательной и секущей:

$BC^2 = AC \cdot MC$,

$10^2 = 20 \cdot MC,\ MC = 5.$

$AM = AC - MC = 20 - 5 = 15.$

$\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{15}{5} = 3.$

Ответ: 3.

Ключи к решению:

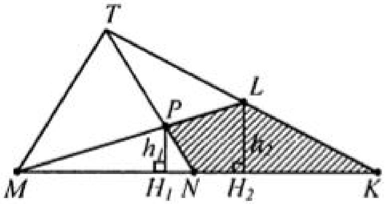
– $S_{\Delta MTK} = 2 \cdot S_{\Delta MLK}$, так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника;

– свойство медиан треугольника; подобие треугольников ($k = \frac{2}{3}$).

ЗАДАЧА 24

В треугольнике MTK медиана ML пересекает медиану TN в точке P. Найти площадь треугольника MTK, если площадь четырехугольника $NPLK$ равна 7.

Решение



P – точка пересечения медиан треугольника, поэтому $MP : PL = 2 : 3$.

Проведем перпендикуляры из точек P и L к основанию MK, обозначим h_1 и h_2 (соответственно).

Треугольники MPH_1 и MLH_2 подобны ($k = \frac{2}{3}$).

1. $S_{\Delta MLK} - S_{\Delta MPN} = 7$,

$$S_{\Delta MLK} - S_{\Delta MPN} = \frac{1}{2} MK \cdot h_2 - \frac{1}{2} MN \cdot h_1 =$$

$$= \frac{1}{2} MK \cdot h_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MK \cdot \frac{2}{3} h_2 = \frac{1}{2} MK \cdot h_2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} S_{\Delta MLK}.$$

Следовательно, $\frac{2}{3} S_{\Delta MLK} = 7$ и $S_{\Delta MLK} = \frac{21}{2}$.

2. Так как медиана ML делит ΔMTK на два равновеликих треугольника, то $S_{\Delta MTK} = 2 \cdot S_{\Delta MLK} = 2 \cdot \frac{21}{2} = 21$.

Ответ: 21.

Ключ к решению:

– свойство медиан треугольника.

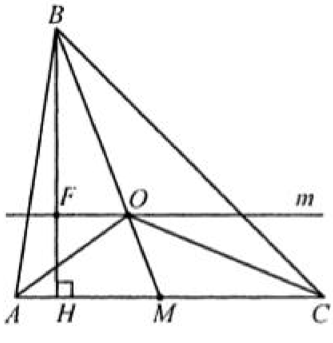
Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

ЗАДАЧА 25

Докажите, что высота треугольника ABC, проведенная к стороне AC, в 3 раза больше соответствующей высоты треугольника AOC, где O – точка пересечения медиан треугольника ABC.

Решение

Пусть BH – высота, BM – медиана треугольника ABC, $O \in BM$. Проведем через точку O прямую m, параллельную стороне AC. $F = m \cap BH$.



1. O – точка пересечения медиан треугольника ABC, поэтому $\frac{BO}{OM} = \frac{2}{1}$.

2. $m \parallel AC$.

Применяя обобщенную теорему Фалеса для угла HBM, получаем, что $\frac{BF}{FH} = \frac{BO}{OM} = \frac{2}{1}$. Отсюда следует, что $\frac{BH}{FH} = \frac{3}{1}$, то есть $BH = 3 \cdot FH$, где FH – высота треугольника AOC.

Утверждение доказано.

Ключ к решению:

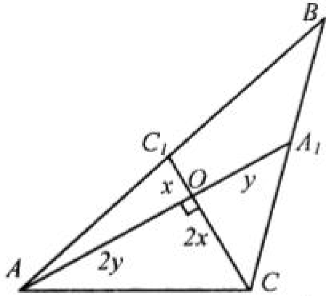
– свойство медиан треугольника $AO : OA_1 = CO : OC_1 = 2 : 1$; $S_{\Delta ABC} = 3 \cdot S_{\Delta AOC}$.

ЗАДАЧА 26

Две стороны треугольника равны соответственно 6 см и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, перпендикулярны. Найти площадь треугольника.

Решение

Пусть медианы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AA_1 \perp CC_1$.



1. Пусть $OC_1 = x$ см, $OA_1 = y$ см ($x > 0$, $y > 0$), тогда по свойству медиан треугольника $OC = 2x$ см, $AO = 2y$ см. Из прямоугольных треугольников AOC_1 и COA_1 по теореме Пифагора: $AC_1^2 = AO^2 + C_1O^2$, $A_1C^2 = A_1O^2 + CO^2$.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9, \\ y^2 + 4x^2 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 4(16 - 4x^2) = 9, \\ y^2 = 16 - 4x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{11}{3}, \\ y^2 = \dfrac{4}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{11}{3}}, \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

2. $S_{\Delta AOC} = \dfrac{1}{2} AO \cdot OC = \dfrac{1}{2} \cdot 2y \cdot 2x = 2xy.$

3. Найдем площадь треугольника ABC. Поскольку треугольники ABC и AOC имеют общее основание AC, а высота треугольника ABC, проведенная к стороне AC, в 3 раза больше соответствующей высоты треугольника AOC, то $S_{\Delta ABC} = 3 \cdot S_{\Delta AOC}$.

$$S_{\Delta ABC} = 3 \cdot 2xy = 6xy, \quad 6xy = 6 \cdot \sqrt{\frac{11}{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{11}.$$

$S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{11}$ см^2.

Ответ: $4\sqrt{11}$ см^2.

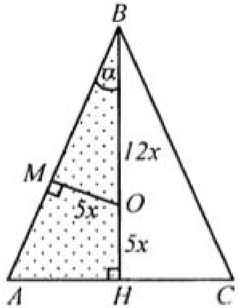
Ключи к решению:

– <u>синус острого угла прямоугольного треугольника</u> равен отношению противолежащего катета к гипотенузе, $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$;

– свойства окружности, <u>вписанной</u> в равнобедренный треугольник.

ЗАДАЧА 27

Найти основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 12 : 5, считая от вершины, а боковая сторона равна 60.



Решение

Пусть O – центр окружности, вписанной в равнобедренный ΔABC ($AB = BC$), $AB = 60$, BH – высота, $O \in BH$, $BO : OH = 12 : 5$. Найдем AC.

1. Проведем $OM \perp AB$. M и H – точки касания окружности со сторонами AB и AC, BH – медиана, биссектриса.

<u>Пусть $\angle ABH = \alpha$.</u>

Так как $BO : OH = 12 : 5$, то $BO = 12x$, $OH = 5x$.

$MO = OH = r = 5x$.

2. Из прямоугольного ΔBMO $\sin\alpha = \dfrac{5x}{12x} = \dfrac{5}{12}$.

Из прямоугольного ΔBHA $\sin\alpha = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AH}{60}$.

$$\frac{5}{12} = \frac{AH}{60},\ \ AH = \frac{5 \cdot 60}{12} = 25\,.$$

3. $AC = 2 \cdot AH = 50$.

Ответ: 50.

Ключи к решению:

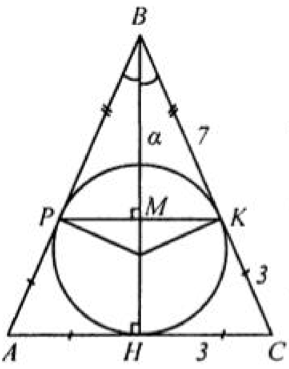
– свойство касательных, проведенных из одной точки к окружности;

– свойства равнобедренного треугольника;

– соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.

ЗАДАЧА 28

В равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 10, и основанием, равным 6, вписана окружность. Найти расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами треугольника.



Решение

Пусть O – центр окружности, вписанной в равнобедренный $\triangle ABC$, $AB = BC = 10$, $AC = 6$; P, K, H – точки касания окружности со сторонами треугольника ABC. Найдем PK.

1. $AP = AH = HC = CK = 3$, $BP = BK = 7$ по свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности.

$\triangle BPK$ – равнобедренный.

Его биссектриса BM является высотой и медианой, $PM = MK$.

2. Пусть $\angle MBK = \alpha$.

Из прямоугольного треугольника MBK: $MK = BK \cdot \sin\alpha$.

3. Найдем $\sin\alpha$ из прямоугольного $\triangle HBC$:

$$\sin\alpha = \frac{HC}{BC} = \frac{3}{10}.$$

4. Найдем $MK = 7 \cdot 0{,}3 = 2{,}1$.

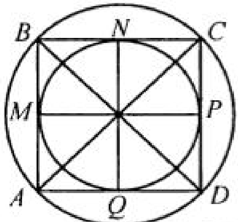
$$PK = 2 \cdot MK = 2 \cdot 2{,}1 = 4{,}2.$$

Ответ: 4,2.

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В КВАДРАТЕ

ЗАДАЧА 29

Пусть $ABCD$ – квадрат, O – его центр; a – сторона квадрата, d – его диагональ; r – радиус вписанной окружности; R – радиус описанной окружности.



1. $\boxed{d = a\sqrt{2}}$, $\boxed{a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}}$.

Доказательство:

По теореме Пифагора для прямоугольного равнобедренного ΔACD:

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, d^2 = 2a^2, d = a\sqrt{2}$.

2. $\boxed{d = 2R}$, $\boxed{a = R\sqrt{2}}$, $\boxed{R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}$.

Доказательство:

<u>O – центр описанной окружности</u>. Все отрезки OA, OB, OC, OD – радиусы, $OA = OB = OC = OD = R$.

$d = 2R$ и $d = a\sqrt{2}$, значит, $a\sqrt{2} = 2R$, отсюда $a = \dfrac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$

и $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

3. $\boxed{a = 2r}$, $\boxed{r = \dfrac{a}{2}}$, $\boxed{R = r\sqrt{2}}$.

Доказательство:

<u>O – центр вписанной окружности</u>. Проведем через центр O перпендикуляры к сторонам квадрата: OM, ON, OP, OQ – радиусы, $OM = ON = OP = OQ = r$, M, N, P, Q – точки касания.

В прямоугольном равнобедренном ΔOCP:

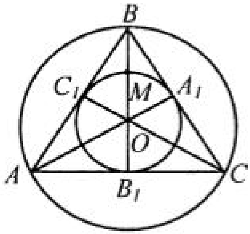
$OP = r = CP = \dfrac{a}{2}$, $OC^2 = R^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$, $R = r\sqrt{2}$.

4. $\boxed{S = a^2}$, $\boxed{S = \dfrac{1}{2}d^2}$.

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ПРАВИЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

ЗАДАЧА 30

Пусть треугольник ABC – равносторонний, O – его центр, $AB = BC = AC = a$.



1. Проведем высоту BB_1, обозначим ее через h.

Высота BB_1 является медианой, поэтому $AB_1 = B_1C = \dfrac{a}{2}$.

По теореме Пифагора для ΔABB_1:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2,\ h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4},\ \boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}.$$

2. O – точка пересечения медиан ΔABC:

$$BO : OB_1 = 2 : 1,\ BO = \frac{2}{3}h,\ OB_1 = \frac{1}{3}h.$$

Все отрезки OA, OB, OC – радиусы описанной окружности – обозначим R, а отрезки OA_1, OB_1, OC_1 – радиусы вписанной окружности – обозначим r.

$$\boxed{R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}},\quad \boxed{r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}},\quad \boxed{R = 2r}.$$

Пусть M – точка пересечения вписанной окружности с высотой BB_1.

$$\boxed{BM = MO = OB_1 = r}.$$

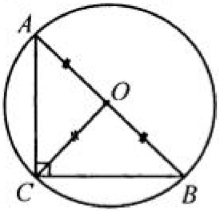
3. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}a \cdot h = \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. $\boxed{S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}$.

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

ЗАДАЧА 31

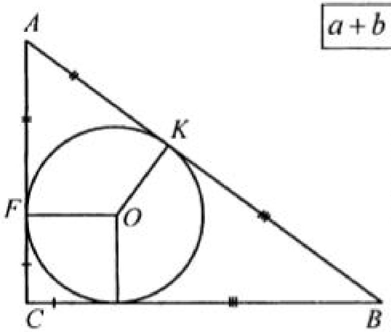
Пусть треугольник ABC – прямоугольный с прямым углом C; $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; a и b – катеты; c – гипотенуза, m_c – медиана, проведенная к гипотенузе; r – радиус вписанной окружности; R – радиус описанной окружности.

1. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы.



$$\boxed{R = m_c = \frac{1}{2}c} \quad \text{или} \quad \boxed{c = 2R}.$$

2. Сумма катетов равна удвоенной сумме радиусов описанной и вписанной окружностей.



$$\boxed{a + b = 2(R + r)} \quad \text{или} \quad \boxed{a + b = c + 2r}.$$

Доказательство:

Пусть O – центр вписанной окружности; F, K, H – точки касания; OF, OK, OH – радиусы, $OF = OK = OH = r$.

По свойству касательных, проведенных из точки к окружности, $AF = AK$, $BK = BH$, $CF = CH$.

Четырехугольник $CFOH$ – квадрат со стороной, равной r, $CF = CH = r$.

$AF = AK = b - r$, $BH = BK = a - r$.

Так как $AB = AK + BK$, то с $= (b - r) + (a - r)$, $c = a + b - 2r$, $a + b = c + 2r$.

Учитывая, что $c = 2R$, получаем, что $a + b = 2R + 2r$ или $a + b = 2(R + r)$.

Ключи к решению:

– <u>свойство среднего пропорционального</u>: квадрат катета равен произведению гипотенузы и его проекции на гипотенузу:

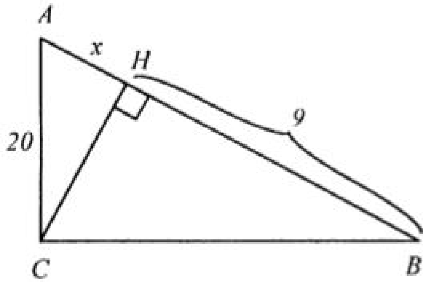
$$\boxed{a^2 = c \cdot a_c}, \quad \boxed{b^2 = c \cdot b_c};$$

– <u>сумма катетов равна</u> сумме гипотенузы и удвоенного радиуса вписанной окружности: $\boxed{a + b = c + 2r}$.

ЗАДАЧА 28

<u>Найти радиус окружности</u>, вписанной в прямоугольный треугольник, если один из его катетов равен 20, а проекция другого катета на гипотенузу равна 9.

Решение



Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 20$, $CH \perp AB$, $HB = 9$, r – радиус вписанной окружности.

1. $AH = x$, тогда $AB = x + 9$.
$AC^2 = AB \cdot AH$,
$20^2 = x(x + 9)$,
$x^2 + 9x - 400 = 0$.

$D = 81 + 1600 = 1681 > 0$, $x_{1,2} = \dfrac{-9 \pm 41}{2}$; $x_1 < 0$; $x_2 = 16$.

$AH = 16$, $AB = AH + HB = 25$.

2. $BC^2 = AB \cdot BH = 25 \cdot 9$, $BC = \sqrt{25 \cdot 9} = 5 \cdot 3 = 15$.

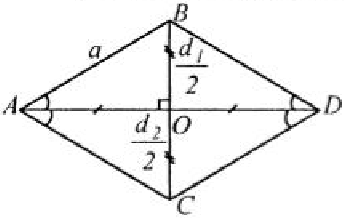
3. $2r = a + b - c = 15 + 20 - 25 = 10$.
$r = 5$.
Ответ: 5.

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В РОМБЕ

ЗАДАЧА 33

Пусть $ABCD$ – ромб, O – точка пересечения его диагоналей; a – сторона ромба, d_1 и d_2 – его диагонали; h – высота, r – радиус вписанной окружности, α – острый угол.

1. $\boxed{\frac{d_1}{2} = a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}$, $\boxed{\frac{d_2}{2} = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}$, $\boxed{a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$.



Доказательство:

Применяем три свойства ромба:

– диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам;

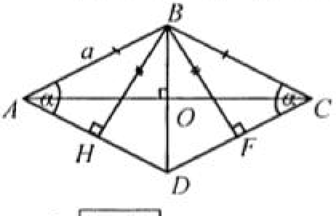
– диагонали ромба являются биссектрисами его углов;

– диагонали ромба взаимно перпендикулярны для ΔAOB.

$$OD = OB = \frac{d_1}{2};\ OC = AO = \frac{d_2}{2};\ \angle DAO = \angle BAO = \frac{\alpha}{2};\ \angle AOB = 90°.$$

Затем по теореме Пифагора: $AB^2 = AO^2 + BO^2$.

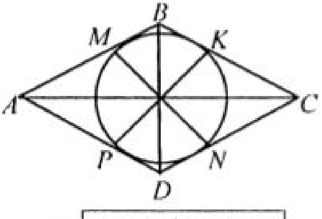
2. $\boxed{h = a \cdot \sin\alpha}$. $\boxed{\text{Высоты ромба равны}}$.



Доказательство:

Проведем высоты ромба BH и BF. Прямоугольные треугольники ABH и CBF равны по гипотенузе и острому углу ($AB = CB = a$ и $\angle A = \angle C = \alpha$), значит, $BH = BF$. $BH = h = a \cdot \sin\alpha$.

3. $\boxed{h = 2r}$.



Доказательство:

O – центр вписанной окружности. Проведем через центр O перпендикуляры к сторонам ромба: OM, OK, ON, OP – радиусы, $OM = OK = ON = OP = r$; M, K, N, P – точки касания. $h = MN = 2r$.

4. $\boxed{S = a \cdot h = a \cdot 2r}$, $\boxed{S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2}$.

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В РАВНОБЕДРЕННОЙ ТРАПЕЦИИ. ОКРУЖНОСТЬ ВПИСАНА В ТРАПЕЦИЮ

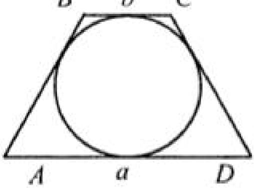
ЗАДАЧА 34

Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $AB = CD$, $AD = a$, $BC = b \cdot (a > b)$, h – высота, $BH \perp AD$, MN – средняя линия, r – радиус.

1. $\boxed{MN = \dfrac{a+b}{2}}$, $\boxed{AH = \dfrac{a-b}{2}}$, $\boxed{h = 2r}$.

2. <u>Боковая сторона</u> равнобедренной трапеции, в которую вписана окружность, равна полусумме оснований.

Доказательство:



Окружность вписана в трапецию, значит, $AB + CD = BC + AD$. $AB = CD$, поэтому $2 \cdot AB = BC + AD$,

$\boxed{AB = \dfrac{BC + AD}{2}}$, $\boxed{AB = \dfrac{a+b}{2}}$.

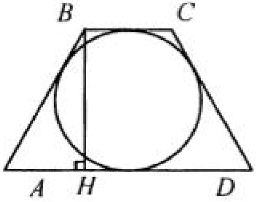
3. <u>Боковая сторона</u> равнобедренной трапеции, в которую вписана окружность, равна средней линии трапеции.

4. <u>Периметр</u> равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равен $\underline{4 \cdot AB}$.

5. <u>Высота</u> равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна $\underline{\sqrt{ab}}$.

ЗАДАЧА 34
(продолжение)

Доказательство:



Из прямоугольного ΔABH найдем BH:
$AB^2 = AH^2 + BH^2$, $BH^2 = AB^2 - AH^2$.

$$BH^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 =$$

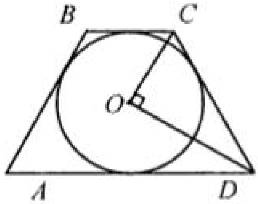
$$= \frac{1}{4}\left(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2\right) = \frac{1}{4} \cdot 4ab = ab.$$

$BH = h = \sqrt{ab}$, что и требовалось доказать.

$\boxed{h = \sqrt{ab}}$.

6. $\angle COD = 90°$.

Доказательство:



$\angle BCD + \angle ADC = 180°$,

$\frac{1}{2}\angle BCD + \frac{1}{2}\angle ADC = 90°$,

то есть $\angle OCD + \angle ODC = 90°$,

$\angle COD = 180° - 90° = 90°$,

что и требовалось доказать.

Ключи к решению:

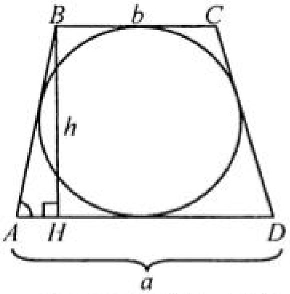
– $AB = \dfrac{a+b}{2}$;

– $AB = \dfrac{h}{\sin A}$, находим AB, где $h = 2r$;

– $AB + CD = BC + AD$ – условие, при котором в трапецию можно вписать окружность.

ЗАДАЧА 35

Равнобедренная трапеция описана около окружности радиуса 2. Найти площадь трапеции, если косинус угла при большем основании трапеции равен 0,6.



Решение

$ABCD$ – равнобедренная трапеция ($BC \parallel AD$) и $AB = CD$, $r = 2$ – радиус вписанной окружности, $AD > BC$ и $\cos A = 0{,}6$, h – высота трапеции.

1. Из условия следует, что суммы противоположных сторон трапеции равны: $AB + CD = BC + AD$.

Так как $AB = CD$, то $2 \cdot AB = BC + AD$ и $AB = \dfrac{a+b}{2}$, где $a = AD$, $b = BC$.

2. Найдем $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-0{,}36} = 0{,}8$ ($\angle A$ – острый).

Проведем высоту BH, $BH = h$.

Из прямоугольного треугольника ABH: $AB = \dfrac{h}{\sin A}$, так как диаметр вписанной в трапецию окружности равен высоте трапеции, то $h = 2r$. Поэтому $h = 2 \cdot 2 = 4$,

$$AB = \frac{2r}{\sin A} = \frac{2 \cdot 2}{0{,}8} = \frac{40}{8} = 5 \text{ и } \frac{a+b}{2} = 5.$$

3. $S_{ABCD} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = 5 \cdot 4 = 20.$

Ответ: 20.

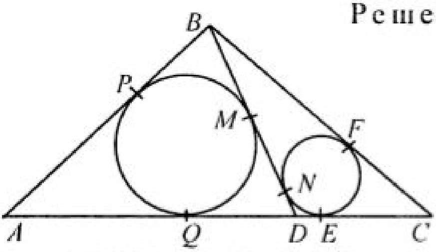
Ключ к решению:

– (свойство касательных) если из точки к окружности проведены две касательные, то <u>длины отрезков касательных</u> от этой точки до точек касания равны.

ЗАДАЧА 36

На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D так, что $AD = a$ и $CD = b$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC, касаются прямой BD в точках M и N соответственно. Найти отрезок MN.

Решение



Пусть $a > b$. Точки касания окружностей со сторонами треугольника ABC обозначим P, Q, E, F. $AQ = a - DQ$, $CE = b - DE$.

Пусть $BM = x$, $MN = y$, $DN = z$.

A	B	C
$AP = AQ = a - (y + z)$	$BP = BM = x$ $BF = BN = x + y$	$CF = CE = b - z$
$AB = BC$	$AP + BP = BF + CF$	

<u>По свойству касательных</u>:

$DN = DE = z$; $DQ = DM = MN + DN = y + z$.

$a - (y + z) + x = x + y + (b - z)$,

$a - y - z + x = x + y + b - z$,

$a - y = y + b$,

$2y = a - b$, $y = \dfrac{a-b}{2}$.

<u>Если</u> $a < b$, то, рассуждая аналогично, получим $y = \dfrac{b-a}{2}$.

Таким образом, $MN = \dfrac{|a-b|}{2}$.

Ответ: $\dfrac{|a-b|}{2}$.

Ключи к решению:

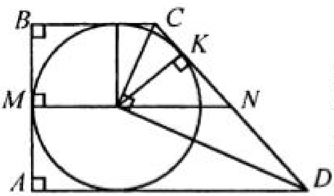
– $\angle COD = 90^\circ$;

– $r = OK = \dfrac{OC \cdot OD}{CD}$;

– ON – медиана ΔCOD, $ON = \dfrac{1}{2}CD$.

ЗАДАЧА 37

Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 8 см и 4 см. Найти среднюю линию трапеции.



Решение

Пусть O – центр вписанной окружности трапеции $ABCD$, r – ее радиус, M и K – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и CD соответственно, боковая сторона AB перпендикулярна BC и AD, $OC = 4$ см, $OD = 8$ см.

1. Углы OCD и ODC – половины углов BCD и CDA, которые в сумме составляют 180°.

Следовательно, $\angle OCD + \angle ODC$ и треугольник OCD – прямоугольный: $CD^2 = OC^2 + OD^2$, $CD^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$, значит, $CD = 4\sqrt{5}$ (см).

2. Радиус OK, проведенный в точку касания, является высотой прямоугольного треугольника OCD, поэтому

$$OK = \frac{OC \cdot OD}{CD} = \frac{8}{\sqrt{5}} \text{ (см)}.$$

3. Пусть MN – средняя линия трапеции, $MN = MO + ON$, где $MO = OK = r$, а ON – медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника: $ON = \dfrac{1}{2}CD = 2\sqrt{5}$ (см).

Получаем $MN = \dfrac{8}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{5} = \dfrac{18}{\sqrt{5}}$ (см).

Ответ: $\dfrac{18\sqrt{5}}{5}$ см.

Ключи к решению:

– вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°;

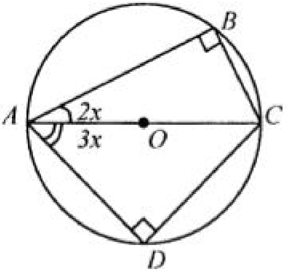
– в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

ЗАДАЧА 38

Диагональ AC четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника.

Вычислить длины сторон четырехугольника, если $AC = 4$ см, $CD = 2\sqrt{2}$ см, $\angle BAC : \angle CAD = 2:3$.

Решение



1. Пусть O – центр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, тогда углы ABC и ADC – вписанные, опирающиеся на диаметр AC:

$\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$.

2. Для прямоугольного треугольника ADC по теореме Пифагора:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

$AD^2 = AC^2 + DC^2 = 4^2 - (2\sqrt{2})^2 = 16 - 8 = 8$, $AD = 2\sqrt{2}$ см.

Так как $AD = DC = 2\sqrt{2}$ см, то $\angle A = \angle C = 45$.

3. Поскольку $\angle BAC : \angle CAD = 2:3$, то $\angle BAC = 2x$.

$\angle CAD = 3x = 45^\circ$, $x = 15^\circ$, $2x = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$.

В прямоугольном треугольнике ABC катет BC лежит против угла в 30°, поэтому $BC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (см).

4. В прямоугольном треугольнике ABC

$$AB = AC \cdot \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$ см; 2 см; $2\sqrt{2}$ см.

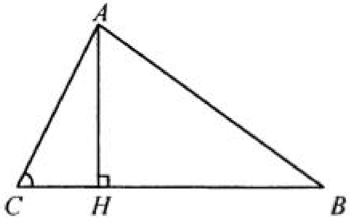
ОПОРНЫЕ КОНСПЕКТЫ

9 класс

КОНСПЕКТ № 1

ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.



Дано: ΔABC.

Доказать: $S = \dfrac{1}{2} ab \cdot \sin C$.

Доказательство:

1. Проведем $AH \perp CB$.

2. Из прямоугольного треугольника ACH имеем:

$$AH = AC \cdot \sin C = b \cdot \sin C.$$

3. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} CB \cdot AH = \dfrac{1}{2} a \cdot (b \cdot \sin C) = \dfrac{1}{2} ab \cdot \sin C.$

Аналогично получаем:

$S = \dfrac{1}{2} ab \cdot \sin C = \dfrac{1}{2} ac \cdot \sin B = \dfrac{1}{2} bc \cdot \sin A$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

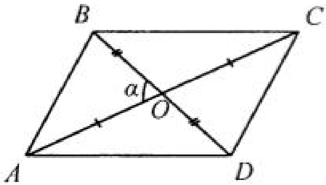
$$S = ab \cdot \sin\alpha$$

Следствие 2. $\sin A = \dfrac{2S}{bc}$, $\sin B = \dfrac{2S}{ac}$, $\sin C = \dfrac{2S}{ab}$.

КОНСПЕКТ № 2

ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Теорема. Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказать: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$.

Доказательство:

Пусть $\angle AOB = \alpha$, тогда $\angle BOC = 180° - \alpha$.

1. $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\alpha$, $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin(180° - \alpha)$.

2. Учитывая, что $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные, $AO = OC$, $BO = OD$ и $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$, имеем:

$$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC} = S_{\Delta COD} = S_{\Delta AOD}.$$

3. $S = 4 \cdot S_{\Delta AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\alpha = 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \sin\alpha =$

$= AC \cdot \left(\frac{1}{2} BD\right) \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$, что и требовалось доказать.

Следствие. Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin\alpha$, где d – диагональ прямоугольника, α – угол между диагоналями.

КОНСПЕКТ № 3

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Теорема. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Для всякого треугольника ABC справедливо равенство $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$, где R – радиус описанной окружности.

Доказательство:

$S = \dfrac{1}{2} ab \cdot \sin C = \dfrac{1}{2} bc \cdot \sin A = \dfrac{1}{2} ac \cdot \sin B.$

1. $\dfrac{1}{2} ab \cdot \sin C = \dfrac{1}{2} bc \cdot \sin A$, $a \cdot \sin C = c \cdot \sin A$,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \ (1).$$

2. $\dfrac{1}{2} bc \cdot \sin A = \dfrac{1}{2} ac \cdot \sin B$, $b \cdot \sin A = a \cdot \sin B$,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \ (2).$$

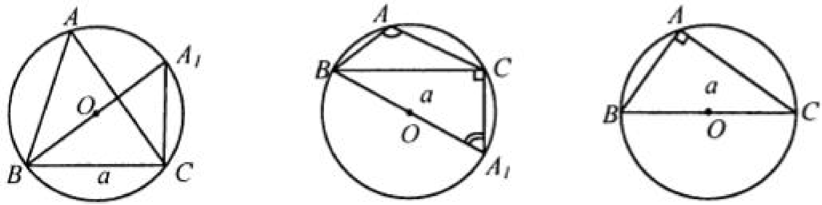
3. Из равенств (1) и (2) имеем:

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, что и требовалось доказать.

Докажем, что $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$.

Для этого рассмотрим три случая:

1) $\angle A$ – острый; 2) $\angle A$ – тупой; 3) $\angle A = 90°$.



1 2 3

КОНСПЕКТ № 3
(продолжение)

Для первых двух случаев имеем:

1. Проведем диаметр BA_1.

Из прямоугольного ΔBA_1C с гипотенузой $A_1B = 2R$ получаем

$$\frac{BC}{\sin A_1} = 2R, \quad \frac{a}{\sin A_1} = 2R.$$

2. В первом случае $\angle A = \angle A_1$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу.

3. Во втором случае $\angle A + \angle A_1 = 180°$, так как сумма дуг, на которые они опираются, равна $360°$:

$$\angle A + \angle A_1 = \frac{1}{2} \cup BA_1C + \frac{1}{2} \cup BAC = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

4. В обоих случаях $\sin A = \sin A_1$, поэтому

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin A_1} = 2R.$$

В третьем случае:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin 90°} = a = 2R.$$

Теорема доказана.

КОНСПЕКТ № 4
СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ

Следствие 1. Во всяком треугольнике ABC $a = 2R \cdot \sin A$; $b = 2R \cdot \sin B$; $c = 2R \cdot \sin C$; $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$.

Следствие 2. Во всяком треугольнике ABC:

1. $S = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$;

2. $S = \dfrac{abc}{4R}$.

Доказательство:

По теореме синусов (следствие 1):

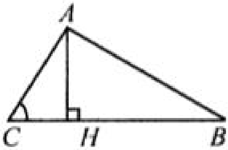
1. $S = \dfrac{1}{2} ab \cdot \sin C = \dfrac{1}{2}(2R \cdot \sin A) \cdot (2R \cdot \sin B) \cdot \sin C =$
$= 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$, что и требовалось доказать.

2. $S = \dfrac{1}{2} ab \cdot \sin C = \dfrac{1}{2} ab \cdot \left(\dfrac{c}{2R}\right) = \dfrac{abc}{4R}$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. Во всяком треугольнике ABC:

$2R \cdot h_a = bc$, $2R \cdot h_b = ac$, $2R \cdot h_c = ab$, где h_a, h_b и h_c – высоты ΔABC, проведенные к сторонам a, b и c соответственно.

Докажем, что $2R \cdot h_a = bc$, остальные равенства доказываются аналогично.



Пусть $AH \perp CB$, $AH = h_a$.

1. Из прямоугольного ΔACH: $h_a = b \cdot \sin C$.

2. По теореме синусов (следствие 1): $\sin C = \dfrac{c}{2R}$.

3. $h_a = b \cdot \dfrac{c}{2R}$, откуда $2R \cdot h_a = 2R \cdot \dfrac{bc}{2R}$, $2R \cdot h_a = bc$, что и требовалось доказать.

Следствие 4. Для всякого треугольника неравенства

$a \le b \le c$ и $h_a \ge h_b \ge h_c$ равносильны.

Доказательство:

1. По теореме синусов (следствие 3): $h_a = \dfrac{bc}{2R}$, $h_b = \dfrac{ac}{2R}$, $h_c = \dfrac{ab}{2R}$.

2. $a \le b \le c$, $bc \ge ac \ge ab$, значит $h_a \ge h_b \ge h_c$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 5

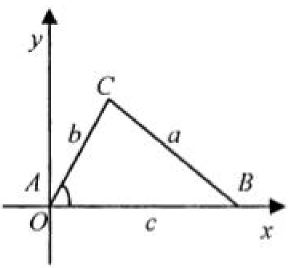
ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Теорема. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \ (1),$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \ (2),$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \ (3).$$

<u>Докажем (1) равенство</u>, остальные доказываются аналогично.

Введем систему координат с началом в точке A, как показано на рисунке.



$A(0; 0)$, $B(c; 0)$, $C(b \cdot \cos A; b \cdot \sin A)$.

1. <u>По формуле расстояния</u> между двумя точками координатной плоскости получаем:

$BC^2 = a^2 = (b \cdot \cos A - c)^2 + (b \cdot \sin A - 0)^2 =$
$= b^2 \cdot \cos^2 A + b^2 \cdot \sin^2 A - 2bc \cdot \cos A + c^2 =$
$= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) - 2bc \cdot \cos A + c^2 =$
$= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Во всяком треугольнике ABC:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Следствие 2. (Теорема, обратная теореме Пифагора.)

Пусть в ΔABC $a^2 + b^2 = c^2$.

Докажем, что $\angle C = 90°$.

Доказательство:

Имеем: $c^2 = a^2 + b^2$ и $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

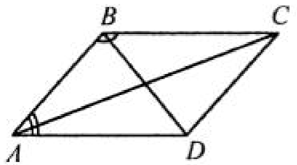
Следовательно, $2ab \cdot \cos C = 0$, $\cos C = 0$,

$\angle C = 90°$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 6

СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ

Теорема. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм.
Доказать: $AC^2 + BD^2 =$
$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

Доказательство:

1. По теореме косинусов для треугольников ABC и ABD:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \underline{\cos B}.$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \underline{\cos A}.$$

2. $\angle B = 180° - \angle A$, значит,

$$\cos B = \cos(180° - \angle A) = -\cos A.$$

3. $$+\begin{array}{l} AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \underline{\cos A} \\ \underline{BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A} \\ AC^2 + BD^2 = \underline{2AB^2} + BC^2 + AD^2 = \underline{AB^2} + BC^2 + \underline{CD^2} + AD^2, \end{array}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Во всяком треугольнике ABC

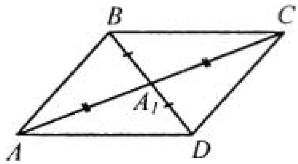
$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4},$$ где m_a, m_b, m_c – медианы ΔABC, проведенные к соответствующим сторонам.

КОНСПЕКТ № 6
(продолжение)

Докажем первое равенство.



Дано: ΔABC, AA_1 – медиана.

Доказать: $m_a{}^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

Доказательство:

1. Продолжим AA_1 и отложим $A_1D = AA_1$.
2. $ABDC$ – параллелограмм, поэтому

$AD^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$,

$AD^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$, $AA_1 = m_a$

$(2m_a)^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, $m_a{}^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$,

что и требовалось доказать.

Следствие 2. $\dfrac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \dfrac{3}{4}$.

Следствие 3. Неравенства $a \le b \le c$ и $m_a \ge m_b \ge m_c$ равносильны.

Доказательство:

Пусть $a \le b$, тогда

$$m_a{}^2 - m_b{}^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} = \frac{3b^2 - 3a^2}{4} =$$

$$= \frac{3(b-a)(b+a)}{4} \ge 0,$$

значит $m_a{}^2 \ge m_b{}^2$, $m_a \ge m_b$, что и требовалось доказать.

Следствие 4. $a^2 = \dfrac{4}{9}(2m_b{}^2 + 2m_c{}^2 - m_a{}^2)$,

$b^2 = \dfrac{4}{9}(2m_a{}^2 + 2m_c{}^2 - m_b{}^2)$, $c^2 = \dfrac{4}{9}(2m_a{}^2 + 2m_b{}^2 - m_c{}^2)$.

КОНСПЕКТ № 7

ФОРМУЛА ГЕРОНА

Теорема. Во всяком треугольнике ABC

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Доказательство:

1. По теореме косинусов (следствие 1): $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

2. $S=\dfrac{1}{2}bc\cdot\sin A$, $\sin A=\dfrac{4S}{2bc}$.

3. $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, поэтому $\left(\dfrac{4S}{2bc}\right)^2+\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=1$,

отсюда:

$\underline{16S^2}=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=$

$=(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)=$

$=((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)=$

$=(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)=$

$=2p(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)=\underline{16p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$,

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 7
(продолжение)

Следствие. Площадь треугольника находится по формуле:

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}},$$

где h_a, h_b, h_c – высоты.

Доказательство:

1. По формуле Герона имеем: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

2. Из формул $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ получаем:

$$a = \frac{2S}{h_a},\ b = \frac{2S}{h_b},\ c = \frac{2S}{h_c}.$$

3. Тогда

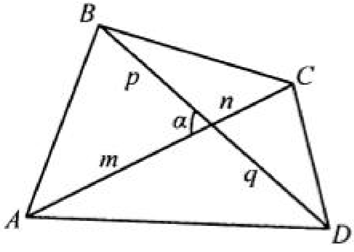
$$S = \frac{1}{4}4S^2\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)},$$

откуда следует утверждение теоремы.

КОНСПЕКТ № 8

ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Теорема. Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.



Дано: $ABCD$ – выпуклый.

Доказать: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$.

Доказательство:

Пусть $AO = m$, $OC = n$, $BO = p$, $OD = q$.

$$S = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD} =$$

$$= \frac{1}{2} mp \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} pn \cdot \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2} nq \cdot \sin\alpha +$$

$$= \frac{1}{2} mq \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} \sin\alpha\,(mp + np + mq + nq) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin\alpha\,(p(m + n) + q(m + n)) = \frac{1}{2} \sin\alpha\,(p \cdot AC + q \cdot AC) =$$

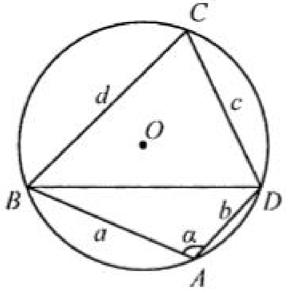
$= \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot AC(p + q) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 9

ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ВПИСАННОГО В ОКРУЖНОСТЬ

Теорема. Во всяком четырехугольнике, вписанном в окружность, $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$,

где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.



Доказательство:

1. $S_{\Delta BAD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}cd \cdot \sin(180° - \alpha) =$

$= \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}cd \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha(ab + cd)$.

2. Выразим $\sin\alpha$ через a, b, c, d. По теореме косинусов для треугольников BAD и BCD:

$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos(180° - \alpha)$,

$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos\alpha$,

$\cos\alpha = \dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$.

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = (1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) =$

$= \dfrac{2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2}{2(ab+cd)} \cdot \dfrac{2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} =$

КОНСПЕКТ № 9
(продолжение)

$$= \frac{((c+d)^2-(a-b)^2)((a+b)^2-(c-d)^2)}{4(ab+cd)^2} =$$

$$= \frac{(c+d+a-b)(c+d+b-a)(a+b+c-d)(a+b+d-c)}{4(ab+cd)^2} =$$

$$= \frac{(2p-2b)(2p-2a)(2p-2d)(2p-2c)}{4(ab+cd)^2} =$$

$$= \frac{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{4(ab+cd)^2} =$$

$$= \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ab+cd)^2}.$$

3. $S = \frac{1}{2}(ab+cd)\cdot \underbrace{\sqrt{\frac{4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ab+cd)^2}}}_{\sin\alpha} =$

$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Площадь четырехугольника, в который можно вписать окружность и около которого можно описать окружность, вычисляется по формуле $S = \sqrt{abcd}$.

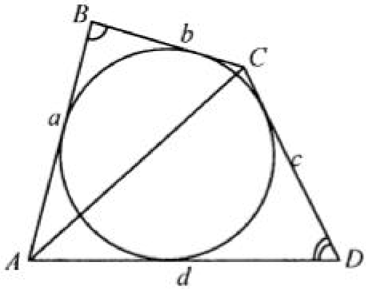
Доказательство:
Имеем $a + c = b + d$, тогда
$a + c = p$ и $b + d = p$,
$a = p - c,\ c = p - a,\ b = p - d,\ d = p - b,$
$S = \sqrt{abcd}$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 10

ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, В КОТОРЫЙ МОЖНО ВПИСАТЬ ОКРУЖНОСТЬ

Теорема. Площадь четырехугольника, в который можно вписать окружность, вычисляется по формуле:

$$S^2 = abcd \cdot \sin^2 \frac{B+D}{2}.$$



Доказательство:

Проведем диагональ AC.

1. $a + c = b + d$ (условие, при котором в четырехугольник можно вписать окружность), $a - b = d - c$, $(a - b)^2 = (d - c)^2$,

$a^2 + b^2 - 2ab = d^2 + c^2 - 2dc$,

$\underline{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab - 2dc}$.

2. По теореме косинусов для треугольников ABC и ADC:

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos D$,

$\underline{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cdot \cos B - 2dc \cdot \cos D}$.

3. Получаем:

$2ab \cdot \cos B - 2cd \cdot \cos D = 2ab - 2cd$,

$ab \cdot \cos B - cd \cdot \cos D = ab - cd$,

$(ab \cdot \cos B - cd \cdot \cos D)^2 = (ab - cd)^2$,

$a^2b^2 \cdot \cos^2 B - 2abcd \cdot \cos B \cdot \cos D + c^2d^2 \cdot \cos^2 D = a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2$,

$\underline{a^2b^2 \cdot \cos^2 B + c^2d^2 \cdot \cos^2 D} = \underline{\underline{a^2b^2 + c^2d^2}} + 2abcd \cdot \cos B \cdot \cos D - 2abcd$.

КОНСПЕКТ № 10

(продолжение)

4. $S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} = \dfrac{1}{2}ab \cdot \sin B + \dfrac{1}{2}cd \cdot \sin D,$

$2S = ab \cdot \sin B + cd \cdot \sin D,$

$(2S)^2 = (ab \cdot \sin B + cd \cdot \sin D)^2,$

$4S^2 = a^2b^2 \cdot \sin^2 B + 2abcd \cdot \sin B \cdot \sin D + c^2d^2 \cdot \sin^2 D,$

$4S^2 = a^2b^2 \cdot (1 - \cos^2 B) + 2abcd \cdot \sin B \cdot \sin D + c^2d^2 \cdot (1 - \cos^2 D),$

$\underline{a^2b^2 \cdot \cos^2 B + c^2d^2 \cdot \cos^2 D} = \underline{a^2b^2 + c^2d^2} + 2abcd \cdot \sin B \cdot \sin D - 4S^2.$

5. $2abcd \cdot \cos B \cdot \cos D - 2abcd = 2abcd \cdot \sin B \cdot \sin D - 4S^2,$

$abcd\,(\cos B \cdot \cos D - \sin B \cdot \sin D) = -2S^2 + abcd,$

$abcd \cdot \cos(B + D) = -2S^2 + abcd,$

$2S^2 = abcd - abcd \cdot \cos(B + D),$

$2S^2 = abcd\,(1 - \cos(B + D)),$

$2S^2 = abcd \cdot 2\sin^2 \dfrac{B+D}{2},$

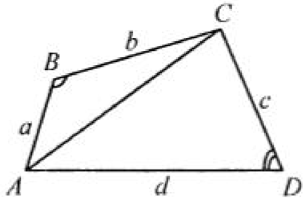
$S^2 = abcd \cdot \sin^2 \dfrac{B+D}{2}$, что и требовалось доказать.

КОНСПЕКТ № 11

ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Теорема. Площадь четырехугольника вычисляется по формуле:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cdot\cos^2\frac{B+D}{2}}.$$



Доказательство:

Проведем диагональ AC.

1. <u>По теореме косинусов</u> для треугольников ABC и ACD получаем:

$AC^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos B=c^2+d^2-2cd\cdot\cos D,$

$2(ab\cdot\cos B-cd\cdot\cos D)=a^2+b^2-c^2-d^2,$

$4(ab\cdot\cos B-cd\cdot\cos D)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2,$

$4(a^2b^2\cdot\cos^2B-2abcd\cdot\cos B\cdot\cos D+c^2d^2\cdot\cos^2D)=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2.$

$\underline{4(a^2b^2\cdot\cos^2B+c^2d^2\cdot\cos^2D)}=8abcd\cdot\cos B\cdot\cos D+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2.$

2. $S=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ADC}=\dfrac{1}{2}ab\cdot\sin B+\dfrac{1}{2}cd\cdot\sin D,$

$2S=ab\cdot\sin B+cd\cdot\sin D,$

$4S^2=(ab\cdot\sin B+cd\cdot\sin D)^2,$

$4S^2=a^2b^2\cdot\sin^2B+2abcd\cdot\sin B\cdot\sin D+c^2d^2\cdot\sin^2D,$

$4S^2=a^2b^2(1-\cos^2B)+2abcd\cdot\sin B\sin D+c^2d^2(1-\cos^2D),$

$\underline{a^2b^2\cdot\cos^2B+c^2d^2\cdot\cos^2D}=a^2b^2+c^2d^2-4S^2+2abcd\cdot\sin B\cdot\sin D.$

КОНСПЕКТ № 11
(продолжение)

3. $4(a^2b^2 + c^2d^2 - 4S^2 + 2abcd \cdot \sin B \cdot \sin D) =$
$= 8abcd \cdot \cos B \cdot \cos D + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2,$
$8abcd \cdot \cos B \cdot \cos D - 8abcd \cdot \sin B \cdot \sin D = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 16S^2 -$
$- (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2,$
$8abcd \cdot \cos(B + D) = 4((ab + cd)^2 - 2abcd) - 16S^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2,$
$8abcd \cdot \cos(B + D) + 8abcd + 16S^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2.$

<u>Преобразуем левую часть:</u>

$$8abcd(1 + \cos(B + D)) + 16S^2 = 8abcd \cdot 2\cos^2\frac{B+D}{2} + 16S^2 =$$
$$= 16(abcd \cdot \cos^2\frac{B+D}{2} + S^2).$$

<u>Преобразуем правую часть:</u>

$(\underline{2ab} + 2cd + \underline{a^2} + \underline{b^2} - c^2 - d^2) x (2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2) =$
$= ((a + b)^2 - (c - d)^2)((c + d)^2 - (a - b)^2) =$
$= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b) =$
$= (2p - 2d)(2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2a) = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d).$

<u>Окончательно получаем:</u>

$$16(abcd \cdot \cos^2\frac{B+D}{2} + S^2) = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d),$$

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cdot \cos^2\frac{B+D}{2},$$

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot \cos^2\frac{B+D}{2}}$, что и требовалось доказать.

КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ

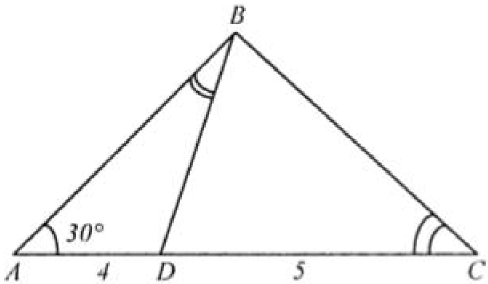
9 класс

Ключи к решению:
– подобие треугольников;
– площадь треугольника $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

ЗАДАЧА 1

В треугольнике ABC точка D делит сторону AC на отрезки $AD = 4$ и $DC = 5$; $\angle ABD = 30$; $\angle ABD = \angle ACB$. Найти площадь треугольника ABD.

Решение



1. Треугольники BAD и CAB имеют общий угол A, углы B и C равны по условию, следовательно, треугольники подобны.

$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$, $AB^2 = AC \cdot AD = 9 \cdot 4 = 36$, $AB = 6$.

2. $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin A$,

$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 30° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$.

Ответ: 6.

К л ю ч и к р е ш е н и ю :

– <u>свойства параллелограмма</u>;

– <u>подобие треугольников</u>;

– <u>пропорциональные</u> отрезки;

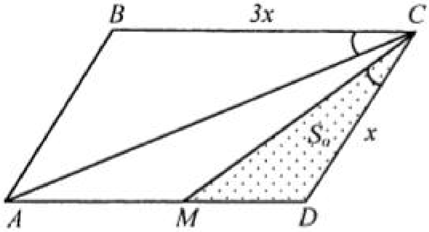
– <u>площадь</u> треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

– <u>площадь</u> параллелограмма $S = ab\sin\gamma$.

ЗАДАЧА 2

На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle DCM = \angle BCA$. Найти площадь треугольника MCD, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 81, а сторона BC в 3 раза длиннее стороны AB.

Р е ш е н и е



Пусть $S = S_{ABCD}$, $S_o = S_{MCD}$, $CD = x$, тогда $BC = 3x$, $S = 81$. Найдем S_o.

1. $\angle ABC = \angle ADC$ по свойству параллелограмма, тогда треугольники MCD и ABC подобны по двум углам:

$\angle DCM = \angle BCA$ и $\angle MDC = \angle ABC$.

Следовательно, $\frac{MD}{AB} = \frac{CD}{BC}$, $\frac{MD}{x} = \frac{x}{3x}$, $MD = \frac{x}{3}$.

2. $S_o = \frac{1}{2}CD \cdot MD \cdot \sin D = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{3} \cdot \sin D = \frac{1}{6} \cdot x^2 \cdot \underline{\sin D}$.

$S = CD \cdot AD \cdot \sin D = x \cdot 3x \cdot \sin D = 3 \cdot \underline{x^2 \cdot \sin D}$.

$S = 81$, значит, $\underline{x^2 \cdot \sin D} = 81 : 3 = 27$,

тогда $S_o = \frac{1}{6} \cdot 27 = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

О т в е т : 4,5.

Ключи к решению:

– площадь треугольника;

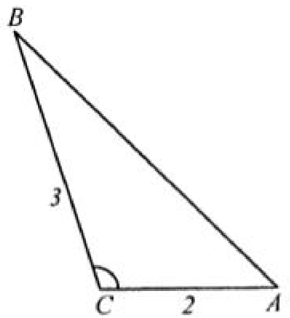
– нахождение синуса угла по известной площади $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

– нахождение косинуса угла по синусу угла;

– теорема косинусов для нахождения стороны треугольника.

ЗАДАЧА 3

В треугольнике ABC длина стороны AC равна 2, длина стороны BC равна 3; угол, заключенный между этими сторонами, тупой. Найти длину стороны AB, зная, что площадь треугольника равна $\frac{3\sqrt{15}}{4}$.



Решение

1. $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin C$,

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin C = \frac{3\sqrt{15}}{4}$,

$\sin C = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

2. Из условия следует, что $90° < \angle C < 180°$.

$\cos C = -\sqrt{1 - \sin^2 C} = -\sqrt{1 - \frac{15}{16}} = -\frac{1}{4}$.

3. Найдем AB по теореме косинусов для ΔABC.

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C$,

$AB^2 = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 13 + 3 = 16$.

$AB = 4$.

Ответ: 4.

Ключи к решению:

– нахождение <u>косинуса угла</u> по синусу угла;

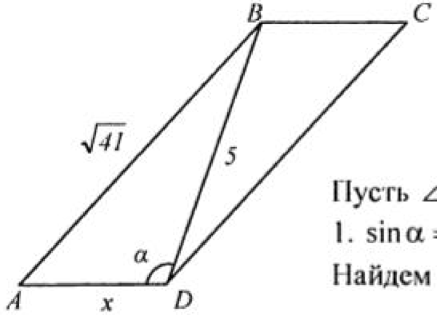
– <u>теорема косинусов</u> для нахождения стороны треугольника;

– <u>площадь параллелограмма</u> $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta ADB}$.

ЗАДАЧА 4

Дан параллелограмм $ABCD$, его диагональ BD равна 5, <u>синус тупого угла</u> ADB равен 0,8. Найти площадь параллелограмма, если сторона AB равна $\sqrt{41}$.

Решение



Пусть $\angle ADB = \alpha$, $AD = x$.

1. $\sin\alpha = 0{,}8$, α – тупой.

Найдем $\cos\alpha$.

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6.$

2. <u>Найдем AD по теореме косинусов для ΔADB</u>.

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos\angle ADB.$

$\left(\sqrt{41}\right)^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot x \cdot 5 \cdot \cos\alpha,$

$41 = x^2 + 25 - 10 \cdot (-0{,}6),$

$41 = x^2 + 25 + 6x, \quad x^2 + 6x - 16 = 0,$

$\frac{1}{4}D = 9 + 16 = 25 > 0, \quad x_{1,2} = -3 \pm 5, \quad x_1 < 0, x_2 = 2.$

$AD = 2.$

3. $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta ADB} = 2 \cdot \frac{1}{2} x \cdot 5 \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 5 \cdot 0{,}8 = 8.$

Ответ: 8.

Ключи к решению:

– теорема о сумме углов треугольника;

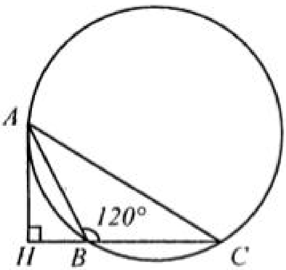
– применение теоремы синусов к нахождению стороны треугольника через радиус описанной окружности;

– соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.

ЗАДАЧА 5

Равнобедренный треугольник вписан в окружность радиуса $4\sqrt{3}$. Найти высоту, проведенную к боковой стороне, если один из углов треугольника равен 120°.

Решение



Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AB = BC$), вписанный в окружность радиуса $R = 4\sqrt{3}$, AH – высота, проведенная к боковой стороне BC.

Из условия следует, что $\angle ABC = 120°$ (иначе $\angle A = \angle C = 120°$, чего быть не может).

1. $\angle A = \angle C = (180° - 120°) : 2 = 30°$ ($\angle A + \angle B + \angle C = 180°$).

2. $\dfrac{AB}{\sin C} = 2R$ (по теореме синусов), $AB = 2R \cdot \sin C$,

$$AB = 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin 30° = 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}.$$

3. В прямоугольном $\Delta ABH \cdot AB = 4\sqrt{3}$, $\angle B = \angle A + \angle C = 60°$ ($\angle ABH$ – внешний ΔABC).

$$AH = AB \cdot \sin B = 4\sqrt{3} \cdot \sin 60° = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$$

Ответ: 6.

К л ю ч и к р е ш е н и ю:

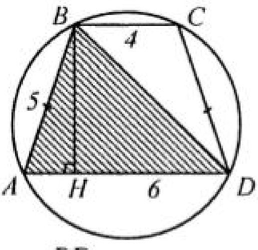
– высота равнобедренной трапеции делит основание на два отрезка, один из которых равен $\frac{a-b}{2}$, а другой $\frac{a+b}{2}$, где a и b – основания трапеции;

– окружность, описанная около трапеции, описана и около треугольника ABD;

– теорема синусов $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

ЗАДАЧА 6

Основания равнобедренной трапеции равны 4 и 6, боковая сторона равна 5. Найти радиус окружности, описанной около этой трапеции. В ответе укажите $R \cdot \sqrt{6}$.



Р е ш е н и е

Пусть $ABCD$ равнобедренная трапеция, $AB = CD = 5$, $BC = 4$, $AD = 6$, R – радиус описанной окружности, $AD = a$, $BC = b$.

1. Около равнобедренной трапеции можно описать окружность. Окружность, описанная около трапеции $ABCD$, описана и около ΔABD.

$\frac{BD}{\sin A} = 2R$ (по теореме синусов). Найдем $\sin A$ и BD.

Проведем высоту BH.

2. $AH = \frac{a-b}{2} = \frac{6-4}{2} = 1$, $HD = \frac{a+b}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$.

3. Из прямоугольного ΔABH $\sin A = \frac{BH}{AB}$. По теореме Пифагора:

$AB^2 = AH^2 + BH^2$. $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$,

$BH = 2\sqrt{6}$. $\sin A = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Из прямоугольного треугольника HBD найдем BD:

$BD^2 = HB^2 + HD^2 = 24 + 5^2 = 24 + 25 = 49$, $BD = 7$.

4. $2R = 7 : \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{35}{2\sqrt{6}}$, $R = \frac{35}{4\sqrt{6}}$, $R \cdot \sqrt{6} = \frac{35}{4}$.

О т в е т: 8,75.

Ключи к решению:

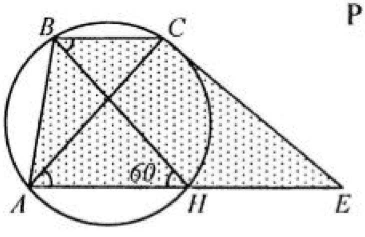
– условие равенства вписанных углов;

– теорема синусов;

– свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°.

ЗАДАЧА 7

В трапеции $ABCE$ основание AE равно 16, $CE = 8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A, B, и C вторично пересекает прямую AE в точке H. Найти AC, если $\angle AHB = 60°$.



Решение

1. В треугольнике ACE:

$CE = 8\sqrt{3}$, $AE = 16$.

По теореме синусов для ΔACE получим $\dfrac{CE}{\sin A} = \dfrac{AE}{\sin C}$ (1).

2. Найдем $\sin A$.

Углы CAH и CBH – вписанные, опирающиеся на дугу CH, значит, они равны. А угол CBH равен углу BHA как накрест лежащие при параллельных BC, AH и секущей BH.

Имеем $\angle CAH = \angle CBH = \angle BHA = 60°$.

$$\sin A = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Найдем $\sin C$ из равенства (1).

$$\sin C = \frac{16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{8\sqrt{3}} = 1.\text{ Поэтому } \angle C = 90°.$$

4. Из прямоугольного ΔACE ($\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$) находим

$$\angle E = 30°, AC = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.$$

Ответ: 8.

Ключи к решению:

– <u>свойства отрезков касательных</u>, проведенных из одной точки к окружности;

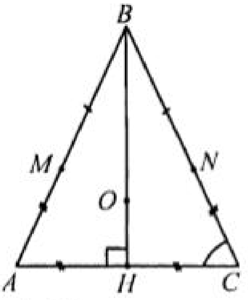
– <u>теорема синусов</u> для нахождения радиуса описанной окружности $R=\dfrac{a}{2\sin\alpha}$ и формула $R=\dfrac{C}{2\pi}$, где C – известная длина окружности.

ЗАДАЧА 8

В равнобедренном треугольнике точка касания <u>вписанной окружности</u> делит боковую сторону в отношении 3 : 2, считая от вершины основания. Длина <u>окружности, описанной</u> около этого треугольника, равна 25π. Найти боковую сторону.

Решение

Пусть ABC – данный равнобедренный треугольник, O – центр вписанной окружности, BH – высота, M, N, H – точки касания.



1. <u>По свойству отрезков касательных</u>, проведенных из одной точки к окружности: $AM = AH = CH = CN$ и $BM = BN$.

По условию $AM : MB = 3 : 2$, поэтому $AM = AH = 3x$, $BM = 2x$. По теореме Пифагора для прямоугольного ΔABH:
$AB^2 = AH^2 + BH^2$. $BH^2 = (5x)^2 - (3x)^2 = 16x^2$, $BH = 4x$.

2. <u>По теореме синусов</u> для ΔABC: $\dfrac{AB}{\sin C}=2R$, где R – радиус окружности, описанной около ΔABC;

$$R=\frac{25\pi}{2\pi}=\frac{25}{2} \text{ и } R=\frac{AB}{2\sin C}.$$

Поэтому $\underline{AB = 25\sin C}$.

3. Из прямоугольного ΔABH, учитывая, что имеем $\angle A = \angle C$:

$$\underline{\sin A} = \frac{BH}{AB}=\frac{4x}{5x}=\frac{4}{5};\; 5x = 25\cdot\frac{4}{5},\; 5x = 20,\; AB = 20.$$

Ответ: 20.

Ключи к решению:

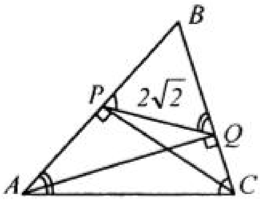
– если соединить основания двух высот треугольника, то получится треугольник, подобный данному;

– теорема синусов.

ЗАДАЧА 9

В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AQ и CP на стороны BC и AB соответственно. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение



1. Прямоугольные треугольники AQB и CPB имеют равные острые углы при вершине B, следовательно, они подобны и $\frac{QB}{AB}=\frac{PB}{CB}$.

Отсюда следует, что в треугольниках QBP и ABC стороны, прилежащие к равному углу при вершине B, пропорциональны, следовательно, по второму признаку подобия эти треугольники подобны: $\Delta QBP \sim \Delta ABC$.

2. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия: $\frac{S_{\Delta QBP}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}=k^2$, отсюда $k=\frac{1}{3}$, значит, $AC=3\cdot PQ=3\cdot 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

3. Из прямоугольного треугольника ABQ: $\cos B=\frac{BQ}{AB}$, но $\frac{BQ}{AB}=k=\frac{1}{3}$, поэтому $\cos B=\frac{1}{3}$. Так как ΔABC – остроугольный, то $\sin B=+\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

4. По теореме синусов для ΔABC: $\frac{AC}{\sin B}=2R$, где R – радиус описанной окружности. $R=\frac{AC}{2\sin B}=\frac{6\sqrt{2}\cdot 3}{2\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{9}{2}=4{,}5$.

Ответ: 4,5.

Ключи к решению:

– определение медианы;

– теорема косинусов для нахождения косинуса угла треугольника;

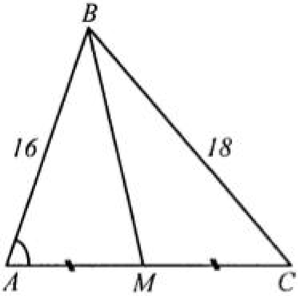
– теорема косинусов для нахождения сторон треугольника.

ЗАДАЧА 10

Стороны треугольника равны 16, 18, 26. Найти медиану, проведенную к большей стороне.

Решение

Пусть в ΔABC $AB = 16$, $BC = 18$, $AC = 26$, BM – медиана, проведенная к большей стороне AC, $(16 < 18 < 26)$.



$$AM = \frac{1}{2}AC = 13.$$

1. Найдем $\cos A$ по теореме косинусов для ΔABC.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$,

$18^2 = 16^2 + 26^2 - 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \cos A$,

$2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \cos A = 256 + 676 - 324$,

$$\cos A = \frac{608}{2 \cdot 16 \cdot 26} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 19}{2 \cdot 16 \cdot 26} = \frac{19}{26}.$$

2. Найдем BM по теореме косинусов для ΔABM.

$BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2 \cdot AB \cdot AM \cdot \cos A$,

$$BM^2 = 16^2 + 13^2 - 2 \cdot 16 \cdot 13 \cdot \frac{19}{26} = 256 + 169 - 304 = 121.$$

$BM = 11$.

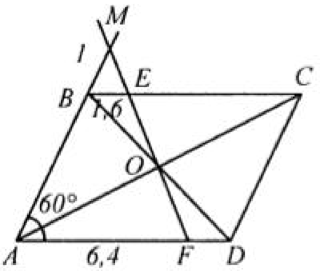
Ответ: 11.

Ключи к решению:
– <u>свойства параллелограмма</u>;
– <u>подобие треугольников</u>;
– <u>теорема косинусов</u>.

ЗАДАЧА 11

В параллелограмме $ABCD$ через точку пересечения диагоналей проведена прямая, которая отсекает на сторонах BC и AD отрезки $BE = 1{,}6$ и $AF = 6{,}4$. M – точка пересечения прямых AB и EF. Найти периметр треугольника ABD, если $BM = 1$ и $\angle BAD = 60°$.

Решение



1. <u>Найдем AB</u>.

$BC \parallel AD$, поэтому $\Delta BME \sim \Delta AMF$;

$$k = \frac{BE}{AF} = \frac{1{,}6}{6{,}4} = \frac{1}{4}.$$

2. $\frac{MB}{MA} = \frac{1}{4}$, значит, $\frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}$, то есть

$AB = 3MB = 3 \cdot 1 = 3$, $AB = 3$.

3. <u>Найдем AD.</u>

O – центр симметрии параллелограмма, следовательно,

$FD = EB = 1{,}6$; $AD = AF + FD = 6{,}4 + 1{,}6 = 8$.

$AD = 8$.

4. <u>Найдем BD по теореме косинусов для ΔABD</u>.

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A,$$

$$BD^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 9 + 64 - 24 = 49,$$

$BD = 7$.

5. $P_{\Delta ABD} = AB + BD + AD = 3 + 7 + 8 = 18$.

Ответ: 18.

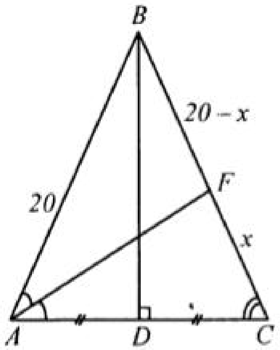
Ключ к решению:
– свойство биссектрисы треугольника;
– нахождение косинуса угла в прямоугольном треугольнике;
– теорема косинусов для нахождения стороны треугольника.

ЗАДАЧА 12

В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найти биссектрису угла при основании равнобедренного треугольника.

Решение

Пусть ΔABC – равнобедренный, $AB = BC = 20$, $AC = 5$, AF – биссектриса угла A, $BD \perp AC$ (BD – медиана).



1. По свойству биссектрисы для ΔABC:
$\frac{FC}{BF} = \frac{AC}{AB}$. Пусть $FC = x$, тогда
$BF = 20 - x$.
Найдем FC.
$\frac{x}{20-x} = \frac{5}{20}$, $\frac{x}{20-x} = \frac{1}{4}$,
$4x = 20 - x$, $5x = 20$, $x = 4$, $FC = 4$.

2. Найдем $\cos C$ из прямоугольного треугольника BDC.

$$\cos C = \frac{DC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}AC}{20} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 5}{20} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8},\ \cos C = \frac{1}{8}.$$

3. Найдем AF по теореме косинусов для ΔAFC.

$$AF^2 = FC^2 + AC^2 - 2\cdot FC\cdot AC\cdot \cos C,$$

$$AF^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{1}{8} = 16 + 25 - 5 = 36,$$

$AF = 6$.

Ответ: 6.

Ключи к решению:

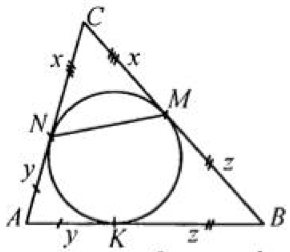
– <u>выражение отрезков касательных</u>, проведенных из вершин треугольника к вписанной окружности, <u>через стороны треугольника</u>;

– <u>теорема косинусов</u> для нахождения косинуса угла;

– <u>теорема косинусов</u> для нахождения стороны треугольника.

ЗАДАЧА 13

Дан треугольник ABC. В него <u>вписана</u> окружность, касающаяся BC и AC в точках M и N. Найти MN, если $AB = 20$, $BC = 25 + \sqrt{65}$, $AC = 25 - \sqrt{65}$.



Решение

Обозначим стороны треугольника ABC через $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

<u>По свойству касательных</u>, проведенных из одной точки к окружности, $CM = CN$, $AN = AK$, $BK = BM$.

Пусть $CN = x$, $AN = y$, $BM = z$.

$$2x = a + b - c,\ \ 2y = b + c - a,\ \ 2z = a + c - b.$$

1. $2x = (25 + \sqrt{65}) + (25 - \sqrt{65}) - 20 = 30$, $x = 15$.

2. <u>Найдем $\cos C$ из ΔABC по теореме косинусов.</u>

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C,$$

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{7}{8}.$$

$AC^2 = (25 - \sqrt{65})^2 =$
$= 690 - 50\sqrt{65}$,
$BC^2 = (25 + \sqrt{65})^2 =$
$= 690 + 50\sqrt{65}$,
$2AC \cdot BC = 2 \cdot (25^2 - 65) =$
$= 1120$.

3. <u>Найдем MN^2 из ΔMCN по теореме косинусов.</u>

$$MN^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos C = 2x^2(1 - \cos C) = 2 \cdot 15^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{15^2}{4},$$

$$MN = \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

Ответ: 7,5.

Ключи к решению:

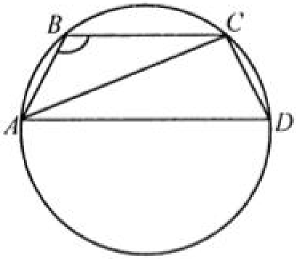
– <u>теорема косинусов</u>;

– <u>теорема синусов</u> для нахождения радиуса описанной окружности $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

ЗАДАЧА 14

В равнобедренной трапеции с острым углом в 60° боковая сторона равна $\sqrt{21}$, а меньшее основание $2\sqrt{21}$. Найти радиус окружности, описанной около этой трапеции.

Решение



Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $\angle A = 60°$, боковая сторона $AB = \sqrt{21}$, $BC = 2\sqrt{21}$, R – радиус описанной окружности.

Проведем диагональ AC.

1. В треугольнике ABC $\angle B = 180° - 60° = 120°$, так как в трапеции $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180°$.

2. <u>По теореме косинусов для ΔABC</u>:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$,

$AC^2 = 21 + 84 + 2 \cdot 42 \cdot \dfrac{1}{2} = 147$, $AC = \sqrt{147}$.

3. <u>По теореме синусов для ΔABC</u>:

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R,\ \ R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{\sqrt{147}}{2\cdot\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} = 7.$$

Ответ: 7.

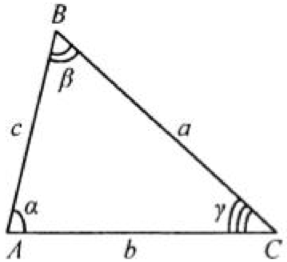
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

ЗАДАЧА 15

Пусть в ΔABC:

$BC = a, AC = b, AB = c, \angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$.

Справедливы следующие утверждения.



1. В треугольнике против меньшей стороны лежит меньший угол (и наоборот).

$$c < a < b \Leftrightarrow \gamma < \alpha < \beta.$$

2. Из неравенства $\gamma < \alpha < \beta$ следует, что γ и α – острые: если γ или α тупой, то β тоже тупой, а в любом треугольнике более одного тупого угла быть не может.

Наименьший из двух углов – острый.

3. Пусть $\gamma < \alpha < \beta$ и $\sin\beta > 0$.

Необходимо помнить, что здесь β может быть как острым, так и тупым. Например, из равенства $\sin\beta = \dfrac{1}{2}$ следует, что $\beta = 30°$ или $\beta = 150°$.

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, где R – радиус описанной около треугольника окружности.

Ключи к решению:

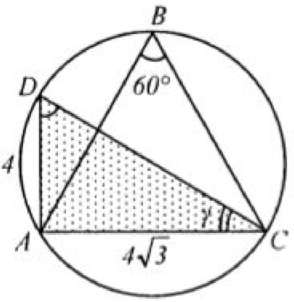
– <u>свойство вписанных углов</u>, опирающихся на одну и ту же дугу;

– <u>теорема синусов</u>;

– <u>свойство катета</u> в прямоугольном треугольнике, лежащего против угла в 30°.

ЗАДАЧА 16

В окружность вписан равносторонний треугольник ABC. На дуге AB выбрана точка D так, что хорда $AD = 4$. Найти хорду DC, если $AC = 4\sqrt{3}$.



Решение

1. Углы ADC и ABC – вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AC, поэтому они равны : $\angle ADC = 60°$.

2. По теореме синусов для ΔADC, где $\angle ACD = \gamma$: $\dfrac{AC}{\sin D} = \dfrac{AD}{\sin\gamma}$.

Найдем $\sin\gamma$.

$$\sin\gamma = \frac{4\cdot\sin 60°}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \sqrt{3} = \frac{1}{2}.$$

3. Найдем γ.

Имеем: $\angle ACD < \angle ACB = 60°$, $\gamma < 60°$, γ – острый.

Так как $\gamma < 60°$ и $\sin\gamma = \dfrac{1}{2}$, то $\gamma = 30°$.

В ΔADC: $\angle D = 60°$, $\angle C = 30°$, значит, $\angle A = 90°$.

4. В прямоугольном ΔADC катет AD лежит против угла в 30°, поэтому $DC = 2\cdot AD = 2\cdot 4 = 8$.

Ответ: 8.

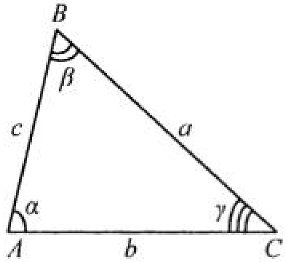
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

ЗАДАЧА 17

Пусть в ΔABC:

$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

Справедливы следующие утверждения.



1. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол (и наоборот).

$$c < a < b \Leftrightarrow \gamma < \alpha < \beta.$$

2. Если $\cos\beta > 0$, то β – острый.
Если $\cos\beta < 0$, то β – тупой.

3. Для того, чтобы проверить (зная длины сторон), есть ли в треугольнике тупой угол, нужно:

а) сравнить длины сторон ($c < a < b$);

б) выявить наибольший угол (β);

в) записать $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ и определить знак числителя;

г) если $a^2 + c^2 - b^2 > 0$, то и $\cos\beta > 0$, тогда β – острый;
если $a^2 + c^2 - b^2 < 0$, то и $\cos\beta < 0$, тогда β – тупой;

д) остальные углы обязательно острые.

4. Пусть выполнены шаги а), б), в) пункта 3.

Тогда, если $a^2 + c^2 - b^2 > 0$, то треугольник должен быть остроугольным.

Если $a^2 + c^2 - b^2 < 0$, то треугольник должен быть тупоугольным.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ключи к решению:

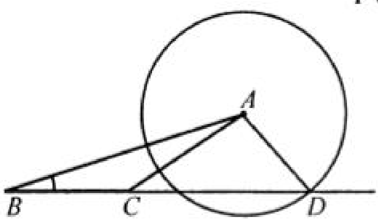
– условие, при котором треугольник должен быть остроугольным;

– теорема косинусов.

ЗАДАЧА 18

Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 8$, $BC = 4$, $AC = \sqrt{30}$. Окружность с центром в точке A радиуса 5 пересекает луч BC в точке D, образуя таким образом остроугольный треугольник ABD. Найти расстояние от точки B до точки D.

Решение



Заметим, что $BC^2 + AC^2 - AB^2 < 0$, поэтому $\cos C < 0$ и $\angle C$ – тупой; ΔABC – тупоугольный.

По теореме косинусов для ΔABD:

$AD^2 = BA^2 + BD^2 - 2 \cdot BA \cdot BD \cdot \cos B$.

1. Найдем $\cos B$ из ΔABC по теореме косинусов.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$,

$$30 = 64 + 16 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos B, \quad \cos B = \frac{25}{32}.$$

2. Найдем BD из ΔABD по теореме косинусов.

$$5^2 = 8^2 + BD^2 - 2 \cdot 8 \cdot BD \cdot \frac{25}{32}, \quad BD = x,$$

$$25 = 64 + x^2 - \frac{25}{2}x, \quad 2x^2 - 25x + 78 = 0,$$

$x_1 = 6$, $x_2 = 6{,}5$. $BD = 6$ или $BD = 6{,}5$.

3. В ΔABD $AD < BD < AB$; $AD^2 + BD^2 - AB^2 = BD^2 - 39$.

При $BD = 6$ $36 - 39 < 0$, при $BD = 6{,}5$ $42{,}25 - 39 > 0$.

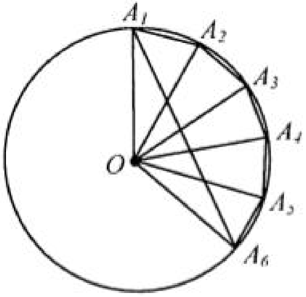
Значит, ΔABD – остроугольный при $BD = 6{,}5$.

Ответ: 6,5.

Ключи к решению:
– свойства правильного пятнадцатиугольника;
– площадь треугольника;
– теорема косинусов.

ЗАДАЧА 19

Точка O является центром правильного пятнадцатиугольника $A_1A_2\ldots A_{15}$. Площадь треугольника A_1OA_6 равна $12\sqrt{3}$. Найти длину диагонали A_1A_6.



Решение

Пусть R – радиус окружности, описанной около правильного пятнадцатиугольника $A_1A_2\ldots A_{15}$.

1. $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \ldots = \angle A_5OA_6 =$

$= \dfrac{360^\circ}{15} = \dfrac{120^\circ}{5} = 24^\circ.$

$\angle A_1OA_6 = 24^\circ \cdot 5 = 120^\circ.$

2. $S_{\Delta A_1OA_6} = \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4};$

$\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}, \quad R^2 = 48.$

3. Найдем A_1A_6 по теореме косинусов для ΔA_1OA_6.

$A_1A_6^{\,2} = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 120^\circ,$

$A_1A_6^{\,2} = 2R^2 + 2R^2 \cdot \dfrac{1}{2} = 3R^2 = 3 \cdot 48 = 144.$

$A_1A_6 = 12.$

Ответ: 12.

К л ю ч и к р е ш е н и ю:

– свойства правильного шестиугольника;

– свойство средней линии трапеции;

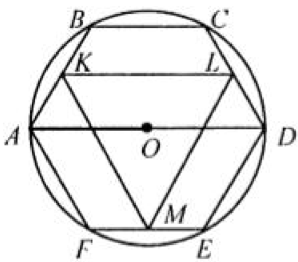
– площадь правильного треугольника.

ЗАДАЧА 20

Точки K, L, M являются серединами сторон AB, CD, EF правильного шестиугольника $ABCDEF$. Найти длину стороны этого шестиугольника, если площадь треугольника KLM равна $9\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е

Пусть O – центр окружности, описанной около правильного шестиугольника $ABCDEF$, R – радиус окружности, $BC = x$, $KL = a$.



1. Углы BAD и ABC – вписанные,

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \cup BCD = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AEC = \frac{1}{2} \cdot 240^\circ = 120^\circ.$$

2. $\angle BAD + \angle ABC = 180°$, поэтому $BC \parallel AD$, и $ABCD$ – трапеция.

KL – средняя линия трапеции.

$$KL = \frac{BC + AD}{2} = \frac{R + 2R}{2} = \frac{3R}{2}, \quad a = \frac{3x}{2}.$$

3. $KL = LM = KM = \dfrac{3R}{2}$, ΔKLM – равносторонний.

$\underline{S_{\Delta KLM}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $\underline{S_{\Delta KLM}} = 9\sqrt{3}$, значит,

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}, \quad a^2 = 36, \quad a = 6.$$

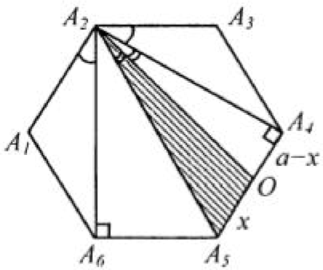
4. $\dfrac{3x}{2} = 6, \quad x = 4, \quad BC = 4.$

О т в е т: 4.

Ключи к решению:
– <u>свойства биссектрисы</u> треугольника;
– $a_3 = R\sqrt{3}$; $a_6 = R$; $S = \frac{1}{2}ah$.

ЗАДАЧА 21

Сторона <u>правильного</u> шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ равна $\sqrt{2\sqrt{3}+3}$. Биссектриса угла $A_6A_2A_3$ пересекает сторону A_4A_5 в точке O. Найти площадь треугольника A_2A_5O.



Решение

Обозначим $A_4A_5 = a_6 = a$, $A_2A_6 = A\ A_4 = a_3$. R – радиус описанной окружности, тогда $R = a$.

$R = a_6 = a = \sqrt{2\sqrt{3}+3}$; $A_2A_5 = 2R$;

$a_3 = R\sqrt{3}$; $OA_5 = x$; $A_4O = a - x$.

2. $\angle A_6A_2A_3 = \frac{1}{2}\cup A_3A_4A_6 = 90°$.

$\angle A_6A_2O = \angle A_3A_2O = 45°$;

$\angle A_6A_2A_5 = \frac{1}{2}\cup A_5A_6 = 30°$ и $\angle A_3A_2A_4 = \frac{1}{2}\cup A_3A_4 = 30°$.

Поэтому $\angle A_5A_2O = \angle A_4A_2O = 45° - 30° = 15°$, то есть A_2O – биссектриса угла $A_4A_2A_5$.

<u>По свойству биссектрисы треугольника</u> для $\Delta A_4A_2A_5$:

$$\frac{x}{a-x} = \frac{2a}{a\sqrt{3}};\ \frac{x}{a-x} = \frac{2}{\sqrt{3}};\ x\sqrt{3} = 2a - 2x;\ x(2+\sqrt{3}) = 2a;$$

$$x = \frac{2a}{2+\sqrt{3}}.$$

3. $\angle A_2A_4A_5 = \angle A_2A_6A_5 = 90°$; <u>$A_2A_4 \perp A_4A_5$</u>, значит,

$$\underline{S_{\Delta A_2A_5O}} = \frac{1}{2}\cdot A_5O\cdot A_2A_4 = \frac{1}{2}\cdot x\cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{2+\sqrt{3}}\cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 3.$$

Ответ: 3.

Ключи к решению:
– <u>свойство правильного восьмиугольника</u>;
– <u>площадь треугольника</u>;
– <u>теорема косинусов</u>.

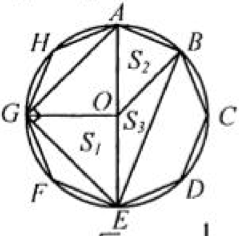
ЗАДАЧА 22

Найти периметр правильного восьмиугольника $ABCDEFGH$, если площадь четырехугольника $ABEG$ равна $8 \cdot (3 + 2\sqrt{2})$.

Решение

Пусть O – центр окружности, описанной около правильного восьмиугольника, R – радиус описанной окружности, $AB = a_8$. $P = 8 \cdot a_8$.

Найдем a_8.



1. $S_{ABEG} = S_{\Delta AGE} + S_{\Delta ABE} = S_1 + S_2 + S_3$.

$\angle AOB = 45° = \dfrac{360°}{8}$,

$\angle BOE = 135° = 3 \cdot \angle AOB$.

$\angle AOG = \angle GOE = 90° = 2 \cdot \angle AOB$,

$\angle AGE = 90°$, $\underline{AG = GE}$.

2. $AG = R\sqrt{2}$, $S_1 = \dfrac{1}{2} AG \cdot GE = \dfrac{1}{2} AG^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 2R^2 = R^2$, $\boxed{S_1 = R^2}$.

3. $S_2 = \dfrac{1}{2} AO^2 \sin 45° = \dfrac{1}{2} R^2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{2}}{4}$, $\boxed{S_2 = \dfrac{R^2\sqrt{2}}{4}}$.

4. $\underline{S_3} = \dfrac{1}{2} OB^2 \sin 135° = \underline{S_2}$.

5. $S_2 + S_3 = 2 \cdot S_2 = \dfrac{R^2\sqrt{2}}{2}$.

$R^2 + \dfrac{R^2\sqrt{2}}{2} = 8 \cdot (3 + 2\sqrt{2})$.

$R^2 = \dfrac{16(3+2\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}$.

6. <u>Найдем AB по теореме косинусов для ΔAOB</u>.

$$AB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R^2(2-\sqrt{2}) = \frac{16(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{16(3+2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 16(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 16,$$

$AB = 4$, $P = 32$.

Ответ: 32.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанасян, Л. С.* Геометрия. 7–9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций / Л. С. Атанасян [и др.]. – М. : Просвещение, 2014.

2. *Киселев, А. П.* Элементарная геометрия : книга для учителя / А. П. Киселев. – М. : Просвещение, 1980.

3. *Никулин, А. В.* Геометрия на плоскости : планиметрия : учебное пособие / А. В. Никулин ; под общ. ред. Ю. С. Татаренко. – Минск : Попурри, 1998. – (Серия «Библиотека школьника и абитуриента»).

СОДЕРЖАНИЕ

ГЕОМЕТРИЯ

7–9 классы

Опорные конспекты. Ключевые задачи

Автор-составитель
Тамара Анатольевна Лепехина

Ответственные за выпуск
Л. Е. Гринин, А. В. Перепёлкина
Редактор **А. В. Перепёлкина**
Редакторы-методисты **Л. В. Голубева, Ю. А. Киселёва**
Выпускающий редактор **И. Е. Волкова-Алексеева**
Технический редактор **Л. В. Иванова**
Редактор-корректор **Л. М. Карамышева**
Верстка **Г. Н. Куракиной**

Издательство «Учитель»
400079, г. Волгоград, ул. Кирова, 143

Подписано в печать 29.10.14. Формат 60 × 84/16
Бумага газетная. Гарнитура Тип Таймс. Печать офсетная
Усл. печ. л. 9,0. Тираж 6 000 экз. (1-й з-д 1–2 000) Заказ № 1363.

Отпечатано с оригинал-макета в ОАО «Калачевская типография».
404507, Волгоградская обл., г. Калач-на-Дону, ул. Кравченко, 7