MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Cristian Voica Mihaela Singer Mihai Sorin Stupariu

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

M4

SIGMA

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Cristian Voica Mihaela Singer Mihai Sorin Stupariu

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

M4

Filiera vocațional
- **profil pedagogic**
- **profil sportiv**

SIGMA

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educației și Culturii nr. 4742 din 21.07.2006, în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Național pentru Evaluarea și Difuzarea Manualelor și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educației și Cercetării nr. 3252 din 13.02.2006.

Referenți: *asist. univ. dr.* Marius Vlădoiu
prof. gr. I Petre Năchilă

Redactor: Dana Florina Năstase
Tehnoredactor: Camelia Cristea
Coperta: Camelia Cristea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
SINGER, MIHAELA
Matematică M4 : manual pentru clasa a XI-a / Mihaela Singer, Cristian Voica, Sorin Stupariu. - București : Sigma, 2006
Bibliogr.
ISBN (10) 973-649-260-5 ; ISBN (13) 978-973-649-260-0

I. Voica, Cristian
II. Stupariu, Sorin

51(075.35)

ISBN (10) 973-649-260-5
ISBN (13) 978-973-649-260-0

Editura SIGMA
Sediul central:
Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București, cod 010169
Tel. / fax: 021-313.96.42; 021-315.39.43; 021-315.39.70
e-mail: office@editurasigma.ro; web: www.editurasigma.ro
Distribuție:
Tel. / fax: 021-243.42.40; 021-243.40.52; 021-243.40.35
Puteți transmite comenzi folosind apelul UniTel la numerele:
080.10000.10; 080.10000.11 (în rețeaua ROMTELECOM)
e-mail: comenzi@editurasigma.ro; sigmadistrib@yahoo.com
Anticariat:
e-mail: comenzi_anticar@editurasigma.ro; web: www.anticar.ro

CUPRINS

Introducere

Toate domeniile culturii se dezvoltă în strânsă interdependență cu matematica. Matematica bine făcută oferă tehnici de gândire care permit optimizarea deciziilor în situații variate, precum și instrumente de prelucrare a informației astfel încât ceea ce este esențial să poată fi valorificat cu maximum de eficiență.

Manualul de față se adresează elevelor și elevilor din filiera vocațională, profilul pedagogic și profilul sportiv, care au alocată, prin planul de învățământ, o oră de matematică pe săptămână.

Manualul este organizat în unități de învățare. În cadrul fiecărei unități de învățare sunt derulate: secvența de familiarizare, evidențiată prin titlurile ***„Ne amintim și explorăm”*** sau ***„Observăm și explorăm”***, secvența de structurare, evidențiată prin titlul ***„Analizăm și generalizăm”*** și secvența de aplicare și transfer, evidențiată prin titlul ***„Aplicăm și dezvoltăm”.***

Fiecare unitate de învățare începe cu un test preliminar de autoevaluare, ce sintetizează cunoștințele de bază necesare pentru parcurgerea capitolului respectiv.

În corpul fiecărei unități am evidențiat etapele demersului didactic prin expresiile: **Să observăm!**, **Să comparăm!**, **Să analizăm!**, **Să aplicăm!**, **Să demonstrăm!**.

Concluziile unei etape de raționament sau de observare, finalizate printr-o propoziție generală, de tipul unei teoreme sau al unei definiții, sunt evidențiate cu ajutorul expresiei „**În general!**”.

Pentru a facilita conexiunile între conținuturile cu caracter strict matematic din lecție și aplicațiile acestora, am grupat în benzile laterale ale paginilor manualului atenționări, *exemplificări* și *exerciții* necesare în fixarea noțiunilor prezentate.

Fiecare unitate de învățare se încheie cu *o scurtă lectură*, care raportează tematica acesteia la evoluția istorică a conceptelor sau la conexiuni semnificative cu diferite domenii.

Testele de evaluare de la sfârșitul fiecărei unități oferă modalități de verificare a nivelului de achiziții în domeniul matematicii și al aplicațiilor acesteia și sunt astfel formulate încât țintesc fiecare dintre competențele avute în vedere de programa școlară.

Demersul de construcție și dezvoltare a manualului a urmărit *formarea unor competențe* care să permită identificarea relațiilor între noțiunile matematice studiate, interpretarea datelor de diverse tipuri, utilizarea unor algoritmi și concepte matematice în situații diverse, exprimarea caracteristicilor matematice ale unei situații concrete și analiza de situații-problemă în scopul optimizării soluțiilor practice. Informația conținută în programa școlară a fost structurată și detaliată astfel încât aceste deziderate să fie realizate cu succes.

Ne exprimăm speranța că manualul va oferi un instrument practic de învățare tuturor acelora care sunt dornici să înțeleagă, să explice și să acționeze eficient în lumea în care trăim.

Indică un enunț obținut prin extrapolarea unor exemple sau proprietăți particulare. Acest enunț poate fi o definiție sau o teoremă.

Acest simbol marchează secvența avută în vedere în cadrul unității de învățare.

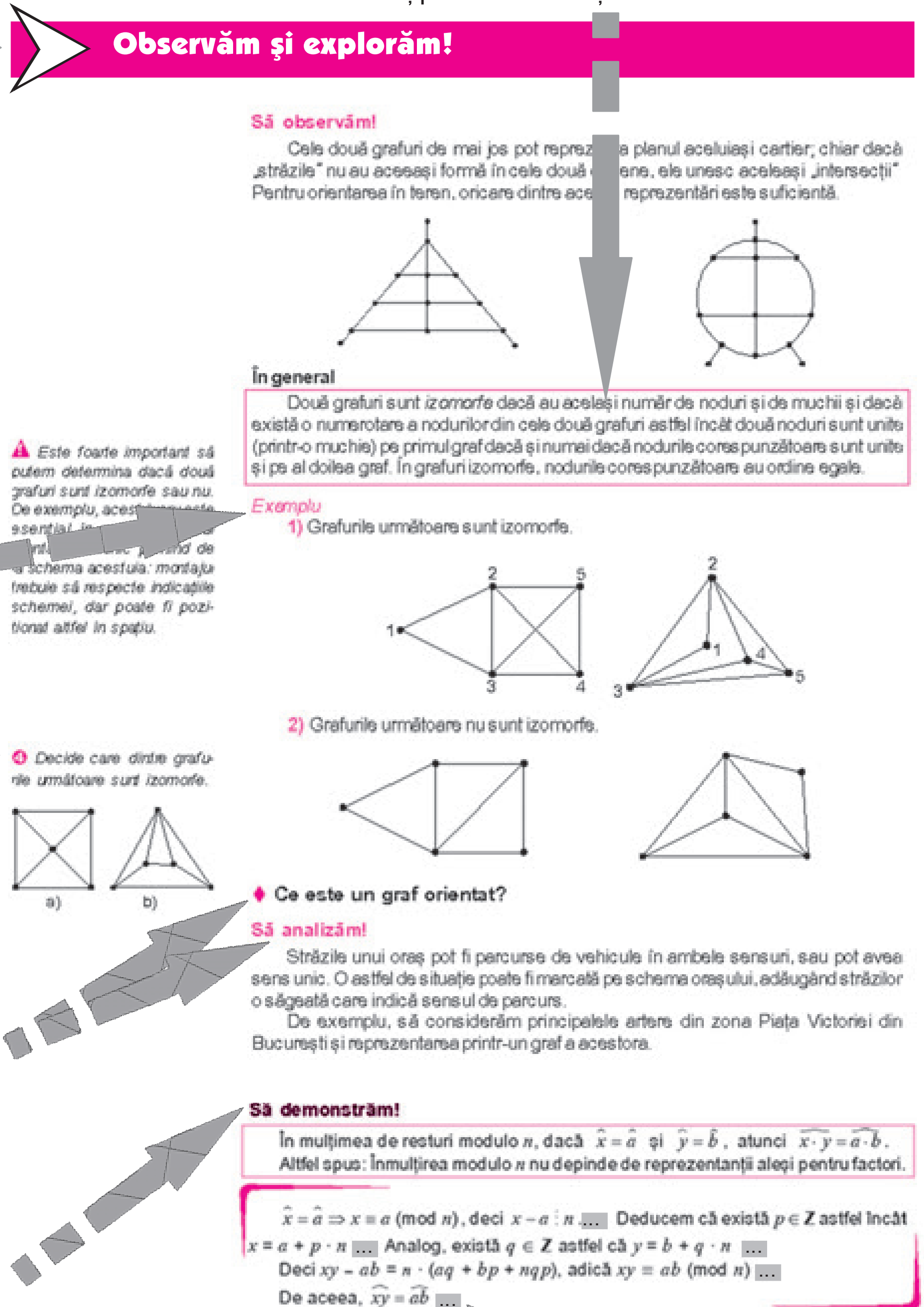
Comentariile și atenționările sunt marcate prin acest semn.

Exemplele au legătură cu noțiunile definite anterior.

Aplicațiile imediate sunt corelate cu explicațiile sau exemplele din corpul lecției, în dreptul cărora sunt situate.

Subtitlurile evidențiază etape ale demersului didactic.

Această expresie evidențiază tipul de activitate care urmează.



Observăm și explorăm!

Să observăm!

Cele două grafuri de mai jos pot reprez[illegible]a planul aceluiași cartier; chiar dacă „străzile” nu au aceeași formă în cele două [illegible]ene, ele unesc aceleași „intersecții”. Pentru orientarea în teren, oricare dintre ace[illegible] reprezentări este suficientă.

În general

Două grafuri sunt *izomorfe* dacă au același număr de noduri și de muchii și dacă există o numerotare a nodurilor din cele două grafuri astfel încât două noduri sunt unite (printr-o muchie) pe primul graf dacă și numai dacă nodurile corespunzătoare sunt unite și pe al doilea graf. În grafuri izomorfe, nodurile corespunzătoare au ordine egale.

Este foarte important să putem determina dacă două grafuri sunt izomorfe sau nu. De exemplu, aces[illegible] esențial [illegible] de [illegible] schema acestuia: montajul trebuie să respecte indicațiile schemei, dar poate fi poziționat altfel în spațiu.

Exemplu

1) Grafurile următoare sunt izomorfe.

2) Grafurile următoare nu sunt izomorfe.

Decide care dintre grafurile următoare sunt izomorfe.

a) b)

Ce este un graf orientat?

Să analizăm!

Străzile unui oraș pot fi parcurse de vehicule în ambele sensuri, sau pot avea sens unic. O astfel de situație poate fi marcată pe schema orașului, adăugând străzilor o săgeată care indică sensul de parcurs.

De exemplu, să considerăm principalele artere din zona Piața Victoriei din București și reprezentarea printr-un graf a acestora.

Să demonstrăm!

În mulțimea de resturi modulo n, dacă $\hat{x}=\hat{a}$ și $\hat{y}=\hat{b}$, atunci $\widehat{x\cdot y}=\widehat{a\cdot b}$.
Altfel spus: Înmulțirea modulo n nu depinde de reprezentanții aleși pentru factori.

$\hat{x}=\hat{a} \Rightarrow x \equiv a \pmod{n}$, deci $x-a \vdots n$ ... Deducem că există $p\in \mathbb{Z}$ astfel încât $x=a+p\cdot n$ ... Analog, există $q\in \mathbb{Z}$ astfel că $y=b+q\cdot n$ ...
Deci $xy-ab=n\cdot(aq+bp+nqp)$, adică $xy\equiv ab \pmod{n}$ ...
De aceea, $\widehat{xy}=\widehat{ab}$ ...

Simbolul atenționează asupra faptului că anumite justificări au fost omise în cadrul demonstrației. Ele trebuie formulate de către cititor, pentru a participa activ la înțelegerea textului.

Unitatea de învățare 1

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Interpretarea datelor

1. Studiază tabelul de mai jos, care prezintă câteva echipe de fotbal din divizia C și află care echipă are cele mai multe goluri marcate și care echipă are cea mai slabă apărare. Găsește echipa cu cele mai multe meciuri egale.

Loc	Echipa	*Meciuri*	*Victorii*	*Egaluri*	*Înfrângeri*	*Goluri marcate*	*Goluri primite*	*Puncte*
11.	**CSM ENA Făgăraș**	26	10	5	11	29	31	35p
12.	**CS Predeal**	26	7	7	12	23	26	28p
13.	**Mantrax Bod**	26	5	4	17	21	45	19p
14.	**CS Târgu Secuiesc**	26	2	2	22	11	56	8p

Împărțirea cu rest

2. Găsește câtul și restul în cazul în care deîmpărțitul d și împărțitorul i sunt egale cu:
a) $d = 37$; $i = 5$ b) $d = 36$; $i = 12$ c) $d = 43$; $i = 8$
d) $d = 124$; $i = 14$ e) $d = 1211$; $i = 12$ f) $d = 2424$; $i = 101$.

Divizibilitate

3. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) 24 este divizibil prin 6 b) 24 îl divide pe 6
c) 249 este divizibil prin 9 d) –5 este un divizor al lui 5.

4. Scrie divizorii întregi pentru fiecare dintre numerele: 12, 16, 30 și 100.

Calcul numeric

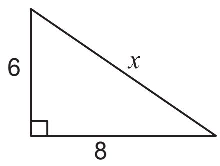
5. Efectuează:
a) $-24 + 22$ b) $(-4 + 3)\cdot(-2)$ c) $(-1 + 1)\cdot(3 - 1)$ d) $-1 + 1 \cdot 3 - 1$
e) $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)$ f) $\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}$ g) $2{,}7 - 3{,}81 + 4{,}43$ h) $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)+\frac{4}{5}:\left(1-\frac{1}{3}\right)$.

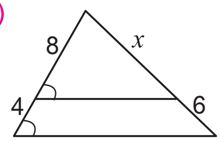
Procente

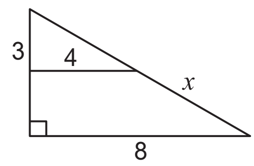
6. Calculează:
a) cât reprezintă 30% din 120.
b) cât la sută din 640 reprezintă 160.
c) cât va costa un bilet de autobuz de 1,10 lei după o scumpire de 10%.
d) care este procentul de ieftinire al unei cărți care înainte costa 24 lei, iar după ieftinire are prețul de 21 de lei.

Calcul geometric

7. Determină lungimile segmentelor marcate cu x în figurile de mai jos.

a)


b)


c)


Numere. Operații cu numere. Proprietăți

Operații cu numere în cotidian

Observăm și explorăm!

În diferite situații din viața de zi cu zi folosim, uneori fără să ne dăm seama de aceasta, proprietăți ale operațiilor cu numere.

Exemplul 1: Asociativitatea adunării

Andrei, Ionuț și Mihai vor să cumpere un cadou mamei. Andrei a economisit 6 lei, Ionuț 8 lei, iar Mihai are puși deoparte 7 lei.

Andrei a făcut următorul calcul: „Eu și Ionuț avem împreună 14 lei, dacă adăugăm cei 7 lei de la Mihai obținem 21 de lei.” Calculul făcut de Andrei a fost: $(6 + 8) + 7 = 21$. Ionuț în schimb a raționat astfel: „Andrei are 6 lei. Eu și Mihai avem împreună 15 lei, deci în total avem 21 de lei.” Calculul a fost: $6 + (8 + 7) = 21$.

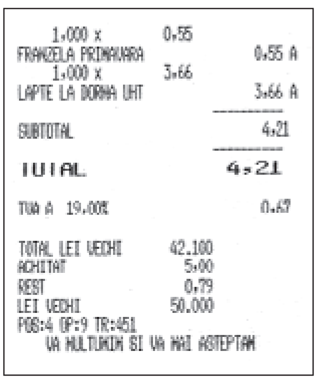
Faptul că cei doi frați au obținut aceeași sumă se datorează asociativității adunării:

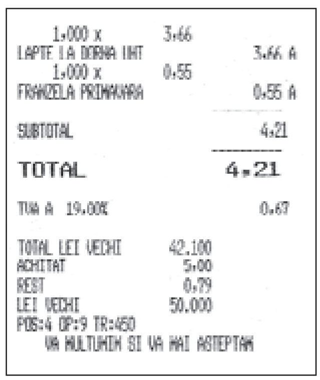
Oricare ar fi numerele a, b, c, avem: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

❶ De ce crezi că este utilizată denumirea de „asociativitate” pentru această proprietate a adunării?

Exemplul 2: Comutativitatea adunării

Doamna Vasiliu cumpără în fiecare dimineață o pâine și un litru de lapte. Comparând bonurile de casă din două zile diferite a observat că într-una din zile fusese înregistrată mai întâi pâinea, apoi laptele, iar în cealaltă zi produsele fuseseră înregistrate în ordinea inversă.


1.000 x 0.55
FRANZELA PRIMAVARA 0.55 A
1.000 x 3.66
LAPTE LA DORNA UHT 3.66 A
SUBTOTAL 4.21
TOTAL 4.21
TVA A 19.00% 0.67
TOTAL LEI VECHI 42.100
ACHITAT 5.00
REST 0.79
LEI VECHI 50.000
POS:4 OP:9 TR:451
VA MULTUMIM SI VA MAI ASTEPTAM


1.000 x 3.66
LAPTE LA DORNA UHT 3.66 A
1.000 x 0.55
FRANZELA PRIMAVARA 0.55 A
SUBTOTAL 4.21
TOTAL 4.21
TVA A 19.00% 0.67
TOTAL LEI VECHI 42.100
ACHITAT 5.00
REST 0.79
LEI VECHI 50.000
POS:4 OP:9 TR:450
VA MULTUMIM SI VA MAI ASTEPTAM

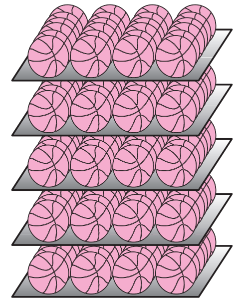
Faptul că suma obținută este aceeași se datorează comutativității adunării:

Pentru orice două numere a și b, avem: $a + b = b + a$.

❷ Ilustrează printr-un exemplu din cotidian comutativitatea înmulțirii.

Exemplul 3: Asociativitatea înmulțirii

Într-un depozit sunt așezate mingi de baschet pe 5 rafturi suprapuse. Pe fiecare raft sunt 4 rânduri și pe fiecare rând sunt câte 6 mingi. Dorel a calculat numărul total de mingi astfel: pe un raft sunt de 4 ori câte 6 mingi, deci $4 \cdot 6 = 24$ de mingi. Cum în depozit sunt 5 rafturi, rezultă un total de $5 \cdot (4 \cdot 6) = 5 \cdot 24 = 120$ de mingi. Mircea a raționat în alt mod: pe 5 rafturi avem 4 rânduri, deci în total sunt $5 \cdot 4 = 20$ de rânduri. Cum fiecare rând are câte 6 mingi, în total sunt $(5 \cdot 4) \cdot 6 = 20 \cdot 6 = 120$ de mingi.



Cei doi băieți au obținut același număr datorită asociativității înmulțirii:

Oricare ar fi numerele a, b, c, avem: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Exemplul 4: Distributivitatea înmulțirii față de adunare

Holul din apartamentul familiei Popescu are o lungime de 6 m și o lățime de 2,5 m. Familia Popescu dorește să mocheteze holul. Deoarece nu au găsit în magazin o mochetă lungă de 6 m, ei s-au mulțumit să cumpere două bucăți cu lățimea de 2,5 și cu lungimile de 2 m, respectiv 4 m. Pentru a se stabili prețul, a trebuit calculată suprafața totală a mochetei cumpărate.

❸ Cum ar fi putut proceda cei doi soți dacă ar fi găsit în magazin mochetă cu lățimea de 5 m? Realizează o schiță!

Domnul Popescu a calculat suprafața fiecărei bucăți și a adunat rezultatele:

$2{,}5 \cdot 4 + 2{,}5 \cdot 2 = 10 + 5 = 15$ (m^2)

Doamna Popescu a ținut cont, în calculul făcut, că mochetele puse cap la cap vor acoperi întregul hol și a calculat în acest mod suprafața totală:

$2{,}5 \cdot (4 + 2) = 2{,}5 \cdot 6 = 15$ (m^2).

Egalitatea rezultatelor obținute se datorează distributivității înmulțirii față de adunare:

⚠ Citită de la dreapta spre stânga, proprietatea de distributivitate evidențiază scoaterea factorului comun.

Pentru orice numere a, b, c, avem: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Să comparăm!

Proprietățile de asociativitate și comutativitate fac referire la o singură operație algebrică (adunare sau înmulțire).

Proprietatea de distributivitate „leagă” cele două operații cunoscute.

Exerciții și probleme

1. Stabilește paritatea rezultatului unui exercițiu în care se fac numai adunări și scăderi, dacă numărul termenilor impari este:
a) 7; b) 20; c) 159; d) 264; e) 775; f) 1088.

2. În exercițiul $30 \cdot 5 - 30 : 10 + 5$, adaugă paranteze pentru a obține rezultatele: a) 17; b) 142; c) 8; d) 210.

3. Înlocuiește literele cu cifre astfel încât calculul să fie corect:

a)
$$\begin{array}{r} \overline{ab} \times \\ \underline{\overline{cb}} \\ \overline{acc} \\ \underline{\overline{ab}} \\ 1501 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \overline{abc8} \times \\ \underline{4} \\ \overline{8cba} \end{array}$$

4. Adaugă paranteze astfel încât $1 + 2:3 + 4:5 + 6:7 = 1$.

5. Efectuează: a) $(11 + 22 + 33 + \ldots + 121):121$;
b) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 49 - 50 + 51$.

6. Calculează în două moduri:
$(2 + 4 + 6 + 8 + 10) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$.

7. Află numerele naturale mai mici decât 20 care împărțite la un număr de o cifră, dau restul 6.

8. Un număr este cu 84 mai mare decât altul. Împărțind suma celor două numere la diferența lor, se obține câtul 15 și restul 14. Află cele două numere.

9. Câtul împărțirii a două numere naturale este 3, iar restul 10. Adunând deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul, obținem 143. Care sunt cele două numere?

10. Efectuează:
a) $(369 : 9 + 18 \cdot 3 - 456 : 6) \cdot 0$;
b) $(9 + 11 \cdot 11 : 11 + 220) \cdot 10$;
c) $25 \cdot (160 - 30 \cdot 5 - 8) - (24 + 321 : 321)$.

11. Folosind metoda factorului comun, calculează:
a) $2 \cdot 149 + 2 \cdot 351$; b) $3 \cdot 213 + 3 \cdot 287$;
c) $7 \cdot 985 + 7 \cdot 15$; d) $5 \cdot 472 - 5 \cdot 72$;
e) $13 \cdot 133 - 13 \cdot 33$; f) $16 \cdot 379 - 16 \cdot 279$;
g) $2 \cdot 498 + 2 \cdot 373 - 2 \cdot 371$;
h) $6 \cdot 412 - 6 \cdot 327 + 6 \cdot 315$;
i) $9 \cdot 1\,029 - 9 \cdot 638 - 9 \cdot 391$.

12. Calculează folosind metoda factorului comun:
$15 \cdot 27 + 15 \cdot 23 + 15 \cdot 50$.

13. Calculează în două moduri:
a) $28 \cdot 506 + 72 \cdot 506$; b) $21:7 + 56:7 + 63:7$.

14. Folosind metoda factorului comun, calculează:
a) $107 \cdot 316 + 107 \cdot 684 - 107 \cdot 990$;
b) $(8 + 16 + 24 + 32 + 40):15$.

15. Calculează în două moduri:
a) $(2 + 4 + 6 + 8):(1 + 2 + 3 + 4)$;
b) $376 \cdot (673 \cdot 111 - 673 \cdot 11):673$.

16. Se consideră numerele: $a = 1 + 2 + 3 + \ldots + 40$ și $b = 2 + 4 + 6 + \ldots + 80$. Arată că $2 \cdot a - b = 0$.

17. Știind că $a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = 41$ și $5 \cdot a + 4 \cdot b + 3 \cdot c = 55$, determină $a + b + c$.

18. Calculează și justifică rezultatul:
a) $2007 \cdot 2008 \cdot 2009 \cdot 2010 - 2010 \cdot 2009 \cdot 2008 \cdot 2007$;
b) $2007 \cdot 2000 \cdot 1999 \cdot 1995 - 2000 \cdot 1995 \cdot 1999 \cdot 2007$;
c) $74 \cdot 46 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 42 \cdot 56 - 37 \cdot 46 \cdot 21 \cdot 72 \cdot 98 \cdot 56$.

19. Calculează $12\,345\,679 \cdot 9$. Folosind rezultatul, determină numărul natural x astfel încât:
a) $12\,345\,679 \cdot x = 333\,333\,333$;
b) $12\,345\,679 \cdot x = 444\,444\,444$;
c) $12\,345\,679 \cdot x = 222\,222\,222$;
d) $12\,345\,679 \cdot x = 555\,555\,555$.

Analizăm și înțelegem!

Să ne amintim!

Mulțimile de numere întâlnite în clasele anterioare sunt: mulțimea numerelor naturale (notată cu $\mathbb{N}$), mulțimea numerelor întregi ($\mathbb{Z}$), mulțimea numerelor raționale ($\mathbb{Q}$) și mulțimea numerelor reale ($\mathbb{R}$).

♦ Mulțimea numerelor naturale

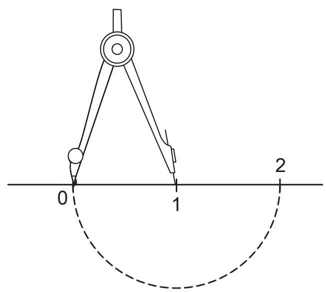
Numerele naturale 0, 1, 2, 3, ... sunt folosite în mod curent pentru a exprima de câte ori se repetă o anumită cantitate, câte obiecte avem ș.a.m.d.

Numerele naturale se reprezintă pe axa numerelor. Aceasta este o dreaptă pe care am fixat o origine, un sens și o unitate de măsură. Pe această axă, numerele naturale sunt așezate în ordine crescătoare în sensul pe care l-am ales, astfel încât 0 să corespundă originii. Pentru $n \geqslant 1$, numărul n este așezat față de $(n - 1)$ la distanța dată de unitatea de măsură fixată.

⚠ Numerele naturale se reprezintă, de fapt, pe o semidreaptă.

Putem reprezenta un număr natural pe axă fie cu ajutorul unei rigle gradate, fie cu o riglă negradată și cu un compas. În acest din urmă caz procedăm astfel:

• Potrivim compasul astfel încât deschiderea sa să coincidă cu unitatea de măsură.
• Așezăm compasul cu vârful în origine și, în sensul pe care l-am ales, construim numărul 1.
• Potrivind acum vârful compasului în punctul corespunzător lui 1, obținem numărul 2, într-un mod analog.
• Pas cu pas, construim numerele naturale la rând, până când ajungem la numărul dorit.



❶ Reprezintă pe axă numărul 6. Poți face această reprezentare utilizând compasul numai de 3 ori? (Fără a folosi rigla gradată!)

♦ Mulțimea numerelor întregi

Uneori, numerele naturale nu sunt suficiente pentru a descrie o anumită situație.

❷ Explică semnificația numerelor negative din tabelul de mai jos.

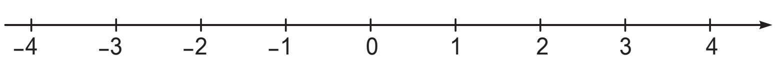
Să analizăm!

În campionatul de fotbal al Diviziei C, echipa „ASA Tg. Mureș” a marcat 42 de goluri și a primit 26, iar echipa „CS Predeal” a marcat 23 de goluri și a primit 26. Pentru a diferenția între cele două cazuri, spunem că prima echipă are golaveraj pozitiv, + 16, iar cea de-a doua are golaveraj negativ, –3. Am folosit, pe lângă numerele naturale 42, 26, 23 și numărul negativ –3.

Numerele negative pot fi și ele reprezentate pe axă. Mai precis, ele sunt așezate astfel încât $-n$ și n să fie simetrice față de origine, pentru orice număr natural n.

Divizia C. Clasamentul final al seriei C8

Loc	Echipa	*Meciuri*	*Victorii*	*Egaluri*	*Înfrângeri*	*Goluri marcate*	*Goluri primite*	*Puncte*	*Adevăr*
1.	Forex Brașov	26	19	3	4	51	13	60p	+21
2.	ASA Tg. Mureș	26	15	5	6	42	26	50p	+11
3.	Mureșul Luduș	26	12	6	8	31	26	42p	+3
4.	Tractorul Brașov	26	12	4	10	39	31	40p	+1
5.	Chimica Târnăveni	26	11	7	8	34	26	40p	+1
6.	Avântul Reghin	26	12	3	11	27	24	39p	0
7.	Transkurier Sf. Gheorghe	26	10	8	8	25	20	38p	–1
8.	Mobila Sovata	26	10	7	9	31	37	37p	–2
9.	Gaz Metan Tg. Mureș	26	10	7	9	29	28	37p	–2
10.	Unirea Ungheni	26	11	4	11	34	38	37p	–2
11.	CSM ENA Făgăraș	26	10	5	11	29	31	35p	–4
12.	CS Predeal	26	7	7	12	23	26	28p	–11



❸ Marchează pe axă numărul –4, folosind o riglă negradată și un compas.

♦ Mulțimea numerelor raționale

Atunci când trebuie să lucrăm cu părți ale unui întreg, folosim numerele raționale. Acestea pot fi reprezentate în două moduri, pe care le descriem în continuare.

◇ *Reprezentarea numerelor raționale ca fracții*

Putem scrie numerele raționale sub formă de fracție de tipul $\frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Să analizăm!

Un stadion are 25 000 de locuri, din care 5 000 la tribuna I, 10 000 la tribuna a II-a și 10 000 la peluză. Aceasta înseamnă că $\frac{1}{5}$ din locurile stadionului sunt cele de la tribuna I, $\frac{2}{5}$ sunt cele de la tribuna a II-a și tot $\frac{2}{5}$ din capacitatea stadionului este reprezentată de locurile de la peluză.

Administratorul stadionului a comunicat această informație, spunând că 40% din locuri sunt la tribuna a II-a: $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$.

Să reținem!

Două fracții $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ (cu $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $q \neq 0$) sunt *echivalente* dacă $m \cdot q = n \cdot p$. Fracțiile echivalente reprezintă același număr rațional. Două numere raționale sunt egale dacă sunt reprezentate prin fracții echivalente.

❹ *Găsește numerele raționale egale cu $\frac{3}{2}$, din șirul:* $\frac{6}{4}, \frac{-12}{-8}, \frac{9}{4}, \frac{2}{3}$.

Exemplu

Fracțiile $\frac{2}{6}$ și $\frac{1}{3}$ sunt echivalente, așa cum se observă și pe desen.

Numerele $\frac{-2}{4}$ și $\frac{5}{-10}$ sunt egale, în timp ce numerele $\frac{-1}{-2}$ și $\frac{-1}{2}$ nu sunt egale.

◇ *Cum obținem fracții echivalente?*

❺ *Amplifică fracția $\frac{2}{3}$ cu 2, cu −1 și cu 4.*

❻ *De ce sunt fracțiile $\frac{a \cdot m}{a \cdot n}$ și $\frac{m}{n}$ echivalente?*

❼ *Simplifică fracția $\frac{-12}{18}$ prin 2, 3 și −6!*

❽ *Poți simplifica fracția $\frac{4}{5}$? De ce?*

Dacă înmulțim atât numărătorul, cât și numitorul fracției $\frac{m}{n}$ cu numărul întreg $a \neq 0$, obținem fracția $\frac{a \cdot m}{a \cdot n}$, care este echivalentă cu $\frac{m}{n}$. Spunem că am *amplificat* fracția $\frac{m}{n}$ cu a. Scriem aceasta $^{a)}\frac{m}{n} = \frac{am}{an}$.

Invers, să presupunem că $\frac{m}{n}$ este o fracție în care atât numărătorul, cât și numitorul sunt divizibile prin numărul întreg d, adică există m' și $n' \in \mathbb{Z}$, cu $m = d \cdot m'$ și $n = d \cdot n'$. Fracțiile $\frac{m}{n}$ și $\frac{m'}{n'}$ sunt echivalente. În acest caz, am *simplificat* fracția $\frac{m}{n}$ prin d și scriem $\frac{m}{n}^{(d} = \frac{m'}{n'}$.

Exemplu

Să considerăm fracția $\frac{30}{348}$. 30 și 348 sunt divizibile prin 2, deci $\frac{30}{348}^{(2} = \frac{15}{174}$. Mai departe, 15, și 174 sunt divizibile prin 3. Putem simplifica și avem $\frac{15}{174}^{(3} = \frac{5}{58}$, deci $\frac{30}{348} = \frac{5}{58}$. Această ultimă fracție nu mai poate fi simplificată (decât prin 1 sau −1), deoarece 5 nu este divizor al lui 58.

⚠ *O fracție care nu mai poate fi simplificată (decât prin ±1) se numește ireductibilă.*

În general

Pentru orice fracție $\frac{m}{n}$ găsim, după simplificări succesive, o fracție $\frac{m'}{n'}$ echivalentă cu $\frac{m}{n}$ și care nu mai poate fi simplificată (decât prin 1 sau −1).

Uneori, este utilă *scoaterea întregilor din fracție*. Aplicând teorema împărțirii cu rest, putem scrie numărătorul m sub forma $m = n \cdot q + r$, unde $q \in \mathbb{N}$ este câtul, iar $r \in \{0, 1, ..., n-1\}$ este restul împărțirii lui m la n. Obținem $\frac{m}{n} = q\frac{r}{n}$.

Exemplu $\frac{40}{21} = 1\frac{19}{21}$; $\frac{-55}{-17}^{(-1} = \frac{55}{17} = 3\frac{4}{17}$; $\frac{-40}{21} = (-1)\cdot\frac{40}{21} = -\left(1+\frac{19}{21}\right) = -1\frac{19}{21}$.

De asemenea, poate fi utilă *introducerea întregilor în fracție*.

Exemplu $2\frac{4}{11} = 2 + \frac{4}{11} \overset{11)}{=} \frac{2}{1} + \frac{4}{11} = \frac{26}{11}$.

◇ ***Reprezentarea numerelor raționale sub formă zecimală***

Putem scrie numerele raționale sub formă zecimală (cu virgulă). Întâlnim trei tipuri de astfel de scrieri:

a) finite: 0,25; −1,752; 3,443;
b) periodice simple: 1,(3); 2,(24); −6,(5);
c) periodice mixte: 2,41(2); −3,12(3); 5,223(2).

Numerele zecimale sunt utile atunci când lucrăm cu unități de măsură și cu multipli și submultipli ai acestora.

Exemple

1 m = 0,1 dam = 0,01 hm = 0,001 km
1 ban = 0,01 lei.

◇ ***Cum trecem de la o formă de reprezentare la alta?***

Întrucât folosind înmulțirea cu −1 putem schimba semnul unei fracții, în exemplele de transformări lucrăm cu fracții în care atât numărătorul cât și numitorul sunt pozitive.

Trecerea din formă fracționară în formă zecimală se face împărțind numărătorul fracției la numitorul acesteia.

Exemple

$\frac{2}{25} = 0{,}08$

```
2   |25
0   |0,08
20
 0
200
200
===
```

$\frac{2}{3} = 0,(6)$

```
2  |3
0  |0,66...
20
18
=20
 18
 =2
```

Observăm că deîmpărțitul 20, câtul 6 și restul 2 se repetă. Aceasta înseamnă că obținem perioada 6.

$\frac{31}{12} = 2{,}58(3)$

```
31 |12
24 |2,5833...
=70
 60
 100
  96
 ==40
   36
  ==40
    36
    =4
```

Observăm că deîmpărțitul 40, câtul 3 și restul 4 se repetă, ceea ce înseamnă că am obținut o fracție mixtă cu perioada 3.

Orice număr zecimal poate fi scris sub formă fracționară. Pentru cele trei tipuri de numere zecimale există trei algoritmi diferiți de transformare.

Exemplul 1: Numere zecimale cu scriere finită

$1{,}254 = 1\frac{254}{1000} = \frac{1254}{1000}^{(2} = \frac{627}{500}$.

9 *Găsește fracții egale cu $\frac{20}{36}$ și $\frac{-48}{90}$ care nu mai pot fi simplificate.*

10 *Explică deosebirile dintre diferitele tipuri de numere zecimale.*

⚠ *Orice număr întreg se poate scrie în formă zecimală dacă adăugăm după virgulă numai cifre de 0. De exemplu, 29 = 29,0 = 29,00.*

⚠ *Dacă la o fracție zecimală finită adăugăm zerouri după cifrele semnificative de după virgulă, atunci valoarea acesteia nu se schimbă. De exemplu: 3,413 = 3,41300.*

11 *Scrie sub formă zecimală fracțiile:*

$\frac{27}{20}, \frac{9}{13}, \frac{43}{15}, \frac{-17}{40}, \frac{8}{-7}$ *și* $\frac{-1}{14}$.

12 *Verifică faptul că $\frac{627}{500}$ are forma zecimală 1,254.*

Exemplul 2: Numere periodice simple

numărul format cu cifrele din perioadă

1) $2,(12) = 2\frac{12}{99} = \frac{210^{(3}}{99} = \frac{70}{33}$;   2) $3,(4) = 3\frac{4}{9} = \frac{31}{9}$.

o cifră în perioadă

Exemplul 3: Numere periodice mixte

numărul format cu cifrele din afara perioadei

$$0,12(3) = \frac{123 - 12}{900} = \frac{111^{(3}}{900} = \frac{37}{300}$$

o cifră în perioadă   2 cifre în afara perioadei

13 *Observă exemplele și formulează reguli de transformare.*

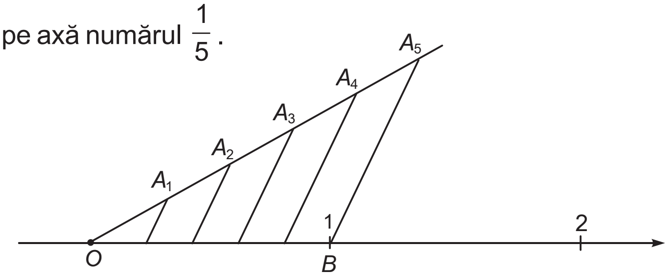
14 *Efectuează transformările inverse!*

◇ ***Cum reprezentăm numerele raționale pe axa numerelor?***

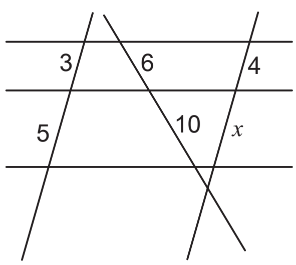
Am văzut că numerele întregi pot fi reprezentate pe axa numerelor. Cum putem include și mulțimea numerelor raționale pe aceeași axă?

Să analizăm!

Vrem să reprezentăm pe axă numărul $\frac{1}{5}$.



15 *În figura de mai jos, dreptele orizontale sunt paralele. Compară rapoartele segmentelor determinate de aceste drepte pe cele trei secante, apoi calculează x.*



Pentru aceasta, ducem prin O o semidreaptă distinctă de axa numerelor. Pe această semidreaptă, construim segmente de lungimi egale, pornind din O:

$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$.

Unim A_5 cu punctul B, corespunzător lui 1. Ducem prin A_1, A_2, A_3 și A_4 paralele la dreapta A_5B. În acest fel, am împărțit segmentul OB, de lungime 1, în 5 segmente egale, de lungime $\frac{1}{5}$.

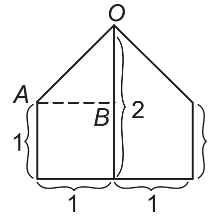
♦ **Mulțimea numerelor reale**

Anumite probleme concrete au condus la utilizarea unor numere care nu sunt raționale. A apărut în acest fel necesitatea introducerii unei mulțimi mai largi de numere, aceea a numerelor reale, notată cu $\mathbb{R}$.

16 *Reprezintă pe axă numerele $2\frac{3}{4}, \frac{14}{5}, -\frac{8}{5}$.*

Exemplul 1

Domnul Popescu vrea să își construiască în grădină o mică seră. Pentru construcția ei, va realiza întâi o structură metalică. În centru va așeza țăruși verticali de 2 m, la margini țăruși cu înălțimea de 1 m, iar lățimea serei va fi de 2 m. Domnul Popescu a realizat o schiță cu profilul serei pentru a calcula dimensiunea barelor oblice care urmează să sprijine acoperișul. A determinat mai întâi lungimea segmentului OB, care este 2 − 1 = 1 (m) și pe cea a segmentului AB, egal cu jumătate din lățimea serei, de 1 m.



Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul OAB, a obținut: $OA^2 = OB^2 + AB^2$, deci $OA^2 = 2$.

Domnul Popescu și-a dat seama că, pentru a realiza traversa oblică are nevoie de o bară cu lungimea de $\sqrt{2}$ m. Utilizând calculatorul, a aflat că $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$; domnul Popescu a decis să utilizeze o bară de 1,42 m pentru realizarea acoperișului serei.

Să demonstrăm!

$\sqrt{2}$ nu este număr rațional.

Dacă, prin absurd, $\sqrt{2}$ ar fi număr rațional, el ar putea fi scris sub formă de fracție ireductibilă, adică $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, m și n prime între ele).

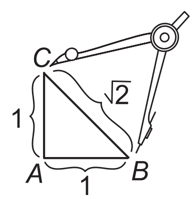
Prin ridicare la pătrat am obține $2 = \frac{m^2}{n^2}$, deci $m^2 = 2n^2$. Aceasta ar însemna că m este număr par, deci $m = 2l$, cu $l \in \mathbb{Z}$. Înlocuim m în egalitatea $m^2 = 2n^2$ și deducem $4l^2 = 2n^2$, așadar $n^2 = 2l^2$. Acestă relație ne conduce la concluzia că și n este număr par. Dar atunci fracția $\frac{m}{n}$ se poate simplifica cu 2, ceea ce contrazice ipoteza făcută.

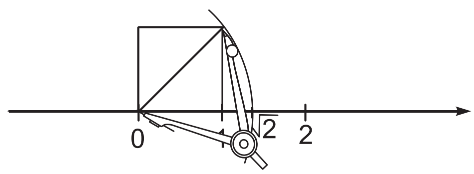
Numărul $\sqrt{2}$ este un număr irațional. El poate fi reprezentat pe axa numerelor cu rigla și compasul astfel:

– construim un triunghi dreptunghic isoscel ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) având catetele egale cu unitatea de măsură;

– pe axa numerelor măsurăm, cu ajutorul compasului, un segment cu unul din capete în origine și cu celălalt pe semidreapta pe care sunt situate numerele pozitive, astfel încât lungimea sa să fie egală cu lungimea ipotenuzei BC a triunghiului construit anterior.

17 Demonstrează că $\sqrt{5}$ este număr irațional. Stabilește dacă $\sqrt{5}$ poate fi reprezentat pe axa numerelor cu rigla și compasul și, în caz afirmativ, explică modul de reprezentare!



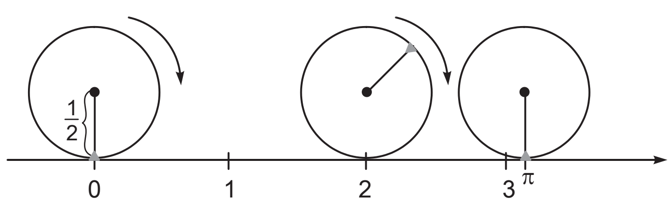


Exemplul 2

Încă din Antichitate s-a observat că raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul acestuia nu depinde de cercul ales (fiind așadar același pentru toate cercurile considerate). Valoarea acestui raport a fost notată cu π. În calcule, folosim pentru π diverse aproximări. De obicei, aproximăm π cu 3,14.

Se știe că numărul π **nu** poate fi construit cu rigla și compasul pe axa numerelor. Singurul mod în care putem „vizualiza” numărul π pe axă este să „rostogolim” (fără frecare) un cerc de rază $\frac{1}{2}$.

Pe site-ul http://www.zenwerx.com/pi.php pot fi vizualizate primele 4 milioane de cifre de după virgulă ale lui π.



18 De ce acest cerc trebuie să aibă raza $\frac{1}{2}$?

Așezând cercul în origine și apoi rostogolindu-l în sensul ales pe axă, punctul care inițial se afla în origine, la încheierea unei rotații complete se va găsi în dreptul numărului π.

În general

Nu orice număr real poate fi reprezentat pe axă cu rigla și compasul. Totuși, fiecărui număr real îi corespunde un punct de pe axa numerelor și reciproc. Am „completat” în acest fel axa numerelor, obținând o corespondență între mulțimea $\mathbb{R}$ și punctele unei drepte.

Să reținem!

În continuare, facem câteva precizări privind reprezentarea numerelor reale. Am văzut că pentru numerele raționale avem trei modalități de scriere în formă zecimală (finită, periodică simplă, periodică mixtă). Ceea ce caracterizează numerele iraționale este faptul că zecimalele de după virgulă nu se repetă periodic.

Spre exemplu, în cazul numărului 1,23(456), a treia, a șasea, a noua, ... cifră de după virgulă este 4; a patra, a șaptea, ... cifră este 5 ș.a.m.d. Datorită periodicității, știm exact ce cifră urmează în scrierea numărului rațional considerat.

În cazul unui număr irațional, chiar dacă știm regula de succesiune a cifrelor de după virgulă, numărul nu este periodic. Putem însă lucra cu aproximări zecimale ale unui astfel de număr. De asemenea, există diferite formule prin care se exprimă cu precizie numere reale. Câteva exemple de acest fel apar în lectura de la pagina 21.

19 Observă modul în care se succed zecimalele numărului 0,123456789101112.... Este rațional acest număr?

♦ Interpretarea operațiilor cu numere folosind operațiile cu vectori

Fiecărui număr real a îi corespunde un punct A de pe axă și reciproc.

20 Ce se poate spune despre segmentul OA când $a = 0$?

Prin definiție, modulul numărului a este egal cu lungimea segmentului [OA] și este notat cu $|a|$. Caracterizăm numărul a prin vectorul $\overrightarrow{OA}$.

Vom arăta în continuare ce legătură există între operațiile cu numere reale și operațiile cu vectori.

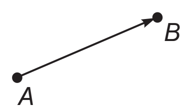
⚠ Modulul oricărui număr real este un număr pozitiv sau 0.

⚠ Vectorul $\overrightarrow{AA}$ se numește vector nul și este notat cu $\vec{0}$.

Să ne amintim!

◇ *Vectori*

Orice două puncte A, B (nu neapărat distincte) determină un *vector*, notat $\overrightarrow{AB}$. Punctul A se numește originea vectorului $\overrightarrow{AB}$, iar punctul B se numește vârful lui $\overrightarrow{AB}$.



Fiecărui vector nenul îi asociem direcția, sensul și lungimea sa.

Doi vectori $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sunt egali dacă mijlocul segmentului [AD] coincide cu mijlocul segmentului [BC].

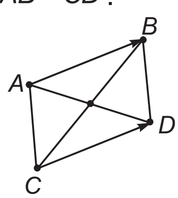
21 Ce legătură există între modulul unui număr real a și lungimea vectorului $\overrightarrow{OA}$ asociat pe axă?

22 Cum sunt sensurile vectorilor $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ dacă A îi corespunde unui număr pozitiv, iar B unui număr negativ?

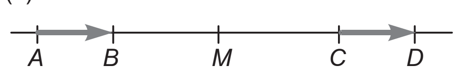
Exemple

În fiecare dintre desenele de mai jos sunt reprezentate puncte A, B, C, D pentru care avem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

(1)



(2)

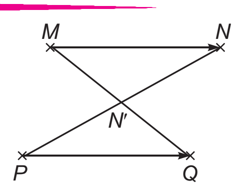


23 Găsește în figurile alăturate și alte perechi de vectori egali!

Să demonstrăm!

Pentru orice vector $\overrightarrow{MN}$ și pentru orice punct P, există un unic punct Q astfel încât $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

24 Construiește punctul Q în cazul în care N = P.



Punctul Q se obține astfel: se construiește mai întâi mijlocul N' al segmentului NP, iar punctul Q căutat este simetricul lui M față de N' ...

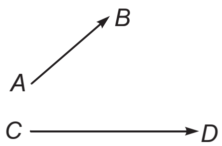
25 Completează demonstrația alăturată.

Reprezintă situația în care punctele M, N și P sunt coliniare. Se păstrează enunțul?

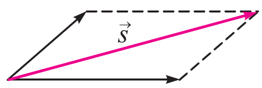
◇ ***Suma vectorilor***

Să ne amintim!

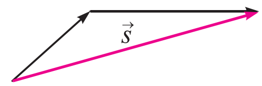
Suma a doi vectori se calculează cu regula paralelogramului sau cu regula triunghiului.



Fiind dați vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$, calculăm $\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

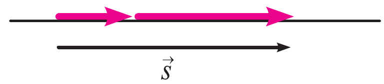


Regula paralelogramului: Transportăm unul din vectori cu originea în originea celuilalt. Suma vectorilor ($\vec{s}$) este diagonala (orientată) paralelogramului format.



Regula triunghiului: Transportăm unul din vectori cu originea în vârful celuilalt. Suma vectorilor ($\vec{s}$) este cea de-a treia latură (orientată) a triunghiului.

Fiind dați vectorii coliniari $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$, calculăm $\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.



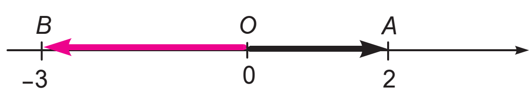
Aplicăm regula triunghiului (se va obține un triunghi alungit!).

❻ *Se poate aplica regula paralelogramului pentru suma a doi vectori coliniari?*

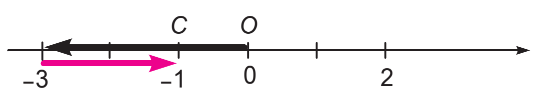
❼ *Reprezintă suma vectorilor din desen. (Cele două segmente orientate au aceeași lungime.)*

Să observăm!

Considerăm pe axa numerelor punctele *A* și *B* corespunzătoare numerelor 2 și −3, precum și vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.



Suma 2 + (−3) este egală cu −1, iar suma vectorilor $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ este egală cu vectorul $\overrightarrow{OC}$, unde *C* este punctul asociat numărului −1.



În general

Dacă a și b sunt numere reale, iar *A* și *B* sunt punctele corespunzătoare de pe axă, atunci numărului $a + b$ îi corespunde pe axă punctul *C* pentru care:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

❽ *Ilustrează printr-un desen adunarea a două numere negative alese de tine.*

Să analizăm!

1) Dacă numerele a și b au același semn, punctele *A* și *B* sunt de aceeași parte a lui *O*. Numărul $a + b$ are același semn cu a și cu b, iar modulul lui $a + b$ este egal cu suma modulelor lui a și b.

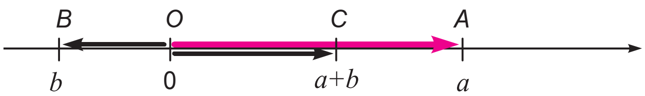
$|a+b| = |a| + |b|$.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.

❾ *Explică ce se întâmplă în cazul în care $b = -a$.*

30 *Folosește operațiile cu vectori pentru a explica semnul sumei.*

2) Dacă numerele a și b au semne contrare, punctele *A* și *B* sunt de o parte și de alta a lui *O* pe axa numerelor. Să presupunem că $b \neq -a$, adică *A* și *B* nu sunt simetrice față de *O*. În acest caz, semnul lui $a+b$ este egal cu semnul aceluia dintre numerele a și b, care are modulul mai mare. Această regulă poate fi explicată cu ușurință cu ajutorul adunării vectorilor:



◇ *Înmulțirea vectorilor cu scalari*

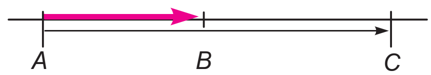
31 *Explică ce se întâmplă în cazul în care scalarul λ este egal cu zero.*

Să ne amintim!

Produsul dintre un scalar λ și un vector $\overrightarrow{AB}$ este egal cu vectorul $\overrightarrow{AC}$, obținut astfel:

1) Dacă $\overrightarrow{AB} = 0$, atunci $\overrightarrow{AC} = 0$.

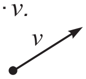
2) Dacă $\overrightarrow{AB} \neq 0$, folosim următoarea regulă:



În cazul în care scalarul λ este pozitiv, punctul *C* se află pe dreapta *AB*, de aceeași parte a lui *A* ca și *B* și $AC = \lambda \cdot AB$.

În cazul în care scalarul λ este negativ, punctul *C* se află pe dreapta *AB*, astfel încât *B* și *C* să fie de o parte și de alta a lui *A* și $AC = |\lambda| \cdot AB = -\lambda \cdot AB$.

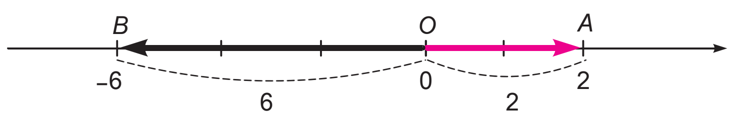
32 *Fiind dat vectorul v, de mai jos, desenează vectorii $2 \cdot v$ și $-3 \cdot v$.*



Să observăm!

Considerăm pe axa numerelor punctul *A* corespunzător numărului 2 și vectorul asociat $\overrightarrow{OA}$. Produsul $(-3) \cdot 2$ este egal cu -6. Pe de altă parte, înmulțind scalarul (-3) cu vectorul $\overrightarrow{OA}$ se obține vectorul $\overrightarrow{OB}$, unde *B* este punctul asociat numărului -6.

⚠ *Același rezultat se obține înmulțind scalarul 2 cu vectorul de poziție al numărului −3. Realizează un desen care să ilustreze această afirmație.*



În general

Dacă λ și a sunt numere reale, iar *A* este punctul de pe axă corespunzător lui a, atunci numărului $\lambda \cdot a$ îi corespunde pe axă punctul *B* pentru care $\lambda \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

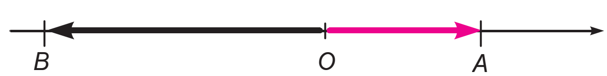
Să analizăm!

Interpretăm regula semnelor pe care o folosim la înmulțirea numerelor cu ajutorul înmulțirii vectorilor cu scalari.

1) Produsul dintre două numere pozitive este un număr pozitiv: „(+) · (+) = (+)". Altfel spus, înmulțind cu un scalar pozitiv un vector al cărui sens coincide cu cel al axei numerelor, se obține un vector cu același sens, deci corespunzător unui număr pozitiv.

33 *Interpretează cu ajutorul înmulțirii cu scalari regulile „(+) · (–) = (–)" și „(–) · (–) = (+)".*

2) Produsul dintre un număr negativ și un număr pozitiv este un număr negativ: „(–) · (+) = (–)". Altfel spus, înmulțind cu un scalar negativ un vector al cărui sens coincide cu cel al axei numerelor, se obține un vector având sens opus, deci corespunzător unui număr negativ.



♦ Proprietățile operațiilor cu numere reale

Următoarele proprietăți caracterizează operațiile cu numerele reale:

Adunarea		*Înmulțirea*
$a+b=b+a$	Comutativitate	$a\cdot b=b\cdot a$
$(a+b)+c=a+(b+c)$	Asociativitate	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
$a+0=a$	0 este element neutru. / 1 este element neutru.	$a\cdot 1=a$
$a+(-a)=0$	Fiecare număr are un opus. / Fiecare număr nenul are un invers.	$a\cdot\frac{1}{a}=1,\ a\neq 0$

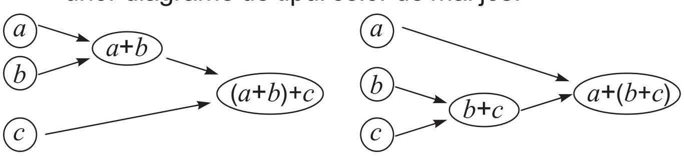
Distributivitatea înmulțirii față de adunare

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

34 *Explică schemele alăturate.*

Exerciții și probleme

1. Putem interpreta asociativitatea adunării cu ajutorul unor diagrame de tipul celor de mai jos:



$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

a) Reprezintă în același mod, distributivitatea înmulțirii față de adunare.
b) Analizează diagrama și stabilește câte operații se efectuează pentru a calcula $a\cdot(b+c)$, respectiv $a\cdot b+a\cdot c$.

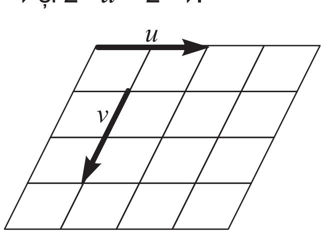
2. Reprezintă pe axă numerele:
$3;\ \ -2;\ \ \frac{3}{4};\ \ -\frac{1}{3};\ \ \sqrt{3};\ \ -\sqrt{5}$.

3. Scrie în formă zecimală numerele raționale:
a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{41}{9}$; c) $\frac{35}{18}$.

4. Scrie în formă fracționară numerele zecimale:
a) 1,(27); b) 0,3(6); c) 0,42; d) 2,1(3).

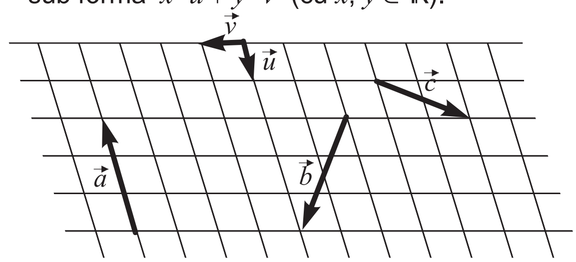
5. Arată că numărul $\sqrt{3}$ nu este rațional.

6. Reprezintă vectorii $u+v$ și $u-v$, folosind desenul alăturat. Reprezintă apoi vectorii $2\cdot u$, $2\cdot v$ și $2\cdot u+2\cdot v$.



7. Interpretează următoarele calcule, folosind reprezentarea pe axă și vectori.
a) $(-2)+(-3)=-5$; c) $2\cdot(-3)=-6$;
b) $(-4)+1=-3$; d) $(-5)\cdot(-2)=10$.

8. Exprimă vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$ din desenul alăturat sub forma $x\cdot\vec{u}+y\cdot\vec{v}$ (cu $x, y\in\mathbb{R}$).



9. Calculează în două moduri:
a) $(-2)+(-1)+0+1+2$;
b) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4$.

10. a) Adrian i-a explicat Corinei regula semnelor astfel: Semnul „+" înseamnă „prieten", iar semnul „–" înseamnă „dușman". De aceea, regula „+ · + = +" se traduce prin „prietenul prietenului meu este prietenul meu". Verifică această modalitate mnemotehnică pentru încă un caz.
b) La adunare, semnul este dat de termenul „cel mai tare". Inventează o poveste despre această regulă!

11. Folosește asociativitatea adunării și explică modul de calcul al unei sume în care apar atât termeni pozitivi, cât și termeni negativi. Construiește un exemplu.

12. Calculează, utilizând eventual un minicalculator:
0,243 · (–2,37); –5,1234 + 2,81.

Aplicații ale proprietăților operațiilor

Aplicăm și dezvoltăm!

♦ Calculul bugetului personal

Când calculăm bilanțul bugetului personal, asociem de obicei numere pozitive pentru venituri și numere negative pentru cheltuieli. În consecință, la calculul bilanțului trebuie să ținem cont de regula semnelor de la adunarea numerelor.

În contabilitate, semnele matematice „–” și „+” sunt înlocuite de cuvintele credit, respectiv debit.

Exemplu

Familia Popescu a alcătuit un tabel cu veniturile și cheltuielile realizate în primele trei luni ale anului:

Luna	Venituri	Cheltuieli	Bilanţ
ianuarie	2000	2100	–100
februarie	2150	2200	–50
martie	2150	2000	150

1 Care este bilanțul familiei Popescu după primul trimestru? Completează tabelul cu următoarele rezultate: totalul veniturilor; totalul cheltuielilor; bilanțul la finalul trimestrului.

Ce proprietăți ale adunării numerelor reale folosești pentru a verifica rezultatele?

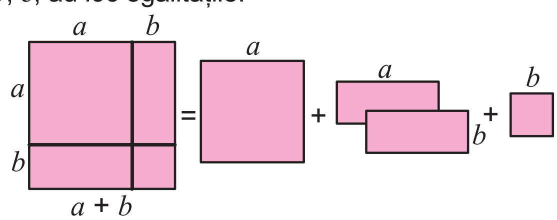
Astfel, în primele două luni cheltuielile au fost mai mari decât veniturile, înregistrându-se un bilanț negativ: membrii familiei au beneficiat de posibilitățile de creditare date de cardul de salarii. În cea de-a treia lună, situația s-a inversat, obținându-se un bilanț pozitiv.

♦ Formule de calcul prescurtat. Calcul rapid

Să ne amintim!

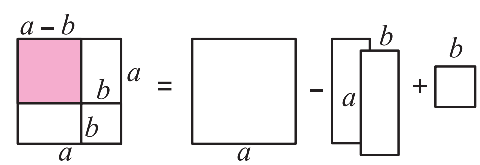
Pentru orice trei numere a, b, c, au loc egalitățile:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



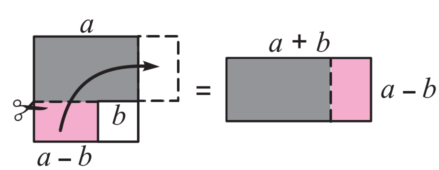
2 Observă desenele și interpretează cu ajutorul lor formulele de calcul rapid.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



3 Demonstrează algebric formulele de calcul rapid și stabilește ce proprietăți ale operațiilor cu numere se folosesc.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$



Aceste formule pot fi utile în efectuarea mai rapidă a unor calcule. Spre exemplu, pentru a calcula pătratul unui număr, poate fi mai convenabil ca în locul calculului direct să scriem numărul dat ca sumă a două numere și apoi să folosim formula de dezvoltare de mai sus.

Exemple

1) $(1001)^2 = (1000 + 1)^2 = 1000^2 + 2 \cdot 1000 + 1 = 1000000 + 2000 + 1 = 1002001$

2) $99^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$

3) $2006^2 - 2005^2 = (2006 + 2005)(2006 - 2005) = 4011.$

♦ Rezolvări de inecuații

Regula semnelor folosită la înmulțire este utilă și în rezolvarea unor inecuații.

Exemplu

Să găsim mulțimea numerelor x care verifică inecuația $(x-1)(x+2)>0$.

Pentru aceasta, realizăm un tabel în care scriem semnele celor doi factori, $x-1$ și $x+2$ și apoi stabilim semnul produsului:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$ $+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$ $-$	0	$+$ $+$	$+$		$+$
$(x-1)(x+2)$	$+$	$+$	0	$-$ $-$	0	$+$ $+$	$+$

Din tabel, observăm că pentru $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ expresia $(x-1)(x+2)$ este pozitivă, așadar mulțimea căutată este $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

❹ *Amintește-ți și explică semnificația fiecărui element din tabel.*

❺ *Rezolvă inecuațiile:*
$(x+1)(x-2)<0$;
$(1-x)(3+x)<0$.

♦ Operații efectuate folosind calculatorul de buzunar

Proprietățile operațiilor cu numere sunt utile, de exemplu, când vrem să efectuăm calcule folosind calculatorul de buzunar.

Exemplul 1

Efectuăm $3+3\cdot 5+3\cdot 7$.

Varianta 1. Începem prin a tasta primul termen, 3, pe care îl introducem în memoria calculatorului. După aceea calculăm $3\cdot 5$, iar rezultatul 15 îl introducem în memoria calculatorului, el fiind adăugat la numărul deja existent în memorie, deci calculatorul „ține minte” numărul 18.

Procedăm analog și cu produsul $3\cdot 7$, astfel că, în final, în memoria calculatorului se află suma dorită.

Succesiunea în care apăsăm tastele este următoarea:

$\boxed{3}\ \boxed{M\pm}\ \boxed{3}\ \boxed{*}\ \boxed{5}\ \boxed{M\pm}\ \boxed{3}\ \boxed{*}\ \boxed{7}\ \boxed{M\pm}\ \boxed{\text{RM CM}}$

Varianta 2. Observăm că în suma pe care vrem să o calculăm putem da numărul 3 factor comun, deci avem $3+3\cdot 5+3\cdot 7=3(1+5+7)$.

Efectuăm mai întâi suma $1+5+7$, iar apoi înmulțim cu 3; rezultatul este același, deoarece înmulțirea este comutativă.

$\boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{7}\ \boxed{=}\ \boxed{*}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

⚠ *În efectuarea calculelor am utilizat un calculator Casio FX-82SX.*

Calculatoarele de buzunar de alt tip pot utiliza alte modalități de a aplica proprietățile operațiilor.

Întotdeauna când se folosește un astfel de calculator, trebuie cunoscut modul în care operează, pentru a evita rezultatele greșite. Este de asemenea important să estimezi ordinul de mărime al rezultatului, pentru a nu avea surprize atunci când algoritmul de programare al calculatorului este altul decât cel scontat.

Exemplul 2

Determinăm 3^{10} cu ajutorul unui calculator care nu are funcția de ridicare la putere.

Varianta 1. Înmulțim pe 3 succesiv de 10 ori: $3^{10}=\underbrace{3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3}_{10\text{ ori}}$.

Succesiunea în care apăsăm tastele este următoarea:

$\boxed{3}\ \boxed{*}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{*}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \ldots\ \boxed{*}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

Varianta 2. Folosim următoarea relație:

$3^{10}=3^{8+2}=((3^2)^2)^2\cdot 3^2$.

Putem apăsa tastele în succesiunea următoarea:

$\boxed{3}\ \boxed{*}\ \boxed{=}\ \boxed{M\pm}\ \boxed{*}\ \boxed{=}\ \boxed{*}\ \boxed{=}\ \boxed{*}\ \boxed{\text{RM CM}}\ \boxed{=}$

❻ *Efectuează ridicarea la puterea a 10-a a lui 3 apăsând cât mai puține dintre tastele calculatorului.*

⚠ *Pentru a calcula numărul 5^2 se apasă tastele în ordinea* $\boxed{5}\ \boxed{*}\ \boxed{=}$.

Exerciții și probleme

1. Ileana și Sorin au calculat suma numerelor din tabelul alăturat în două moduri diferite. Ileana a calculat mai întâi sumele pe linii, pe care le-a înscris în căsuțele libere din dreapta, apoi a adunat rezultatele și a completat cu suma găsită căsuța cu simblul ⚖. Sorin a procedat astfel: a calculat sumele pe coloane, apoi a adunat rezultatele înscrise pe ultima linie. Explică de ce Ileana și Sorin au obținut aceleași rezultate finale. Efectuează calculele.

13	–2	0	4	1	
–1	3	2	–10	3	
4	5	–8	–15	1	
0	–3	4	7	–8	
					⚖

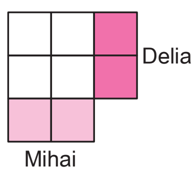
2. Arată că, dacă fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt echivalente ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}^*$), atunci și următoarele fracții sunt echivalente:

i) $\frac{a}{c}$ și $\frac{b}{d}$; ii) $\frac{a+b}{b}$ și $\frac{c+d}{d}$.

3. Înlocuiește fracțiile următoare cu fracții echivalente, care nu se mai pot simplifica:

a) $\frac{32}{24}$; b) $\frac{30}{342}$; c) $\frac{570}{84}$.

4. Delia și Mihai joacă următorul joc: Pe o tablă 2×2, ei completează pe rând pătrățelele cu numere reale și la sfârșit adună numerele de pe linii, respectiv de pe coloane. Delia câștigă câte 1 punct dacă suma pe prima linie (respectiv pe a doua linie) este mai mare decât suma pe prima coloană (respectiv pe a doua coloană); în caz contrar, punctele se acordă lui Mihai. În caz de egalitate a sumelor, nici un jucător nu primește puncte.



a) Demonstrează că jocul se termină totdeauna la egalitate.
b) Analizează jocul pentru o tablă 4×4. În acest caz, este posibil ca Mihai să câștige jocul cu scorul de 4 – 0?

5. Demonstrează în două moduri egalitățile:

a) $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$ b) $0,(6) = 0,6(6)$

c) $0,5(25) = 0,(52)$ d) $\frac{6}{57} = \frac{2}{19}$.

6. Calculează:

a) $(\sqrt{2}+1)^2$

b) $(\sqrt{3}-1)^2$

c) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

7. Rezolvă inecuațiile:
a) $(x-1)(x-2)(x-3) \leqslant 0,\ x \in \mathbb{N}$.
b) $x^2 \leqslant 2x,\ x \in \mathbb{R}$.
c) $3x - x^2 \leqslant x,\ x \in \mathbb{R}$.

8. Calculează cât mai simplu:
a) $101 \cdot 99$; b) 101^2
c) $5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2$;
d) $2172 \cdot 101 - 2170 \cdot 101 + 3 \cdot 101$.
e) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$.

9. Verifică egalitatea:
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$.
Reprezintă apoi printr-un desen formula anterioară.

10. Folosește calculatorul de buzunar pentru a efectua următoarele calcule:
a) $5 + 5 \cdot 8 + 5 \cdot 13$
b) $2^3 + 5^3 + 9^3$
c) $7 + 104 \cdot (42 + 51)$

11. Descrie succesiunea de apăsare a tastelor pentru a calcula cât mai simplu (adică apăsând tastele de cât mai puține ori):
a) 5^7; b) 2^9; c) 17^5.

12. Anticipează rezultatul următoarei succesiuni de operații:

[5] [*] [=] [M±] [7] [+] [2] [=] [*] [M±] [=]

Folosește apoi un calculator de buzunar și verifică rezultatul propus.

13. Calculatoarele de buzunar afișează aproximări ale unor numere reale. De exemplu, ca rezultat al calculului 1 : 3, pe display-ul calculatorului apare 0,333333 (eventual, și alte câteva zecimale). Verifică acuratețea calculatorului tău de buzunar, efectuând următoarele calcule:

a) [1] [÷] [3] [=] [*] [3] [=]

b) [2] [√] [=] [*] [=]

c) [4] [÷] [7] [=] [*] [7] [=]

Ce rezultate ar trebui să obții? De ce?

14. Calculează în două moduri $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$:
a) folosind un calculator de buzunar;
b) folosind formule de calcul rapid.
Compară rezultatele.

Am reuşit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- să recunosc și să diferențiez mulțimi de numere
- să identific proprietăți ale operațiilor algebrice
- să compar proprietăți ale adunării și înmulțirii, în scopul identificării unor algoritmi
- să exprim proprietăți ale mulțimilor de numere
- să utilizez similarități între operații în deducerea de proprietăți?

Test de verificare

1. a) Propune trei exemple de numere raționale și două exemple de numere întregi.
b) Precizează dacă numărul $\sqrt[3]{8}$ este număr irațional.

2. Știm că înmulțirea numerelor naturale este distributivă față de adunare. Operația de ridicare la putere, adică operația descrisă prin $a * b = a^b$, se definește cu ajutorul înmulțirii. Este oare adevărat că și această operație este distributivă față de adunare?

3. Atunci când înmulțim un număr zecimal cu 10^n, $n \in \mathbb{N}$, mutăm virgula spre dreapta, cu n cifre. Folosește această proprietate pentru a justifica algoritmul de transformare a numărului zecimal 0,(12) în fracție.

4. Calculează suma: ((...(((–1) + 1) – 1)...) – 1), în care sunt 2007 paranteze deschise „(” și 2007 paranteze închise „)”.

5. La adunarea fracțiilor este nevoie să aducem termenii la același numitor. Explică de ce nu este necesar să facem acest lucru și când înmulțim fracții.

Lectură

De-a lungul timpului, matematicienii au fost interesați să găsească o valoare cât mai exactă pentru π și să decidă dacă acesta este un număr rațional sau nu.

Arhimede (sec. III î.H.) a determinat π cu trei zecimale exacte, stabilind că $3,141 < \pi < 3,142$. El a folosit metoda poligoanelor regulate înscrise și circumscrise unui cerc.

Aceeași metodă a fost utilizată și de Ptolemeu (sec. II d.H.) și de al Kași (sec. XIV-XV), acesta din urmă determinând primele 17 zecimale ale lui π.

Perioada secolelor XVI-XVII a fost bogată în rezultate referitoare la π.

În 1593 Viète a dat pentru π formula de calcul ca produs infinit:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a + a\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a + a\sqrt{a + a\sqrt{a}}} \cdot \ldots \text{ (unde } a = \frac{1}{2}\text{)}.$$

John Wallis (1655) a exprimat π sub forma de produs infinit: $\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \cdots$*, fiind prima dată când π este reprezentat cu ajutorul unui șir de numere raționale.*

Alte formule care permit aproximarea lui π au fost date de Newton (1676): $\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{3}{2^7 \cdot 5} + \frac{5}{2^{10} \cdot 7} + \ldots$

sau de Leibniz (1682): $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

În 1768 Lambert a demonstrat faptul că π este un număr irațional, deci nu poate fi reprezentat sub formă de fracție $\frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Unitatea de învățare 2

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Calcul numeric

1. Calculează:
a) $3 + 4 \cdot (-5)$ b) $(3 + 6 + 8) \cdot 4$ c) $4{,}85 + 2{,}59$
d) $5{,}73 - 2{,}99$ e) $(4{,}69 + 5{,}03) : 3$ f) $6{,}12 - 0{,}3 \cdot 4{,}8$
g) $25{,}2 : 0{,}25$ h) $12{,}4 + 12{,}4 \cdot 9$ i) $3{,}7 \cdot 3{,}14$

Exponențiale și logaritmi

2. Determină:
a) $(-3)^3$ b) 6^2 c) $\log_3 27$ d) $\log_2 0{,}25$ e) $\log_6 \sqrt[3]{6}$
f) $\lg 1000$ g) 10^{-4} h) $\lg(0{,}1)$ i) $10^{\lg 4}$ j) $\log_5 25$

Calcul procentual

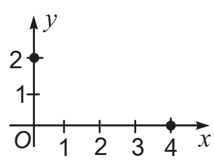
3. Calculează:
a) 30% din 90 m b) 15% din 60 kg
c) 5% din 10% din 100 km d) 75% din 25% dintr-un litru.

4. Precizează:
a) Care este diferența de preț la o scumpire cu 15% a unui produs care costă 54 lei?
b) Cât la sută reprezintă 70 m din 350 m?
c) Cu ce procent s-a mărit costul unui obiect al cărui preț s-a dublat?
d) Ce preț actual are o pereche de mănuși care costa 25 lei și a fost scumpită cu 10%, apoi ieftinită cu același procent?

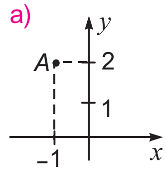
Alege răspunsul corect!

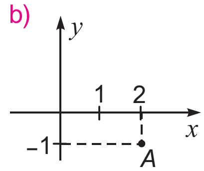
Coordonate în plan

5. În desenul următor sunt reprezentate punctele de coordonate:
a) (2; 0) și (0; 4)
b) (2; 2) și (4; 4)
c) (0; 2) și (4; 0)



6. Punctul $A(2; -1)$ are reprezentarea grafică:

a) 

b) 

Calcul algebric

7. $(3x - 2)^3$ este egal cu:
a) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$
b) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$.

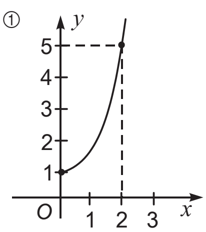
8. $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$ este egal cu:
a) $x^3 + 27y^3$ b) $x^3 - 27y^3$
c) $x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - 27y^3$.

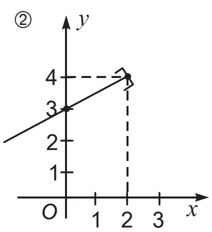
Funcții

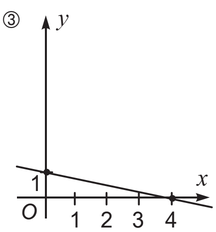
9. Fiecare desen este reprezentarea geometrică a graficului uneia dintre funcțiile de mai jos. Asociază graficul cu funcția corespunzătoare.

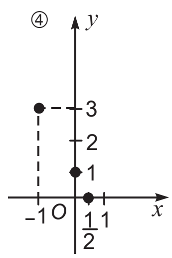
a) $f : \left\{-1; 0; \frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x$ b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - \frac{1}{4}x$

c) $h : (-\infty; 2] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x}{2} + 3$ d) $t : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $t(x) = x^2 + 1$.

① 

② 

③ 

④ 

Funcție și măsură – recapitulare

Măsurare, reprezentare, analiză de date

Ne amintim și explorăm!

♦ Cum caracterizăm numeric obiectele?

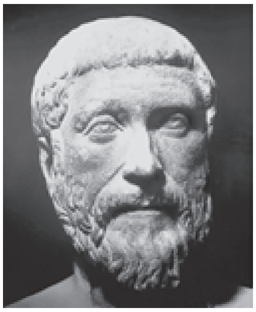
Numărul natural a apărut în mod firesc, pentru a caracteriza mulțimi finite de obiecte. Pentru a face reprezentări însă, lucrăm cu mulțimi continue și infinite (în sensul că sunt alcătuite dintr-o infinitate de puncte): segmente, curbe, suprafețe, corpuri. Caracterizarea numerică a acestora a condus, de-a lungul timpului, la apariția a diferite tipuri de numere, prin intermediul operației de *măsurare*. Când măsurăm o mărime oarecare, este nevoie de o unitate de măsură. Pentru măsurarea lungimii, oamenii au ales de-a lungul timpului diferite unități de măsură. Unele dintre acestea – pasul, cotul, nodul din navigație – se regăsesc, din motive practice, în diverse etape istorice. De exemplu, cotul este și astăzi, la unele populații, unitatea de măsură cea mai la îndemână în măsurarea țesăturilor.

⚠ *Numărul rațional a apărut ca raport al măsurilor a două mărimi de același fel.*

Odată convenită o unitate de măsură, a măsura o mărime oarecare revine la a determina un raport: când spunem că o sală de clasă are lungimea de 5 metri, determinăm raportul între lungimea sălii și unitatea de măsură aleasă (în acest caz, metrul). Spunem că măsurarea se face *prin cuprindere*.

Măsurarea presupune deci două operații distincte: alegerea unei *unități de măsură* adecvate și *compararea* a ceea ce se dorește măsurat cu unitatea aleasă. În acest fel, asociem un număr mărimii date inițial.

Matematicienii antici au crezut multă vreme că orice două segmente sunt *comensurabile*, adică există o unitate de măsură bine aleasă care se cuprinde de un număr întreg de ori în ambele segmente. Teoria lor este de natură atomistă: ei credeau că orice obiect fizic se poate diviza doar până la „cărămizile” componente ale materiei, pe care le-au numit atomi.

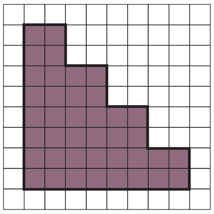


Pitagora

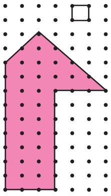
În școala lui Pitagora, s-a descoperit cu uimire că există și mărimi incomensurabile. De exemplu, diagonala și latura unui pătrat nu pot avea o unitate de măsură comună. Acest fapt, care contrazicea întregul sistem filosofic de până atunci, a fost atât de surprinzător, încât pitagoricienii l-au ascuns vreme de câteva sute de ani! Ulterior, reconsiderarea acestui fapt a condus la formarea conștiinței că există și altfel de numere, în afara celor raționale, numere pe care anticii le-au denumit *iraționale*.

♦ Măsurarea

Măsurarea suprafețelor se aseamănă unui joc de puzzle: a măsura o suprafață presupune a afla de câte piese identice (unități de măsură) este nevoie pentru a acoperi suprafața respectivă. Fiecare poligon are o arie bine determinată. De exemplu, figura alăturată are aria de 40 de unități de măsură.



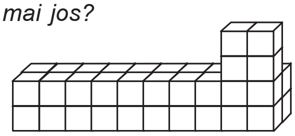
❶ *Ce arie are figura colorată din desen?*



La fel, pentru a determina volumul unui corp, trebuie să vedem de câte ori se cuprinde unitatea de măsură în acel corp. Fiecare poliedru are un volum bine determinat.

Spre deosebire de geometrie, măsurătorile statistice sunt doar estimative; pe de o parte, ele depind de percepția respondenților față de subiectul analizat, iar pe de altă parte sunt obținute prin extrapolare. Aceasta presupune înțelegerea tendinței de variație a unor funcții pentru care cunoaștem doar câteva date numerice.

❷ *Ce volum are corpul de mai jos?*



♦ Configurații geometrice utile în reprezentarea datelor

În Geometrie, reprezentarea datelor se face, de regulă, cu ajutorul unei figuri geometrice: pe o astfel de figură, marcăm segmente sau unghiuri congruente, precum și lungimi sau măsuri de unghiuri, pentru a transmite informația.

Există însă și situații în care o configurație geometrică „de fundal" conține în ea suficientă informație pentru ca reprezentarea prin desen să fie relevantă în rezolvarea problemelor.

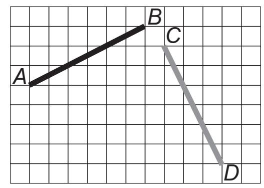
◇ *Rețelele de pătrate*

Foile din caietul de matematică oferă o configurație utilă pentru probleme diverse de matematică. Prezentăm câteva sugestii de utilizare a acestei configurații.

Exemplul 1: Congruența unor segmente

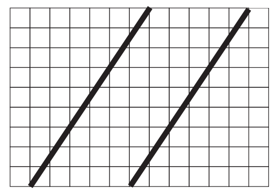
Folosind rețeaua de pătrate a caietului de matematică, putem desena ușor segmente congruente. Congruența poate fi validată prin măsurare și poate fi argumentată folosind cazurile de congruență a triunghiurilor.

Pe de altă parte, rețeaua de pătrate oferă o modalitate de „orientare" de tip vectorial: putem argumenta congruența unor segmente prin modul analog de construcție a acestora („mergem 6 pătrățele orizontal și 3 pătrățele vertical").



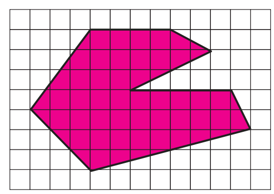
Exemplul 2: Paralelismul dreptelor

Putem înțelege mai bine relația de paralelism dacă dreptele sunt trasate pe această configurație, deoarece avem deja evidențiate două familii de drepte secante (și anume dreptele orizontale, respectiv verticale, ale rețelei).



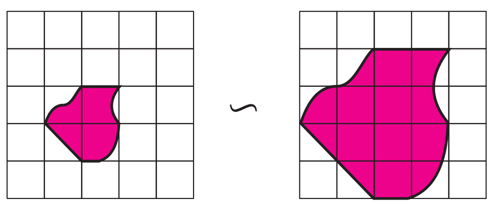
Exemplul 3: Calculul lungimilor și ariilor

Folosind rețeaua de pătrate, putem determina ușor ariile unor figuri geometrice, deoarece pătratul rețelei este chiar unitate de măsură.



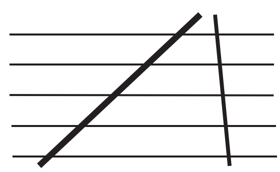
Exemplul 4: Înțelegerea relației de asemănare

Asemănarea figurilor geometrice poate fi gândită ca o copiere „la scară".



◇ *Caietul „dictando"*

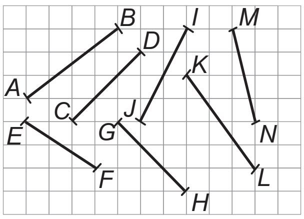
Liniatura din caietele „dictando" constituie o configurație geometrică utilă pentru problemele de paralelism: liniile caietului constituie o rețea de paralele echidistante. Folosind această configurație, putem justifica teorema paralelelor echidistante și proprietăți legate de unghiuri formate de drepte paralele cu o secantă.



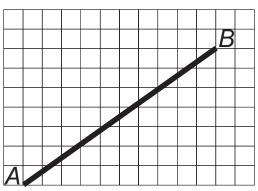
◇ *Cubul*

Pe un cub se pot exemplifica teoremele de paralelism și de perpendicularitate, se pot evidenția teoremele de determinare a planului. Cubul oferă o configurație familiară și datorită faptului că putem „umple" spațiul folosind cuburi identice.

❸ *Identifică perechi de segmente congruente pe rețeaua de mai jos.*

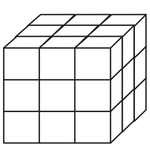


❹ *Fără a face măsurători, marchează mijlocul segmentului AB din figură. Explică modul de construcție.*



❺ *Propune exerciții de reprezentare a unui desen la scara 2:1, folosind rețele de pătrate pentru ghidare.*

❻ *După ce se asamblează, cubul din figură se vopsește în roșu. Câte cubulețe vor avea 3, 2, 1 sau 0 fețe colorate în roșu?*



♦ Configurații utile în reprezentarea datelor statistice

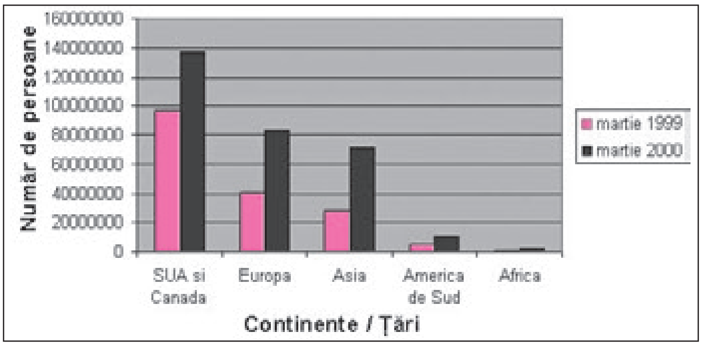
Viața cotidiană ne pune deseori în situația de a utiliza date diverse. Fie că este vorba despre prețuri, ore de transmitere a unor emisiuni TV, dobânzi bancare, informații privind numărul de persoane care au o anumită opțiune, suntem zilnic asaltați de informații conținând date numerice.

În cele mai multe cazuri, pentru a ne forma o părere realistă, trebuie să comparăm datele sau să înțelegem evoluția lor în timp. Astfel, informația: „Costa Rica are 4 milioane de locuitori” nu transmite nimic în sine; dacă știm însă că Bulgaria are 10 milioane de locuitori, putem compara Costa Rica (o țară îndepărtată, față de România) cu unii dintre vecinii noștri.

Putem compara mai ușor variația unor date dacă le reprezentăm astfel încât să evidențiem un anumit criteriu.

Exemplul 1: Accesul la internet

O revistă de specialitate a publicat graficul cu bare din imagine, privind accesul la internet.



Reprezentarea de mai sus ne permite să identificăm rapid care continente au cea mai mare capacitate de acces la internet și în ce perioadă. În acest caz, pentru a compara efectivele de persoane care au acces la internet, comparăm de fapt înălțimile unor bare: aceste înălțimi exprimă modul cum variază pe Glob accesul la internet.

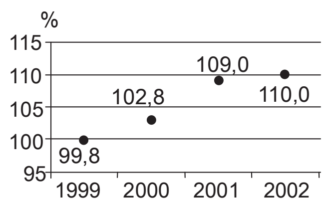
❼ *Cum a variat accesul la internet în perioada menționată, pentru fiecare grup de țări în parte?*

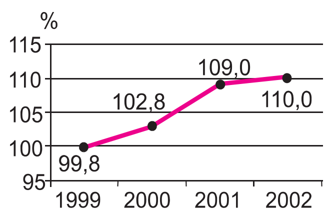
❽ *Aproximează diferențele privind accesul la internet în 1999 și 2000 pentru fiecare două grupuri de țări. Câte comparații trebuie făcute?*

Exemplul 2: Variația volumului construcțiilor

Graficul alăturat redă variația volumului lucrărilor de construcții în anii 1999, 2000, 2001, 2002, în raport cu anul 1998, în România.

Observăm că, dacă unim punctele marcate, variația este mai evidentă. Se vede clar că pe perioada menționată este o creștere. Această creștere este mai accentuată în perioada 2000-2001 și mai lentă în perioada 2001-2002.



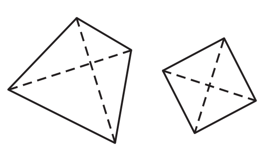


❾ *Graficele alăturate redau variația volumului construcțiilor în raport cu anul 1998, luat ca an de referință.*
a) Cum este volumul construcțiilor în 1999 față de 1998?
b) Cu cât a crescut volumul construcțiilor în 2001 față de 2000? Dar în 2002?

♦ Analogia

În vorbirea curentă, expresia „... este la fel cu...” are o semnificație bine determinată. Spre deosebire de aceasta, în matematică, „la fel” poate însemna mult mai mult.

Două triunghiuri „la fel” sunt asemenea. Dar faptul că două poligoane sunt „la fel” ar putea însemna că acestea au același număr de laturi, sau că au unele proprietăți comune. De exemplu, putem spune că patrulaterele din figură sunt „la fel”, deoarece ele au diagonalele perpendiculare.

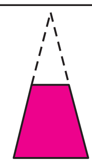
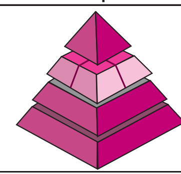


Aceeași caracterizare este valabilă pentru configurații din contexte diferite. De exemplu, triunghiul (din geometria plană) este „la fel” cu tetraedrul (din geometria în spațiu), din perspectiva *minimalității*: ambele au numărul minim posibil de vârfuri și laturi.

❿ *Găsește diferite analogii între triunghi și tetraedru.*

Pentru a nu folosi exprimarea prea vagă „...este la fel cu...”, vom spune că două configurații sunt analoage dacă proprietăți ale uneia dintre ele se regăsesc în cealaltă configurație.

Exemplu. Să analizăm, de exemplu, analogia trapez isoscel – trunchi de piramidă regulată, evidențiată de tabelul comparativ de mai jos.

În plan	*În spaţiu*
Prin secţionarea unui triunghi isoscel cu o dreaptă paralelă cu baza acestuia, se obţine un trapez isoscel.	Prin secţionarea unei piramide regulate cu un plan paralel cu baza acesteia, se obţine un trunchi de piramidă regulată.
Laturile neparalele ale unui trapez isoscel sunt congruente.	Muchiile laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt congruente. Feţele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt trapeze congruente.
	

11 *Care poate fi analogul în spațiu pentru linia mijlocie a unui trapez?*

12 *Compară prin analogie formulele privitoare la aria trapezului, respectiv aria laterală a trunchiului de piramidă.*

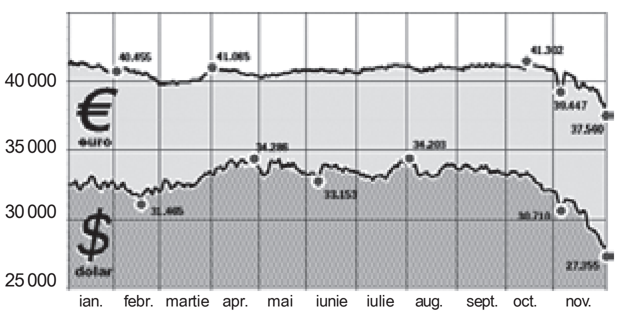
Analogia este utilă în interpretarea proprietăților unor reprezentări schematice.

De exemplu, desenele alăturate reprezintă amândouă schema străzilor unui același cartier deși, din punct de vedere metric, ele nu păstrează aceleași dimensiuni.

O analiză a reprezentărilor grafice privind variația unor date presupune de asemenea realizarea de analogii și formularea unor generalizări. De aceea, înțelegerea unor fapte geometrice ne poate ajuta în analiza proprietăților unor funcții.

Exerciții și probleme

1. Diagrama de mai jos indică variația cursului euro și al dolarului în raport cu leul în 2004.



a) În ce lună diferența între cele două cursuri este cea mai mare?

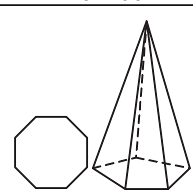
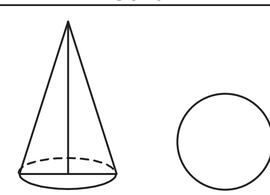
b) În ce lună diferența între cele două cursuri este cea mai mică?

c) În ce lună euro a avut cel mai mare curs?

d) În ce lună dolarul a avut cel mai mic curs?

e) Formulează și rezolvă alte probleme pe baza graficului dat.

2. Observă tabelul și completează ce lipsește:

Piramida	*Conul*
	
Baza piramidei este un poligon	Baza conului este un cerc.
Perimetrul bazei	... cercului
Apotema bazei	Raza ...
Apotema piramidei	... conului
Muchia piramidei	... conului
Aria laterală a piramidei regulate: $A_l = \boxed{?}$	Aria laterală a conului circular drept: $A_l = \frac{L_c \cdot G}{2} = \boxed{?}$

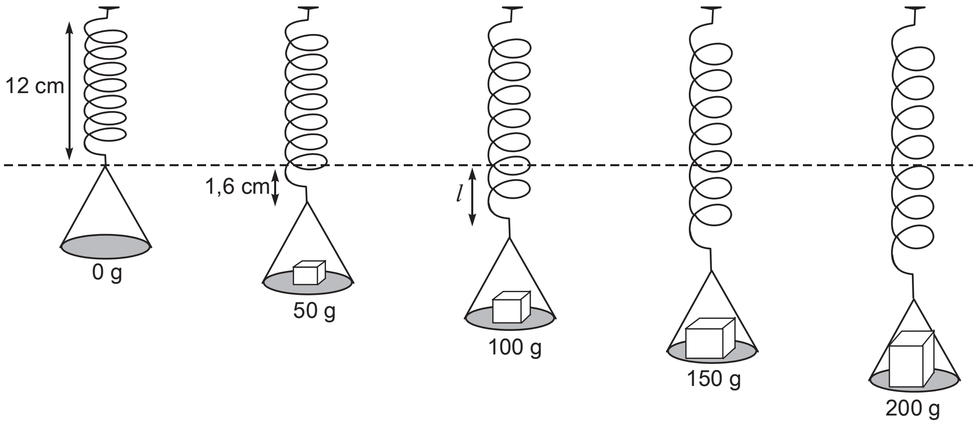
3. Evidențiază analogii între elementele trunchiului de piramidă și elementele trunchiului de con. Scrie astfel formulele de arie și volum ale trunchiului de con circular drept.

Analizăm și explorăm!

♦ Ce este o funcție?

Să observăm!

Resortul din imagine se alungește cu atât mai mult cu cât masa obiectului suspendat este mai mare. Fizicienii au constatat că, în condiții ideale, alungirea resortului este direct proporțională cu masa obiectului suspendat.



Pentru resortul din figură coeficientul de alungire este 0,032.

Notăm cu M mulțimea maselor obiectelor considerate și cu L mulțimea alungirilor posibile ale resortului.

Putem exprima dependența dintre alungirea resortului și masă printr-o funcție:

$$f : M \longrightarrow L$$
$$l = f(m) = 0{,}032 \cdot m$$

❶ Determină alungirea, apoi întinderea totală a resortului în fiecare caz.

Exemplifică o posibilă utilizare practică a unui astfel de resort.

❷ Realizează un desen în care de resort este suspendat un obiect cu masa de 75 g. Păstrează proporțiile din imaginea alăturată.

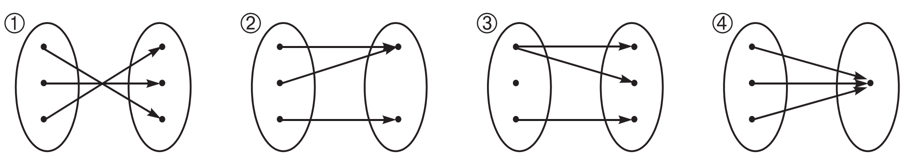
⚠ Deși în teorie, alungirea resortului este proporțională cu masa obiectelor suspendate la capătul lui, peste anumite limite deformarea are o abatere de la această regulă. Explică limitele unui cântar care se bazează pe principiul resortului.

Să ne amintim!

Se numește funcție un triplet (f, A, B), unde A este o mulțime „de plecare”, numită *domeniu*, B este o mulțime „de sosire”, numită *mulțimea de valori a funcției* și f este o lege de corespondență care face ca fiecărui element din A să-i corespundă un unic element din B.

Notăm $f : A \to B$, unde, pentru orice $x \in A$, există un unic element $y \in B$ astfel încât $f(x) = y$. O altă notație folosită este $x \mapsto f(x) = y$.

Exemple



Corespondențele 1, 2 și 4 sunt funcții, dar corespondența 3 nu reprezintă o funcție.

❸ Explică de ce corespondența ③ nu reprezintă o funcție.

♦ Funcția de forma $x \mapsto ax + b$

Să notăm într-un tabel dependența lungimii resortului de masa obiectelor din exemplul anterior.

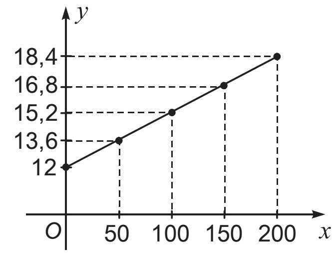
masa (în g)	50	100	150	200
lungimea (în cm)	13,6	15,2	16,8	18,4

❹ Cum s-au obținut datele din tabelul care exprimă variația lungimii în funcție de masă?

❺ *Folosește graficul pentru a determina lungimea resortului pentru o masă de 250 g.*

Graficul alăturat corespunde tabelului de date anterior. Pe baza acestuia, putem descoperi lungimea resortului în cazul unei mase mai mari de 200 g.

Funcția reprezentată alăturat poate fi descrisă prin legea de corespondență $h(x) = 0{,}032x + 12$. Aceasta este o funcție „de gradul întâi”, iar graficul său este o dreaptă.



♦ Funcția pătratică și funcția radical

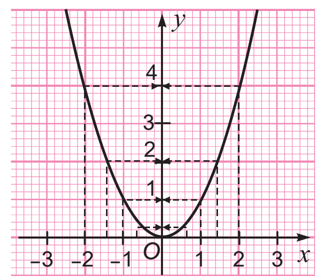
Funcția care asociază fiecărui număr real pătratul său se numește *funcție pătratică*.

Exemplu

Funcția $x \mapsto x^2$ este definită pe $\mathbb{R}$ și ia valori în $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty)$.

x	x^2
–2	4
–1,5	2,25
–1	1
–0,5	0,25
0	0
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4

Tabelul din stânga conduce la reprezentarea ilustrată în dreapta.



❻ *Completează tabelul:*

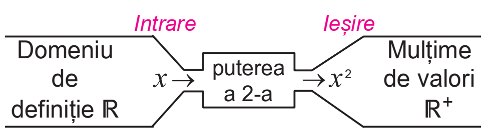
x	0,8	–1,6		
x^2			6,25	1,69

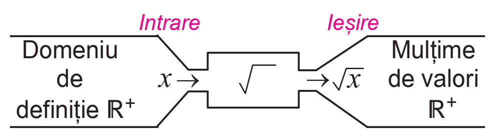
O funcție poate fi gândită ca o mașină de calcul care procesează numere.

Să comparăm!

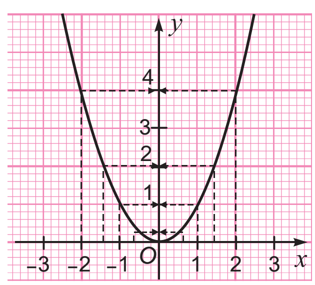
Funcția pătratică
$x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$

Funcția radical
$x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

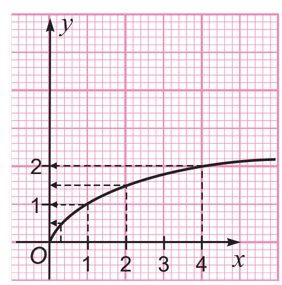




x puterea a 2-a	x^2
0	0
0,5	0,25
1	1
1,414...	2
2	4
–0,5	0,25
–1	1
–1,414...	2
–2	4



x $\boxed{\sqrt{\ }}$	$\sqrt{x}$
0	0
0,25	0,5
1	1
2	1,414...
4	2



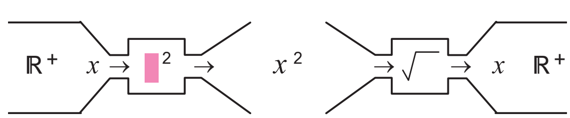
❼ *Completează tabelul:*

x	9		1,44	
$\sqrt{x}$		1,6		1,9

Să observăm!

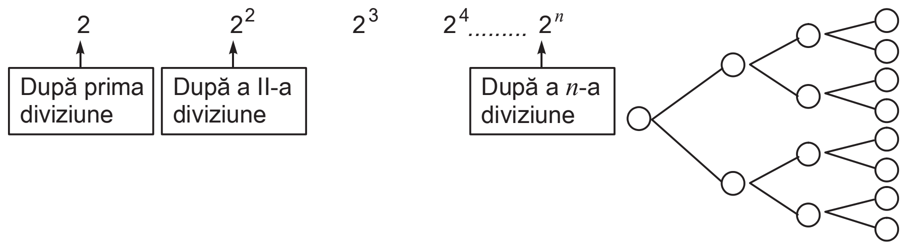
Considerăm funcția pătratică $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ și funcția radical $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Schema de mai jos exprimă faptul că aceste două funcții sunt inverse una alteia.

❽ *Explică schema alăturată.*



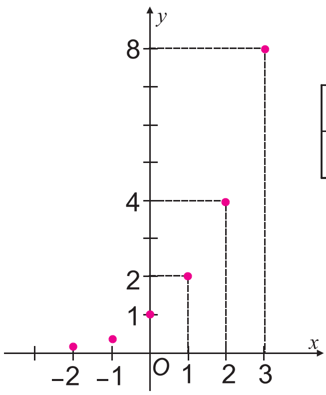
♦ Funcția exponențială și funcția logaritmică

O bacterie se înmulțește prin diviziune celulară.
Schema de mai jos sugerează derularea acestui proces.



Această variație corespunde funcției $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definită prin $g(n) = 2^n$.

Extindem funcția g cu aceeași lege de corespondență considerând ca domeniu de definiție mulțimea numerelor întregi. Obținem astfel funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x$.



Putem deduce și alte proprietăți observând tabelul de valori și reprezentarea grafică ale funcției f.

x	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	0,25	0,5	1	2	4	8

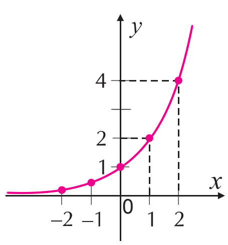
- f este o funcție crescătoare
- Pentru $x < 0, f(x) < 1$
- Pentru $x > 0, f(x) > 1$.

Putem trasa graficul unei funcții exponențiale definite pe $\mathbb{R}$ folosind un tabel de valori și proprietatea de monotonie a acestei funcții.

Exemple

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția exponențială de bază 2, descrisă prin $f(x) = 2^x$.

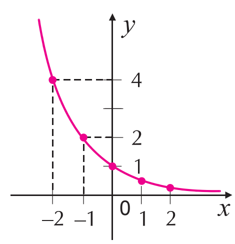
x	$-\infty$	–2	–1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	0,25 ↗	0,5 ↗	1 ↗	2 ↗	4 ↗	



Observăm că:
- oricare ar fi x, $f(x) > 0$
- f este funcție crescătoare

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția exponențială de bază 0,5, descrisă prin $g(x) = 0{,}5^x$.

x	$-\infty$	–2	–1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	4 ↘	2 ↘	1 ↘	0,5 ↘	0,25 ↘	



Observăm că:
- oricare ar fi x, $g(x) > 0$
- g este funcție descrescătoare

În general

Fie $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$, funcția exponențială de bază a.
Atunci:
- $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- f este crescătoare dacă $a \in (1; +\infty)$ și descrescătoare dacă $a \in (0; 1)$.

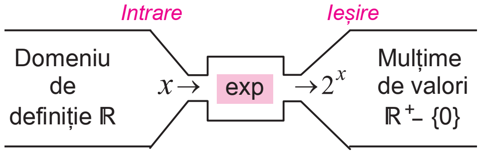
9 *Identifică diverse situații din fizică, chimie sau biologie exprimabile prin funcții exponențiale.*

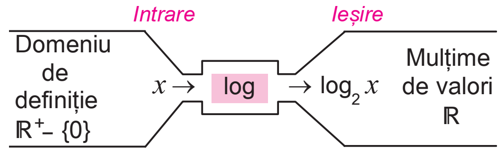
10 *Alcătuiește un tabel de valori și precizează câteva proprietăți ale funcției* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, f(n) = 0{,}5^n$.

11 *Reprezintă grafic funcțiile:* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3^x$ *și* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 0{,}4^x$.

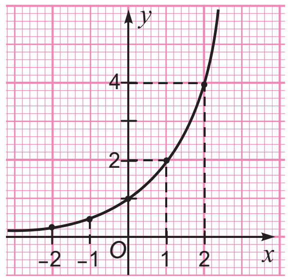
Să comparăm!

Funcția exponențială, (de bază 2) $x \mapsto 2^x,\ x \in \mathbb{R}$	Funcția logaritmică, (de bază 2) $x \mapsto \log_2 x,\ x \in (0; +\infty)$

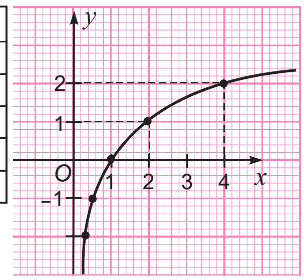




x	2^x
–2	0,25
–1	0,5
0	1
1	2
2	4



x	$\log_2 x$
0,25	–2
0,5	–1
1	0
2	1
4	2



12 *Exprimă cu ajutorul unei scheme faptul cu funcțiile $x \mapsto 2^x$ și $x \mapsto \log_2 x$ sunt inverse una alteia.*

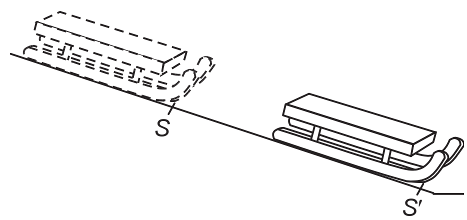
Funcția exponențială și funcția logaritmică de aceeași bază sunt inverse una alteia.

♦ Ce legături există între transformări geometrice și funcții?

Să observăm!

O sanie alunecând pe zăpadă se deplasează din poziția S în poziția S'.

În limbaj matematic, spunem că ea a făcut o mișcare de translație de vector $\overrightarrow{SS'}$. Prin această translație, poziției inițiale S îi corespunde noua poziție S'.

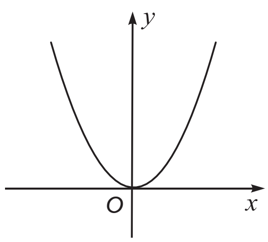


Să ne amintim!

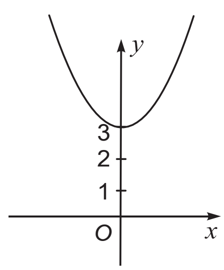
O *translație* de vector $\vec{a}$ asociază unei figuri geometrice $\mathcal{F}$ o figură geometrică $\mathcal{F}'$, congruentă cu $\mathcal{F}$. Translația este o funcție care asociază fiecărui punct P al figurii $\mathcal{F}$ un punct $P' \in \mathcal{F}'$ astfel încât $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}$.

Putem folosi translația pentru a trasa graficul unor funcții. De exemplu, știind că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ are graficul de mai jos, putem reprezenta cu ușurință, prin translație, funcții precum $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 3$; $h(x) = x^2 - 2$.

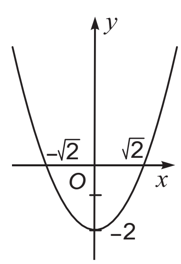
13 *Explică modul în care au fost obținute graficele alăturate.*



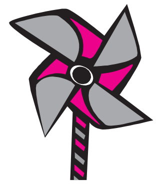
$x \mapsto x^2$



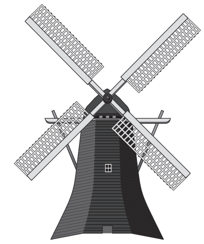
$x \mapsto x^2 + 3$



$x \mapsto x^2 - 2$



Pentru a putea funcționa, o morișcă, elicea unui avion, paletele morilor de vânt au o proprietate comună: ele sunt echilibrat distribuite față de axul de prindere.

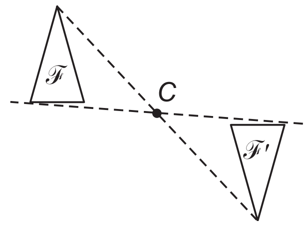


Să ne amintim!

• Două puncte se numesc *simetrice față de un punct* numit *centru* dacă sunt coliniare cu centrul și egal depărtate de acesta.

• O figură (sau un corp geometric) admite *centru de simetrie* dacă simetricul oricărui punct al său față de centru aparține figurii (sau corpului).

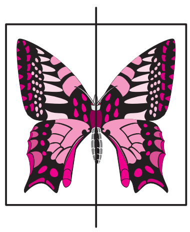
• Două figuri $\mathscr{F}$ și $\mathscr{F}'$ sunt *simetrice față de un punct C* dacă pentru orice punct $P \in \mathscr{F}$ există $P' \in \mathscr{F}'$ astfel încât $CP = CP'$, iar P, C și P' sunt coliniare. În acest caz, figura $\mathscr{F}'$ este asociată figurii $\mathscr{F}$ printr-o simetrie de centru C.



Simetria centrală (simetria față de un punct) este o funcție care transformă o figură geometrică într-o figură congruentă cu ea însăși.

Să observăm!

Ca și simetria centrală, simetria axială este frecvent întâlnită în natură.

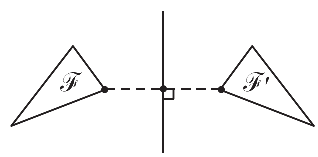


Să ne amintim!

• Două puncte se numesc *simetrice față de o dreaptă* dacă sunt situate pe o perpendiculară pe acea dreaptă și sunt egal depărtate de ea.

• O figură (sau un corp geometric) admite *axă de simetrie* dacă simetricul oricărui punct al său față de axă aparține figurii (corpului).

• Două figuri $\mathscr{F}$ și $\mathscr{F}'$ sunt *simetrice față de o dreaptă* d dacă distanța de la un punct oarecare al figurii $\mathscr{F}$ la dreapta d este egală cu distanța de la d la punctul corespunzător al figurii $\mathscr{F}'$.



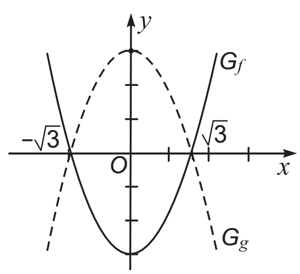
Simetria axială (simetria față de o dreaptă) este o funcție care transformă o figură geometrică într-o figură congruentă cu ea însăși.

Proprietatea de simetrie ne ajută să trasăm rapid grafice de funcții sau să verificăm corectitudinea unora deja trasate.

Exemple

1) Funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$ și $g(x) = 3 - x^2$ au graficele simetrice față de axa Ox.

2) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$ are graficul simetric față de o dreaptă perpendiculară pe Ox, care trece prin punctul de abscisă 1.

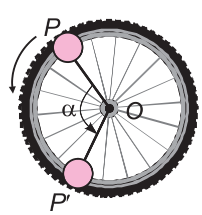


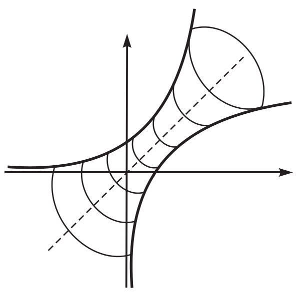
14 *Trasează graficul funcției $x \mapsto |x - 1|$ și identifică axa de simetrie a acestuia.*

Să observăm!

Când merge cu bicicleta, „ochiul de pisică” pus de Maria pe roată se deplasează, de exemplu, din poziția P în poziția P'.

În limbaj matematic, spunem că „ochiul de pisică” a executat o mișcare de rotație de centru O și unghi α. Prin această mișcare, poziției inițiale P îi corespunde noua poziție P'.





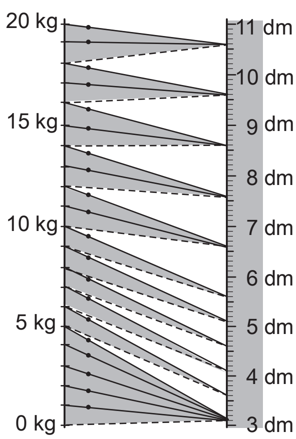
Să ne amintim!

O *rotație* de centru O și unghi α în plan asociază unei figuri geometrice $\mathscr{F}$ o figură geometrică $\mathscr{F}'$, congruentă cu $\mathscr{F}$. Rotația este o funcție care asociază unui punct $P \in \mathscr{F}$ punctul $P' \in \mathscr{F}'$ situat pe cercul de centru O și rază OP, astfel încât $m(\widehat{POP'}) = \alpha$.

Dacă rotim în spațiu cu 180° graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$, în jurul bisectoarei primului cadran, obținem graficul funcției $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$. Cele două grafice sunt simetrice față de bisectoarea primului cadran al sistemului de referință.

Exerciții și probleme

1. Păcală folosește pe post de cântar un resort ale cărui alungiri sunt reprezentate în figura alăturată. Poate fi această cântărire modelată printr-o funcție?



2. Care dintre tabelele de mai jos corespunde unei aplicații de forma $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$?

①

x	–1	0	1	3
y	–5	–3	1	3

②

x	–6	0	3	9
y	–7	5	11	17

③

x	10	6	2	0
y	2	0	–2	–3

3. Identifică dreapta corespunzătoare fiecărei ecuații.

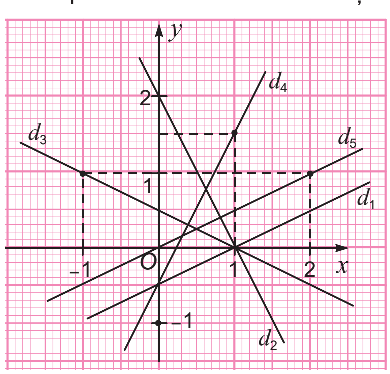
a) $y = 2{,}5x - 1$

b) $y = \frac{1}{2}x$

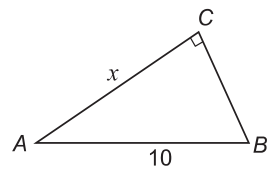
c) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

d) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

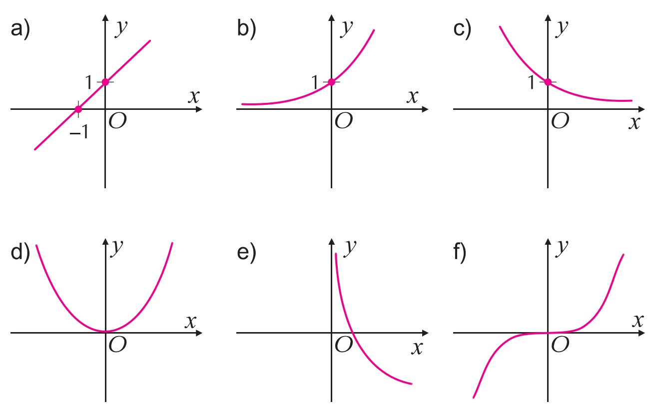
e) $y = -2x + 2$.



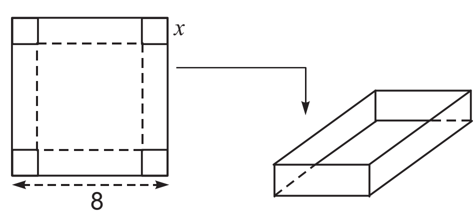
4. a) Ce valori poate avea x?
b) Exprimă perimetrul $P(x)$ și aria $A(x)$ a triunghiului ABC în funcție de x.



5. Care dintre graficele de mai jos reprezintă o funcție:
a) exponențială; b) logaritmică; c) crescătoare;
d) pătratică; e) de forma $x \mapsto ax + b$?



6. Se decupează un pătrat cu latura de 8 dm. La fiecare colț al acestuia se taie un pătrat de latură x dm. Lipind colțurile rămase, se obține o cutie deschisă.
a) Exprimă în funcție de x măsura muchiei bazei cutiei, apoi volumul acesteia, $V(x)$.
b) Pentru ce valoare a lui x, cutia are formă cubică?



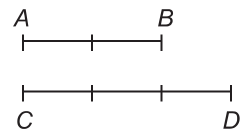
Rezolvarea problemelor: conexiuni între algebră și geometrie

Aplicăm și dezvoltăm!

Între algebră și geometrie nu există delimitări stricte: din contră, sunt multiple legături care își dovedesc importanța mai ales în rezolvarea problemelor. Astfel, reprezentările geometrice pot explica rezultate algebrice dificile, iar calculul algebric poate simplifica determinarea unor relații care implică lungimi, arii, volume.

Exemplul 1: Numerele iraționale

Numerele raționale au apărut din geometrie, ca rapoarte ale unor mărimi de același fel. Matematicienii antici gândeau, de exemplu, numărul $\frac{2}{3}$ ca raportul segmentelor *AB* și *CD* din desenul alăturat. Pentru aceste segmente există o unitate de măsură care se cuprinde de un număr întreg de ori în amândouă, adică segmentele *AB* și *CD* sunt comensurabile.



Să demonstrăm!

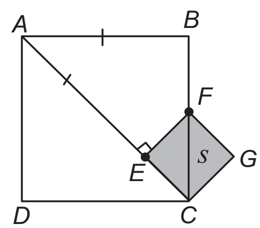
> Latura și diagonala unui pătrat nu sunt comensurabile.
> Altfel spus: $\sqrt{2}$ nu este număr rațional.

Să presupunem prin absurd că există un segment s care se cuprinde în [*AB*] și în [*AC*] de un număr întreg de ori.

Fie $E \in AC$, $F \in BC$ astfel încât $[AE] = [AB]$ și $EF \perp AC$.

Atunci $EF = EC = AC - AB$ ...

Segmentul s se cuprinde de un număr întreg de ori în [*EC*] și în [*CF*] ... Repetăm construcția cu pătratul *EFGC*; obținem pătrate din ce în ce mai mici, având proprietatea că segmentul s se cuprinde de un număr întreg de ori în laturile și diagonalele lor ... Obținem o contradicție ...



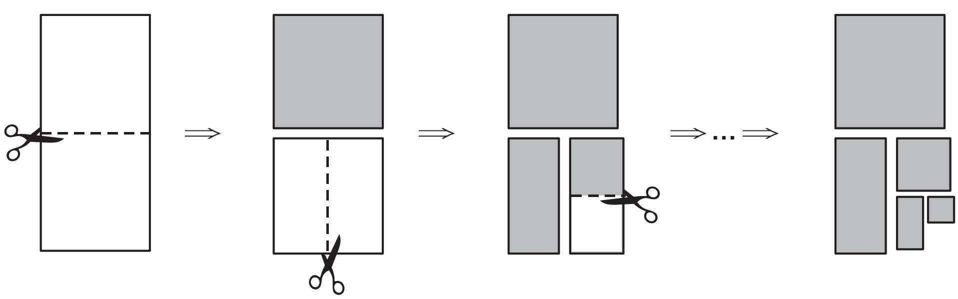
❶ *Completează demonstrația cu justificările necesare.*

Exemplul 2: Justificarea geometrică a unor formule de calcul

• Vrem să demonstrăm egalitatea:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}=1-\frac{1}{2^{10}}.$$

Folosind o reprezentare geometrică, putem proceda astfel:



Tăiem o foaie de hârtie în două părți egale și oprim una din aceste bucăți. ⟹ Înjumătățim una din cele două părți și oprim una din bucățile rămase. ⟹ Tăiem din nou bucata rămasă în două părți egale. ⟹ … ⟹ Continuăm la fel de 10 ori.

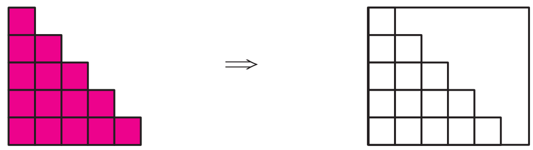
❷ *Exprimă și justifică analog suma* $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}$.

Egalitatea de mai sus exprimă faptul că suma ariilor bucăților de hârtie oprite este aria foii inițiale, din care scădem aria „piesei” lipsă.

• Vrem să demonstrăm egalitatea: $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Folosind o reprezentare geometrică, putem demonstra această egalitate astfel:

❸ *Ce dimensiuni are dreptunghiul obținut pentru primii 10 termeni ai sumei?*

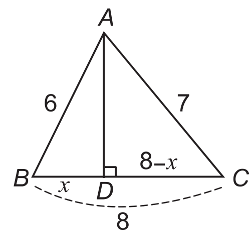


Numărul de pătrățele din figură (egal cu aria figurii) este 1 + 2 + 3 + 4 + 5.

Din două figuri identice formăm un dreptunghi 5×6.

Prin analogie, procedăm la fel în cazul general.

Exemplul 3: Soluții algebrice ale unor probleme de geometrie



Vrem să calculăm aria unui triunghi cu laturile 6, 7, 8. În lipsa unei formule de calcul, putem proceda astfel:

Construim $AD\perp BC$, $D\in BC$.

Fie $BD = x$, $DC = 8 - x$. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul ADB și în triunghiul ADC și obținem:

$AD^2 = 36 - x^2$

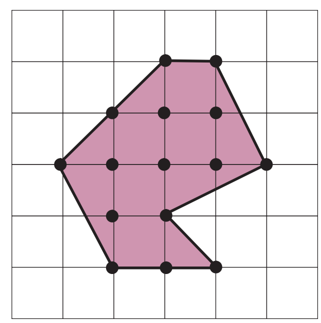
$AD^2 = 49 - (8 - x)^2$

Deci $36 - x^2 = 49 - (8 - x)^2 \Rightarrow 36 - x^2 = 49 - 64 + 16x - x^2 \Rightarrow 16x = 51 \Rightarrow x=\dfrac{51}{16}$.

Putem acum să calculăm înălțimea AD, apoi aria triunghiului.

❹ *Finalizează calculele și află aria triunghiului ABC.*

Exemplul 4: Calculul ariilor



Să considerăm poligonul din figură care are vârfurile în nodurile unei rețele de pătrate, de latură 1. Ne interesează aria acestui poligon. Desigur, putem descompune poligonul în figuri mai simple și putem aduna ariile acestora.

Există însă și o metodă „algebrică” de calcul:

$\text{Aria}=\dfrac{n}{2}+m-1$, unde n = numărul de noduri de pe laturile poligonului, iar m = numărul de noduri din interiorul poligonului.

Astfel, aria poligonului din figură este egală cu $\dfrac{9}{2}+6-1=9{,}5$.

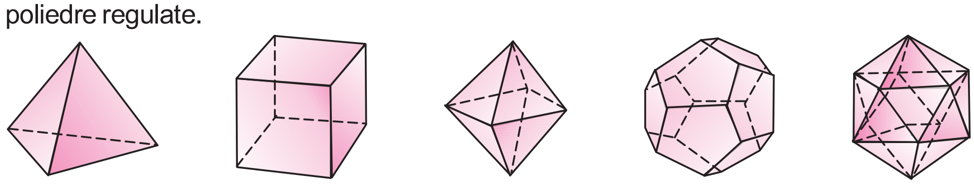
❺ *Calculează aria poligonului desenat în figură, folosind descompuneri în triunghiuri și pătrate.*

❻ *Desenează pe o rețea de pătrate și alte poligoane, de tipul celui din figură, și verifică formula de arie:* $\text{Aria}=\dfrac{n}{2}+m-1$.

Exemplul 5: Poliedrele regulate

Un poliedru regulat are toate fețele poligoane regulate identice. Există numai 5 poliedre regulate.

⚠ *Poliedrul este un corp geometric care are toate fețele poligoane.*



Poliedrele regulate satisfac relațiile numerice menționate în tabelul de mai jos:

Nume	*Nr. de muchii*	*Nr. de vârfuri*	*Nr. de fețe*	*Nr. de triunghiuri*	*Nr. de pătrate*	*Nr. de pentagoane*
tetraedru	6	4	4	4		
cub	12	8	6		6	
octaedru	12	6	8	8		
dodecaedru	30	20	12			12
icosaedru	30	12	20	20		

❼ *Verifică, pentru fiecare poliedru regulat, relația lui Euler: M = V + F − 2, unde M este numărul muchiilor, V este numărul vârfurilor și F numărul de fețe.*

Exerciții și probleme

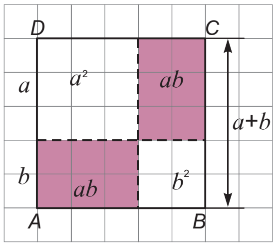
1. Demonstrează geometric formulele de calcul prescurtat:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

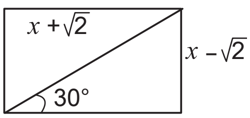
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

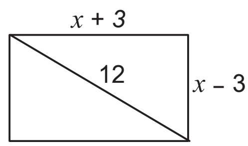
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Folosește desenul alăturat.

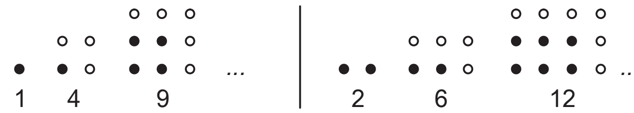


2. Află aria dreptunghiului cunoscând datele din figură, în care lungimile sunt date în centimetri.

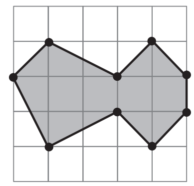
a)


b)


3. Folosește reprezentările geometrice de mai jos pentru a exprima suma primelor n numere naturale impare, respectiv suma primelor n numere naturale pare.



4. Calculează aria poligonului alăturat, în funcție de latura de lungime l a rețelei de pătrate. Verifică rezultatul printr-o altă metodă de calcul.



Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- să identific metode care conduc cât mai rapid la obținerea rezultatului
- să transpun probleme în reprezentări adecvate
- să utilizez algoritmi specifici pentru a rezolva probleme
- să utilizez analogii pentru a optimiza rezolvarea problemelor
- să extrag din diferite reprezentări informații semnificative pentru rezolvarea de probleme?

Test de verificare

1. Folosește proprietăți ale operațiilor cu numere reale pentru a efectua cât mai simplu $(\sqrt{5}+2)^{100}\cdot(\sqrt{5}-2)^{100}$

2. Tabelul următor redă dobânzile la câteva bănci la data de 10.01.2006. Care bancă este cea mai avantajoasă pentru depozit? Rezolvă problema apelând la o reprezentare potrivită.

Banca	1 lună	3 luni	6 luni	9 luni	12 luni
BCR	5	5,25	5,75	6,25	7
BRD	4	4,1	4,15	4,15	4,25
Bancpost	4,5	4,75	5	5,25	5,5
Raiffeisen Bank	4,5	4,75	5	5,25	5,25
Banca Þiriac	3,5	5	5,5	6	6
Banca Transilvania	5	5,5	5,5	6	6,5

Sursa: www.Baniinostri.ro

3. Rezolvă ecuația în $\mathbb{R}$: $x^3 - 4x^2 + x = 0$.

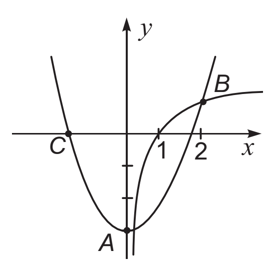
4. Reprezintă grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x + 3$, apoi funcția $g : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_2 x - 3$.

5. Considerăm funcțiile $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 3$ ale căror reprezentări grafice sunt date mai jos.

a) Determină coordonatele punctelor A, B și C.

b) Precizează numărul de soluții reale ale ecuației $\log_2 x = x^2 - 3$.

c) Încadrează soluțiile ecuației de la b) între doi întregi consecutivi.



Unitatea de învățare 3

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Calcul numeric

1. Calculează:

a) $2 + 3 \cdot 5 - 7 \cdot 2$
b) $1^3 + 2^3 + 3^3$
c) $0,27 + 1,38$
d) $2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$
e) $255 : 15$
f) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$
g) $\frac{15}{8} : \frac{10}{9}$
h) $2,7 + 3,(6)$

Ordinea efectuării operațiilor

2. Efectuează:

a) $(0,2 + 1,3 \cdot 5) \cdot 4$
b) $(4 - 6)^3$
c) $3 - (4 - 6)$
d) $24 : 8 - 3$
e) $3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \cdot 5$
f) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{5} : \frac{8}{5}$

Rezolvări de ecuații

3. Rezolvă:

a) $x + 0,4 = 3,2$
b) $3x = -12$
c) $6x = 2$
d) $2x - 1 = 5x + 2$
e) $(x - 1)^2 = 4$
f) $1 + |x| = 3$
g) $(x + 1)^2 = (x - 1)^2 + 2(x + 3)$
h) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor

4. Transpune în limbaj matematic, apoi rezolvă problemele:

a) Suma a două numere este 36. Află numerele, dacă primul este cu 10 mai mare decât al doilea.

b) Diferența a două numere este 45. Află numerele, dacă primul este de 10 ori mai mare decât al doilea.

c) În două depozite sunt 480 t de cartofi. Dacă s-ar muta 40 t din primul depozit în cel de-al doilea, cantitățile aflate în cele două depozite ar fi egale. Ce cantitate de cartofi este în fiecare depozit?

d) Cât este latura unui pătrat dacă, mărind această latură cu 2 m, aria se mărește cu 20 m^2?

Elemente de logică

5. Transpune în limbajul logicii matematice, apoi identifică propozițiile adevărate.

a) Nu este adevărat că Liviu Rebreanu nu este autorul romanului *Ion*.

b) Dacă fiecare elev de liceu a fost declarat admis la examenul de capacitate, atunci Sorin, care nu a fost declarat admis la acest examen, nu poate fi elev la liceu.

c) Dacă orice om care se scoală dimineața devreme este grăbit, atunci domnul Popescu, care nu se scoală dimineața devreme, nu este grăbit.

Grafuri – noțiuni de bază

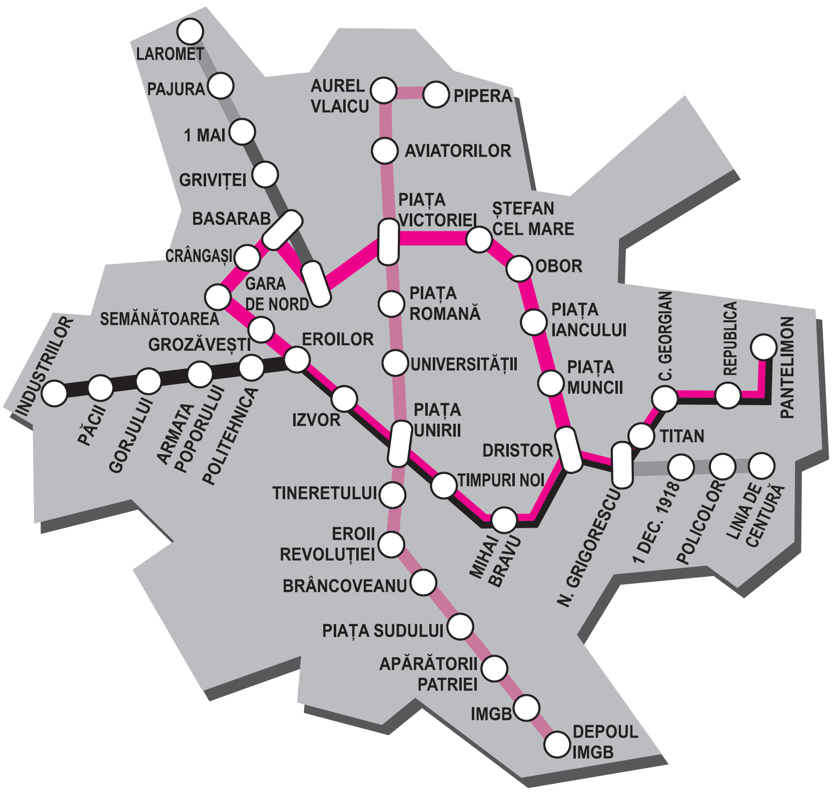
Reprezentări schematice ale unor rețele

Ne amintim și explorăm!

Reprezentările schematice apar frecvent în viața cotidiană.

Exemplul 1: Harta metroului

În imaginea de mai jos este reprezentată harta rețelei de metrou din București (în exploatare sau doar în construcție). Aceasta este numai o reprezentare schematică, ce nu prezintă la scară distanțele dintre stații. Totuși, harta este suficientă pentru a ne orienta în călătoria cu metroul.

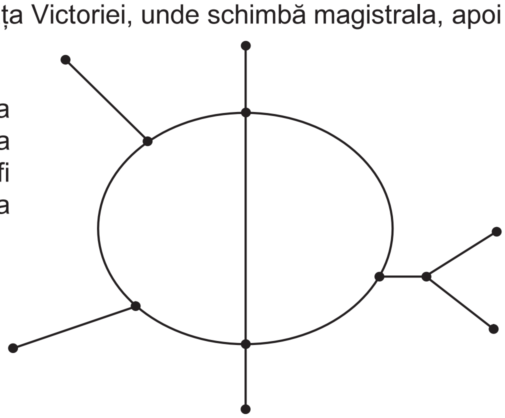


❶ *Observă harta metroului. Câte stații sunt între Piața Victoriei și Pantelimon, pe drumul cel mai scurt? Dar pe o rută ocolitoare?*

❷ *Determină două trasee pe care se poate ajunge cu metroul din Gara de Nord până la Piața Sudului. În care dintre cele două variante călătorul trece prin mai multe stații? Pe care traseu crezi că se ajunge mai repede?*

De exemplu, dacă un călător aflat în Gara de Nord vrea să ajungă în Piața Sudului, el poate lua metroul o stație până la Piața Victoriei, unde schimbă magistrala, apoi coboară la a șaptea stație.

Putem reprezenta sugestiv schema rețelei de metrou din București ca în figura alăturată. Această reprezentare poate fi utilă în analiza gradului de dezvoltare a transportului subteran.

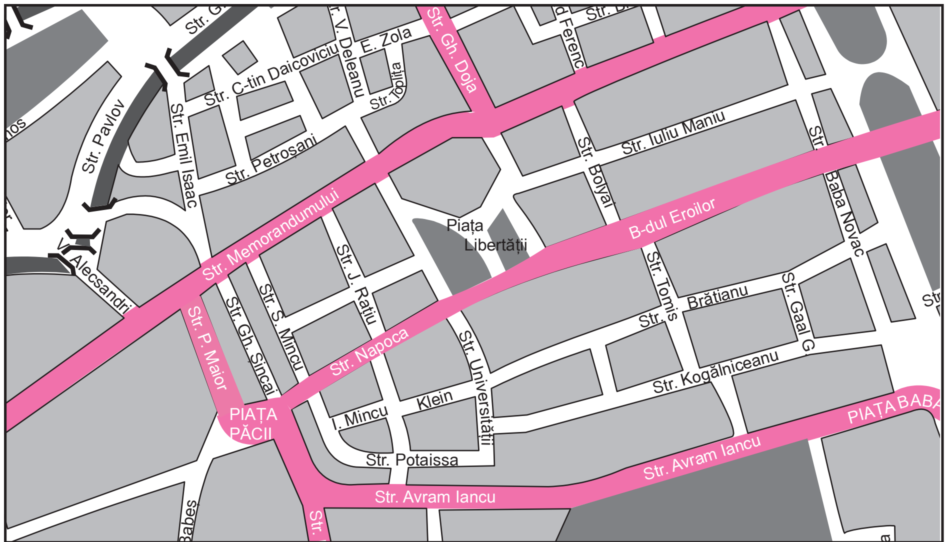


❸ *Folosește harta rețelei de metrou pentru a identifica stațiile marcate pe schema alăturată. Transpune desenul pe caiet și scrie numele stațiilor.*

❹ *Desenează și alte scheme ale rețelei de metrou din București. Cum ai putea decide dacă o schemă este întocmită corect?*

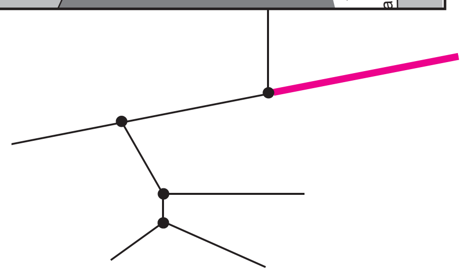
Exemplul 2: Harta unui oraș

În imaginea de mai jos este prezentată o parte a hărții municipiului Cluj-Napoca.



❺ Realizează o schemă cu principalele străzi ale orașului tău. Compară schema proprie cu cele realizate de colegi. Ce criterii ai avut în vedere pentru a evalua corectitudinea unei scheme?

Pentru a putea utiliza mai eficient harta, un automobilist a renunțat la indicațiile inutile și a reprezentat principalele artere ca în schema alăturată. El consideră că această schemă îi este suficientă pentru a se putea orienta în oraș.

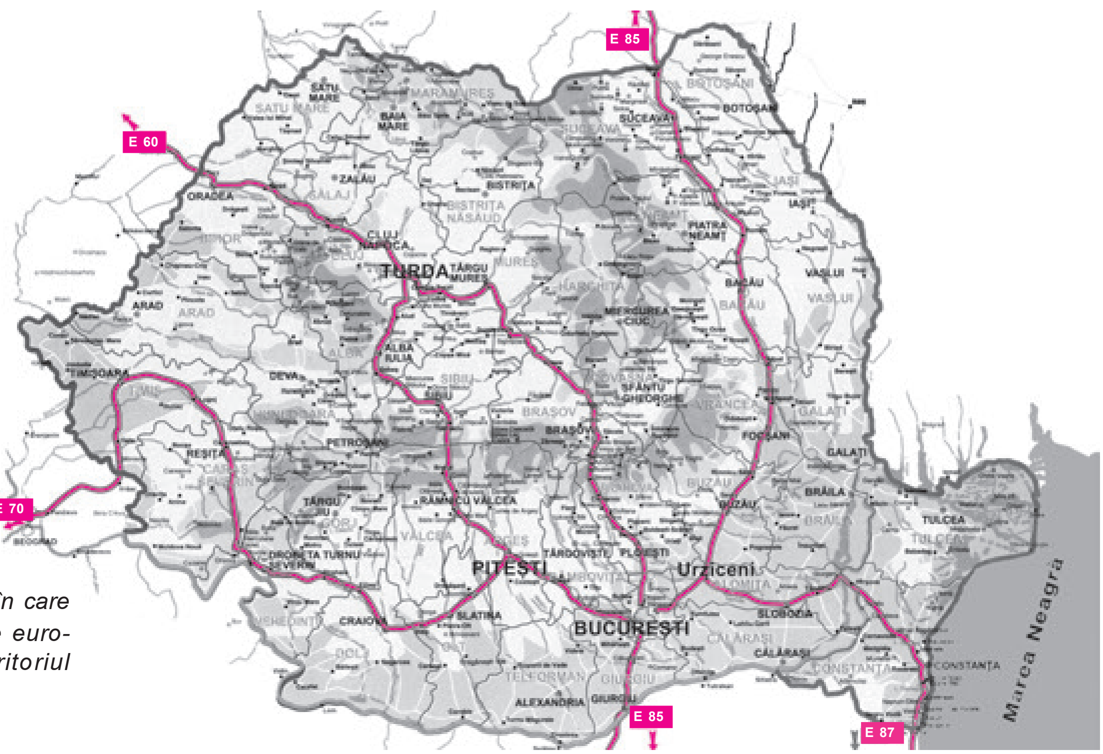


❻ Compară schema realizată de către automobilist cu harta detaliată a orașului, apoi precizează:

- *Unde se află Piața Păcii?*
- *Care este bulevardul Eroilor?*
- *Cum se numește strada marcată cu linie îngroșată?*

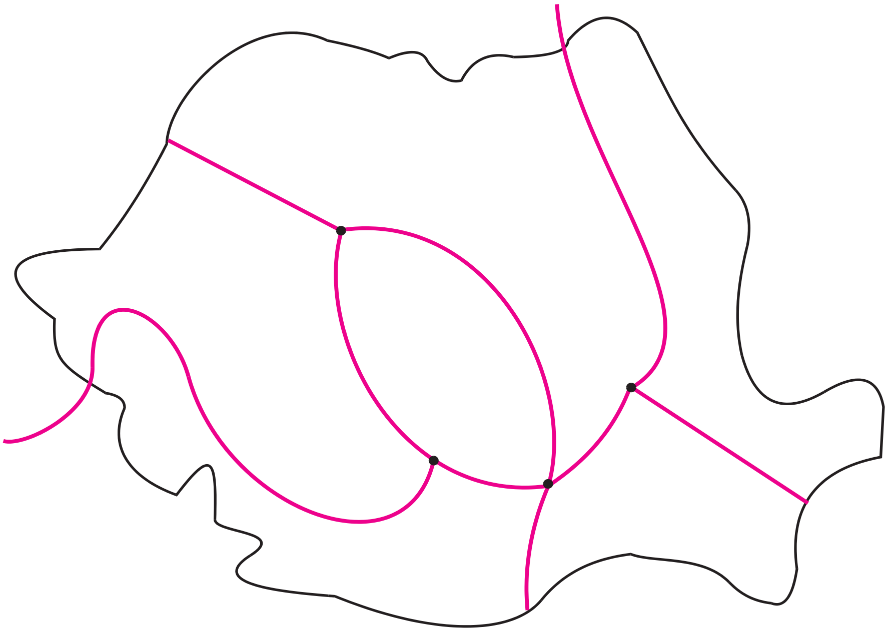
Exemplul 3: Rețeaua de drumuri europene

În figura de mai jos este reprezentată o parte a rețelei de drumuri europene de pe teritoriul României.



❼ Identifică orașele în care se ramifică drumurile europene de pe teritoriul României.

Pentru a fi utilizată la promovarea în străinătate a turismului în România și pentru a fi mai ușor de utilizat de către turiștii străini, harta a fost schematizată astfel:



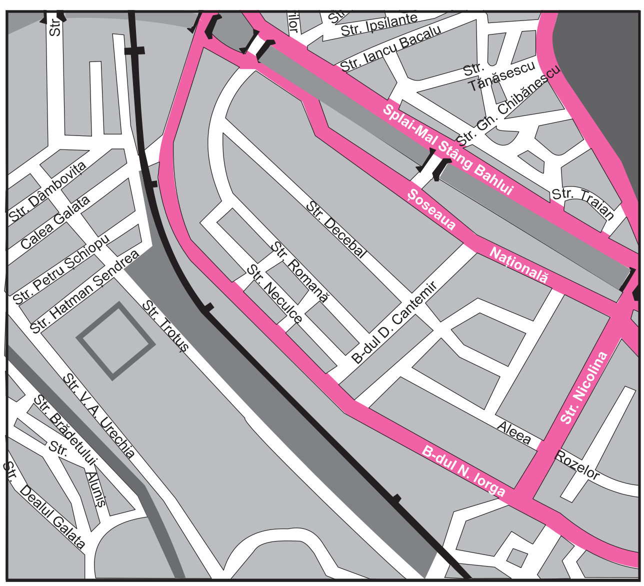
⚠ *În fiecare dintre exemplele anterioare sunt importante punctele în care traseele se ramifică.*

*Aceste puncte se pot numi **stații de corespondență** (la metrou) sau **intersecții** (pe harta orașului). În cazul rețelei de cale ferată, localitățile în care traseele se ramifică se mai numesc și **noduri de cale ferată**.*

❽ *Este orașul tău un nod de cale ferată? Ce condiție crezi că trebuie să îndeplinească o stație de tren pentru a fi considerată nod de cale ferată?*

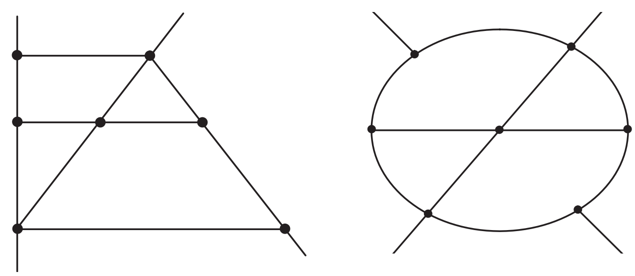
Exerciții și probleme

1. Realizează o schemă cu principalele artere ale orașului Iași, utilizând pentru aceasta harta de mai jos.



2. Găsește cât mai multe denumiri sugestive pentru punctele în care traseele unei rețele de transport se ramifică. Utilizează eventual un dicționar în acest scop.

3. Alexandru și Tudor au reprezentat schematic străzile din cartierul lor. Ei și-au imaginat în mod diferit cartierul în care locuiesc, realizând desenele:



Pot reprezenta aceste scheme același cartier?

4. Reprezintă printr-o schemă activitățile din programul de dimineață al lui Matei: „Mă scol, apoi mă spăl. Uneori fac gimnastică, alteori iau direct micul dejun pregătit de mama. (Uneori, îmi pregătesc eu singur micul dejun.) Apoi îmi verific ghiozdanul și plec la școală.”

5. Realizează o schemă a traseului tău de acasă la școală. Marchează principalele 4 străzi pe acest traseu.

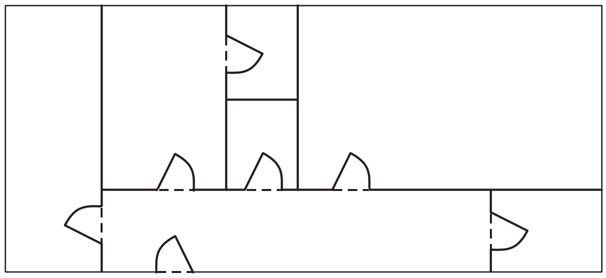
Analizăm şi generalizăm!

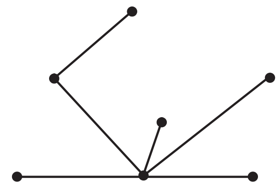
♦ Ce este un graf?

În multe situații cotidiene, o reprezentare schematică este preferabilă unei reprezentări detaliate. În acest fel, ne putem concentra atenția asupra esențialului.

De exemplu, în proiectarea rațională a unei locuințe, arhitecții pot folosi planul acesteia (desenat în stânga), dar și reprezentarea schematică de mai jos (desenată în dreapta, în care încăperile au fost înlocuite cu puncte, iar accesul dintr-o încăpere în alta este sugerat prin unirea punctelor corespunzătoare).

❶ Realizează schematic planul propriei locuințe. Folosește două tipuri de reprezentări, sugerate de desenele din dreapta.





Reprezentarea schematică a locuinței ne poate da o idee despre funcționalitatea acesteia.

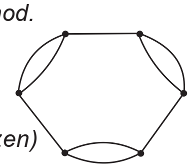
Să reținem!

O reprezentare geometrică în care apar noduri unite prin muchii se numește *graf*.
Un graf este determinat de mulțimea *nodurilor* și a *muchiilor* sale. Nodurile sunt extremități de muchii.

⚠ În practică, s-au dovedit utile și grafurile cu muchii multiple (multigrafuri), în care pot exista mai multe muchii care unesc două noduri. De exemplu, printr-un astfel de multigraf se reprezintă molecula de benzen; în fiecare nod se găsește gruparea CH, a cărei valență, 3, este egală cu numărul de muchii ce pleacă din acest nod.

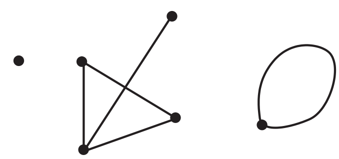
C_6H_6

(Benzen)



• Punctul care nu este legat de nici un alt punct se numește nod izolat.

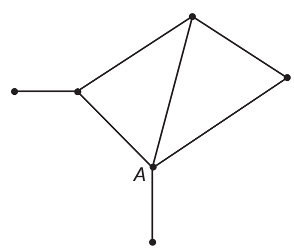
Nodurile corespunzătoare unor muchii nu trebuie neapărat să fie distincte. Dacă două noduri coincid, avem o buclă.



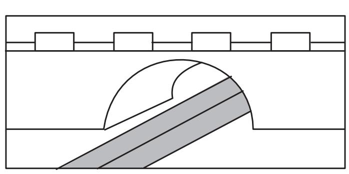
Două muchii pot avea numai un nod ca punct comun. Două noduri pot fi unite prin cel mult o muchie. Numărul de muchii care pleacă dintr-un nod se numește *ordinul nodului*.

Exemplu

Reprezentarea schematică alăturată este un graf. Acest graf are 6 noduri și 7 muchii. Ordinul nodului A este 4.



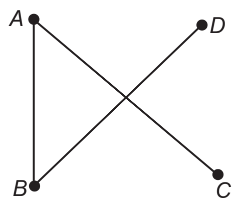
❷ Desenează un graf care are 6 noduri și 8 muchii. Câte noduri și câte muchii are graful locuinței tale? Ce reprezintă în acest caz nodurile? Dar muchiile? Ce reprezintă ordinul unui nod?



În reprezentarea prin desen, două muchii ale unui graf se pot intersecta într-un punct care nu este un nod. De exemplu, în acest mod se reprezintă pe harta unui oraș două șosele suprapuse.

Graful din dreapta are 4 noduri și 3 muchii.

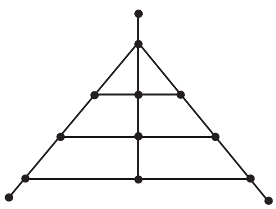
Punctul de intersecție al muchiilor *AC* și *BD*, nefiind un capăt al unei muchii, nu este nod.

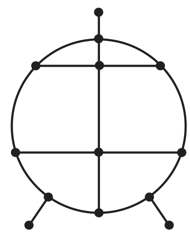


❸ *Care este numărul maxim de muchii ale unui graf cu 6 noduri? Dar cel minim?*

Să observăm!

Cele două grafuri de mai jos pot reprezenta planul aceluiași cartier; chiar dacă „străzile” nu au aceeași formă în cele două desene, ele unesc aceleași „intersecții”. Pentru orientarea în teren, oricare dintre aceste reprezentări este suficientă.





Să reținem!

Două grafuri sunt *izomorfe* dacă au același număr de noduri și de muchii și dacă există o numerotare a nodurilor din cele două grafuri astfel încât două noduri sunt unite (printr-o muchie) pe primul graf dacă și numai dacă nodurile corespunzătoare sunt unite și pe al doilea graf. În grafuri izomorfe, nodurile corespunzătoare au ordine egale.

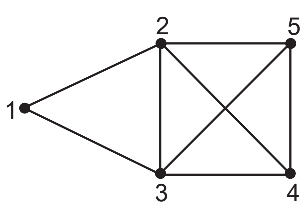
⚠ *Spunem pe scurt că grafurile izomorfe codează aceeași informație.*

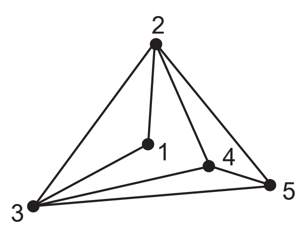
La grafurile izomorfe poziționarea vârfurilor nu contează, important este modul de conectare a acestora.

⚠ *Este foarte important să putem determina dacă două grafuri sunt izomorfe sau nu. De exemplu, acest lucru este esențial în realizarea unui montaj electronic pornind de la schema acestuia: montajul trebuie să respecte indicațiile schemei, dar poate fi poziționat altfel în spațiu.*

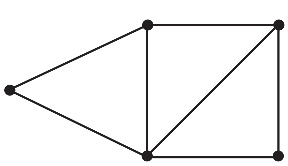
Exemple

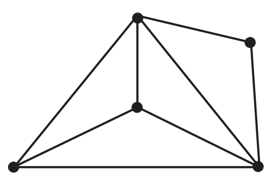
1) Grafurile următoare sunt izomorfe.



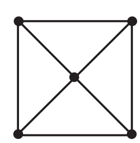


2) Grafurile următoare nu sunt izomorfe.

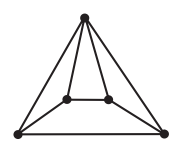




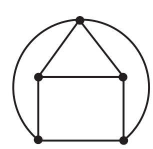
❹ *Decide care dintre grafurile următoare sunt izomorfe.*



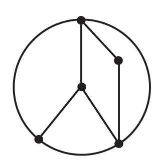
a)



b)



c)



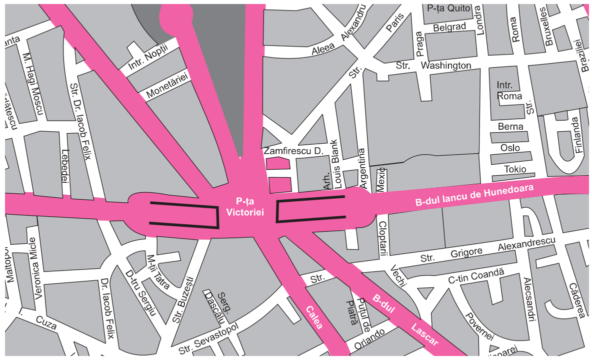
d)

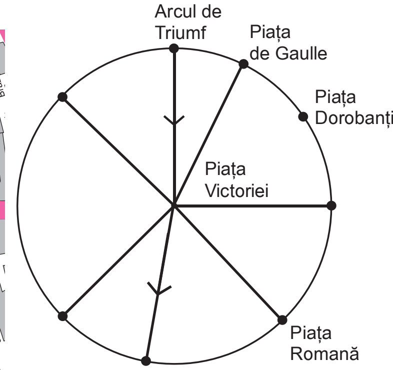
♦ Ce este un graf orientat?

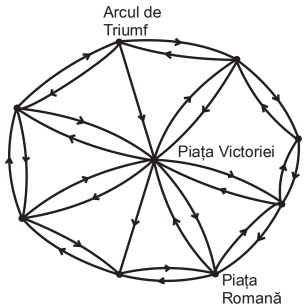
Să analizăm!

Străzile unui oraș pot fi parcurse de vehicule în ambele sensuri, sau pot avea sens unic. O astfel de situație poate fi marcată pe schema orașului, adăugând străzilor o săgeată care indică sensul de parcurs.

De exemplu, să considerăm principalele artere din zona Piața Victoriei din București și reprezentarea printr-un graf a acestora.







Săgețile de pe graf corespund arterelor rutiere cu sens unic. Pentru a marca existența dublului sens pe celelalte bulevarde, putem completa graful de mai sus, adăugând muchii pentru fiecare sens de parcurgere. Obținem astfel figura reprezentată în stânga.

În general

O reprezentare geometrică în care apar noduri unite prin muchii orientate (muchii pe care a fost precizat un sens de parcurgere) se numește *graf orientat*. Într-un graf orientat, două noduri pot fi unite prin cel mult o muchie de un sens dat. Muchiile unui graf orientat se mai numesc și *arce*.

❺ *Desenează un graf orientat care are 4 noduri și 7 arce.*

❻ *Care este numărul maxim de arce ale unui graf orientat cu 4 noduri? Dar cel minim?*

❼ *Identifică diferite situații ce se pot reprezenta prin grafuri orientate.*

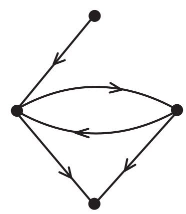
❽ *Numește alte perechi de muchii (arce), respectiv noduri adiacente în cele două grafuri.*

❾ *Trasează un graf care să descrie drumul pe care-l parcurgi de acasă până la școală. Vârfurile sau nodurile vor desemna intersecția dintre două sau mai multe străzi; segmentele de dreaptă vor corespunde străzilor parcurse, pe care trebuie să indici denumirile acestora.*

Marchează pe un subgraf drumul cel mai scurt.

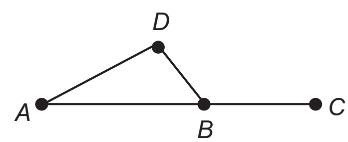
Exemple

• Reprezentarea schematică alăturată este un graf orientat. Acest graf are 4 noduri și 5 arce.

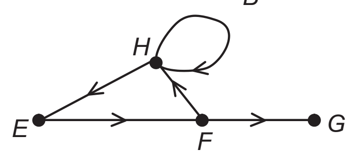


Două noduri distincte unite printr-o muchie (arc) se numesc *adiacente*.
Două muchii (arce) distincte cu o extremitate comună se numesc *adiacente*.

• Graful alăturat este neorientat. Muchiile *AB* și *AD* sunt adiacente. Nodurile *B* și *D* sunt adiacente.



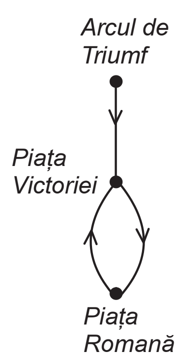
• Graful din dreapta este un graf orientat. Arcele *HE* și *EF* sunt adiacente. Nodurile *H* și *E* sunt adiacente, iar *H* și *G* sunt neadiacente.



Să observăm!

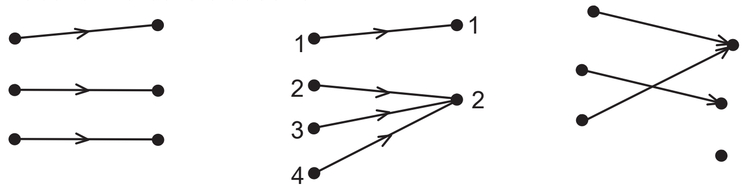
Dacă din graful reprezentând circulația pe străzile adiacente cu Piața Victoriei din București (reprezentat mai sus), ne interesează numai modul cum se poate circula între Arcul de Triumf și Piața Romană, putem elimina celelalte arce. Obținem în acest caz graful alăturat.

Acesta este un subgraf. Un subgraf se obține dintr-un graf suprimând unul sau mai multe noduri, precum și muchiile adiacente.



♦ Ce legătură este între graf și funcție?

Alex a făcut următoarele desene:



Apoi, i-a explicat Mariei: „Am desenat trei grafuri. Dar, privindu-le din nou, pot să le consider ca fiind trei funcții. Deci, graful este o funcție”.

Maria i-a răspuns:

„Să considerăm grafurile reprezentate în figurile de mai jos. Primul este neorientat, iar cel de-al doilea este orientat.

La o privire superficială, am fi tentați să spunem că avem de-a face cu o funcție definită pe mulțimea nodurilor cu valori tot în mulțimea nodurilor. Această afirmație nu este însă adevărată.”

10 *Explică raționamentul Mariei folosind un alt exemplu.*

⚠ *Eroarea este cauzată de înțelegerea vagă a definiției unei funcții.*

Să comparăm!

Să ne amintim definiția funcției: Fie A și B două mulțimi nevide. Orice lege f prin care fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un element $y = f(x) \in B$ unic și bine definit se numește *funcție* definită pe A cu valori în B și este notată $f : A \to B$.

Deoarece prin legea f oricărui $x \in A$ îi corespunde un element $y \in B$ și numai unul, atunci funcția se mai numește *aplicație univocă de la A la B*.

Pentru a clarifica diferența dintre cele două noțiuni (adică funcție, respectiv graf), putem vorbi despre aplicația multivocă.

⚠ *O funcție este un triplet. Funcția $f : A \to B$ este bine definită atunci când se cunosc cele trei elemente A, B, f.*

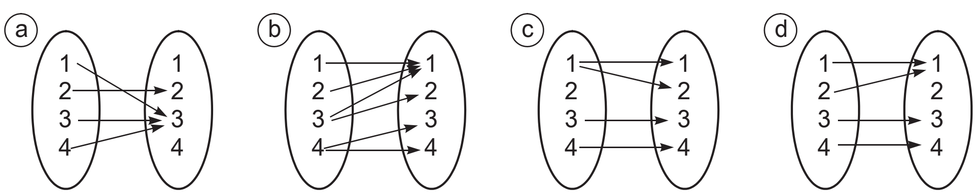
• *O aplicație multivocă* a mulțimii A în mulțimea B este o lege prin care fiecărui element $x \in A$ îi corespunde o submulțime bine definită a lui B (eventual submulțimea vidă).

Exemplu

Numai în situațiile a și d sunt reprezentate funcții. În situația b avem o aplicație multivocă deoarece, de exemplu, lui 3 îi corespunde mulțimea {1; 2}.

11 *Ce fel de aplicație este reprezentată la c?*

12 *Explică diferența între o aplicație univocă și o aplicație multivocă în cazul desenelor alăturate.*



Așadar, s-au conturat următoarele două moduri de descriere (definire), ale unui graf, și anume:

• Prin cunoașterea mulțimii nodurilor și a mulțimii muchiilor (arcelor).

• Prin cunoașterea mulțimii nodurilor și a aplicației mulțimii nodurilor în ea însăși.

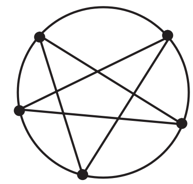
Aceste două moduri de definire sunt legate intrinsec între ele, în sensul că, dacă avem dată mulțimea tuturor muchiilor (arcelor), ea determină aplicația, și reciproc, dacă este cunoscută aplicația multivocă, ea definește mulțimea muchiilor (arcelor) grafului.

13 *Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b, c\}$. Construiește o funcție definită pe A cu valori în B și o aplicație multivocă a mulțimii A în mulțimea B. Reprezintă aceste aplicații cu ajutorul unor grafuri.*

♦ Tipuri de grafuri neorientate

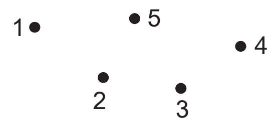
În aplicații, grafurile cu proprietăți speciale se dovedesc foarte utile. Câteva dintre aceste proprietăți sunt descrise în continuare.

Să analizăm!



La o recepție, se întâlnesc 5 prieteni. În mod firesc, fiecare dintre ei dă mâna cu ceilalți. Situația tuturor acestor interacțiuni se poate descrie printr-un graf complet, de ordin 5, adică prin graful din figura alăturată.

O situație complet diferită este cea în care 5 persoane invitate la o recepție nu se cunosc și, ca atare, nu dau mâna. Situația este reprezentată prin graful din figura alăturată.

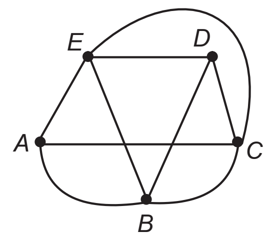


În general

Graful neorientat în care oricare două noduri sunt legate printr-o muchie se numește *graf complet.* Graful pentru care mulțimea muchiilor este nulă se numește *graf nul*. Altfel spus, graful nul are numai noduri izolate.

14 *Ordinul unui graf este dat de numărul nodurilor acestuia. Construiește grafurile complete de ordin 1, 2, 3, 4 și 5.*

Exemple



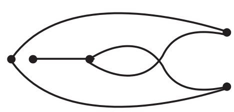
• Grafurile descrise prin poligoane convexe în care au fost duse toate diagonalele sunt grafuri complete.

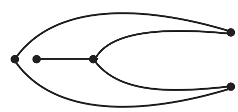
• Graful din figura alăturată nu este complet, deoarece nodurile *A* și *D* nu sunt legate prin muchii.

15 *Trasează două grafuri cu câte 4, respectiv 5 noduri, care nu sunt complete.*

Să analizăm!

Atunci când realizează rețeaua de electricitate a unei locuințe, electricienii au grijă ca două conductoare diferite să nu se atingă de-a lungul lor, deoarece ar fi pericol de scurtcircuitare. De aceea, ei evită să facă legături de tipul celor din graful din stânga și înlocuiesc această schemă cu un graf echivalent, cum este cel reprezentat în dreapta.





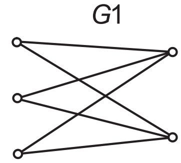
Aceleași probleme tehnice le ridică și construcția de autostrăzi: dacă nu se pot construi porțiuni suspendate, atunci două autostrăzi pot avea doar orașele terminale ca puncte comune.

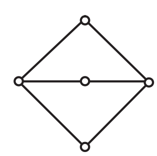
16 *Răspunde prin „Da” sau „Nu”:*
Grafurile alăturate sunt:
a) complete;
b) orientate;
c) izomorfe?

Să reținem!

Graful izomorf cu un graf reprezentat în plan, în care orice două muchii nu au decât noduri ca puncte comune, se numește *graf planar.*

*G*1 *G*2





Un graf planar poate fi desenat în plan, fără a avea muchii care se intersectează.

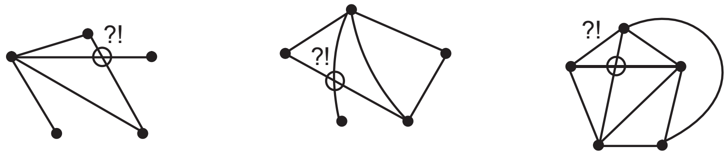
Exemplu

Graful *G*1 alăturat este planar, deoarece este izomorf cu *G*2, iar *G*2 este un graf plan, în care orice două muchii nu au decât noduri ca puncte comune.

Să analizăm!

Considerăm cinci orașe legate între ele prin autostrăzi, fiecare oraș fiind conectat cu celelalte patru. Proiectanții ar fi dorit să micșoreze costurile și să nu folosească porțiuni suspendate de autostradă. Totuși, oricât au încercat, ei nu au reușit să construiască un graf complet și planar cu 5 noduri, reprezentând schema dorită.

Câteva dintre încercările lor sunt desenate mai jos.



Ca urmare, ei au ajuns la concluzia că un astfel de graf nu există.

17 *Desenează în diverse moduri un graf complet cu 5 noduri. Verifică dacă un astfel de graf poate fi planar.*

Este graful complet cu 4 noduri un graf planar?

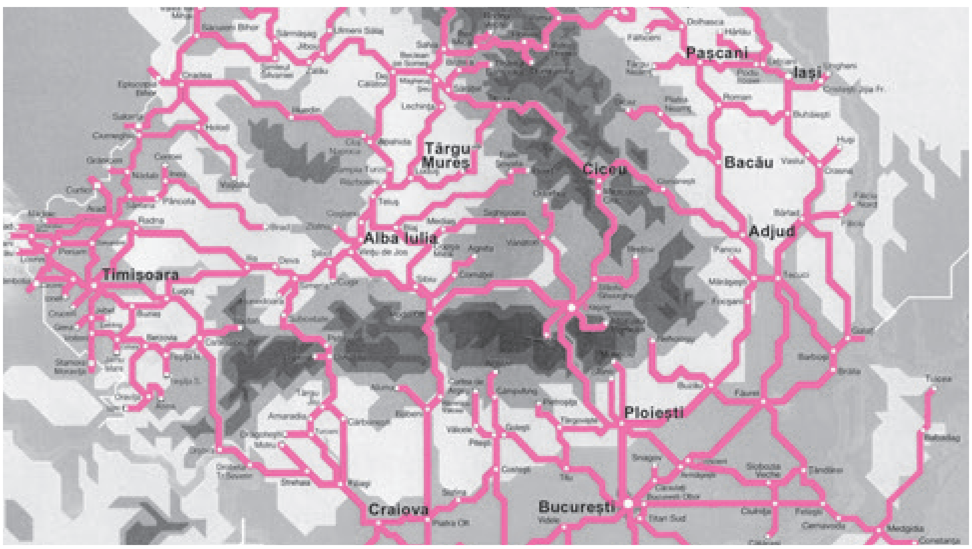
În general

Pentru $n \geqslant 5$, un graf complet cu n noduri nu este graf planar.

♦ Ce drumuri speciale pot fi descrise prin grafuri?

Să analizăm!

Schema de mai jos reprezintă rețeaua de căi ferate din România. Pentru a ajunge din Timișoara la Iași, un călător are mai multe posibilități de alegere a traseului. De exemplu, el poate merge pe ruta Timișoara-Craiova-București-Ploiești-Bacău-Pașcani-Iași sau pe ruta Timișoara-Alba Iulia-Târgu Mureș-Ciceu-Adjud-Bacău-Pașcani-Iași.



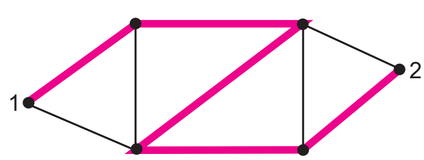
Pentru a fi funcțională, o rețea de transport trebuie să prevadă existența unui drum între oricare două localități.

Să reținem

Un traseu ce unește două noduri ale unui graf printr-o succesiune de muchii adiacente ale grafului se numește *drum*. Un graf se numește *graf conex* dacă orice două noduri sunt legate printr-un drum.

Exemplu

Traseul marcat pe graful alăturat este un drum. El unește nodurile 1 și 2; acestea sunt *extremitățile* drumului. Acest graf este conex deoarece între orice două noduri există un drum.

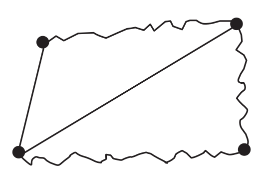


18 *Folosind harta rețelei de metrou din București (reprodusă la pagina 37), identifică toate drumurile posibile dintre Gara de Nord și Piața Sudului. Care dintre aceste drumuri este optim?*

Să observăm!

Drumul (sau lanțul) este o succesiune de muchii consecutive care permit trecerea de la un nod la altul. Dacă în succesiune fiecare muchie apare exact o dată sau toate nodurile sunt distincte, atunci drumul se numește *drum elementar*.

Linia ondulată este un drum elementar.

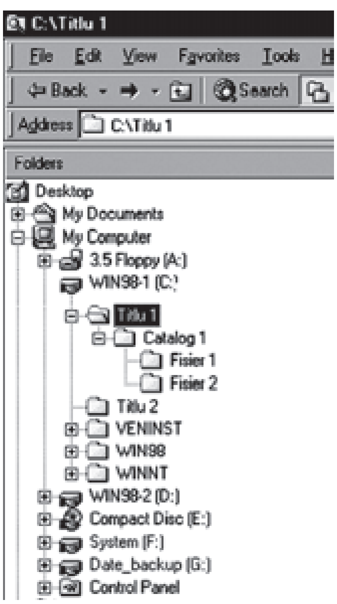


19 *Cum crezi că ar putea fi definit un drum pe un graf orientat? Cărei situații practice îi corespunde această noțiune?*

⚠ *Regulamentul CFR permite realizarea la preț redus a unor circuite turistice. Singura condiție impusă este ca nici o porțiune de drum să nu fie parcursă de mai multe ori (într-un sens sau altul).*

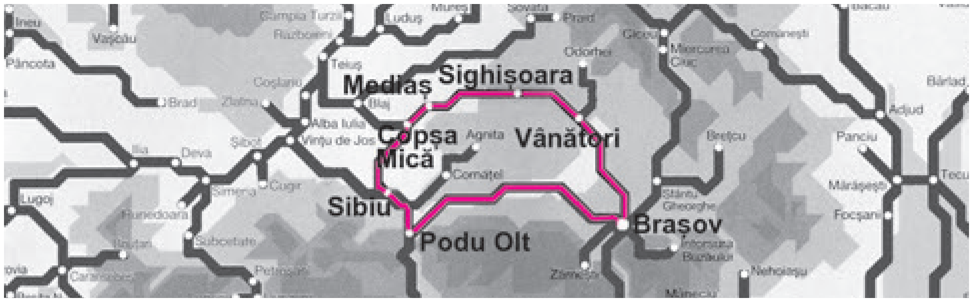
20 *Proiectează un circuit turistic CFR care să treacă prin cât mai multe dintre orașele României. Interesează-te la agențiile de voiaj CFR cât va costa un bilet pe acest circuit. Poți face astfel importante economii pentru petrecerea vacanțelor într-un mod plăcut.*

21 *Informează-te și răspunde! Care este prețul biletelor pentru tren personal, pe fiecare muchie a grafului magistralei București-Constanța?*



Exemplu

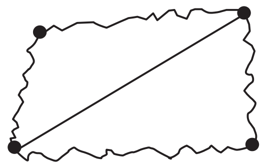
Rețeaua CFR din România este un graf conex, deoarece între oricare două gări se poate ajunge călătorind doar cu trenul.



Drumul marcat pe graful rețelei căilor ferate este un *circuit*. Extremitățile unui circuit coincid.

Să reținem!

Circuitul sau *drumul închis* sau *ciclul* este un drum care începe și se termină în același nod. În aceste condiții, la un circuit, nodul inițial coincide cu nodul final.



Exemplu

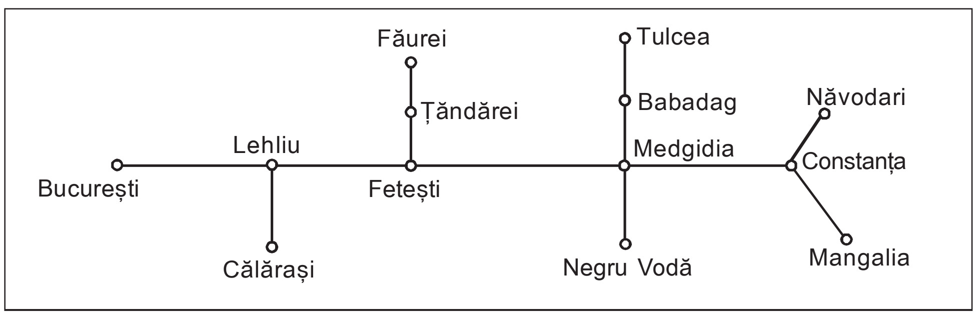
Linia ondulată marcată în dreapta este un circuit.

Să particularizăm!

Diverse situații se pot reprezenta prin grafuri de o formă particulară.

Exemplul 1: Rețeaua CFR

Subgraful rețelei CFR corespunzător magistralei București-Constanța este:



Acestui graf îi putem asocia, de exemplu, costul unui bilet pe fiecare tronson. Obținem în acest mod un graf ponderat.

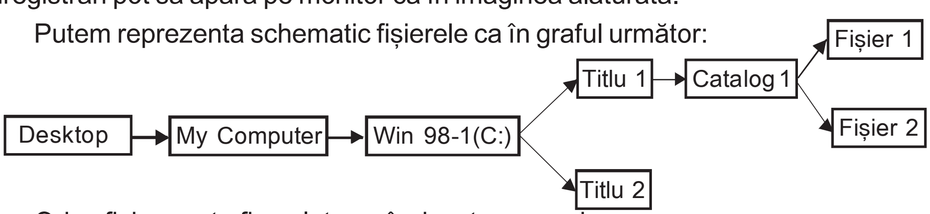
În general

Se numește *graf ponderat* (sau graf valuat) un graf în cadrul căruia fiecărui arc (muchie) îi este asociată o valoare. Valoarea asociată arcului poate avea semnificația de „cost" a legăturii între cele două noduri sau de „distanță" între noduri.

Exemplul 2: Organizarea fișierelor în computer

Computerele înmagazinează date în directoare sau fișiere consecutive. Aceste înregistrări pot să apară pe monitor ca în imaginea alăturată.

Putem reprezenta schematic fișierele ca în graful următor:

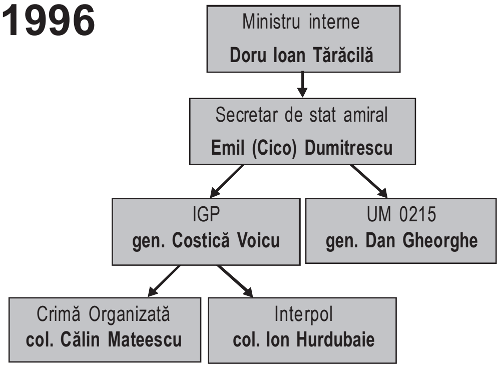


Orice fișier poate fi apelat urmând un traseu unic.

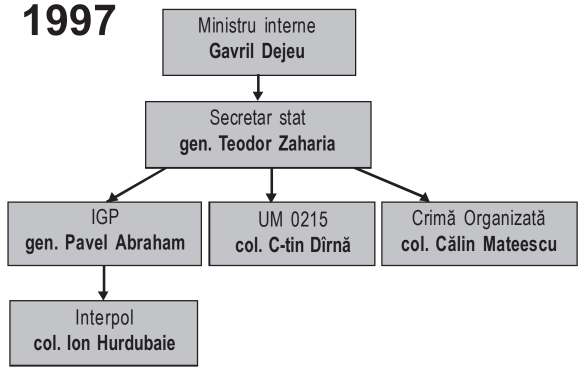
Exemplul 3: Structuri decizionale

Ziarele prezintă deseori structura de conducere a unor ministere sub forma unor arbori. Astfel, în anii 1996 și 1997, Ministerul de Interne a avut următoarea conducere:

1996



1997



Grafurile prezentate în exemplele 1, 2 și 3 sunt conexe, dar nu au circuite.

Să reținem!

Un graf conex, fără circuite, se numește *arbore*.
Într-un arbore, orice două noduri se pot uni printr-un traseu unic.

Să demonstrăm!

Fie G un graf arbore cu n noduri și m muchii. Atunci $n = m + 1$.

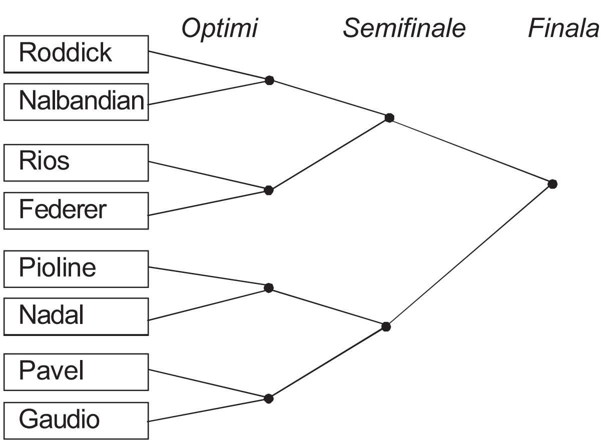
Demonstrăm proprietatea prin inducție după n.

Dacă $n = 1$, atunci graful G are un singur nod și deci $m = 0$. În acest caz, relația $n = m + 1$ este verificată.

Să presupunem că egalitatea este adevărată pentru grafuri cu n noduri și să o demonstrăm pentru grafuri cu $n + 1$ noduri. Dacă P este un nod terminal al grafului (adică un nod de ordinul 1), atunci el este unit cu un singur alt nod, notat Q. Fie G_1 graful obținut din G prin eliminarea nodului P și a muchiei PQ. G_1 este tot un arbore, cu $n' = n - 1$ noduri și $m' = m - 1$ muchii. Deoarece $n' = m' + 1$ ..., deducem că $n = m + 1$. Demonstrația este încheiată.

Să aplicăm!

Turneele de tenis se desfășoară conform unui tablou al jocurilor ce reprezintă un arbore. Astfel, la turneul *Australian Open*, tabloul principal a fost următorul:



Conform regulamentului, unii jucători nu dispută partide în primele tururi. Câte jocuri se dispută, dacă la start s-au prezentat 105 sportivi? (Aplică în calcule teorema anterioară.)

⚠ *Traseul turistic al multor muzee este organizat sub forma unui arbore.*

22 *Rețeaua electrică a unei locuințe, alcătuită cu conductori bifiliari, este organizată sub forma unui arbore. Poți explica de ce această rețea nu poate avea circuite?*

Desenează graful rețelei electrice din locuința ta.

23 *Care sunt pașii unui raționament prin inducție?*

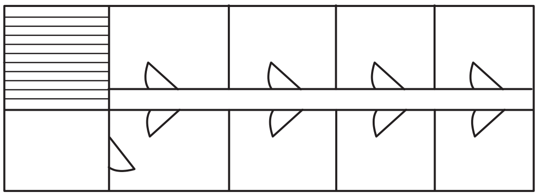
⚠ *Orice competiție sportivă în care jocurile sunt eliminatorii poate fi descrisă printr-un arbore.*

24 *Întocmește arborele corespunzător Campionatului Mondial de Fotbal 2006, după etapa grupelor.*

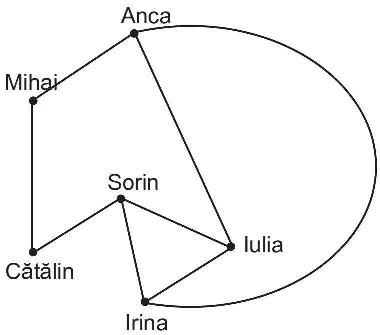
Ce semnificație poate avea afirmația „Brazilia și Germania au fost în zone diferite ale tabloului”?

Exerciții și probleme

1. În figura de mai jos este prezentat planul etajului 1 al unui hotel. Reprezintă acest plan sub forma unui graf.

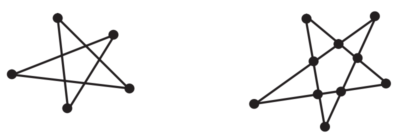


2. Câțiva prieteni au vorbit între ei la telefon, pentru a detalia planul unei excursii. Când s-au întâlnit, ei au reconstituit convorbirile avute, reprezentându-le sub forma următorului graf:



Câte convorbiri au fost efectuate? Cine a vorbit de cele mai multe ori la telefon? Dar de cele mai puține ori? Reprezintă graful convorbirilor într-o altă formă.

3. Verifică dacă următoarele două grafuri sunt izomorfe:



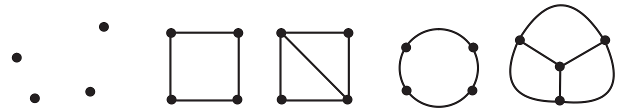
4. Asociază fiecare noțiune cu definiția care o caracterizează.

A. Punct izolat	1. este cel în care se poate ajunge din orice nod în oricare nod de-a lungul muchiilor.
B. Graf conex	2. este cel în care orice două noduri sunt legate exact printr-o muchie.
C. Grafurile izomorfe	3. este cel în care muchiile nu au puncte de intersecție.
D. Graf complet	4. nu este legat prin muchii de nici un alt nod.
E. Graf planar	5. codează aceeași informație.

5. Desenează un graf cu 5 noduri și 4 muchii.

6. Construiește un graf neorientat și un graf orientat, ambele determinate de 6 puncte.

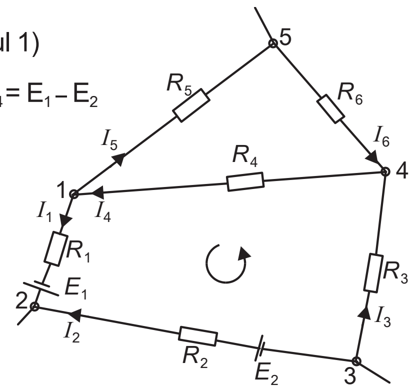
7. Stabilește tipul fiecărui graf:

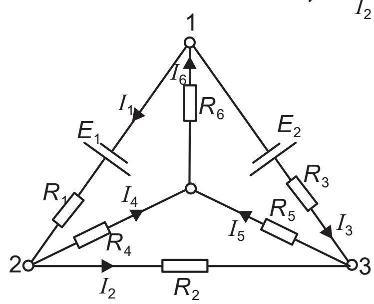


8. Ai învățat la fizică, în clasa a X-a, legile lui Kirchoff care sunt aplicabile, de exemplu, la calculul rețelelor electrice în curent continuu. Aceste legi se referă la intensitățile curenților dintr-un nod al rețelei și la tensiunile electromotoare ale generatoarelor dintr-un circuit al rețelei. De exemplu, pentru rețeaua de mai jos, legile lui Kirchoff se exprimă prin:

$I_1 - I_4 + I_5 = 0$ (în nodul 1)

$I_1R_1 - I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4 = E_1 - E_2$ (în circuitul 1-2-3-4)





Scrie relațiile deduse din legile lui Kirchoff pentru toate nodurile și circuitele rețelei reprezentată prin graful alăturat.

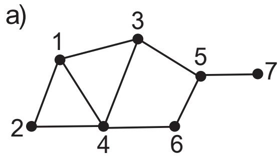
9. Un graf se numește *graf regulat de ordinul* r dacă orice nod are ordinul r.

a) Desenează un graf regulat de ordinul 3, care are 6 noduri.

b) Demonstrează că într-un graf regulat de ordinul 3, numărul de noduri este par.

10. Pentru un graf planar, să numim „circuit elementar” un circuit care nu închide în interiorul său nici un nod și nici o muchie.

a)



Pe graful alăturat, 1341 este un circuit elementar, dar 13421 nu este circuit elementar. Determină toate circuitele elementare ale grafului.

b) Demonstrează că într-un graf planar și conex are loc relația: $N - M + C = 1$, unde N = numărul de noduri, M = numărul de muchii, C = numărul de circuite elementare.

c) Demonstrează că graful complet cu 5 noduri nu este graf planar.

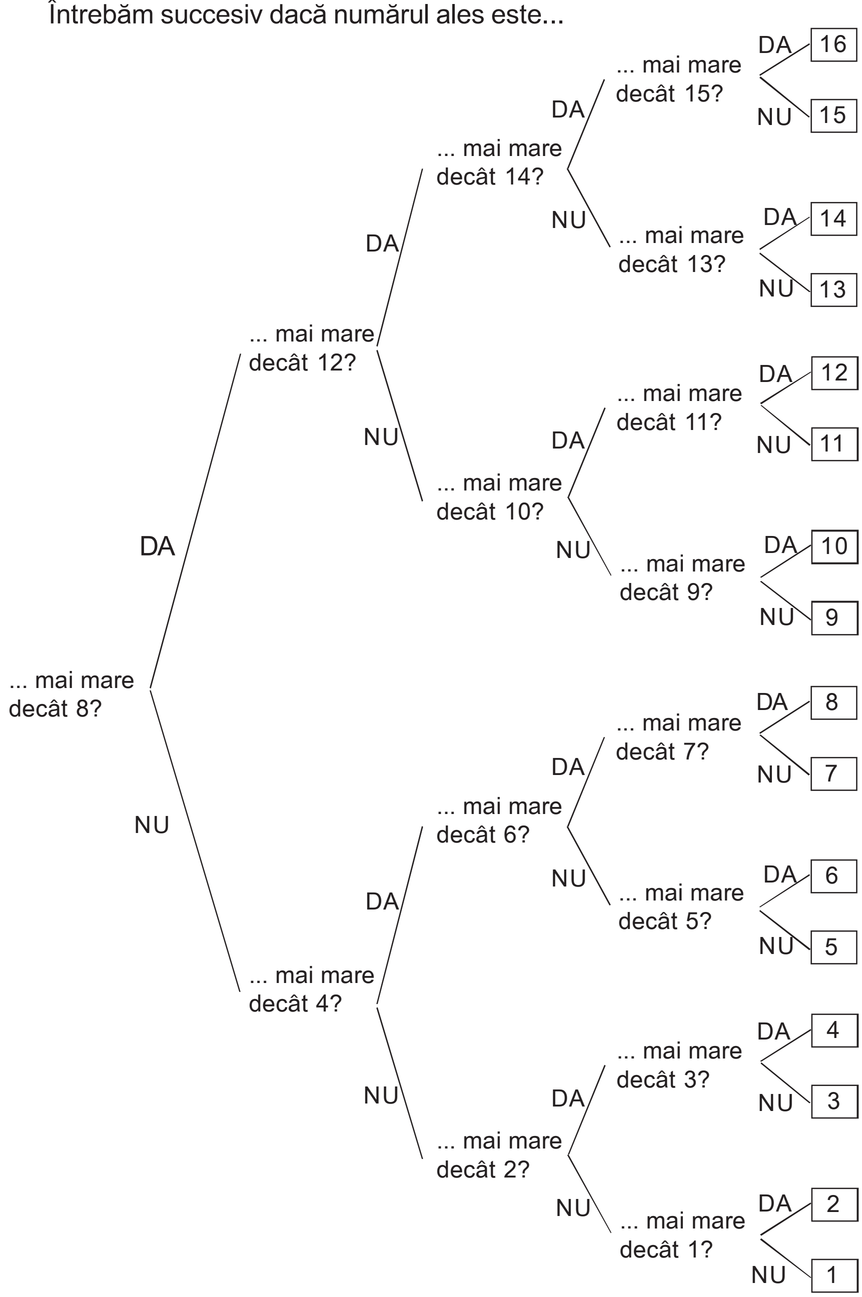
Aplicăm și dezvoltăm!

Teoria grafurilor are numeroase aplicații practice.

Exemplul 1: Organizarea datelor

Pentru a ghici un număr natural cuprins între 1 și 16 din cel mult 4 întrebări la care se răspunde cu da sau nu, putem organiza încercările ca în graful de mai jos.

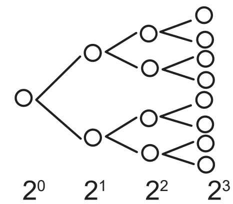
Întrebăm succesiv dacă numărul ales este...



Succesiunea întrebărilor are legătură cu scrierea numerelor în baza 2.

❶ *Câte întrebări vor fi necesare pentru a afla un număr natural cuprins între 1 și 32? Dar un număr natural cuprins între 1 și 1 000?*

Un arbore de același tip se obține, spre exemplu, în cazul diviziunii celulare.



❷ *Ce tip de funcție modelează procesul diviziunii celulare?*

Exemplul 2: *Rezolvarea ecuațiilor*

Știm că pentru $a > 0$, avem $|y| = a$ dacă și numai dacă $y = a$ sau $y = -a$.

Pentru a rezolva ecuația $||x + 1| - 3| = 2$ putem aranja calculele sub forma unui arbore, astfel:

$$||x+1|-3| = 2 \quad \begin{cases} |x+1|-3 = 2,\ |x+1| = 5 & \begin{cases} x+1=5 \Rightarrow x=4 \\ x+1=-5 \Rightarrow x=-6 \end{cases} \\ |x+1|-3 = -2,\ |x+1| = 1 & \begin{cases} x+1=1 \Rightarrow x=0 \\ x+1=-1 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \end{cases}$$

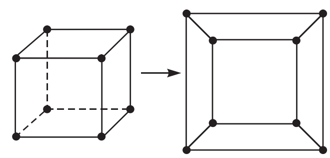
Obținem mulțimea de soluții $S = \{4; -6; 0; -2\}$.

❸ *Rezolvă ecuațiile următoare, aranjând calculele sub forma unui arbore.*
$|4 - |3 + |2 - x||| = 1$;
$|2 - |2 - |2 - x||| = 1$.

Exemplul 3: *Graful asociat unui poliedru*

Anumite proprietăți ale poliedrelor pot fi mai bine evidențiate dacă acestea sunt reprezentate cu ajutorul unor grafuri.

Corina a construit un cub cu o față transparentă. Ea a privit în interiorul cubului ca printr-o fereastră și a desenat imaginea observată. Văzând desenul Corinei, Vlad a constatat: „Ai reprezentat cubul sub forma unui graf planar."



⚠ *Cele două grafuri din dreapta sunt izomorfe.*

În general

Orice poliedru convex se poate reprezenta sub forma unui graf. Acesta este graful asociat poliedrului. Graful asociat unui poliedru se obține prin aplatizarea poliedrului: deformăm unele dintre fețe (și muchii) până când toate vârfurile ajung în același plan.

❹ *Imaginează-ți cum aplatizăm o prismă triunghiulară și desenează graful asociat acesteia.*

Exemplul 4: *Logică și grafuri*

Analiza logică făcută de Anton Pann în versurile următoare poate fi înlocuită cu o soluție rapidă pe bază de graf.

Lupul, țapul și varza

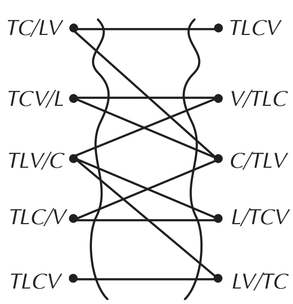
de Anton Pann

Un țăran la târg plecase.
Și de vânzare luase
Un lup, un ied și o varză.
Nevrând nici una să piarză
Și nefiind nici călare,
Vrea să treacă un râu mare,
Care era să-l înoate
Și să le treacă pe toate.
Stând în loc, se socotește
Și întru sine șoptește,
Cum și în ce chip să facă
Câte una să le treacă,
Că fiind apa prea lată,
Nu putea două deodată.
„Să trec întâi lupul, zice,
Capra varza o să-mi strice,
Să trec varza, ș-așa încă,
Lupul capra îmi mănâncă."
Deci dacă-i veni în minte
Și trecu capra-nainte,
Stătu iar să se gândească
Că cum să o nemerească.
Gândind, zicea întru sine:
"Trecui una, merse bine,
Pân-aci toate scăpară.
Acum care să trec dară?
Trecând varza și lăsând-o,
O strică iedul rozând-o,
Precum lupul și el iară
Îmi face iedul papară.
O, ce vită neunită
Și marfă nepotrivită!"
Dar mai gândind: „Ha! el zise,
Nevoia minte-mi trimise".
Trecu lupul, clătind capul,
Ș-ntoarse înapoi țapul.
Trecu și varza îndată,
Mereu făcând judecată,
Și mergând a doua oară,
Trecu țapul supsioară.

Omul dacă și gândește,
Orice i se înlesnește,
Prejudecând cele grele,
Le găsește ușurele,
Că pe cât el să gândește,
P-atât mintea-i se tocește.
Și orice, cu judecată,
Nu-l greșește niciodată.

❺ *Folosind graful de mai jos (în care T, L, C, V semnifică țăranul, lupul, capra, respectiv varza) explică soluția problemei propuse de Anton Pann.*

Ce legătură este între poveste și drumuri în graf?



Exerciții și probleme

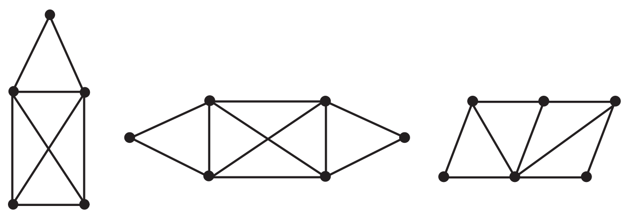
1. Afluenții unui râu pot fi reprezentați sub forma unui graf arbore. Desenează graful ce reprezintă râul Olt și afluenții lui.

2. Trei prieteni, notați *A*, *B*, *C*, joacă tenis de câmp după sistemul „învingătorul rămâne“. Reprezintă printr-un graf situațiile ce pot să apară după 5 jocuri, dacă prima dată joacă *A* cu *B*.

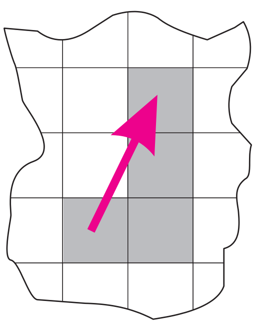
3. Desenează un graf complet care are 7 noduri. Marchează un circuit pe acest graf.

4. În care dintre următoarele situații putem reprezenta datele printr-un arbore?
a) Rețeaua de străzi dintr-un cartier.
b) Rețeaua de distribuție a apei potabile a unui oraș.
c) Rețeaua de distribuție a gazului metan într-un oraș.

5. Desenează figurile, fără a ridica creionul de pe hârtie.

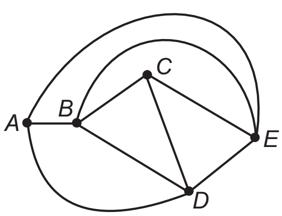


6. Transpune într-o problemă despre grafuri întrebarea următoare.
Există un traseu pe care îl parcurge calul pe o tablă de șah cu dimensiunile 4×4 astfel încât acesta să treacă prin fiecare câmp al tablei o singură dată? (Vă reamintim că, la șah, calul se mută în formă de L, ca în figura alăturată).



Este util ca în graful cerut să unești printr-o muchie oricare două câmpuri între care poate fi mutat calul.

7. Determină ordinul fiecărui nod al grafului de mai jos.

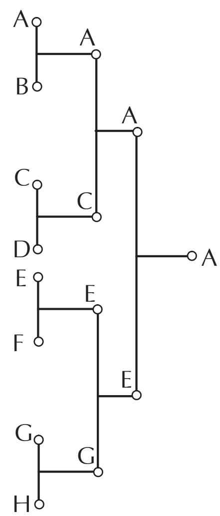


Dacă acest graf este reprezentarea schematică a rețelei de troleibuze a unui oraș, ar putea fi parcursă rețeaua de un troleibuz, care trece pe fiecare stradă o singură dată?

8. Desenează:
a) un graf conex complet;
b) un graf conex care nu este complet.

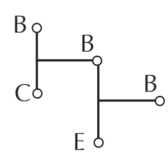
9. Câte configurații diferite pot forma 3 pioni albi și 4 negri așezați pe o tablă de șah 3 × 3? Folosește grafuri pentru a număra aceste configurații.

10. Arborele de mai jos redă meciurile de cupă a 8 finaliști. În această competiție, nu toți jucătorii se confruntă între ei. Care sunt acei jucători care nu se confruntă direct?



Imaginează-ți metode prin care acest tip de organizare a finalelor unor concursuri poate fi îmbunătățit.

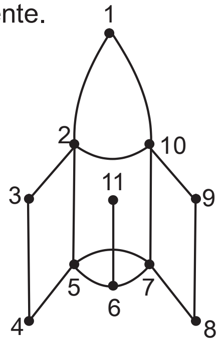
11. Într-o competiție de 8 jucători, de tipul celei de mai sus, numărul celor învinși de campion este 3. Câte meciuri ar mai fi necesare pentru a afla care este cel mai bun dintre cei 3? Folosește graful alăturat.



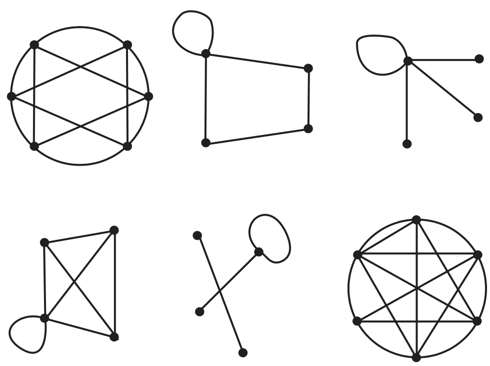
12. Reprezintă printr-un graf cazurile ce pot să apară în rezolvarea următoarelor probleme.
a) Dintre 5 monede identice ca mărime și aspect, una este mai ușoară. Folosind o balanță, determină prin cel mult două cântăriri moneda mai ușoară.
b) Dintre 5 monede identice ca mărime și aspect, una este de masă diferită față de celelalte (fiind mai ușoară sau mai grea!). Folosind o balanță, determină prin cel mult trei cântăriri moneda diferită.

13. Reprezintă cu ajutorul unui graf orientat funcția:
$f : \{0; 1; 2\} \to \{1; 2; 3; 4\},\ f(x) = x + 1$.

14. În graful următor precizează nodurile și muchiile acestuia. Dă exemplu de noduri adiacente și de muchii adiacente.



15. Identifică perechi de grafuri izomorfe printre grafurile reprezentate mai jos.



16. Fie mulțimile $A = \{x \mid x$ oraș în Europa$\}$,
$B = \{y \mid y$ țară în Europa$\}$ și aplicațiile:
f(oraș x) = țara y pe teritoriul căreia se găsește orașul x.
g(țară y) = orașul x de pe teritoriul țării y.
Stabilește natura acestor aplicații.

17. a) Demonstrează că, în orice graf, suma ordinelor tuturor nodurilor este egală cu dublul numărului de muchii.
b) Reprezintă printr-un graf arborele genealogic al familiei voastre.

18. Caracterizează cu ajutorul ordinului unui nod:
a) funcțiile injective; b) funcțiile surjective.

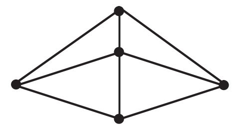
19. Desenează un graf de ordin 5 în care toate nodurile să fie impare. Este posibilă problema? Justifică.

20. Trasează un graf de ordin 6 în care toate nodurile să fie pare.

21. Cinci depozite fac schimb de mărfuri (distribuie produse și se aprovizionează) astfel:
- depozitul *A* face schimb de mărfuri cu depozitele *D*, *F*;
- depozitul *B* face schimb de mărfuri cu depozitele *A*, *C*;
- depozitul *C* face schimb de mărfuri cu depozitele *D*, *E*;
- depozitul *D* face schimb de mărfuri cu depozitul *F*.

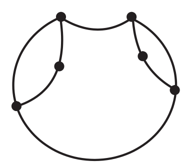
a) Trasează graful care descrie relațiile dintre cele 5 depozite.
b) Se stabilește un tip nou de regulă și anume: fiecare depozit este într-una dintre următoarele două situații: sau se aprovizionează (primește produse) sau distribuie produse. În rest, rămân aceleași relații între depozite. Trasează graful care descrie noua situație.

22. Se consideră următorul graf:

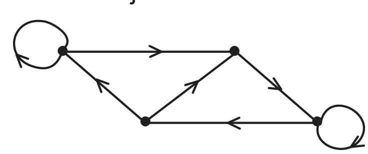


a) Stabilește gradul fiecărui nod.
b) Calculează suma tuturor gradelor și compară această sumă cu numărul muchiilor.
c) Determină numărul de noduri impare.
d) Indică un drum determinat de 4 noduri și un circuit cu 3 noduri.
e) Există un drum care să treacă o singură dată prin toate nodurile? Dar un circuit cu aceeași proprietate?

23. În graful următor, elimină numărul minim de muchii astfel încât graful obținut să nu mai conțină circuite.



24. Fie graful de mai jos:



a) Determină mulțimea nodurilor și mulțimea arcelor.
b) Numerotează nodurile și reprezintă printr-o diagramă cu săgeți aplicația multivocă a mulțimii nodurilor în ea însăși, care definește acest graf.

25. Rezolvă cu ajutorul unui graf arbore ecuația:
$|x + |2x - 1|| = 7$.

26. Determină toate tipurile de grafuri arbore care au șase noduri. Deci trebuie să desenezi câteva grafuri cu proprietățile: oricare două nu sunt izomorfe și oricare alt graf arbore cu șase noduri este izomorf cu unul dintre cele desenate.

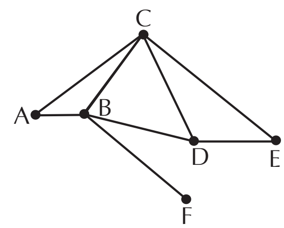
27. Desenează graful corespunzător următoarei aplicații multivoce. Mulțimea nodurilor este {A, B, C, D, E}, iar aplicația realizează asocierile:
A $\mapsto$ {B; C}; B $\mapsto$ {A; E}; C $\mapsto$ {A}; D $\mapsto$ $\varnothing$; E $\mapsto$ {B}.

Am reușit… ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- să identific tipul unui graf și elementele sale
- să transpun în reprezentare pe graf o problemă dată
- să utilizez grafuri pentru a determina soluții ale unor probleme
- să descriu toate variantele unei probleme cu ajutorul grafurilor?

Test de verificare



1. Pentru graful alăturat:
a) precizează numărul de noduri și numărul de muchii;
b) determină ordinul fiecărui nod;
c) identifică două trasee care unesc A cu E;
d) precizează un circuit al grafului;
e) elimină cât mai puține muchii pentru ca graful rămas să fie un arbore.

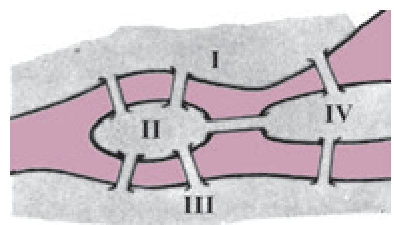
2. Reprezintă printr-un graf relația de divizibilitate între numerele naturale de la 1 la 10, unind printr-o muchie acele numere diferite care au proprietatea că unul dintre ele îl divide pe celălalt. Există pe acest graf drumuri de lungime 5?

3. Folosește graful situațiilor posibile pentru a calcula numărul variantelor de răspuns la un test-grilă format din 5 întrebări la care se răspunde DA sau NU.

4. Doi prieteni joacă tenis de câmp după sistemul „cel mai bun din 5 seturi“. Reprezintă printr-un graf toate situațiile ce pot să apară.

Lectură

Studiul unor structuri de tip graf a fost lansat pentru prima dată de Leonhard Euler în 1736. El a pornit de la problema celor șapte poduri din Konigsberg. Enunțul acestei probleme este următorul: există un traseu astfel încât fiecare dintre cele șapte poduri să fie traversat o singură dată?



Se poate observa imediat că itinerariul nu poate să înceapă și nici să se termine în cel puțin două dintre cele patru regiuni I până la IV. In aceste regiuni se intră și se iese. Totuși, deoarece în fiecare regiune se poate ajunge printr-un număr impar de poduri, un astfel de itinerar nu este posibil. Euler și-a pus o problemă mai generală: în ce condiții un graf conex dat poate fi parcurs pe un drum închis astfel încât fiecare muchie să se acopere exact o dată? Un drum de acest tip există dacă și numai dacă în fiecare nod se întâlnesc un număr par de muchii.

O altă problemă celebră care a dus la dezvoltarea teoriei grafurilor este cea a trasării unei hărți folosind numai patru culori. Se demonstrează relativ ușor că sunt suficiente cinci culori pentru a colora orice hartă. Cartografii știu din experiență că o hartă politică poate fi desenată cu patru culori astfel încât două țări cu frontiera comună să fie colorate diferit. Problema dacă aceste patru culori sunt suficiente întotdeauna nu a putut fi demonstrată, însă ea a condus la dezvoltări matematice extrem de interesante și utile.

Unitatea de învățare 4

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Operații cu numere reale

Indică propozițiile adevărate.

1. a) 2,3 + 1,8 = 3,1 b) 1,3 + 4,7 = 6 c) 1,4 – 0,6 = 2 d) 4,3 – 1,7 = 2,7
2. a) 2,13 > 3,1 b) 0,472 < 0,51 c) $1,3 + 0,7 \geqslant 1,3 + 0,2$ d) 3,5 + 0,2 > 1,2 + 2,5.

Elemente de geometrie

Alege răspunsurile corecte!

3. Numărul de muchii ale unui cub este:
   a) 3 b) 4 c) 8 d) 12.
4. Numărul de vârfuri ale unei prisme triunghiulare este:
   a) 3 b) 4 c) 8 d) 12.
5. Dacă o piramidă are 10 fețe, atunci numărul de muchii ale sale este:
   a) 5 b) 6 c) 8 d) 10.

Rezolvarea ecuațiilor

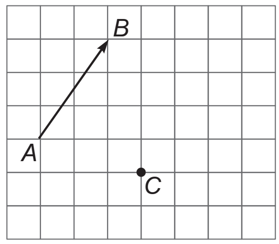
Rezolvă ecuațiile!

6. a) $2x + 3 = 1,6$ b) $x^2 - 2x - 4 = 0$ c) $2^x + 1 = 9$ d) $\log_2 x = 5$ e) $\sqrt{x-2} = 3$.

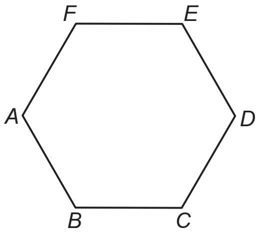
Vectori

Răspunde la întrebări!

7. Desenează vectorul $\overrightarrow{CD}$, egal cu vectorul $\overrightarrow{AB}$.



8. Pe hexagonul regulat de mai jos, reprezintă suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$, apoi vectorul $-\overrightarrow{DE}$.

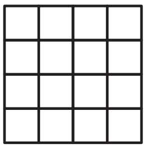


Logică

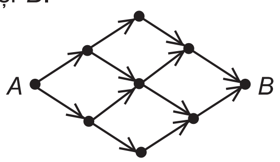
9. *Precizează dacă raționamentul următor este corect.*
   Astăzi nu este ziua în care se joacă meciul. Dacă meciul s-ar juca astăzi, stadionul ar fi plin de oameni, dar eu văd că nu este nimeni aici.
10. *Scrie enunțul obținut prin negarea următoarei propoziții:*
    Dacă o piramidă are ca bază un hexagon, atunci numărul său de muchii este 12.

Numărare

11. Calculează câte numere naturale sunt între 102 și 347, inclusiv.
12. Identifică numărul pătratelor din figură.



13. Află câte drumuri există pe graful următor între *A* și *B*.



Drumuri în grafuri – optimizare

Problema optimizării

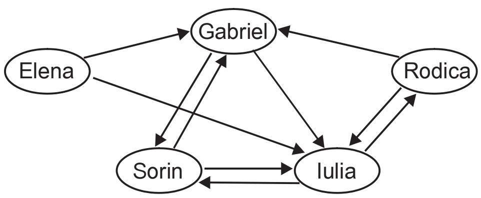
Observăm și explorăm!

O gamă variată de probleme cotidiene poate fi abordată cu ajutorul grafurilor. În aceste cazuri, folosind metode specifice de analiză, se pot lua decizii eficiente.

Exemplul 1: Liderul de grup

Diriginta clasei a XI-a C vrea să analizeze relațiile de simpatie și de antipatie ale membrilor unui grup de lucru.

Pentru aceasta, ea a aplicat un test sociologic și a reprezentat informațiile obținute sub forma unor grafuri orientate. În desenul de mai jos, apare graful obținut din răspunsurile la întrebarea: „Atunci când primești o problemă de rezolvat, cu care dintre membrii grupului ai vrea să discuți mai întâi?”

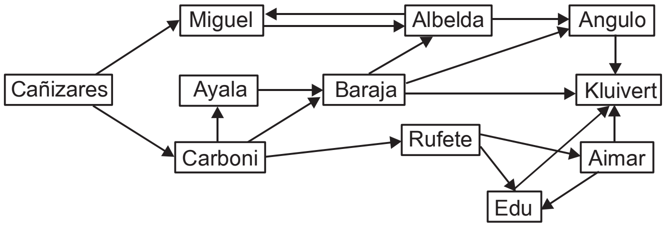


Din această reprezentare, diriginta a concluzionat că Elena are probleme de acceptare în grup, precum și că Iulia este liderul echipei.

❶ *Ești de aceeași părere cu diriginta clasei? Pe ce crezi că s-a bazat ea când a formulat aceste concluzii?*

Exemplul 2: Strategia de joc

Pentru a analiza relațiile de joc, antrenorul echipei de fotbal F.C. Valencia, Sánchez Flores, a reprezentat modul în care sunt date de obicei pasele între jucători. El a obținut graful orientat de mai jos:

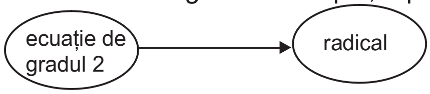


❷ *Analizează graful relațiilor de joc și răspunde! Care crezi că este cel mai important jucător din această echipă? De ce?*

Prin această schemă, el a văzut că flancul drept al echipei are nevoie de antrenamente speciale, deoarece contraatacurile desfășurate pe această parte necesită prea multe pase pentru a duce mingea în fața porții adverse.

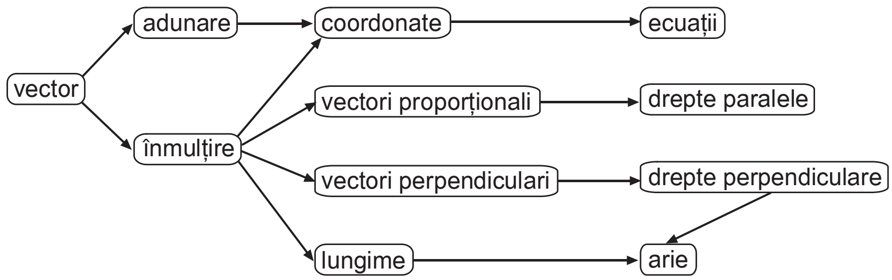
Exemplul 3: Hărțile conceptuale

Veronica vrea să își recapituleze materia din clasa a X-a. Ca să înțeleagă mai bine legăturile între diferite noțiuni, ea a întocmit o hartă a conceptelor, adică un graf orientat, în care nodurile sunt conceptele învățate, iar două concepte sunt unite printr-un arc dacă există un rezultat care le leagă. De exemplu, reprezentarea schematică:



poate să însemne: „rezolvarea ecuației de gradul 2 se face cu o formulă care conține radicali”.

În acest fel, pentru o parte din materia clasei a X-a, Veronica a obținut următoarea hartă a conceptelor:



❸ *Enunță trei dintre rezultatele care au condus-o pe Veronica la trasarea arcelor din hartă.*

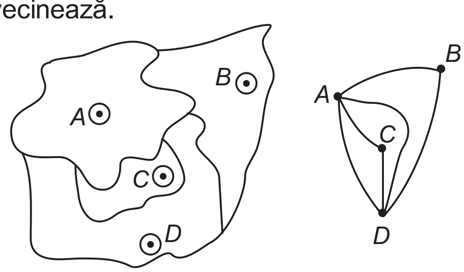
Harta realizată a ajutat-o pe Veronica să înțeleagă mai bine noțiunile de geometrie învățate.

În general

Reprezentările cu grafuri pot conduce la o înțelegere rapidă a situației analizate. Ele pot fi folosite în situații foarte diverse.

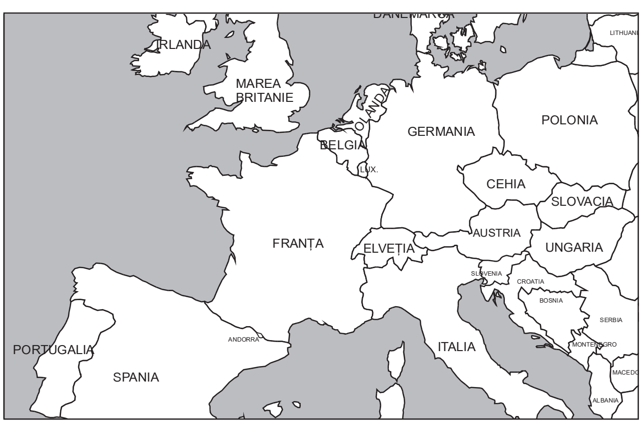
Exerciții și probleme

1. Putem transforma o hartă, cu ajutorul unui graf, prezentând schematic țările și modul în care ele se învecinează.



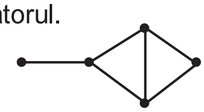
Astfel, pentru harta de mai sus am înlocuit fiecare țară cu un nod al grafului, simbolizând capitala și am trasat o muchie pentru fiecare porțiune de graniță comună.

a) Transformă într-un graf porțiunea din harta Europei reprezentată mai jos.

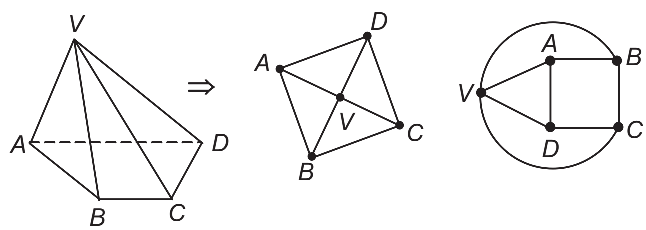


b) În ce caz graful asociat unei hărți este conex?

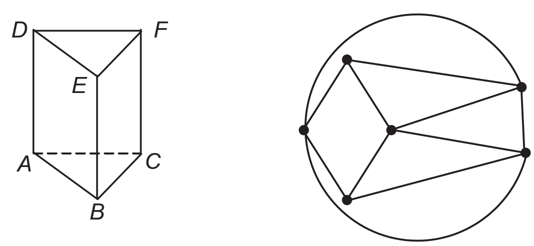
c) Imaginează harta unei regiuni al cărei graf asociat este următorul.



2. Fiecărui poliedru i se asociază graful vârfurilor și muchiilor sale, printr-un procedeu de aplatizare.
De exemplu, piramidei *VABCD* de mai jos, i se poate asocia oricare dintre grafurile alăturate.



a) Asociază aceleiași piramide alte două grafuri (izomorfe cu cele de mai sus).
b) Reprezintă în două moduri graful asociat prismei *ABCDEF* din desen.
c) Desenează un poliedru corespunzător grafului de mai jos.



Drumuri optime în grafuri

Analizăm şi generalizăm!

Multe dintre problemele practice reprezentate prin grafuri necesită determinarea unor drumuri care verifică anumite proprietăți.

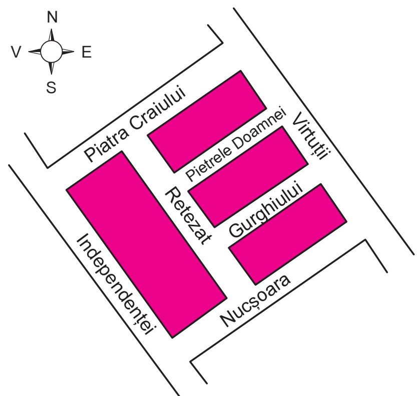
Pentru grafurile în care numărul vârfurilor este mic, putem răspunde la o astfel de întrebare descriind toate drumurile posibile. Dacă numărul vârfurilor este însă mare, acest procedeu poate să ia mult prea mult timp. De aceea, suntem interesați să găsim un *algoritm*, adică o succesiune de reguli prin aplicarea cărora determinăm soluția optimă pentru problema dată.

♦ Ce este un circuit eulerian?

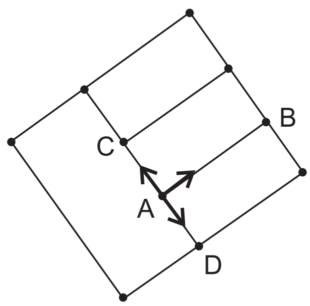
Să analizăm!

Cartierul în care locuiește Mircea are forma din imaginea alăturată.

În fiecare seară, atunci când se plimbă cu bicicleta, Mircea pleacă de la locuința sa (marcată printr-un punct pe hartă) și încearcă să treacă pe toate străzile cartierului o singură dată. Pentru a găsi un astfel de circuit, el a reprezentat schematic cartierul sub forma grafului de mai jos, în care nodurile sunt intersecțiile, iar muchiile sunt străzile cartierului.



❶ *Identifică pe harta alăturată două circuite distincte, pornind din punctul marcat.*



❷ *Pe schița sub formă de graf a cartierului lui Mircea, identifică strada Independenței și locul din care pleacă Mircea la plimbare.*

Mircea are trei posibilități de pornire de acasă: pe strada Gurghiului, pe Retezat spre Piatra Craiului sau pe Retezat spre Nucșoara (acestea sunt marcate pe graf prin muchiile *AB*, *AC*, respectiv *AD*). El trebuie să revină (cel puțin la sfârșit!) în punctul A, pe o altă stradă (muchie) decât cea pe care a plecat. De aceea, una dintre aceste muchii ale grafului nu poate fi închisă într-un astfel de circuit.

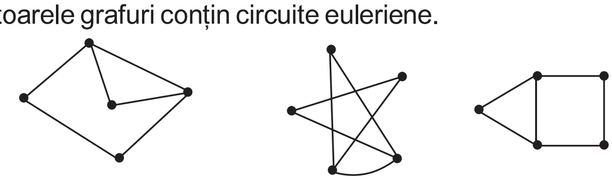
În general

Un circuit al unui graf se numește *circuit eulerian*, dacă poate fi parcurs în întregime trecând o singură dată prin fiecare muchie a grafului dat. Un graf este *eulerian* dacă are cel puțin un circuit eulerian.

Leonard Euler
(1707 - 1783)

Exemple

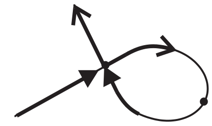
Următoarele grafuri conțin circuite euleriene.



Să demonstrăm!

Un graf conex este eulerian dacă și numai dacă fiecare nod are ordin par.

Să presupunem că graful are un circuit eulerian. Marcăm pe acest circuit direcția de parcurgere; atunci numărul arcelor care intră într-un nod este egal cu numărul arcelor care ies din acesta. Deci fiecare nod are ordin par.



Fie acum un graf conex, în care fiecare nod are ordin par și fie $D = A_0A_1A_2 \ldots A_{r-1}A_r$ un drum de lungime maximă în graful dat, care nu trece de două ori prin aceeași muchie (dar care poate trece de mai multe ori prin același nod). Deoarece D este de lungime maximă, toate muchiile care pleacă din A_r sunt deja conținute în D ... .

❸ În enunțul alăturat, apare exprimarea „dacă și numai dacă". Cum se reflectă această formulare în demonstrație?

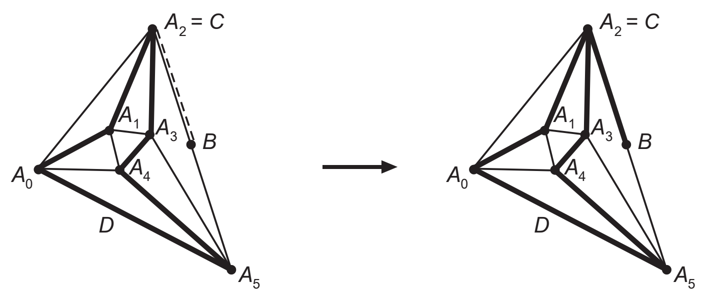
Deoarece numărul acestor muchii este par, deducem că A_r și A_0 coincid ..., deci D este un circuit. Să presupunem prin absurd că D nu este circuit eulerian; există atunci o muchie BC neparcursă de D, care are un capăt (sau amândouă) printre punctele A_0, A_1, ..., A_r ... .

Pentru a putea urmări raționamentul, analizăm graful de mai jos și presupunem $C = A_2$.

❹ Urmărește demonstrația și răspunde. Unde folosim ipoteza că fiecare nod are ordin par?

Considerăm drumul $BCA_3A_4 \ldots A_rA_1A_2$, care are lungime cu 1 mai mare decât D, ceea ce contrazice alegerea acestuia ... .

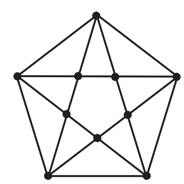
Contradicția obținută arată că circuitul D parcurge toate muchiile grafului o singură dată, deci D este circuit eulerian.



❺ Demonstrează că un graf are un drum eulerian dacă și numai dacă numărul nodurilor de ordin impar este 2. Pentru demonstrație, adaugă o muchie la acest graf și aplică teorema anterioară!

Să aplicăm!

Graful din imaginea alăturată are toate nodurile de ordin par, deci este un graf eulerian. Practic, asta înseamnă că putem reproduce desenul fără să ridicăm creionul de pe coala de hârtie.



❻ Trasează un graf care are toate nodurile de ordin par. Propune unui coleg să realizeze un circuit eulerian în acest graf.

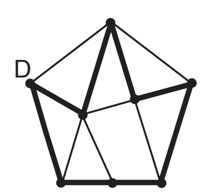
♦ Ce este un circuit hamiltonian?

Să presupunem că, în loc de un circuit care trece prin fiecare muchie a unui graf o singură dată, căutăm un circuit care trece prin fiecare nod al grafului o singură dată. Astfel de probleme apar în practică, de exemplu, în legătură cu aprovizionarea unor magazine printr-un același transport de marfă.

Să analizăm!

În cartierul Laviniei, la fiecare colț de stradă este un chioșc al firmei „Util". În fiecare dimineață, un microbuz al firmei pleacă de la depozitul D și aprovizionează toate chioșcurile.

Pentru a scurta drumul, șoferul microbuzului a identificat circuitul marcat pe desen, care trece o singură dată prin fiecare nod al grafului.



❼ Analizează schema cartierului Laviniei și găsește un alt circuit care trece prin toate nodurile.

În general

Un circuit al unui graf se numește *circuit hamiltonian*, dacă poate fi parcurs trecând prin fiecare nod o singură dată. Un *graf* este *hamiltonian* dacă are cel puțin un circuit hamiltonian.

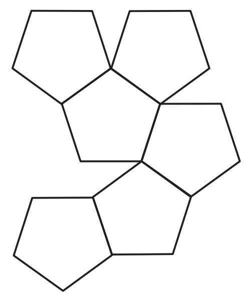
Denumirea de graf hamiltonian provine de la jocul lansat în 1859 de către matematicianul William Hamilton (1805-1865). „Câmpul de joc” este un dodecaedru regulat, adică un corp geometric cu toate fețele pentagoane regulate. Jocul are un singur jucător și presupune găsirea unui circuit pe muchiile dodecaedrului, care să treacă prin fiecare vârf o singură dată.

Dodecaedrul regulat este un poliedru cu 12 fețe, 20 de vârfuri și 30 de muchii.

Pentru ca jucătorul să poată face încercări, Hamilton a realizat dodecaedrul din lemn și a montat în fiecare vârf câte un cui; prin întinderea unui fir de ață între aceste cuie, se putea vizualiza traseul parcurs.

Pentru a putea analiza și noi această problemă, desenăm graful planar asociat dodecaedrului. (E ca și cum am „întinde” fețele până când dodecaedrul se aplatizează!). Un circuit hamiltonian este marcat pe figura 2.

❽ *Decupează din carton două figuri de forma celei de mai jos și construiește un dodecaedru.*



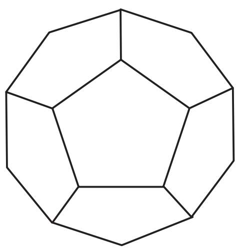


Fig. 1

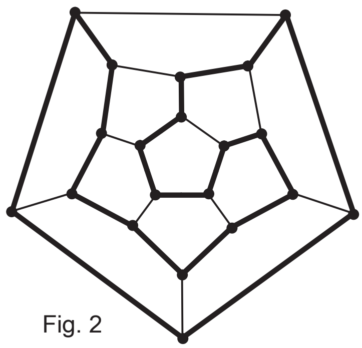


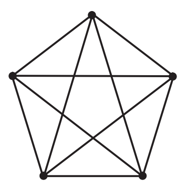
Fig. 2

Nu se cunosc condiții necesare și suficiente pentru a decide dacă un graf dat este sau nu hamiltonian. Câteva rezultate parțiale sunt enunțate în continuare.

Să verificăm!

1) Orice graf complet (în care fiecare două noduri sunt unite printr-o muchie) este hamiltonian.

Verifică această teoremă pentru graful complet cu 5 noduri din figura alăturată.

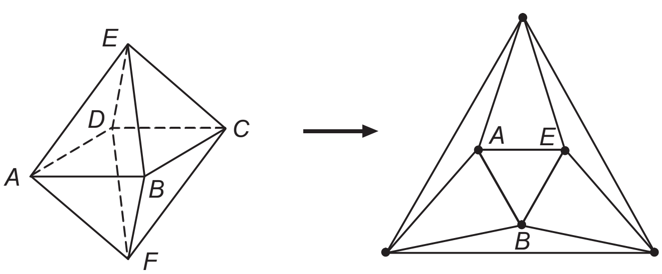


2) Grafurile asociate poliedrelor regulate sunt hamiltoniene.

Verifică această teoremă pentru graful asociat unui octaedru regulat, desenat în figura de mai jos.

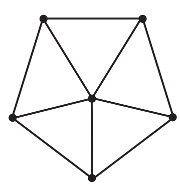
Există cinci poliedre regulate: tetraedrul regulat, cubul, octaedrul regulat, dodecaedrul regulat și icosaedrul regulat.

❾ *Pe graful asociat octaedrului regulat, denumește toate nodurile, prin corespondență cu vârfurile octaedrului.*



3) Dacă G este un graf cu $n \geqslant 3$ noduri, astfel încât ordinul fiecărui nod este cel puțin $\frac{n}{2}$, atunci G este hamiltonian.

Verifică această teoremă pentru graful din figura alăturată.



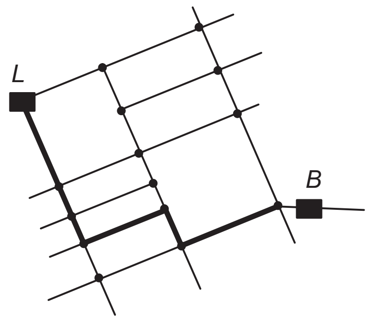
Rezultatul enunțat a fost demonstrat de Dirac, în 1952.

♦ Cum determinăm drumuri de lungime minimă?

Să analizăm!

⑩ *Câte semafoare sunt în cartierul domnului Popescu?*

În fiecare dimineață, domnul Popescu pleacă de acasă la serviciu cu mașina personală. Pentru a scurta timpul de deplasare, el a căutat un traseu care să conțină cât mai puține intersecții, din cauza perioadei de așteptare la semafor. Harta zonei în care locuiește domnul Popescu este reprezentată schematic în imaginea de mai jos, în care *L* și *B* reprezintă locuința, respectiv biroul său.



⑪ *Identifică un alt drum de la locuință până la biroul domnului Popescu.*

Pentru fiecare drum între *L* și *B*, domnul Popescu a definit „lungimea drumului” ca fiind numărul de semafoare întâlnite în cale. De exemplu, drumul marcat pe figură are lungimea 6.

⑫ *Desenează un drum oarecare de la L la B și află lungimea acestuia.*

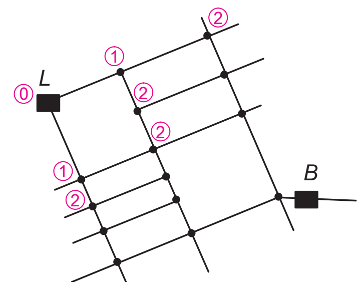
Deoarece este dificil să identifice toate drumurile posibile între *L* și *B*, domnul Popescu a adoptat o altă strategie: a alocat fiecărui semafor un număr natural, egal cu lungimea minimă a unui drum de acasă până la semaforul respectiv.

El a procedat astfel:

• a atașat nodului *L* numărul 0, iar nodurilor legate prin muchii de *L* – numărul 1;

• pentru fiecare nod care nu a fost încă marcat, legat prin muchii de nodurile marcate cu 1, a atașat numărul 2;

• a continuat la fel, atașând nodurilor numere consecutive, până când a marcat toate nodurile.



⑬ *Continuă algoritmul și asociază fiecărui nod al grafului un număr natural.*

În acest fel, domnul Popescu a demonstrat că drumul minim de acasă până la serviciu are lungimea 4.

⑭ *Marchează pe schița cartierului făcută de domnul Popescu un drum de lungime 4 între locuință și birou.*

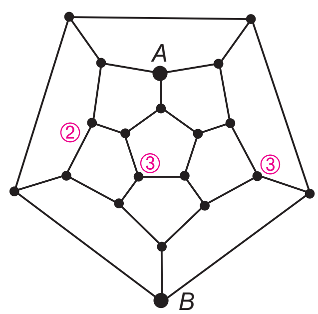
În general

Lungimea minimă a unui drum între două noduri ale unui graf conex se poate determina prin *algoritmul de etichetare succesivă a nodurilor*, descris anterior. Drumul minim este format din muchii care unesc noduri marcate cu numere consecutive.

Să aplicăm!

Pentru graful asociat unui dodecaedru regulat, din figura alăturată, determinăm drumul de lungime minimă dintre nodurile *A* și *B*. Pentru aceasta, am etichetat unele dintre nodurile grafului conform algoritmului de mai sus. Continuă etichetarea, până ajungi la *B.*

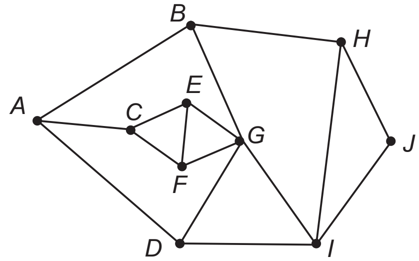
Demonstrează apoi că între oricare două noduri ale acestui graf, există un drum de lungime mai mică sau egală cu 5.



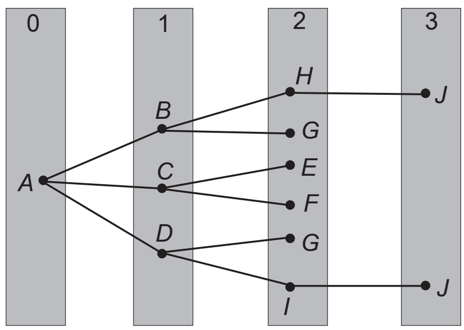
Prin algoritmul de etichetare a nodurilor, determinăm lungimea drumului minim între două noduri ale unui graf. Pentru a obține însă efectiv un astfel de drum minim, este nevoie să organizăm datele, astfel încât succesiunea pașilor făcuți să poată fi reconstituită.

Exemplu

Să considerăm graful din imaginea alăturată, în care am notat nodurile cu litere de la *A* la *J*. Vrem să determinăm drumurile de lungime minimă care unesc nodul *A* cu celelalte noduri ale grafului. Pentru aceasta, atașăm nodului *A* numărul 0, nodurilor *B*, *C* și *D* numărul 1 și așa mai departe, ca în algoritmul folosit de domnul Popescu.



Reținem ordinea și motivul pentru care marcăm un nod, în graful-arbore de mai jos.



⚠ *În graful-arbore al drumurilor minime, fiecare nod apare pe un singur nivel.*

15 *Explică modul în care a fost alcătuit graful-arbore alăturat. Procedează la fel pentru graful cartierului domnului Popescu.*

Observând acest mod de organizare a datelor, putem afirma că:

• există două drumuri minime, de lungime 2, între *A* și *G*; acestea sunt *ABG* și *ADG*;

• există un singur drum de lungime minimă de la *A* la *E*.

Să aplicăm!

Pentru graful din exemplul anterior, alcătuiește graful-arbore al drumurilor minime cu un capăt în *E*. Demonstrează că există un unic drum minim de la *E* la *J*.

♦ Cum determinăm drumuri minime în grafuri orientate?

Metodele prezentate mai sus pot fi aplicate analog și pentru grafuri orientate. Singura deosebire, în acest caz, este aceea că orientarea arcelor corespunde ordinii crescătoare a numerelor atașate nodurilor.

Exemplu

Pentru graful din figura a) de mai jos, vrem să determinăm lungimile minime ale unor drumuri ce pleacă din *A* spre celelalte noduri. Prin atașarea de numere consecutive, obținem figura b).

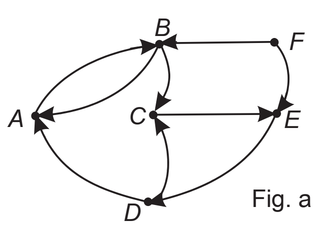


Fig. a

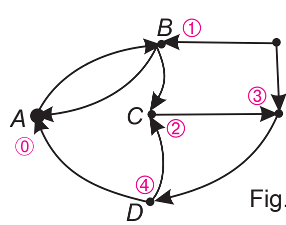
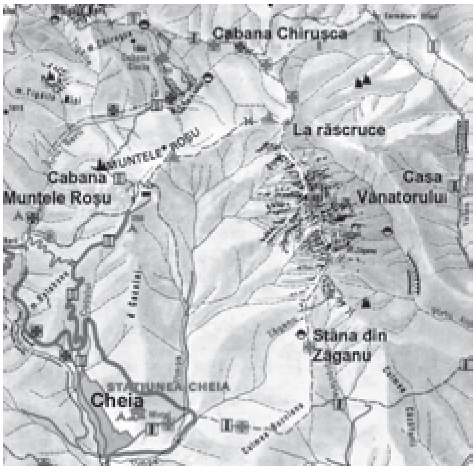


Fig. b

16 *Desenează un graf orientat în care drumul minim între două noduri să aibă lungimea 5.*

Deducem că drumul minim de la *A* la *D* are lungimea 4, iar de la *A* la *F* nu există un drum în graful dat.

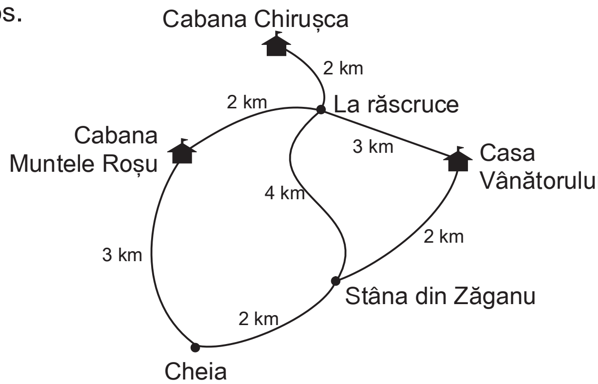


♦ Cum determinăm drumuri minime în grafuri ponderate?

Să analizăm!

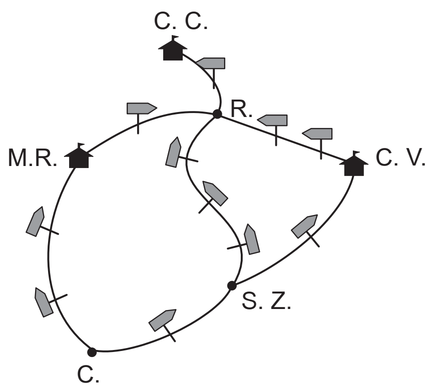
În vacanța de vară, Iulia și colegii ei vor să organizeze o excursie în munții Ciucaș. Iulia a procurat o hartă a masivului și a identificat trasee turistice pe care le-ar putea parcurge.

Ca să determine traseul optim între Cheia și Cabana Chirușca, Iulia a simplificat harta, reprezentând totul sub forma grafului ponderat de mai jos.



Desigur, graful precizează doar lungimea unui traseu, nu și dificultatea acestuia, dar, pentru un prim plan de călătorie, este suficient și atât.

Iulia ar vrea să determine algoritmic drumul minim, și nu prin încercări. Ea și-a imaginat că, de-a lungul fiecărui drum, sunt postate indicatoare la distanța de 1 km între ele. Prin reprezentarea acestor indicatoare pe graful traseelor, Iulia a obținut un graf mai detaliat în care toate muchiile au lungimea de 1 km.



17 *Etichetează nodurile grafului și verifică afirmația Iuliei. Identifică drumul minim de la Cheia la Chirușca.*

Iulia a aplicat, pentru acest graf, metoda de determinare a drumului minim prin *etichetarea succesivă a nodurilor*. În acest mod, ea a demonstrat că lungimea drumului minim între Cheia (C) și Cabana Chirușca (C.C.) este de 7 km.

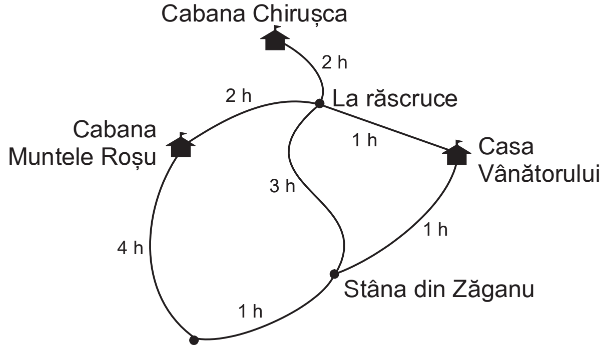
În general

Drumurile minime dintr-un graf ponderat, în care muchiile au ca ponderi numere naturale, se pot determina prin algoritmul de etichetare a nodurilor.

Pentru aceasta, *adăugăm* pe muchiile grafului dat *noi noduri*, astfel încât fiecare muchie a grafului obținut să aibă ponderea 1.

Să aplicăm!

Căutând informații mai amănunțite, Iulia a găsit un ghid turistic despre munții Ciucaș, în care traseele turistice sunt prezentate mai detaliat. Din această carte, ea a înțeles că importantă este nu doar lungimea unui traseu, ci, mai ales, timpul estimativ în care acesta ar putea fi parcurs. De aceea, Iulia a refăcut graful de mai sus, precizând, de data aceasta, timpul de parcurs. Ea și-a imaginat că, de-a lungul unui traseu, trebuie să se odihnească după fiecare oră de mers și a marcat pe graf locurile de popas. Marchează și tu aceste noduri ale grafului, apoi determină traseul ce poate fi parcurs în timpul minim.



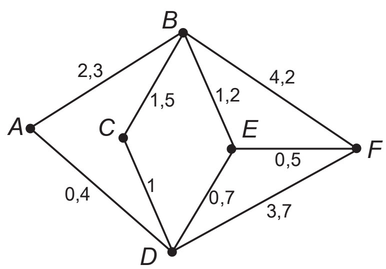
♦ Cum putem afla drumul minim în cazul unor grafuri cu ponderi arbitrare?

Algoritmul prezentat anterior nu poate fi aplicat decât în cazul în care ponderile sunt numere naturale. În continuare analizăm un algoritm care se poate aplica în cazul unor grafuri cu ponderi numere reale.

Să analizăm!

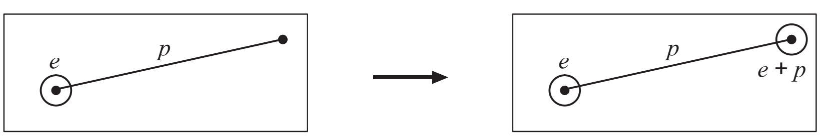
Pentru graful ponderat din figura de mai jos, vrem să determinăm lungimile drumurilor minime de la *A* la toate celelalte noduri. Vom folosi un algoritm de etichetare succesivă a nodurilor, asemănător cu cel prezentat în paragraful anterior.

Acest algoritm a fost găsit de către Dijkstra, în 1959.



18 Pentru fiecare nod al grafului alăturat, determină muchia de pondere minimă care pleacă din acel nod.

Inițial, nodul *A* primește eticheta 0. La fiecare pas, determinăm toate muchiile grafului, ce unesc noduri etichetate deja, cu noduri neetichetate încă. Dintre aceste muchii, alegem acea muchie care are proprietatea că suma $e + p$ este minim posibilă, unde e este eticheta nodului din capăt, iar p este ponderea muchiei.



După ce am identificat această muchie, etichetăm nodul „liber” cu $e + p$ și continuăm analog, până când toate nodurile devin etichetate.

Etichetele obținute sunt lungimile drumurilor minime de la *A* la nodurile grafului.

Organizăm datele într-un tabel, în care pe prima linie apare eticheta nodului, iar în a doua linie apare nodul anterior:

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*

Pentru graful de la care am pornit în exemplu, primii trei pași ai algoritmului sunt descriși în continuare.

Pasul 1.

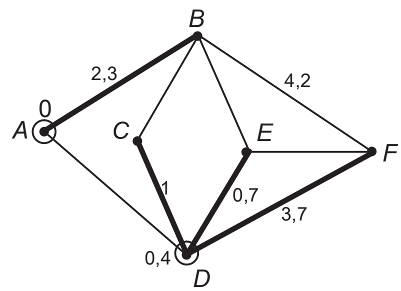
⚠ Pornim din A. Marcăm acest lucru în tabel astfel:
– A primește eticheta 0.
– Nu există un nod anterior lui A (marcăm –).

A	B	C	D	E	F
0					
–					

Pasul 2. Printre muchiile care pleacă din *A*, o identificăm pe cea de lungime minimă; aceasta este *AD*. Atribuim punctului *D* eticheta 0,4 și înregistrăm faptul că în *D* am ajuns venind din *A* (adică predecesorul lui *D* este *A*). Obținem tabelul:

⚠ Marcăm în tabel:
– D primește eticheta 0,4.
– Nodul anterior lui D este A.

A	B	C	D	E	F
0			0,4		
–			A		



Pasul 3. Considerăm muchiile care pleacă din *A* sau *D* și ajung într-un nod fără etichetă. Acestea sunt cele îngroșate pe figură.

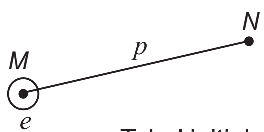
Suma $e + p$ (etichetă + pondere) este minimă pentru muchia *DE*; atribuim lui *E* eticheta „sumă” 1,1 (adică 0,4 + 0,7) și ținem minte că predecesorul lui *E* este *D*. Obținem tabelul de mai jos:

⚠ Marcăm în tabel:
– E primește eticheta „sumă” 1,1.
– Nodul anterior lui E este D.

A	B	C	D	E	F
0			0,4	1,1	
–			A	D	

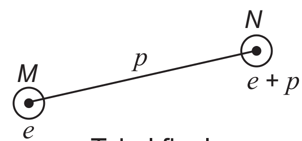
Observăm că, dacă la un pas alegem o muchie oarecare *MN*, unde *M* are eticheta e, iar *MN* are ponderea p, tabelul se modifică așa cum se arată în continuare:

⑲ Continuă algoritmul și etichetează toate nodurile grafului.



Tabel inițial

M	N
e	
Q	



Tabel final

M	N
e	$e + p$
Q	M

⑳ Ce semnificație are punctul Q care apare în tabel?

În general

Lungimea unui drum minim este eticheta atribuită nodului țintă, iar un astfel de drum se află scriind succesiv predecesorii nodului țintă.

Acest algoritm, numit algoritmul Dijkstra, determină drumul minim de la un nod al unui graf ponderat la orice alt nod al grafului.

Să aplicăm!

Din calculele făcute mai sus, am obținut că:

• drumul minim de la *A* la *E* are lungimea 1,1;

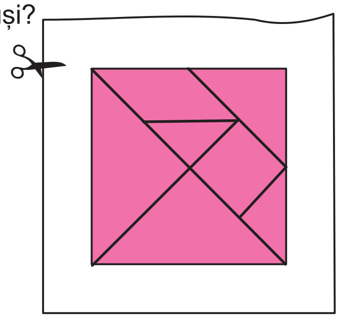
• un astfel de drum este $E \leftarrow D \leftarrow A$.

Analog, deducem că, spre exemplu, drumul minim dintre *A* și *F* este *ADEF* și are lungimea 1,6.

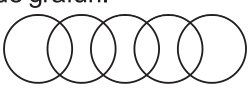
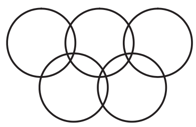
㉑ Verifică lungimea unui drum minim de la A la F folosind algoritmul Dijkstra.

Exerciții și probleme

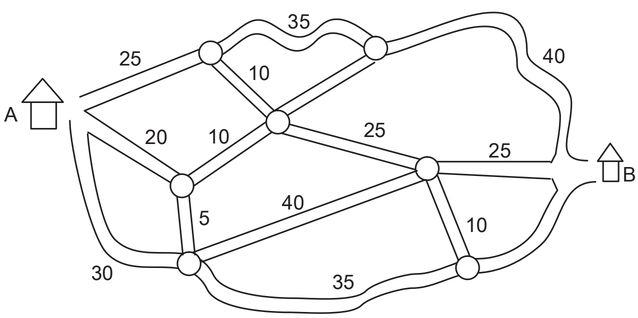
1. Raluca a desenat pe o foaie de hârtie figura de mai jos, din care se obțin cele 7 piese ale jocului numit Tangram. Ea ar vrea să decupeze toate piesele jocului, printr-o mișcare continuă a foarfecii. Ce crezi, va reuși?



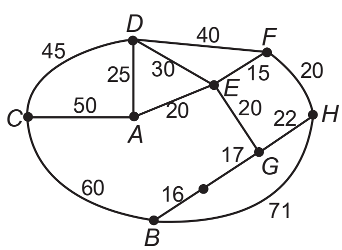
2. Realizează desenele următoare printr-o singură trăsătură de creion. Formulează problema în termeni de grafuri.

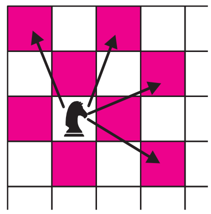
3. Un grup de excursioniști trebuie să ajungă de la cabana *A* la cabana *B*. Ei se pot deplasa pe traseele turistice reprezentate pe hartă, unde numerele de pe acestea reprezintă timpul de mers (în min.)
Care este drumul ce poate fi parcurs cel mai repede?



4. În desenul alăturat este reprezentată rețeaua de șosele ale unui județ și distanțele între principalele localități. O firmă de transport vrea să determine drumuri între A și B, ce nu conțin circuite și au lungime minimă (pentru călători grăbiți), respectiv lungime maximă (pentru turiștii ce vor să viziteze cât mai multe obiective). Folosește un graf arbore (în care treci, pentru fiecare localitate, continuările posibile ale unui drum fără circuite) pentru a determina variantele necesare firmei.

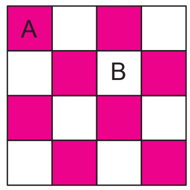


5. a) Pe tabla de șah, calul se poate muta în formă de *L*, așa cum se arată în desen.



Asociază unei table 3 × 3 graful mutărilor calului.
Formulează în termenii teoriei grafurilor problema următoare:
Pe o tablă de șah $n \times n$, poate calul să treacă o dată prin fiecare pătrățel al tablei?

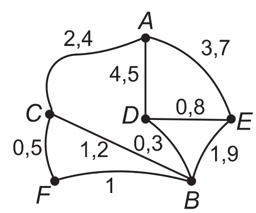
b) Pe tabla de șah, turnul se poate muta doar pe orizontală sau verticală.



Asociază unei table 4 × 4 graful mutărilor turnului.
Formulează în termenii teoriei grafurilor problema:
Pe tabla 4 × 4 din figură, vrem să determinăm modul în care mutăm turnul, pentru a ajunge din A în B trecând prin toate căsuțele câte o dată.

6. a) Pentru a determina drumul minim dintre nodurile A și B din graful de mai jos, Marian a început să completeze tabelul etichetelor și predecesorilor, așa cum a învățat la școală.

A	B	C	D	E	F
0		2,4			
–		A			



Continuă algoritmul și determină drumul minim de la *A* la *B*.

b) În rezolvarea unei probleme asemănătoare, Sorin a completat tabelul, dar nu mai știe care este graful de la care a pornit. Ajută-l pe Sorin și desenează un graf corespunzător tabelului de mai jos. Este soluția unică?

A	B	C	D	E
0	0,2	0,9	1,2	0,7
–	A	E	B	B

7. Reprezintă cu ajutorul unui graf orientat funcția descrisă prin următorul tabel de valori:

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	5	3

8. Pentru mulțimea {1, 2, 3, 4}, reprezintă printr-un graf orientat relația „mai mic decât”. Câte drumuri are acest graf?

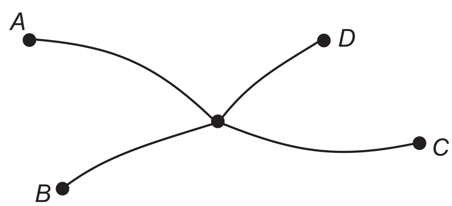
Aplicăm şi dezvoltăm!

Determinarea unor drumuri optime în grafuri apare ca o necesitate în multe situații din viața cotidiană. Cunoașterea unor algoritmi specifici de rezolvare a acestor probleme poate să ne ajute în alegerea variantei optime în situații în care necesită analiza multor cazuri greu de inventariat.

Exemplul 1: Optimizarea rețelelor de transport

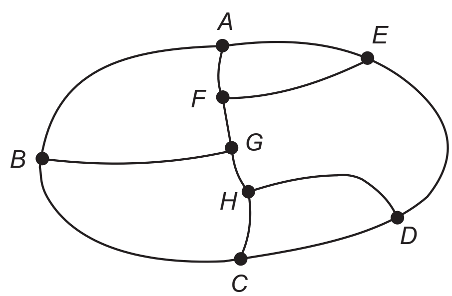
Societatea de transport „Troleibuzul” hotărăște să-și reorganizeze cursele, fără să-și schimbe rețeaua de cabluri existentă. Societatea dorește să facă acest lucru astfel ca fiecare porțiune de drum să fie parcursă de un singur troleibuz; pasagerii urmează să se transfere de la o cursă la alta, până când ajung la destinație. Oricât de complicată ar fi rețeaua, este întotdeauna posibil să găsim un astfel de sistem de curse. Pentru aceasta, e suficient să stabilim pe fiecare porțiune de rețea, între două intersecții consecutive, câte o cursă care să facă naveta. Aceasta ar necesita însă un număr mare de curse, care ar face călătoria dificilă și ar mări costurile de exploatare. Trebuie deci determinat numărul minim de trasee necesare, pentru ca transportul să se optimizeze.

Într-un oraș mic, cu puține drumuri de transport, soluția se găsește ușor.



De exemplu, pentru o rețea ca în figura alăturată, sunt suficiente două curse. Capetele acestor curse vor fi în nodurile de ordinul 1 ale grafului, care sunt *A*, *B*, *C* și *D*.

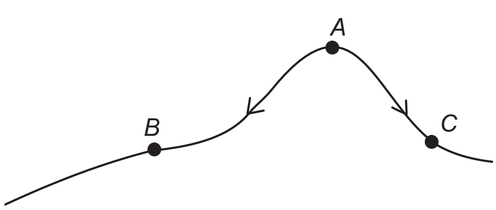
1 *Determină și alte trasee care acoperă fiecare rețea desenată.*



În rețeaua alăturată (care include și o linie de centură), toate nodurile au ordine impare. În acest caz, orice nod trebuie să fie capătul unei curse deoarece, în caz contrar, două curse diferite vor avea o porțiune comună de drum. Deducem că numărul minim de curse ar putea să fie 4. O posibilă soluție este considerarea traseelor:
A-F-G-H-D-C; H-C-B-G; B-A-E-F; E-D.

În general, este dificil de determinat sistemul optim de transport, adică sistemul cu număr minim posibil de curse. În mod sigur însă, un astfel de sistem există. Putem face câteva precizări despre situația optimă.

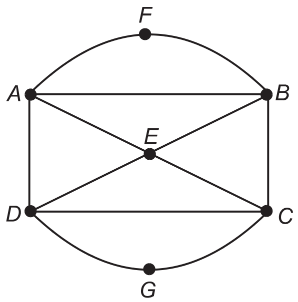
1) Două curse diferite nu pot avea același capăt.



Dacă există o cursă între A și B și o alta între A și C, le putem înlocui cu o „cursă directă” B-A-C. Astfel, numărul de curse scade cu 1 și găsim o repartizare mai bună a curselor.

Astfel de situații sunt des întâlnite în organizarea mersului trenurilor, în care cursele pe distanțe lungi sunt preferate unora locale.

2) Dacă fiecare nod al rețelei este de ordin par, atunci este suficientă o singură cursă. În acest caz, cursa parcurge într-un circuit întreaga rețea.



Într-adevăr, la orice trecere printr-un nod, există un drum pe care cursa vine și un drum pe care pleacă. Cum numărul de muchii cu capătul în nod este par, cursa își poate continua de fiecare dată drumul pe o altă porțiune de traseu.

De exemplu, pentru rețeaua de transport alăturată, un posibil circuit este

A-B-C-G-D-C-E-B-F-A-E-D-A

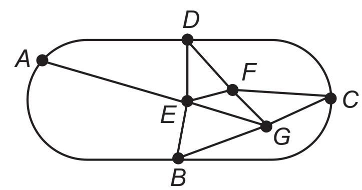
❷ *Identifică și alte circuite pentru rețeaua desenată.*

Tot o singură cursă este suficientă și dacă rețeaua are exact două noduri de ordin impar. În acest caz, cursa are capetele în nodurile impare ale grafului.

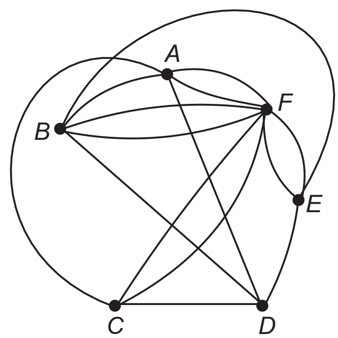
3) Numărul minim de curse necesar parcurgerii rețelei este cel puțin egal cu jumătate din numărul de noduri de ordin impar.

Aceasta deoarece în orice nod de ordin impar trebuie să se afle capătul unei curse și orice cursă, care nu e un circuit are două capete.

❸ *Precizează un traseu prin care poate fi parcursă rețeaua de mai jos. Este util să identifici mai întâi capetele traseului.*



Exemplul 2: Jocul de tenis



Andrei, Bogdan, Claudia, Dan, Elena și Florin au jucat tenis de masă după sistemul „învingătorul continuă”. Jocul a fost pasionant pentru că nimeni nu a reușit să învingă în două partide consecutive. Se știe că Dan a jucat cu toți prietenii, în afară de Florin, iar Florin a jucat de câte două ori cu fiecare dintre ceilalți (desigur, fără Dan!). S-au mai jucat partidele Andrei-Bogdan, Bogdan-Elena și Claudia-Andrei. Știind că la primul joc a participat Claudia, vrem să aflăm cine a câștigat în ultimul joc.

Pentru aceasta, reprezentăm situația jocurilor printr-un multigraf în care nodurile simbolizează jucătorii, iar muchiile sunt jocurile disputate.

Succesiunea de partide, în care câștigătorul rămâne să joace și partida următoare (dar pe care o pierde – conform precizării din enunț!) se transpune într-un drum eulerian pe graful reprezentat.

❹ *Propune o posibilă succesiune a partidelor disputate, respectând toate indicațiile din enunț.*

Acest graf are două noduri impare – și anume, A și B; deci Andrei și Bogdan sunt printre jucătorii din prima și din ultima partidă. Deoarece Claudia a jucat în prima partidă, iar Claudia și Bogdan nu au disputat nici un joc, înseamnă că prima confruntare a fost între Andrei și Claudia. De aceea, în ultimul joc a câștigat Bogdan.

Exerciții și probleme

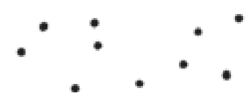
1. Grafurile întâlnite în practică au adesea o structură foarte generală și problema principală este aceea a găsirii unui algoritm pentru soluția efectivă a unei probleme de optimizare legată de graf. Un exemplu de astfel de problemă este problema celei mai ieftine rețele telefonice.

Trebuie legate n posturi printr-o rețea telefonică cu costuri minime, astfel încât punctele de racord să fie chiar posturile.

Primul pas: se unește fiecare nod cu nodul pentru care costul legăturii este minim. Se obțin astfel mai mulți arbori.

Al doilea pas: se asimilează fiecare arbore cu un punct și se repetă procedeul. Dacă se continuă în acest mod, se întrerupe procedeul atunci când rămâne un singur arbore. Acesta este arborele minimal căutat.

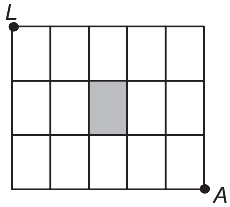
Câte posibilități sunt, dacă se încearcă toate variantele în cazul a 10 posturi?


distribuția nodurilor (graf nul)


primul pas


al doilea pas

2. Cartierul lui Marius are forma de mai jos: în mijlocul cartierului este un parc, iar dreptele trasate sunt străzile din cartier.



În fiecare seară, când pleacă de la liceu (L), Marius vrea să se relaxeze puțin și trece pe o latură a parcului. Bunica lui (care se sperie ușor) l-a rugat însă să nu întârzie prea mult și să vină acasă (A) pe drumul cel mai scurt.

a) Reprezintă unul dintre drumurile pe care le poate alege Marius, ținând cont și de rugămintea bunicii.

b) În drumul de la liceu acasă, poate Marius trece pe orice stradă din cartier respectând toate condițiile din enunț? Dacă nu, identifică o astfel de situație.

c) Formulează enunțul sub forma unei probleme de grafuri orientate.

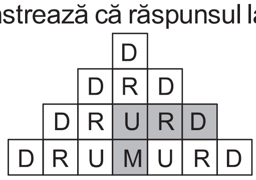
d) Calculează pe câte drumuri diferite se poate întoarce Marius acasă.

e) Propune și tu o problemă asemănătoare. Indică o demonstrație.

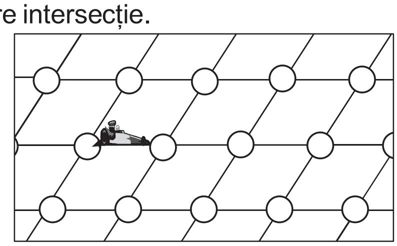
3. La un concurs cu premii, s-a cerut participanților să găsească numărul de drumuri din tabelul de mai jos, astfel încât pe fiecare drum să apară doar litere alăturate, ce formează împreună cuvântul DRUM. (Un drum posibil este marcat prin culoare pe figură.)

a) Reformulează problema, folosind grafuri.

b) Demonstrează că răspunsul la această problemă este 15.



4. Considerăm un caroiaj $n \times n$, care are „străzi" de lungime 1 și „intersecții". Pe acest „teren" vrem să identificăm circuite auto care trec o singură dată prin fiecare intersecție.

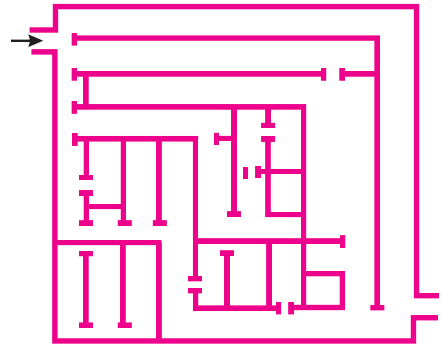


a) Formulează problema, folosind termenii din această Unitate de învățare.

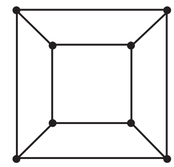
b) Studiază existența unui astfel de circuit, pentru n = 2, 3 și respectiv 4.

c) Desenează un circuit pe „terenul" 9×9.

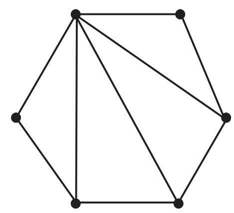
5. Găsește ieșirea din labirint!
Cum formulezi problema cu ajutorul grafurilor?



6. Unui cub i se asociază, prin aplatizare, graful din figura alăturată. Demonstrează că acest graf este un graf hamiltonian, dar nu este un graf eulerian.



7. Considerăm graful G_n obținut în felul următor: nodurile sale sunt vârfurile unui poligon cu n laturi, iar muchiile sunt laturile poligonului și toate diagonalele construite din unul dintre vârfurile poligonului. (În imagine este reprezentat graful G_6).
Demonstrează că G_n are un unic circuit hamiltonian.

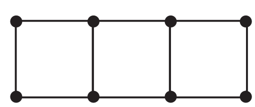


8. a) Fie G un graf ponderat, în care muchia ce unește nodul i cu nodul j are ponderea p_{ij}. Să notăm cu G^3 același graf, dar în care ponderile devin $q_{ij} = 3p_{ij}$. Demonstrează că drumurile minime dintre două noduri date sunt aceleași, atât în G, cât și în G^3.

b) Rămâne proprietatea de la a) adevărată pentru graful G^+, obținut din G prin înlocuirea ponderilor p_{ij} cu ponderile $p_{ij} + 3$? Propune câteva exemple.

9. Dat un graf G, construim un nou graf G^2 în felul următor: nodurile lui G^2 sunt aceleași cu nodurile lui G, iar muchia MN apare în G^2 dacă și numai dacă nodurile M și N pot fi unite în G printr-un drum de lungime 2.

a) Construiește graful G^2, asociat grafului G din desen.



G

b) Analizează definiția grafului G^2 și propune o definiție pentru graful G^3.

Am reușit… ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

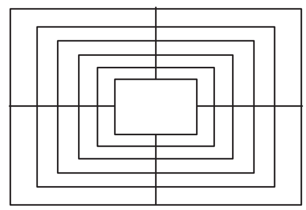
- să identific probleme care pot fi abordate folosind grafuri
- să transpun în reprezentări pe graf probleme date
- să utilizez tehnici de lucru în grafuri pentru a determina soluții
- să descriu variantele unei probleme cu ajutorul grafurilor
- să aplic metode de optimizare în rezolvarea problemelor?

Test de verificare

1. Propune două exemple de situații care pot fi reprezentate cu ajutorul unor grafuri.

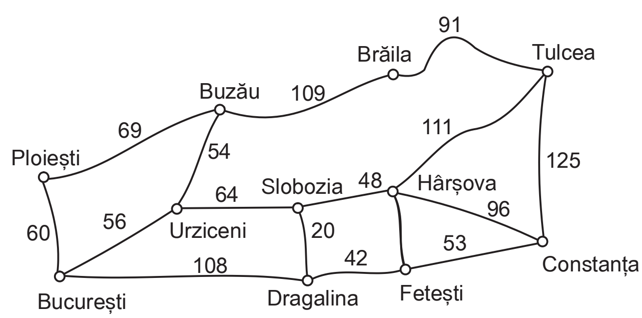
2. Realizează o hartă a conceptelor despre grafuri, pe care le-ai întâlnit în acest manual.

3. Rețeaua de străzi a unui oraș are o formă asemănătoare cu jocul de țintar, așa cum se arată în figură. Primăria orașului vrea să proiecteze trasee de troleibuz, astfel încât pe fiecare stradă să treacă exact un traseu. Demonstrează că numărul minim de trasee care respectă cerințele este 4. Găsește un exemplu. (Este util să consideri mai întâi hărți formate din mai puține dreptunghiuri concentrice.)



4. Află numerele $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ care îndeplinesc relația: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Reprezintă problema printr-un graf al situațiilor posibile, observând mai întâi că unul dintre numere este 2 sau 3. Folosește un raționament prin reducere la absurd.

5. Un producător trebuie să transporte marfa din București la Tulcea. El are mai multe variante de transport, așa cum se arată pe hartă. Producătorul a schițat traseele sub forma grafului de mai jos.



Din motive economice, traseul urmat trebuie să fie de lungime minimă. Care este acesta?

Unitatea de învățare 5

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Operații elementare

1. Calculează:
a) $2 - 3 \cdot (5 + 4)$; b) $[(-2) - (-3)] \cdot (-2)$; c) $4 + 1 \cdot [2 + 3 - (-4)]$; d) $-(-4) + 0 \cdot (234 - 432)$;
e) $\frac{1}{5} \cdot [(-3) + (-2)]$; f) $\left(\frac{1}{2} : \frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{50}{10}\right)$; g) $\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3} - \frac{7}{3}\right) \cdot 1$; h) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

Exponențiale și logaritmi

2. Determină:
a) $(-2)^3$ b) $(-3)^2$ c) $\log_2 4$ d) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ e) $10^{\lg 7}$
f) $\log_4 \sqrt[3]{4}$ g) $3^2 \cdot 3^{-3}$ h) $(5^1)^2$ i) $\log_3 27$ j) $\log_3 6 - \log_3 2$.

Elemente de logică

3. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $(2 + 1) + 3 = 2 + (1 + 3)$ c) $(2 - 1) - 3 = 2 - (1 - 3)$ e) $(2^1)^3 = 2^{1^3}$
b) $(2 \cdot 1) \cdot 3 = 2 \cdot (1 \cdot 3)$ d) $(2 : 1) : 3 = 2 : (1 : 3)$ f) $(4^2)^3 = (4^3)^2$.

4. Exprimă altfel următoarele enunțuri, folosind principiile logice de transformare a propozițiilor echivalente.
a) Dacă nu mă grăbesc, atunci pierd trenul.
b) Dacă toți sportivii sunt prezenți, atunci concursul poate începe.
c) Dacă echipa aplică indicațiile antrenorului, atunci ea câștigă meciul.

Rezolvarea ecuațiilor

5. Rezolvă ecuațiile de mai jos în mulțimea numerelor reale. Stabilește în fiecare caz dacă soluțiile găsite aparțin și mulțimii numerelor naturale.
a) $x + 3 = -5$ b) $(-4)x = -8$ c) $-3x - 6 = -12$
d) $4x + 1 = 0$ e) $x^2 - x - 2 = 0$ f) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

6. Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
a) $2^x = 8$ b) $\log_3 x = 2$ c) $2^x + 2^{x+1} = 6$ d) $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$.

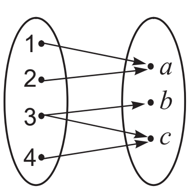
Operații cu mulțimi

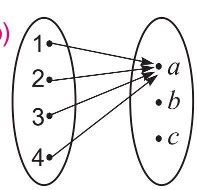
7. Fie E o mulțime. Demonstrează folosind diagrame Venn-Euler că oricare ar fi submulțimile A, B și C ale lui E, au loc egalitățile:
a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
e) $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$ f) $A \cap E = E \cap A = A$.

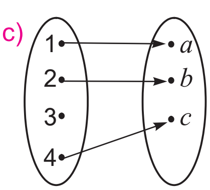
8. Exprimă altfel următoarele mulțimi:
a) A este mulțimea numerelor naturale, care sunt multipli și de 2, și de 3.
b) B este mulțimea numerelor naturale care dau restul 1 la împărțirea cu 2 și restul 2 la împărțirea cu 3.

Funcții

9. Stabilește care dintre diagramele de mai jos corespunde unei funcții.

a)


b)


c)


Structuri algebrice

Mulțimile de numere şi rezolvarea ecuațiilor

Ne amintim şi explorăm!

♦ Rezolvări de ecuații în ℕ

Să analizăm!

În soluționarea unor probleme din cotidian suntem conduși la rezolvarea unor ecuații și uneori suntem interesați să decidem dacă aceste ecuații au soluții în mulțimea numerelor naturale ℕ.

Exemple

1) Ecuația $2 + x = 6$ are în mulțimea numerelor naturale soluția 4.

2) Ecuația $2x = 6$ are în mulțimea numerelor naturale soluția 3.

3) Ecuația $3 + x = 2$ nu are soluții în mulțimea numerelor naturale, deoarece avem $3 + x \geqslant 3$ pentru orice număr natural x.

4) Ecuația $3 \cdot x = 2$ nu are soluții în mulțimea numerelor naturale, deoarece 2 nu este divizibil prin 3.

❶ *Enunță probleme pentru a căror rezolvare suntem conduși la ecuațiile alăturate.*

În general

Ecuația $x + a = b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ admite o soluție în mulțimea numerelor naturale dacă și numai dacă $b \geqslant a$. În acest caz soluția ecuației este numărul natural $b - a$.

Ecuația $a \cdot x = b$ $(a, b \in \mathbb{N},\ a \neq 0)$ admite o soluție în mulțimea numerelor naturale dacă și numai dacă a este un divizor al lui b. În acest caz, soluția ecuației este $\dfrac{b}{a}$.

⚠ *Ecuațiile* $x + a = b$ *și* $x = b - a$ *sunt echivalente.*

Ecuațiile $a \cdot x = b$ *și* $x = \dfrac{b}{a},\ a \neq 0$, *sunt echivalente.*

♦ Rezolvări de ecuații în ℤ

Mulțimea numerelor naturale nu este suficient de „bogată” pentru a rezolva în ea orice ecuație de forma $a + x = b$ sau $a \cdot x = b$. Este nevoie să considerăm mulțimi de numere mai cuprinzătoare pentru a putea rezolva aceste ecuații.

Ecuația $x + a = b$ poate fi rezolvată în ℕ în cazul în care $b \geqslant a$ și are soluția $b - a$, deoarece în acest caz $b - a$ este un număr natural. Dacă $b < a$, diferența $b - a$ nu mai aparține lui ℕ, ci este un număr întreg negativ.

Este natural să încercăm să rezolvăm o ecuație de forma $x + a = b$ în mulțimea ℤ a numerelor întregi.

Să demonstrăm!

Ecuația $x + a = b$ are soluție în ℤ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$; soluția acestei ecuații este $b - a$.

❷ *Rezolvă în ℤ ecuațiile* $x + 12 = 2$, $x + (-1) = -7$.

Ecuația $x + a = b$ este echivalentă cu ecuația $(x + a) + (-a) = b + (-a)$, unde $(-a)$ este opusul lui a.

Folosind asociativitatea adunării din ℤ, faptul că $a + (-a) = 0$, precum și relația $b - a = b + (-a)$, deducem că soluția ecuației $x + a = b$ este $b - a$.

❸ *Explică de ce ecuația* $x + a = b$ *nu poate fi rezolvată în ℕ, pentru unele numere* $a, b \in \mathbb{N}$.

♦ Rezolvări de ecuații în $\mathbb{Q}$

Să comparăm!

Pentru rezolvarea în $\mathbb{Z}$ a ecuației $x + a = b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ am folosit existența în $\mathbb{Z}$ a opusului $(-a)$ al lui a, precum și faptul că $b + (-a)$ este, la rândul său, un număr întreg.

În schimb, nici în $\mathbb{Z}$ nu putem găsi o soluție a ecuației $3x = 2$. Este nevoie de o nouă extindere a mulțimii de numere în care lucrăm pentru a putea rezolva această ecuație și anume este nevoie de mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale.

Să demonstrăm!

Ecuația $a \cdot x = b$ are soluție în $\mathbb{Q}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.

Soluția acestei ecuații este $\frac{1}{a} \cdot b$.

Ecuația $a \cdot x = b$ este echivalentă cu ecuația $\frac{1}{a} \cdot (a \cdot x) = \frac{1}{a} \cdot b$, unde $\frac{1}{a}$ este inversul lui a.

Folosind asociativitatea înmulțirii din $\mathbb{Q}$ și egalitatea $\frac{1}{a} \cdot a = 1$, obținem $a \cdot x = b$, deci $x = \frac{1}{a} \cdot b$.

Să analizăm!

Pentru a rezolva în $\mathbb{Q}$ ecuația $a \cdot x = b$ $(a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0)$ am folosit existența în $\mathbb{Q}$ a inversului $\frac{1}{a}$ al numărului nenul a, precum și faptul că $\frac{1}{a} \cdot b$ este, la rândul său, un număr rațional.

În $\mathbb{Q}$, orice număr are un opus și orice număr nenul are un invers. De aceea, în $\mathbb{Q}$ putem rezolva atât ecuații de forma $x + a = b$ $(a, b \in \mathbb{Q})$, cât și ecuații de tipul $a \cdot x = b$ $(a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0)$. În concluzie, putem rezolva în $\mathbb{Q}$ orice ecuație de forma $a \cdot x + b = 0$ cu coeficienți $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.

Obținem $x = \frac{1}{a} \cdot (c - b) = \frac{1}{a} \cdot c - \frac{1}{a} \cdot b$.

❹ *Stabilește ce proprietăți ale operațiilor cu numere raționale sunt folosite pentru a obține soluția ecuației $a \cdot x = b$, unde $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.*

♦ Rezolvări de ecuații în $\mathbb{R}$

Unele probleme conduc la ecuații care nu sunt de tipul celor de mai sus, de exemplu, ecuațiile $x^3 = 2$; $3^x = 2$. Aceste ecuații nu admit soluții în mulțimea $\mathbb{Q}$, a numerelor raționale. Ele pot fi, însă, rezolvate în mulțimea $\mathbb{R}$, a numerelor reale.

Astfel, numărul real (irațional) $\sqrt[3]{2}$ este soluție a ecuației $x^3 = 2$, iar numărul real (irațional) $\log_3 2$ este soluție a ecuației $3^x = 2$.

❺ *Demonstrează că $\sqrt[3]{2}$ este număr irațional. Folosește același argument ca și în demonstrarea faptului că $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Am văzut, așadar, cum necesitatea rezolvării unor ecuații simple în care apar numai numere naturale, ne conduce la considerarea unor mulțimi, mai bogate, în care aceste ecuații admit soluții. Astfel, pentru a putea rezolva toate ecuațiile de forma $x + a = b$, a fost nevoie să lucrăm în mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi. Toate ecuațiile de tipul $ax = b$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, pot fi rezolvate în mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale. Toate ecuațiile de forma $x^n = a$, unde $n, a \in \mathbb{N}$, au o soluție în mulțimea numerelor reale. Observăm că mulțimile de numere au apărut și s-au dezvoltat din necesitatea rezolvării unor ecuații.

⚠ *Există ecuații, cum ar fi $x^2 + 1 = 0$, care nu admit soluții în mulțimea numerelor reale.*

Exerciții și probleme

1. Rezolvă în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:
a) $x - 6 = 0$; $3x + 9 = 0$; $-x + 6 = 0$;
b) $4x - 8 = 0$; $6x + 24 = 0$; $-9x + 81 = 0$;
c) $6x - 2 = 10$; $13x + 5 = 18$; $4(x + 4) = 12$.

2. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:
a) $x - 3 > 0$; $x + 3 < 0$; $2x \leqslant 18$
b) $-8x > 16$; $2x + 3 < 7$; $-5x + 1 \geqslant -14$
c) $x + 4 \leqslant -1$; $3(x + 2) > -9$; $7(2 - x) \geqslant -36$.

3. Rezolvă ecuațiile în $\mathbb{Q}_+$:
a) $x+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$; b) $x - 0,7 = 1,8$; c) $2x+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$;
d) $(x+0,8)\cdot\frac{1}{2}=1,5$; e) $(4-x)\cdot1\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$.

4. Rezolvă ecuațiile în $\mathbb{Q}$:
a) $(3,7 + 0,3) \cdot x = 0,4$
b) $(31,5 - 1,5) \cdot x = 1,2$
c) $6,75 \cdot x + 0,50 \cdot x = 6,25\, x$
d) $x : 0,6^2 = 10,5$
e) $(6,32 + x) \cdot 10^3 = 7916,9$.

5. Rezolvă în $\mathbb{Q}$:
a) $5,2 \cdot x = 11,96$ b) $4,59 : x = 4,5$
c) $x : 4,73 = 0,215$ d) $6,4 \cdot x - 3,9 \cdot x = 5$
e) $2,5 \cdot x + 4,5 \cdot x = 14,7$
f) $9,3 \cdot x + 6,2 \cdot x - 7,8 \cdot x = 30,8$.

6. Suma a două numere zecimale este 324,21, iar unul dintre ele este de 100 ori mai mare decât celălalt. Află numerele.

7. Diferența a două numere zecimale este 3, iar unul dintre ele este de 301 ori mai mic decât celălalt. Află numerele.

8. Suma a două numere este 60,66. Unul dintre ele este de 5 ori mai mic decât celălalt. Află numerele.

9. O grădină în formă de pătrat are perimetrul de 170,60 m. Află aria sa.

10. Rezolvă în $\mathbb{Z}$ inecuațiile:
a) $|3x+2| \leqslant 5$; b) $|x+7| \leqslant 0$; c) $4(x-|x|)+4 \geqslant 0$.

11. Rezolvă în $\mathbb{Q}$ în ecuațiile:
a) $x+\frac{1}{11}=5$ b) $x-0,2=\frac{1}{4}$
c) $x\cdot\frac{2}{5}=\frac{10}{3}$ d) $x:\frac{4}{7}=\frac{7}{4}$

12. Află numerele întregi n pentru care:
a) $|n| \leqslant 2$ b) $|n - 3| \leqslant 0$
c) $|2(n - 3)| < 4$ d) $|2n - 8| - 3 < 1$.

13. Determină numerele întregi a și b, știind că mulțimile $A = \{-3;\ 11;\ |a|;\ -5\}$ și $B = \{b;\ -|3|;\ 11;\ -(-5)\}$ sunt egale.

14. Află $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât numerele întregi impare:
a) $-5, -3, x, 5, 7$ să fie ordonate crescător;
b) $5, 3, x, -5, -7, -9$ să fie ordonate descrescător.

15. Reprezintă pe axa numerelor, în fiecare caz, elementele mulțimii, apoi scrie-le în ordine crescătoare, folosind semnul „$\leqslant$".
a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| \leqslant 3\}$;
b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ 2 \leqslant |x| < 5\}$.

16. Decide, fără să rezolvi, dacă există numere naturale care verifică ecuația:
a) $2x + 1 = 20038$
b) $3x + 7 = 127843$
c) $4x + 18 = 156787$.

17. a) Avem o balanță și trei corpuri geometrice: un cub, o piramidă și un cilindru. Cum putem aranja cele trei obiecte în ordinea crescătoare a maselor lor, executând cântăriri cu balanța, fără să folosim greutăți marcate?
b) Avem o balanță și patru corpuri geometrice: un cub, un paralelipiped dreptunghic, o piramidă și un cilindru. Cum putem aranja obiectele în ordinea crescătoare a maselor lor, executând cântăriri cu balanța?
Alcătuiește și rezolvă o problemă asemănătoare.

18. Rezolvă în $\mathbb{R}$:
a) $|x| = -x$
b) $|2(x - 3)| = 8$
c) $||x - 1| - 2| = 1$
d) $|-3(2x + 4)| \leqslant 0$
e) $|5(2 - x)| < 5$.

19. Justifică dacă:
a) $\sqrt[3]{64} \in \mathbb{Z}$
b) $\log_4 2 \in \mathbb{Q}$
c) $\log_5 2 \in \mathbb{Q}$
d) $\sqrt{28+10\sqrt{3}} \in \mathbb{N}$.

Analizăm și generalizăm!

♦ Legi de compoziție

Să analizăm!

Pe mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$ avem două operații elementare: adunarea și înmulțirea. Spre exemplu, adunarea numerelor naturale asociază unei perechi de numere naturale $(m; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ suma lor, $m + n \in \mathbb{N}$. Cu alte cuvinte, adunarea numerelor naturale este o funcție $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m; n) \mapsto m + n$.

⚠ $A \times B$ este produsul cartezian al mulțimilor A și B. Elementele sale sunt perechi $(a;b)$, unde $a \in A$ și $b \in B$.

În general

O *lege de compoziție* pe o mulțime nevidă *M* este o funcție $\circ : M \times M \to M$.

O lege de compoziție asociază, așadar, unei perechi $(a;b) \in M \times M$, elementul notat $a \circ b$, care se numește rezultat. De aceea, de obicei spunem „operație” în loc de „lege de compoziție”.

Exemple și contraexemple

1) Adunarea, respectiv înmulțirea, sunt legi de compoziție (operații) pe mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$.

2) Adunarea este lege de compoziție pe mulțimea numerelor naturale pare.

3) Pentru o mulțime *E* notăm cu $\mathscr{P}(E)$ mulțimea părților sale. Altfel spus, elementele lui $\mathscr{P}(E)$ sunt submulțimile lui *E.*

Reuniunea și intersecția sunt legi de compoziție pe $\mathscr{P}(E)$.

4) Scăderea **nu** este o lege de compoziție pe mulțimea numerelor naturale. Spre exemplu, deși 2 și 3 sunt elemente ale lui $\mathbb{N}$, diferența lor $2 - 3 \notin \mathbb{N}$, deci nu putem defini, cu ajutorul scăderii, o funcție de la $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cu valori în $\mathbb{N}$.

❶ Este adunarea lege de compoziție pe mulțimea numerelor impare?

❷ Găsește o mulțime de numere pe care împărțirea este lege de compoziție.

❸ Stabilește dacă scăderea este lege de compoziție pe $\mathbb{Z}$.

♦ Proprietăți ale adunării și înmulțirii

Să analizăm!

Legile de compoziție pot avea diferite proprietăți. Spre exemplu, operațiile de adunare și înmulțire verifică pe mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ proprietățile prezentate în tabelul de mai jos.

Operație \ Mulțime		$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
Adunarea	Asociativitate	✓	✓	✓	✓
	Element neutru (0)	✓	✓	✓	✓
	Existenţa opusului $(-a)$		✓	✓	✓
	Comutativitate	✓	✓	✓	✓
Înmulţirea	Asociativitate	✓	✓	✓	✓
	Element neutru (1)	✓	✓	✓	✓
	Existenţa inversului $\frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$			✓	✓
	Comutativitate	✓	✓	✓	✓
Distributivitatea înmulţirii faţă de adunare		✓	✓	✓	✓

❹ Explică de ce în unele căsuțe ale tabelului alăturat nu apare semnul „✓”.

Analizând tabelul, observăm că pe cele patru mulțimi de numere, adunarea și înmulțirea au unele proprietăți comune. Diferențe apar în ceea ce privește existența opusului și a inversului. Pentru a pune în evidență faptul că o mulțime este înzestrată cu una sau cu două legi de compoziție și că aceste legi verifică anumite proprietăți, este utilă introducerea structurilor algebrice; noi vom studia structurile de monoid, grup, inel, corp.

⚠ Tocmai inexistența opusului sau a inversului în una dintre mulțimile de numere a generat apariția unor mulțimi mai cuprinzătoare.

♦ Monoizi

Din tabelul cu proprietățile adunării și înmulțirii pe ℕ, ℤ, ℚ și ℝ, observăm că pe toate mulțimile considerate aceste operații verifică proprietatea de asociativitate și existența elementului neutru.

⚠ Dacă o lege de compoziție admite element neutru, acesta este unic.

Să reținem!

> O lege de compoziție „∘” pe o mulțime *M* se numește *asociativă* dacă
> $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, oricare ar fi $a, b, c \in M$.
> Un element e al lui *M* se numește *element neutru* pentru „∘” dacă
> $a \circ e = e \circ a = a$, oricare ar fi $a \in M$.

⚠ Dacă legea de compoziție este notată cu „+”, pentru elementul neutru se folosește notația 0, iar pentru o lege de compoziție notată cu „·”, elementul neutru se notează cu 1.

Exemple și contraexemple

1) Adunarea și înmulțirea pe ℕ, ℤ, ℚ, respectiv ℝ, sunt operații asociative.

2) Fie *E* o mulțime. Reuniunea și intersecția sunt legi de compoziție asociative pe $\mathscr{P}(E)$.

3) Pe ℤ, operația de scădere nu este asociativă; de exemplu: $(4 - 2) - 5 \neq 4 - (2 - 5)$.

❺ Găsește un alt exemplu pentru a arăta că scăderea nu este operație asociativă.

4) 0 este element neutru pentru adunare pe ℕ, ℤ, ℚ și ℝ.

5) 1 este element neutru pentru înmulțire pe ℕ, ℤ, ℚ și ℝ.

6) Fie *E* o mulțime. Mulțimea vidă $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$ este element neutru pentru reuniune, deoarece $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$, pentru orice $A \in \mathscr{P}(E)$, iar $E \in \mathscr{P}(E)$ este element neutru pentru intersecție.

Să analizăm!

Pe mulțimea numerelor întregi, operațiile de adunare și înmulțire sunt comutative. Spre deosebire de acestea, operația de scădere pe ℤ nu este comutativă; de exemplu: $3 - 5 \neq 5 - 3$.

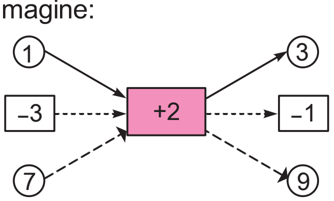
În general

> O lege de compoziție pe o mulțime *M* este *comutativă* dacă
> $a \circ b = b \circ a$, oricare ar fi $a, b \in M$.

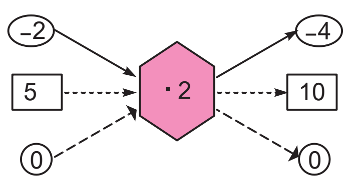
Exemple și contraexemple

1) Adunarea și înmulțirea sunt comutative.
2) Reuniunea și intersecția sunt comutative.
3) Compunerea funcțiilor **nu** este, în general, comutativă.

Spre exemplu, să considerăm funcțiile f și g, descrise de „mașinile de calculat” din imagine:



$f(x) = x + 2$

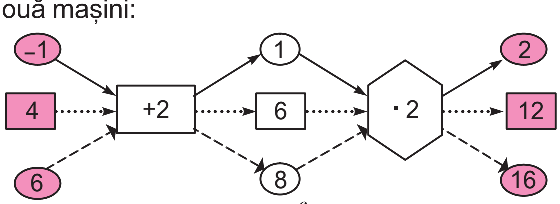


$g(y) = y \cdot 2$

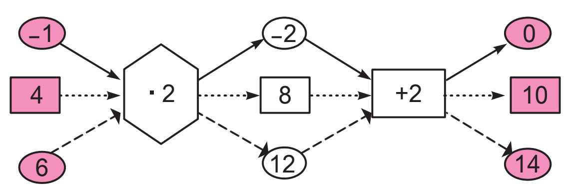
❻ Explică, folosind diagrame, de ce $f \circ g \neq g \circ f$.

❼ Exprimă prin formule legile de asociere descrise de funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$.

Compunerea funcțiilor f și g are ca efect trecerea succesivă a unui număr prin cele două mașini:



$g \circ f$



$f \circ g$

Observăm că datele de intrare în „mașinile” $f \circ g$ și $g \circ f$ sunt aceleași, dar datele de ieșire diferă.

În concluzie $f \circ g \neq g \circ f$.

Din exemplele anterioare, vedem că operațiile algebrice pot avea unele proprietăți care le aseamănă, dar pot avea și proprietăți care le deosebesc.

În general

Fie M o mulțime nevidă și „$\circ$” o lege de compoziție pe M. Perechea $(M, \circ)$ este un *monoid* dacă legea de compoziție „$\circ$” este asociativă și admite element neutru. Un monoid $(M, \circ)$ este *comutativ* dacă legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

Exemple

1) $(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$ sunt monoizi comutativi, având ca element neutru pe 0.

2) $(\mathbb{N}, \cdot)$; $(\mathbb{Z}, \cdot)$; $(\mathbb{Q}, \cdot)$; $(\mathbb{R}, \cdot)$ sunt monoizi comutativi având elementul neutru 1.

3) $(\mathbb{N}^*, \cdot)$; $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$; $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$; $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sunt monoizi comutativi, având elementul neutru 1.

4) Fie E o mulțime. Atunci $(\mathcal{P}(E), \cup)$ și $(\mathcal{P}(E), \cap)$ sunt monoizi comutativi, având elementele neutre $\varnothing$, respectiv E.

5) Fie $\mathcal{F} = \{f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$; atunci $(\mathcal{F}, \circ)$ este un monoid necomutativ, având ca element neutru funcția identică a lui $\mathbb{R}$ (adică funcția descrisă de corespondența $x \mapsto x$).

❽ *Verifică toate proprietățile monoizilor din exemplul 4.*

♦ Grupuri

Să analizăm!

Studiind tabelul care prezintă proprietățile adunării și înmulțirii pe mulțimile de numere, observăm că ceea ce distinge adunarea pe $\mathbb{Z}$ de adunarea pe $\mathbb{N}$ este existența opusului, iar ceea ce distinge înmulțirea pe $\mathbb{Q}$ de înmulțirea pe $\mathbb{Z}$ este existența elementului invers față de înmulțire, pentru numerele nenule. Aceasta arată că există o diferență fundamentală între monoizii $(\mathbb{N}, +)$ și $(\mathbb{Z}, +)$. Proprietatea anterioară, diferențiază și monoizii $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

⚠ *Notația $\mathbb{Z}^*$ indică mulțimea numerelor întregi nenule.*

În general

Fie $(M, \circ)$ un monoid cu element neutru e.

Un element $x \in M$ se numește *inversabil* dacă există un element $y \in M$ astfel încât $x \circ y = y \circ x = e$.

Elementul y se numește *inversul lui* x și este notat cu x^{-1}.

⚠ *Pentru un monoid $(M, +)$ cu element neutru 0, inversul unui element $x \in M$ este notat cu $(-x)$ și se numește opusul lui x.*

⚠ *Dacă un element are invers, atunci acesta este unic.*

Exemple și contraexemple

1) În monoidul $(\mathbb{N}, +)$ singurul element inversabil este 0, iar opusul său este tot 0. Nici un element $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nu este inversabil, deoarece pentru $x \neq 0$ nu putem găsi $y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x + y = y + x = 0$.

2) În monoidul $(\mathbb{Z}, +)$ toate elementele sunt inversabile; aceeași proprietate este valabilă în monoizii $(\mathbb{Q}, +)$ și $(\mathbb{R}, +)$.

3) În monoidul $(\mathbb{Z}, \cdot)$ singurele elemente inversabile sunt 1 și -1.

4) În monoizii $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$; $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ toate elementele sunt inversabile.

5) Fie E o mulțime. În monoidul $(\mathcal{P}(E), \cup)$ singurul element inversabil este $\varnothing$. Aceasta se întâmplă deoarece $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$ și pentru o mulțime $A \subset E$, nevidă, nu putem găsi $B \subset E$ astfel încât $A \cup B = \varnothing$.

Analog, în monoidul $(\mathcal{P}(E), \cap)$ singurul element inversabil este E.

❾ *Descrie elementele inversabile ale monoizilor $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$; $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$; $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.*

❿ *Arată că E este unicul element inversabil în monoidul $(P(E), \cap)$.*

Să analizăm!

În exemplele de mai sus, unii monoizi au proprietatea că *toate* elementele lor sunt inversabile în raport cu legea de compoziție dată, în timp ce în restul monoizilor doar unele elemente verifică această proprietate.

În general

Un monoid $(G, \circ)$ în care toate elementele sunt inversabile se numește *grup*. Un grup $(G, \circ)$ se numește *comutativ* (sau *abelian*) dacă legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

Denumirea de grup abelian provine de la numele matematicianului danez Niels Abel.

Exemple și contraexemple

1) $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$ sunt grupuri, în timp ce $(\mathbb{N}, +)$ nu este un grup.

2) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sunt grupuri. În schimb, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, \cdot)$ nu sunt grupuri. De asemenea, $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ nu este un grup.

3) Dacă E este o mulțime nevidă, monoizii $(\mathscr{P}(E), \cup)$ și $(\mathscr{P}(E), \cap)$ nu sunt grupuri.

11 *Justifică toate afirmațiile din exemplele alăturate.*

♦ Distributivitate

Să analizăm!

Pe mulțimile de numere avem definite două operații: adunarea și înmulțirea. De asemenea, dacă E este o mulțime, pe $\mathscr{P}(E)$ avem două legi de compoziție: reuniunea și intersecția. Atunci când pe o mulțime avem două legi de compoziție, este important să știm ce legătură există între ele.

În general

Fie „$\circ$” și „$*$” legi de compoziție pe mulțimea A. Spunem că operația „$\circ$” este distributivă față de operația „$*$” dacă pentru orice $a, b, c \in A$:

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$$
$$(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$$

Exemple

1) Înmulțirea numerelor este distributivă față de adunare.

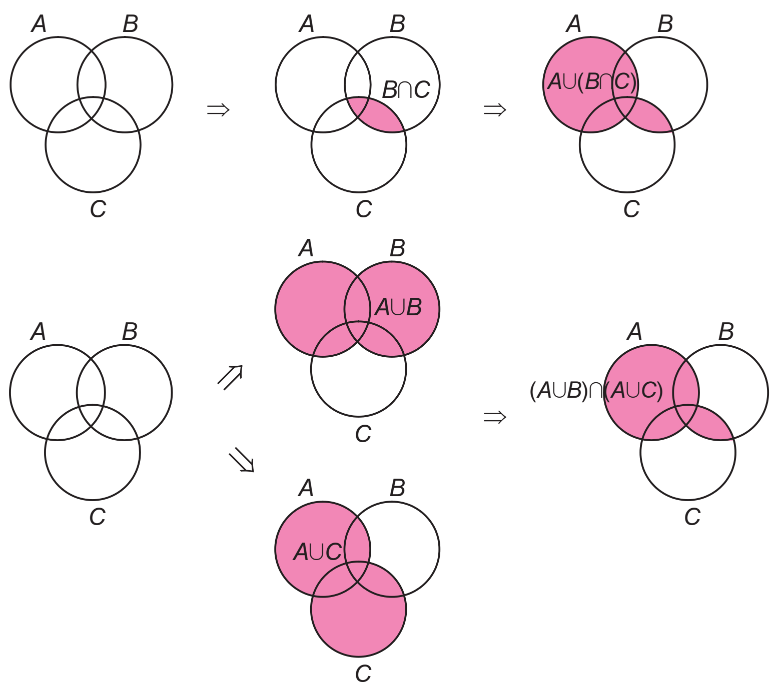
2) Reuniunea este distributivă față de intersecție și intersecția este distributivă față de reuniune. Altfel spus, oricare ar fi $A, B, C \subset E$, avem

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Justificăm prima egalitate folosind diagrame Venn-Euler.

12 *Arată că adunarea numerelor* **nu** *este distributivă față de înmulțire.*



13 *Explică etapele demonstrației făcute cu diagrame. Procedează la fel pentru a justifica cea de-a doua egalitate.*

♦ Inele

Să analizăm!

Să privim din nou tabelul cu proprietățile operațiilor cu numere. Observăm că pe fiecare dintre mulțimile ℕ, ℤ, ℚ, ℝ sunt definite două operații (adunarea și înmulțirea). Comparând între ele proprietățile acestor operații, între ℕ, pe de o parte și ℤ, (sau ℚ, sau ℝ) pe de altă parte, apare o primă diferență, și anume unele dintre elementele lui ℕ nu au opus.

Proprietățile operațiilor algebrice pe ℤ, ℚ și ℝ au condus la definirea unei noi structuri algebrice.

14 Verifică faptul că (ℤ, +, ·); (ℚ, +, ·) și (ℝ, +, ·) sunt inele.

15 Un inel este, în primul rând, grup față de prima operație. Detaliază toate proprietățile ce trebuie să fie îndeplinite pentru ca (A, +, ·) să fie inel.

16 Verifică dacă mulțimea numerelor impare formează un inel cu adunarea și înmulțirea.

În general

Spunem că un triplet (A, +, ·) este un *inel* dacă:
(i) (A, +) este grup comutativ
(ii) (A, ·) este monoid
(iii) legea de compoziție „·" este distributivă față de „+".
Un inel (A, +, ·) se numește *comutativ* dacă legea de compoziție „·" este comutativă.

Exemple și contraexemple

1) (ℤ, +, ·) este inel. Pentru a ne convinge de acest lucru, verificăm proprietățile care definesc structura de inel:

(i) Adunarea în ℤ este asociativă, comutativă, admite element neutru și orice număr întreg are un opus în ℤ. Deci (ℤ, +) este grup comutativ.
(ii) Înmulțirea în ℤ este asociativă și admite elementul neutru 1. Ca urmare, (ℤ, ·) este monoid.
(iii) Înmulțirea este distributivă față de adunare în ℤ:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
În concluzie, (ℤ, +, ·) este inel.

2) Pe mulțimea numerelor întregi pare, notate cu P, operațiile de adunare și înmulțire sunt legi de compoziție. Ne punem problema să verificăm dacă această mulțime este un inel. Pentru aceasta, trebuie să facem mai multe verificări. De exemplu, verificăm dacă fiecare element al acestei mulțimi are un opus. Pentru numărul par $2n$, opusul său este $(-2n)$, care este, la rândul său, un număr par. Obținem ușor că (P, +) este grup comutativ. Dar P nu are element neutru față de înmulțire, deoarece $1 \notin P$. Ca urmare, (P, +, ·) nu este inel.

♦ Corpuri

Să analizăm!

Comparând între ele inelele (ℤ, +, ·); (ℚ, +, ·) și (ℝ, +, ·) constatăm că ele se deosebesc din punctul de vedere al inversabilității elementelor: în timp ce în ℤ singurele elemente inversabile sunt 1 și −1, în ℚ și ℝ orice element nenul este inversabil. Această proprietate suplimentară a inelelor ℚ și ℝ a condus la definirea unei noi

17 Arată că (ℝ, +, ·) are structură de corp.

18 Justifică fiecare dintre afirmațiile alăturate.

În general

Un inel (K, +, ·) se numește *corp* dacă orice element nenul este inversabil față de înmulțire, cu alte cuvinte dacă (K^*, ·) este grup, unde $K^* = K \setminus \{0\}$.

Exemple și contraexemple

1) (ℚ, +, ·) este corp.

2) (ℤ, +, ·) este un inel care nu este corp.

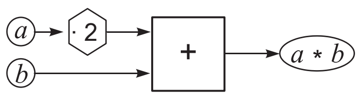
3) Mulțimea numerelor pare, înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire nu este un corp.

4) (ℕ, +, ·) **nu** este corp, deoarece (ℕ, +) nu este grup.

Exerciții și probleme

1. Paul a inventat o nouă operație algebrică, notată „□” și definită prin: $a \square b$ este media aritmetică a numerelor reale a și b.
a) Calculează $2 \square 4$ și $(-1) \square 5$.
b) Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $x \square 3 = 1{,}5$.
c) Verifică dacă noua operație algebrică, inventată de Paul, este asociativă.
d) Inventează și tu o operație algebrică pe $\mathbb{R}$ și propune colegilor o problemă.

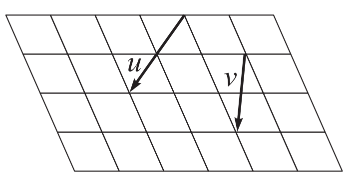
2. Exprimă printr-o formulă operația algebrică notată „*”, care este descrisă prin desenul alăturat.



3. Arată că împărțirea este operație algebrică pe mulțimea numerelor raționale nenule. Justifică dacă împărțirea este asociativă sau comutativă pe $\mathbb{Q}^*$.

4. Fie M mulțimea numerelor naturale care dau restul 1 la împărțirea cu 5, adică $M = \{1; 6; 11; ...\}$. Demonstrează că înmulțirea este lege de compoziție pe M și că $(M, \cdot)$ este un monoid.

5. a) Fie V mulțimea vectorilor din plan. Demonstrează că operația de adunare a vectorilor determină pe V o structură de grup comutativ.
b)



Pentru vectorii u și v din desen, reprezintă $u + v$ și $-u$. Cum putem calcula $u - v$?

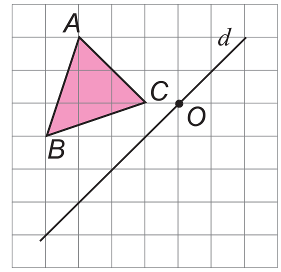
6. Alexandra a încercat să definească o nouă operație algebrică pe $\mathbb{Q}$ (notată de ea prin „◇”) astfel:

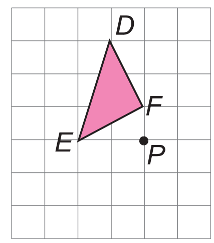
$$\frac{a}{b} \diamond \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Ce crezi, este definiția corectă? Dacă nu, completează definiția Alexandrei, ca aceasta să devină corectă.

7. Pe mulțimea numerelor întregi, definim o nouă operație algebrică, descrisă prin: $a \circ b = ab - a - b - 2$.
a) Arată că operația „$\circ$” este asociativă.
b) Verifică dacă numărul 2 este element neutru pentru 0.
c) Determină toate elementele inversabile din $(\mathbb{Z}, \circ)$.
d) Este $(\mathbb{Z}, \circ)$ un grup?

8. a) Observă figura alăturată și desenează simetricul triunghiului ABC față de O, apoi simetricul aceluiași triunghi față de dreapta d.
b) Desenează figura obținută prin rotația în jurul lui P a triunghiului DEF, cu un unghi de 90°.





c) Considerăm toate transformările planului care invariază punctul O și care păstrează distanțele dintre puncte: o astfel de transformare se numește izometrie. Simetriile față de punctul O sau față de dreapta d, ca și rotația în jurul lui P, cu care ai lucrat la punctele a) și b) ale problemei, sunt izometrii. Demonstrează că o succesiune de două izometrii (adică o compunere de izometrii) este tot o izometrie.
d) Arată că izometriile formează un grup necomutativ, în raport cu operația de compunere a izometriilor. Care este inversa simetriei față de dreapta d, în acest grup?

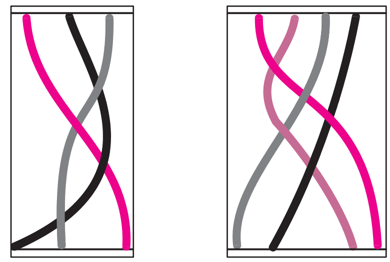
9. Fie A mulțimea numerelor raționale care pot fi reprezentate prin fracții cu numitorul impar. Astfel, $\frac{16}{12} \in A$, deoarece $\frac{4}{3}$ este o altă scriere a numărului $\frac{16}{12}$, și această fracție are numitorul impar.
a) Demonstrează că adunarea și înmulțirea sunt legi de compoziție pe A.
b) Arată că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ.
c) Demonstrează că $\frac{10}{6}$ este element inversabil în A, iar $\frac{10}{3}$ nu este inversabil. Este $(A, +, \cdot)$ un corp?
d) Caracterizează toate elementele inversabile din inelul A.
e) Arată că suma a două elemente neinversabile din A rămâne element neinversabil în A. Are inelul $\mathbb{Z}$ o proprietate analogă?

Aplicăm și dezvoltăm!

Structurile algebrice pot fi utilizate pentru a modela diferite contexte. Putem analiza proprietățile unor mulțimi în raport cu anumite operații care structurează acea mulțime. Cele două exemple care urmează te ajută să înțelegi mai bine cum funcționează structura de grup și cum descrie ea comportarea unor „obiecte” de natură geometrică.

♦ Grupul „cosițelor”

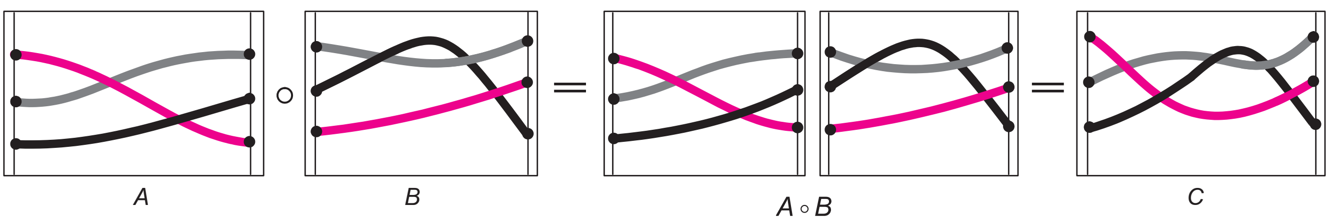
Modelele artistice realizate prin împletire par să nu aibă nici o legătură cu matematica. Vom arăta totuși că o categorie anume de astfel de împletituri formează în mod natural un grup. Să numim „cosiță” modele de forma celor alăturate, realizate prin împletirea câtorva fire ce unesc două laturi ale unui gherghef (în desene, apar trei, respectiv patru fire în împletitură).



În continuare, lucrăm doar cu cosițe având același număr de fire: acestea vor fi elementele grupului nostru.

Definim operația de „lipire” (concatenare, punere în contact) a cosițelor: date două cosițe, ele determină o nouă cosiță prin concatenarea laturilor celor două gherghefuri.

Exemplu:



❶ Ce legătură este între desenul C și desenul $A \circ B$?

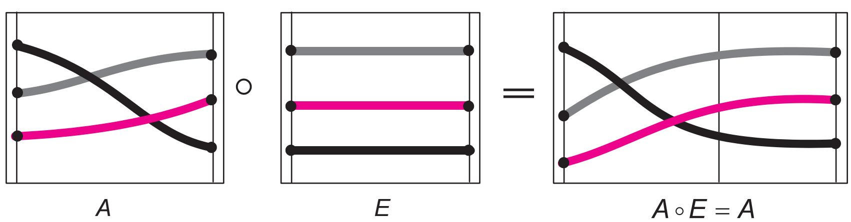
❷ Verifică pe un caz particular că operația de lipire a cosițelor este asociativă.

❸ „Cosița despletită” este element neutru, deoarece $E \circ X = X \circ E = X$, pentru orice cosiță X. Verifică afirmația pe un caz particular, folosind un desen.

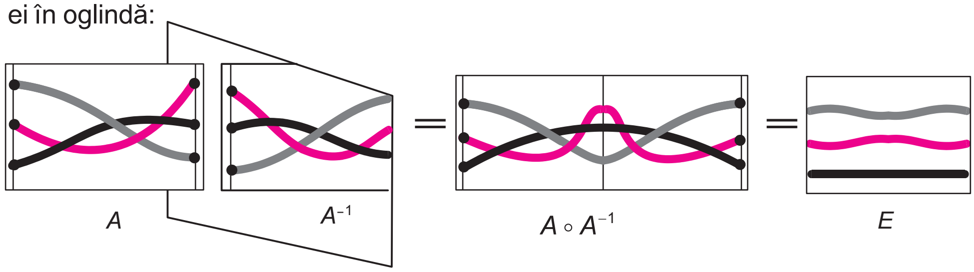
❹ Pentru cosița A din desen, verifică egalitatea $A^{-1} \circ A = E$.

❺ Demonstrează că grupul cosițelor cu n fire este necomutativ, pentru $n \geqslant 3$.

Este ușor de văzut că operația de lipire a cosițelor are ca element neutru „cosița despletită” *E*:



Pe de altă parte, orice cosiță poate fi „despletită”, prin concatenare cu imaginea ei în oglindă:

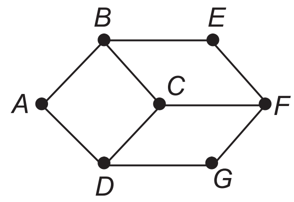


Toate verificările anterioare sugerează faptul că mulțimea cosițelor cu un număr fixat de fire formează un grup față de operația de concatenare a cosițelor.

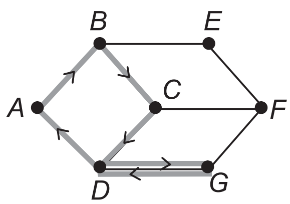
♦ Grupul ciclilor unui graf

Fie G un graf conex și A un nod fixat al grafului.

Considerăm mulțimea tuturor drumurilor în graf care pornesc și se termină în punctul A; un astfel de drum este, evident, un circuit al grafului G, dar noi avem nevoie de evidențierea originii și a extremității acestor drumuri închise.



De exemplu, pentru graful din figura alăturată, un drum care pornește și se termină în A este descris de succesiunea de noduri: *ADCFGDCFGDCBA*.

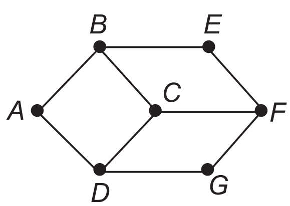


Desigur, un circuit este și *ABCDGDA*. Deoarece muchia *DG* este parcursă succesiv, în cele două sensuri ale sale (ca și cum ne-am fi rătăcit în drumul pe graf!), simplificăm circuitul anterior și spunem că el este echivalent cu circuitul *ABCDA*.

Așadar, într-un circuit, ștergem o muchie atunci când este parcursă succesiv, în sensuri diferite, pentru a obține un circuit echivalent cu cel inițial.

Definim operația de „lipire" (concatenare, continuare) a circuitelor cu originea și extremitatea în A, astfel: circuitul $\mathscr{C}_1$ concatenat cu circuitul $\mathscr{C}_2$ înseamnă circuitul $\mathscr{C}_1 \circ \mathscr{C}_2$, obținut prin parcurgerea lui $\mathscr{C}_1$, urmată de parcurgerea lui $\mathscr{C}_2$.

❻ Simplifică circuitul ABCFGFEBCBA, ștergând o muchie atunci când este parcursă succesiv în cele două sensuri. Putem oare șterge muchia BC din acest circuit?



De exemplu, dacă
$\mathscr{C}_1 = ADGFCBA$, iar
$\mathscr{C}_2 = ABEFCDA$, atunci

$$\mathscr{C}_1 \circ \mathscr{C}_2 = \underbrace{ADGFCB\,A}_{\mathscr{C}_1}\!\!\overbrace{\,BEFCDA}^{\mathscr{C}_2} =$$

$$= ADGFCBEFCDA$$

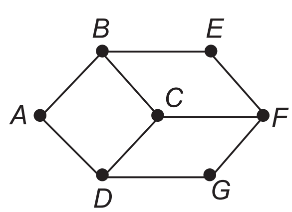
❼ Pentru circuitele din exemplul alăturat, calculează $\mathscr{C}_2 \circ \mathscr{C}_1$, apoi $\mathscr{C}_1 \circ \mathscr{C}_1$.

Este ușor de verificat că operația de lipire a circuitelor este asociativă.

Observăm în plus că „circuitul" nul $\mathscr{N}$ (adică circuitul de lungime 0, în care, de fapt, nu plecăm din nodul A) este element neutru pentru operația de lipire a circuitelor.

Orice circuit are un invers față de operația de lipire. De exemplu, inversul circuitului $\mathscr{C} = ABEFCBA$ este circuitul $\mathscr{C}^{-1} = ABCFEBA$:

❽ Verifică egalitatea $\mathscr{C}^{-1} \circ \mathscr{C} = \mathscr{N}$. Cum crezi că a fost obținut circuitul $\mathscr{C}^{-1}$, pornind de la $\mathscr{C}$?



$$\mathscr{C} \circ \mathscr{C}^{-1} = ABEFCB\,A\,BCFEBA = ABEFCBCFEBA = \ldots = ABA = \mathscr{N}.$$

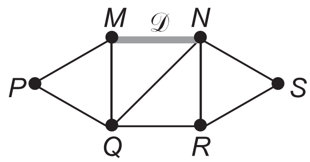
❾ Fie G un graf care nu este graf arbore. Demonstrează că grupul circuitelor cu originea într-un nod fixat al grafului G este grup necomutativ.

Toate afirmațiile și verificările anterioare ne arată că mulțimea circuitelor unui graf G având originea și extremitatea în nodul A formează un grup față de operația de concatenare a circuitelor. Prin tradiție, acest grup este notat $\pi(G; A)$.

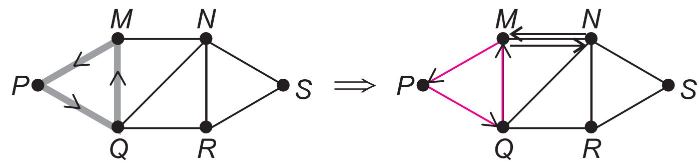
Să analizăm!

Fie M și N două noduri ale grafului conex G.

Dacă fixăm drumul $\mathscr{D}$, cu originea în M și extremitatea în N, avem o modalitate naturală să transformăm circuite cu originea și extremitatea în M, în circuite cu originea și extremitatea în N.



De exemplu, pentru graful G din figură și drumul $\mathscr{D}$ marcat pe desen, transformăm circuitele astfel:



$\mathscr{C} = MPQM$

$\mathscr{C}' = \mathscr{D}^{-1} \circ \mathscr{C} \circ \mathscr{D} = \underbrace{NM}_{\mathscr{D}^{-1}}\underbrace{MPQM}_{\mathscr{C}}\underbrace{MN}_{\mathscr{D}}$

⑩ *Alege un alt drum $\mathscr{D}$ între M și N și explică modul în care circuitul C se transformă într-un circuit din π(G; N).*

În acest mod, grupul $\pi(G;\ M)$ se identifică cu grupul $\pi(G;\ N)$. Deci grupul π nu depinde de nodul fixat; spunem că acest grup este un invariant al grafului.

Exerciții și probleme

1. Fie $n \in \mathbb{Z}$ un număr întreg și $\mathscr{M}_n = \{k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, ...\}$ mulțimea multiplilor întregi ai lui n. Arată că $\mathscr{M}_n$ este grup în raport cu adunarea.

2. Arată că mulțimea $A_{10} = \left\{\frac{m}{10^p} \middle| m \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}\right\}$ este inel în raport cu adunarea și înmulțirea.

3. Explică de ce adunarea numerelor pozitive nu admite element neutru.

4. Studiază proprietățile adunării pe mulțimea $[0, \infty)$.

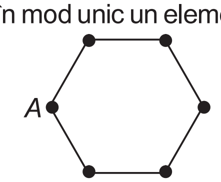
5. Stabilește dacă ridicarea la putere admite element neutru în mulțimea $\mathbb{N}^*$.

6. Pentru $x, y \in \mathbb{Z}$ definim $x \circ y = x + y - xy$. Studiază proprietățile acestei operații.

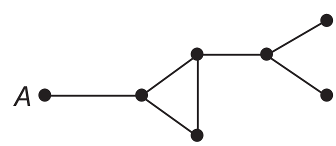
7. Dă exemple de numere $x, y, z \in \mathbb{Q}$ pentru care $x^4y^2z \neq x^2y^2z$.

8. Desenează o cosiță cu 4 fire și determină inversa acesteia, în grupul cosițelor.

9. Pentru graful G din figura de mai jos, arată că elementele din $\pi(G;\ A)$ sunt perfect caracterizate de numere întregi, adică oricărui element din $\pi(G;\ A)$ i se asociază în mod unic un element din $\mathbb{Z}$ și reciproc.



10. Descrie grupul $\pi(G;\ A)$ pentru graful din imagine.



11. a) Fie R_O mulțimea rotațiilor în jurul punctului O în sensul în care se mișcă acele ceasului. Demonstrează că R_O este un grup față de compunerea rotațiilor.
b) Demonstrează inversa rotației cu 60°, în grupul $(R_O, \circ)$.

12. Fie $(G, *)$ un grup în care are loc proprietatea: $x^2 = e$, pentru orice $x \in G$. Demonstrează că $(G, *)$ este un grup comutativ.

Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- să recunosc structuri algebrice
- să identific structuri algebrice prin verificarea de proprietăți
- să compar proprietăți algebrice ale unor operații, în scopul identificării de algoritmi
- să exprim proprietăți ale operațiilor algebrice
- să utilizez similarități ale unor operații în deducerea unor proprietăți algebrice?

Test de verificare

1. Din lista următoare de mulțimi înzestrate cu operații algebrice, încercuiește-le pe cele care determină un grup.
$(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{N}, \cdot)$; $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Z}, \cdot)$; $(\mathbb{Z}, \cdot)$; $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$; $(\mathbb{R}, +)$; $(\mathbb{R}, \cdot)$; $(\mathbb{R}^*, \cdot)$; $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

2. Fie T mulțimea numerelor raționale care se pot reprezenta ca fracții cu numitorul putere a lui 2:
$T = \left\{ \frac{m}{2^n} \middle| m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Identifică ce structură algebrică definesc pe T operațiile uzuale de adunare și de înmulțire.

3. Compară modul de rezolvare a ecuațiilor $x + a = b$ în $\mathbb{Z}$, respectiv $x \cdot a = b$ în $\mathbb{Q}^*$, apoi precizează cum se rezolvă ecuația $X \circ A = B$ în grupul cosițelor cu trei fire. Verifică pe un exemplu algoritmul găsit.

4. Pe mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale definim operația $x \square y$ = cel mai mare divizor comun al numerelor x și y.
a) Calculează $6 \square 8$ și $10 \square 0$.
b) Exprimă, folosind operația dată, următoarea proprietate: cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a, b, c, d se poate calcula „din aproape în aproape”, adică se înlocuiesc primele două numere cu cel mai mare divizor comun al lor și se continuă în același mod.

5. Fie E o mulțime nevidă. În monoidul $(\mathscr{P}(E), \cap)$, considerăm ecuația $X \cap A = B$. Deoarece $A \cap A = A$, deducem că ecuația are soluție dacă și numai dacă $B \subset A$.
Folosește același raționament pentru a studia ecuația $Y \cup A = B$ în monoidul $(\mathscr{P}(E), \cup)$.

Lectură

Structurile algebrice au apărut și s-au dezvoltat pornind de la concepte geometrice. La baza noțiunii de grup au stat transformările geometrice, vectorii și permutările. Ulterior, prin analogie și generalizare, proprietățile acestor mulțimi au căpătat un caracter abstract, pur algebric.

Procesul de degajare a noțiunilor fundamentale ale algebrei, în spiritul prezentării axiomatice, a durat mai bine de un secol. Totuși, aceste noțiuni nu au apărut din neant: evoluția s-a datorat, în mare măsură, nevoilor practice sau celorlalte ramuri ale matematicii. Babilonienii și, mai târziu, grecii au studiat probleme de algebră, în particular metodele de rezolvare a unor ecuații simple. O contribuție majoră la dezvoltarea algebrei au avut-o, în Evul Mediu, arabii. Ulterior, în perioada Renașterii, matematicienii italieni Leonardo din Pisa (sec. XII) și François Viète (1540-1603) au impus simbolismul actual din algebră. În secolul al XIX-lea, operațiile algebrice și proprietățile lor au început să fie studiate din ce în ce mai mult, conducând la degajarea noțiunilor de grup, inel și corp.

Unitatea de învățare 6

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Operații cu numere întregi

1. Alege propozițiile adevărate:

a) $(-3) + 5 = 8$ b) $-(-2 + 7) = 2 - 7$ c) $(-4) \cdot (-2) = -8$
d) $(-3)^2 = 9$ e) $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = 6$ f) $1036 + 2172 = 3108$.

2. Calculează:

a) $2172 - 3291$ b) 2172×3291 c) $(3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4) : 3^5$
d) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + 99 - 100$.

Relații

3. Alege propozițiile adevărate:

a) $2134 > 2129$ b) $-3142 > -3154$ c) $\frac{1}{29} < \frac{1}{28}$ d) $0{,}475 > 0{,}1234$
e) $2147 + 35 > 3024 + 35$; f) $21 + 22 + ... + 100 > 19 + 20 + ... + 98$..

4. Justifică dacă:

a) 342 este divizibil cu 3 b) 15 este divizor al lui 985
c) 4 este divizor comun pentru 486 și 124; d) 2^{10} este divizibil cu 2^7.

Reprezentări

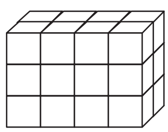
5. Reprezintă pe axă numerele: 3; −2; −1,5; 4; 0,3.

6. Scriem $a \to b$ dacă $a - b = 2$. Reprezintă printr-un graf relația astfel definită, pentru elementele din mulțimea $\{-3; 0; 4; 2; -1; 1; 5\}$.

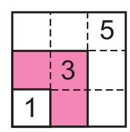
7. Descrie cu ajutorul unui desen egalitatea: $3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$.

Lecturi grafice

8. Calculează numărul de cuburi din construcția alăturată.

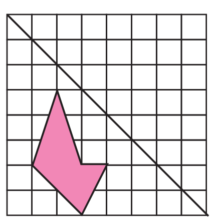


9. Folosește un desen de tipul celui alăturat pentru a calcula suma $1 + 3 + ... + 99$.

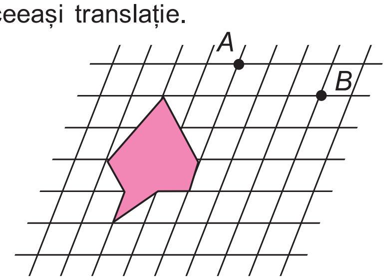


Transformări geometrice

10. Desenează simetrica figurii colorate, față de diagonală.



11. Printr-o translație, punctul A a fost deplasat în B. Desenează figura obținută prin deplasarea figurii colorate, prin aceeași translație.



Operații algebrice

12. Pe mulțimea {1, 2, 3, 4, 5} definim operația algebrică: $x * y = \max \{x; y\}$.

a) Calculează $1 * 3$ și $2 * 5$.
b) Demonstrează că 1 este element neutru pentru „*".
c) Studiază asociativitatea operației „*".

Clase de resturi

Teorema împărțirii cu rest în $\mathbb{Z}$

Ne amintim și explorăm!

Pe mulțimile de numere sunt definite două operații principale: adunarea și înmulțirea. Cu ajutorul acestora, putem defini câteva relații, care se dovedesc importante în înțelegerea proprietăților acestor mulțimi.

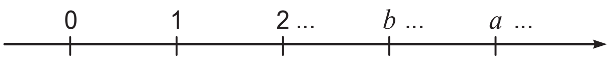
♦ Ce relații importante sunt definite pe $\mathbb{N}$ sau $\mathbb{Z}$?

Exemplul 1: Relația de ordine pe $\mathbb{N}$

Fie $a, b \in \mathbb{N}$; spunem că a este mai mare sau egal cu b ($a \geqslant b$) dacă există numărul natural c astfel încât $a = b + c$.

Pentru a compara două numere naturale, determinăm mai întâi ordinele lor de mărime și, dacă acestea sunt egale, comparăm cifrele celor două numere, de la stânga la dreapta.

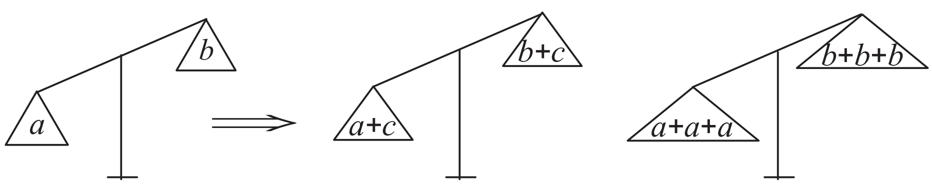
Relația de ordine în $\mathbb{N}$ poate fi interpretată geometric prin *poziționare* pe axa numerelor: numărul natural mai mic este situat, pe axă, mai aproape de 0.



❶ *Descrie sintetic modul în care comparăm numere întregi, respectiv numere raționale.*

⚠ *Numărul 12345 este de ordinul zecilor de mii. El este mai mare decât orice număr de ordinul miilor.*

Pe $\mathbb{N}$, relația de ordine este *compatibilă* cu adunarea și cu înmulțirea, adică: dacă $a \geqslant b$ și $c \in \mathbb{N}$, atunci $a + c \geqslant b + c$ și $a \cdot c \geqslant b \cdot c$.



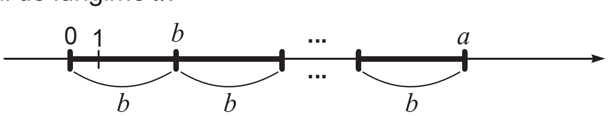
$a \geqslant b$ $\qquad$ $a + c \geqslant b + c$ $\qquad$ $3 \cdot a \geqslant 3 \cdot b$

❷ *Definește relația de ordine pe $\mathbb{Z}$. Interpretează geometric această relație și descrie compatibilitatea ei cu operațiile algebrice.*

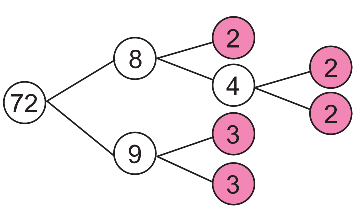
Exemplul 2: Relația de divizibilitate pe $\mathbb{N}$

Fie $a, b \in \mathbb{N}$; spunem că a este divizibil cu b și scriem $a \vdots b$ dacă există numărul natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Relația de divizibilitate poate fi interpretată geometric prin *măsurare* pe axa numerelor: $a \vdots b$ dacă segmentul de lungime b se cuprinde de un număr întreg de ori în segmentul de lungime a.



Orice număr natural mai mare decât 1 se scrie ca un produs de numere prime:



$\Rightarrow 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

❸ *Folosește un graf arbore pentru a descompune în factori primi numerele 75 și 3150. Decide apoi dacă $3150 \vdots 75$.*

Divizibilitatea are legătură cu relația de ordine. De exemplu, să considerăm descompunerile:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$
$$3882 = 2^4 \cdot 3^5$$

Deducem că $3882 \vdots 72$, deoarece între exponenții numerelor prime din cele două descompuneri există relațiile: $4 \geqslant 3$ și $5 \geqslant 2$.

♦ Ce legături există între operațiile și relațiile din $\mathbb{Z}$?

Exemplul 1: Relația de ordine și scăderea în $\mathbb{N}$

Relația de ordine pe $\mathbb{N}$ înseamnă:

$a \geqslant b$ dacă există $c \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $a = b + c$.

Pe mulțimea numerelor naturale, putem efectua scăderea doar dacă descăzutul este mai mare decât scăzătorul; cu notațiile anterioare, avem: $a - b = c$.

Spre deosebire de $\mathbb{N}$, pe mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se poate defini scăderea între orice două numere, adunând primul număr cu opusul celui de-al doilea număr.

Scăderea este o lege de compoziție pe $\mathbb{Z}$, deoarece $\mathbb{Z}$ este grup în raport cu operația de adunare.

Exemplul 2: Relația de divizibilitate și împărțirea în $\mathbb{N}$

Divizibilitatea pe $\mathbb{N}$ înseamnă:

$a \vdots b$ dacă există $c \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $a = b \cdot c$.

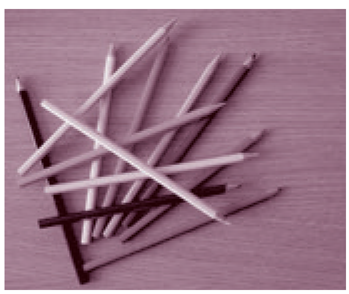
Pe mulțimea numerelor naturale, putem efectua împărțirea doar dacă deîmpărțitul este un multiplu al împărțitorului. Cu notațiile anterioare, avem $a : b = c$ (pentru $b \neq 0$).

Spre deosebire de $\mathbb{N}$, pe mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$ se poate defini împărțirea între orice două numere nenule, înmulțind primul număr cu inversul celui de-al doilea număr. Împărțirea numerelor nenule este o lege de compoziție pe $\mathbb{Q}^*$, deoarece $\mathbb{Q}$ este corp în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire.

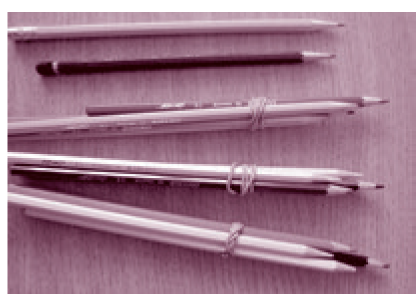
Pe $\mathbb{N}$, putem privi relația de divizibilitate și dintr-o altă perspectivă: numărul natural a este divizibil cu numărul natural nenul b dacă obiectele unei mulțimi cu a elemente pot fi împachetate în grupe de b obiecte.

❹ Relația de divizibilitate este definită analog pe $\mathbb{Z}$. Arată că $(-24) \vdots 6$ și $32 \vdots (-2)$. Este interesantă relația de divizibilitate pe $\mathbb{Q}$? De ce?

❺ Transpune imaginile alăturate folosind operațiile de adunare și înmulțire. Ce legătură există între grupările din imagini și împărțirea cu rest?




„Împachetarea” obiectelor unei mulțimi se poate face și atunci când nu sunt suficiente obiecte pentru a forma numai grupe complete.

În acest caz, numărul „pachetelor” este câtul împărțirii, iar obiectele rămase neîmpachetate reprezintă restul împărțirii.

În general

Pe mulțimea numerelor naturale are loc teorema împărțirii cu rest:

Date numerele naturale a și b, cu $b \neq 0$, există și sunt unice numerele naturale c și r, unde $0 \leqslant r < b$, astfel încât $a = b \cdot c + r$.

⚠ *Poți organiza calculele astfel:*

$$\begin{array}{r|l} 233 & 7 \\ \underline{21} & \overline{33} \\ =23 & \\ \underline{21} & \\ =2 & \end{array}$$

Exemplu

Restul împărțirii lui 233 la 7 este 2, deoarece $233 = 7 \cdot 33 + 2$ și $0 \leqslant 2 < 7$.

Să analizăm!

În teorema împărțirii cu rest, folosim operațiile de adunare și de înmulțire și relația de ordine. Pe de altă parte, teorema are legătură cu relația de divizibilitate. Toate aceste operații și relații sunt însă definite și pe mulțimea numerelor întregi; de aceea, teorema împărțirii cu rest se poate aplica și pentru mulțimea $\mathbb{Z}$.

În general

Pe mulțimea numerelor întregi are loc teorema împărțirii cu rest:

Date numerele întregi a și b, cu $b \neq 0$, există numerele întregi c și r, unde $0 \leqslant |r| < |b|$, astfel încât $a = b \cdot c + r$.

Acest enunț are nevoie de o discuție suplimentară.

Exemplul 1

Să considerăm numerele $a = -28$ și $b = 5$. Egalitățile:

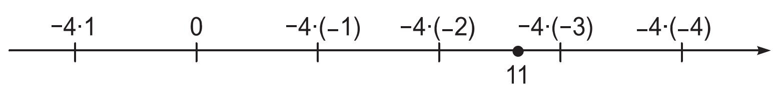
$-28 = 5 \cdot (-5) + (-3)$

$-28 = 5 \cdot (-6) + 2$, exprimă împărțirea cu rest a lui -28 la 5. Pentru a verifica corectitudinea, comparăm modulul câtului cu modulul împărțitorului.

Exemplul 2

Fie $a = 11$ și $b = -4$. Pentru a obține câtul și restul împărțirii lui a la b, putem proceda astfel:

• reprezentăm pe axa numerelor multiplii împărțitorului, adică numerele de forma $-4n$, $n \in \mathbb{Z}$;



• poziționăm deîmpărțitul între doi multipli consecutivi: $-4 \cdot (-2) \leqslant 11 \leqslant -4 \cdot (-3)$.

• folosim acești multipli pentru a scrie teorema împărțirii cu rest:

$11 = -4 \cdot (-2) + 3$

$11 = -4 \cdot (-3) + (-1)$

Am obținut două câturi și două resturi ale împărțirii lui 11 la -4.

❻ *Observă reprezentarea pe axă. Cum obținem resturile 3, respectiv (−1), din această reprezentare?*

Exemplul 3

Pentru a obține câtul împărțirii lui -37 la 8, putem proceda astfel:

• încadrăm raportul dintre deîmpărțit și împărțitor între doi întregi consecutivi:

$\frac{-37}{8} = -4{,}625$, deci $-5 < -\frac{37}{8} < -4$

• câtul împărțirii poate fi -5 sau -4.

❼ *Continuă exemplul 3 și scrie formula împărțirii cu rest a lui −37 la 8.*

Observăm că în exemplele anterioare, câtul și restul împărțirii nu mai sunt unice, așa cum se întâmplă în $\mathbb{N}$. Pentru a păstra totuși proprietatea de unicitate, alegem, dintre resturile posibile, un rest pozitiv.

Să demonstrăm!

Fie a și b ($b \neq 0$) numere întregi date. Numerele $c, r \in \mathbb{Z}$, cu $0 \leqslant r < |b|$ și $a = b \cdot c + r$ sunt unic determinate.

Presupunem, prin absurd, că există c_1, r_1 și c_2, r_2, cu $r_1 \neq r_2$, care îndeplinesc condițiile din enunț. Fie $r_1 > r_2 \geqslant 0$.

Din egalitățile $a = b \cdot c_1 + r_1$ și $a = b \cdot c_2 + r_2$, obținem $r_1 - r_2 = b(c_2 - c_1)$, deci $(r_1 - r_2) \,\vdots\, b$ ...

Dar $0 < r_1 - r_2 < |b|$, ceea ce contrazice divizibilitatea de mai sus ...

În concluzie, $r_1 = r_2$ și $c_1 = c_2$ ...

Exerciții și probleme

1. Reprezintă pe axă, apoi compară numerele:
a) -2 și -4 b) -3 și 1.

2. Descompune ca produs de numere prime, folosind un graf arbore:
a) 325 b) 414 c) 1050 d) 84.

3. Folosește descompuneri în factori primi pentru a decide dacă:
a) $550 \,\vdots\, 22$; b) $4125 \,\vdots\, 75$; c) $3450 \,\vdots\, 140$.

4. Fie a, b, c numere naturale nenule. Arată că:
a) dacă $a \,\vdots\, b$, atunci $(a \cdot c) \,\vdots\, (b \cdot c)$
b) dacă $a \,\vdots\, b$ și $b \,\vdots\, c$, atunci $a \,\vdots\, c$
c) dacă $a \,\vdots\, c$ și $b \,\vdots\, c$, atunci $a + b \,\vdots\, c$.

5. Află divizorii întregi ai numerelor: -7; $+5$; -15; 21.

6. Scrie: a) D_{-18}, D_{18}, D_{27}, D_{-35}; b) M_{-2}, M_4, M_{-5}.

7. Află c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al numerelor:
a) -4 și 6 b) 5 și -15
c) -12 și -14 d) 18 și -24.

8. Împarte cu rest:
a) 317 la 12 b) 215 la 34
c) 81 la 149 d) 421 la 421.

9. Află câtul și restul împărțirii lui x la y, folosind reprezentarea pe axă, dacă:
a) $x = 31$ și $y = -7$
b) $x = -25$ și $y = -9$
c) $x = -41$ și $y = 13$.

10. Verifică:
a) dacă $8 \mid -16$ și $8 \mid 40$, atunci $8 \mid (-16 + 40)$
b) dacă $13 \mid 26$ și $13 \mid -39$, atunci $13 \mid [26 - (-39)]$
c) dacă $11 \mid -55$ și $11 \mid 121$, atunci $11 \mid [2 \cdot (-55) - 4 \cdot 121]$.

11. a) Verifică egalitatea: $37 = (-5) \cdot (-6) + 7$.
b) Este -6 câtul împărțirii lui 37 la -5? Justifică.

12. Reconstituie împărțirea cu rest:

```
* * * * * * * | * *
* * *         |----------
-----         | * * 8 * *
      * *     |
      * *     |
      ---     |
       * * *  |
       * * *  |
       -----  |
           1  |
```

13. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \mid (-15)\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 20,\ x = 5k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Află: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

14. Află c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ai următoarelor numere întregi:
a) 27 și -27 b) -35 și -28
c) 120, -36 și 54 d) 810 și -315.

15. Determină mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } x \mid (-16)\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } x \mid 27\}$.

16. Află $x \in \mathbb{Z}$, știind că: a) $\dfrac{6}{x+1} \in \mathbb{Z}$; b) $\dfrac{-7}{x-2} \in \mathbb{Z}$.

17. Fie $M = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| \leqslant 8\}$,
$N = \{x \mid x \in M,\ x \text{ divide pe } 14\}$ și
$P = \{x \mid x \in M,\ x \text{ este multiplu de } 4\}$.
Determină elementele mulțimilor M, N și P.

18. Determină $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât:
a) $x(x + 2) = 35$; b) $(x - 1) \cdot (x + 3) = -3$;
c) $x^2 - 5x = -6$.

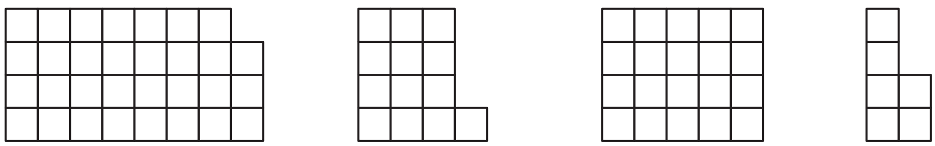
19. Determină mulțimile:
a) $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ \dfrac{28}{x+5} \in \mathbb{Z}\right\}$
b) $B = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ \dfrac{21}{x+7} \in \mathbb{N}\right\}$
c) $C = \left\{x \mid x \in \mathbb{N},\ \dfrac{14}{x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

Analizăm și înțelegem!

♦ Ce sunt clasele de resturi?

Să observăm!

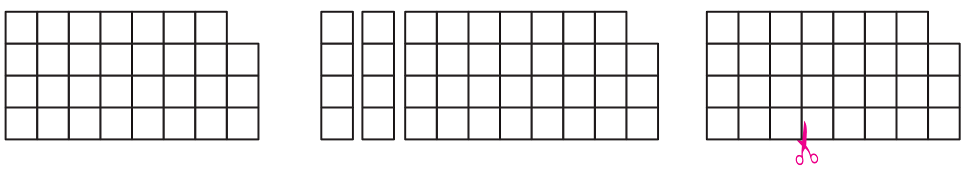
Desenele următoare reprezintă schematic împărțiri cu rest ale unor numere naturale la 4.



$31 = 4 \cdot 7 + 3$ $\quad$ $13 = 4 \cdot 3 + 1$ $\quad$ $20 = 4 \cdot 5 + 0$ $\quad$ $6 = 4 \cdot 1 + 2$

❶ *Identifică pe desenele date câtul și restul împărțirii.*

Cu ajutorul unor desene de acest fel, putem găsi imediat numere diferite care dau restul 3 prin împărțire la 4, adăugând sau înlăturând „coloane de 4”:



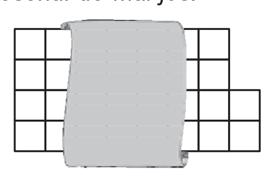
$31 = 4 \cdot 7 + 3$ $\quad$ $39 = 4 \cdot 9 + 3$ $\quad$ $19 = 4 \cdot 4 + 3$

Numerele care dau același rest la împărțirea cu 4 diferă printr-un multiplu de 4.

În general

Numerele x și y dau resturi egale la împărțirea cu n dacă și numai dacă $x - y \vdots n$.

❷ *Descrie printr-o formulă numerele reprezentate în desenul de mai jos.*



Notăm $x \equiv y \pmod{n}$ dacă x și y dau același rest la împărțirea cu n.
(Citim: x *congruent* cu y *modulo* n).
Pentru a verifica dacă $x \equiv y \pmod{n}$, putem să procedăm în două moduri:
- efectuăm împărțirile lui x și y la n și comparăm resturile, sau
- verificăm dacă $x - y$ este divizibil cu n.

Exemplu

$27 \equiv 7 \pmod{4}$, deoarece 27 : 7 dă restul 3; mai precis, avem $27 = 4 \cdot 6 + 3$. Pe de altă parte, 7 : 4 dă tot restul 3, pentru că $7 = 4 \cdot 1 + 3$.

Altfel: $27 - 7 = 4 \cdot 5$, adică $(27 - 7) \vdots 4$. Analog, se verifică relațiile:

$-17 \equiv 8 \pmod{5}$

$-41 \equiv -29 \pmod{6}$

❸ *Exprimă fiecare dintre congruențele din exemplu în forme echivalente, ca în modelul dat.*

Atunci când numărul n este precizat și nu este pericol de confuzie, vom scrie $\widehat{x} = \widehat{y}$ în loc de $x \equiv y \pmod{n}$.

Exemplu

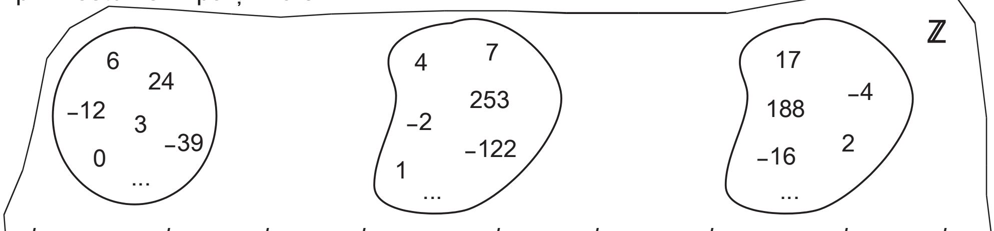
Pentru $n = 8$, avem $\widehat{13} = \widehat{29} = \widehat{-35}$, deoarece $13 \equiv 29 \equiv -35 \pmod{8}$.

❹ *Ce resturi dau numerele 13, 29, −35 la împărțirea cu 8?*

Să analizăm!

Congruența modulo 3 distribuie numerele întregi în *clase* disjuncte, caracterizate prin resturile împărțirii la 3.

❺ Completează fiecare clasă din exemplu cu câte două elemente. Realizează o schemă asemănătoare pentru congruența modulo 4.



clasa numerelor care dau restul 0 la împărțirea cu 3 — *clasa numerelor care dau restul 1 la împărțirea cu 3* — *clasa numerelor care dau restul 2 la împărțirea cu 3*

❻ Observă repartiția în clase, reprezentată alăturat. Mai există oare și o a patra clasă? De ce?

Pentru a identifica o clasă de resturi modulo 3, este suficient să precizăm un număr din acea clasă.

De exemplu, 415 determină clasa numerelor care dau restul 1 la împărțirea cu 3.

Pe scurt, vom nota clasa numerelor care dau restul 1 la împărțirea cu 3, prin $\widehat{415}$. Această clasă este însă determinată și de numărul 172; ar fi normal, deci, să o notăm de asemenea, cu $\widehat{172}$. Notația propusă nu conduce la confuzii, pentru că am convenit mai înainte că scriem $\widehat{172} = \widehat{415}$, altfel spus, 172 și 415 se afla în aceeași clasă modulo 3.

Deși putem nota o clasă de resturi în mai multe moduri, este indicat, totuși, să alegem *o notație standard*. De aceea, alegem *un anumit număr* din fiecare clasă și îl folosim pe acesta în notația prescurtată a clasei respective. Prin convenție, acesta este cel mai mic număr natural care are proprietatea respectivă.

❼ Ce reprezentanți standard se aleg pentru clasele de resturi modulo 6?

Exemplu

În cazul congruenței modulo 3, clasele de resturi se notează standard $\hat{0}$, $\hat{1}$ și $\hat{2}$. Aceste trei mulțimi formează mulțimea claselor de resturi modulo 3, notată $\mathbb{Z}_3$.

În general

Prin convenție, pentru a nota clasele de resturi modulo n, se aleg numerele naturale cele mai mici, care sunt chiar resturile posibile ale împărțirii unui număr la n.

Mulțimea claselor de resturi modulo n se notează $\mathbb{Z}_n$. Elementele lui $\mathbb{Z}_n$ sunt mulțimi de numere.

Prin convenție, aceste elemente se notează $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-2}, \widehat{n-1}$.

Exemplu

$\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}; \hat{1}; \hat{2}; \hat{3}\}$.

$\hat{3}$ este o notație prescurtată pentru clasa numerelor întregi care dau restul 3 la împărțirea cu 4, adică:

$\hat{3} = \{7; 15; -9; 3; -25; ...\}$ = mulțimea tuturor numerelor întregi de forma $4k + 3$.

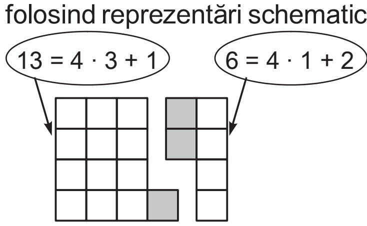
O altă descriere a lui $\mathbb{Z}_4$, echivalentă cu cea de mai sus, este: $\mathbb{Z}_4 = \{\widehat{20}, \hat{5}, \hat{2}, -\widehat{13}\}$.

❽ Explică cele două descrieri ale lui $\mathbb{Z}_4$, din exemplul alăturat.

♦ Cum definim adunarea modulo n?

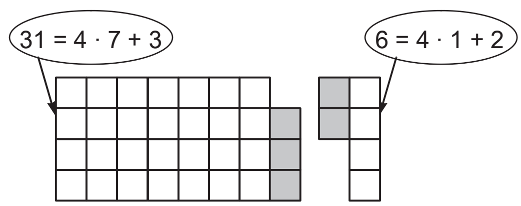
Date numerele naturale *A* și *B*, putem identifica restul împărțirii lui *A* + *B* la 4 folosind reprezentări schematice.

❾ Inventează o problemă în care afirmația 1 = 3 + 2 este adevărată. Propune o altă „egalitate" de același fel și inventează o problemă pornind de la aceasta.



13 + 6 dă restul 3 la împărțirea cu 4

$3 \equiv 1 + 2 \pmod 4$

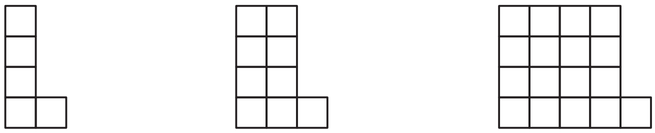


31 + 6 dă restul 1 la împărțirea cu 4

$1 \equiv 3 + 2 \pmod 4$

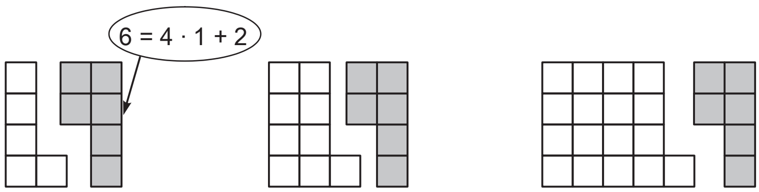
Să analizăm!

În desenele următoare sunt reprezentate schematic mai multe numere care dau restul 1 la împărțirea cu 4.



$5 = 4 \cdot 1 + 1$ $\quad$ $9 = 4 \cdot 2 + 1$ $\quad$ $17 = 4 \cdot 4 + 1$

Atunci când adunăm aceste numere, de exemplu, cu 6, obținem de fiecare dată restul 3 prin împărțirea cu 4:



Restul obținut este același, deoarece, în aceste calcule, adăugarea sau ștergerea unei „coloane de 4” nu modifică rezultatul.

În general

Dacă $x \equiv y \pmod{n}$, atunci $x + z \equiv y + z \pmod{n}$.

Altfel spus: $\hat{x} = \hat{y} \Rightarrow \widehat{x+z} = \widehat{y+z}$, oricare ar fi $z \in \mathbb{Z}$.

Egalitatea de mai sus ne permite să definim următoarea operație algebrică între elementele mulțimii $\mathbb{Z}_n$:

$$\hat{a} \oplus \hat{b} = \widehat{a+b}.$$

De exemplu, în $\mathbb{Z}_6$, avem:

$$\hat{3} \oplus \hat{4} = \hat{1},$$
$$\hat{5} \oplus \hat{4} = \hat{3}.$$

♦ Ce aplicații are adunarea modulo n?

Ce semnificație ar putea avea operația de „adunare modulo n”? Este ea utilă și în afara orelor de matematică?

Pentru a răspunde, analizăm câteva exemple.

Exemplul 1: Înregistrarea timpului

Să presupunem că în acest moment, este ora 21. Peste 9 ore va fi ora 6.

Acesta este un exemplu de adunare modulo 24:

$21 + 9 \equiv 6 \pmod{24}$

$\widehat{21} \oplus \hat{9} = \hat{6}$.

Exemplul 2: Contoare

Kilometrajul oricărei mașini indică numere cu cel mult 5 cifre. Astfel, dacă mașina a parcurs 123412 km, pe kilometrajul ei va apărea înscris doar 23412.

Mașina domnului Popescu a parcurs 61 842 km. După ce se vor mai parcurge încă 50 000 km, pe kilometraj va fi înscris numărul 11 842. Acesta este un exemplu de adunare modulo 100 000:

$$61\,842 + 50\,000 \equiv 11842 \pmod{100\,000}$$
$$\widehat{61\,842} \oplus \widehat{50\,000} = \widehat{11\,842}.$$

⚠ *Pentru adunarea modulo 6, egalitatea $\hat{3} \oplus \hat{4} = \hat{7}$ nu este greșită însă, de regulă, folosim notația standard. De aceea, în loc de $\hat{7}$, scriem $\hat{1}$.*

10 *Scrie în alt mod $\hat{5} \oplus \hat{4}$ în $\mathbb{Z}_6$.*

11 *Propune un exemplu în care folosești adunarea modulo 12.*

12 *În agențiile CFR sau în supermarketuri sunt aparate ce eliberează bonuri de ordine. Pe fiecare bon apare un număr de două cifre. Doamna Ionescu a primit bonul cu numărul 87, iar domnul Georgescu, care a venit puțin mai târziu, a primit bonul cu numărul 05. Câte persoane au făcut cumpărături între timp?*

Să aplicăm!

Atunci când lucrăm cu resturile împărțirii la 12, putem scrie:

$34 \equiv 58$ (mod 12), deoarece 34 și 58 dau resturi egale la împărțirea cu 12;

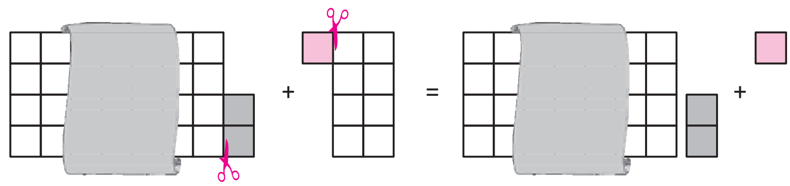
$\widehat{34} = \widehat{10}$, deoarece 34 dă restul 10 la împărțirea cu 12;

$\widehat{10} \oplus \hat{8} = \hat{6}$, deoarece restul împărțirii lui 18 la 12 este 6.

În general

Pentru operația de adunare modulo n, egalitatea $\hat{x} \oplus \hat{y} = \widehat{x+y}$ este o modalitate de scriere prescurtată a următoarei proprietăți aritmetice:

Dacă x și y dau resturile a, respectiv b la împărțirea cu n, atunci $x + y$ și $a + b$ dau același rest la împărțirea cu n.



13 *Calculează în* $\mathbb{Z}_{15}$: $\hat{7} \oplus \hat{9}$; $\hat{2} \oplus \hat{5}$; $\widehat{10} \oplus \widehat{14}$.

14 *Explică semnificația desenelor din figura alăturată.*

♦ Cum definim înmulțirea modulo n?

Să analizăm!

Ștefan a scris pe caiet următorul calcul:

$784 \times 237 = 185807$.

Camelia a citit rezolvarea lui Ștefan și i-a spus imediat: „Ai greșit!”.

Ea s-a uitat doar la ultimele cifre ale celor doi factori și a aplicat regula: ultima cifră a produsului se obține din produsul ultimelor cifre ale factorilor.

Calculul făcut de Camelia este un exemplu de calcul modulo 10, deoarece orice număr natural este congruent cu ultima sa cifră modulo zece.

Ștefan a reluat calculul, efectuând din nou înmulțirea:

15 *Cu ce cifră se termină produsul* 843×16?

$$\begin{array}{r} 784\times \\ \underline{237} \\ 5488 \\ 2352 \\ \underline{1568} \\ 185808 \end{array} \qquad \begin{array}{r} * * 4\times \\ \underline{* * 7} \\ * * * 8 \\ * * * * \\ \underline{* * * *} \\ * * * * * 8 \end{array}$$

El a observat că, dacă ne interesează doar ultima cifră a produsului, unele dintre cifrele celor doi factori (pe care le-a înlocuit cu *) nici nu contează în calcule: putem înlocui * cu orice alte cifre – ultima cifră a produsului rămâne aceeași!

16 *Cum se justifică egalitatea:* $(10n + 4)(10m + 7) = 10p + 8$, *unde* n, m, p *sunt numere întregi?*

Atunci când evidențiem ultima cifră, este eficient să scriem factorii sub forma $10n + 4$, respectiv $10m + 7$; produsul lor este $(10n + 4)(10m + 7) = 10p + 8$.

Calculul făcut ne arată că, dacă $A \equiv 4$ (mod 10) și $B \equiv 7$ (mod 10), atunci $A \cdot B \equiv 8$ (mod 10). Altfel scris: $\hat{A} = \hat{4}$ și $\hat{B} = \hat{7} \Rightarrow \widehat{AB} = \hat{8}$ în $\mathbb{Z}_{10}$.

Observăm că restul împărțirii la 10 al unui produs nu depinde decât de resturile împărțirii la 10 al fiecărui factor, adică de clasele modulo 10 ale factorilor.

Ce legătură este între clasele factorilor și clasa produsului?

Să observăm!

Pe mulțimea numerelor naturale, înmulțirea este definită ca *adunare repetată*. Putem oare folosi adunări repetate pentru a defini o operație de înmulțire în $\mathbb{Z}_n$?

Să considerăm câteva exemple.

Fie $\hat{3}$ și $\hat{5} \in \mathbb{Z}_8$.

$$5 \cdot \hat{3} = \underbrace{\hat{3} + \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} + \hat{3}}_{\text{5 termeni}} = \widehat{15} = \widehat{5 \cdot 3}$$

$$3 \cdot \hat{5} = \underbrace{\hat{5} + \hat{5} + \hat{5}}_{\text{3 termeni}} = \widehat{15} = \widehat{3 \cdot 5}$$

17 Propune și alte exemple prin care verifici dacă înmulțirea modulo n poate fi gândită ca o adunare repetată!

În general

Folosind notația pentru clasele modulo n, enunțul anterior se scrie:

$\hat{A} \odot \hat{B} = \widehat{A \cdot B}$, unde $\odot$ indică o înmulțire în care factorii sunt clase de resturi.

Spunem că am definit astfel înmulțirea modulo n.

Exemplu

În $\mathbb{Z}_{12}$ avem egalitățile:

$\hat{5} \odot \hat{8} = \hat{4}$, deoarece restul împărțirii lui 40 la 12 este 4;

$\hat{6} \odot \hat{8} = \hat{0}$, deoarece restul împărțirii lui 48 la 12 este 0.

⚠ Pentru înmulțirea modulo 12, egalitatea $\hat{5} \odot \hat{8} = \widehat{40}$ nu este greșită, însă, de regulă, folosim notația standard. De aceea, în loc de $\widehat{40}$ scriem $\hat{4}$.

Să analizăm!

Ana a efectuat următorul calcul în $\mathbb{Z}_{12}$:

$\hat{3} \cdot \widehat{10} = \widehat{30} = \hat{6}$.

Matei nu a înțeles cum se face că $\widehat{30} = \hat{6}$, dar Ana i-a explicat că un același element din $\mathbb{Z}_{12}$ se poate reprezenta în mai multe moduri. Matei mai are o nelămurire: dacă $\hat{3} = \widehat{15}$ și $\widehat{10} = \widehat{-14}$, nu ar trebui ca $\hat{3} \odot \widehat{10}$ și $\widehat{15} \odot \widehat{-14}$ să fie egale?

18 Scrie în alt mod $\hat{6} \odot \hat{8}$ în $\mathbb{Z}_{12}$.

19 Efectuează calculul propus de Matei și răspunde la întrebare!

În general

Dacă numerele A și B dau resturile a, respectiv b, la împărțirea cu n, atunci numerele $A \cdot B$ și $a \cdot b$ dau același rest la împărțirea cu n.

Să demonstrăm!

În mulțimea de resturi modulo n, dacă $\hat{x} = \hat{a}$ și $\hat{y} = \hat{b}$, atunci $\widehat{x \cdot y} = \widehat{a \cdot b}$.
Altfel spus: Înmulțirea modulo n nu depinde de reprezentanții aleși pentru factori.

$\hat{x} = \hat{a} \Rightarrow x \equiv a \pmod{n}$, deci $x - a \,\vdots\, n$. ... Deducem că există $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = a + p \cdot n$ ... Analog, există $q \in \mathbb{Z}$ astfel că $y = b + q \cdot n$ ...

Deci $xy - ab = n \cdot (aq + bp + nqp)$, adică $xy \equiv ab \pmod{n}$ ...

De aceea, $\widehat{xy} = \widehat{ab}$ ...

20 Urmărește argumentele din demonstrația alăturată și completează justificările care lipsesc și au fost înlocuite cu „...”

♦ Ce legătură este între operațiile definite pe $\mathbb{Z}_n$?

Adunarea și înmulțirea modulo n au fost definite prin analogie cu adunarea și înmulțirea numerelor întregi. Pe $\mathbb{Z}$, aceste două operații au proprietatea de distributivitate, adică:

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Se păstrează oare această proprietate pentru operațiile din $\mathbb{Z}_n$?

21 Depinde adunarea modulo n de reprezentanții aleși pentru termeni? Justifică răspunsul dat.

Să verificăm!

În $\mathbb{Z}_{10}$, efectuăm calculele:

$$\hat{3} \odot (\hat{5} \oplus \hat{9}) = \hat{3} \odot \widehat{14} = \hat{3} \odot \hat{4} = \widehat{12} = \hat{2}$$

$$\hat{3} \odot \hat{5} \oplus \hat{3} \odot \hat{9} = \widehat{15} \oplus \widehat{27} = \hat{5} + \hat{7} = \widehat{12} = \hat{2}.$$

22 Verifică egalitatea pentru clase alese de tine din $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_8$ și $\mathbb{Z}_{12}$.
Încearcă să demonstrezi proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare din $\mathbb{Z}_n$.

În general

În $\mathbb{Z}_n$ are loc egalitatea:
$\hat{x} \odot (\hat{y} \oplus \hat{z}) = \hat{x} \odot \hat{y} + \hat{x} \odot \hat{z}$, pentru orice $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{Z}_n$.

♦ Ce structură are $\mathbb{Z}_n$?

Să verificăm!

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ am definit operațiile de adunare și de înmulțire modulo 6. Deoarece aceste operații sunt „altfel" decât cele efectuate cu numere întregi, este util să alcătuim tabla adunării și tabla înmulțirii pentru $\mathbb{Z}_6$: acestea sunt două tabele în care, la intersecția liniei $\hat{x}$ cu coloana $\hat{y}$ apare rezultatul sumei, respectiv produsului dintre $\hat{x}$ și $\hat{y}$, modulo 6.

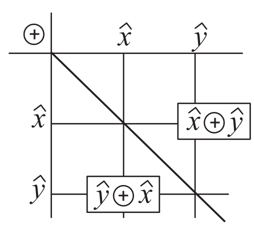
$\oplus$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\square$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\square$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\square$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\square$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\square$

$\odot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\square$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\square$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\square$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\square$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\square$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

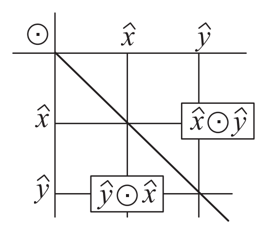
23 Completează spațiile lăsate libere în tabla adunării și în tabla înmulțirii pe $\mathbb{Z}_6$.

Pe aceste table de operații, putem verifica proprietățile:

1) Adunarea și înmulțirea modulo 6 sunt comutative, deoarece tablele acestor operații sunt simetrice față de diagonală:



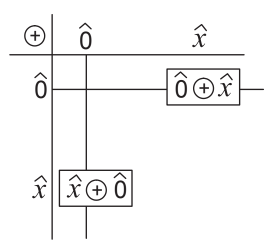
$\hat{x} \oplus \hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}$



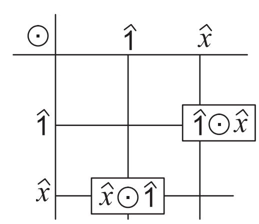
$\hat{x} \odot \hat{y} = \hat{y} \odot \hat{x}$.

2) $\hat{0}$ este element neutru pentru adunarea modulo 6, deoarece linia și coloana lui $\hat{0}$ repetă identic elementele de pe margine.

$\hat{1}$ este element neutru pentru înmulțirea modulo 6, deoarece linia și coloana lui $\hat{1}$ repetă identic elementele de pe margine.

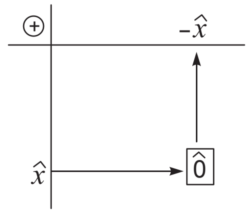


$\hat{0} \oplus \hat{x} = \hat{x}$; $\hat{x} \oplus \hat{0} = \hat{x}$



$\hat{1} \odot \hat{x} = \hat{x}$; $\hat{x} \odot \hat{1} = \hat{x}$

3) Orice element din $\mathbb{Z}_6$ admite un opus față de adunare, deoarece pe fiecare linie și pe fiecare coloană din tabla adunării apare elementrul neutru $\hat{0}$.



Exemplu

Opusul lui $\hat{2}$ este $\hat{4}$, deoarece $\hat{2}+\hat{4}=\hat{0}$.

Scriem $-(\hat{2})=\hat{4}$.

24 *Determină opusul lui $\hat{1}$ și opusul lui $\hat{3}$ în $\mathbb{Z}_6$.*

4) $\hat{1}$ și $\hat{5}$ sunt inversabile față de înmulțire, deoarece pe liniile și coloanele lor apare elementul neutru $\hat{1}$.

$\hat{5}\odot\hat{5}=\hat{1}$, deci $(\hat{5})^{-1}=\hat{5}$.

$\hat{2}$ nu este inversabil față de înmulțire, deoarece pe linia lui nu apare elementul neutru $\hat{1}$.

⚠ *Din definiția adunării și înmulțirii modulo n, se deduce ușor că aceste operații sunt asociative.*

Distributivitatea înmulțirii față de adunare a fost argumentată mai sus.

În general

Operațiile de adunare și înmulțire modulo n definesc pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ o structură de inel comutativ. Acest inel este numit *inelul claselor de resturi modulo n*.

♦ Când este inelul $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ un corp?

Să analizăm!

În inelul $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$, elementele $\hat{2}, \hat{3}$ și $\hat{4}$ nu sunt inversabile; acest inel nu este deci un corp.

Să alcătuim tablele înmulțirii pentru alte câteva dintre inelele $\mathbb{Z}_n$:

$\mathbb{Z}_2$

$\odot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$

$\mathbb{Z}_3$

$\odot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

$\mathbb{Z}_4$

$\odot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

$\mathbb{Z}_5$

$\odot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Observăm că:

– în $\mathbb{Z}_2$, $\hat{1}$ este inversabil $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ este un corp.

– în $\mathbb{Z}_3$ toate elementele nenule sunt inversabile $(\hat{1}^{-1}=\hat{1}, \hat{2}^{-1}=\hat{2})$; $(\mathbb{Z}_3, \oplus, \odot)$ este un corp;

– în $\mathbb{Z}_4$, $\hat{2}$ este element nenul și nu este inversabil (pe linia și pe coloana lui $\hat{2}$ nu apare elementul neutru $\hat{1}$); $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \odot)$ nu este un corp;

– în $\mathbb{Z}_5$, toate elementele nenule sunt inversabile $(\hat{1}^{-1}=\hat{1}, \hat{2}^{-1}=\hat{3}, \hat{3}^{-1}=\hat{2}, \hat{4}^{-1}=4)$; $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ este un corp.

25 *Explică modul în care au fost găsite inversele elementelor din $\mathbb{Z}_5$.*

Numerele 2, 3 și 5 (pentru care inelele claselor de resturi sunt corpuri) sunt numere prime.

În schimb, numerele 4 și 6 nu sunt prime, iar $\mathbb{Z}_4$ și $\mathbb{Z}_6$ nu sunt corpuri.

În general

Inelul $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ este un corp dacă și numai dacă n este număr prim.

Exerciții și probleme

1. Reprezintă printr-un desen sugestiv numerele naturale care dau restul 2 la împărțirea cu 5. Justifică apoi, cu ajutorul desenelor, proprietatea: suma dintre un număr care dă restul 2 la împărțirea cu 5, și un număr care dă restul 3 la împărțirea cu 5, este un număr divizibil cu 5.

2. Numărul natural A dă restul 7 prin împărțirea la 12. Ce rest poate da A prin împărțirea la 4? Dar prin împărțirea la 24? Realizează un desen pentru a răspunde!

3. Calculul produsului 5243 · 3172 se organizează așa cum apare alăturat: Dacă ne interesează însă doar ultimele două cifre ale produsului, unele dintre cifrele celor doi factori (pe care le-am înlocuit cu *) nu intervin în calcule. Putem să înlocuim steluțele cu orice alte cifre – ultimele două cifre ale produsului vor fi aceleași! Acesta este un exemplu de calcul modulo 100. Dă un exemplu de calcul modulo 1000.

$$\begin{array}{r} 5243\ \times \\ \underline{3172} \\ 10486 \\ 36701 \\ 5243 \\ \underline{15729} \\ 16630796 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *\ *\ 43\ \times \\ \underline{*\ *\ 72} \\ *\ *\ *\ *\ 86 \\ *\ *\ *\ *\ 1 \\ *\ *\ *\ * \\ \underline{*\ *\ *\ *\ *} \\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ 96 \end{array}$$

4. Emil susține că $\mathbb{Z}_6 = \{\widehat{20}, \widehat{36}, \widehat{15}, -\widehat{11}, \widehat{35}, \hat{4}\}$. Ce crezi, are dreptate?

5. În tema ei de acasă, Mihaela a scris:
$\mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$, $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$, deci $\mathbb{Z}_3 \subset \mathbb{Z}_4$.
Sorin susține însă că $\hat{0}$ din $\mathbb{Z}_3$ și $\hat{0}$ din $\mathbb{Z}_4$ nu reprezintă același lucru, deși se notează la fel. Ce crezi, cine are dreptate?

6. Pentru ce valori ale numărului n, are loc în $\mathbb{Z}_n$ egalitatea: $\hat{4} + \hat{6} = \hat{2}$?

7. Pentru înmulțirea modulo 10, este greșită egalitatea $\hat{6} \cdot \hat{7} = \widehat{42}$?

8. a) Verifică identitatea:
$(12x + 7)(12y + 3) = 12(12xy + 3x + 7y + 1) + 9$.
b) Exprimă identitatea de la a) ca o egalitate în $\mathbb{Z}_{12}$.

9. Completează tabla adunării și tabla înmulțirii modulo 8. Folosește aceste table și determină:
a) opusul lui $\hat{3}$;
b) inversul lui $\hat{5}$;
c) soluțiile ecuației $\hat{2} \odot x = \hat{0}$;
d) elementele inversabile față de înmulțire;
e) soluțiile ecuației $\hat{x}^2 = \hat{1}$.

10. a) Completează cu răspunsul corect!
Egalitatea $\hat{6} \cdot \hat{8} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_{12}$ este echivalentă cu relația de divizibilitate: ....
b) Justifică dacă $\hat{8}$ este element inversabil în inelul $\mathbb{Z}_{12}$.

11. a) Calculează produsul tuturor elementelor nenule din: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ și $\mathbb{Z}_{11}$.
b) Formulează un rezultat general.

12. Scrie altfel:
a) $215 \vdots 5$
b) 47 dă restul 5 prin împărțire la 7
c) restul împărțirii lui 62 la 5 este 2
d) 103 nu este divizibil cu 3.

13. Demonstrează că pătratul oricărui număr impar este de forma $8m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$.

14. Demonstrează că numerele de forma $7m + 3$ nu sunt sumă de două cuburi perfecte. Pentru demonstrație, folosește inelul $\mathbb{Z}_7$.

15. Arată că restul împărțirii prin 16 al unui pătrat perfect este tot un pătrat perfect. Calculele pot fi făcute modulo 16.

16. Distribuie numerele întregi în clase de resturi modulo 4. Pentru fiecare clasă, scrie câte 5 elemente.

17. Fie a și b numere întregi impare.
a) Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $ax^2 + 3x + b = 0$.
b) Folosește calcule în $\mathbb{Z}_8$ pentru a demonstra că discriminantul ecuației de la a) nu este pătrat perfect.

18. a) Completează tabla adunării și tabla înmulțirii modulo 7.
b) Folose°te tablele °i arată că $(\mathbb{Z}_7, \oplus, \odot)$ este un corp.
c) Rezolvă în $\mathbb{Z}_7$ ecuația: $\hat{3} \odot \hat{x} \oplus \hat{5} = \hat{0}$.

19. a) Verifică pe câteva exemple afirmația: suma a trei numere consecutive este divizibilă cu 3.
b) Formulează rezultatul de la a) folosind operațiile din $\mathbb{Z}_3$.
c) Demonstrează că, pentru orice număr natural n, avem $n^3 - n \vdots 3$.
d) Folosește calculele în $\mathbb{Z}_3$ pentru a arăta că:
$a^3 + b^3 + c^3 \vdots 3 \Leftrightarrow a + b + c \vdots 3$.
e) Demonstrează d), folosind identitatea:
$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$.

Aplicăm și exersăm!

Calculele din inelele $\mathbb{Z}_n$ exprimă sintetic relații de divizibilitate între numere întregi. De aceea, putem folosi clasele de resturi în rezolvarea unor probleme de aritmetică sau de teoria numerelor.

♦ Cum folosim clasele de resturi în rezolvarea problemelor?

Exemplul 1: Divizibilitate

Vrem să demonstrăm că numărul $22^{55} + 55^{22}$ se divide cu 7. Pentru aceasta, arătăm că, în $\mathbb{Z}_7$, are loc egalitatea:

$$\widehat{22^{55}+55^{22}}=\hat{0}.$$

Deoarece $\widehat{22}=\hat{1}$ și $\widehat{55}=\hat{6}=-\hat{1}$, avem:

$$\widehat{22^{55}}=\underbrace{\widehat{22}\odot\widehat{22}\odot\ldots\odot\widehat{22}}_{\text{55 de factori}}=\underbrace{\hat{1}\odot\hat{1}\odot\ldots\odot\hat{1}}_{\text{55 de factori}}=\hat{1} \text{ și}$$

$$\widehat{55^{22}}=\widehat{55}\odot\widehat{55}\odot\ldots\odot\widehat{55}=\underbrace{(-\hat{1})\odot(-\hat{1})\odot\ldots\odot(-\hat{1})}_{\text{55 de factori}}=-\hat{1}.$$

Deci $\widehat{22^{55}+55^{22}}=\widehat{22^{55}}\oplus\widehat{55^{22}}=\hat{1}\oplus(-\hat{1})=\hat{0}$.

❶ *Arată că $44^{11} + 11^{44}$ se divide cu 5.*

Exemplul 2: Ecuații

Vrem să demonstrăm că ecuația: $x^2 + 2 = 7^y$ nu are soluții în numere naturale.

Pentru aceasta, arătăm că ecuația nu are soluții în $\mathbb{Z}_7$.

$x^2+2=7^y \Rightarrow \widehat{x^2+2}=\widehat{7^y}$ în $\mathbb{Z}_7 \Rightarrow \hat{x}\odot\hat{x}=\hat{5}$ în $\mathbb{Z}_7$.

Din tabla înmulțirii modulo 7, obținem că această ultimă ecuație nu are soluții deoarece pe diagonala acestei table nu apare elementul $\hat{5}$.

De aceea, nici ecuația inițială nu are soluții în $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}_7$

$\odot$	$\hat0$	$\hat1$	$\hat2$	$\hat3$	$\hat4$	$\hat5$	$\hat6$
$\hat0$	$\hat0$	$\hat0$	$\hat0$	$\hat0$	$\hat0$	$\hat0$	$\hat0$
$\hat1$		$\hat1$	$\hat2$	$\hat3$	$\hat4$	$\hat5$	$\hat6$
$\hat2$			$\hat4$	$\hat6$	$\hat1$	$\hat3$	$\hat5$
$\hat3$				$\hat2$	$\hat5$	$\hat1$	$\hat4$
$\hat4$					$\hat2$	$\hat6$	$\hat3$
$\hat5$						$\hat4$	$\hat2$
$\hat6$							$\hat1$

❷ *Observă tabla înmulțirii modulo 7. Explică de ce a fost suficient să completăm doar o parte a acesteia.*

❸ *Arată că ecuația $5x^2 + 4 = 7^y$ are cel puțin o soluție număr natural.*

Exemplul 3: Ultima cifră

Vrem să determinăm ultima cifră a numărului 3^{217}. Pentru aceasta efectuăm calcule în inelul $\mathbb{Z}_{10}$.

Deoarece $3^4 = 81$, obținem egalitatea:

$\widehat{3^4}=\hat{1}$, adică $(\hat{3})^4=\hat{1}$.

De aceea: $\widehat{3^{217}}=(\hat{3})^{217}=(\hat{3})^{4\cdot 54}\cdot\hat{3}=\hat{3}$, adică ultima cifră a lui 3^{217} este 3.

❹ *Care este ultima cifră a numărului 7^{218}?*

Exemplul 4: Ultimele două cifre

Vrem să determinăm ultimele două cifre ale numărului 8401^{217}. Pentru aceasta, efectuăm calcule în inelul $\mathbb{Z}_{100}$. Deoarece $\widehat{8401}=\hat{1}$ în $\mathbb{Z}_{100}$, obținem $\widehat{8401^{217}}=\hat{1}^{217}=\hat{1}$. De aceea, ultimele două cifre ale numărului dat sunt 01.

Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...
- să recunosc structuri algebrice
- să verific proprietăți ale structurilor algebrice
- să compar proprietăți algebrice, pentru a identifica algoritmi
- să exprim proprietăți ale unor mulțimi înzestrate cu operații algebrice
- să utilizez analogii pentru deducerea unor proprietăți?

Test de verificare

1. Alege propozițiile adevărate!

a) $(\mathbb{Z}_{10}, \oplus)$ este grup comutativ.

b) $(\mathbb{Z}_6, \odot)$ este grup

c) $(\mathbb{Z}_{13}, \oplus, \odot)$ este corp.

2. Notăm $U(\mathbb{Z}_5)$ mulțimea elementelor inversabile (față de operația $\odot$) din $\mathbb{Z}_5$. Verifică proprietățile operației de înmulțire pe $U(\mathbb{Z}_5)$, apoi spune ce structură algebrică este $(U(\mathbb{Z}_5), \odot)$.

3. Pentru numerele raționale nenule, împărțirea este definită cu ajutorul înmulțirii: se înmulțește primul număr cu inversul celui de-al doilea număr.
Cum crezi că s-ar putea defini o operație de împărțire între elemente nenule din $\mathbb{Z}_7$? Cum s-ar putea verifica dacă o împărțire este corectă?

4. Pe mulțimea {1, 2, 4, 6} definim operația algebrică: $a \circ b =$ ultima cifră a numărului a^b.
Alcătuiește tabla operației $\circ$, apoi decide (utilizând tabla) dacă operația este comutativă și dacă are element neutru.

5. În $\mathbb{R}$, ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$ se rezolvă astfel:
$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ sau $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 2$.
Studiază dacă această metodă se poate aplica pentru rezolvarea ecuației $\hat{x}^2 - \hat{3}x + \hat{2} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_5$.

Lectură

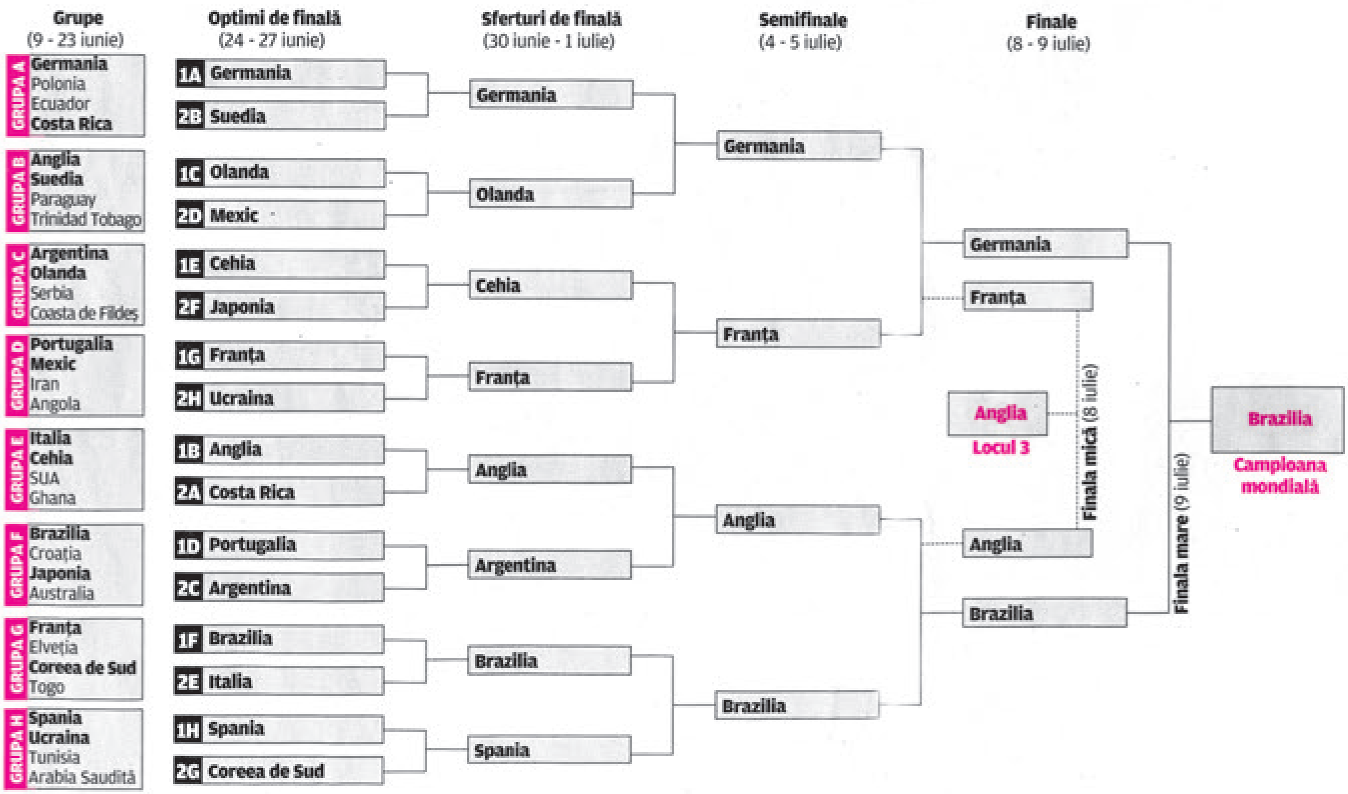
Spre deosebire de matematica Greciei antice, ce avea un pronunțat caracter filozofic, matematica chineză a apărut și s-a dezvoltat ca urmare a unor necesități de ordin practic.

Unul dintre cele mai surprinzătoare rezultate ce provine de la matematicienii chinezi este ***Teorema chineză a resturilor****, care permite determinarea unui număr natural cunoscând doar ordinul său de mărime și resturile împărțirii acestuia la câteva numere naturale. În China antică, Teorema chineză a resturilor era folosită pentru numărarea rapidă a oștilor: comandantul le cerea soldaților să se așeze în rânduri de câte 2, câte 3, câte 5, ... și determina numărul lor observând câți soldați au rămas pe rândurile incomplete.*

În limbaj modern, Teorema se poate enunța astfel: Dacă m și n sunt numere naturale prime între ele, atunci pentru orice două numere naturale a și b, $0 \leqslant a < m$ și $0 \leqslant b < n$, există un unic număr natural x, $0 \leqslant x < m \cdot n$ astfel încât resturile împărțirilor lui x la m și n să fie a, respectiv b.

Probleme recapitulative

1. Înaintea începerii Campionatului Mondial de Fotbal din 2006, ziarele au prezentat pronosticurile unor personalități despre câștigătoarea campionatului. Un astfel de pronostic este cel din imaginea următoare.



a) Caracterizează schema de desfășurare a jocurilor în grupe, respectiv începând cu optimile de finală, folosind denumiri specifice grafurilor.

b) Informează-te asupra rezultatelor meciurilor din Campionatul Mondial și alcătuiește o schemă de tipul celei de mai sus, în care câștigătoarele sunt cele reale.

c) Calculează câte jocuri s-au disputat la acest Campionat Mondial.

2. Modelează cu ajutorul grafurilor următoarele tipuri de întreceri sportive:
a) Campionatul național de Șah (la care participă 10 sportivi).
b) Turneul de tenis de la Roland Garros (32 de participanți).
c) Campionatul Național, divizia A (cu 16 echipe participante).
d) Cupa României la handbal.
e) Liga Campionilor la fotbal.
Compară tipurile de grafuri ale acestor competiții.

3. Reprezintă pe axă numerele: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.
Verifică printr-o construcție geometrică egalitatea: $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = -1$.

4. Folosește construcții geometrice și verifică inegalitatea: $\sqrt{5}+\sqrt{7} > 2\sqrt{3}$.

5. Descrie geometric suma a trei vectori în spațiu. În ce caz suma a trei vectori de lungime 1 este vectorul nul?

6. Considerăm mulțimea nodurilor care se pot face cu o sfoară. (În imagine apare un element al acestei mulțimi.)

Pe mulțimea nodurilor considerăm operația de „continuare": date nodurile N și M, considerăm nodul NM obținut prin „lipirea" extremității lui N cu originea lui M. Studiază proprietățile acestei operații.

7. Pe mulțimea ℝ a a numerelor reale definim legea de compoziție: $x * y = x^2 + y^3$.
Stabilește dacă această lege este asociativă sau comutativă. Admite legea „$*$" element neutru?

8. Fie *A* mulțimea numerelor raționale care pot fi reprezentate sub formă de fracție ireductibilă cu numărătorul divizibil prin 3.
a) Arată că adunarea și înmulțirea sunt legi de compoziție pe *A*.
b) Studiază proprietățile celor două operații pe *A* și identifică structurile algebrice care apar.

9. Fie *T* mulțimea numerelor raționale care au o prezentare cu cel mult trei zecimale semnificative. Justifică dacă $(T, +, \cdot)$ este un inel.

10. Notăm cu *D* mulțimea numerelor întregi care au cel puțin o cifră egală cu 2. Justifică dacă $(D, +)$ este un monoid.

11. Un lift pleacă de la parter, coboară la al doilea subsol, apoi urcă la etajul 6, coboară două nivele, urcă 3, coboară 8 și urcă 4. La ce etaj este acum?

12. Dovedește că $x = -2$ este soluție comună a ecuației $|2x - 3| = 7$ și a inecuației $|-5(x + 4)| \leqslant 10$.

13. Află $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{17}{3x+2} \in \mathbb{Z}$ și $\frac{7}{x+2} \in \mathbb{Z}$.

14. Află perechile (a, b) de numere întregi a căror diferență este -6 și unul este de 4 ori celălalt.

15. Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale perechile (x, y) de numere întregi, care sunt soluții ale ecuației $(x + 2) \cdot (y - 3) = 3$.

16. Compară numerele: $a = |5^{30} - 125^{11}| - |5^{33} - 5^{30}|$ și $b = -2^{75} + 2^{74} + 2^{73} + 2^{72}$.

17. Află suma a 100 numere întregi consecutive, știind că 30 dintre ele sunt negative.

18. Calculează suma: $S = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^5 + .. + 2001 \cdot (-1)^{2001}$.

19. Găsește trei numere întregi consecutive a căror sumă să fie 0.

20. Află $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{-15}{3-x} \in \mathbb{Z}$.

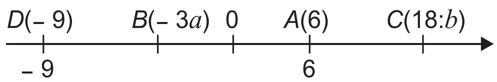
21. Arată că numărul întreg m de forma: $m = a(a + 1)(a + 2) - 12$ se divide cu 3, oricare ar fi numărul întreg a.

22. Calculează produsul: $p = (2002 - 1) \cdot (2001 - 2) \cdot ... \cdot (1 - 2002)$.

23. Dacă $a + 2b + 3c = 5$ și $b + 2c = 10$, află $a + b + c$.

24. Află numerele întregi a astfel încât: $(2a + 11) \mid (6a + 22)$.

25. În figura de mai jos avem: $[OA] \equiv [OB]$ și $[OC] \equiv [OD]$. Află numerele întregi a și b.

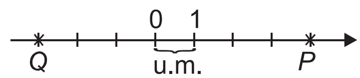


26. Așază paranteze rotunde în următoarele exerciții astfel încât rezultatul operațiilor să fie 0.
a) –15 + 15 · 25 + 72 : 4; b) –4 · 8 + 64 : 2 : 5 – 9.

27. Un număr întreg se înmulțește cu –8, apoi rezultatul se adună cu 50, numărul obținut se împarte la –6, din câtul împărțirii se scade de 3 ori numărul inițial și se obține –25. Află numărul.

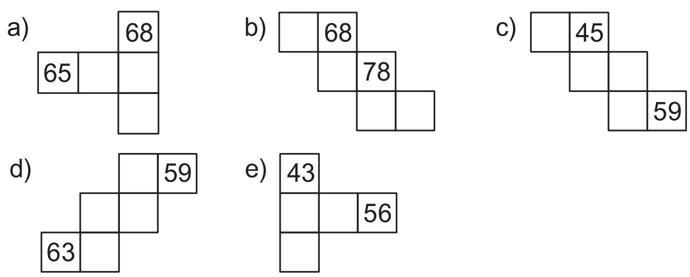
28. Dintre cinci numere întregi consecutive, cel din mijloc este 1. Care sunt celelalte?

29. Examinează figura alăturată.
a) Care sunt abscisele punctelor P și Q?
b) Care dintre punctele P și Q este mai depărtat de punctul O? De ce?



30. Bogdan s-a decis să pună toate numerele întregi dintre 0 și 109 într-un tabel. Iată o parte din tabelul completat. Care dintre următoarele părți nu pot face parte din tabel?

0	2	4	6	8
1	3	5	7	9
10	12	14	16	18
11	13	15	17	19
20	22	24	26	28
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



31. Perechii (4, 7) îi asociem numărul –3, perechii (7, 4) îi asociem numărul 3. În acest fel, perechile de numere naturale pot fi ordonate. Ordonează crescător perechile:
(17, 25); (39, 20); (48, 20); (101, 119); (1231, 1021).

32. Arată că numărul $\frac{3}{4}+\frac{33}{44}+\frac{333}{444}+\frac{3333}{4444}$ este natural.

33. Dovedește că $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{1024}<1$.

34. Determină cifrele a, b, c, $a < b < c$, astfel încât numărul $A=\overline{0,ab(c)}+\overline{0,bc(a)}+\overline{0,ca(b)}$ să fie natural.

35. Partea zecimală a numărului a se obține din scrierea în continuare a termenilor șirului: 5, 15, 1115, 3115, 132115, ... Cum este numărul a: periodic simplu, periodic mixt, neperiodic? Justifică.

36. Precizează care dintre următoarele propoziții sunt adevărate. Motivează.
a) $\underbrace{13+13+...+13}_{\text{de 725 de ori}} > \underbrace{725+725+...+725}_{\text{de 13 de ori}}$; b) $3\times3\times3\times3=\underbrace{3+3+...+3}_{\text{de 27 de ori}}$.

Modifică propozițiile date astfel încât cea adevărată să devină falsă și cea falsă să devină adevărată. Alcătuiește exerciții asemănătoare.

37. (*Numere pătratice.*) Compară:
a) 1 + 3 cu 4; b) 1 + 3 + 5 cu 9; c) 1 + 3 + 5 + 7 cu 16; d) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 cu 25;
e) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 cu 36; f) 1 + 3 + … + 13 cu 49.
Formulează și rezolvă un exercițiu asemănător celor anterioare. Există vreo legătură între suma
$1 + 3 + 5 + … + (2\cdot n – 1)$ și numărul termenilor ei? Dacă răspunsul este „da“, precizează care este legătura.
Completează propoziția: $1 + 3 + 5 + … + (2\cdot n – 1) + (2\cdot n + 1) = …$

Răspunsuri

Pag. 6. Test inițial de autoevaluare. **1.** CSM ENA Făgăraș; C.S. Târgu Secuiesc; C.S. Predeal. **2.** Câtul, respectiv restul sunt egale cu: a) 7; 2; b) 3; 0; c) 5; 3; d) 8; 12; e) 100; 11; f) 24; 0. **3.** A, F, F, A. **5.** a) –2; b) 2; c) 0; d) 1; e) –6; f) 1; g) 3,32; h) $\frac{31}{30}$. **6.** a) 36; b) 25%; c) 1,21 lei; d) 12,5%. **7.** 10; 12; 10. ***Pag. 8.*** **1.** a) impar; b) par. **2.** a) 17 = (30 · 5 – – 30) : 10 + 5. **5.** a) 6; b) 26. **7.** 6; 13; 14; 15; 19. **8.** 679; 595. **9.** 100; 30. **10.** a) 0; b) 2400; c) 25. **11.** a) 1000; b) 1500; c) 7000; d) 2000; e) 1300. **12.** 1500. **13.** a) 50600; b) 20. **14.** a) 1070; b) 8. **17.** 16. **18.** a) 0; b) 0; c) 0. **19.** a) 3; b) 4; c) 2; d) 5. ***Pag. 17.*** **1.** b) 2, respectiv 3 operații. **3.** a) 0,375; b) 4,(5); c) 1,9(4). **4.** a) $\frac{14}{11}$; b) $\frac{11}{30}$; c) $\frac{21}{50}$; d) $\frac{32}{15}$. **9.** a) 0; b) 1. **12.** –0,57591; –2,3134. ***Pag. 20.*** **3.** a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{5}{57}$; c) $\frac{95}{14}$. **6.** a) $3+2\sqrt{2}$; b) $4-2\sqrt{3}$; c) 3. **7.** a) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$; b) $x \in [0, 2]$; c) $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. **8.** a) 9999; b) 10201; c) –26; d) 505; e) 1. **10.** a) 110; b) 862.

Pag. 21. Test de verificare. **1.** b) Nu. **2.** Nu. **4.** –1.

Pag. 22. Test inițial de autoevaluare. **1.** a) –17; b) 68; c) 7,44; d) 2,74; e) 3,24; f) 4,68; g) 100,8; h) 124; i) 11,618. **2.** a) –27; b) 36; c) 3; d) –2; e) $\frac{1}{3}$; f) 3; g) 0,0001; h) –1; i) 4; j) 2. **3.** a) 30 m; b) 9; c) 500 m; d) 185,5 ml. **4.** a) 8,5; b) 20%; c) 100%; d) 24,75. **5.** c. **6.** b. **7.** b. **8.** a. **9.** a) 4; b) 3; c) 2; d) 1. ***Pag. 26.*** **1.** c) octombrie; d) noiembrie. **3.** De exemplu: muchia piramidei se corespunde cu generatoarea conului. ***Pag. 32.*** **1.** Da. **2.** 3. **3.** a) d_4; b) d_5; c) d_1; d) d_3; e) d_2. **4.** a) $0 < x < 10$; b) $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{100-x^2}$. **5.** a) b, c; e) f; d) d; e) a. **6.** a) $8 - 2x$; $V(x) = (8 - 2x)^2 \cdot x$; b) $x = \frac{8}{3}$.

Pag. 35. **2.** a) $12+8\sqrt{3}$; b) 54. 3) $1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$. **4.** 9,5 l^2. ***Pag. 35. Test de verificare.*** **1.** 1. **3.** $S = \{0; 2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}\}$. **5.** a) $A(0; -3)$, $B(2; 1)$, $C(-\sqrt{3}; 0)$; b) două; c) $x_1 \in (0; 1)$, $x_2 = 2$.

Pag. 36. Test inițial de autoevaluare. **1.** a) 3; b) 36; c) 1,65; d) $3\sqrt{3}$; e) 17; f) $\frac{7}{6}$; g) $\frac{27}{16}$. **2.** a) 26,8; b) –8; c) 5; d) 0; e) $-7\sqrt{2}$; f) 0. **3.** a) 2,8; b) –4; c) 3; d) –1; e) 3; –1; f) 2; –2; g) 3; h) 2; 3. **4.** a) 13; 23; b) 5; 50; c) 200; 280; d) 4. **5.** a) A; b) A; c) F. ***Pag. 39.*** **2.** Da. ***Pag. 48.*** **2.** 8. **3.** Nu. **4.** A4; B1; C5; D2; E3. ***Pag. 51.*** **4.** b, c. **7.** De exemplu: A are ordinul 3. **9.** 180. **10.** De exemplu: A și D. **17.** Numărăm muchiile care pleacă din fiecare vârf: în acest mod, toate muchiile sunt numărate de câte două ori. **22.** b) 16; c) 4; **23.** 3. ***Pag. 53. Test de verificare.*** **1.** a) 6 noduri; 8 muchii; b) ord(A) = 2; c) *ACDE*; *ABDE*; d) *ACDBA*; e) 3 muchii. **2.** Nu. **3.** 32.

Pag. 54. Test inițial de autoevaluare. **1.** a) F; b) A; c) F; d) F. **2.** a) F; b) A; c) A; d) F. **3.** d. **4.** b. **5.** C. **6.** a) –0,7; b) $1+\sqrt{5}; 1-\sqrt{5}$; c) 3; d) 32; e) 11. **8.** $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{ED}$. **9.** Da. **10.** Dacă o piramidă nu are 12 muchii, atunci ea nu are ca bază un hexagon. **11.** 246. **12.** 30. **13.** 6. ***Pag. 56.*** **1.** Dacă nu are insule. ***Pag. 65.*** **1.** Nu. **6.** a) ACB; **8.** 11.

Pag. 67. **2.** d) 42. ***Pag. 69. Test de verificare.*** **1.** Străzile unui cartier; rețeaua de căi ferate. **3.** Pornește cu o rețea ce are două dreptunghiuri. **4.** (2, 3, 6); (2, 4, 4), (3, 3, 3).

Pag. 70. Test inițial de autoevaluare. **1.** a) –25; b) –2; c) 13; d) 4; e) –1; f) ; g) $-\frac{1}{3}$; h) $\frac{7}{12}$. **2.** a) –8; b) 9; c) 2; d) –2; e) 7; f) $\frac{1}{3}$; g) $\frac{1}{3}$; h) 25; i) 3; j) 1. **3.** A, F, A, F, F. **5.** a) $x = -8$; b) $x = 2$; c) $x = 2$; d) $x = -\frac{1}{4}$; e) $x \in \{-1, 2\}$; f) $x = -2$. **6.** a) $x = 3$; b) $x = 9$; c) $x = 1$; d) $x = 3$. 9) b). ***Pag. 73.*** **1.** a) $x = 6$; $x = -3$; $x = 6$; b) $x = 2$; $x = -4$; $x = 9$; c) $x = 2$; $x = 1$; $x = -1$. **2.** a) $x \in \{4, 5, 6, ...\}$; $x \in \{..., -6, -5, -4\}$; $x \in \{..., 7, 8, 9\}$; b) $x \in \{..., -5; -4; -3\}$; $x \in \{..., -2, -1, 0, 1\}$; $x \in \{..., 1, 2, 3\}$; c) $x \in \{..., -7, -6, -5\}$; $x \in \{-4, -3, -2, ...\}$; $x \in \{..., 5, 6, 7\}$. **3.** a) $x = \frac{1}{15}$; b) $x = 2{,}5$; c) $x = \frac{1}{16}$; d) $x = 2{,}2$; e) $x = 3{,}3$. **4.** a) $x = 0{,}1$; b) $x = \frac{1}{25}$; c) $x = 0$; d) $x = \frac{378}{100}$; e) $x = 1{,}5969$. **5.** a) $x = 2{,}3$; b) $x = \frac{51}{50}$; c) $x = 1{,}01695$; d) $x = 2$; e) $x = 2{,}1$; f) $x = 4$. **6.** 321 și 3,21. **7.** $-\frac{1}{100}$ și $-\frac{301}{100}$, respectiv $\frac{1}{100}$ și $\frac{301}{100}$. **8.** 10,11 și

50,55. **9.** 1819,0225 m². **10.** a) $x \in \{-2; -1; 0; 1\}$; b) $x = -7$; c) $x \in \mathbb{N}$. **11.** a) $x = \frac{54}{11}$; b) $x = \frac{9}{20}$; c) $x = \frac{25}{3}$; d) $x = 1$. **12.** a) $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; b) $n = 3$; c) $n \in \{2; 3; 4\}$; d) $n \in \{3, 4, 5\}$. **13.** $(a, b) = (5, -5)$ sau $(a, b) = (-5, -5)$. **14.** a) $x \in \{-1; 1; 3\}$; b) $x \in \{1; -1; -3\}$. **15.** a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; b) $B = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$. **16.** a) nu; b) da; c) nu. **18.** a) $x \in \{-\infty, 0]$; b) $x \in \{-1; 7\}$; c) $x \in \{-2, 0, 2, 4\}$; d) $x = -2$; e) $x \in (1, 3)$. **19.** a) da; b) da; c) nu; d) nu.

Pag. 79. **1.** a) 3 și 2; b) $x = 0$; c) nu. **2.** $a * b = 2a + b$. ***Pag. 82.*** **4.** Asociativă; 0 este element neutru; singurul element inversabil este 0; comutativă. **5.** Nu. **6.** Asociativă; 0 este element neutru; elementele simetrizabile sunt 0 și 2; comutativă. **7.** De exemplu, $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. **9.** A da un circuit în graful *G* cu originea și extremitatea în *A* înseamnă a „parcurge” graful de un număr de ori, plecând din *A* și ajungând tot în *A*. Alegem un sens de parcurgere ca fiind sensul pozitiv (spre exemplu sensul acelor ceasului). În acest fel, fiecărui circuit în *G* îi va corespunde un număr întreg, care indică de câte ori a fost parcurs graful. **11.** Compunerea rotației de unghi α cu rotația de unghi β este rotația de unghi $\alpha + \beta$. Rotația de unghi nul este element neutru al grupului. Fixând o rotație de unghi α și alegând α' astfel încât $\alpha + \alpha' \vdots$ 360°, rezultă că rotația de unghi α' este inversa rotației de unghi α în R_O. **12.** Pentru $x, y \in G$ avem $(xy)^2 = e$, deci $x * y * x * y = e$. Înmulțind cu x și ținând cont de ipoteza $x^2 = e$, deducem că $y * x * y = x$. Înmulțind la stânga cu y și folosind relația $y^2 = e$ rezultă $x * y = y * x$, deci $(G, *)$ este comutativ, deoarece x și y au fost alese arbitrare. ***Pag. 83. Test de verificare.*** **1.** $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$; $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. **2.** Inel.

Pag. 84. Test inițial de autoevaluare. **1.** b); d). **2.** a) -1119; b) 7148052; c) 243; d) -50. **3.** a); b); c) d); f). **4.** a); d). **8.** 24. **12.** a) 3 și 5; c) este asociativă*.

Pag. 88. **3.** a) da; b) da; c) nu. **6.** $D_{18} = D_{-18} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18\}$; $D_{27} = \{\pm1, \pm3, \pm9, \pm27\}$; $D_{-35} = \{\pm1, \pm5, \pm7, \pm35\}$; $M_{-2} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $M_4 = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $M_{-5} = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. **7.** a) 2 și 12; b) 5 și 15; c) 2 și 84; d) 6 și 72. **8.** a) cât 26, rest 7; b) cât 6, rest 11; c) cât 0, rest 81; d) cât 1, rest 0. **13.** $A \cup B = \{0, \pm1, \pm3, \pm5, \pm10, \pm15\}$; $A \cap B = \{-5, 5, -15, 15\}$; $A \setminus B = \{-3, 3, -1, 1\}$. **14.** a) 1 și 27; b) 7 și 140; c) 6 și 1080; d) 45 și 5670. **15.** $A = \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16\}$; $B = \{\pm1, \pm3, \pm9, \pm27\}$. **16.** a) $x \in \{-7, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 5\}$. b) $x \in \{-5; 1; 3; 9\}$. **17.** $M = \{0, \pm1, \pm2, ..., \pm8\}$; $N = \{\pm1, \pm2, \pm7\}$; $P = \{0, \pm4, \pm8\}$. **18.** a) $x \in \{-7; 5\}$; b) $x \in \{-2; 0\}$; c) $x \in \{2; 3\}$. **19.** a) $A = \{-33; -19; -12; -9; -7; -6; -4; -3; -1; 2; 9; 3\}$; b) $B = \{-6, -4, 0, 14\}$; c) $C = \{1; 2; 4; 5; 10; 17\}$. ***Pag. 96.*** **4.** Da, deoarece în $\mathbb{Z}_6$ au loc egalitățile $\widehat{20} = \hat{2}$; $\widehat{36} = \hat{0}$; $\widehat{15} = \hat{3}$; $-\widehat{11} = \hat{1}$; $\widehat{35} = \hat{5}$. **6.** $n \in \{2, 4, 8\}$. **8.** b) $\hat{7} \cdot \hat{3} = \hat{9}$ în $\mathbb{Z}_{12}$. **9.** a) $-\hat{3} = \hat{5}$; b) $\hat{5}^{-1} = \hat{5}$; c) $x \in \{\hat{0}, \hat{4}\}$; d) $\{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\}$; e) $x \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\}$. **10.** a) $48 \vdots 12$; b) nu. **12.** a) $\widehat{215} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_5$; b) $\widehat{47} = \hat{5}$ în $\mathbb{Z}_7$; c) $\widehat{62} = \hat{2}$ în $\mathbb{Z}_5$; d) $\widehat{103} \neq \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_3$.
13. Dacă $n = 2k + 1$ cu $k \in \mathbb{Z}$, atunci $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 1 = 4k(k + 1) + 1$. Cum unul dintre numerele k și $k + 1$ este par, rezultă că $4k(k + 1) \vdots 8$. **14.** Dacă $\hat{x} \in \mathbb{Z}_7$, atunci $\hat{x}^3 \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{6}\}$. Se deduce că în $\mathbb{Z}_7$ $\hat{3}$ nu poate fi scris ca sumă de două cuburi, deci un număr de forma $7m + 3$ nu este sumă de două cuburi perfecte. **15.** Se observă mai întâi că pătratele elementelor din inelul $\mathbb{Z}_{16}$ sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{9}$. Fie x^2 un pătrat perfect și r restul împărțirii lui x^2 la 16, așadar $x^2 \equiv r$ (mod 16) și $r \in \{0, 1, 2, ..., 15\}$. Dar $0 \leqslant r \leqslant 15$, deci $r \in \{0, 1, 4, 9\}$, adică r este un pătrat perfect.
16. Sunt 4 astfel de clase de resturi: $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$. Spre exemplu, în clasa $\hat{1}$ se află numerele 1, 5, 9, -3, -7.
17. a) $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4ab}}{2a}$; b) Discriminantul Δ al ecuației este egal cu $9 - 4ab$. Scriem $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$ și rezultă că $\Delta = 5 - 16mn - 8m - 8n$. Trecând la clase de resturi modulo 8 avem $\hat{\Delta} = \hat{5}$. Cum pătratele elementelor din $\mathbb{Z}_8$ sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}$, se deduce că Δ nu este pătrat perfect. **18.** c) Din $\hat{3} \odot \hat{x} \oplus \hat{5} = \hat{0}$ rezultă, adunând la amândoi membrii egalității $\hat{2}$ (care este opusul lui $\hat{5}$ în $\mathbb{Z}_7$), $\hat{3} \odot \hat{x} = \hat{2}$. Înmulțind această egalitate cu $\hat{5}$, care este inversul lui $\hat{3}$ în $\mathbb{Z}_7$, se deduce $\hat{x} = \widehat{10} = \hat{3}$, deci soluția este $\hat{x} = \hat{3}$. **19.** c) $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ este produsul a trei numere consecutive și unul dintre ele este divizorul prin 3. d) În $\mathbb{Z}_3$ avem $(\widehat{a + b + c})^3 = (\hat{a} \oplus \hat{b} \oplus \hat{c})^3 = \hat{a}^3 \oplus \hat{b}^3 \oplus \hat{c}^3 = \widehat{a^3 + b^3 + c^3}$, deci $\widehat{a + b + c} = \hat{0}$ dacă și numai dacă $\widehat{a^3 + b^3 + c^3} = \hat{0}$. e) Dacă $a + b + c \vdots 3$, rezultă din identitatea indicată că și $a^3 + b^3 + c^3$ e divizibil prin 3. Reciproc, dacă $a^3 + b^3 + c^3 \vdots 3$, se deduce mai întâi că $(a + b + c)^3 \vdots 3$. Folosind apoi descompunerea în factori primi a lui $a + b + c$, rezultă că 3 este un divizor al său.

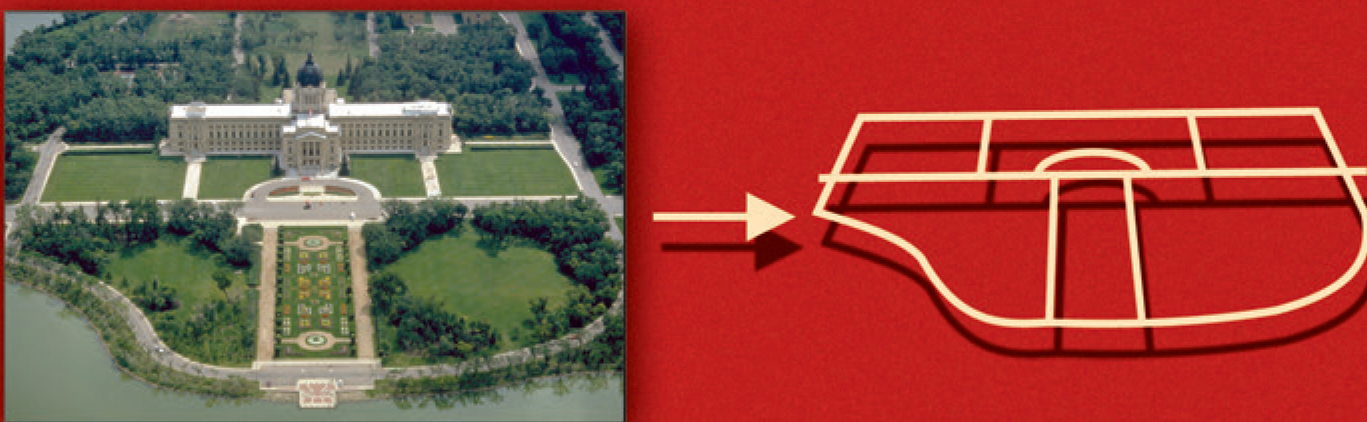
Pag. 98. Test de verificare. **1.** a); c). **2.** $(U(\mathbb{Z}_5), \odot)$ este grup.

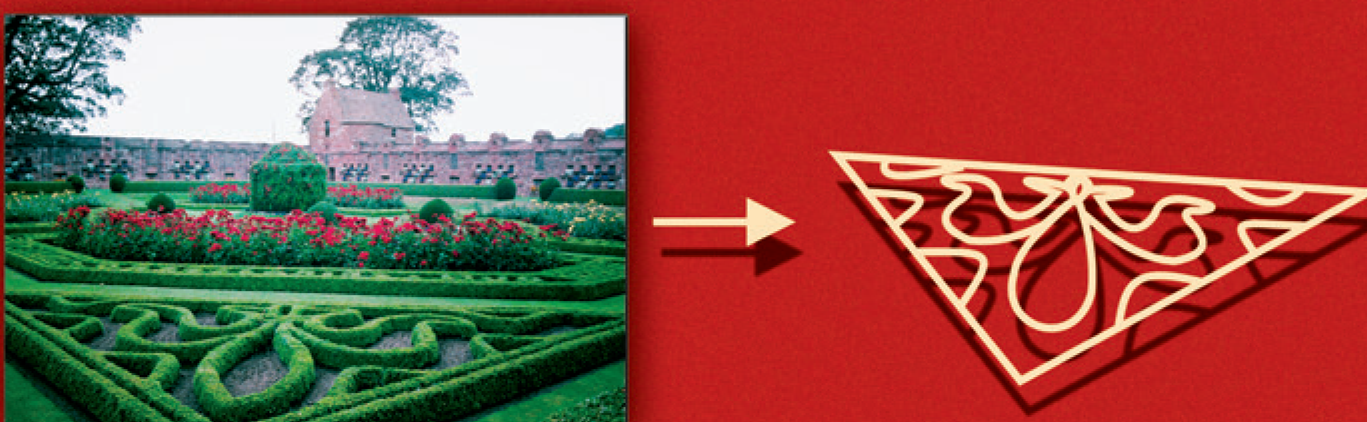
Pătrate și radicali

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
1	1	1,0000	**26**	676	5,0990	**51**	2601	7,1414	**76**	5776	8,7178
2	4	1,4142	**27**	729	5,1961	**52**	2704	7,2111	**77**	5929	8,7749
3	9	1,7320	**28**	784	5,2915	**53**	2809	7,2801	**78**	6084	8,8317
4	16	2,0000	**29**	841	5,3851	**54**	2916	7,3484	**79**	6241	8,8881
5	25	2,2360	**30**	900	5,4772	**55**	3025	7,4162	**80**	6400	8,9442
6	36	2,4494	**31**	961	5,5677	**56**	3136	7,4833	**81**	6561	9,0000
7	49	2,6457	**32**	1024	5,6568	**57**	3249	7,5498	**82**	6724	9,0553
8	64	2,8284	**33**	1089	5,7445	**58**	3364	7,6157	**83**	6889	9,1104
9	81	3,0000	**34**	1156	5,8309	**59**	3481	7,6811	**84**	7056	9,1651
10	100	3,1622	**35**	1225	5,9160	**60**	3600	7,7459	**85**	7225	9,2195
11	121	3,3166	**36**	1296	6,0000	**61**	3721	7,8102	**86**	7396	9,2736
12	144	3,4641	**37**	1369	6,0827	**62**	3844	7,8740	**87**	7569	9,3274
13	169	3,6055	**38**	1444	6,1644	**63**	3969	7,9372	**88**	7744	9,3808
14	196	3,7416	**39**	1521	6,2450	**64**	4096	8,0000	**89**	7921	9,4339
15	225	3,8729	**40**	1600	6,3245	**65**	4225	8,0622	**90**	8100	9,4868
16	256	4,0000	**41**	1681	6,4031	**66**	4356	8,1240	**91**	8281	9,5393
17	289	4,1231	**42**	1764	6,4807	**67**	4489	8,1853	**92**	8464	9,5916
18	324	4,2426	**43**	1849	6,5574	**68**	4624	8,2462	**93**	8649	9,6436
19	361	4,3589	**44**	1936	6,6332	**69**	4761	8,3066	**94**	8836	9,6953
20	400	4,4721	**45**	2025	6,7082	**70**	4900	8,3666	**95**	9025	9,7467
21	441	4,5825	**46**	2116	6,7823	**71**	5041	8,4261	**96**	9216	9,7979
22	484	4,6904	**47**	2209	6,8556	**72**	5184	8,4852	**97**	9409	9,8488
23	529	4,7958	**48**	2304	6,9282	**73**	5329	8,5440	**98**	9604	9,8994
24	576	4,8989	**49**	2401	7,0000	**74**	5476	8,6023	**99**	9801	9,9486
25	625	5,0000	**50**	2500	7,0710	**75**	5625	8,6602	**100**	10000	10,0000

Bibliografie

1. Bell, E. T. , *Men of Mathematics,* Penguin Books, 1953
2. Câmpan, F., *Probleme celebre,* Ed. Albatros, 1972
3. Gardner, M., *Amuzamente matematice,* Ed. Științifică, 1968
4. Gardner, M., *Alte amuzamente matematice,* Ed. Științifică, 1970
5. Popescu, T., *Retrospectivă matematică - repere evolutive,* Ed. Litera, 1980
6. Rusu, E., *De la Thales la Einstein,* Ed. Albatros, 1971
7. Singer, M., Voica, C., Neagu M., *Statistică și probabilități. Curs introductiv pentru elevi, studenți și profesori*, Ed. Sigma, București, 2003
8. *Tangram,* Carte - joc de decupat și asamblat. Ed. JECO, 1986
9. Tarasov, L., *This amazingly symmetrical world,* Mir Publishers, 1986
10. Tomescu, I., *Probleme de combinatorică și teoria grafurilor*, EDP 1981, București
11. Tomescu, I., *Introducere în Combinatorică,* Ed. Tehnică, București, 1972
12. Tomescu, I., *Ce este teoria grafurilor?*, Ed. Științifică Enciclopedică, 1982
13. Ion, I. D. Radu, N., *Algebră*, EDP, București, 1981
14. Minguin-Debray, M., *L'atelier des polyèdres*, ACL – Les Editions du Kangourou, Paris





ISBN 973-649-260-5
ISBN 978-973-649-260-0