

**В помощь
преподавателю**



В соответствии
с ФГОС

Геометрия

Задания

на готовых чертежах

по стереометрии

**10–11
классы**

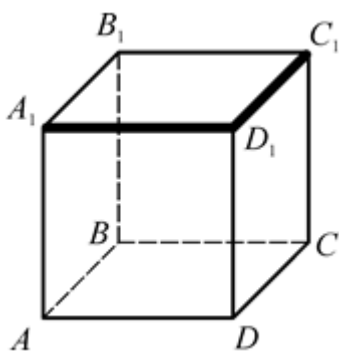


Аксиомы стереометрии

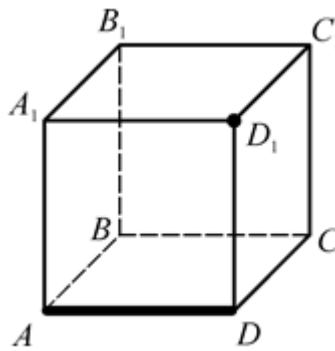
**СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ
В ПРОСТРАНСТВЕ**

Сколько плоскостей, соответствующих граням куба, можно провести через выделенные элементы? Назовите эти плоскости.

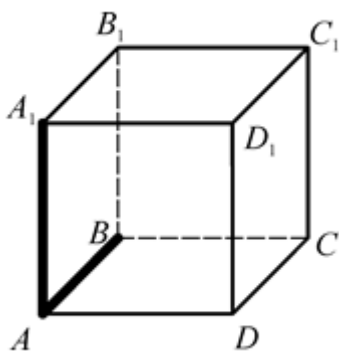
1.



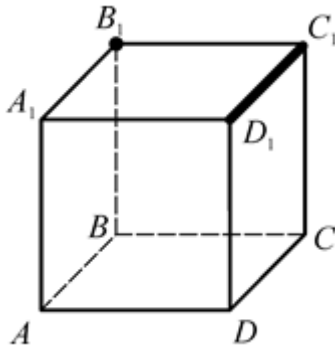
2.



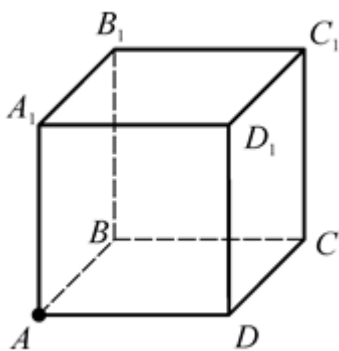
3.



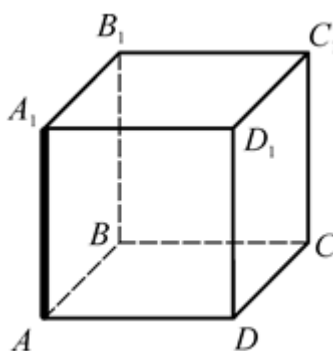
4.



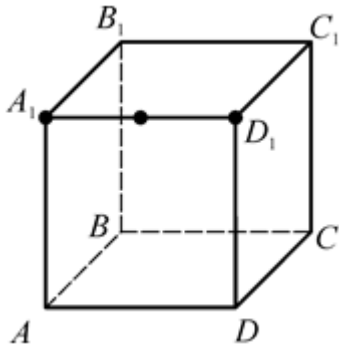
5.



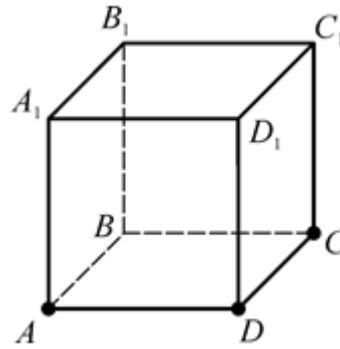
6.



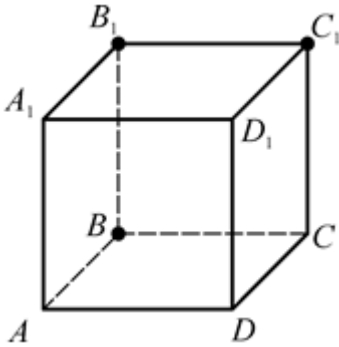
7.



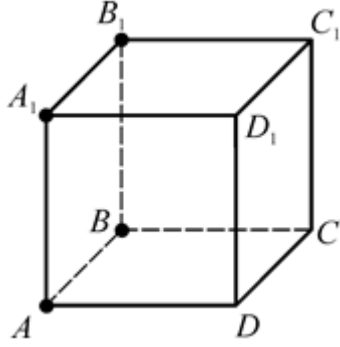
8.



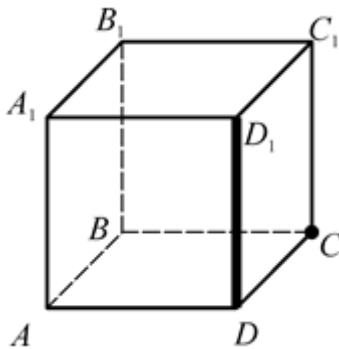
9.



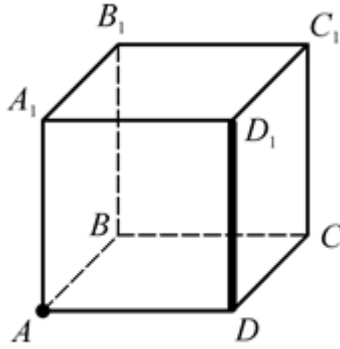
10.



11.



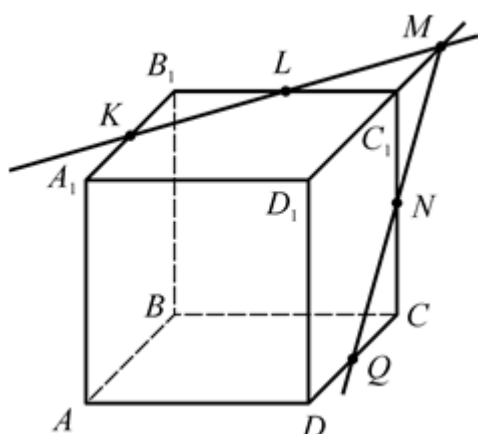
12.



Способы задания плоскости в пространстве

1. $(A_1D_1C_1)$; 2. (ADD_1) ; 3. (ABB_1) ; 4. $(A_1B_1C_1)$; 5. (ABB_1) , (ABC) , (ADD_1) ; 6. (ABB_1) , (ADD_1) ; 7. (ADD_1) , $(A_1B_1C_1)$; 8. (ABC) ; 9. (BB_1C_1) ; 10. (AA_1B_1) ; 11. (CDD_1) ; 12. (ADD_1) .

АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ



1. а) Каким плоскостям принадлежат точки K, L, M, N, Q ?

б) Каким плоскостям принадлежат прямые KL, QN, D_1M ?

в) В какой точке пересекаются прямая KL и плоскость DD_1C_1 , DC и (BB_1C_1) , QN и (BB_1C_1) , QN и $(A_1B_1C_1)$, MD_1 и (AA_1D_1) ?

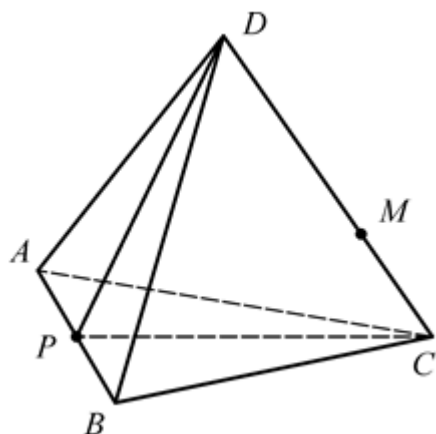
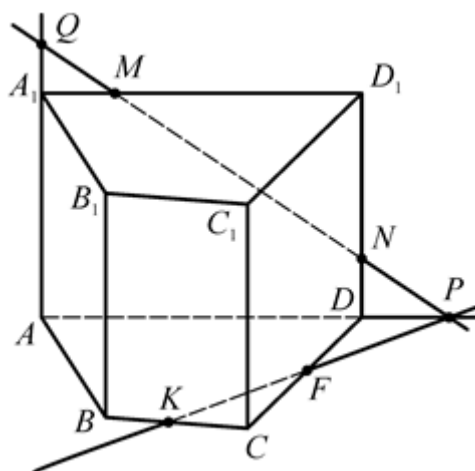
г) По какой прямой пересекаются плоскости $A_1B_1C_1$ и DD_1C_1 , (KLN) и $(A_1B_1C_1)$, (KLN) и (DD_1C_1) , (KLN) и (BB_1C_1) .

2. а) Каким плоскостям принадлежат точки M, P, K ?

б) Каким плоскостям принадлежат прямые MN, KF, AD ?

в) В какой точке пересекаются прямая MN и (AA_1B_1) , MN и $(A_1B_1D_1)$, MN и (ABC) , MN и (CC_1D_1) ?

г) По какой прямой пересекаются плоскости AA_1D_1 и AA_1B_1 , (MNK) и (CC_1D_1) , (MNK) и (ABC) ?



3. а) Каким плоскостям принадлежат точки A, P, C, M ?

б) Каким плоскостям принадлежат прямые AD, PD, PC ?

в) В какой точке пересекаются прямая AD и плоскость BDC , AB и (BDC) , AB и (PDC) , DM и (ABC) ?

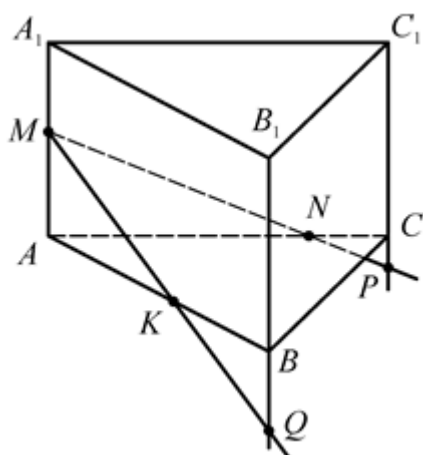
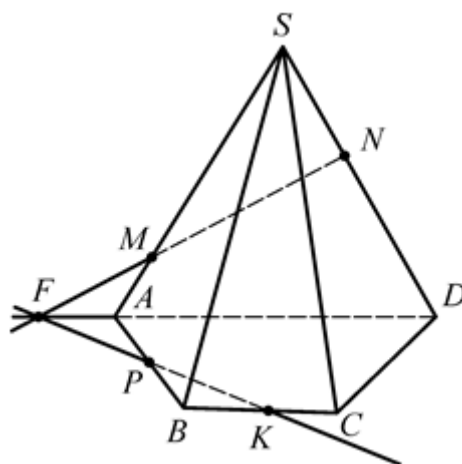
г) По какой прямой пересекаются плоскости ABC и ADC , (ABD) и (PDC) , (ABC) и (PDC) ?

4. а) Каким плоскостям принадлежат точки N, F, S ?

б) Каким плоскостям принадлежат прямые MN, PK, SC ?

в) В какой точке пересекаются прямая MN и (ABC) , PK и (ASD) , FP и (BSC) , PK и (ABS) ?

г) По какой прямой пересекаются плоскости ABC и BSC , (MNK) и (ABC) , (MNK) и (ABS) ?



5. а) Каким плоскостям принадлежат точки M, K, P ?

б) Каким плоскостям принадлежат прямые MK, MN, CP ?

в) В какой точке пересекаются MK и (ABC) , MN и (AA_1B_1) , MN и (BB_1C_1) ?

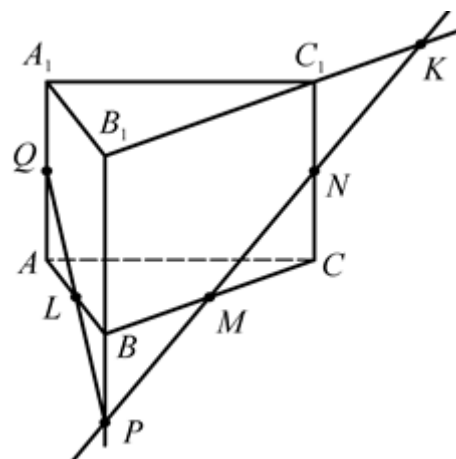
г) По какой прямой пересекаются плоскости (MNP) и (AA_1B_1) , (MNP) и (ABC) , (MNP) и (BB_1C_1) ?

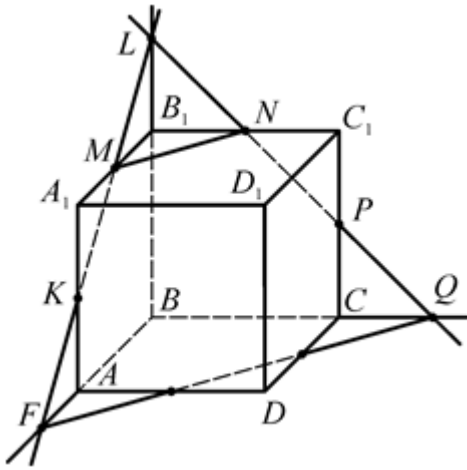
6. а) Каким плоскостям принадлежат точки B, L, M, K, P ?

б) Каким плоскостям принадлежат прямые AB, BB_1, MN, PQ ?

в) В какой точке пересекаются прямая AA_1 и плоскость ABC , BC и (AA_1B_1) , MN и (ABC) , MN и $(A_1B_1C_1)$, PQ и (ABC) ?

г) По какой прямой пересекаются плоскости ABC и AA_1C_1 , $(A_1B_1C_1)$ и (B_1BC) , (PQ_1K) и (BB_1C_1) , (PQK) и (ABC) ?





7. а) Каким плоскостям принадлежат точки N, B, K ?

б) Каким плоскостям принадлежат прямые BC, NP, LF ?

в) В какой точке пересекаются прямая MK и плоскость BB_1C_1, NQ и $(ABC), NQ$ и $(A_1B_1C_1), MK$ и (ABC) ?

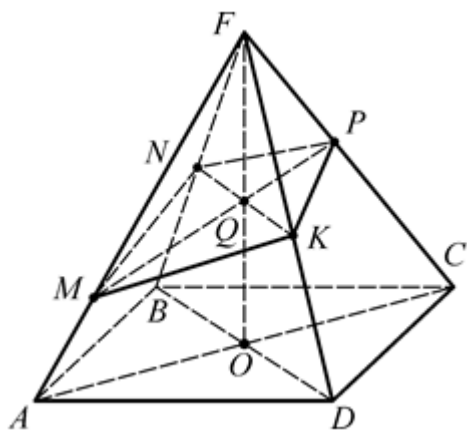
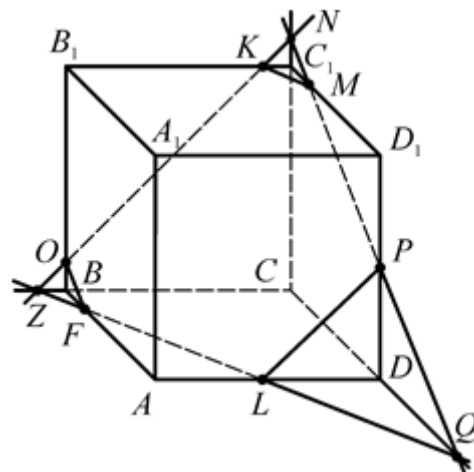
г) По какой прямой пересекаются плоскости AA_1B_1 и $BB_1C_1, (MNP)$ и $(AA_1B_1), (MNP)$ и $(A_1B_1C_1), (MNP)$ и (ABC) ?

8. а) Каким плоскостям принадлежат точки K, N, C_1, L ?

б) Каким плоскостям принадлежат прямые OK, FL, PM, NQ ?

в) В какой точке пересекаются прямая NQ и плоскость $A_1B_1C_1, CQ$ и $(AA_1D_1), FQ$ и (AA_1D_1) ?

г) По какой прямой пересекаются плоскости ABC и $KMP, (ABB_1)$ и $(KMP), (NQZ)$ и $(A_1B_1C_1)$?



9. а) Каким плоскостям принадлежат точки A, O, K, F ?

б) Каким плоскостям принадлежат прямые AD, MK, MP ?

в) В какой точке пересекаются прямая PK и плоскость BCF, FO и $(MNP), AC$ и $(BDF), KN$ и (ACF) ?

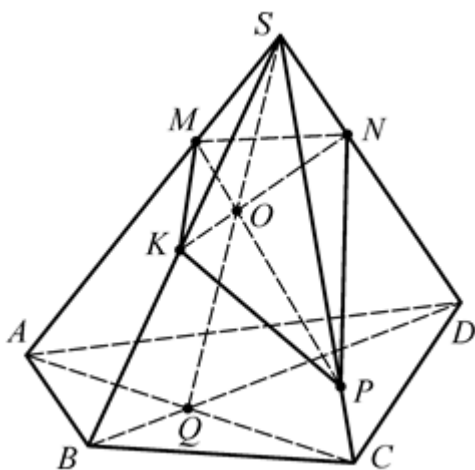
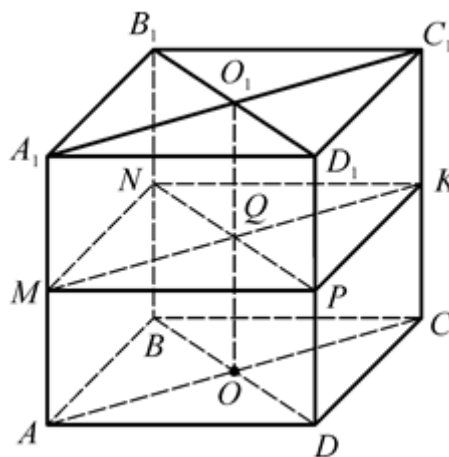
г) По какой прямой пересекаются плоскости ACF и $BDF, (MNK)$ и $(CDF), (MNK)$ и $(BDF), (MKP)$ и (ACF) ?

10. а) Каким плоскостям принадлежат точки M, O, K ?

б) Каким плоскостям принадлежат прямые MK, NP, PK, AA_1 ?

в) В какой точке пересекаются прямая MK и плоскость BB_1D_1, NP и $(AA_1C_1), O_1Q$ и $(ABC), AC$ и (BB_1D_1) ?

г) По какой прямой пересекаются плоскости AA_1C_1 и $BB_1D_1, (MNK)$ и $(DD_1C_1), (MNK)$ и $(BB_1D_1), (MPK)$ и (AA_1C_1) ?



11. а) Каким плоскостям принадлежат точки M, Q, S ?

б) Каким плоскостям принадлежат прямые AD, SQ, KN ?

в) В какой точке пересекаются прямая KP и плоскость ASB, KN и $(ASC), MP$ и (BSD) ?

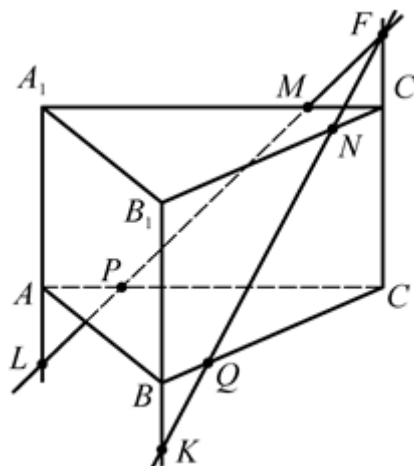
г) По какой прямой пересекаются плоскости ASC и $ABC, (ASC)$ и $(BSD), (MNP)$ и $(BSC), (MNP)$ и (ASC) ?

12. а) Каким плоскостям принадлежат точки F, M, Q ?

б) Каким плоскостям принадлежат прямые PM, QN, CF ?

в) В какой точке пересекаются прямая NQ и плоскость ABC, NQ и $(AA_1C_1), NQ$ и (AA_1B_1) ?

г) По какой прямой пересекаются плоскости (MNQ) и $(ABC), (MNQ)$ и $(A_1B_1C_1), (MNQ)$ и (AA_1B_1) ?



Аксиомы стереометрии и следствия из них

а) $K \in (ABB_1), K \in (A_1B_1C_1), K \in (LMN),$

$L \in (A_1B_1C_1), L \in (BB_1C_1), L \in (KMN),$
 $M \in (A_1B_1C_1), M \in (DCC_1), M \in (KLN),$
 $Q \in (ABC), Q \in (DD_1C_1), Q \in (KMN).$

б) $KL \in (A_1B_1C_1), KL \in (LMN),$

$QN \in (DD_1C_1), QN \in (KMN),$

$D_1M \in (A_1B_1C_1), D_1M \in (DD_1C_1N).$

в) $KL \cap (DD_1C_1) = M, DC \cap (BB_1C_1) = C,$

$QN \cap (BB_1C_1) = N, QN \cap (A_1B_1C_1) = M,$

$MD_1 \cap (AA_1D_1) = D_1.$

г) $(A_1B_1C_1) \cap (DD_1C_1) = D_1C_1,$

$(KLN) \cap (A_1B_1C_1) = KL,$

$(KLN) \cap (DD_1C_1) = QN,$

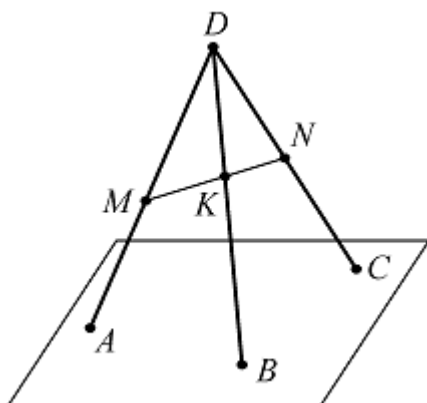
$(KLN) \cap (BB_1C_1) = LN.$

Остальные – аналогично.

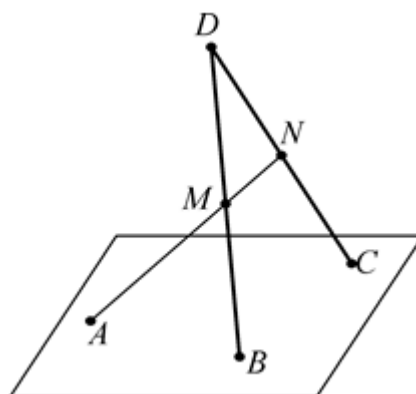
ОШИБКИ В ИЗОБРАЖЕНИИ

Найдите ошибку в изображении. Обоснуйте ответ.

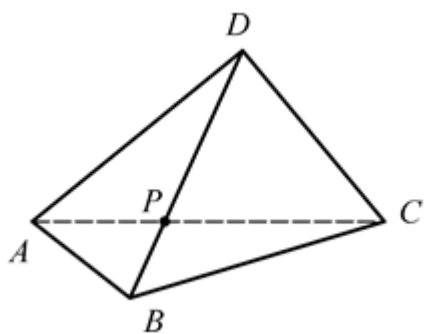
1.



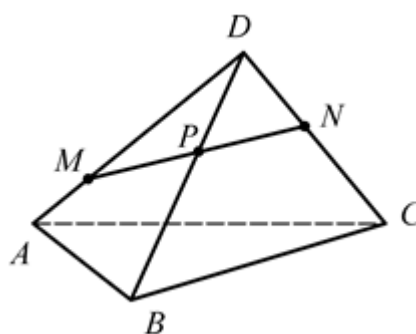
2.



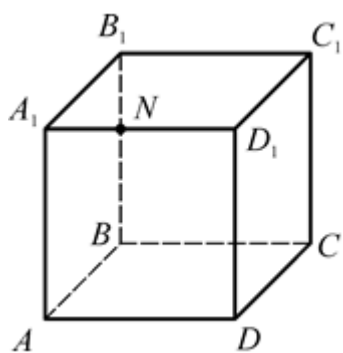
3.



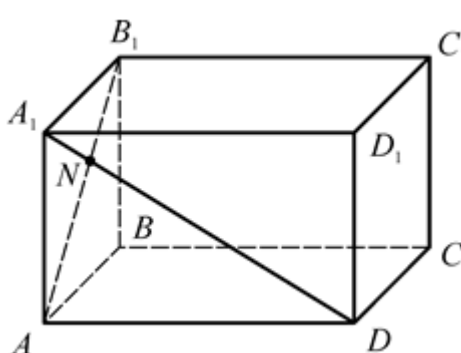
4.



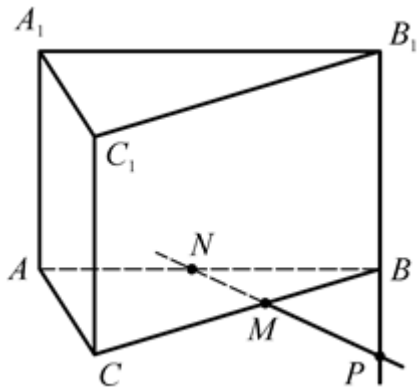
5.



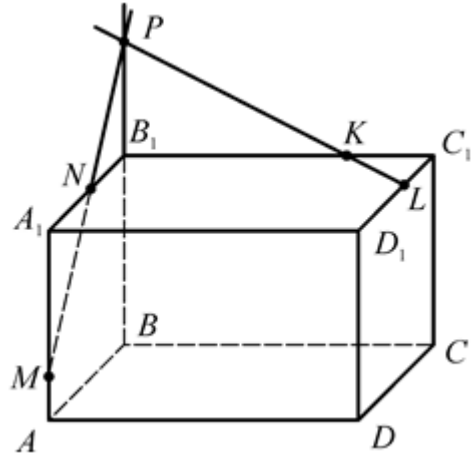
6.



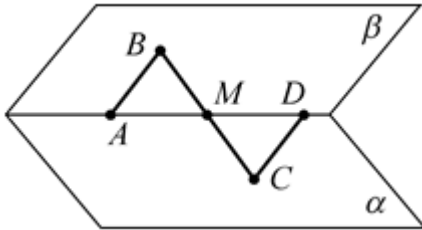
7.



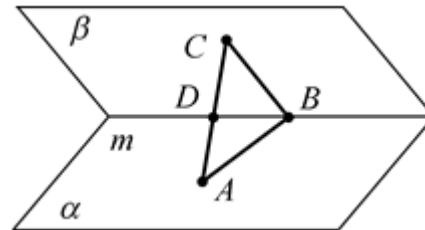
8.



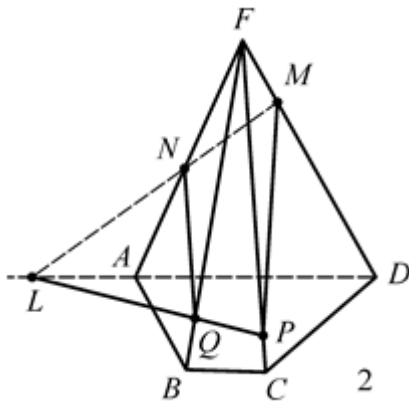
9.



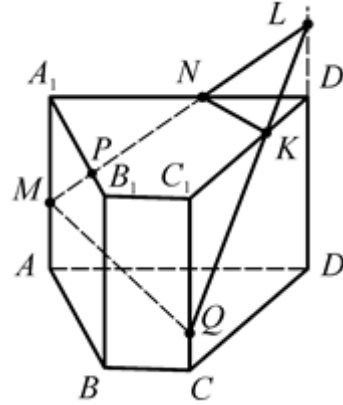
10.



11.



12.



Ошибки в изображении

1. Точки A, B и C лежат на одной прямой.

2. Точки A, B и C лежат на одной прямой.

3. $AC \not\parallel BD$.

8. $PK \not\parallel C_1D_1$.

4. $MN \not\parallel BD$.

9. $BC \not\parallel AD$.

5. $A_1D_1 \not\parallel BB_1$.

10. $AC \not\parallel m$.

6. $A_1D \not\parallel AB_1$.

11. $LQ \not\parallel FP$.

7. $MN \not\parallel BB_1$.

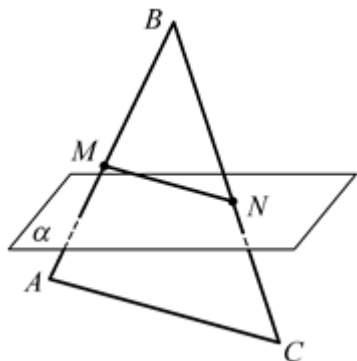
12. $MN \not\parallel A_1B_1$.

Параллельность прямых и плоскостей

ЛЕММА О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

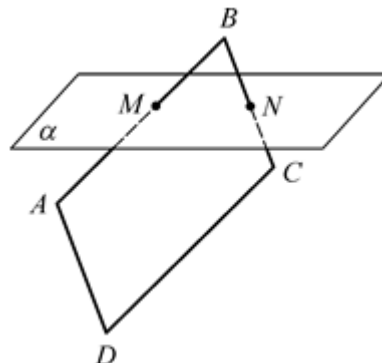
1. Дано: MN – средняя линия $\triangle ABC$,
 $MN \cap \alpha = N$.

Докажите, что $AC \cap \alpha$.



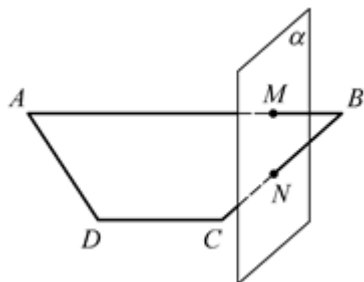
2. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $AB \cap \alpha = M$.

Докажите, что $DC \cap \alpha$.



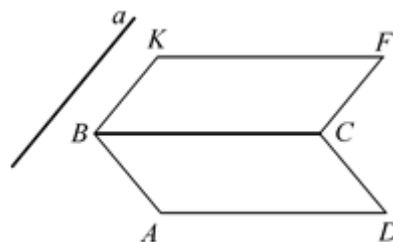
3. Дано: $ABCD$ – трапеция,
 $AB \cap \alpha = M$.

Докажите, что $DC \cap \alpha$.



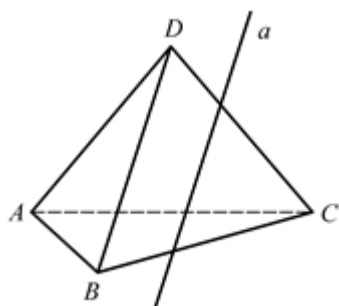
4. Дано: $ABCD$ и $BKFC$ –
 параллелограммы, $K \notin (ABC)$, $a \parallel$
 KB .

Докажите, что $a \cap (ABCD)$.



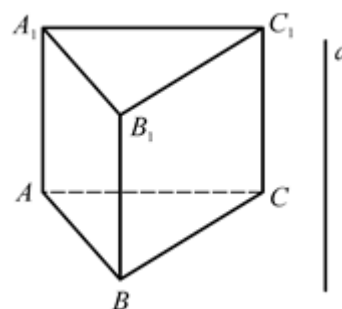
5. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $a \parallel BD$.

Докажите, что $a \cap (ABC)$.

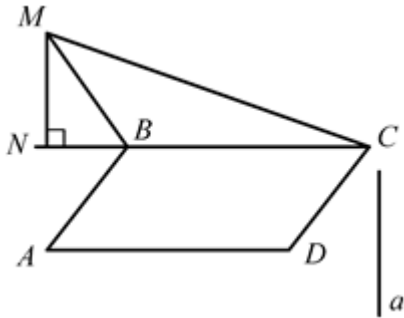


6. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – призма, $a \parallel$
 AA_1 .

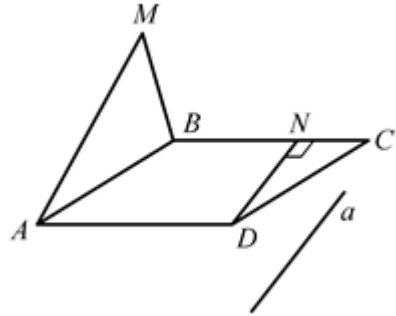
Докажите, что $a \cap (ABC)$.



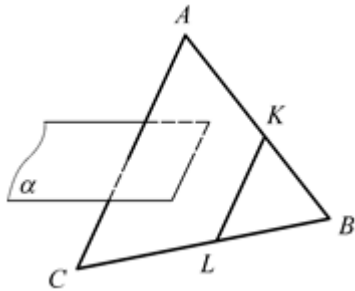
7. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $\triangle BMC$ – тупоугольный,
 $M \notin (ABC)$, $MN \perp BC$, $a \parallel MN$.
 Докажите, что $a \cap (ABC)$.



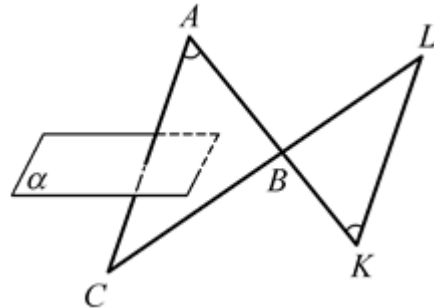
8. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $DN \perp BC$, $M \notin (ABC)$, $a \parallel DN$.
 Докажите, что $a \cap (AMB)$.



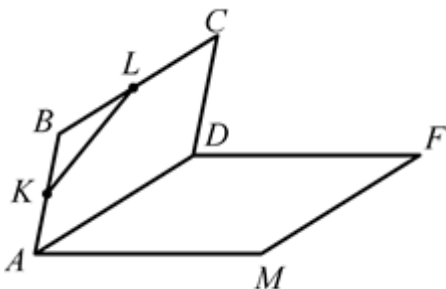
9. Дано: $\triangle ABC$, $K \in AB$,
 $\angle CAB = \angle LKB$, $AC \cap \alpha$.
 Докажите, что $KL \cap \alpha$.



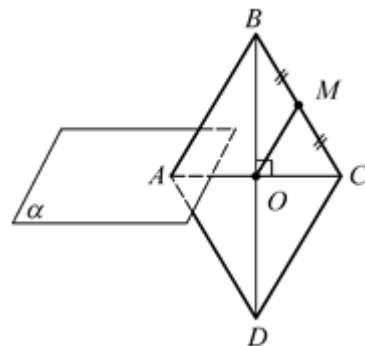
10. Дано: $AK \cap CL = B$, $\angle CAB =$
 $= \angle BKL$, $AC \cap \alpha$.
 Докажите, что $KL \cap \alpha$.



11. Дано: $ABCD$ и $ADFM$ –
 параллелограммы, $M \notin (ABC)$, $AK =$
 KB , $BL = LC$.
 Докажите, что $KL \cap (ADF)$.



12. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB \cap$
 $\cap \alpha = A$, $AC \cap BD = O$, $BM = MC$.
 Докажите, что $OM \cap \alpha$.

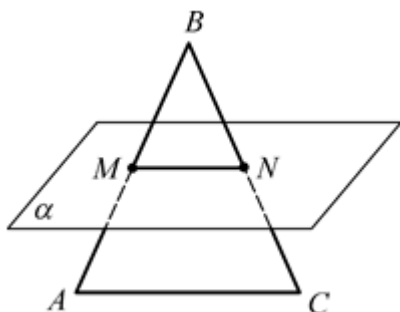


Лемма о параллельных прямых

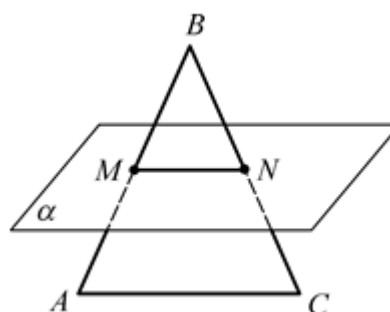
1. MN – средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AC$. $MN \cap \alpha$, следовательно, и $AC \cap \alpha$.
2. $ABCD$ – параллелограмм $\Rightarrow AB \parallel DC$. $AB \cap \alpha$, следовательно, и $DC \cap \alpha$.
3. $ABCD$ – трапеция с основаниями AB и $DC \Rightarrow AB \parallel DC$. $AB \cap \alpha$, следовательно, и $DC \cap \alpha$.
4. $a \parallel KB$, $KB \cap (ABC)$. Следовательно, $a \cap (ABC)$.
5. $a \parallel BD$, $BD \cap (ABC)$. Следовательно, $a \cap (ABC)$.
6. $a \parallel AA_1$, $AA_1 \cap (ABC)$. Следовательно, $a \cap (ABC)$.
7. $a \parallel MN$, $MN \cap (ABC)$. Следовательно, $a \cap (ABC)$.
8. $DN \cap AB$, следовательно, $a \cap (AMB)$.
 $a \parallel DN$ и $DN \cap (AMB)$, следовательно, $a \cap (AMB)$.
9. $\angle CAB = \angle LKB$ и они соответственные, $AC \parallel KL$.
 $AC \cap \alpha$ и $AC \parallel KL$, следовательно, $KL \cap \alpha$.
10. $\angle CAB = \angle BKL$ и они накрест лежащие, следовательно, $AC \parallel KL$.
 $AC \cap \alpha$ и $AC \parallel KL$, следовательно, $KL \cap \alpha$.
11. KL – средняя линия $\triangle ABC$, $KL \parallel AC$.
 $AC \cap (ADF)$ и $KL \parallel AC$, следовательно, $KL \cap (ADF)$.
12. OM – средняя линия $\triangle ABC$, $OM \parallel AB$.
 $AB \cap \alpha$ и $OM \parallel AB$, следовательно, $OM \cap \alpha$.

**ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ**

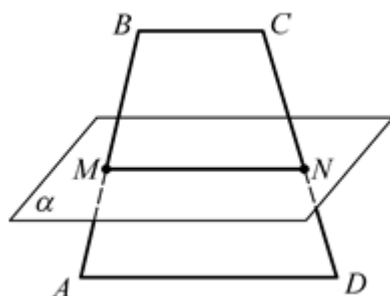
1. Дано: $\triangle ABC$, $AB \cap \alpha = M$,
 $BC \cap \alpha = N$, $AC \parallel \alpha$.
Докажите, что $AC \parallel MN$.



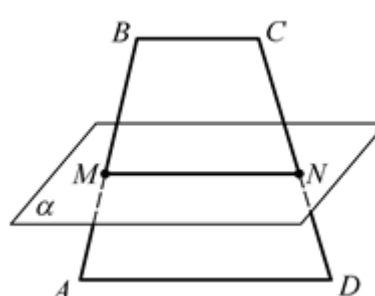
2. Дано: $\triangle ABC$, $AB \cap \alpha = M$,
 $BC \cap \alpha = N$, $MN \parallel AC$.
Докажите, что $AC \parallel \alpha$.



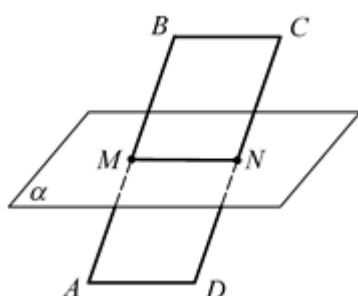
3. Дано: $ABCD$ – трапеция,
 $AM = MB$, $CN = ND$, $BC \parallel \alpha$.
Докажите, что $AD \parallel MN$.



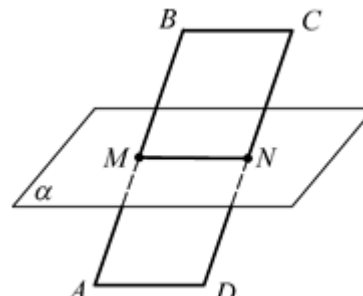
4. Дано: $ABCD$ – трапеция,
 $AM = MB$, $CN = ND$, $AD \parallel MN$.
Докажите, что $BC \parallel \alpha$.



5. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $AB \cap \alpha = M$, $CD \cap \alpha = N$, $AD \parallel \alpha$.
Докажите, что $AD \parallel MN$.



6. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $AB \cap \alpha = M$, $CD \cap \alpha = N$, $MN \parallel AD$.
Докажите, что $BC \parallel \alpha$.

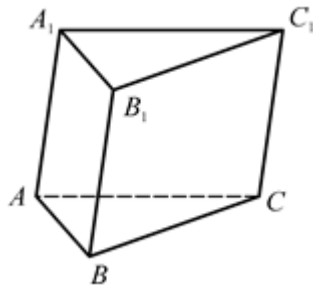


7. Дано: $(ACC_1) \cap (BCC_1) = CC_1$,

8. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,

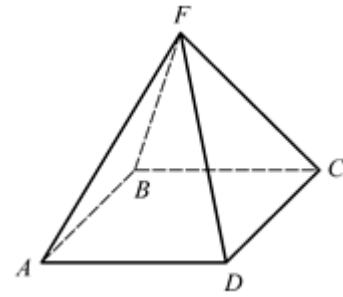
$BB_1 \parallel CC_1$.

Докажите, что $BB_1 \parallel (ACC_1)$.

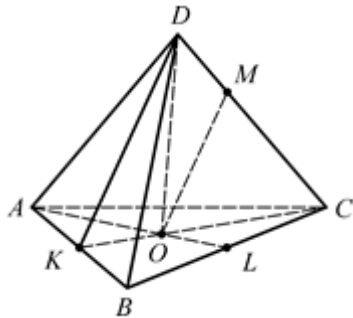


$F \notin ABCD$.

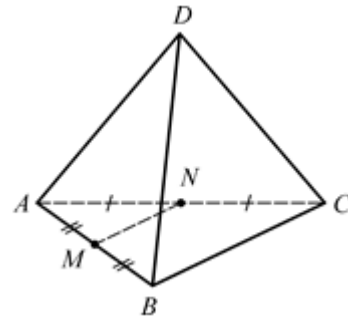
Докажите, что $DC \parallel (ABF)$.



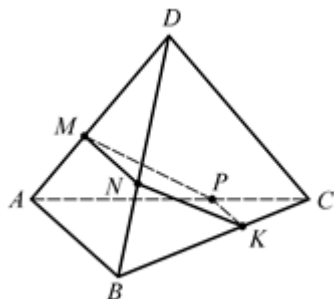
9. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $\triangle ABC$ – правильный, O – центр
 $\triangle ABC$, $M \in DC$, $MC = 2DM$.
 Докажите, что $OM \parallel (ABD)$.



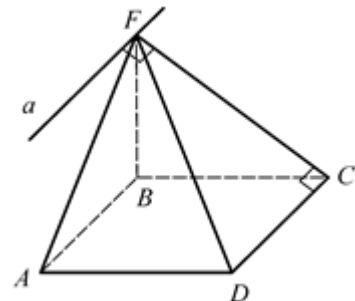
10. Дано: $DABC$ – пирамида,
 M – середина AB , N – середина AC .
 Докажите, что $MN \parallel (BCD)$.



11. Дано: $DABC$ – пирамида,
 M – середина AD , N – середина BD ,
 $MN \in \alpha$, $\alpha \cap (ABC) = PK$.
 Докажите, что $AB \parallel PK$.



12. Дано: $FABCD$ – пирамида,
 $CF \perp CD$, $F \in a$, $a \perp CF$, $ABCD$ –
 прямоугольник.
 Докажите, что $a \parallel AB$.



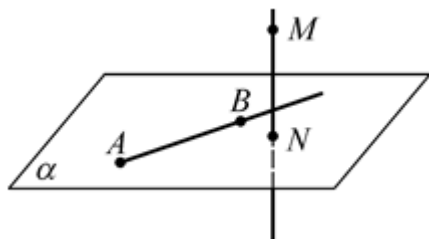
**Параллельность прямой и плоскости.
Параллельность прямых в пространстве**

$AC \parallel \alpha$ и $MN \in \alpha$, следовательно, $AC \not\parallel MN$. $AC \in (ABC)$, $MN \in (ABC)$, $AC \not\parallel MN$, следовательно, $AC \parallel MN$. Остальные – аналогично. Указание: чтобы утверждать, что прямые параллельны, надо доказать, что они: 1) лежат в одной плоскости; 2) не пересекаются.

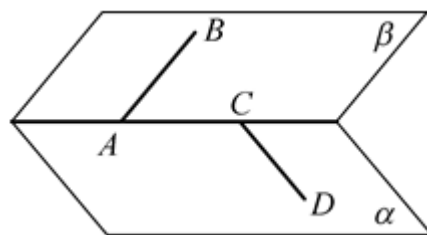
Из того, что прямая параллельна плоскости, следует, что она не пересекает никакую прямую, лежащую в этой плоскости.

СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

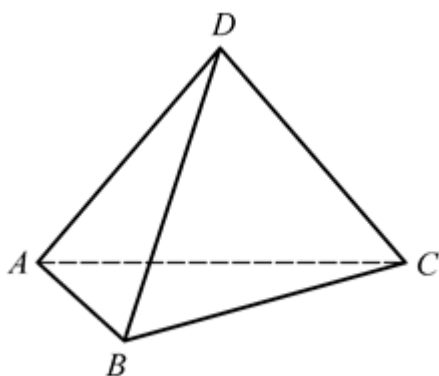
1. Докажите, что $AB \cap MN$.



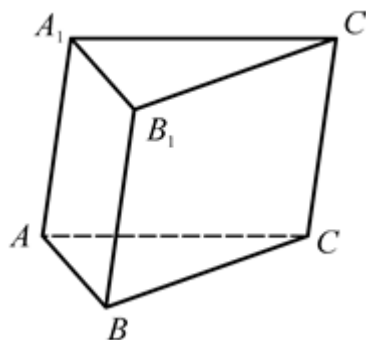
2. Докажите, что $AB \cap CD$.



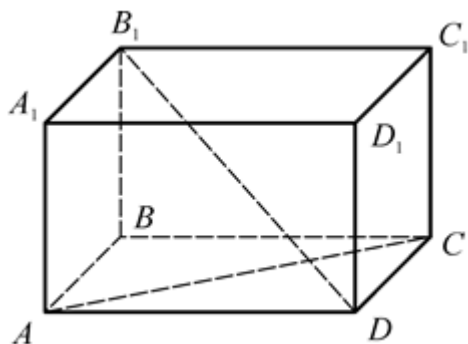
3. Докажите, что $AB \cap CD$.



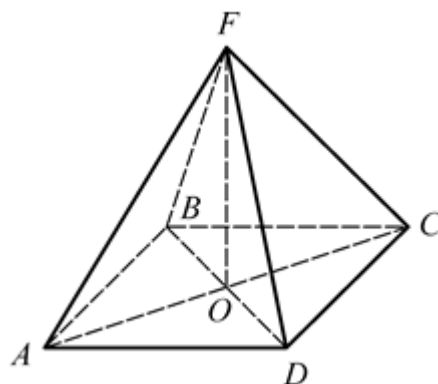
4. Докажите, что $AB \cap CC_1$.



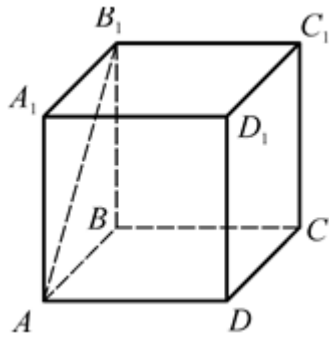
5. Докажите, что $AB \cap B_1D$.



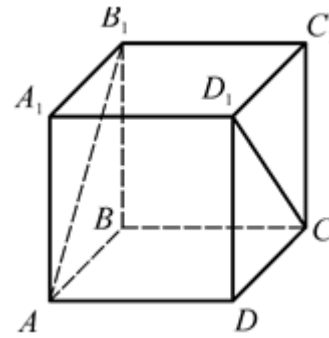
6. Докажите, что $AB \cap FO$.



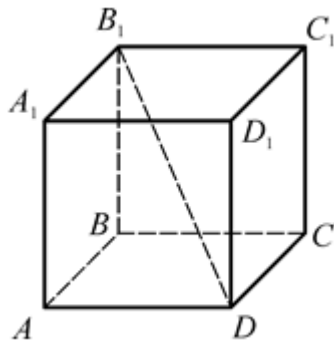
7. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, $AB = a$.
Найдите расстояние между AB_1 и DC .



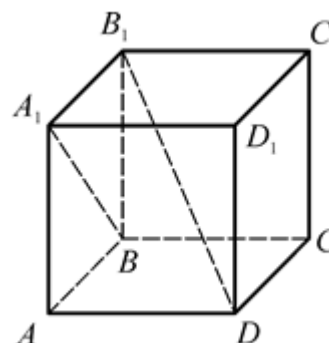
8. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, $AB = a$.
Найдите расстояние между AB_1 и CD_1 .



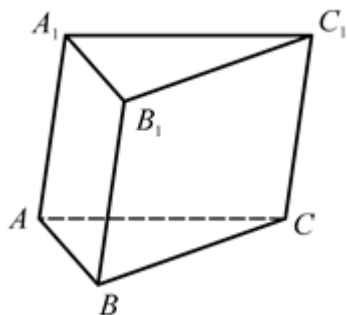
9. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, $AB = a$.
Найдите расстояние между AB и DB_1 .



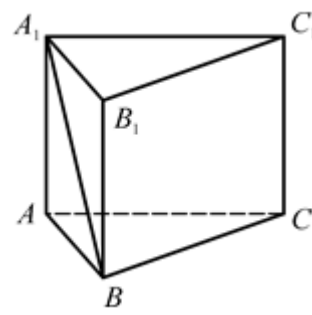
10. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, $AB = a$.
Найдите расстояние между A_1B и DB_1 .



11. $\triangle ABC$ – правильный, $AB = a$,
 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$.
Найдите расстояние между AA_1 и BC .



12. $\triangle ABC$ – правильный, $AB = a$,
 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$.
Найдите расстояние между A_1B и CC_1 .

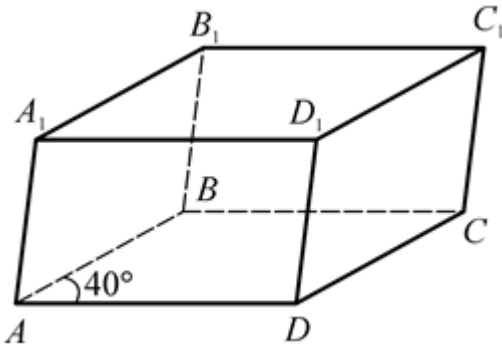


Скрещивающиеся прямые

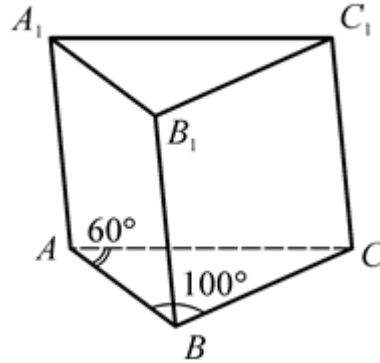
Указание: воспользоваться признаком скрещивающихся прямых и доказать, что одна прямая лежит в некоторой плоскости, а вторая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой.

УГЛЫ С СОНАПРАВЛЕННЫМИ СТОРОНАМИ

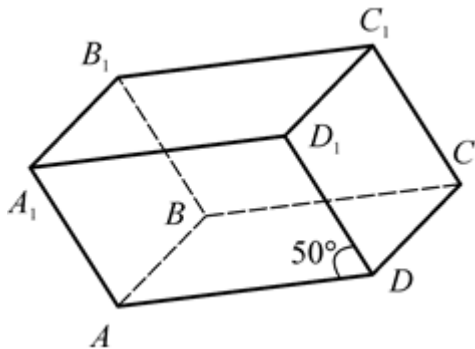
1. $ABCD$ – параллелограмм, $\angle BAD = 40^\circ$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$.
Найдите угол между прямыми AB и A_1D_1 ; BC и A_1B_1 .



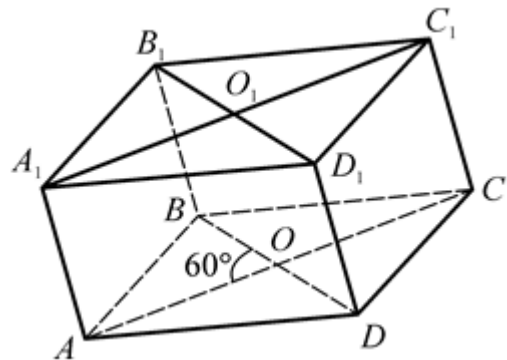
2. $\triangle ABC$, $\angle BAC = 60^\circ$; $\angle ACB = 100^\circ$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Найдите угол между прямыми AB и C_1B_1 ; A_1B_1 и A_1C_1 .



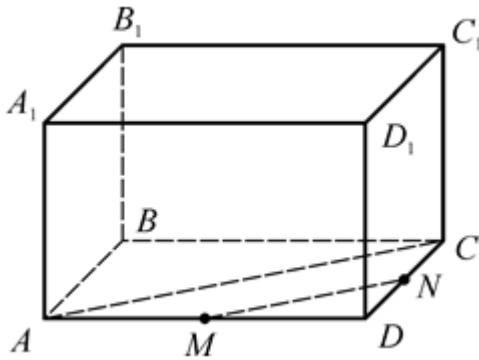
3. $ABCD$ – параллелограмм, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, $\angle ADD_1 = 50^\circ$.
Найдите угол между прямыми BC и DD_1 ; BB_1 и A_1D_1 .



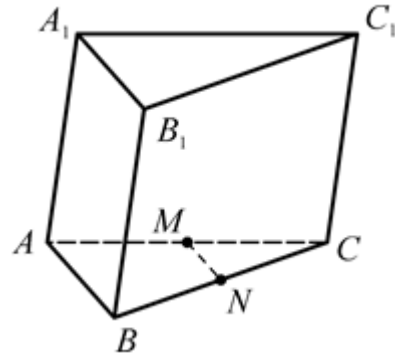
4. $ABCD$ – прямоугольник, $\angle AOB = 60^\circ$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$.
Найдите угол между прямыми A_1B_1 и AC ; AB и A_1D_1 .



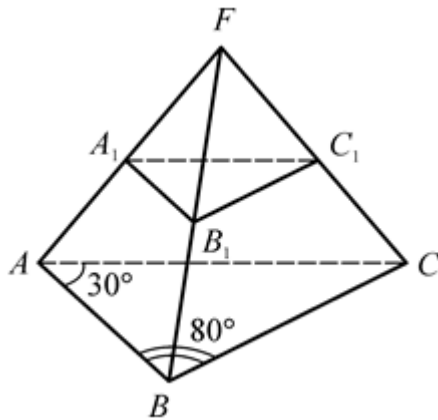
5. $ABCD$ – прямоугольник, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, $BB_1 \perp AC$, $AM = MD$, $CN = ND$. Найдите угол между прямыми MN и DD_1 ; BB_1 и A_1C_1 .



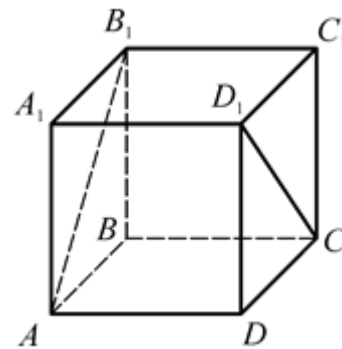
6. $\triangle ABC$ – правильный, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$, $AM = MC$, $BN = NC$. Найдите угол между прямыми AB и B_1C_1 ; MN и A_1C_1 .



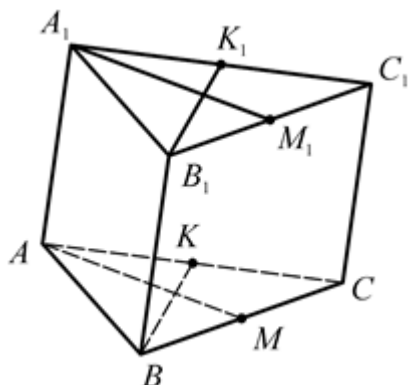
7. $\triangle ABC$, $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = F$, $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC$, $B_1C_1 \parallel BC$, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABC = 80^\circ$. Найдите угол между прямыми AB и B_1C_1 ; A_1C_1 и BC .



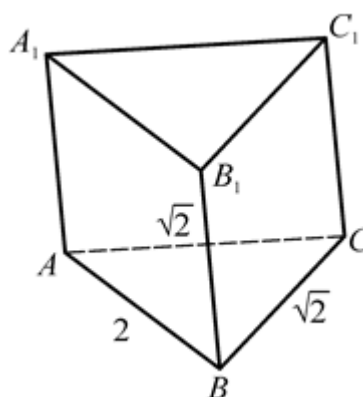
8. $ABCA_1B_1C_1D_1$ – куб. Найдите угол между прямыми AD и CC_1 ; AB_1 и D_1C .



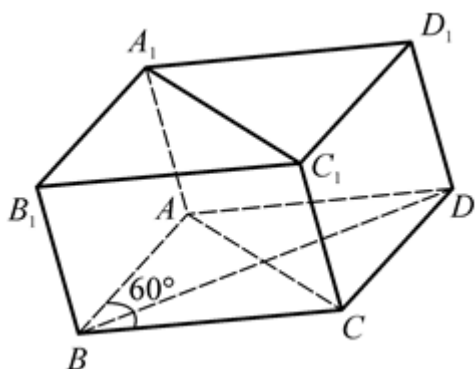
9. $\triangle ABC$ – правильный, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$, $AK = KC$, $BM = MC$, $A_1K_1 = K_1C_1$, $B_1M_1 = M_1C_1$. Найдите угол между прямыми AB и A_1C_1 , AM и B_1K_1 .



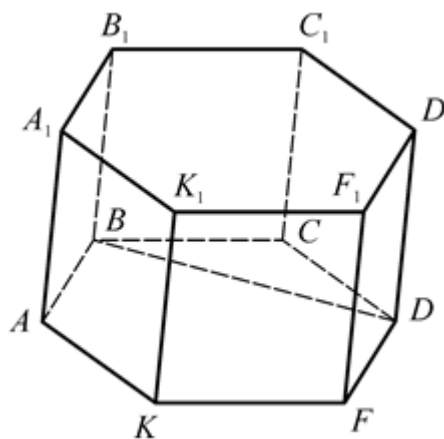
10. $\triangle ABC$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$, $AB = 2$, $AC = CB = \sqrt{2}$. Найдите угол между прямыми AC и C_1B_1 , AB и A_1C_1 .



11. $ABCD$ – ромб, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, $\angle ABC = 60^\circ$. Найдите угол между прямыми BC и C_1D_1 ; BD и A_1C_1 .



12. $ABCDFK$ – правильный шестиугольник, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1 \parallel FF_1 \parallel KK_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = FF_1 = KK_1$. Найдите угол между прямыми BD и D_1F_1 ; AB и C_1D_1 .



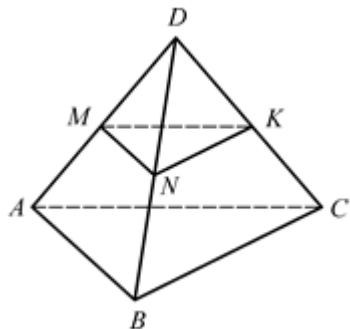
Углы с сонаправленными сторонами

1. $\angle(AB, A_1D_1) = 40^\circ$, $\angle(BC, A_1B_1) = 140^\circ$.
2. $\angle(AB, C_1B_1) = 100^\circ$, $\angle(A_1B_1, A_1C_1) = 60^\circ$.
3. $\angle(BC, DD_1) = 50^\circ$, $\angle(BB_1, A_1D_1) = 50^\circ$.
4. $\angle(A_1B_1, AC) = 60^\circ$, $\angle(AB, A_1D_1) = 90^\circ$.
5. $\angle(MN, DD_1) = 90^\circ$, $\angle(BB_1, A_1C_1) = 90^\circ$.
6. $\angle(AB, B_1C_1) = 60^\circ$, $\angle(MN, A_1C_1) = 60^\circ$.
7. $\angle(AB, B_1C_1) = 30^\circ$, $\angle(A_1C_1, BC) = 70^\circ$.
8. $\angle(AD, CC_1) = 90^\circ$, $\angle(AB_1, D_1C) = 90^\circ$.
9. $\angle(AB, A_1C_1) = 60^\circ$, $\angle(AM, B_1K_1) = 120^\circ$.
10. $\angle(AC, C_1B_1) = 45^\circ$, $\angle(AB, A_1C_1) = 45^\circ$.
11. $\angle(BC, C_1D_1) = 120^\circ$, $\angle(BD, A_1C_1) = 90^\circ$.
12. $\angle(BD, D_1F_1) = 90^\circ$, $\angle(AB, C_1D_1) = 60^\circ$.

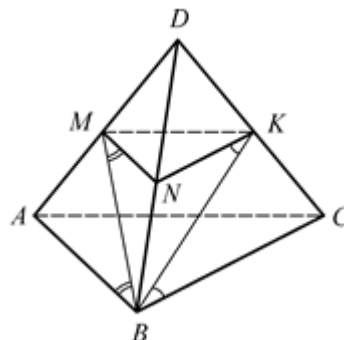
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Докажите, что $(ABC) \parallel (MNK)$.

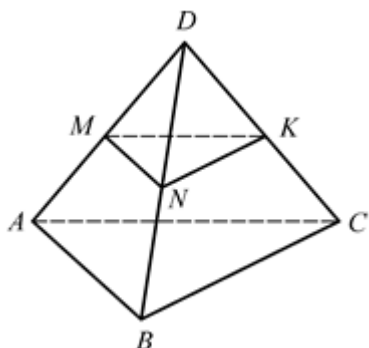
1. $MN \parallel AB$, $MK \parallel AC$.



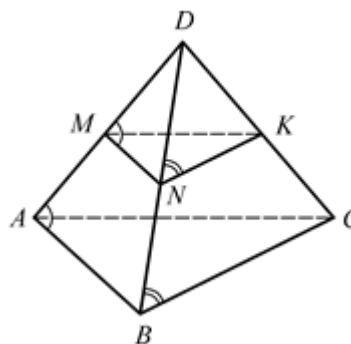
2. $\angle ABM = \angle BMN$,
 $\angle NKB = \angle KBC$.



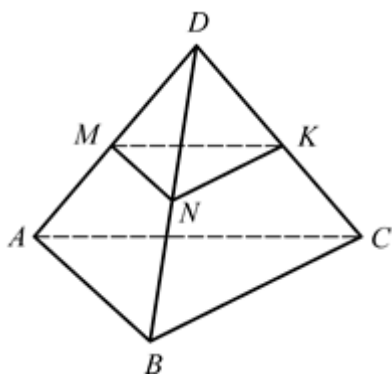
3. $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{ND} = \frac{CK}{KD}$.



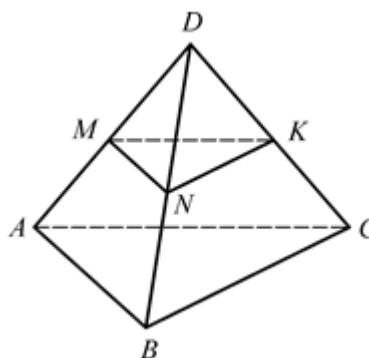
4. $\angle BAD = \angle NMD$,
 $\angle CBD = \angle KND$.



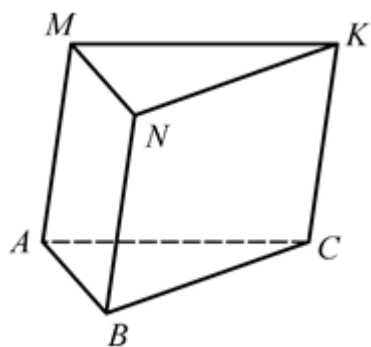
5. $\angle BAM + \angle AMN = 180^\circ$,
 $\angle CBN + \angle BNK = 180^\circ$.



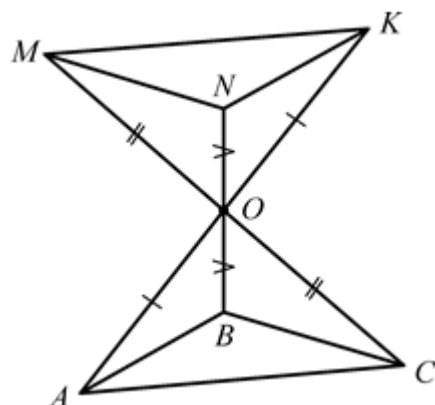
6. $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BD} = \frac{CK}{CD}$.



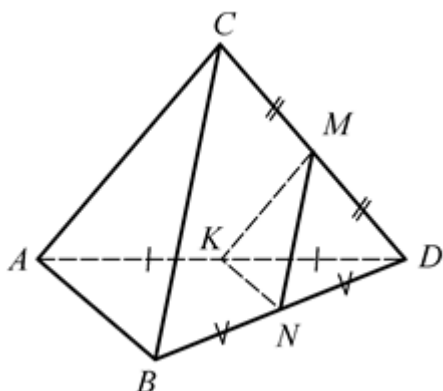
7. $AM \parallel BN \parallel CK$, $AM = BN = CK$.



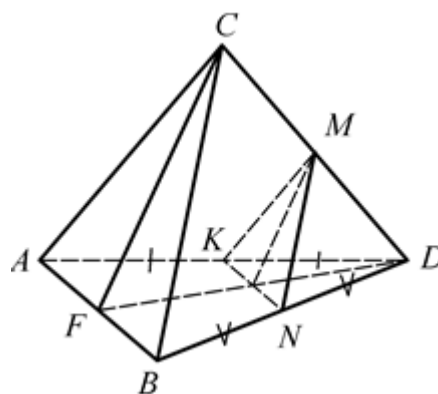
8. $MO = OC$, $NO = OB$, $AO = OK$.



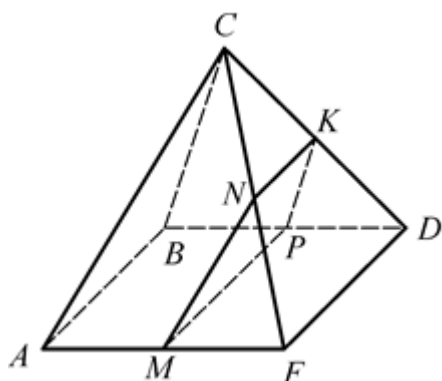
9. $CM = MD$, $AK = KD$, $BN = ND$.



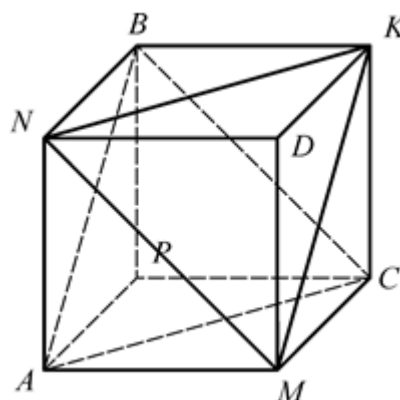
10. $AK = KD$, $BN = ND$, $CF \parallel MQ$.



11. $MN \parallel AC$, $PK \parallel BC$.



12. $APCMNBKD$ – куб.



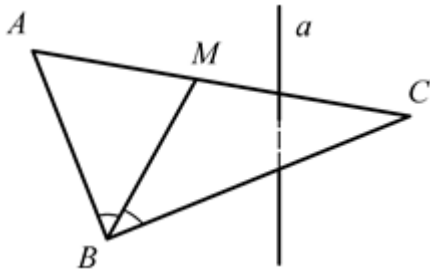
Параллельность плоскостей

Указание: воспользоваться признаком параллельности плоскостей и доказать, что две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости.

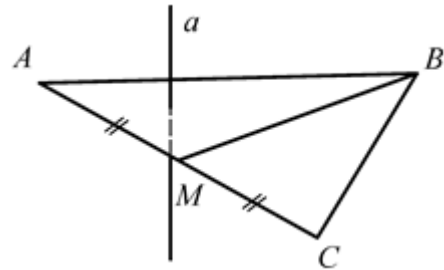
Перпендикулярность прямых и плоскостей

ПРЯМАЯ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПЛОСКОСТИ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ

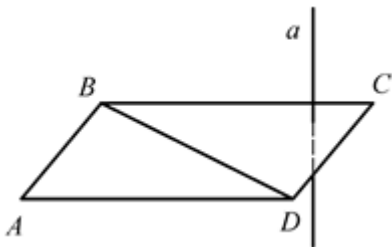
1. Дано: $a \perp (ABC)$, BM – биссектриса.
Докажите, что $a \perp BM$.



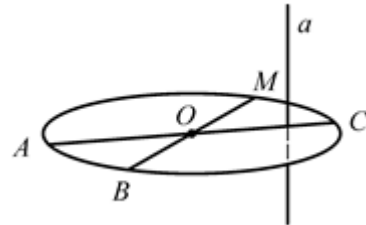
2. Дано: $a \perp (ABC)$, BM – медиана.
Докажите, что $a \perp BM$.



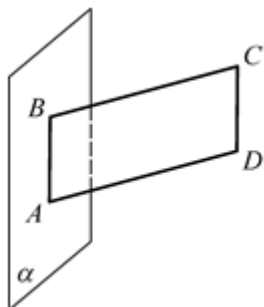
3. Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $a \perp (ABC)$.
Докажите, что $a \perp BD$.



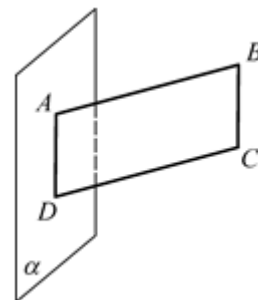
4. Дано: $\omega(O; R)$, $a \perp (ABC)$.
Докажите, что $a \perp AM$.



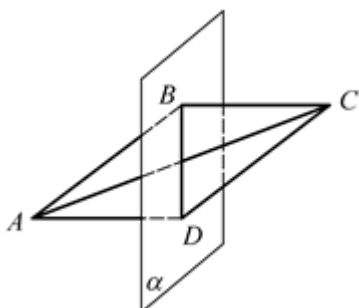
5. Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AB \in \alpha$, $BC \perp \alpha$.
Докажите, что $AC = BD$.



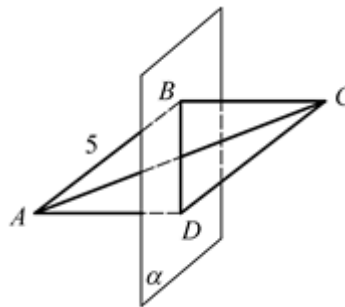
6. Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AD \in \alpha$, $AB \perp \alpha$, $AD = 12$, $AB = 5$.
Найдите DB .



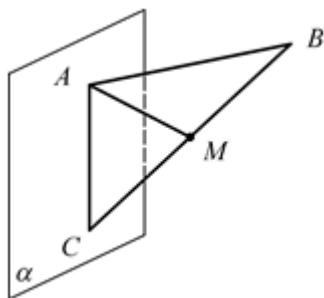
7. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $BD \in \alpha, AC \perp \alpha$.
 Докажите, что $\angle BAC = \angle DAC$.



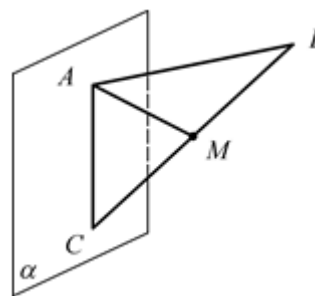
8. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $BD \in \alpha, AC \perp \alpha, AB = 5$.
 Найдите периметр параллелограмма.



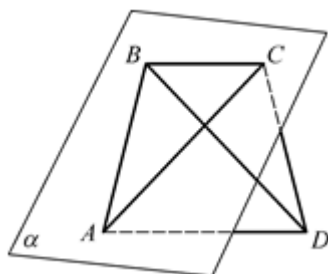
9. Дано: $AB \perp \alpha, AC \in \alpha, M$ –
 середина $CB, AC = 6, AB = 8$.
 Найдите AM .



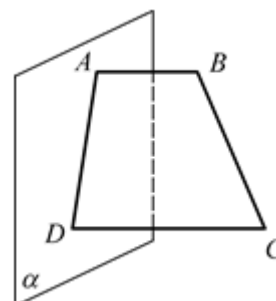
10. Дано: $AB \perp \alpha, AC \in \alpha, M$ –
 середина $CB, AM = 2,5, AC = 3$.
 Найдите AB .



11. Дано: $ABCD$ – равнобедренная
 трапеция, $BC = 10$,
 $AD = 20, AC \in \alpha, BD \perp \alpha$.
 Найдите площадь трапеции.



12. Дано: $ABCD$ – трапеция. $AB \perp \alpha$,
 $AD \in \alpha, AB = 2, DC = 6$, а меньшая
 из боковых сторон равна 3.
 Найдите площадь трапеции.



**Прямая, перпендикулярная плоскости. Параллельные прямые,
перпендикулярные плоскости**

1. $a \perp (ABC)$ и $BM \in (ABC)$, следовательно, $a \perp BM$.

2. $a \perp (ABC)$ и $BM \in (ABC)$, следовательно, $a \perp BM$.

3. $a \perp (ABC)$ и $BD \in (ABC)$, следовательно, $a \perp BD$.

4. $a \perp (ABC)$ и $AM \in (ABC)$, следовательно, $a \perp AM$.

5. $BC \perp \alpha$ и $AB \in \alpha$, следовательно, $BC \perp AB$.

$ABCD$ – параллелограмм и $\angle ABC = 90^\circ$, следовательно, $ABCD$ – прямоугольник и $AC = BD$.

6. $DB = 13$.

7. $AC \perp \alpha$ и $BD \in \alpha$, следовательно, $AC \perp BD$.

$ABCD$ – параллелограмм и $AC \perp BD$, следовательно, $ABCD$ – ромб и $\angle BAC = \angle DAC$.

8. $P = 20$.

9. $AM = 5$.

10. $AB = 4$.

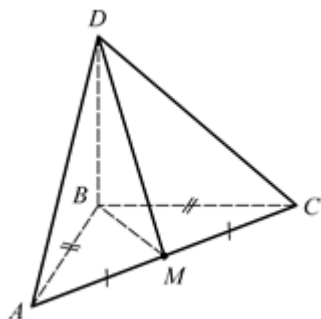
11. $S = 225$. Указание: $ABCD$ – равнобедренная трапеция со взаимно

перпендикулярными диагоналями, следовательно,
$$S_{ABCD} = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 .$$

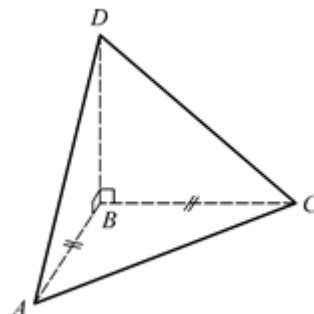
12. $S = 12$.

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

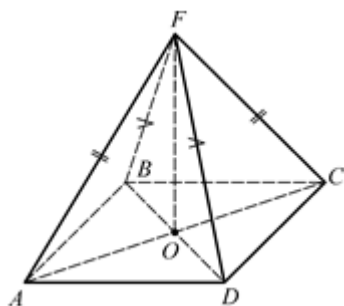
1. Дано: $\triangle ABC$, $BD \perp (ABC)$,
 $AB = BC$, $AM = MC$.
Докажите, что $AC \perp (BDM)$.



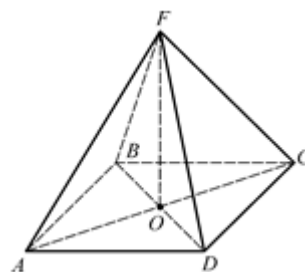
2. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$,
 $BD \perp AB$, $BD \perp BC$.
Докажите, что $BD \perp (ABC)$.



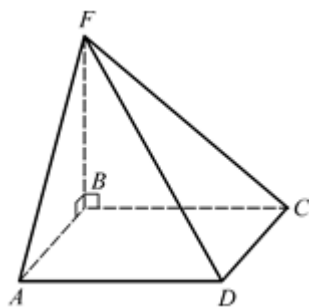
3. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $AF = FC$, $BF = FD$.
Докажите, что $FO \perp (ABC)$.



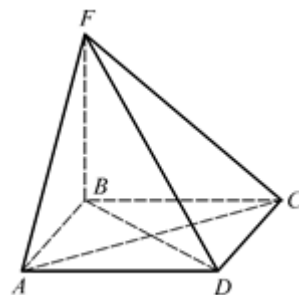
4. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $FO \perp (ABC)$.
Докажите, что $AC \perp (BFD)$.



5. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $BF \perp AB$, $BF \perp BC$.
Докажите, что $BF \perp (ABC)$.



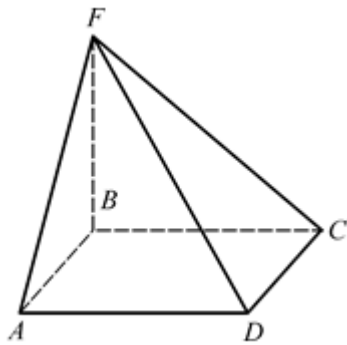
6. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $BF \perp (ABC)$.
Докажите, что $AC \perp (BFD)$.



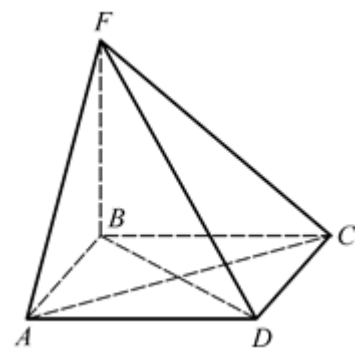
7. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $FB \perp (ABC)$.

8. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $FB \perp (ABC)$.

Докажите, что $DC \perp (BFC)$.

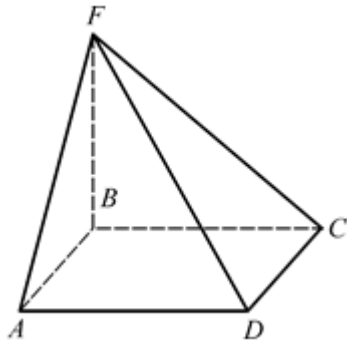


Докажите, что $AC \perp (BFD)$.



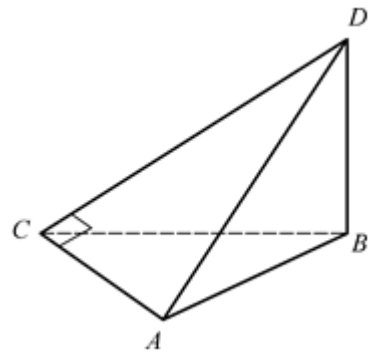
9. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $FB \perp (ABC)$.

Докажите, что $AD \perp (ABF)$.



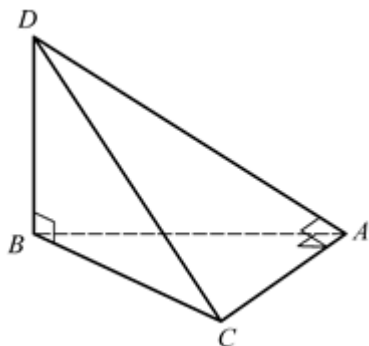
10. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACD = 90^\circ$,
 $BD \perp (ABC)$.

Докажите, что $AC \perp (BCD)$.



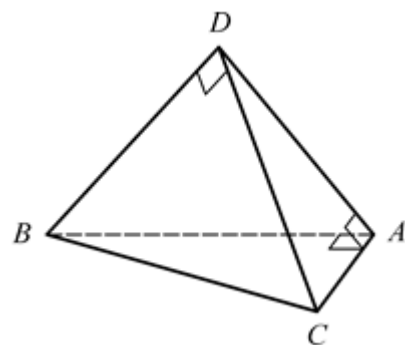
11. Дано: $AD \perp AC$, $AC \perp AB$,
 $BD \perp CB$.

Докажите, что $BD \perp (ABC)$.



12. Дано: $AD \perp AC$, $AC \perp AB$,
 $BD \perp CD$.

Докажите, что $BD \perp (ACD)$.

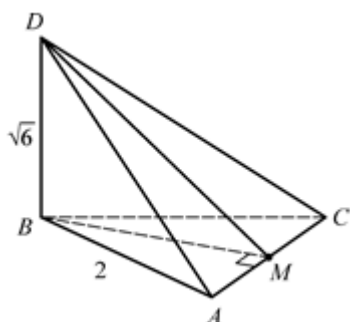


Признак перпендикулярности прямой и плоскости

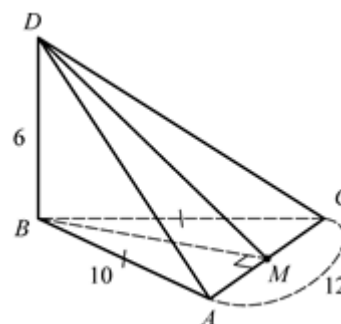
Указание: воспользоваться признаком перпендикулярности прямой к плоскости и доказать, что прямая, не лежащая в плоскости, перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

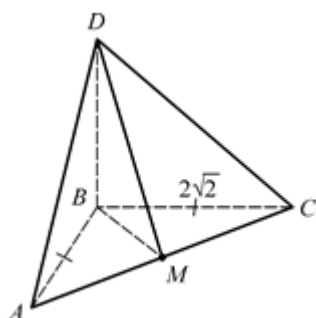
1. Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний,
 $AB = 2$, $BD \perp (ABC)$, $BD = \sqrt{6}$.
Найдите S_{ADC} .



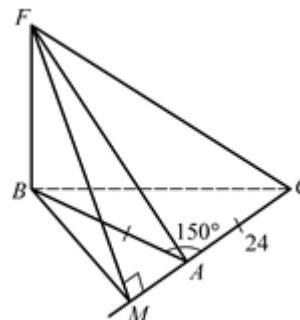
2. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = 10$,
 $AC = 12$, $BD \perp (ABC)$, $BD = 6$.
Найдите S_{ADC} .



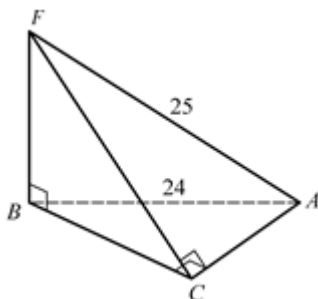
3. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC = 90^\circ$,
 $AB = BC = 2\sqrt{2}$, $BD \perp (ABC)$,
 $BD = \sqrt{5}$.
Найдите S_{ADC} .



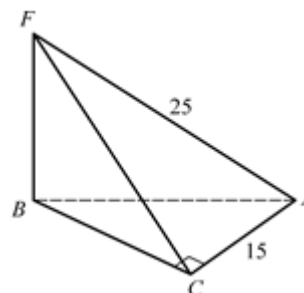
4. Дано: $\triangle ABC$, $\angle BAC = 150^\circ$,
 $AB = AC = 24$, $BF \perp (ABC)$,
 $FM \perp AC$, $FM = 15$.
Найдите BF .



5. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $BF \perp BC$, $AC \perp FC$, $AF = 25$,
 $AB = 24$. Найдите BF .



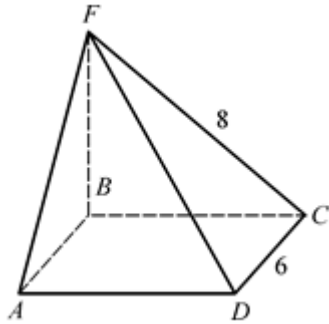
6. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $BF \perp (ABC)$, $AF = 25$, $AC = 15$.
Найдите S_{ACF} .



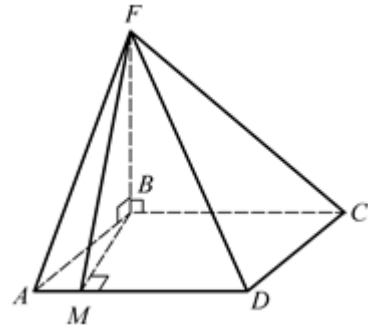
7. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $FB \perp (ADC)$, $FC = 8$, $DC = 6$.

8. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 3\sqrt{2}$

Найдите S_{CDF} .

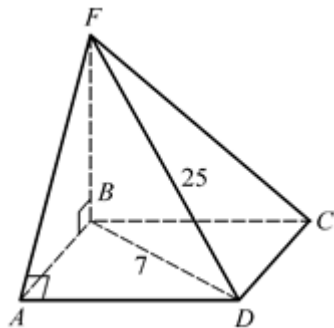


, $\angle BAD = 45^\circ$, $BF \perp AB$, $BF \perp BC$,
 $BM \perp AD$, $FM = 5$.
 Найдите BF .

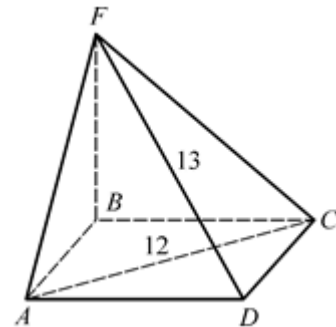


9. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $BF \perp AB$, $AF \perp AD$, $BD = 7$,
 $DF = 25$.

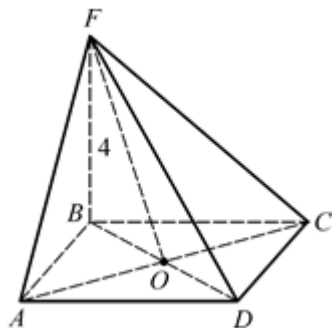
Найдите S_{BDF} .



10. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $BF \perp (ABC)$, $AC = 12$, $FD = 13$.
 Найдите BF .

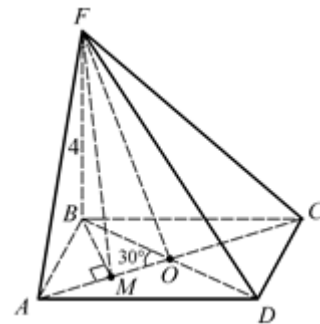


11. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $BF \perp (ABC)$, $BF = 4$, $AC = 6$.
 Найдите S_{ACF} .



12. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $\angle AOB = 30^\circ$, $BD = 12$, $BF \perp (ABC)$, $BF = 4$.

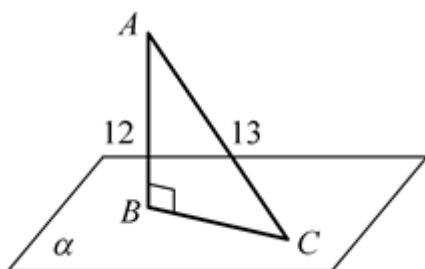
Найдите S_{ACF} .



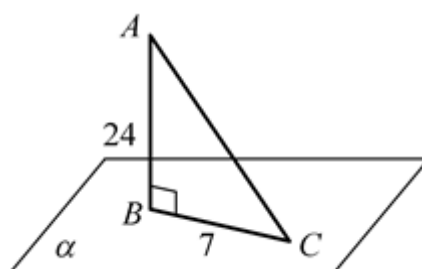
1. $S_{ADC} = 2$.
2. $S_{ADC} = 60$.
3. $S_{ADC} = 2$.
4. $BF = 9$.
5. $BF = 7$.
6. $S_{ACF} = 150$.
7. $S_{CDF} = 24$.
8. $BF = 4$.
9. $S_{BDF} = 84$.
10. $BF = 5$.
11. $S_{ACF} = 15$.
12. $S_{ACF} = 30$.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

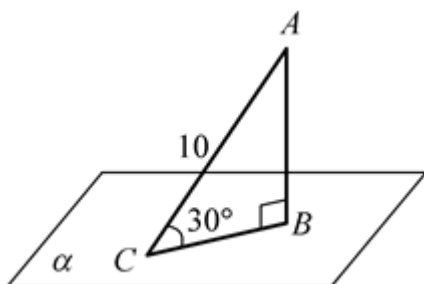
1. Дано: $AB \perp \alpha$, $AC = 13$, $AB = 12$.
Найдите BC .



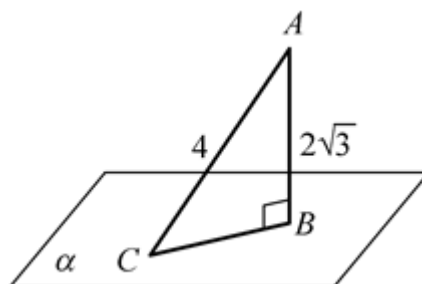
2. Дано: $AB \perp \alpha$, $AB = 24$, $BC = 7$.
Найдите AC .



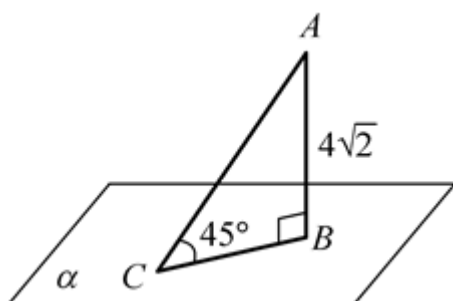
3. Дано: $AB \perp \alpha$, $\angle ACB = 30^\circ$,
 $AC = 10$.
Найдите AB .



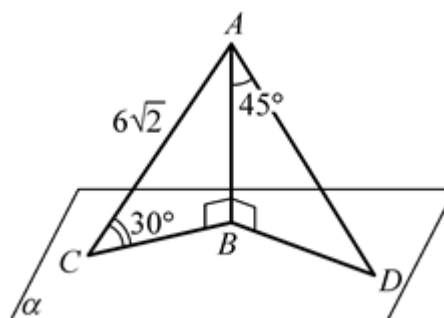
4. Дано: $AB \perp \alpha$, $AB = 2\sqrt{3}$,
 $AC = 4$.
Найдите $\angle ACB$.



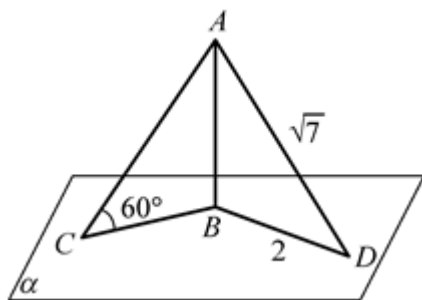
5. Дано: $AB \perp \alpha$, $\angle ACB = 45^\circ$,
 $AB = 4\sqrt{2}$.
Найдите AC .



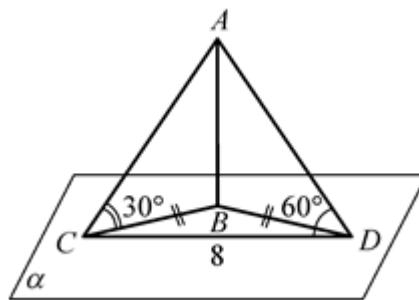
6. Дано: $AB \perp \alpha$, $AC = 6\sqrt{2}$,
 $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle BAD = 45^\circ$.
Найдите AD .



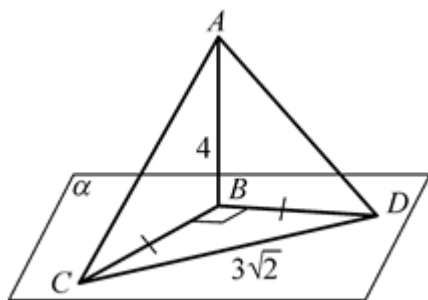
7. Дано: $AB \perp \alpha$, $\angle ACB = 60^\circ$,
 $AD = \sqrt{7}$, $BD = 2$.
 Найдите AC .



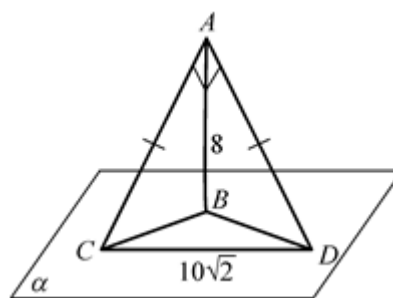
8. Дано: $AB \perp \alpha$, $CB = BD$,
 $\angle ADC = 60^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$, $CD = 8$.
 Найдите AB .



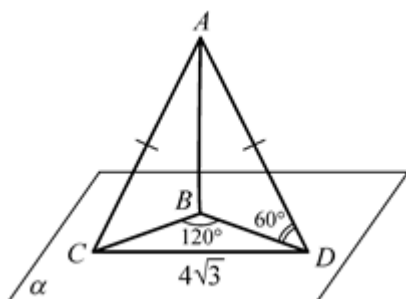
9. Дано: $AB \perp \alpha$, $\angle CBD = 90^\circ$,
 $CD = 3\sqrt{2}$, $AB = 4$, $CB = BD$.
 Найдите AD .



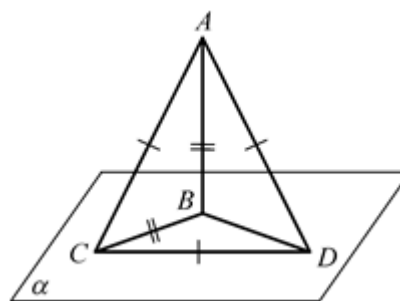
10. Дано: $AB \perp \alpha$, $CD = 10\sqrt{2}$,
 $\angle CAD = 90^\circ$, $AB = 8$, $AC = AD$.
 Найдите BD .



11. Дано: $AB \perp \alpha$, $\angle CBD = 120^\circ$,
 $CD = 4\sqrt{3}$, $\angle ADB = 60^\circ$,
 $AC = AD$.
 Найдите AD .



12. Дано: $AB \perp \alpha$, $AC = AD = CD$,
 $AB = BC$.
 Найдите $\angle CBD$.



Перпендикуляр и наклонная

1. $BC = 5$.

2. $AC = 25$.

3. $AB = 5$.

4. $\angle ACB = 60^\circ$.

5. $AC = 8$.

6. $AD = 6$.

7. $AC = 2$.

8. $AB = 4$.

9. $AD = 5$.

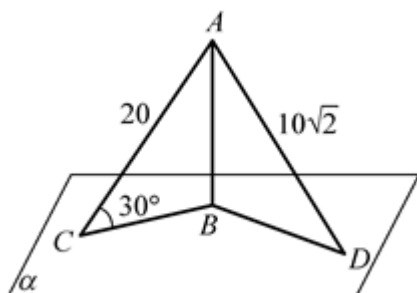
10. $BD = 6$.

11. $AD = 8$.

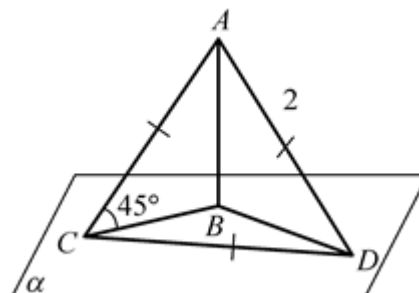
12. $\angle CBD = 90^\circ$.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

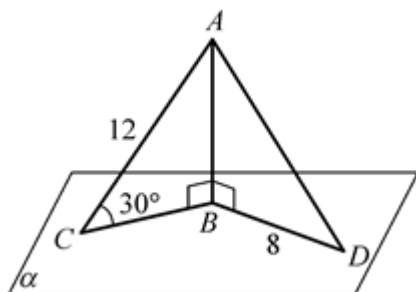
1. Дано: $AB \perp \alpha$, $AC = 20$,
 $AD = 10\sqrt{2}$, $\angle ACB = 30^\circ$.
 Найдите $\angle ADB$.



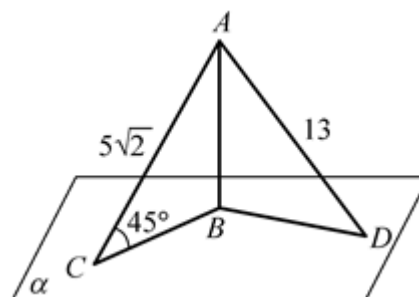
2. Дано: $AB \perp \alpha$, $AC = AD = CD = 2$,
 $\angle ACB = 45^\circ$.
 Найдите $\angle CBD$.



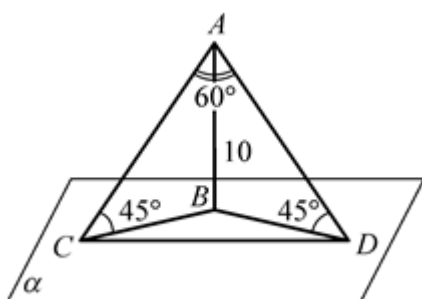
3. Дано: $AB \perp \alpha$, $\angle ACB = 30^\circ$,
 $AC = 12$, $BD = 8$.
 Найдите AD .



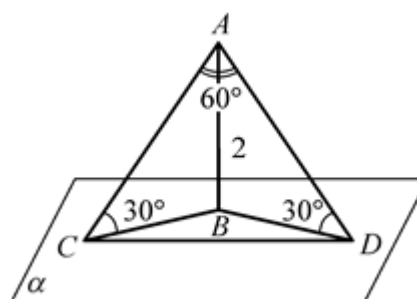
4. Дано: $AB \perp \alpha$, $\angle ACB = 45^\circ$.
 $AC = 5\sqrt{2}$, $AD = 13$.
 Найдите BD .



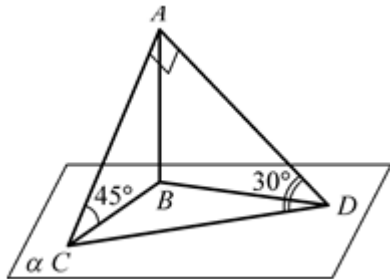
5. Дано: $AB \perp \alpha$, $AB = 10$, $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$,
 $\angle CAD = 60^\circ$.
 Найдите CD .



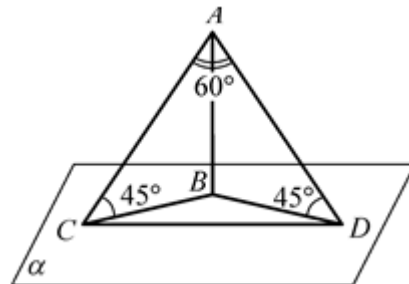
6. Дано: $AB \perp \alpha$, $\angle ACB = \angle ADB = 30^\circ$,
 $AB = 2$, $\angle CAD = 60^\circ$.
 Найдите CD .



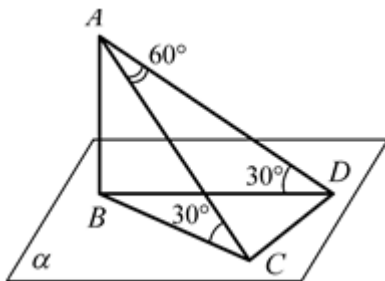
7. Дано: $AB \perp \alpha$, $\angle CAD = 90^\circ$,
 $R = 6$ (радиус окружности,
 описанной около $\triangle ACD$), $\angle ADC =$
 30° , $\angle ACB = 45^\circ$.
 Найдите AB .



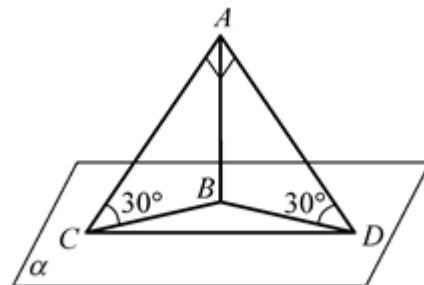
8. Дано: $AB \perp \alpha$, $\angle ACB = \angle ADB =$
 45° , $\angle CAD = 60^\circ$,
 $R = 2\sqrt{3}$ (радиус окружности,
 описанной около $\triangle ACD$).
 Найдите AB .



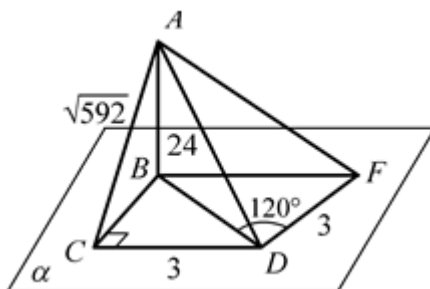
9. Дано: $AB \perp \alpha$, $\angle ACB = \angle ADB =$
 30° , $\angle CAD = 60^\circ$, $r = \sqrt{3}$ (радиус
 окружности, вписанной в $\triangle ACD$).
 Найдите AB .



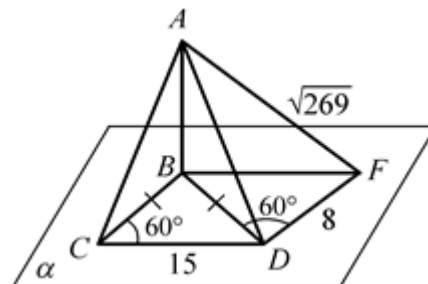
10. Дано: $AB \perp \alpha$, $\angle CAD = 90^\circ$,
 $\angle ACB = \angle ADB = 30^\circ$, $R = 4\sqrt{2}$
 (радиус окружности, описанной
 около $\triangle ACD$).
 Найдите AB .



11. Дано: $AB \perp \alpha$, $AB = 24$,
 $AC = \sqrt{592}$, $\angle BCD = 90^\circ$, $CD = 3$,
 $\angle BDF = 120^\circ$, $DF = 3$.
 Найдите AF .



12. Дано: $AB \perp \alpha$, $BC = BD$,
 $\angle BCD = 60^\circ$, $\angle BDF = 60^\circ$,
 $DF = 8$, $AF = \sqrt{269}$, $CD = 15$.
 Найдите AB .



Перпендикуляр и наклонная

1. $\angle ADB = 45^\circ$.

2. $\angle CBD = 90^\circ$.

3. $AD = 10$.

4. $BD = 12$.

5. $CD = 10\sqrt{2}$.

6. $CD = 4$.

7. $AB = 3\sqrt{2}$.

8. $AB = 3\sqrt{2}$.

9. $AB = 3$.

10. $AB = 4$.

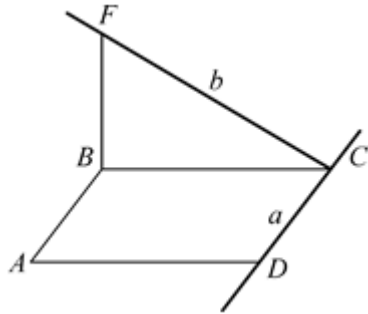
11. $AF = 25$.

12. $AB = 10$.

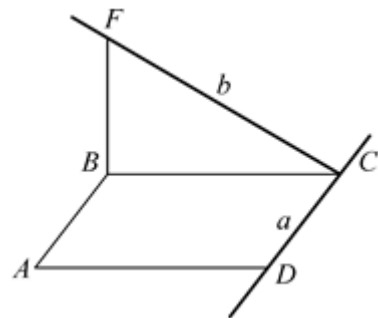
ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Установите, перпендикулярны ли прямые a и b .

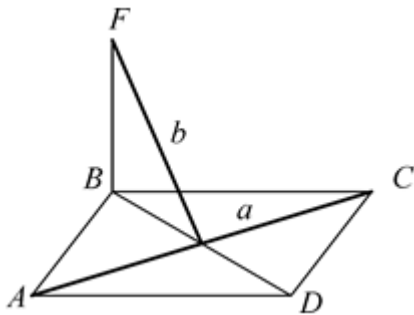
1. $ABCD$ – прямоугольник,
 $FB \perp (ABC)$.



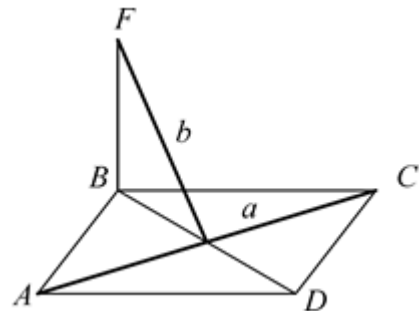
2. $ABCD$ – параллелограмм,
 $FB \perp (ABC)$.



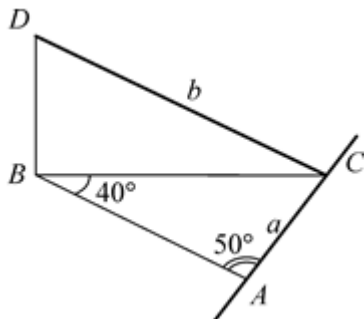
3. $ABCD$ – прямоугольник,
 $FB \perp (ABC)$.



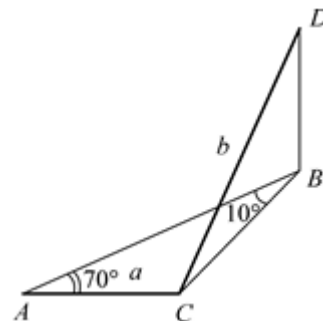
4. $ABCD$ – ромб, $FB \perp (ABC)$.



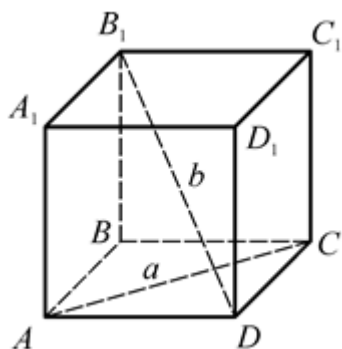
5. $BD \perp (ABC)$, $\angle ABC = 40^\circ$,
 $\angle BAC = 50^\circ$.



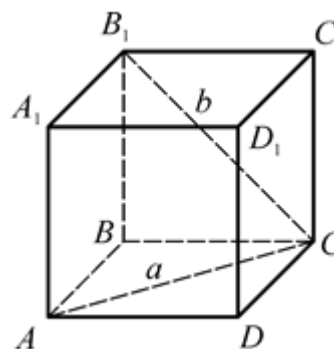
6. $BD \perp (ABC)$, $\angle ABC = 10^\circ$,
 $\angle BAC = 70^\circ$.



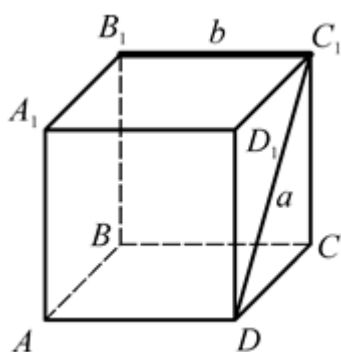
7. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.



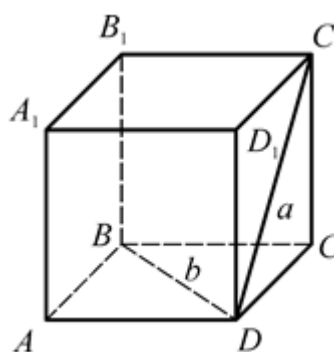
8. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.



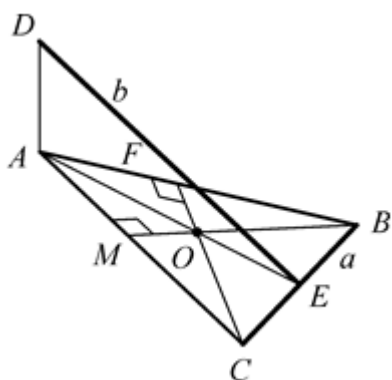
9. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.



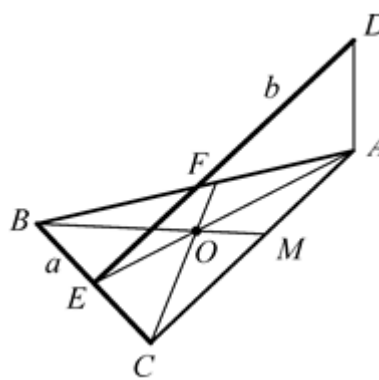
10. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.



11. $AD \perp (ABC)$,
 BM и CF – высоты.



12. $AD \perp (ABC)$,
 BM и CF – медианы.

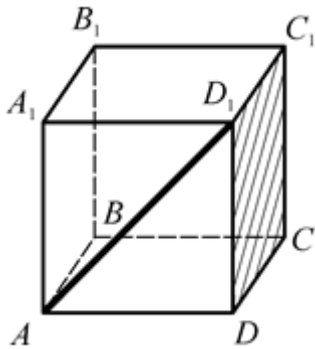


Теорема о трех перпендикулярах

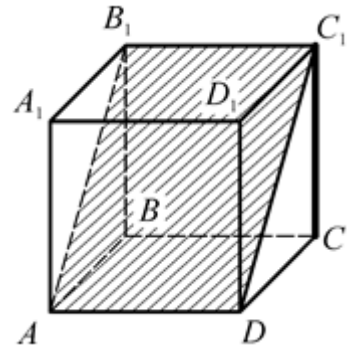
Указание: в задачах 1, 4, 5, 7, 9, 11 воспользоваться теоремой о трех перпендикулярах.

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

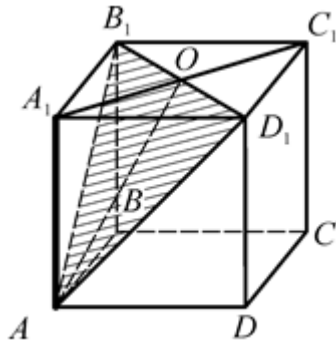
1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.
Найдите $\angle(AD_1, (DD_1 C_1))$.



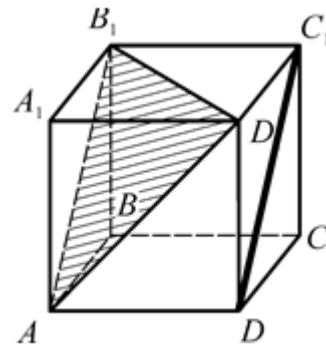
2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.
Найдите $\angle(CC_1, (AB_1 C_1))$.



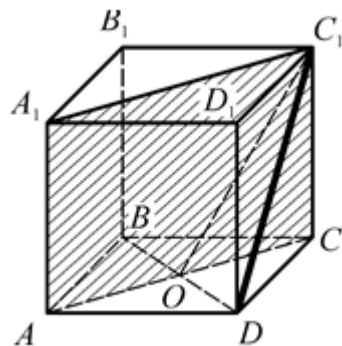
3. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.
Найдите $\text{tg} \angle(AA_1, (AB_1 D_1))$.



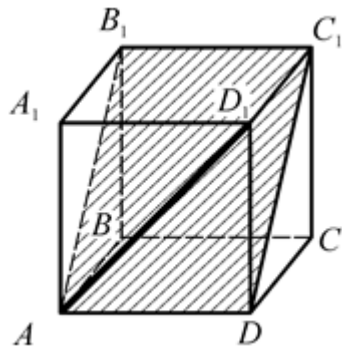
4. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.
Найдите $\angle(DC_1, (AB_1 D_1))$.



5. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.
Найдите $\angle(DC_1, (AA_1 C_1))$.



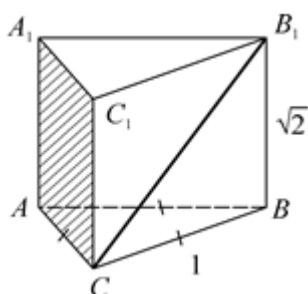
6. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.
Найдите $\angle(AD_1, (AB_1 C_1))$.



7. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $\triangle ABC$ – правильный,

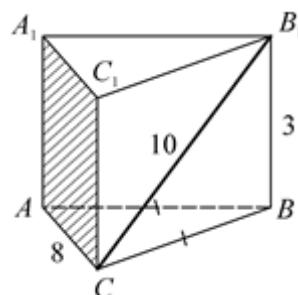
$$AB = 1, BB_1 = \sqrt{2}.$$

Найдите $\angle(CB_1, (AA_1C))$.



8. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $AB = BC$, $CB_1 = 10$, $BB_1 = 3$, $AC = 8$.

Найдите $\angle(CB_1, (AA_1C))$.

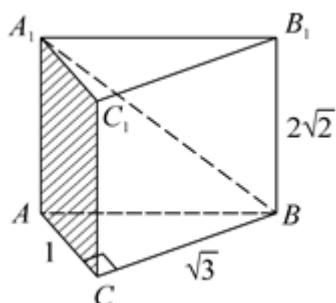


9. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма,

$$\angle ACB = 90^\circ, BB_1 = 2\sqrt{2},$$

$$AC = 1, CB = \sqrt{3}.$$

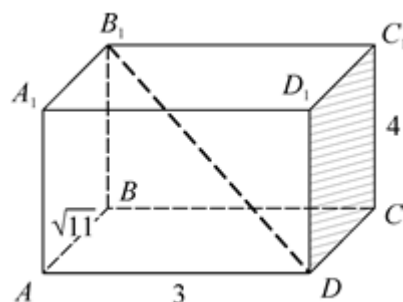
Найдите $\angle(A_1B, (AA_1C))$.



10. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед,

$$AB = \sqrt{11}, AD = 3, AA_1 = 4.$$

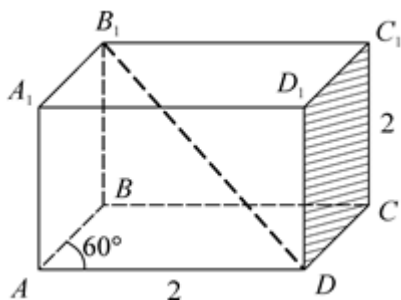
Найдите $\cos \angle(B_1D, (DCC_1))$.



11. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед, $ABCD$ – ромб,

$$\angle BCD = 60^\circ, AB = 2, DD_1 = 2.$$

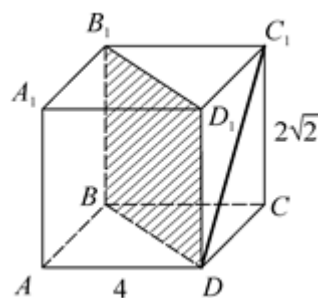
Найдите $\text{tg} \angle(B_1D, (DCC_1))$.



12. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед, $ABCD$ – ромб, $\angle ABC = 120^\circ$,

$$AB = 4, CC_1 = 2\sqrt{2}.$$

Найдите $\angle(DC_1, (BB_1D_1))$.



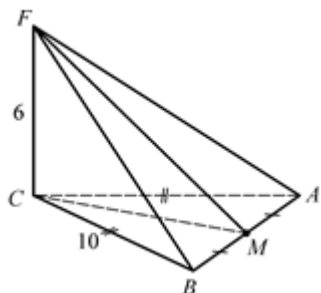
Угол между прямой и плоскостью

- | | | | |
|---------------------------|-----------------|-----------------|-----------------------------|
| 1. 45° . | 4. 0° . | 7. 30° . | 10. $\frac{5}{6}$. |
| 2. 45° . | 5. 30° . | 8. 60° . | 11. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. |
| 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. | 6. 30° . | 9. 30° . | 12. 45° . |

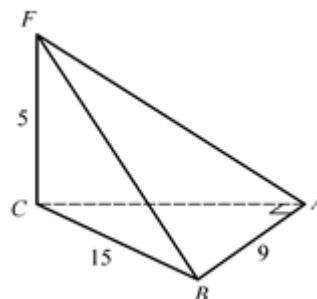
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Найдите расстояние от точки F до прямой AB .

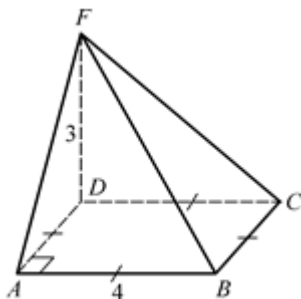
1. Дано: $\triangle ABC$, $AC = CB = 10$,
 $AB = 12$, $CF \perp (ABC)$, $CF = 6$.



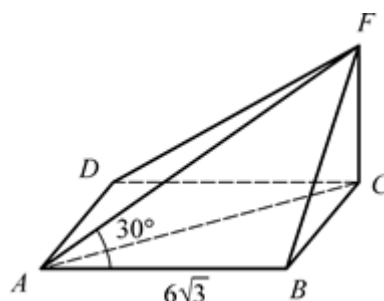
2. Дано: $\triangle ABC$, $\angle CAB = 90^\circ$,
 $CB = 15$, $AB = 9$, $CF \perp (ABC)$,
 $CF = 5$.



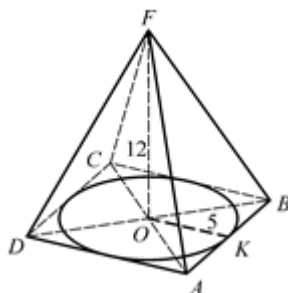
3. Дано: $ABCD$ – квадрат, $AB = 4$,
 $FD \perp (ABC)$, $FD = 3$.



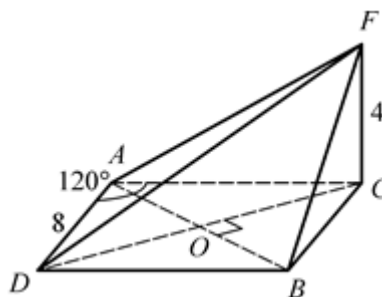
4. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $AB = 6\sqrt{3}$, $FC \perp (ABC)$,
 $\angle FAB = 30^\circ$.



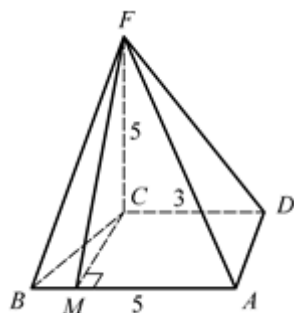
5. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $r_{\text{вписанной окружности}} = 5$, $FO \perp (ABC)$,
 $AC \cap BD = O$, $FO = 12$.



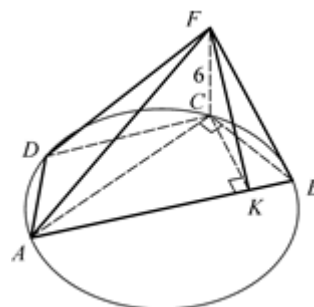
6. Дано: $ACBD$ – ромб, $AD = 8$,
 $\angle DAC = 120^\circ$, $CF \perp (ABC)$, $CF = 4$.



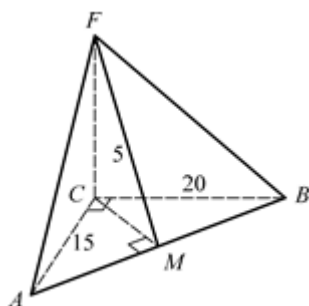
7. Дано: $ABCD$ – трапеция, $AB = 5$, $CD = 3$, $S_{ABCD} = 48$, $CF \perp (ABC)$, $CF = 5$.



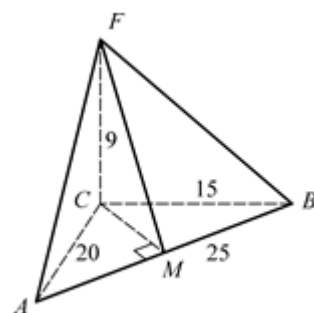
8. Дано: $ABCD$ – трапеция, $AC \perp CB$, $R_{\text{описанной окружности}} = 7$, $S_{ACB} = 56$, $CF \perp (ABC)$, $CF = 6$.



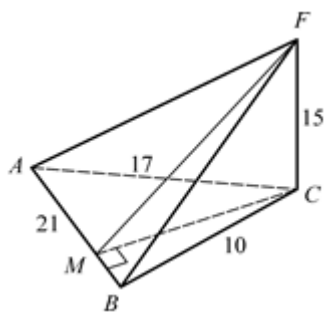
9. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 15$, $CB = 20$, $CF \perp (ABC)$, $CF = 5$.



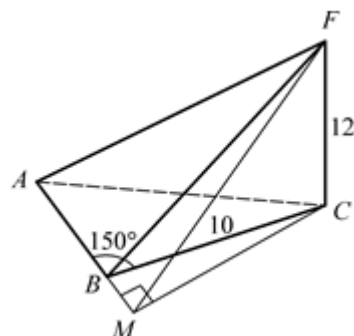
10. Дано: $\triangle ABC$, $AB = 25$, $AC = 20$, $CB = 15$, $CF \perp (ABC)$, $CF = 9$.



11. Дано: $\triangle ABC$, $AB = 21$, $AC = 17$, $CB = 10$, $CF \perp (ABC)$, $CF = 15$.



12. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC = 150^\circ$, $CB = 10$, $CF \perp (ABC)$, $CF = 12$.



Расстояние от точки до прямой

1. $FM = 10$.

2. $AF = 13$.

3. $AF = 5$.

4. $BF = 6$.

5. $FK = 13$.

6. $FO = 8$.

7. $FM = 13$.

8. $FK = 10$.

9. $FM = 13$.

10. $FM = 15$.

11. $FM = 17$.

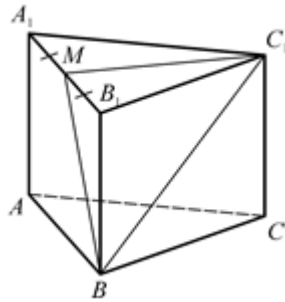
12. $FM = 13$.

Призма и параллелепипед

ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

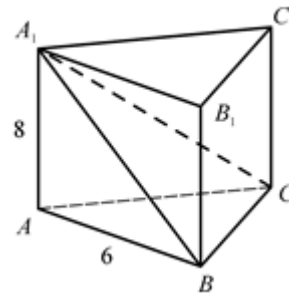
$ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма.

1. Дано: $A_1M = MB_1$.
Найдите $\angle C_1MB$.

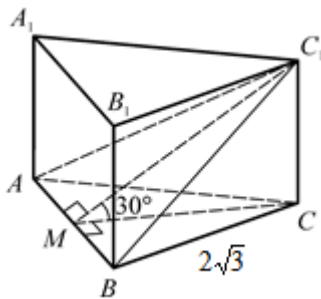


2. Дано: $AB = 6$, $AA_1 = 8$.

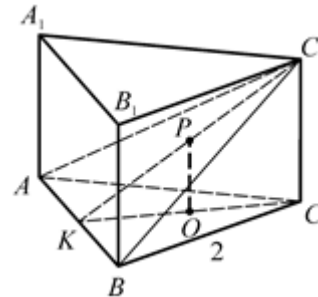
Найдите P_{BA_1C} .



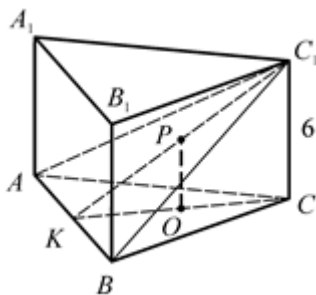
3. Дано: $AB = 2\sqrt{3}$, $MC \perp AB$,
 $\angle C_1MC = 30^\circ$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.



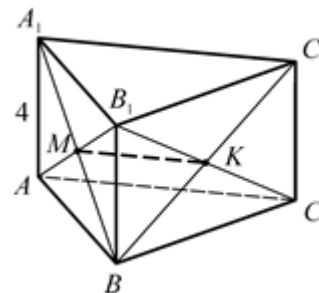
4. Дано: O – центр $\triangle ABC$,
 $OP \parallel CC_1$, $OP = 3$, $AB = 2$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.



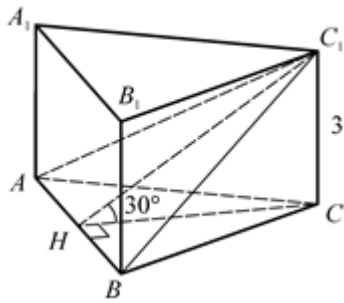
5. O – центр $\triangle ABC$, $OP \parallel CC_1$,
 $CC_1 = 6$, $AB = \frac{1}{2} OP$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.



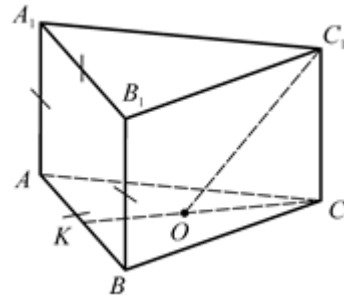
6. $AB_1 \cap A_1B = M$, $BC_1 \cap B_1C = K$,
 $MK = 1$, $AA_1 = 4$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.



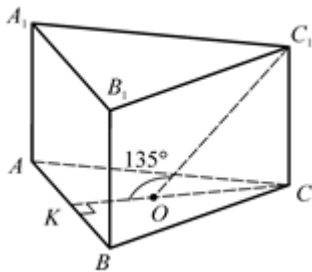
7. Дано: $BB_1 = 3$, $\angle C_1HC = 30^\circ$.
Найдите AB .



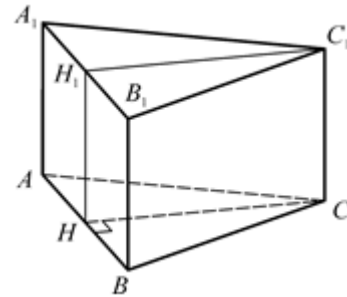
8. Дано: $AB = AA_1$, O – центр описанной около $\triangle ABC$ окружности.
Найдите $\angle C_1OC$.



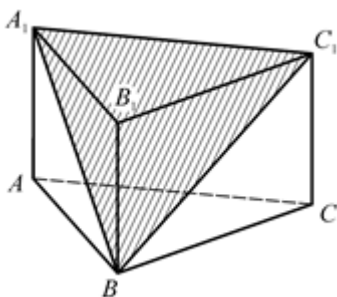
9. Дано: O – центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, $OK = 2$, $\angle KOC_1 = 135^\circ$.
Найдите высоту призмы.



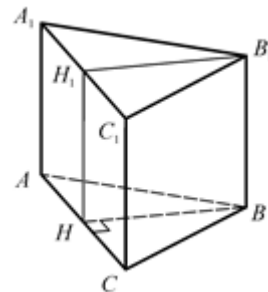
10. Дано: CH – высота $\triangle ABC$, $CB : BB_1 = 1 : 2$, $S_{HH_1C_1C} = 18$.
Найдите высоту призмы.



11. Дано: $S_{AA_1B_1B} = 108$, $AB : AA_1 = 4 : 3$.
Найдите P_{ABC_1} .



12. Дано: $S_{\text{бок.}} = 150\sqrt{3}$, HV – высота $\triangle ABC$, HH_1B_1V – квадрат.
Найдите AB .



Правильная треугольная призма

1. $\angle C_1MB = 90^\circ$.

2. $P_{BAC} = 26$.

3. $S_{бок} = 18$.

4. $S_{бок} = 54$.

5. $S_{бок} = 18$.

6. $S_{бок} = 24$.

7. $AB = 6$.

8. $\angle C_1OC = 60^\circ$.

9. $CC_1 = 4$.

10. $H = 6$.

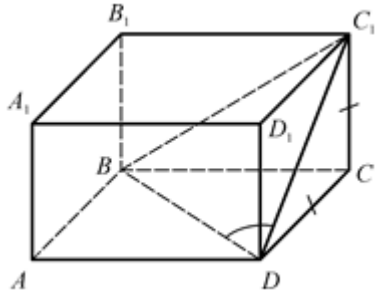
11. $P = 42$.

12. $AB = 10$.

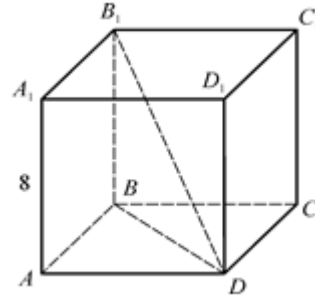
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – правильная призма.

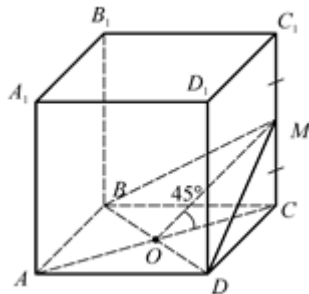
1. Дано: $DC = CC_1$.
Найдите $\angle BDC_1$.



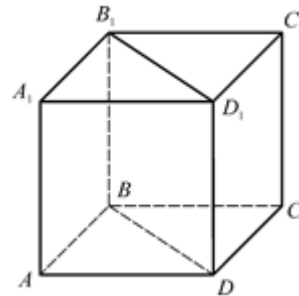
2. Дано: $S_{\text{осн}} = 18$, $AA_1 = 8$.
Найдите DB_1 .



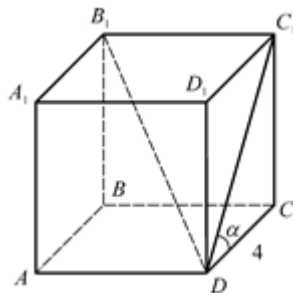
3. Дано: $AB = 4\sqrt{2}$, $CM = MC_1$,
 $AC \cap BD = O$, $\angle MOC = 45^\circ$.
Найдите высоту призмы.



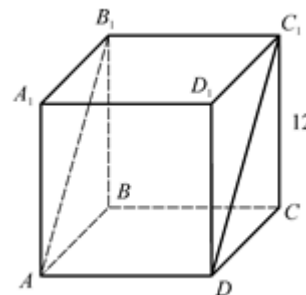
4. Дано: $AB = 9$, $S_{BB_1 D_1 D} = 54\sqrt{3}$.
Найдите $\angle C_1 A C$.

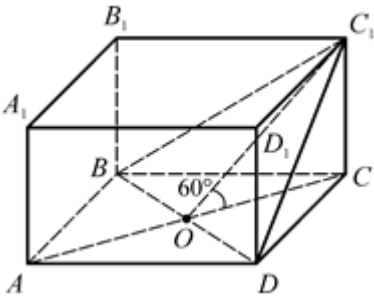
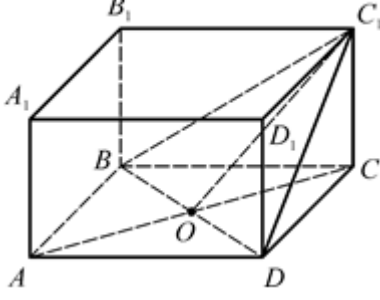
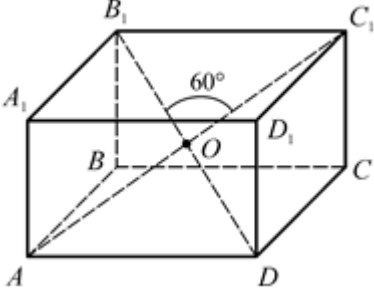
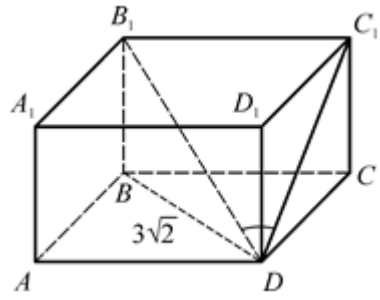
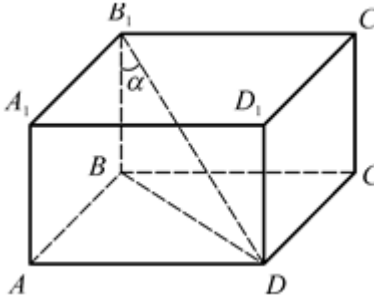
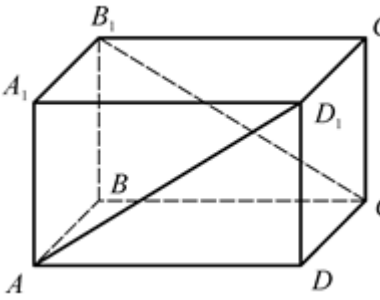


5. Дано: $AB = 4$, $\angle C_1 D C = \alpha$,
 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите $\angle B_1 D C_1$.



6. Дано: $S_{\text{бок}} = 240$, $CC_1 = 12$.
Найдите $S_{AB_1 C_1 D}$.



<p>7. Дано: $\angle C_1OC = 60^\circ$, $AB = 5$. Найдите S_{BC_1D}.</p> 	<p>8. Дано: $S_{BC_1D} = 36$, $S_{BC_1D} = S_{ABCD}$. Найдите $\angle OC_1C$.</p> 
<p>9. Дано: $\angle B_1OC_1 = 60^\circ$, $AC_1 = 8$. Найдите $S_{\text{осн}}$.</p> 	<p>10. Дано: $S_{\text{бок}} = 48$, $BD = 3\sqrt{2}$. Найдите $\text{tg} \angle B_1DC_1$.</p> 
<p>11. Дано: $\angle BB_1D = \alpha$, $\text{tg} \alpha = \sqrt{2}$, $S_{AA_1B_1B} = 9$. Найдите $S_{\text{бок}}$.</p> 	<p>12. Дано: угол между AD_1 и B_1C равен 60°, $DD_1 = 5$. Найдите S_{ABCD}.</p> 

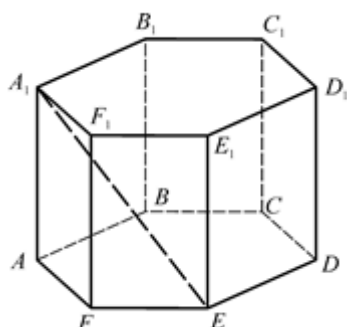
Правильная четырехугольная призма

- | | | |
|--------------------------------|----------------------------------|--|
| 1. $\angle BDC_1 = 60^\circ$. | 5. $\angle B_1DC_1 = 30^\circ$. | 9. $S_{\text{осн}} = 16$. |
| 2. $DB_1 = 10$. | 6. $S_{AB_1C_1D} = 65$. | 10. $\text{tg} \angle B_1DC_1 = 0,6$. |
| 3. $H = 8$. | 7. $S_{BC_1D} = 25$. | 11. $S_{\text{бок}} = 36$. |
| 4. $\angle C_1AC = 30^\circ$. | 8. $\angle OC_1C = 30^\circ$. | 12. $S_{ABCD} = 75$. |

ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

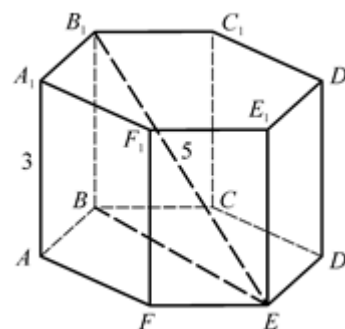
$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ – правильная призма.

1. Найдите $\angle A_1 E D$.

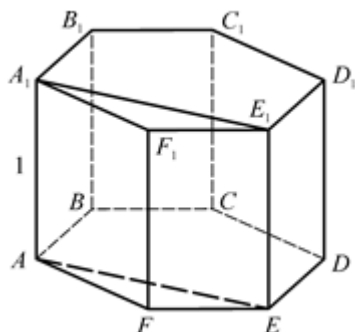


2. Дано: $AA_1 = 3, B_1 E = 5$.

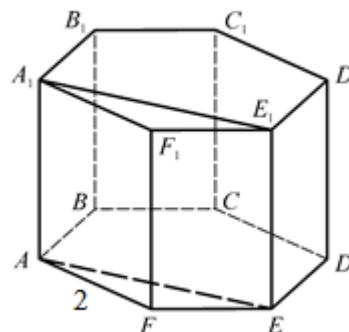
Найдите $S_{\text{бок}}$.



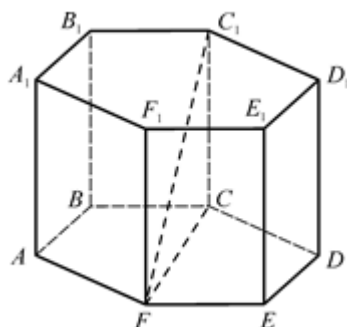
3. Дано: $AA_1 = 1, S_{AA_1 E_1 E} = 2\sqrt{3}$.
Найдите AB .



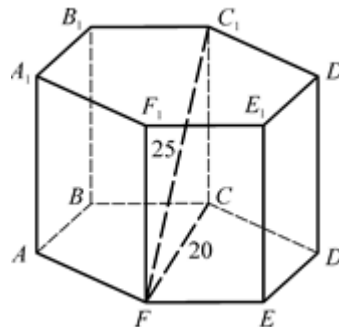
4. Дано: $S_{AA_1 E_1 E} = 2\sqrt{3}, AB = 2$.
Найдите AA_1 .



5. Дано: $FC_1 = 4\sqrt{2}, \angle C_1 F C = 45^\circ$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.

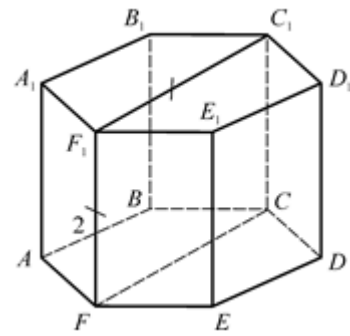
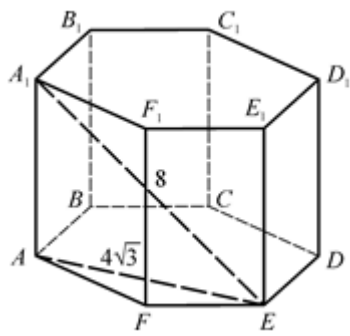


6. Дано: $FC = 20, FC_1 = 25$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.



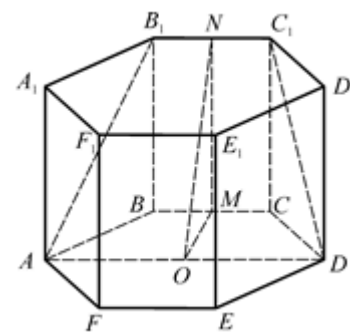
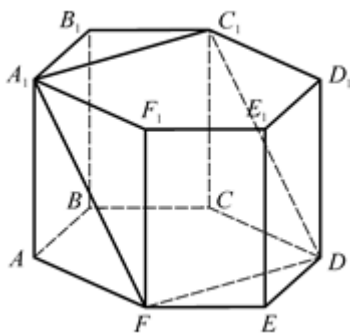
7. Дано: $AE = 4\sqrt{3}, A_1 E = 8$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.

8. Дано: $FF_1 = 2, FF_1 = F_1 C_1$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.



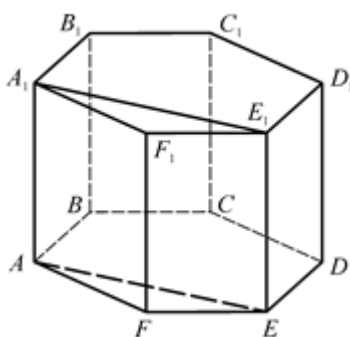
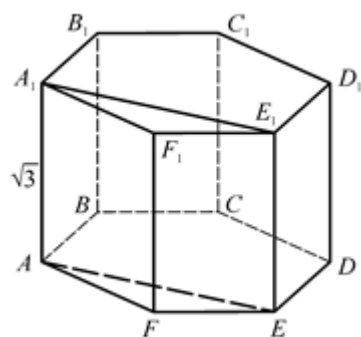
9. Дано: $AB = 3$, $S_{A_1C_1DF} = 15\sqrt{3}$.
Найдите BB_1 .

10. Дано: $AB = 2$, $BB_1 = 1$.
Найдите $S_{AB_1C_1D}$.



11. Дано: $S_{\text{осн}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $AA_1 = \sqrt{3}$.
Найдите $S_{AA_1E_1E}$.

12. Дано: $S_{\text{осн}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $S_{AA_1E_1E} = \sqrt{3}$.
Найдите AA_1 .



Правильная шестиугольная призма

1. $\angle A_1ED = 90^\circ$.

2. $S_{\text{бок}} = 36$.

3. $AB = 2$.

4. $AA_1 = 1$.

5. $S_{\text{бок}} = 48$.

6. $S_{\text{бок}} = 900$.

7. $S_{\text{бок}} = 96$.

8. $S_{\text{бок}} = 12$.

9. $BB_1 = 4$.

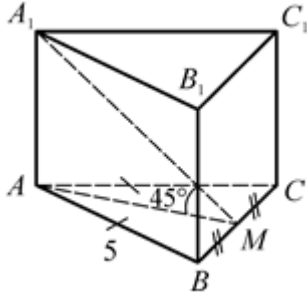
10. $S_{AB_1C_1D} = 6$.

11. $S_{AA_1E_1E} = 3$.

12. $AA_1 = 1$.

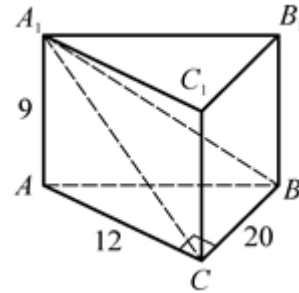
ПРЯМАЯ ПРИЗМА

1. Дано: $\triangle ABC$, $AB = AC = 5$,
 $BC = 6$, $BM = MC$, $\angle AMA_1 = 45^\circ$.
 Найдите $S_{\text{бок}}$.

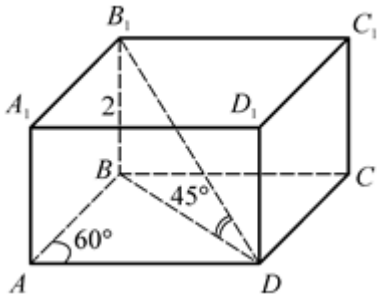


2. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AA_1 = 9$, $AC = 12$, $BC = 20$.

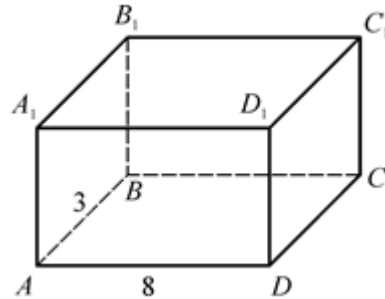
Найдите S_{A_1CB} .



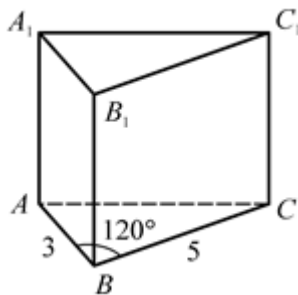
3. Дано: $ABCD$ – ромб, $\angle BAD = 60^\circ$,
 $\angle B_1DB = 45^\circ$, $BB_1 = 2$.
 Найдите $S_{\text{бок}}$.



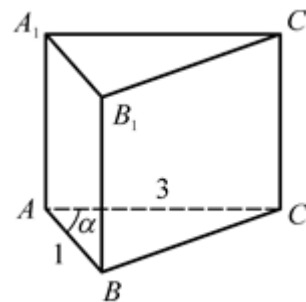
4. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $AB = 3$, $AD = 8$, $S_{\text{бок}} = 220$.
 Найдите AA_1 .



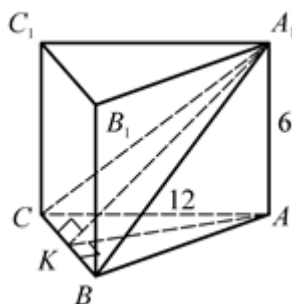
5. Дано: $\triangle ABC$, $AB = 3$, $BC = 5$,
 $\angle ABC = 120^\circ$, $S_{AA_1C_1C} = 35$.
 Найдите AA_1 .



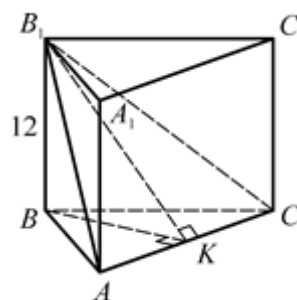
6. Дано: $\triangle ABC$, $AB = 1$, $AC = 3$, $\cos \alpha = \frac{2}{3}$,
 $S_{BB_1C_1C} = 5\sqrt{6}$.
 Найдите AA_1 .



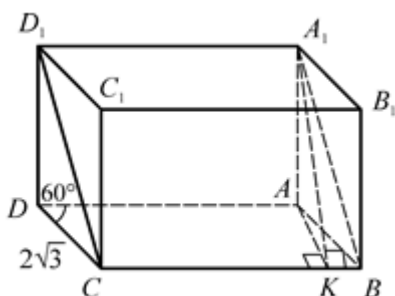
7. Дано: $\triangle ABC$, $AC = 12$,
 $\sin \angle C = \frac{1}{8}$, $AA_1 = 6$.
 Найдите $\text{tg} \angle((ABC), (A_1BC))$.



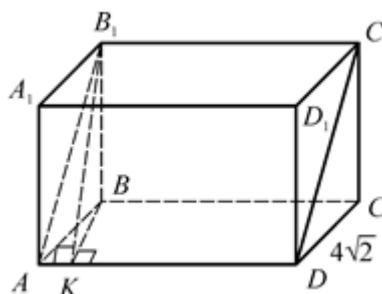
8. Дано: $\triangle ABC$, $S_{\triangle ABC} = 7,5$,
 $AC = 15$, $AA_1 = 12$.
 Найдите $\text{tg} \angle((ABC), (AB_1C))$.



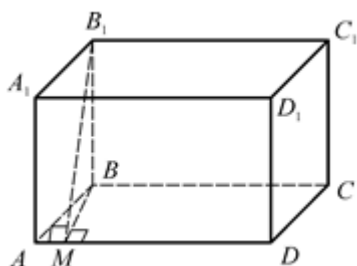
9. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $CD = 2\sqrt{3}$, $\angle ADC = 60^\circ$, $AA_1 = 6$.
 Найдите $\text{tg} \angle((ABC), (A_1BC))$.



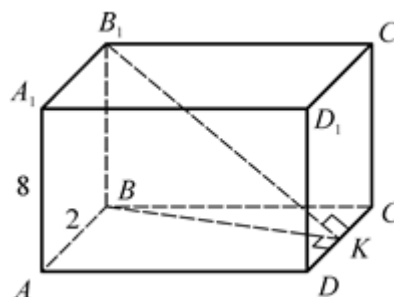
10. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $AB = 4\sqrt{2}$, $AA_1 = 3$,
 $\text{tg} \angle((ABC), (AB_1C_1)) = \frac{3}{4}$.
 Найдите $\angle BAD$.



11. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 10$,
 $\rho(AD, B_1C_1) = 13$, $\rho(AD, BC) = 5$.
 Найдите $S_{\text{бок}}$.



12. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $AB = 2$, $\rho(DC, A_1B_1) = 10$,
 $AA_1 = 8$. Найдите $S_{\text{осн}}$.



Прямая призма

1. $S_{\text{бок}} = 64.$

2. $S_{ACB} = 150.$

3. $S_{\text{бок}} = 16.$

4. $AA_1 = 10.$

5. $AA_1 = 5.$

6. $AA_1 = 5.$

7. $\text{tg}\angle A_1KA = 4.$

8. $\text{tg}\angle B_1KB = 12.$

9. $\text{tg}\angle A_1KA = 2.$

10. $\angle BAD = 45^\circ.$

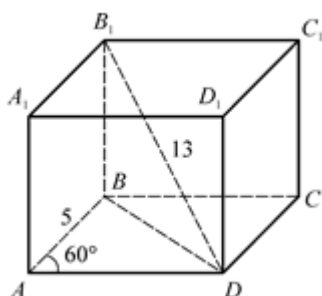
11. $S_{\text{бок}} = 480.$

12. $S_{\text{очн}} = 12.$

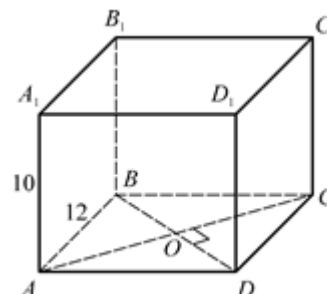
ПРЯМОЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед.

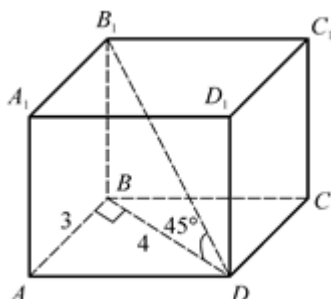
1. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 5$,
 $\angle BAD = 60^\circ$, $B_1 D = 13$.
 Найдите BB_1 .



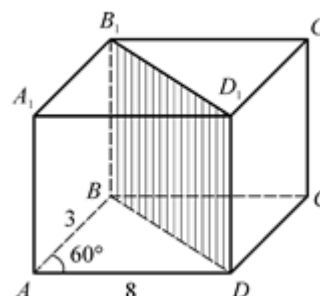
2. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 12$, $BD = 16$, $AA_1 = 10$.
 Найдите $S_{\text{бок}}$.



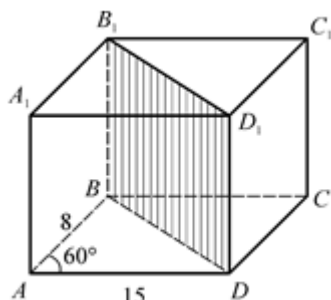
3. Дано: $AB = 3$, $BD = 4$,
 $\angle B_1 DB = 45^\circ$.
 Найдите $S_{\text{бок}}$.



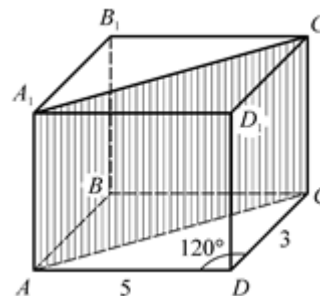
4. Дано: $AB = 3$, $AD = 8$,
 $\angle BAD = 60^\circ$, $S_{BB_1 D_1 D} = 35$.
 Найдите BB_1 .



5. Дано: $AB = 8$, $AD = 15$,
 $\angle BAD = 60^\circ$, $S_{B_1 B D D_1} = 130$.
 Найдите BB_1 .



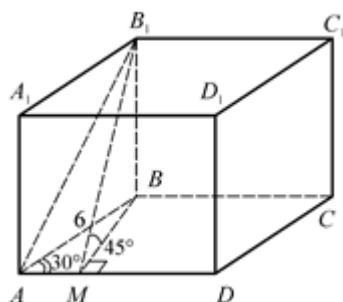
6. Дано: $AD = 5$, $DC = 3$,
 $\angle ADC = 120^\circ$, $S_{AA_1 C_1 C} = 35$.
 Найдите AA_1 .



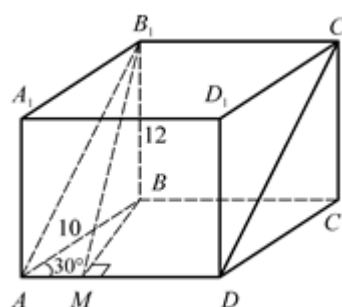
7. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 6$,
 $\angle BAD = 30^\circ$, $BM \perp AD$,
 $\angle B_1 M B = 45^\circ$.

8. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 10$, $BM \perp AD$, $BB_1 = 12$.

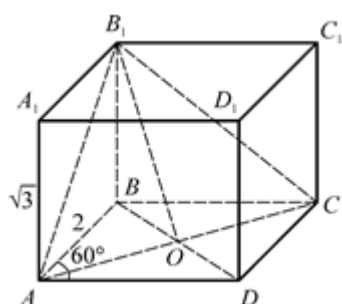
Найдите $S_{\text{бок}}$.



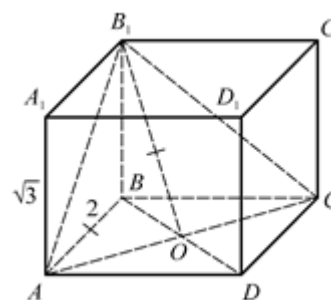
Найдите $S_{AB_1C_1D}$.



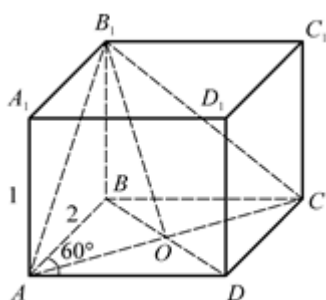
9. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 2$,
 $\angle BAD = 60^\circ$, $AA_1 = \sqrt{3}$.
 Найдите $\rho(B_1, AC)$.



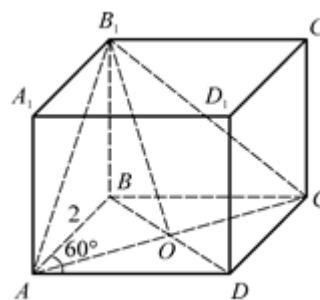
10. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $AB = B_1O = 2$, $AA_1 = \sqrt{3}$.
 Найдите $\angle BAD$.



11. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 2$,
 $\angle BAD = 60^\circ$, $AA_1 = 1$.
 Найдите $\angle((ABC), (AB_1C))$.



12. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 2$,
 $\angle BAD = 60^\circ$, $S_{AB_1C} = \sqrt{6}$.
 Найдите AA_1 .



Прямой параллелепипед

1. $BB_1 = 12$.

2. $S_{\text{бок}} = 400$.

3. $S_{\text{бок}} = 64$.

4. $BB_1 = 5$.

5. $BB_1 = 10$.

6. $AA_1 = 5$.

7. $S_{\text{бок}} = 72$.

8. $S_{AB_1C_1D} = 130$.

9. $B_1O = 2$.

10. $\angle BAD = 60^\circ$.

11. $\angle BOB_1 = 45^\circ$.

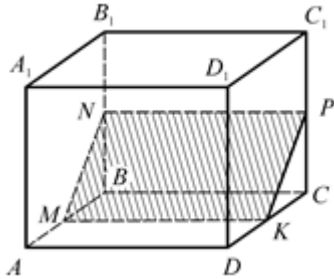
12. $AA_1 = 1$.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед.

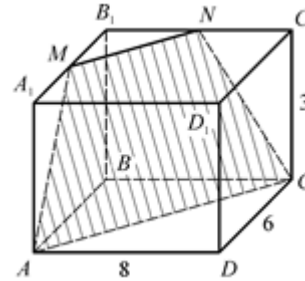
1. Дано: $AD = 4$, $DC = 8$, $CC_1 = 6$,
 $AM = MB$, $BN = NB_1$, $CP = PC_1$,
 $DK = KC$.

Найдите $S_{\text{сеч}}$.



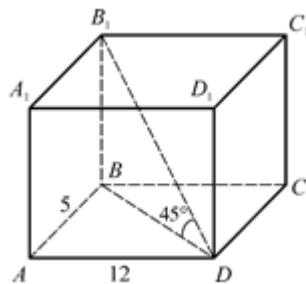
2. Дано: $AD = 8$, $DC = 6$, $CC_1 = 3$,
 $A_1M = MB_1$, $B_1N = NC_1$.

Найдите $P_{\text{сеч}}$.



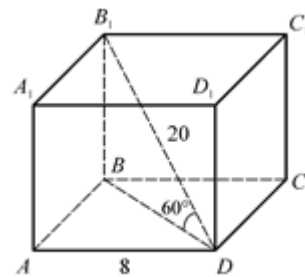
3. Дано: $AB = 5$, $AD = 12$,
 $\angle BDB_1 = 45^\circ$.

Найдите BB_1 .

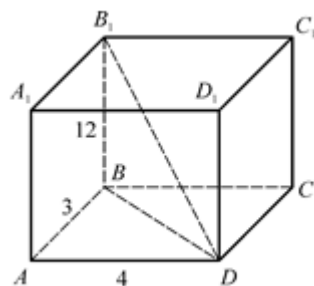


4. Дано: $AD = 8$, $DB_1 = 20$,
 $\angle BDB_1 = 60^\circ$.

Найдите $S_{\text{осн}}$.

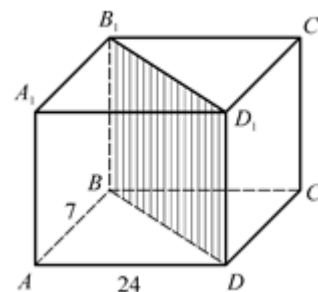


5. Дано: $AB = 3$, $AD = 4$, $BB_1 = 12$.
 Найдите AC_1 .

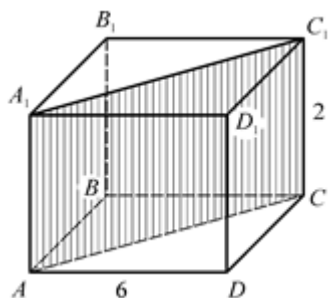


6. Дано: $AB = 7$, $AD = 24$,
 $S_{BB_1 D_1 D} = 50$.

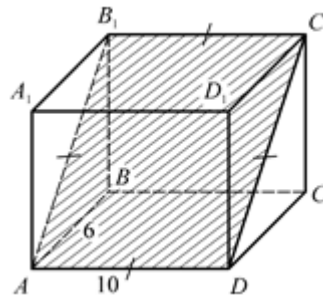
Найдите BB_1 .



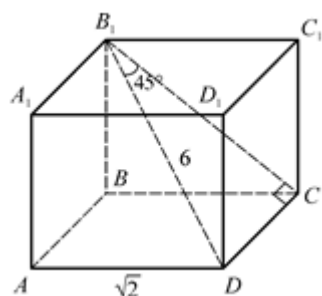
7. Дано: $AD = 6$, $CC_1 = 2$,
 $S_{AA_1C_1C} = 20$.
 Найдите $S_{\text{бок}}$.



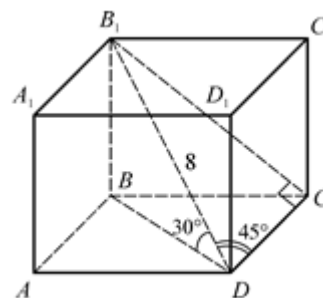
8. Дано: AB_1C_1D – квадрат,
 $AD = 10$, $AB = 6$.
 Найдите $S_{\text{бок}}$.



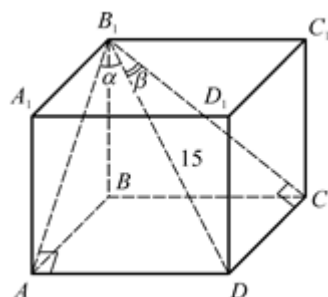
9. Дано: $DB_1 = 6$, $AD = \sqrt{2}$,
 $\angle DB_1C = 45^\circ$.
 Найдите AA_1 .



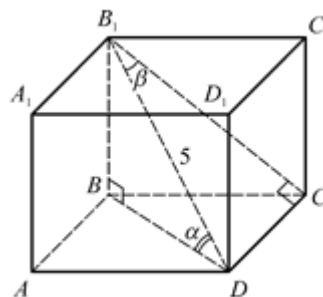
10. Дано: $DB_1 = 8$, $\angle BDB_1 = 30^\circ$, $\angle CDB_1 = 45^\circ$.
 Найдите AD .



11. Дано: $DB_1 = 15$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$,
 $\sin \beta = \frac{2}{5}$. Найдите $S_{\text{осн}}$.



12. Дано: $DB_1 = 5$, $\cos \alpha = 0,5$, $\sin \beta = 0,3$.
 Найдите AD .



Прямоугольный параллелепипед

1. $S_{\text{сеч}} = 20$.

5. $AC_1 = 13$.

9. $AA_1 = 4$.

2. $P_{\text{сеч}} = 20 + 3\sqrt{2}$.

6. $BB_1 = 2$.

10. $AD = 4$.

3. $BB_1 = 13$.

7. $S_{\text{бок}} = 56$.

11. $S_{\text{осн}} = 30$.

4. $S_{\text{осн}} = 48$.

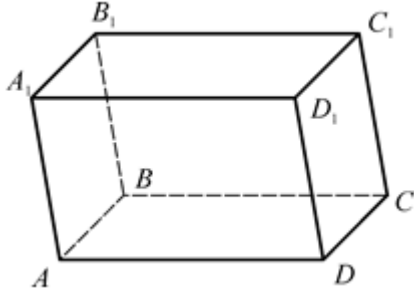
8. $S_{\text{бок}} = 256$.

12. $AD = 2$.

НАКЛОННАЯ ПРИЗМА. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

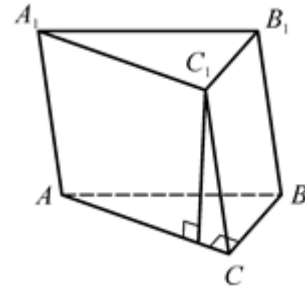
1. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $(AA_1D_1) \perp (ABC)$.

Докажите, что AA_1B_1B и DD_1C_1C –
прямоугольники.



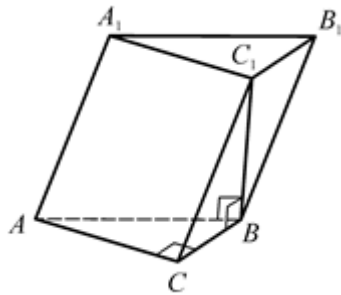
2. Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный,
 $\angle C = 90^\circ$, $(AA_1C_1C) \perp (ABC)$.

Докажите, что BB_1C_1C –
прямоугольник.



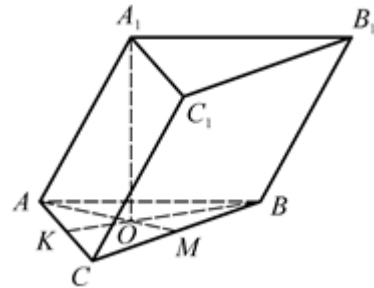
3. Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный,
 $\angle C = 90^\circ$, $C_1B \perp (ABC)$.

Докажите, что AA_1C_1C –
прямоугольник.

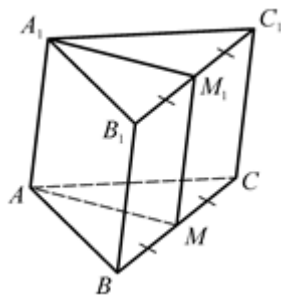


4. Дано: $\triangle ABC$ – правильный, A_1
равноудалена от всех вершин
нижнего основания.

Докажите, что BB_1C_1C –
прямоугольник.

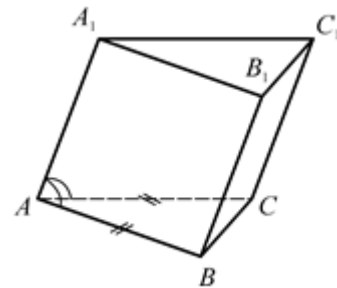


5. Дано: $\triangle ABC$ – правильный,
 AM и A_1M_1 – медианы,
 $(AA_1M_1) \perp (ABC)$. Докажите, что
 BB_1C_1C – прямоугольник.



6. Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный,
 $AB = AC$, $\angle CAA_1 = \angle BAA_1$.

Докажите, что CC_1B_1B –
прямоугольник.

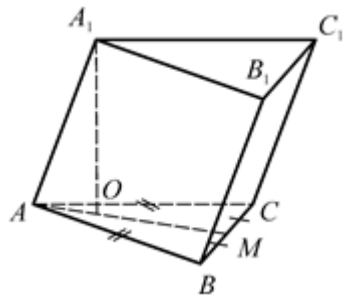


7. Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный,
 $AB = AC$, AM – медиана,
 $A_1O \perp (ABC)$, $O \in AM$.

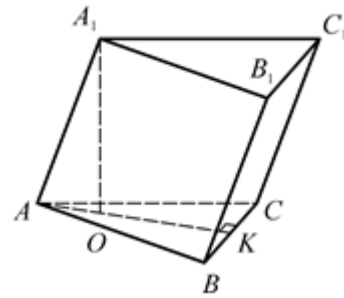
8. Дано: $A_1O \perp (ABC)$, $O \in AK$,
 $AK \perp CB$.

Докажите, что BB_1C_1C –

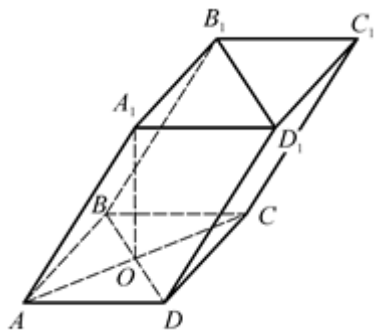
Докажите, что BB_1C_1C –
прямоугольник.



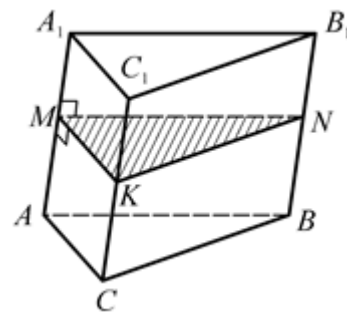
прямоугольник.



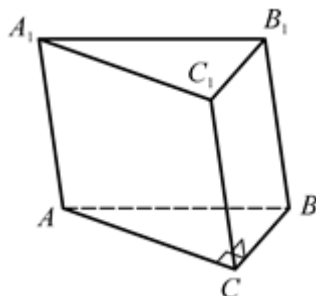
9. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $AC \cap BD = O$, $A_1O \perp CB$.
Докажите, что BB_1D_1D –
прямоугольник.



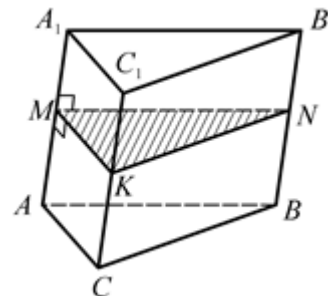
10. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$. Докажите,
что $\rho(CC_1, BB_1) = KN$.



11. Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный,
 $\angle C = 90^\circ$, CC_1B_1B –
прямоугольник.
Докажите, что высота призмы
лежит в (AA_1C_1) .



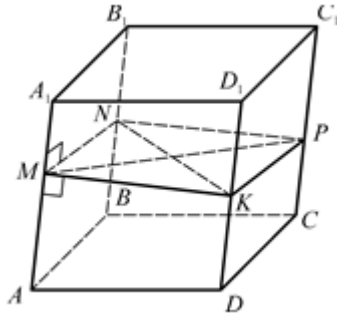
12. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$.
Докажите, что $S_{\text{бок}} = P_{MNK} \cdot AA_1$.



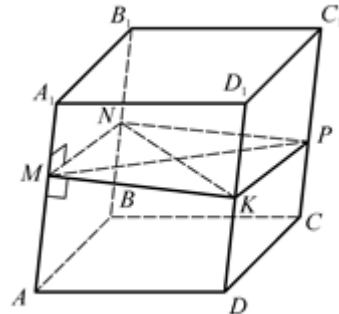
НАКЛОННАЯ ПРИЗМА

$$(S_{\text{бок}} = P_{\perp\text{сеч}} \cdot l)$$

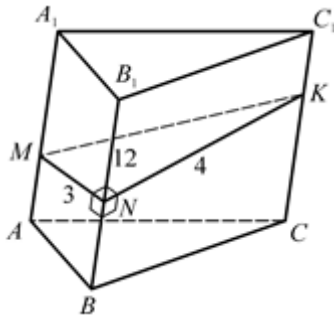
1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед, $AA_1 \perp (MNK)$, $MNPK$ – ромб, $MK = 5$, $AA_1 = 12$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.



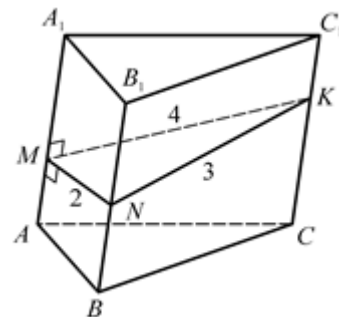
2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед, $AA_1 \perp (MNK)$, $MNPK$ – ромб, $AA_1 = 2$, $S_{\text{бок}} = 40$.
Найдите MN .



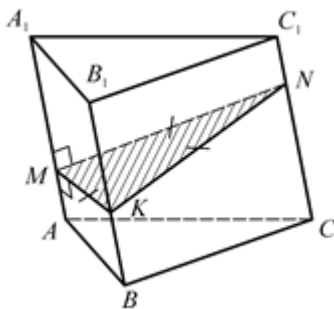
3. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ – призма, $BB_1 \perp MN$, $BB_1 \perp NK$, $MN \perp NK$, $MN = 3$, $NK = 4$, $BB_1 = 12$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.



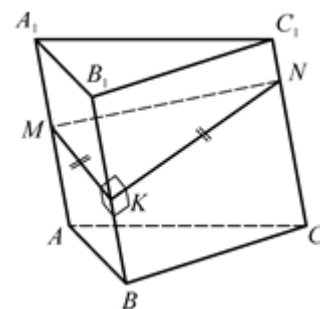
4. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$, $MN = 2$, $NK = 3$, $MN \perp NK$, $S_{\text{бок}} = 45$.
Найдите AA_1 .



5. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ – призма, $AA_1 \perp (MNK)$, $\triangle MNK$ – правильный, $S_{MNK} = 16\sqrt{3}$, $S_{\text{бок}} = 72$.
Найдите AA_1 .



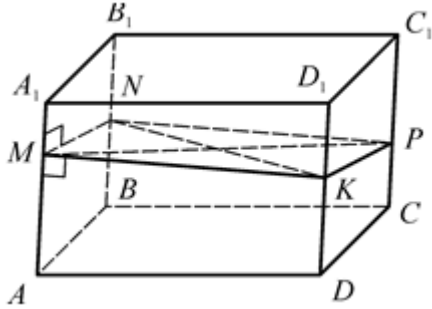
6. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ – призма, $BB_1 \perp MK$, $BB_1 \perp KN$, $MK \perp KN$, $BB_1 = 1$, $MK = KN$, $S_{\text{бок}} = 4\sqrt{2} + 8$.
Найдите S_{MNK} .



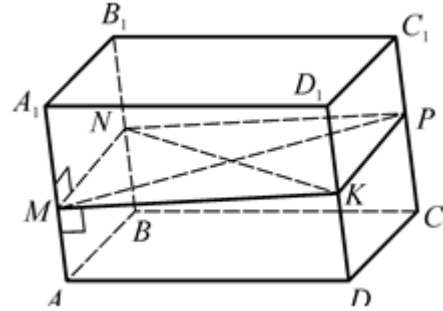
7. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед, $AA_1 \perp (MNK)$, $MNPK$ – квадрат, $S_{MNPK} = 4$, $AA_1 = 5$.

8. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед, $AA_1 \perp (MNK)$, $MNPK$ – квадрат, $S_{MNPK} = S_{\text{бок}}$.

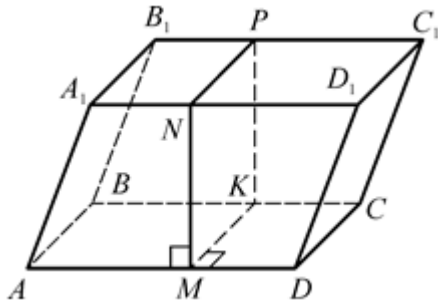
Найдите $S_{\text{бок}}$.



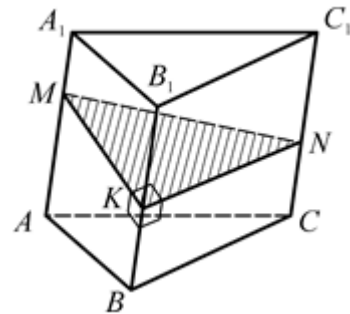
Найдите $MN : AA_1$.



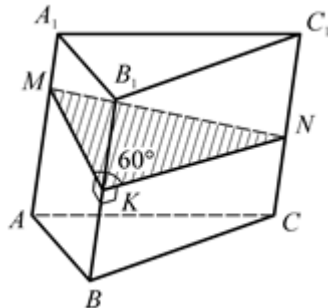
9. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед, $ABCD$ – прямоугольник, $AD \perp (MNP)$, MNP – квадрат, $MN = 3$, $AD = 5$, $AA_1 = 4$.
Найдите $S_{\text{пол}}$.



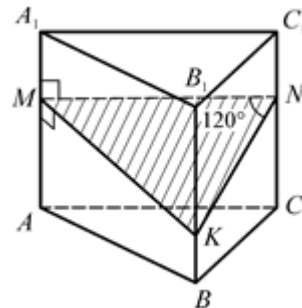
10. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ – призма, $(ABB_1) \perp (BCC_1)$, $S_{ABB_1 A_1} = 30$, $S_{BCC_1 B_1} = 40$, $BB_1 = 10$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.



11. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ – призма, $BB_1 \perp (MNK)$, $S_{AA_1 B_1 B} = 30$, $S_{BB_1 C_1 C} = 80$, $BB_1 = 10$, $\angle((AA_1 B)(BB_1 C)) = 60^\circ$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.



12. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ – призма, $AA_1 \perp (MNK)$, $\angle((AA_1 C_1)(BB_1 C_1)) = 120^\circ$, $S_{AA_1 C_1 C} = 15$, $S_{BB_1 C_1 C} = 25$, $CC_1 = 5$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.



Наклонная призма ($S_{\text{бок}} = P_{\perp \text{сеч}} \cdot l$)

1. $S_{\text{бок}} = 240.$

2. $MN = 5.$

3. $S_{\text{бок}} = 144.$

4. $AA_1 = 5.$

5. $AA_1 = 3.$

6. $S_{MNK} = 8.$

7. $S_{\text{бок}} = 40.$

8. $MN : AA_1 = 4.$

9. $S_{\text{пол}} = 84.$

10. $S_{\text{бок}} = 120.$

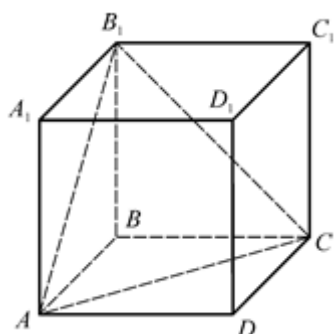
11. $S_{\text{бок}} = 180.$

12. $S_{\text{бок}} = 75.$

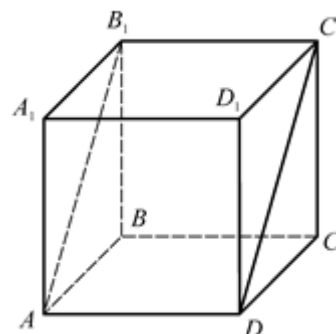
КУБ

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.

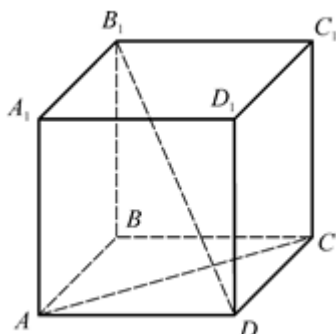
1. Найдите $\angle B_1 A C$.



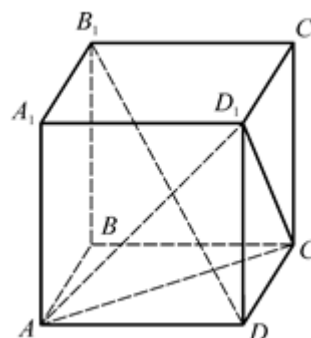
2. Найдите $\angle B_1 A D$.



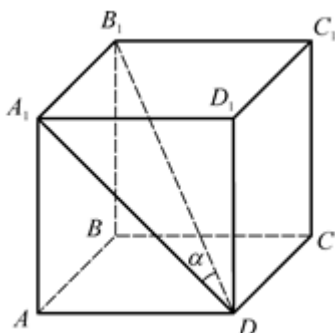
3. Найдите $\angle (B_1 D, A C)$.



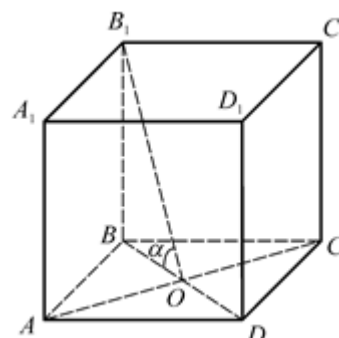
4. Найдите $\angle (B_1 D, (A D_1 C))$.



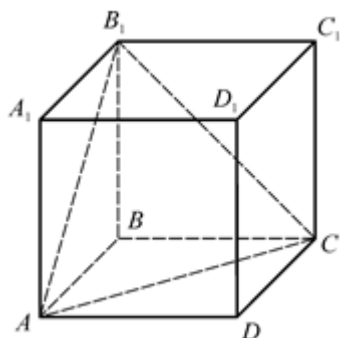
5. Найдите $\sin \alpha$.



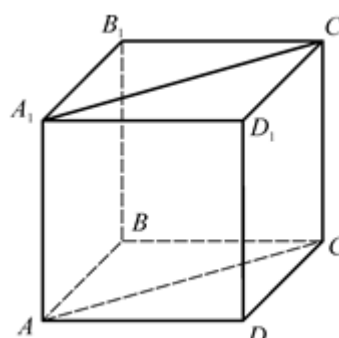
6. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$.



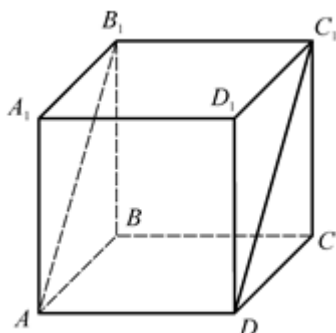
7. Дано: $AD = 3\sqrt{2}$.
Найдите P_{AB_1C} .



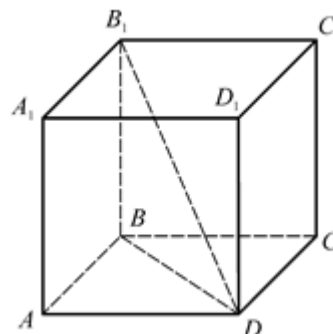
8. Дано: $DB_1 = 4\sqrt{3}$.
Найдите $S_{AA_1C_1C}$.



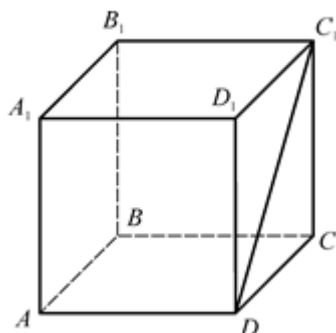
9. Дано: $S_{AB_1C_1D} = 4\sqrt{2}$.
Найдите $S_{\text{пол}}$.



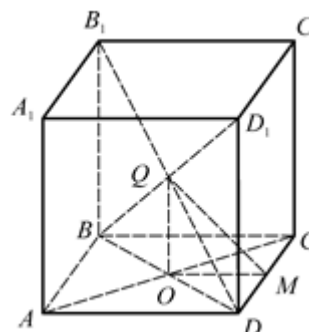
10. Дано: $DB_1 = \sqrt{3}$.
Найдите $S_{\text{пол}}$.



11. Дано: $DC_1 = 2\sqrt{2}$.
Найдите $S_{\text{пол}}$.



12. Дано: $BD_1 \cap B_1D = Q$,
 $AC \cap BD = O$, $DM = MC$,
 $QM = 2\sqrt{2}$. Найдите $S_{\text{пол}}$.



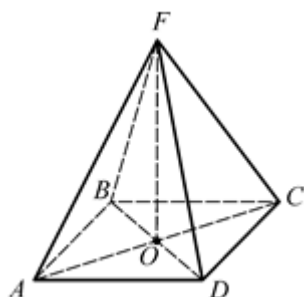
Куб

- $\angle B_1AC = 60^\circ$.
- $\angle B_1AD = 90^\circ$.
- $\angle(B_1D, AC) = 90^\circ$.
- $\angle(B_1D, (AD_1C)) = 90^\circ$.
- $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$.
- $P_{AB_1C} = 18$.
- $S_{AA_1C_1C} = 16\sqrt{2}$.
- $S_{\text{пол}} = 24$.
- $S_{\text{пол}} = 6$.
- $S_{\text{пол}} = 24$.
- $S_{\text{пол}} = 96$.

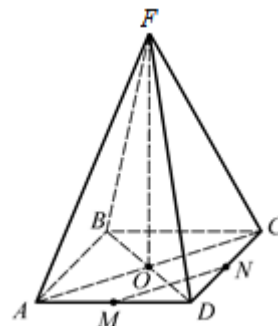
Пирамида

ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

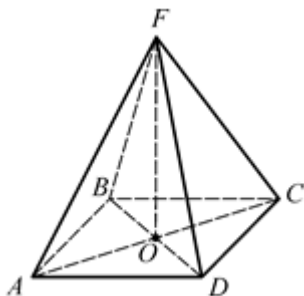
1. Дано: $FABCD$ – правильная пирамида, $FO \perp (ABC)$.
Докажите, что $AD \perp FO$.



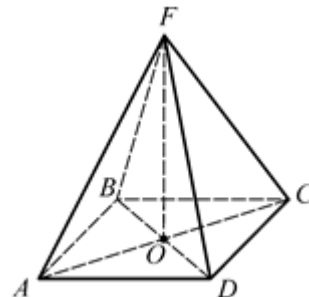
2. Дано: $FABCD$ – правильная пирамида, $MN \parallel AC$.
Докажите, что $MN \perp (BDF)$.



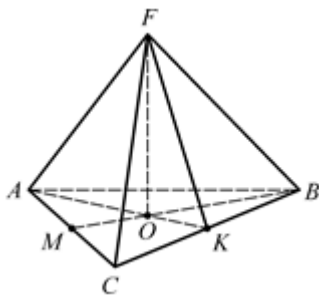
3. Дано: $FABCD$ – правильная пирамида, $FO \perp (ABC)$.
Докажите, что $FD \perp AC$.



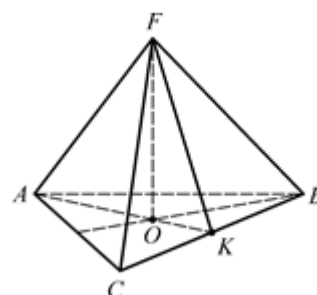
4. Дано: $FABCD$ – правильная пирамида, $FO \perp (ABC)$.
Докажите, что $(BFD) \perp (AFC)$.



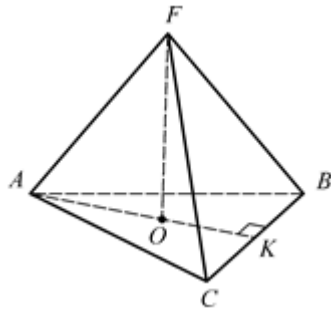
5. Дано: $FABCD$ – правильная пирамида, $FO \perp (ABC)$.
Докажите, что $(ABC) \perp (AFK)$.



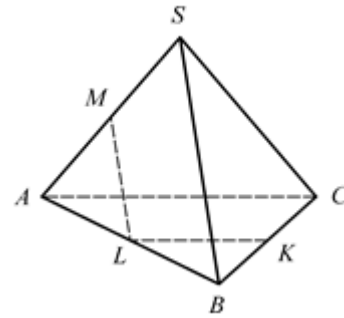
6. Дано: $FABCD$ – правильная пирамида, $FO \perp (ABC)$.
Докажите, что $BC \perp (AKF)$.



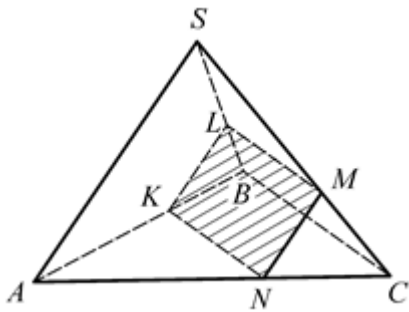
7. Дано: $FABC$ – правильная пирамида, $FO \perp (ABC)$, $AK \perp BC$.
Докажите, что $AF \perp CB$.



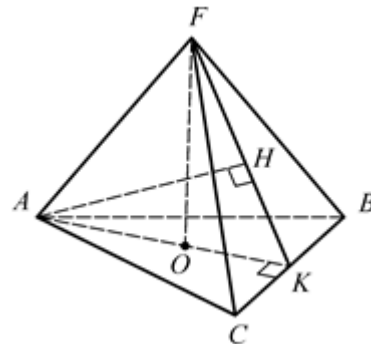
8. Дано: $SABC$ – правильная пирамида, $KL \parallel AC$, $LM \parallel BS$.
Докажите, что $KL \perp LM$.



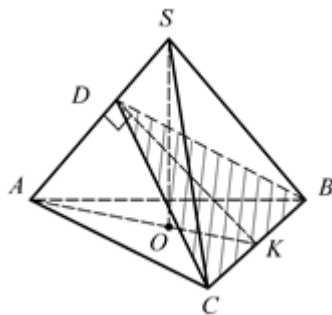
9. Дано: $SABC$ – правильная пирамида, $KN \parallel BC$, $NM \parallel AS$.
Докажите, что сечение $KLMN$ – прямоугольник.



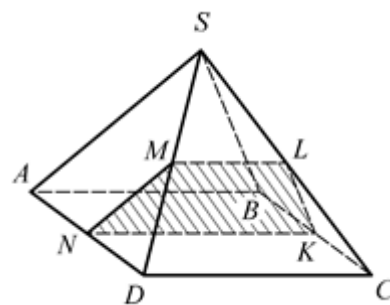
10. Дано: $FABC$ – правильная пирамида, $FO \perp (ABC)$, $AK \perp BC$,
 $AH \perp FK$.
Докажите, что $AH \perp (BCF)$.



11. Дано: $SABC$ – правильная пирамида, SO – высота, $KD \perp AS$.
Докажите, что $AS \perp (BCD)$.



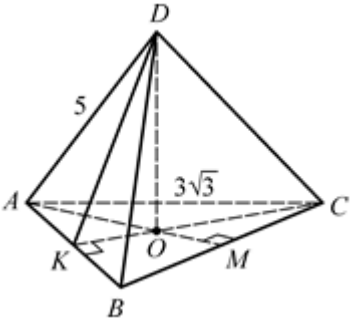
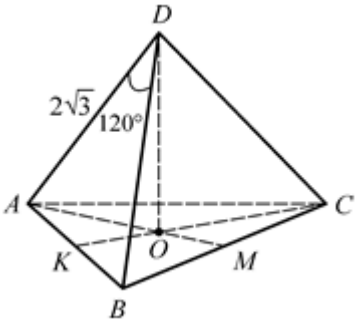
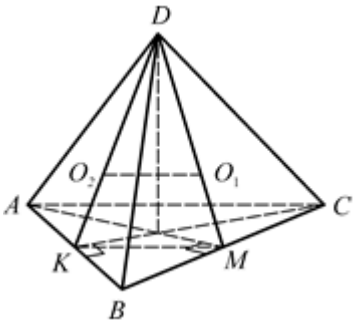
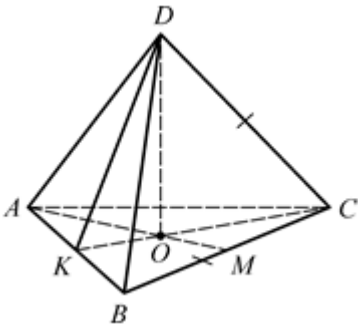
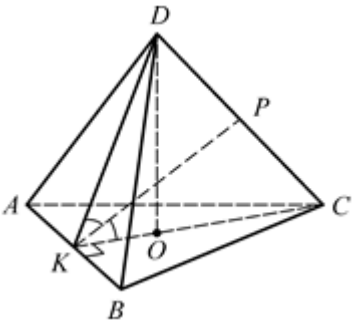
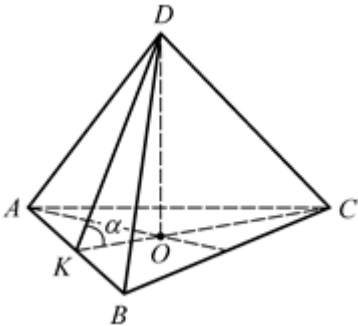
12. Дано: $SABCD$ – правильная пирамида, $KN \parallel BA$, $KL \parallel BS$.
Докажите, что $(KLMN) \parallel (ASB)$,
 $KLMN$ – трапеция.

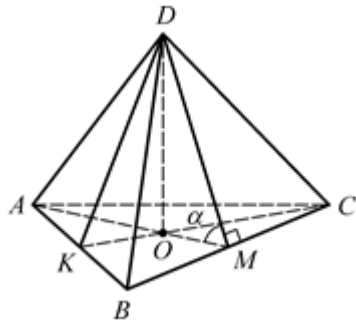


ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

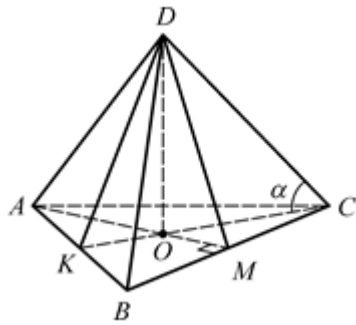
$DABC$ – правильная пирамида. $DO \perp (ABC)$.

$CK \perp AB$, $AM \perp BC$, $BN \perp AC$.

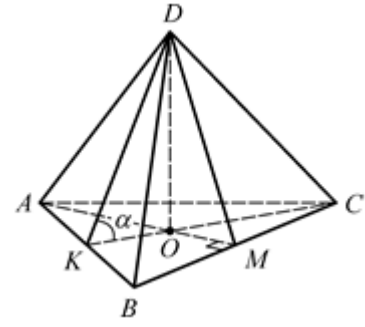
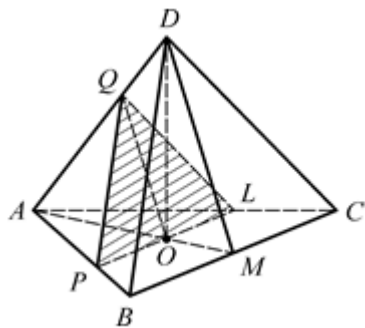
<p>1. $AB = 3\sqrt{3}$, $AD = 5$. Найдите DO.</p> 	<p>2. $AD = 2\sqrt{3}$, $\angle ADB = 120^\circ$. Найдите $P_{\text{осн}}$.</p> 
<p>3. O_1 и O_2 – точки пересечения медиан треугольников ABD и BCD соответственно, $O_1O_2 = 2$. Найдите $S_{\text{осн}}$.</p> 	<p>4. $BC = CD = \sqrt{6}$. Найдите DO.</p> 
<p>5. KP – биссектриса, $DP : PC =$ $= 2 : 3$. Найдите $\angle DKC$.</p> 	<p>6. $AB = \sqrt{3}$, $\text{tg } \alpha = 6$. Найдите DO.</p> 
<p>7. $AB = 10\sqrt{3}$, $\cos \alpha = 0,2$. Найдите апофему DM.</p>	<p>8. $AB = 12\sqrt{3}$, $DO = 8$. Найдите $\cos \alpha$.</p>



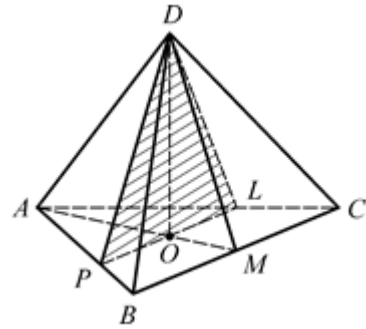
9. $AB = 7\sqrt{3}$, $DO = 24$.
Найдите $\cos \alpha$.



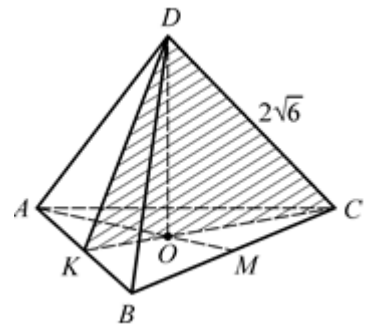
11. $(PQL) \parallel (BCD)$, $O \in (PQL)$,
 $AB = 6$, $DC = \sqrt{153}$.
Найдите S_{PQL} .



10. $PL \parallel BC$, $O \in PL$, $AB = 18$,
 $DM = \sqrt{91}$.
Найдите S_{PDL} .



12. $AB = 6$, $CD = 2\sqrt{6}$.
Найдите S_{DKC} .



Правильная треугольная пирамида

1. $DO = 4$.

2. $P_{\text{очн}} = 18$.

3. $S_{\text{очн}} = 9\sqrt{3}$.

4. $DO = 2$.

5. $\angle DKC = 60^\circ$.

6. $DO = 3$.

7. $DM = 25$.

8. $\cos \alpha = 0,6$.

9. $\cos \alpha = 0,28$.

10. $S_{PDL} = 48$.

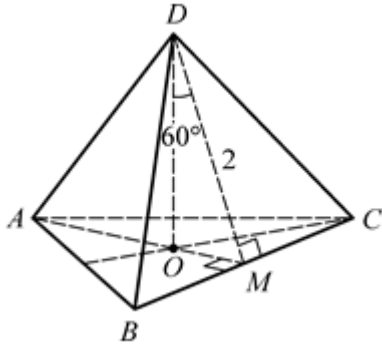
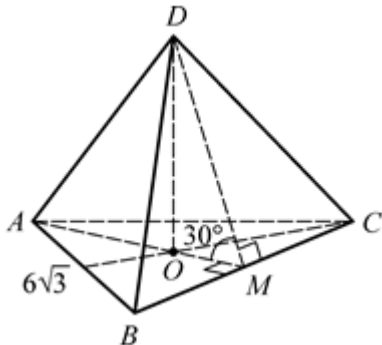
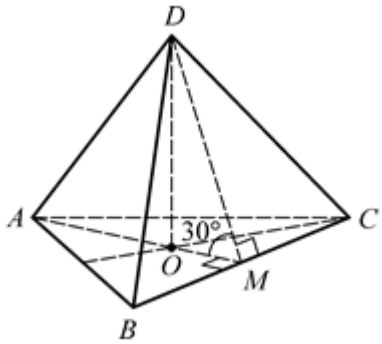
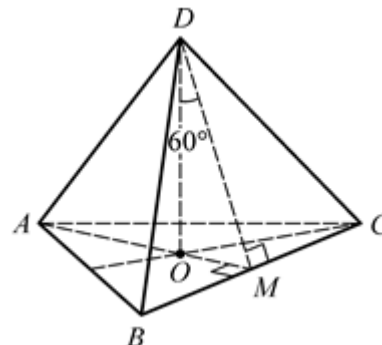
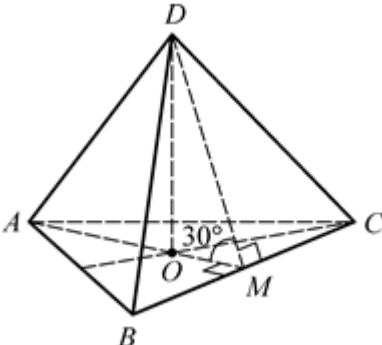
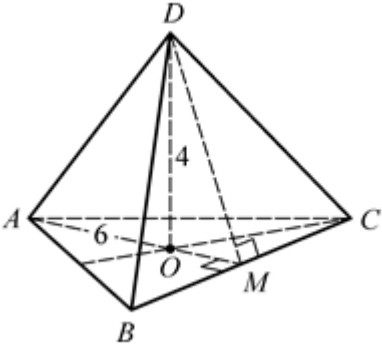
11. $S_{PQL} = 16$.

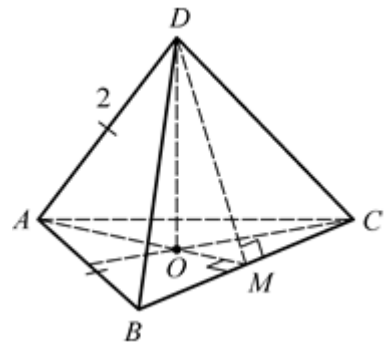
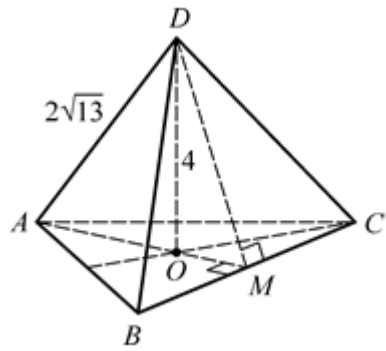
12. $S_{DKC} = 9$.

**ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА.
ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

$DABC$ – правильная пирамида. $DO \perp (ABC)$.

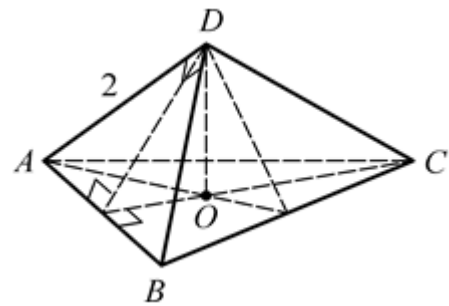
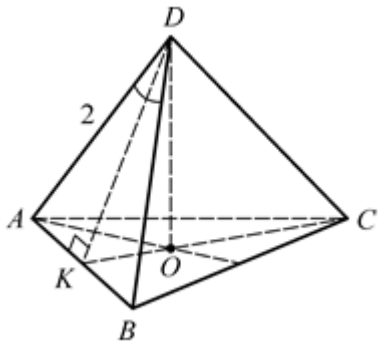
Найдите площадь боковой поверхности.

<p>1. $DM \perp BC$, $DM = 2$, $\angle ODM = 60^\circ$.</p> 	<p>2. $AB = 6\sqrt{3}$, $DM \perp BC$, $\angle DMO = 30^\circ$.</p> 
<p>3. $AM \perp BC$, $AM = 9$, $\angle DMO = 30^\circ$.</p> 	<p>4. $DO = \sqrt{3}$, $DM \perp BC$, $\angle ODM = 60^\circ$.</p> 
<p>5. $DM \perp BC$, $DM = 6$, $\angle AMD = 30^\circ$.</p> 	<p>6. $AO = 6$, $DO = 4$.</p> 
<p>7. $AD = 2\sqrt{13}$, $DO = 4$.</p>	<p>8. $AB = AD = 2$.</p>



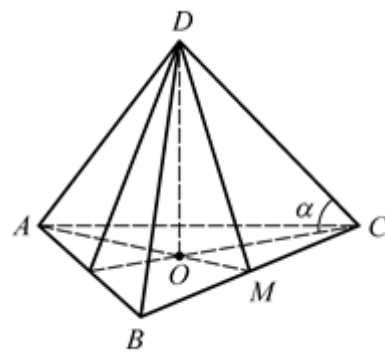
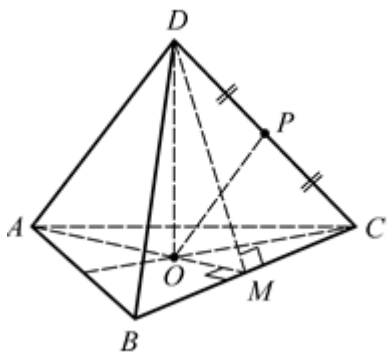
9. $\angle ADB = 120^\circ$, $AD = 2$.

10. $\angle ADB = 90^\circ$, $AD = 2$.



11. $DP = PC$, $OP = \frac{\sqrt{63}}{2}$,
 $BC = 6\sqrt{3}$.

12. $AB = 18$, $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



**Правильная треугольная пирамида.
Площадь боковой поверхности**

1. $S_{\text{бок}} = 18.$

2. $S_{\text{бок}} = 54.$

3. $S_{\text{бок}} = 54.$

4. $S_{\text{бок}} = 54.$

5. $S_{\text{бок}} = 162.$

6. $S_{\text{бок}} = 45\sqrt{3}.$

7. $S_{\text{бок}} = 45\sqrt{3}.$

8. $S_{\text{бок}} = 3\sqrt{3}.$

9. $S_{\text{бок}} = 3\sqrt{3}.$

10. $S_{\text{бок}} = 6.$

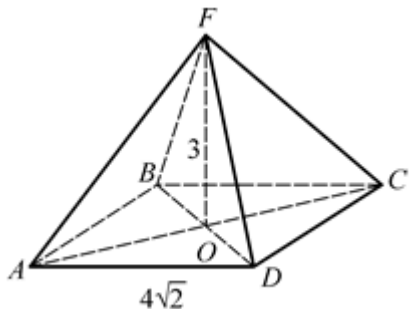
11. $S_{\text{бок}} = 54\sqrt{3}.$

12. $S_{\text{бок}} = 162.$

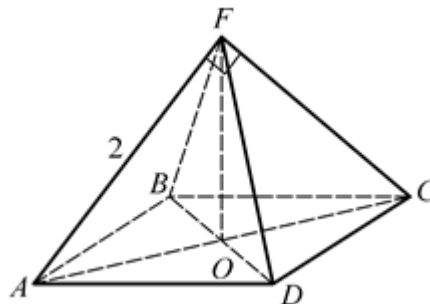
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

$FABCD$ – правильная пирамида. $FO \perp (ABC)$, $FM \perp DC$.

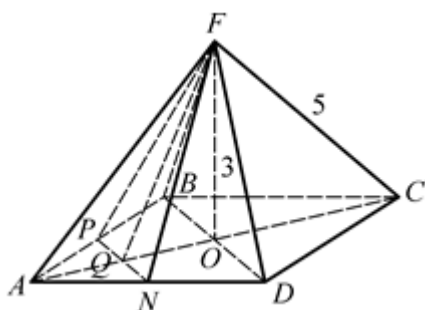
1. $OF = 3$, $AD = 4\sqrt{2}$.
Найдите FC .



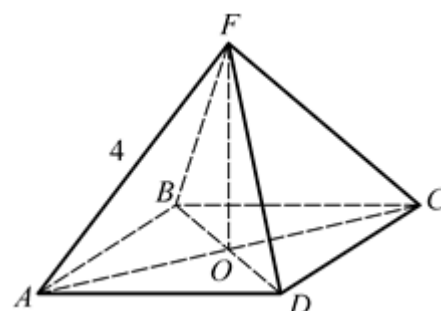
2. $\angle AFC = 90^\circ$, $AF = 2$.
Найдите $S_{\text{осн}}$.



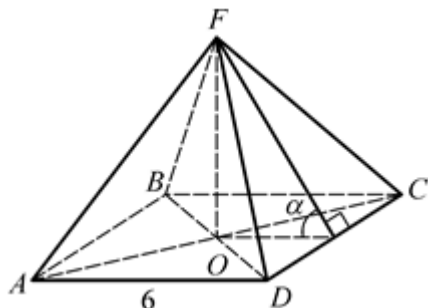
3. $FC = 5$, $FO = 3$, $AP = PB$,
 $AN = ND$.
Найдите S_{NPF} .



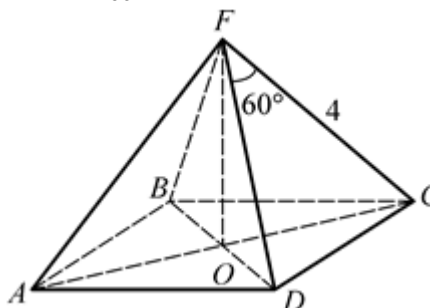
4. $\angle AFC = 60^\circ$, $AF = 4$.
Найдите $S_{\text{осн}}$.



5. $AB = 6$, $\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.

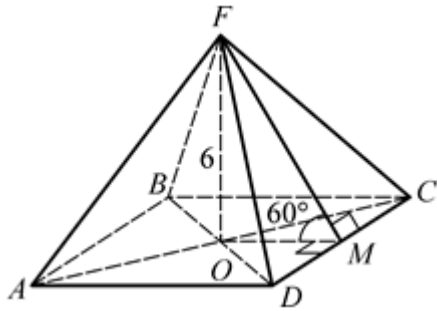


6. $\angle DFC = 60^\circ$, $AF = 4$.
Найдите $S_{\text{бок}}$.



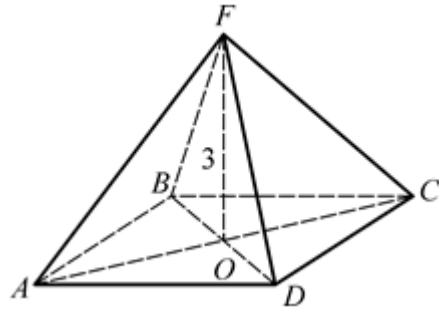
7. $OF = 6, \angle FMO = 60^\circ$.

Найдите $S_{\text{бок}}$.



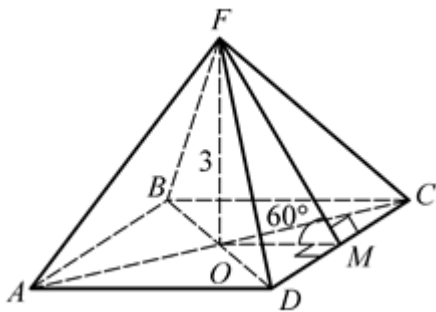
8. $OF = 3, S_{\text{осн}} = 64$.

Найдите $S_{\text{бок}}$.



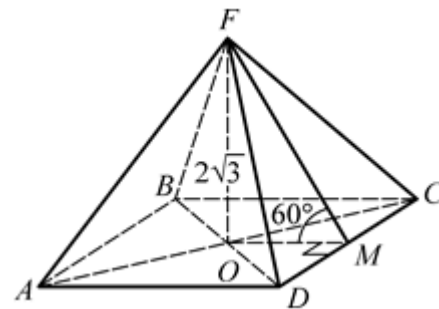
9. $OF = 3, \angle FMO = 60^\circ$.

Найдите $S_{\text{бок}}$.



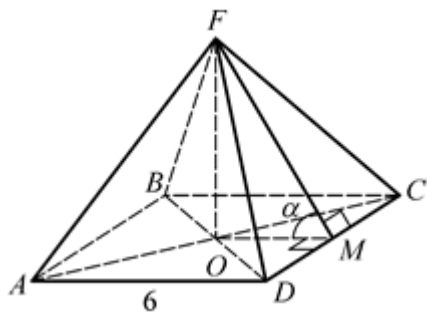
10. $FO = 2\sqrt{3}, \angle FMO = 60^\circ$.

Найдите $S_{\text{пол}}$.



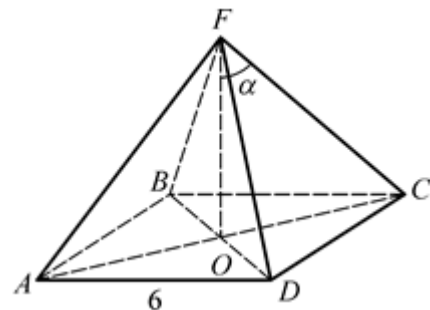
11. $AB = 6, \cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Найдите $S_{\text{бок}}$.



12. $AB = 6, \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Найдите FO .



Правильная четырехугольная пирамида

1. $FC = 5$.

4. $S_{\text{осн}} = 8$.

7. $S_{\text{бок}} = 96$.

10. $S_{\text{пол}} = 96$.

2. $S_{\text{осн}} = 4$.

5. $S_{\text{бок}} = 60$.

8. $S_{\text{бок}} = 80$.

11. $S_{\text{бок}} = 180$.

3. $S_{\text{NPF}} = 2\sqrt{13}$.

6. $S_{\text{бок}} = 16\sqrt{3}$.

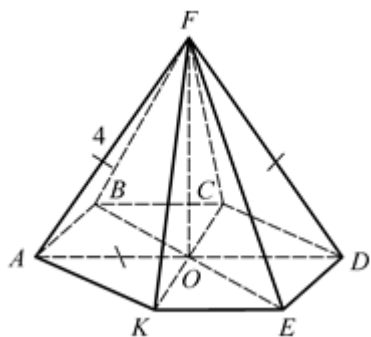
9. $S_{\text{бок}} = 12$.

12. $FO = 6$.

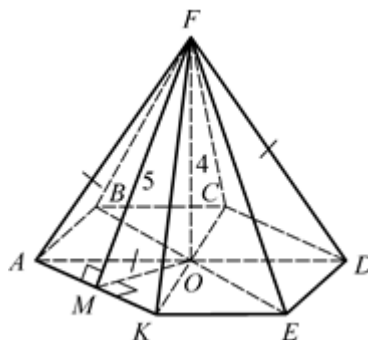
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

$FABCDEK$ – правильная пирамида. $FO \perp (ABO)$.

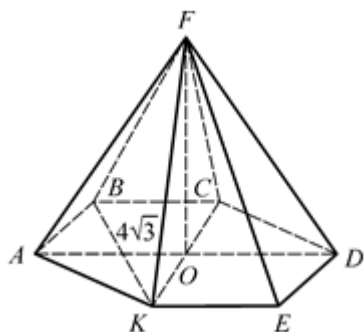
1. Дано: $\triangle AFD$ – равносторонний,
 $AF = 4$.
 Найдите $S_{\text{осн}}$.



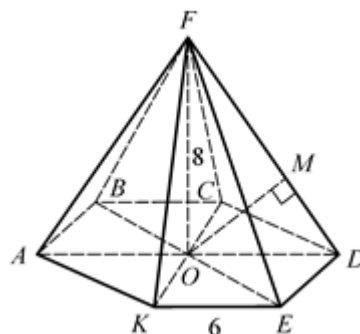
2. Дано: $FM \perp AK$, $FM = 5$, $FO = 4$.
 Найдите AB .



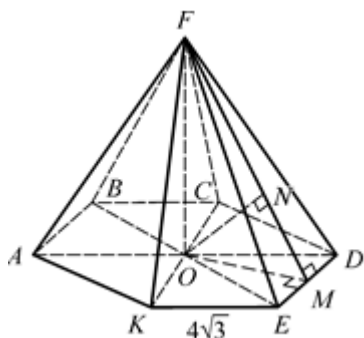
3. Дано: $\triangle CFK$ – равносторонний,
 $BK = 4\sqrt{3}$.
 Найдите FO .



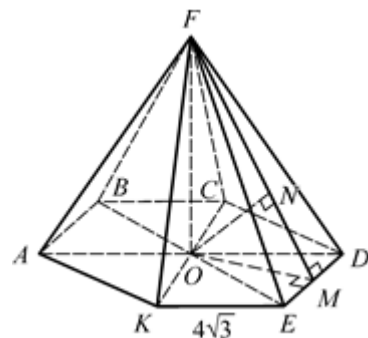
4. Дано: $AB = 6$, $FO = 8$.
 Найдите $\rho(O, FD)$.



5. Дано: $AB = 4\sqrt{3}$, $FO = 8$.
 Найдите $\rho(O, (DFE))$.



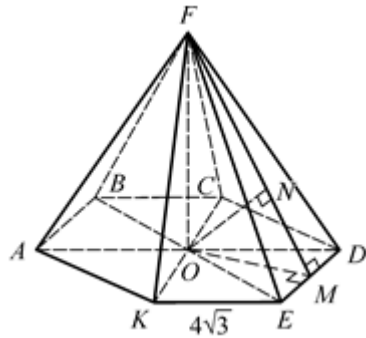
6. Дано: $AB = 4\sqrt{3}$, $FO = 8$.
 Найдите $\rho(KC, (DFE))$.



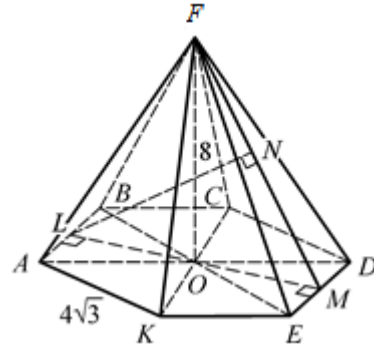
7. Дано: $AB = 4\sqrt{3}$, $FO = 8$.

8. Дано: $AB = 4\sqrt{3}$, $FO = 8$.

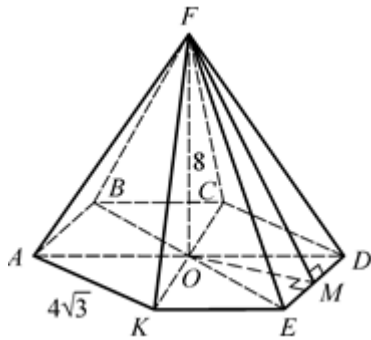
Найдите $\rho(K, (DFE))$.



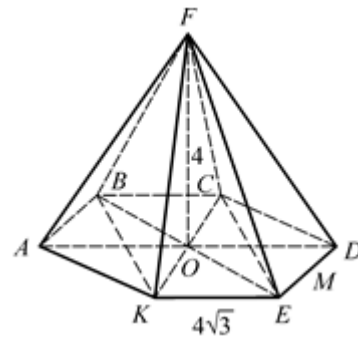
Найдите $\rho(AB, (DFE))$.



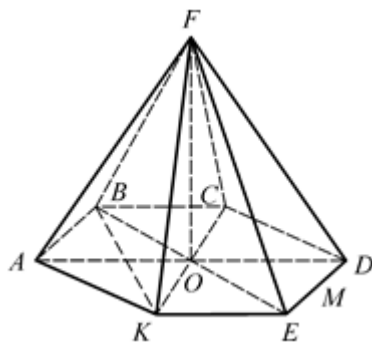
9. Дано: $AB = 4\sqrt{3}$, $FO = 8$.
Найдите $\cos \angle((ABC), (DFE))$.



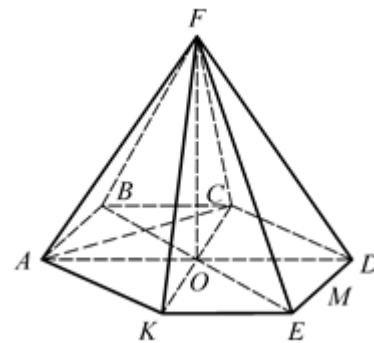
10. Дано: $AB = 4\sqrt{3}$, $FO = 4$.
Найдите $\cos \angle(BK, FE)$.



11. Найдите $\angle(BK, FD)$.



12. Найдите $\angle(AC, FE)$.



Правильная шестиугольная пирамида

1. $S_{\text{очн}} = 6\sqrt{3}$.

2. $AB = 2\sqrt{3}$.

3. $FO = 4\sqrt{3}$.

4. $OM = 4,8$.

5. $ON = 4,8$.

6. $ON = 4,8$.

7. $ON = 4,8$.

8. $LN = 9,6$.

9. $\cos \angle OMF = 0,6$.

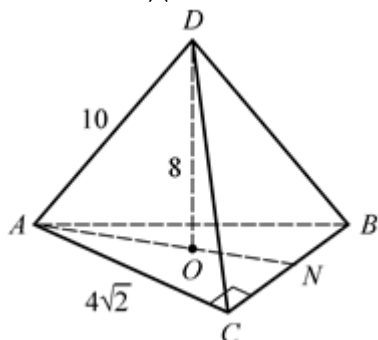
10. $\cos \angle FEC = 0,75$.

11. $\angle(BK, FD) = 90^\circ$.

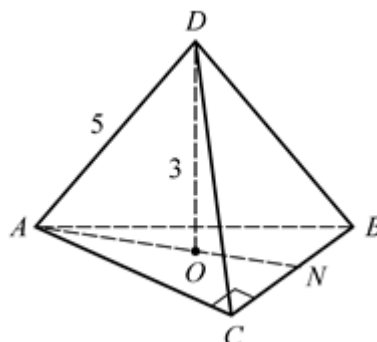
12. $\angle(AC, FE) = 90^\circ$.

НЕПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

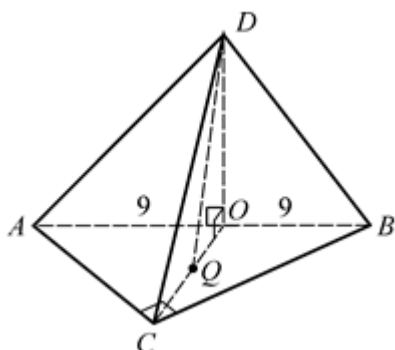
1. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $DO \perp (ABC)$, $DO = 8$, O – точка
 пересечения медиан, $AD = 10$,
 $AC = 4\sqrt{2}$. Найдите BC .



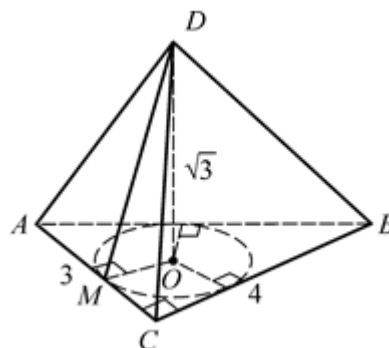
2. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AC = CB$, $DO \perp (ABC)$, $AD = 5$,
 $DO = 3$, O – точка пересечения
 медиан. Найдите $S_{\text{осн}}$.



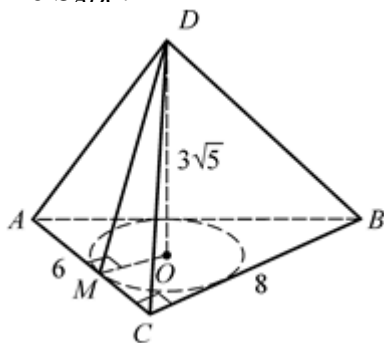
3. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AO = OB = 9$, $DO \perp (ABC)$,
 Q – точка пересечения медиан,
 $DQ = 5$. Найдите DO .



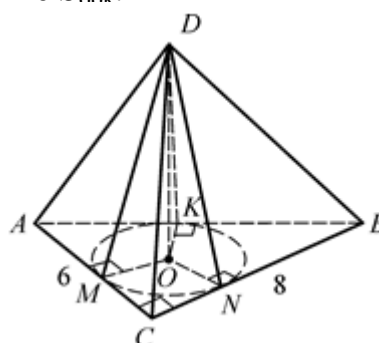
4. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AC = 3$, $BC = 4$, $DO \perp (ABC)$,
 O – центр вписанной окружности,
 $DO = \sqrt{3}$. Найдите $\rho(D, AC)$.



5. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AC = 6$, $BC = 8$, $DO \perp (ABC)$,
 $DO = 3\sqrt{5}$, O – центр вписанной
 окружности.
 Найдите $S_{\text{лпс}}$.



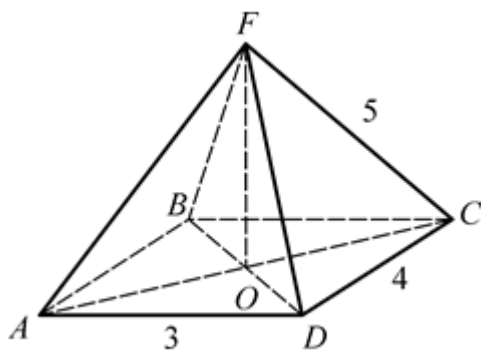
6. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AC = 6$, $BC = 8$, $DO \perp (ABC)$,
 $DO = 3\sqrt{5}$, O – центр вписанной
 окружности.
 Найдите $S_{\text{бок}}$.



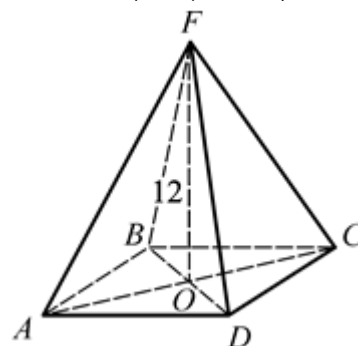
7. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $FO \perp (ABC)$, $AD = 3$, $FC = 5$,

8. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $FO \perp (ABC)$, $FO = 12$, радиус

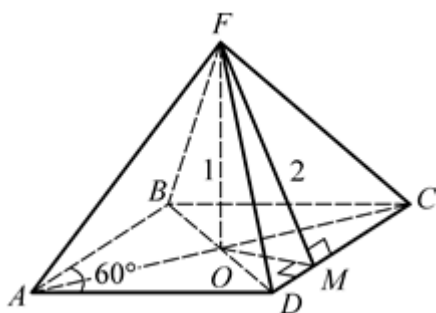
$DC = 4$.
Найдите $\angle AFC$.



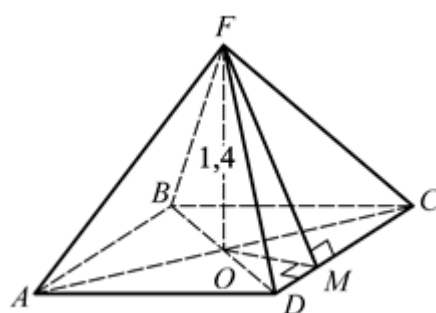
описанной около основания
окружности равен 5.
Найдите $\cos \angle(FD, ABC)$.



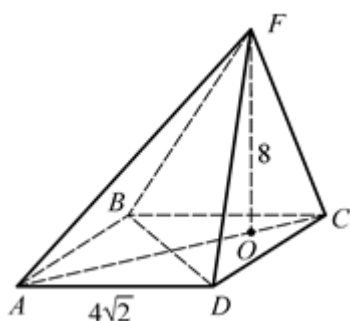
9. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $\angle BAD = 60^\circ$, $FO \perp (ABC)$, $FO = 1$,
 $FM \perp DC$, $FM = 2$.
Найдите AD .



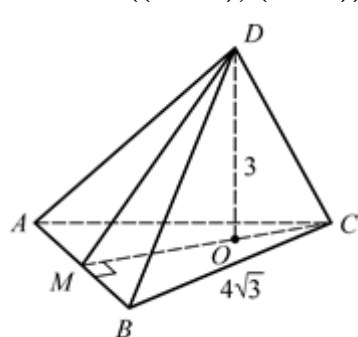
10. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $AC = 12$, $BD = 16$, $FO \perp (ABC)$,
 $FO = 1,4$.
Найдите апофему боковой грани.



11. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $AB = 4\sqrt{2}$, $FO \perp (ABC)$,
 $FO = 8$, $AO : OC = 3 : 1$.
Найдите большее боковое ребро.



12. Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний,
 $AB = 4\sqrt{3}$, $DO \perp (ABC)$,
 $DO = 3$, $CO : OM = 1 : 2$.
Найдите $\cos \angle((ADB), (ABC))$.



Неправильная пирамида

1. $BC = 14$.

2. $S_{\text{OCH}} = 14,4$.

3. $DO = 4$.

4. $DM = 2$.

5. $S_{ADC} = 21$.

6. $S_{\text{6OK}} = 84$.

7. $\angle AFC = 60^\circ$.

8. $\cos \angle FDO = \frac{5}{13}$.

9. $AD = 4$.

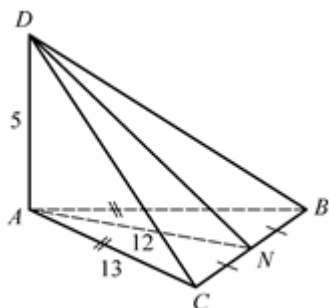
10. $FM = 5$.

11. $AF = 10$.

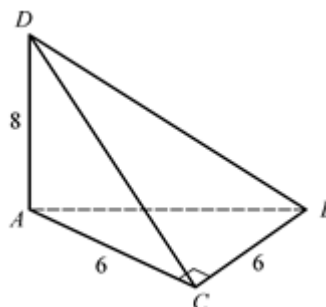
12. $\cos \angle DMO = 0,8$.

**ПИРАМИДА, У КОТОРОЙ ОДНО ИЗ БОКОВЫХ РЕБЕР
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ОСНОВАНИЮ**

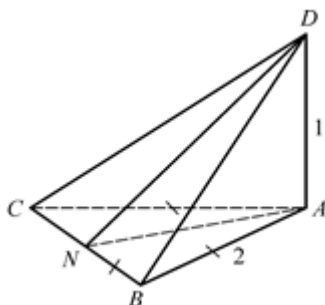
1. Дано: $\triangle ABC$, $AC = AB = 13$,
 $CN = NB$, $AN = 12$, $AD \perp (ABC)$,
 $AD = 5$. Найдите S_{BCD} .



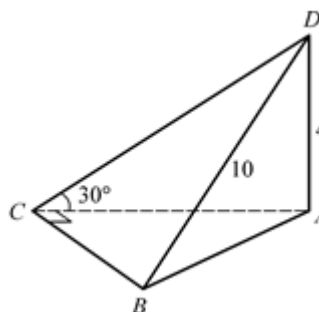
2. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AC = CB = 6$, $AD \perp (ABC)$, $AD = 8$.
Найдите S_{BCD} .



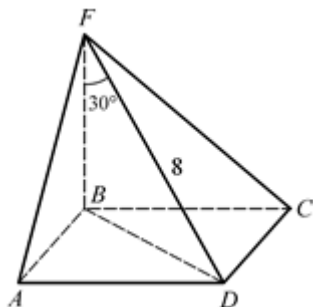
3. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = AC = 2$,
 $AD \perp (ABC)$, $AD = 1$.
Найдите S_{BCD} .



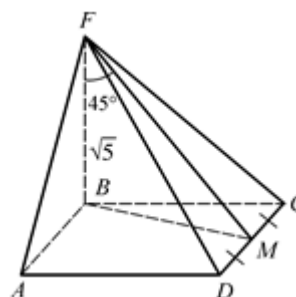
4. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AD \perp (ABC)$, $AD = 4$, $\angle ACD = 30^\circ$,
 $BD = 10$. Найдите S_{BCD} .



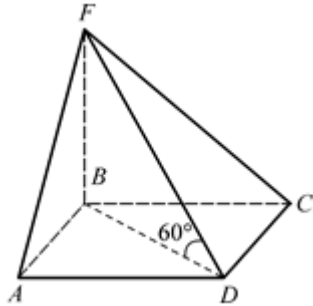
5. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $BF \perp (ABC)$, $DF = 8$, $\angle BFD = 30^\circ$.
Найдите $S_{\text{осн}}$.



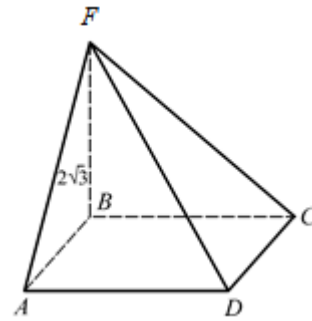
6. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $BF \perp (ABC)$, $BF = \sqrt{5}$,
 $\angle BFM = 45^\circ$, $DM = MC$.
Найдите $S_{\text{осн}}$.



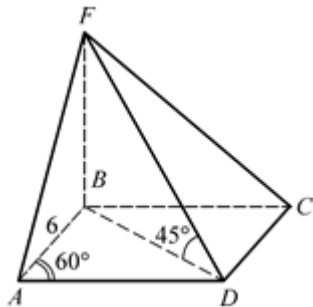
7. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $S_{ABCD} = 6$, $BF \perp (ABC)$,
 $\angle FDB = 60^\circ$. Найдите BF .



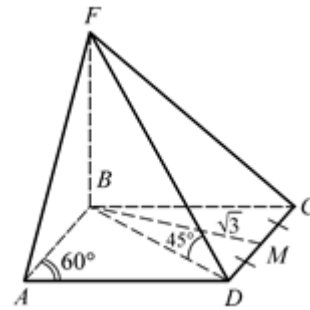
8. Дано: $ABCD$ – квадрат, $S_{ABCD} = 4$,
 $BF \perp (ABC)$, $BF = 2\sqrt{3}$.
 Найдите S_{AFD} .



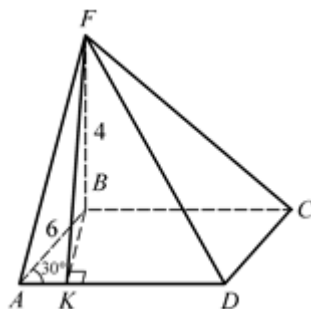
9. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 6$, $BF \perp (ABC)$,
 $\angle BDF = 45^\circ$. Найдите BF .



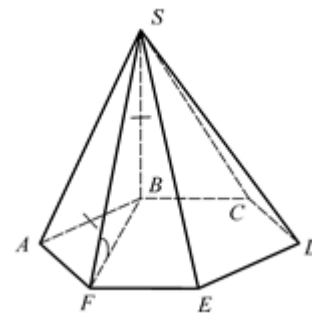
10. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $\angle BAD = 60^\circ$, $BM = \sqrt{3}$, $DM = MC$, $BF \perp (ABC)$,
 $\angle BDF = 45^\circ$.
 Найдите BF .



11. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $\angle BAD = 30^\circ$, $AB = 6$, $BK \perp AD$,
 $BF \perp (ABC)$, $BF = 4$.
 Найдите S_{AFD} .



12. Дано: $ABCDEF$ – правильный шестиугольник,
 $BS \perp (ABC)$, $BS = AB$.
 Найдите $\angle SFB$.

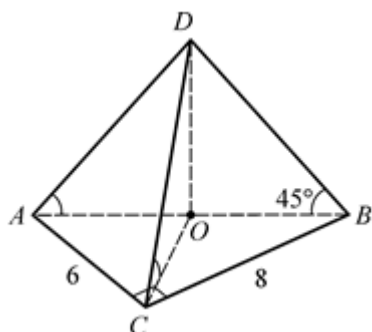


**Пирамида, у которой одно из боковых ребер
перпендикулярно основанию**

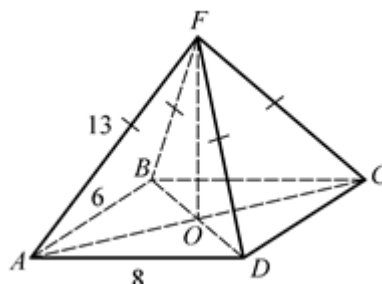
- | | | | |
|---------------------------|--------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1. $S_{BCD} = 65.$ | 4. $S_{BCD} = 24.$ | 7. $BF = 6.$ | 10. $BF = 2.$ |
| 2. $S_{BCD} = 30.$ | 5. $S_{\text{оч}} = 8.$ | 8. $S_{AFD} = 4.$ | 11. $S_{AFD} = 30.$ |
| 3. $S_{BCD} = 2.$ | 6. $S_{\text{оч}} = 4.$ | 9. $BF = 6.$ | 12. $\angle SFB = 30^\circ.$ |

ПИРАМИДА, ОКОЛО ОСНОВАНИЯ КОТОРОЙ ОПИСАНА ОКРУЖНОСТЬ

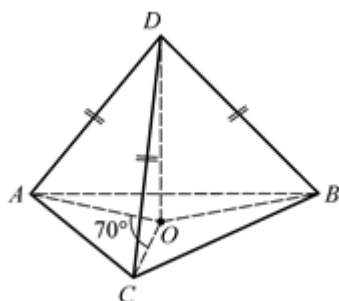
1. Дано: $\angle DAO = \angle DBO = \angle DCO = 45^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $CB = 8$.
Найдите H .



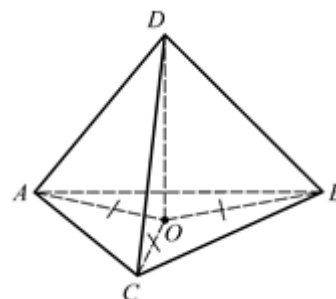
2. Дано: $AF = BF = CF = DF$, $FO \perp (ABC)$, $ABCD$ –
прямоугольник, $AB = 6$, $AD = 8$, $AF = 13$.
Найдите H .



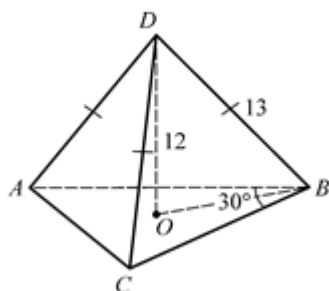
3. Дано: $AD = CD = BD$,
 $DO \perp (ABC)$, $\angle AOC = 70^\circ$.
Найдите $\angle ABC$.



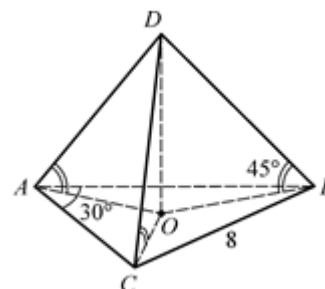
4. Дано: $DO \perp (ABC)$, $AO = OB = OC$,
 $AD + CD + BD = 6$.
Найдите $AD + 2CD + 3BD$.



5. Дано: $AD = BD = CD = 13$,
 $DO \perp (ABC)$, $DO = 12$,
 $\angle ABC = 30^\circ$. Найдите AC .

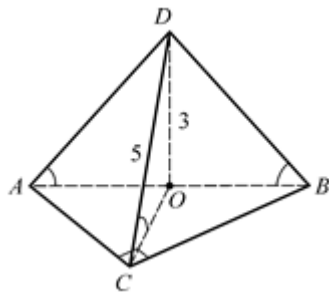


6. Дано: $\angle DAO = \angle DCO = \angle DBO = 45^\circ$,
 $DO \perp (ABC)$, $BC = 8$,
 $\angle CAB = 30^\circ$.
Найдите DO .



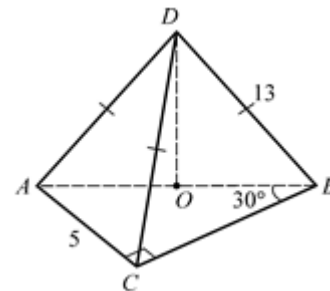
7. Дано: $\angle DAO = \angle DCO = \angle DBO$,
 $DO \perp (ABC)$, $DO = 3$, $DC = 5$, $\angle ACB = 90^\circ$.

Найдите AB .



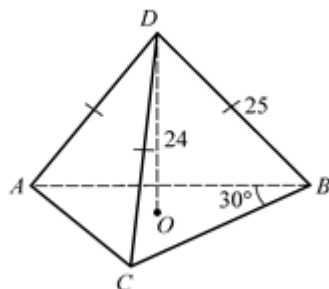
8. Дано: $AD = BD = CD = 13$,
 $DO \perp (ABC)$, $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 5$.

Найдите DO .



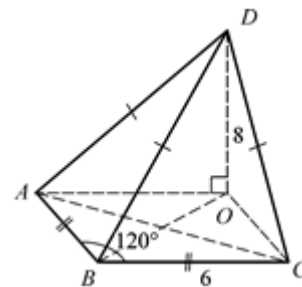
9. Дано: $AD = BD = CD = 25$,
 $DO = 24$, $\angle ABC = 30^\circ$.

Найдите AC .



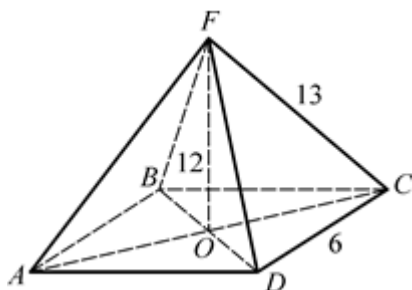
10. Дано: $AD = BD = CD$,
 $AB = BC = 6$, $\angle ABC = 120^\circ$,
 $DO \perp (ABC)$, $DO = 8$.

Найдите AD .



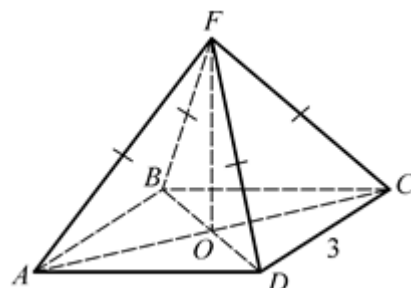
11. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $AB = 6$, $AF = BF = CF =$
 $= DF = 13$, $FO \perp (ABC)$, $FO = 12$.

Найдите $S_{\text{осн}}$.



12. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 3$, $AF = BF = CF = DF$.

Найдите $S_{\text{осн}}$.

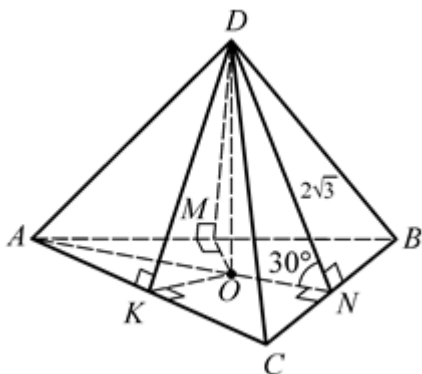


Пирамида, около основания которой описана окружность

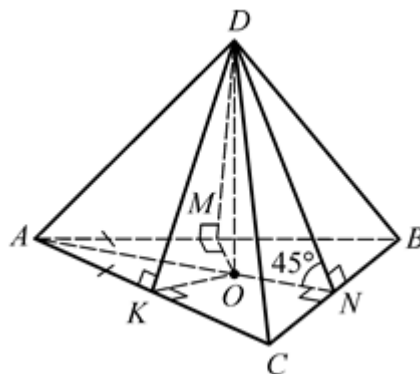
- | | | | |
|------------------------------|--------------------|----------------|-----------------------------|
| 1. $H = 5$. | 4. $\Sigma = 12$. | 7. $AB = 8$. | 10. $AD = 10$. |
| 2. $H = 12$. | 5. $AC = 5$. | 8. $DO = 12$. | 11. $S_{\text{осн}} = 48$. |
| 3. $\angle ABC = 35^\circ$. | 6. $DO = 8$. | 9. $AC = 7$. | 12. $S_{\text{осн}} = 9$. |

**ПИРАМИДА, В ОСНОВАНИЕ КОТОРОЙ
ВПИСАНА ОКРУЖНОСТЬ**

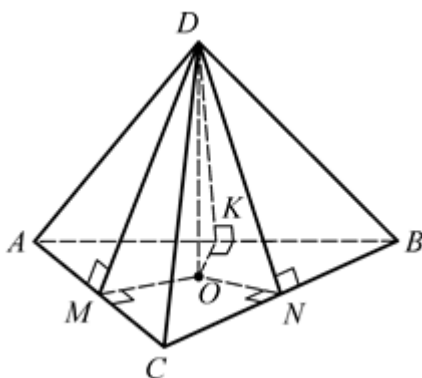
1. Дано: $MD \perp AB$, $ND \perp BC$,
 $KD \perp AC$, $MD = ND = KD = 2\sqrt{3}$,
 $DO \perp (ABC)$, $\angle DKO = 30^\circ$,
 $S_{\text{осн.}} = 48$.
 Найдите $P_{\text{осн.}}$.



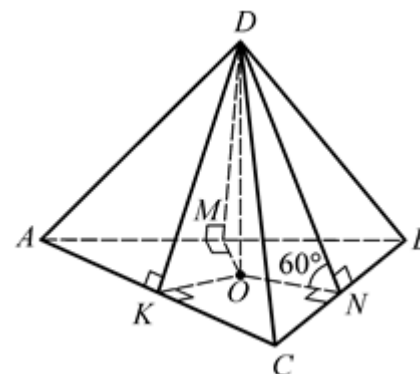
2. Дано: $MD \perp AB$, $ND \perp BC$,
 $KD \perp AC$, $DO \perp (ABC)$, $\angle DMO =$
 $\angle DNO = \angle DKO = 45^\circ$, $AB = AC =$
 10 , $BC = 12$.
 Найдите DO .



3. Дано: $MD \perp AC$, $ND \perp BC$,
 $KD \perp AB$, $DO \perp (ABC)$, $DO = 4$,
 $AB = AC = 10$, $BC = 12$.
 Найдите MD .

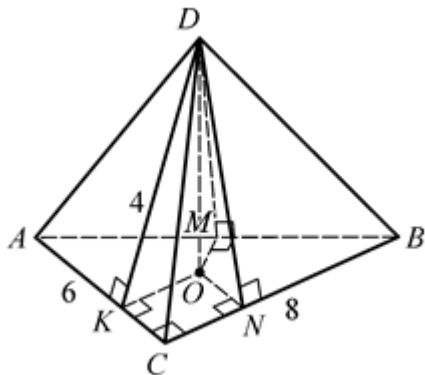


4. Дано: $MD \perp AB$, $ND \perp BC$,
 $KD \perp AC$, $DO \perp (ABC)$, $\angle DMO =$
 $= \angle DNO = \angle DKO = 60^\circ$, $AB =$
 $= FC = 10$, $BC = 12$.
 Найдите $S_{\text{бок.}}$.



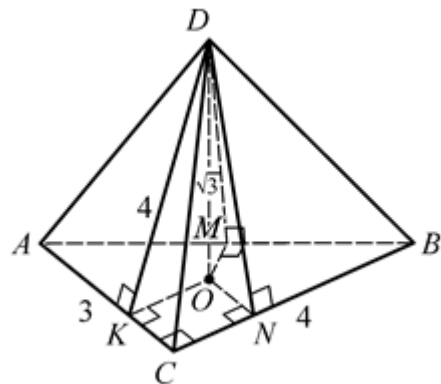
5. Дано: $MD \perp AB$, $ND \perp BC$,
 $KD \perp AC$, $DO \perp (ABC)$, $MD = ND = KD = 4$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$,
 $BC = 8$.

Найдите угол наклона боковых
 граней к (ABC) .



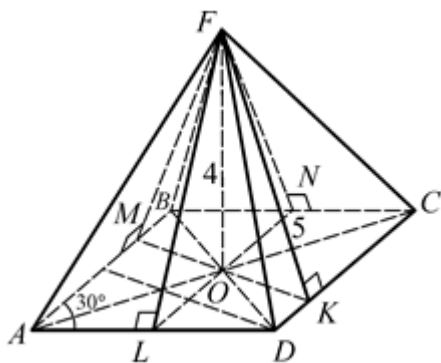
6. Дано: $MD \perp AB$, $ND \perp BC$,
 $KD \perp AC$, $DO \perp (ABC)$, $DO = \sqrt{3}$,
 $MD = ND = KD$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AC = 3$, $BC = 4$.

Найдите $S_{\text{бок}}$.



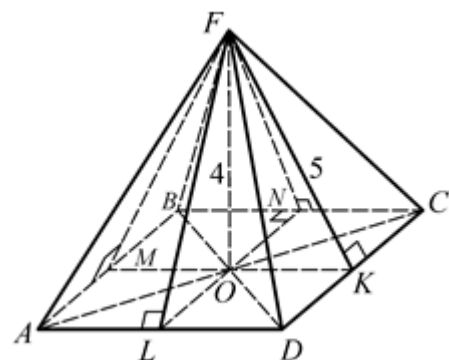
7. Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 $\angle A = 30^\circ$, $MF \perp AB$, $NF \perp BC$,
 $KF \perp DC$, $LF \perp AD$, $MF = NF =$
 $= KF = LF = 5$, $FO \perp (ABC)$,
 $FO = 4$.

Найдите $P_{\text{осн}}$.



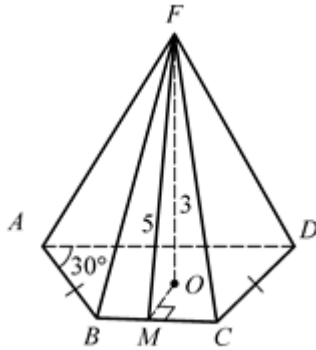
8. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $MF \perp AB$, $NF \perp BC$, $KF \perp DC$,
 $LF \perp AD$, $MF = NF = KF =$
 $= LF = 5$, $FO \perp (ABC)$, $FO = 4$.

Найдите $S_{\text{осн}}$.

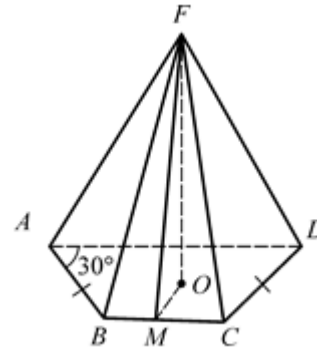


9. Дано: $ABCD$ – трапеция, $AB = CD$, $\angle ABC = 30^\circ$, $FO \perp (ABC)$, O – центр вписанной в трапецию окружности, $FO = 3$, $FM = 5$, $OM \perp BC$.

Найдите $P_{\text{осн}}$.

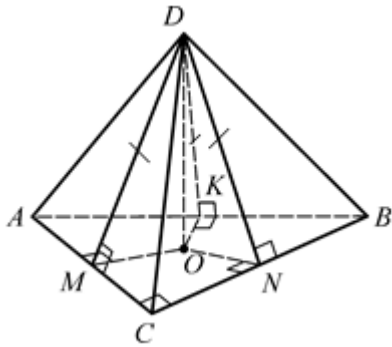


10. Дано: $ABCD$ – трапеция, $AB = CD$, $\angle ABC = 30^\circ$, $P_{ABCD} = 48$, $FO \perp (ABC)$, O – центр вписанной в трапецию окружности, $OM \perp BC$, $FM = 5$. Найдите FO .



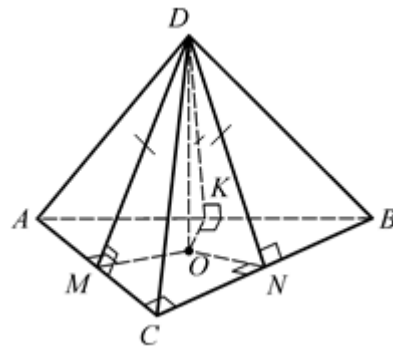
11. Дано: $MD \perp AC$, $ND \perp BC$, $KD \perp AB$, $MD = ND = KD$, $DO \perp (ABC)$, $DO = \sqrt{2}$, $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 12$.

Найдите MD .



12. Дано: $MD \perp AC$, $ND \perp BC$, $KD \perp AB$, $MD = ND = KD$, $DO \perp (ABC)$, $DO = \sqrt{6}$, $AB = 9$, $BC = 13$, $AC = 14$.

Найдите MD .



Пирамида, в основание которой вписана окружность

1. $P_{\text{осн}} = 32$.

4. $S_{\text{бок}} = 96$.

7. $P_{\text{осн}} = 48$.

10. $FO = 4$.

2. $DO = 3$.

5. $\angle DKO = 30^\circ$.

8. $S_{\text{осн}} = 36$.

11. $MD = 3$.

3. $MD = 5$.

6. $S_{\text{бок}} = 12$.

9. $P_{\text{осн}} = 64$.

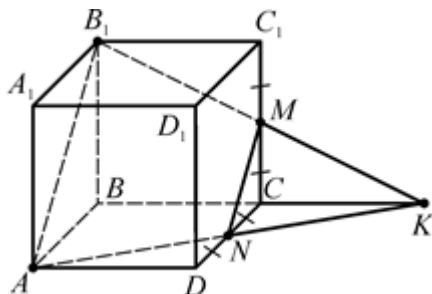
12. $MD = 4$.

Сечения многогранников

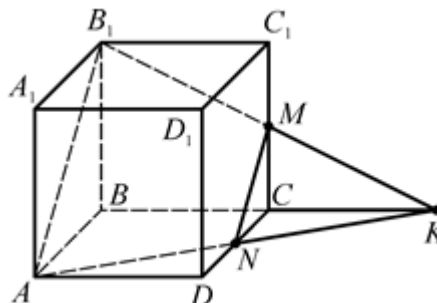
СЕЧЕНИЯ КУБА

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.

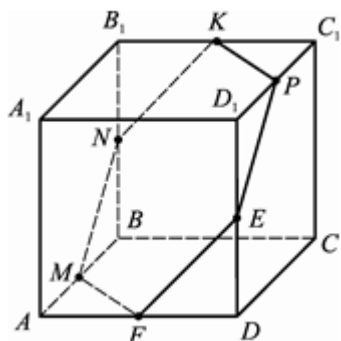
1. Дано: $CM = MC_1 = CN = ND$,
 $S_{AB_1MN} = 36$. Найдите S_{MNK} .



2. Дано: $BC : CK = 3 : 2$, $AB_1 = 15$.
 Найдите MN .

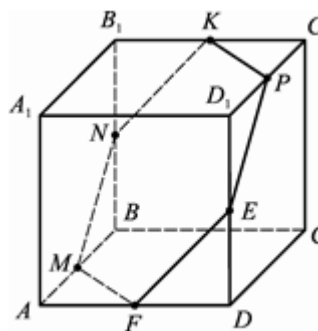


3. Дано: $AM = MB$, $BN = NB_1$,
 $B_1K = KC_1$, $C_1P = PD_1$, $D_1E = ED$,
 $AF = FD$. Найдите $\angle NKP$.

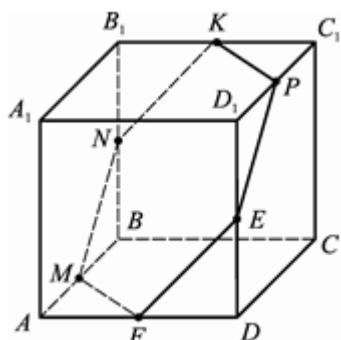


4. Дано: $AM = MB$, $BN = NB_1$,
 $B_1K = KC_1$, $C_1P = PD_1$, $D_1E = ED$,

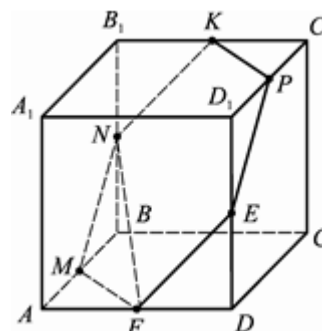
$AF = FD$, $S_{MNKPEF} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
 Найдите S_{ABCD} .



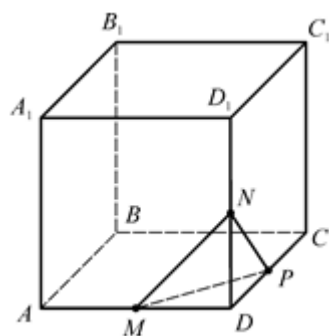
5. Дано: $AM = MB$, $BN = NB_1$,
 $B_1K = KC_1$, $C_1P = PD_1$, $D_1E = ED$,
 $AF = FD$, $S_{ABCD} = 4$.
 Найдите S_{MNKPEF} .



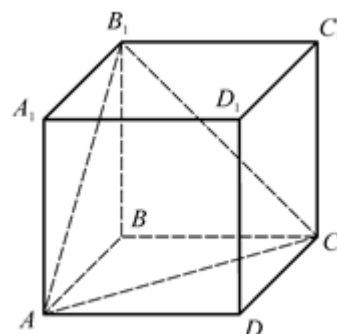
6. Дано: $AM = MB$, $BN = NB_1$,
 $B_1K = KC_1$, $C_1P = PD_1$, $D_1E = ED$,
 $AF = FD$, $NF = \sqrt{6}$.
 Найдите AB .



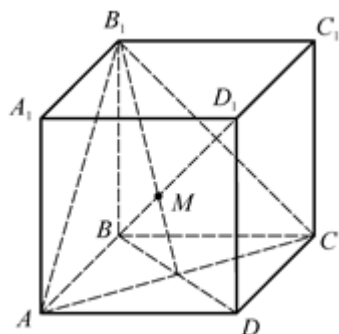
7. Дано: $AM = MD$, $DN = ND_1$,
 $DP = PC$, $AB = 2\sqrt{2}$.
 Найдите S_{MNP} .



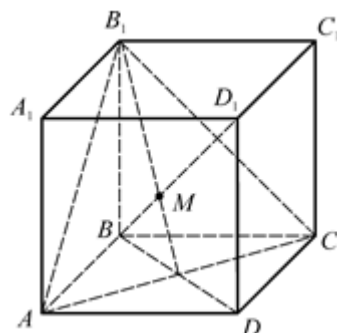
8. Дано: $AB = \sqrt{2}$.
 Найдите S_{AB_1C} .



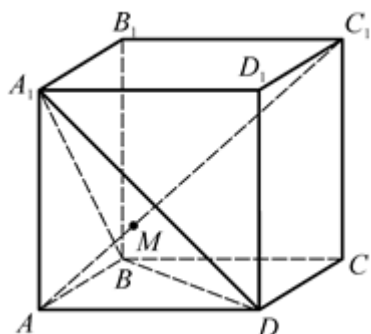
9. Дано: $BD_1 \cap (AB_1C) = M$.
 Найдите $\angle(BD_1, (AB_1C))$.



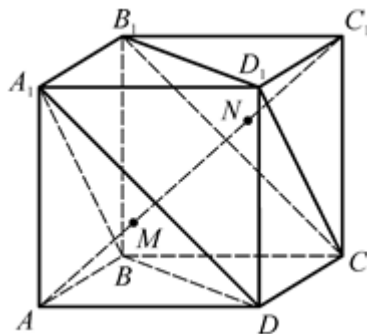
10. Дано: $BD_1 \cap (AB_1C) = M$,
 $AB = \sqrt{3}$.
 Найдите $\rho(D_1, (AB_1C))$.



11. Дано: $AC_1 \cap (A_1BD) = M$,
 $DB_1 = 6$.
 Найдите $\rho(A, (A_1BD))$.



12. Дано: $AC_1 \cap (A_1BD) = M$,
 $AC_1 \cap (B_1CD_1) = N$, $AC_1 = 30$.
 Найдите MN .



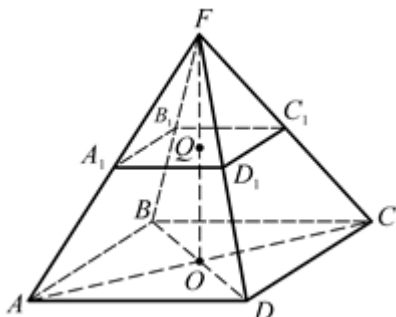
Сечения куба

- $S_{MNK} = 12.$
- $MN = 6.$
- $\angle NKP = 120^\circ.$
- $S_{ABCD} = 2.$
- $S_{\text{сеч}} = 3\sqrt{3}.$
- $AB = 2.$
- $S_{MNP} = \sqrt{3}.$
- $S_{\text{сеч}} = \sqrt{3}.$
- $\alpha = 90^\circ.$
- $D_1M = 2.$
- $AM = 2.$
- $MN = 10.$

СЕЧЕНИЯ В ПИРАМИДЕ. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

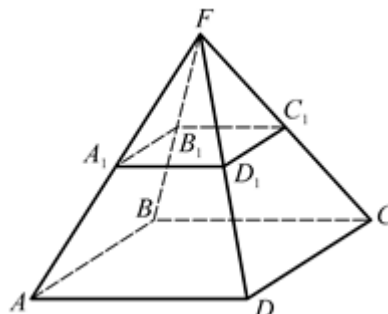
1. Дано: $FABCD$ – пирамида, $ABCD$ – квадрат, $AB = 6$, $(A_1B_1C_1D_1) \parallel (ABCD)$, $Q \in (A_1B_1C_1D_1)$, $FQ = QO$, $FO \perp (ABCD)$.

Найдите $S_{A_1B_1C_1D_1}$.



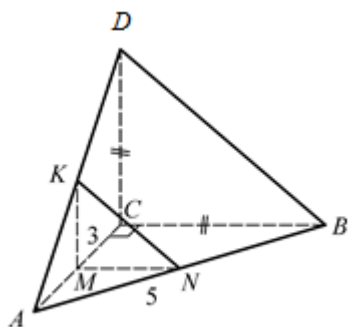
2. Дано: $FABCD$ – пирамида, $ABCD$ – квадрат, $AB = 5$, $(A_1B_1C_1D_1) \parallel (ABCD)$, $AA_1 : A_1F = 3 : 2$.

Найдите $S_{A_1B_1C_1D_1}$.



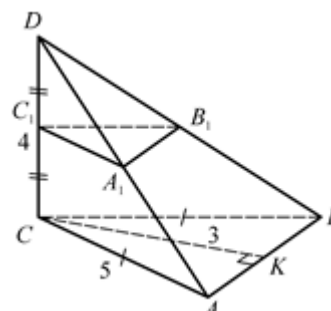
3. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 5$, $CD \perp (ABC)$, $CD = CB$, $AM = MC$, $AN = NB$, $(MNC) \parallel (BCD)$.

Найдите S_{MNC} .

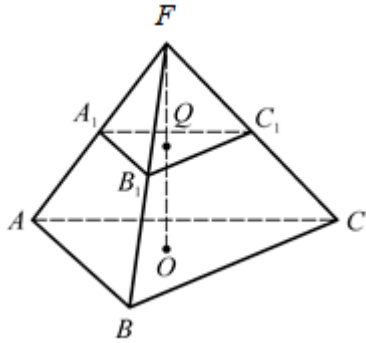


4. Дано: $\triangle ABC$, $CD \perp (ABC)$, $CD = 4$, $AC = BC = 5$, $CK \perp AB$, $CK = 3$, $CC_1 = C_1D$, $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

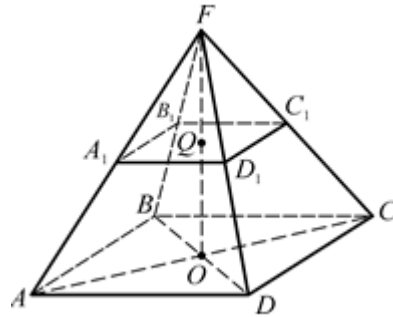
Найдите $S_{\text{бок. } DA_1B_1C_1}$.



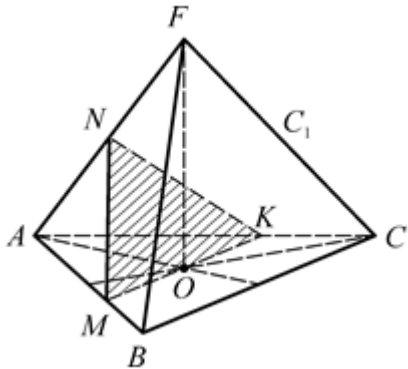
5. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$, $FO \perp (ABC)$,
 $FO \cap (A_1B_1C_1) = Q$, $FQ : FO =$
 $= 1 : 2$, $S_{\text{бок.}FABCD} = 32$.
 Найдите $S_{\text{бок.}FA_1B_1C_1}$.



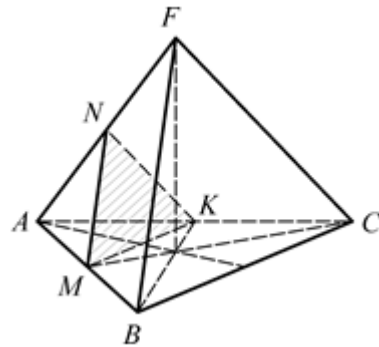
6. Дано: $FABCD$ – пирамида,
 $(A_1B_1C_1D_1) \parallel (ABCD)$, $AA_1 : A_1F = 1$,
 $S_{\text{бок.}FA_1B_1C_1D_1} = 16$.
 Найдите $S_{\text{бок.} \text{усеч. шир.}}$



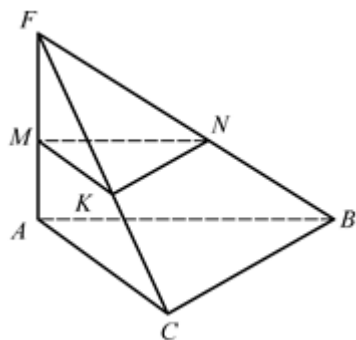
7. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $AB = AC = BC = AF = BF = CF = 6$,
 $FO \perp (ABC)$, $O \in (MNK)$, $(MNK) \parallel$
 $\parallel (BCF)$.
 Найдите S_{MNK} .



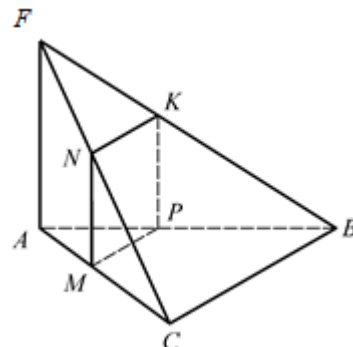
8. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $AB = AC = BC = AF = BF = CF = 8$,
 $AM = MB$, $AK = KC$, $(MNK) \parallel (BCF)$.
 Найдите S_{MNK} .



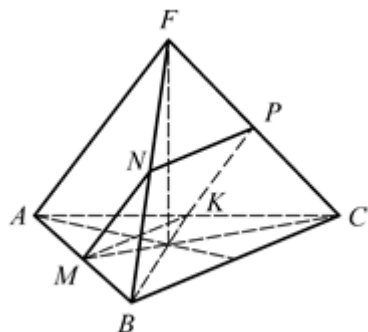
9. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $AF \perp (ABC)$, $AF \perp (MNC)$,
 $AB = AC = CB = 6$, $AM : AF = 1 : 3$.
 Найдите $S_{\text{сеч.}}$.



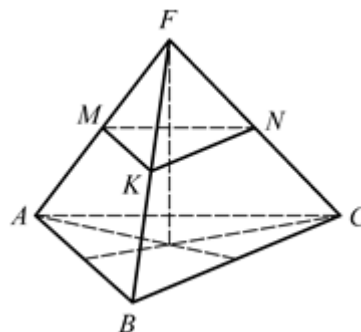
10. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $AF \perp (ABC)$, $AF \parallel (MNC)$, $AF = AB =$
 $= AC = CB = 6$, $AM : MC = 1 : 2$.
 Найдите $S_{\text{сеч.}}$.



11. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $AB = AC = BC = AF = BF =$
 $= CF = 6$, $AM = MB$, $AK = KC$,
 $(MNC) \parallel AF$.
 Найдите $S_{\text{сеч.}}$.



12. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $AB = AC = BC = AF = BF =$
 $= CF = 6$, $(MNC) \parallel (ABC)$,
 $S_{\text{бок. усеч. пир.}} = 24\sqrt{3}$.
 Найдите MN .



Сечения в пирамиде. Усеченная пирамида

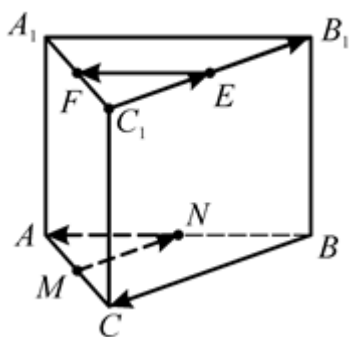
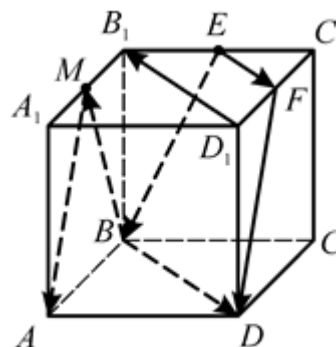
- | | | | |
|---------------------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1. $S_{\text{сеч}} = 9$. | 4. $S_{\text{бок}} = 10$. | 7. $S_{\text{сеч}} = 4\sqrt{3}$. | 10. $S_{\text{сеч}} = 12$. |
| 2. $S_{\text{сеч}} = 4$. | 5. $S_{\text{бок}} = 8$. | 8. $S_{\text{сеч}} = 4\sqrt{3}$. | 11. $S_{\text{сеч}} = 9$. |
| 3. $S_{\text{сеч}} = 2$. | 6. $S_{\text{бок}} = 48$. | 9. $S_{\text{сеч}} = 4\sqrt{3}$. | 12. $MN = 2$. |

Векторы в пространстве

ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед, $B_1 E = EC_1$, $C_1 F = FD_1$, $A_1 M = MB_1$.
Найдите векторы, указанные на рисунке:

- 1) сонаправленные \overrightarrow{EF} ;
- 2) имеющие длину, равную длине \overrightarrow{DF} ;
- 3) равные \overrightarrow{DF} .

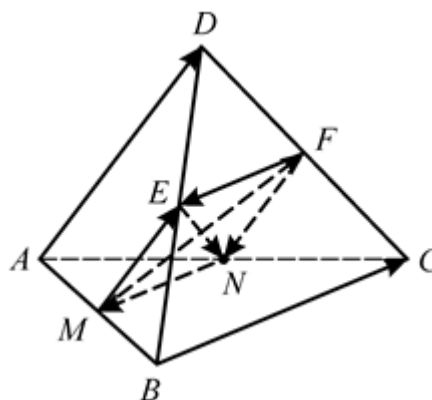


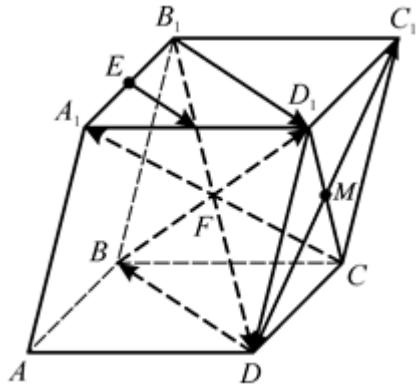
2. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ – правильная призма, $A_1 F = FC_1$, $C_1 E = EB_1$, $AM = MC$, $AN = NB$. Назовите векторы, указанные на рисунке:

- 1) противоположно направленных $\overrightarrow{C_1 B_1}$;
- 2) имеющих длину, равную длине \overrightarrow{EF} ;
- 3) равные \overrightarrow{EF} .

3. Дано: $ABCD$ – правильная пирамида, $AB = AD$, $AM = MB$, $AN = NC$, $DE = EB$, $DF = FC$. Назовите векторы, указанные на рисунке:

- 1) сонаправленные \overrightarrow{ME} ;
- 2) имеющие длину, равную длине \overrightarrow{MF} ;
- 3) равные \overrightarrow{NM} .





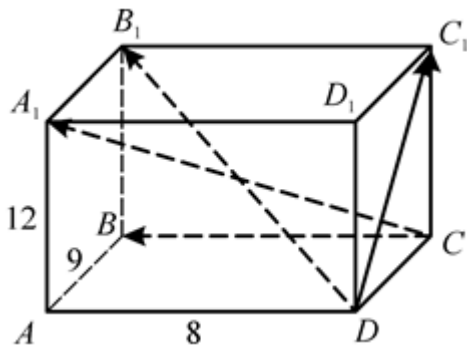
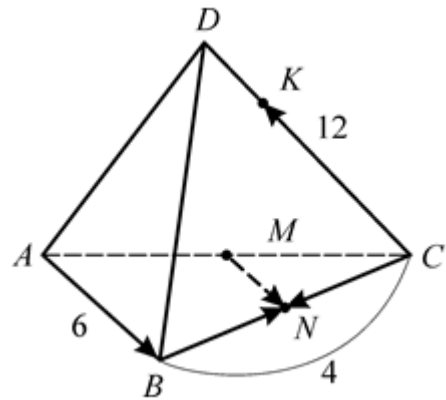
4. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – призма, $ABCD$ – ромб, $\angle A_1 AB = \angle A_1 AD$, $A_1 E = EB_1$, $A_1 F = FD_1$.

Назовите векторы, указанные на рисунке:

- 1) сонаправленные \overrightarrow{EF} ;
- 2) противоположно направленные $\overrightarrow{DC_1}$.
- 3) имеющие длину, равную длине $\overrightarrow{B_1 D}$.

5. Дано: $DABC$ – пирамида, $AB = 6$, $NC = 4$, $CD = 12$, $AM = MC$, $BN = NC$, $DK : KC = 1 : 5$.

Найдите: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BN}|$, $|\overrightarrow{MN}|$, $|\overrightarrow{CK}|$.

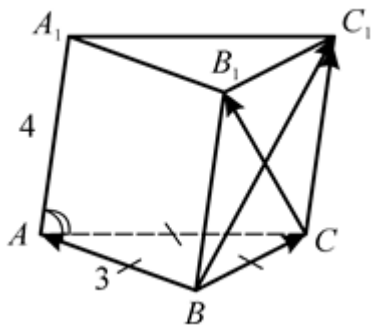
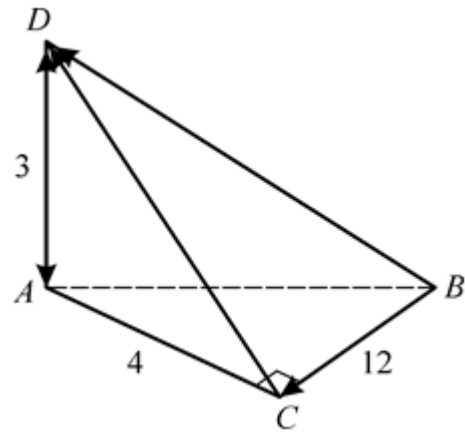


6. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед, $AB = 9$, $AD = 8$, $AA_1 = 12$.

Найдите: $|\overrightarrow{C_1 C}|$, $|\overrightarrow{CB}|$, $|\overrightarrow{DC_1}|$, $|\overrightarrow{DB_1}|$, $|\overrightarrow{CA_1}|$.

7. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AD \perp (ABC)$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AD = 3$, $AC = 4$, $CB = 12$.

Найдите: $|\overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{DA}|$, $|\overrightarrow{BC}|$,
 $|\overrightarrow{CD}|$, $|\overrightarrow{BD}|$.

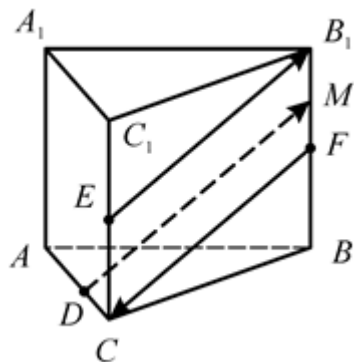
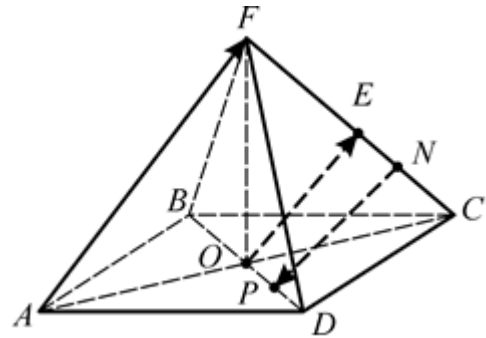


8. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма,
 $\angle A_1AC = \angle A_1AB$, $AA_1 = 4$,
 $AB = BC = AC = 3$.

Найдите: $|\overrightarrow{CC_1}|$, $|\overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{BA}|$,
 $|\overrightarrow{CB_1}|$, $|\overrightarrow{BC_1}|$.

9. Дано: $FABCD$ – правильная пирамида,
 $AC \cap BD = O$, $FE = EC$,
 $EN = NC$, $OP = PD$.

Какие векторы, из указанных на рисунке, коллинеарны?

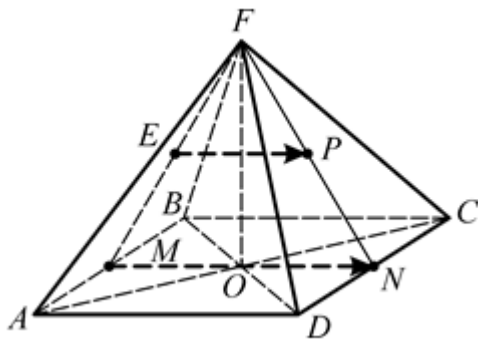
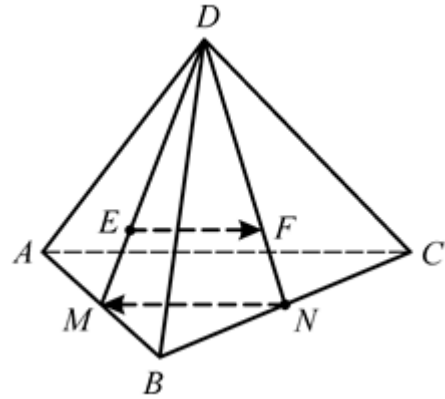


10. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная пирамида,
 $CE = EC_1$, $BF = FB_1$,
 $FM = MB_1$, $AD : DC = 3 : 1$.
 Какие векторы, из указанных на рисунке, коллинеарны?

11. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AM = MB$, $BN = NC$, E и F – точки
 пересечения медиан граней ABD и
 BDC соответственно, $AC = 18$.

Коллинеарны ли \overrightarrow{EF} и \overrightarrow{NM} ?

Найдите $|\overrightarrow{EF}|$.



12. Дано: $FABCD$ – правильная
 пирамида, $ABCD$ –
 параллелограмм, $AM = MB$, $DN =$
 NC , E и P – точки пересечения
 медиан граней ABF и CDF
 соответственно,
 $AD = 12$.

Коллинеарны ли \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{EP} ?

Найдите $|\overrightarrow{EP}|$.

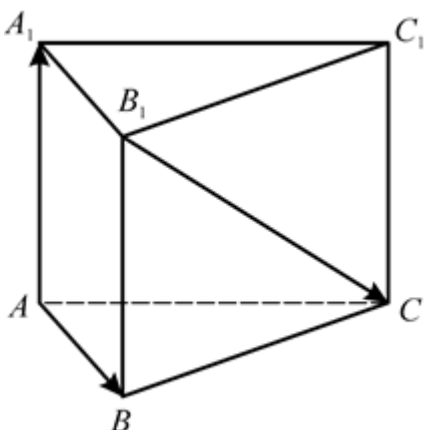
СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма.

Найдите:

а) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C}$;

б) $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}$.

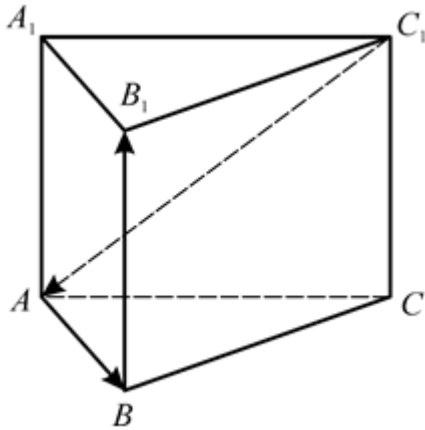


2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма.

Найдите:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{BB_1}$;

б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}$.

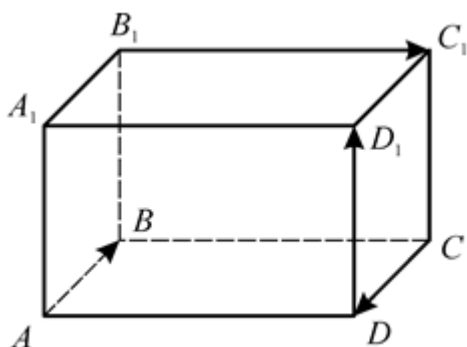


3. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ параллелепипед.

Укажите вектор, равный:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1A_1}$.

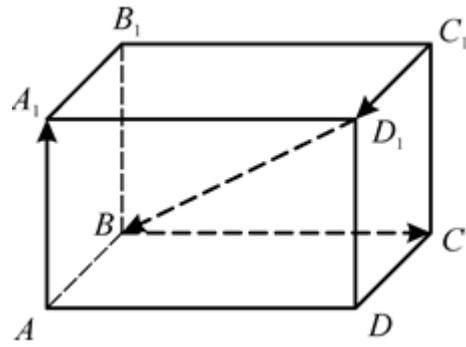


4. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед.

Укажите вектор, равный:

а) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{D_1B}$;

б) $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB_1}$.

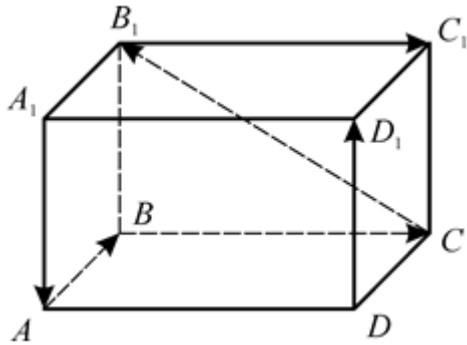


5. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед.

Укажите вектор, равный:

а) $\overrightarrow{B_1 C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A_1 A}$;

б) $\overrightarrow{A_1 A} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$.

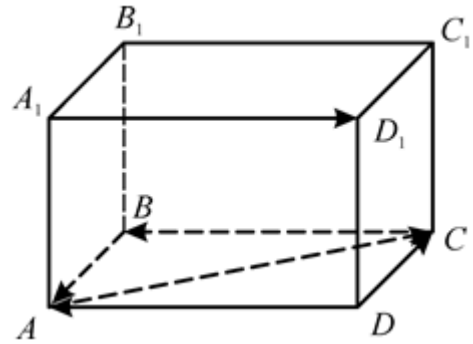


6. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед.

Укажите вектор, равный:

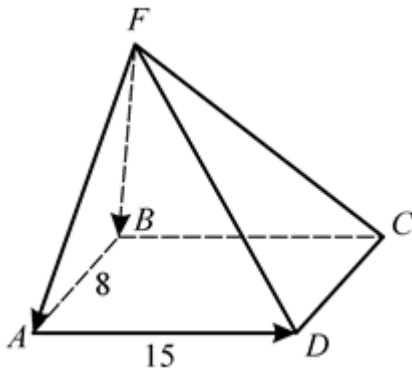
а) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A_1 D_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$;

б) $\overrightarrow{C_1 D_1} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}$.



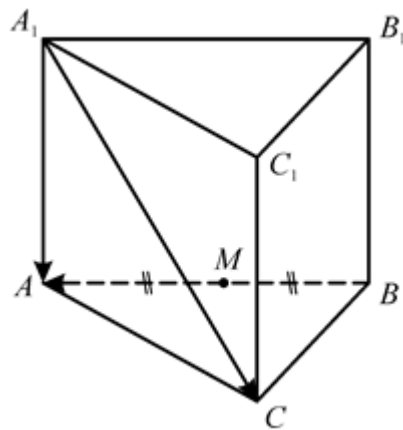
7. Дано: $FABCD$ – пирамида, $ABCD$ – прямоугольник, $AB = 8$, $BC = 15$.

Найдите $|\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FA}|$.



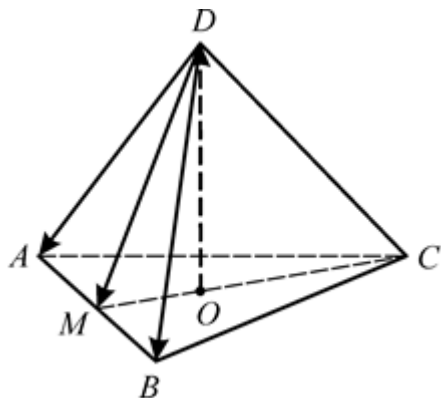
8. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ – призма, $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$, $AM = MB$.

Найдите $|\overrightarrow{A_1 A} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{A_1 C}|$.



9. Дано: $DABC$ – правильная пирамида, $AB = 6\sqrt{3}$.

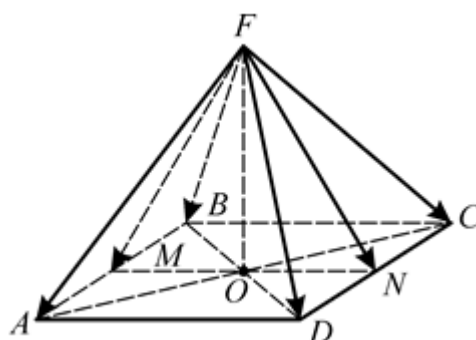
Найдите $\left| \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OD} \right|$.



10. Дано: $FABCD$ – правильная пирамида, $AB = 6$.

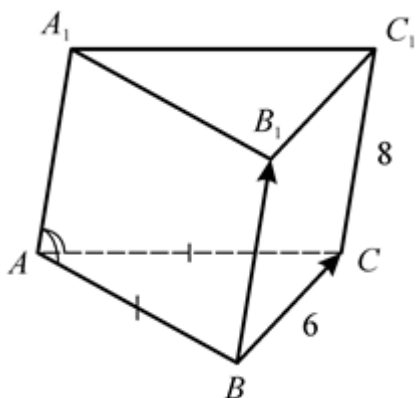
Найдите

$\left| \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}) - \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FC}) \right|$.



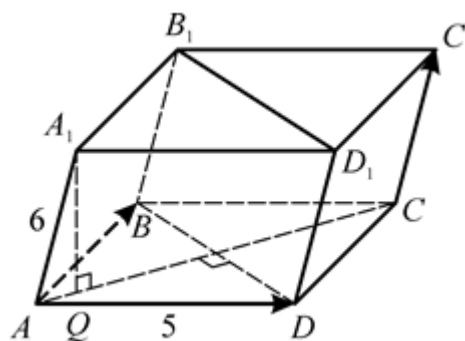
11. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма, $\angle A_1AB = \angle A_1AC$, $AC = AB$, $BC = 6$, $AA_1 = 8$.

Найдите $\left| \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} \right|$.



12. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – призма, $ABCD$ – ромб, $A_1Q \perp (ABC)$, $Q \in AC$, $AB = 5$, $AC = 6$, $AA_1 = 6$.

Найдите $\left| \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1} \right|$.



Сложение и вычитание векторов

1. а) \overrightarrow{AC} ; б) $\overrightarrow{BA_1}$.

5. а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{A_1C}$.

9. $|\overrightarrow{OM}| = 3$.

2. а) \overrightarrow{CB} ; б) $\overrightarrow{A_1B}$.

6. а) \overrightarrow{DC} ; б) $\overrightarrow{C_1A}$.

10. $|\overrightarrow{NM}| = 6$.

3. а) $\overrightarrow{AD_1}$; б) $\overrightarrow{CA_1}$.

7. $|\overrightarrow{AC}| = 17$.

11. $|\overrightarrow{BC_1}| = 10$.

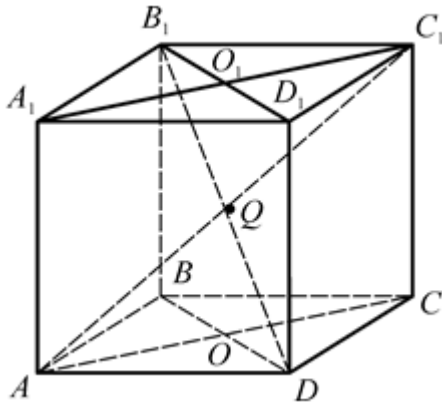
4. а) $\vec{0}$; б) $\overrightarrow{B_1C_1}$. 8. $|\overrightarrow{CM}| = 3$.

12. $|\overrightarrow{BD_1}| = 10$.

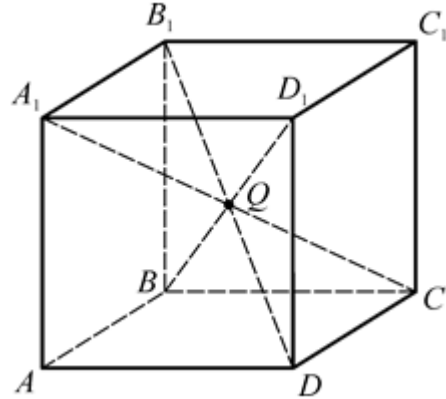
УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Найдите: k , m , n .

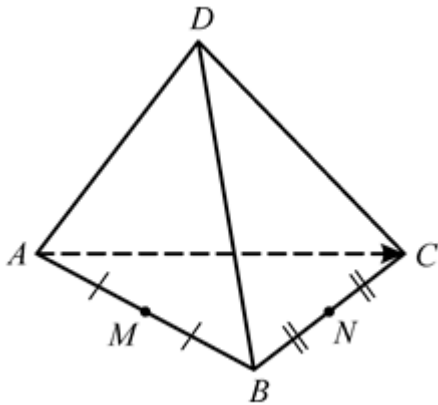
1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб,
 $\overline{AA_1} = k \cdot \overline{C_1 C}$, $\overline{AC} = m \cdot \overline{C_1 O_1}$,
 $\overline{QB_1} = n \cdot \overline{B_1 D}$.



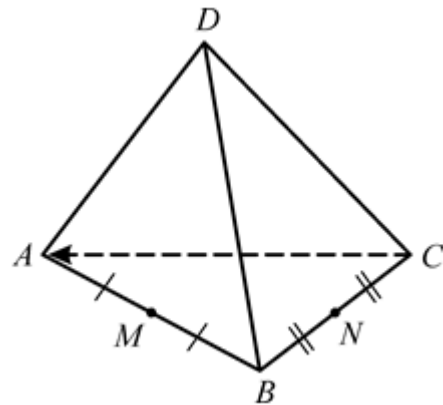
2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб,
 $\overline{A_1 C} = k \cdot \overline{QC}$, $\overline{DB_1} = m \cdot \overline{B_1 D}$,
 $\overline{BQ} = n \cdot \overline{D_1 B}$.



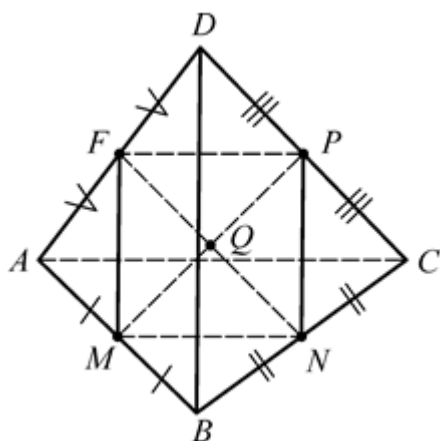
3. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AM = MB$, $BN = NC$,
 $\overline{DM} - \overline{DN} = k \cdot \overline{AC}$.



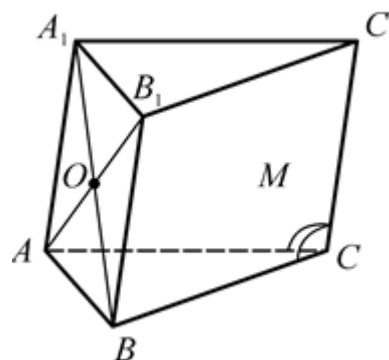
4. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AM = MB$, $BN = NC$,
 $\overline{CA} = k \cdot (\overline{DM} - \overline{DN})$.



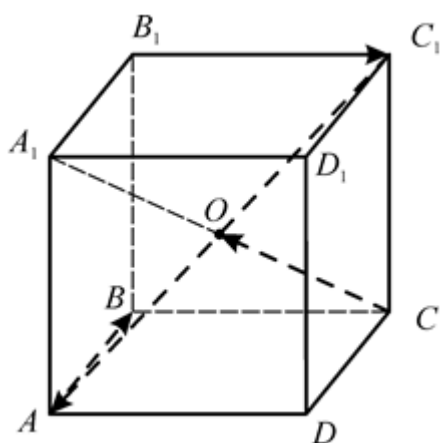
5. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AM = MB, BN = NC, AF = FD,$
 $DP = PC, NF \cap MP = Q,$
 $\overrightarrow{MP} = k \cdot \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{FQ} = m \cdot \overrightarrow{NF},$
 $\overrightarrow{FP} = n \cdot \overrightarrow{MN}.$



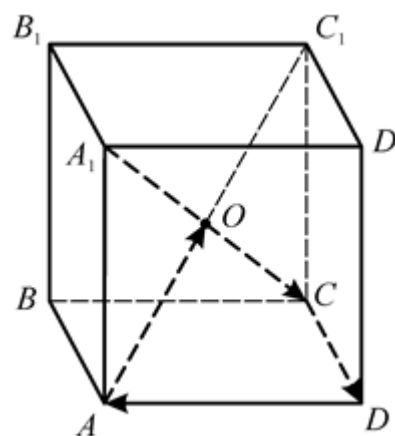
6. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма,
 $\angle ACC_1 = \angle BCC_1,$
 $\overrightarrow{A_1O} = k \cdot \overrightarrow{BA_1},$
 $\overrightarrow{AB_1} = m \cdot (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}),$
 $\overrightarrow{AB_1} = n \cdot \overrightarrow{OB_1}.$



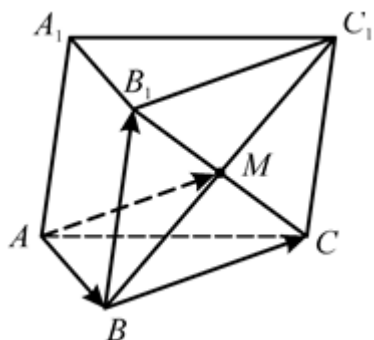
7. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед,
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1 C_1} + \overrightarrow{CO} = k \cdot \overrightarrow{C_1 A}.$



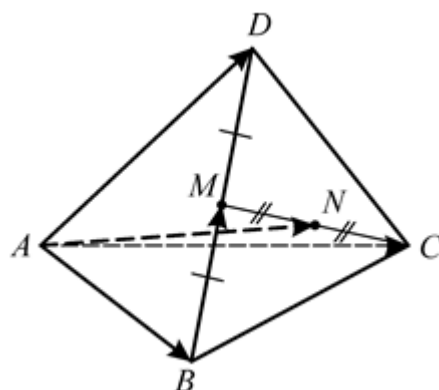
8. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед,
 $\overrightarrow{A_1 C} = k \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO}).$



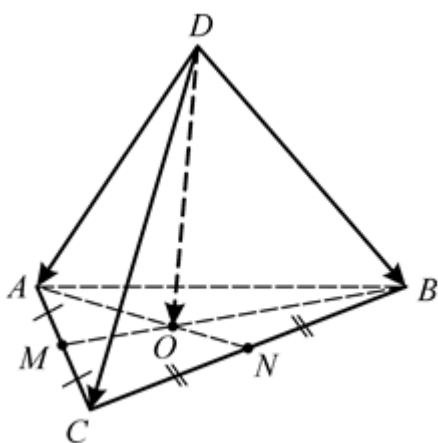
9. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма,
 $BC_1 \cap B_1C = M$,
 $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{BB_1} + n \cdot \overrightarrow{BC}$.



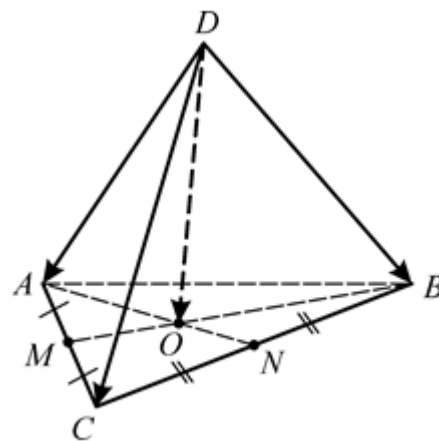
10. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $BM = MD$, $MN = NC$,
 $\overrightarrow{AN} = k \cdot \overrightarrow{AC} + m \cdot \overrightarrow{AD} + n \cdot \overrightarrow{AB}$.



11. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AM = MC$, $BN = NC$,
 $BM \cap AN = O$,
 $\overrightarrow{DO} = k \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB})$.



12. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AM = MC$, $BN = NC$,
 $BM \cap AN = O$,
 $\overrightarrow{DA} = k \cdot \overrightarrow{DC} + m \cdot \overrightarrow{DB} + n \cdot \overrightarrow{DO}$.



Умножение вектора на число

1. $k = -1, m = -2, n = -\frac{1}{2}$.

7. $k = -\frac{1}{2}$.

2. $k = 2, m = -1, n = -\frac{1}{2}$.

8. $k = -2$.

3. $k = -\frac{1}{2}$.

9. $k = 1, m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$.

4. $k = \frac{1}{2}$.

10. $k = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{4}, n = \frac{1}{4}$.

5. $k = -2, m = -\frac{1}{2}, n = 1$.

11. $k = \frac{1}{3}$.

6. $k = -\frac{1}{2}, m = 1, n = 2$.

12. $k = -1, m = -1, n = 3$.

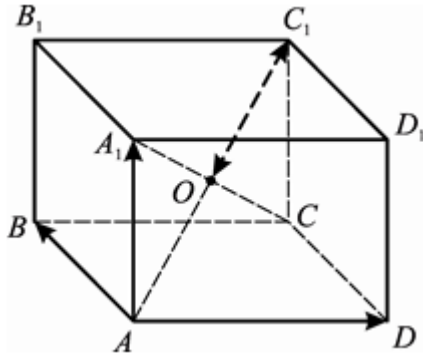
КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Найдите: k, m, n .

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ параллелепипед,

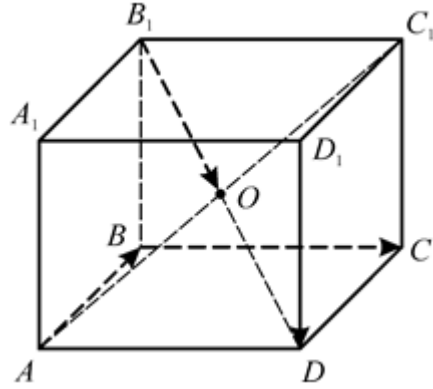
$$\overrightarrow{AC_1} = k \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{AD} + n \cdot \overrightarrow{AA_1},$$

$$\overrightarrow{C_1 O} = k \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{AD} + n \cdot \overrightarrow{AA_1}.$$



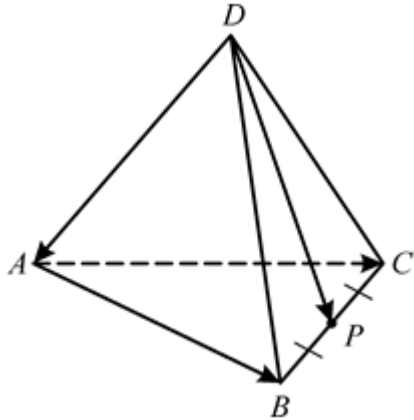
2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед,

$$\overrightarrow{B_1 O} = k \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{BC} + n \cdot \overrightarrow{DD_1}.$$



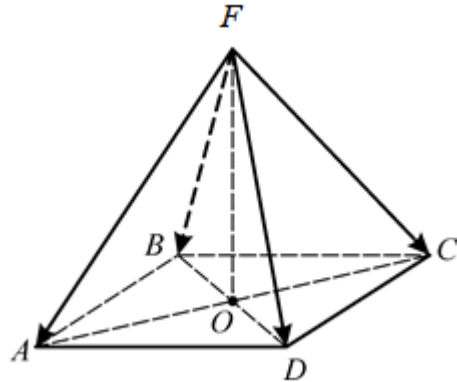
3. Дано: $DABC$ – пирамида, $ABCD$ – параллелограмм,

$$\overrightarrow{DP} = k \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{AC} + n \cdot \overrightarrow{DA}.$$

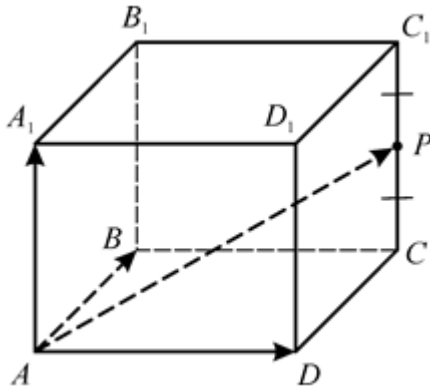


4. Дано: $FABCD$ – пирамида, $ABCD$ – параллелограмм,

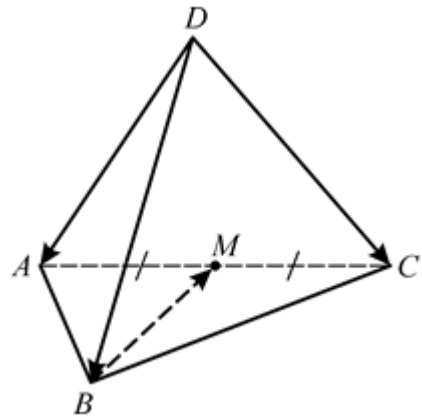
$$\overrightarrow{FB} = k \cdot \overrightarrow{FA} + m \cdot \overrightarrow{FC} + n \cdot \overrightarrow{FD}.$$



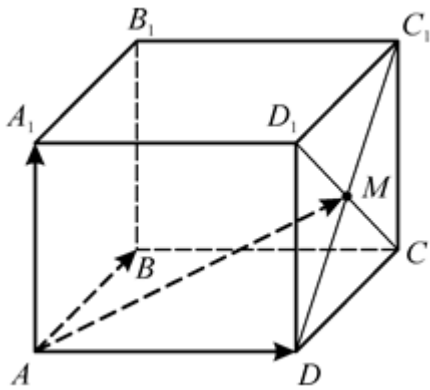
5. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб,
 $CP = PC_1$,
 $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{AD} + n \cdot \overrightarrow{AA_1}$.



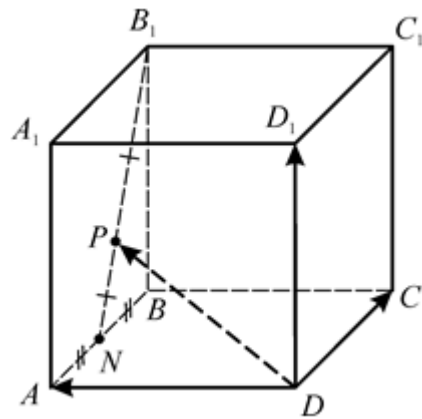
6. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AM = MC$,
 $\overrightarrow{BM} = k \cdot \overrightarrow{DA} + m \cdot \overrightarrow{DB} + n \cdot \overrightarrow{DC}$.



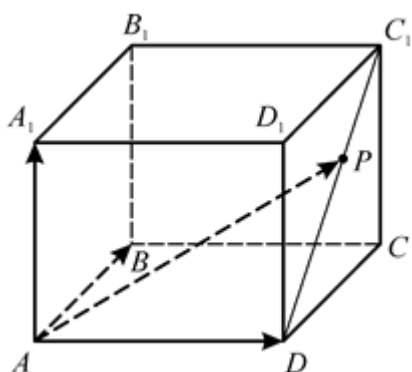
7. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ –
 параллелепипед, $DC_1 \cap CD_1 = M$,
 $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{AD} + n \cdot \overrightarrow{AA_1}$.



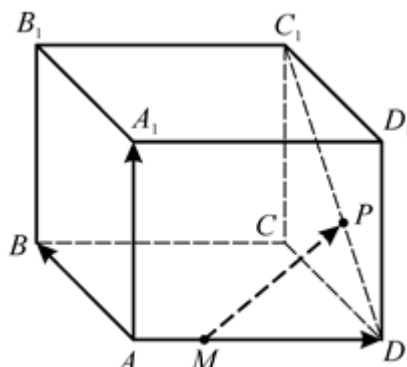
8. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ –
 параллелепипед, $AN = NB$, $B_1P =$
 PN , $\overrightarrow{DP} = k \cdot \overrightarrow{DA} + m \cdot \overrightarrow{DC} + n \cdot \overrightarrow{DD_1}$.



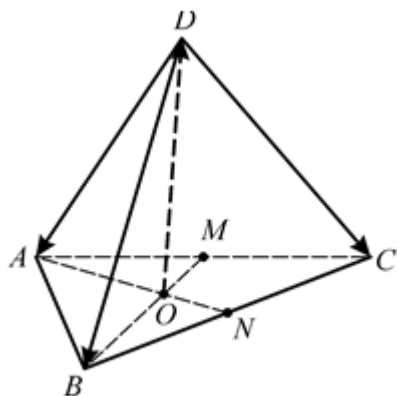
9. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед, $DP : PC_1 = 5 : 3$,
 $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{AD} + n \cdot \overrightarrow{AA_1}$.



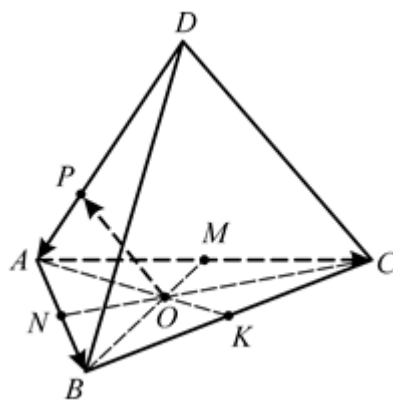
10. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед, $AM : MD = 2 : 7$,
 $DP : PC_1 = 3 : 5$,
 $\overrightarrow{MP} = k \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{AD} + n \cdot \overrightarrow{AA_1}$.



11. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AM = MC$, $BN = NC$,
 $BM \cap AN = O$,
 $\overrightarrow{OD} = k \cdot \overrightarrow{DA} + m \cdot \overrightarrow{DB} + n \cdot \overrightarrow{DC}$.



12. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AM = MC$, $AN = NB$, $BM \cap CN = O$,
 $AP : PD = 1 : 3$,
 $\overrightarrow{OP} = k \cdot \overrightarrow{DA} + m \cdot \overrightarrow{AB} + n \cdot \overrightarrow{AC}$.



Компланарные векторы

1. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{C_1O} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

2. $k = -\frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$.

3. $k = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $n = 1$.

4. $k = 1$, $m = 1$, $n = -1$.

5. $k = 1$, $m = 1$, $n = \frac{1}{2}$.

6. $k = \frac{1}{2}$, $m = -1$, $n = \frac{1}{2}$.

7. $k = \frac{1}{2}$, $m = 1$, $n = \frac{1}{2}$.

8. $k = 1$, $m = \frac{3}{4}$, $n = \frac{1}{2}$.

9. $k = \frac{5}{8}$, $m = 1$, $n = \frac{5}{8}$.

10. $k = \frac{3}{8}$, $m = \frac{7}{9}$, $n = \frac{3}{8}$.

11. $k = -\frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{3}$, $n = -\frac{1}{3}$.

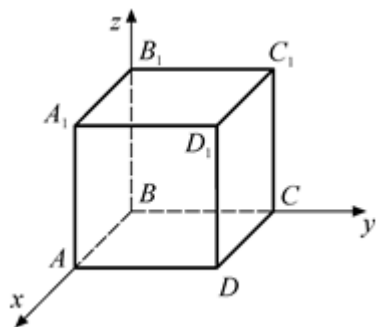
12. $k = \frac{-1}{4}$, $m = -\frac{1}{3}$, $n = -\frac{1}{3}$.

Метод координат в пространстве

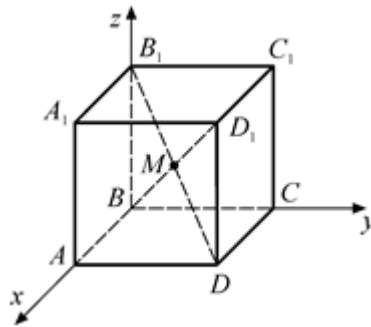
ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ
В ПРОСТРАНСТВЕ

Найдите координаты всех вершин многогранника.

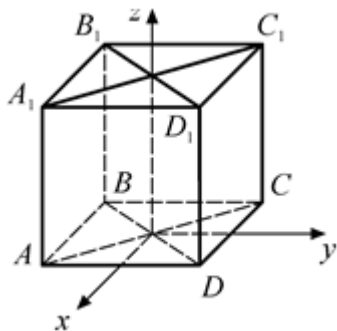
1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб,
 $A(10; 0; 0)$.



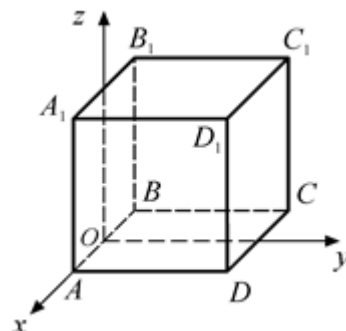
2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб,
 $BD_1 \cap DB_1 = M, M(1; 1; 1)$.



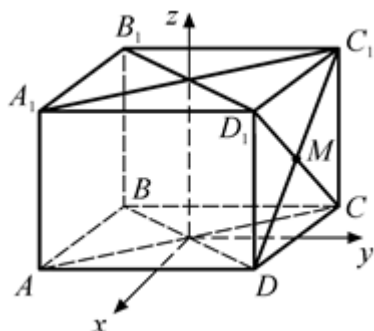
3. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб,
 $D(2; 2; 0)$.



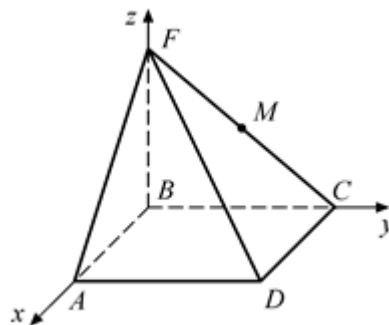
4. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб,
 $AO = OB, C(-2; 4; 0)$.



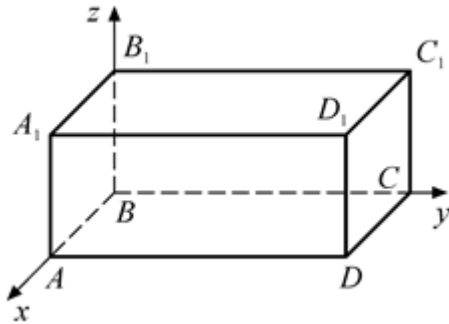
5. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ –
прямоугольный параллелепипед,
 $ABCD$ – квадрат, $DC_1 \cap D_1C = M, M(0; 2; 3)$.



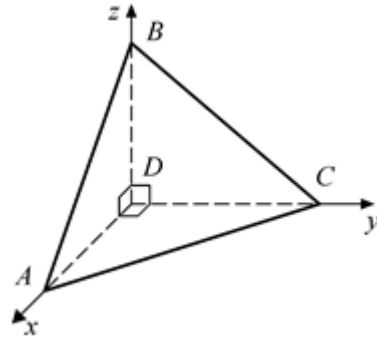
6. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $FM = MC, M(0; 1; 2)$.



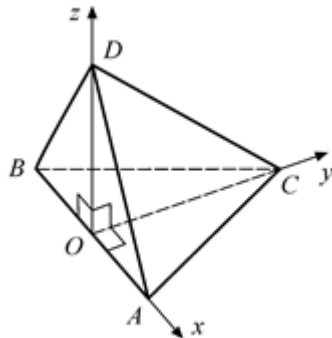
7. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ –
 прямоугольный параллелепипед,
 $AB = 3$, $BC = 4$, $AA_1 = 1$.



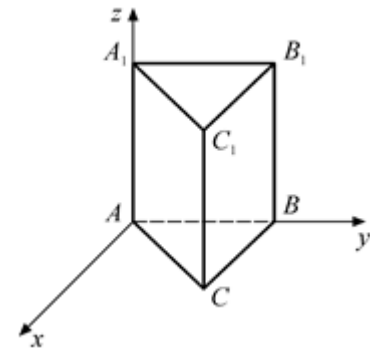
8. Дано: $AB = BC = AC = 10\sqrt{2}$.



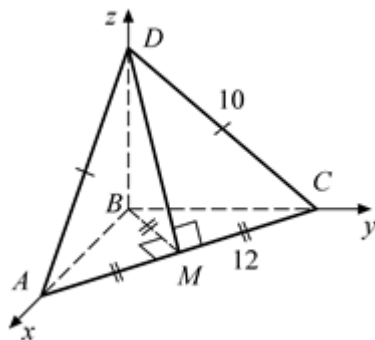
9. Дано: $(ABC) \perp (ABD)$,
 $AB = BC = AC = BD = AD = 4$.



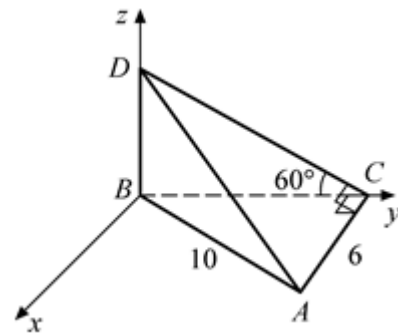
10. Дано: $\triangle ABC$ – правильный,
 $AB = 4$, $AA_1 = 3$.



11. Дано: $AD = DC = 10$, $AC = 12$,
 $BM \perp AC$.



12. Дано: $AB = 10$, $AC = 6$,
 $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle DCB = 60^\circ$.

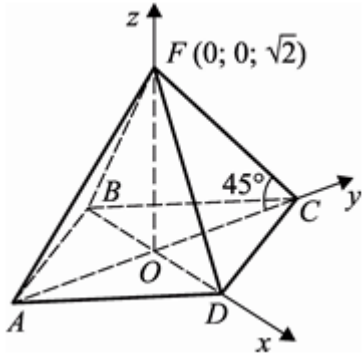
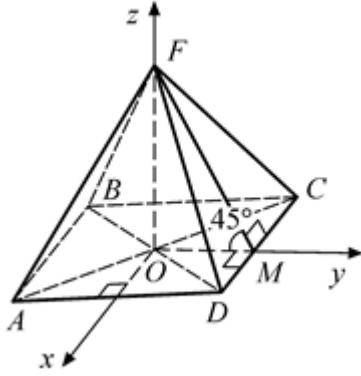
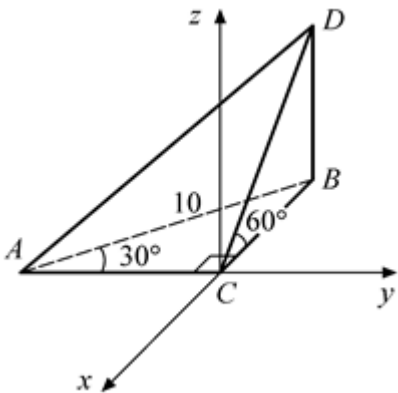
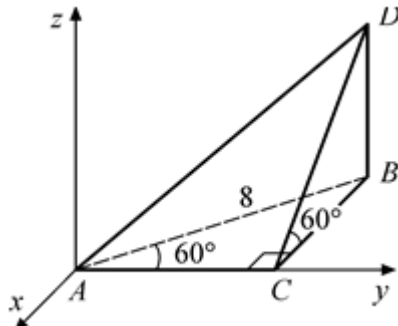
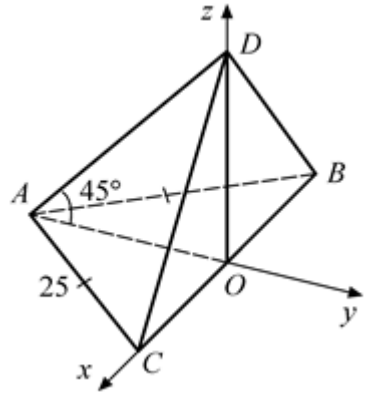
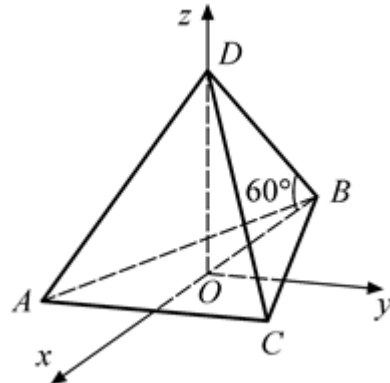
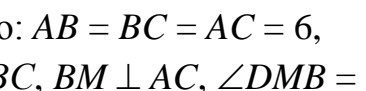
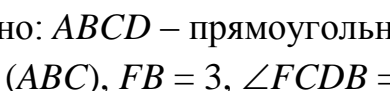


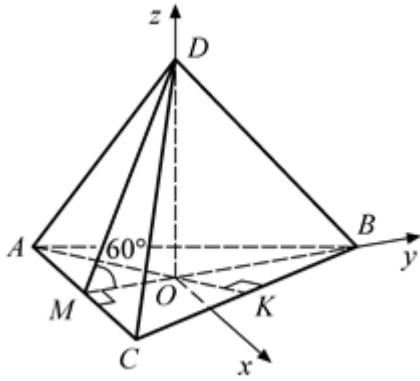
Прямоугольная система координат в пространстве

- $A (10; 0; 0), B (0; 0; 0), C (0; 10; 0), D (10; 10; 0),$
 $A_1 (10; 0; 10), B_1 (0; 0; 10), C_1 (0; 10; 10), D_1 (10; 10; 10).$
- $A (2; 0; 0), B (0; 0; 0), C (0; 2; 0), D (2; 2; 0),$
 $A_1 (2; 0; 2), B_1 (0; 0; 2), C_1 (0; 2; 2), D_1 (2; 2; 2).$
- $A (2; -2; 0), B (-2; -2; 0), C (-2; 2; 0), D (2; 2; 0),$
 $A_1 (2; -2; 4), B_1 (-2; -2; 4), C_1 (-2; 2; 4), D_1 (2; 2; 4).$
- $A (2; 0; 0), B (-2; 0; 0), C (-2; 4; 0), D (2; 4; 0),$
 $A_1 (2; 0; 4), B_1 (-2; 0; 4), C_1 (-2; 4; 4), D_1 (2; 4; 4).$
- $A (2; -2; 0), B (-2; -2; 0), C (-2; 2; 0), D (2; 2; 0),$
 $A_1 (2; -2; 6), B_1 (-2; -2; 6), C_1 (-2; 2; 6), D_1 (2; 2; 6).$
- $A (2; 0; 0), B (0; 0; 0), C (0; 2; 0), D (2; 2; 0), F (0; 0; 4).$
- $A (3; 0; 0), B (0; 0; 0), C (0; 4; 0), D (3; 4; 0),$
 $A_1 (3; 0; 1), B_1 (0; 0; 1), C_1 (0; 4; 1), D_1 (3; 4; 1).$
- $A (10; 0; 0), B (0; 0; 10), C (0; 10; 0), D (0; 0; 0).$
- $A (2; 0; 0), B (-2; 0; 0), C (0; 0; 2\sqrt{3}), D (0; 0; 2\sqrt{3}),$
- $A (0; 0; 0), B (0; 4; 0), C (2\sqrt{3}; 2; 0), A_1 (0; 0; 3), B_1 (0; 4; 3),$
 $C_1 (2\sqrt{3}; 2; 3).$
- $A (6\sqrt{2}; 0; 0), B (0; 0; 0), C (0; 6\sqrt{2}; 0), D (0; 0; 2\sqrt{7}).$
- $A (6; 8; 0), B (0; 0; 0), C (0; 8; 0), D (0; 0; 8\sqrt{3}).$

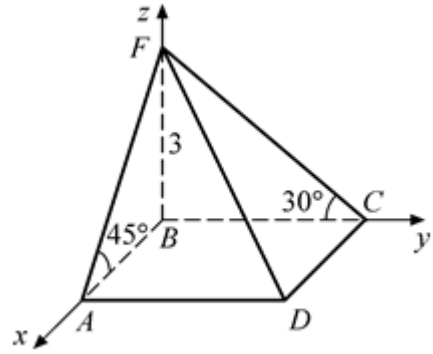
НАХОЖДЕНИЕ КООРДИНАТ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКОВ

Найдите координаты всех вершин многогранника.

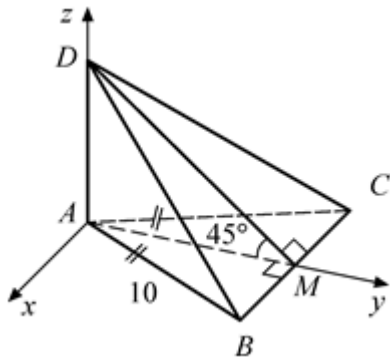
<p>1. Дано: $ABCD$ – квадрат, $\angle FCO = 45^\circ$, $F(0; 0; \sqrt{2})$.</p> 	<p>2. Дано: $ABCD$ – квадрат, $\angle FDCB = 45^\circ$, $M(0; 6; 0)$.</p> 
<p>3. Дано: $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $AB = 10$, $DB \perp (ABC)$, $\angle DCB = 60^\circ$.</p> 	<p>4. Дано: $AB = 8$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $DB \perp (ABC)$, $\angle DCB = 60^\circ$.</p> 
<p>5. Дано: $AB = AC = 25$, $BC = 30$, $BO = OC$, $\angle DAO = 45^\circ$.</p> 	<p>6. Дано: $AB = BC = AC = 6$, $\angle DBO = 60^\circ$, O – точка пересечения высот $\triangle ABC$.</p> 
<p>7. Дано: $AB = BC = AC = 6$, $AK \perp BC$, $BM \perp AC$, $\angle DMB = 60^\circ$.</p> 	<p>8. Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $FB \perp (ABC)$, $FB = 3$, $\angle FCDB = 30^\circ$,</p> 



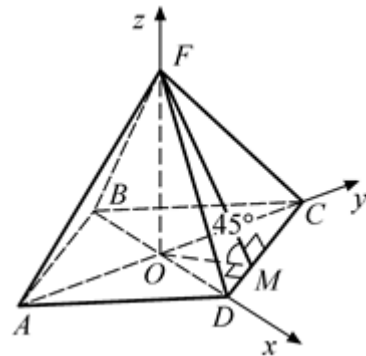
$$\angle FADB = 45^\circ.$$



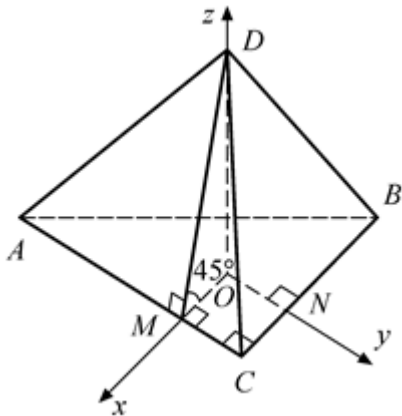
9. Дано: $AB = AC = 10$, $BC = 12$, $\angle DBCA = 45^\circ$.



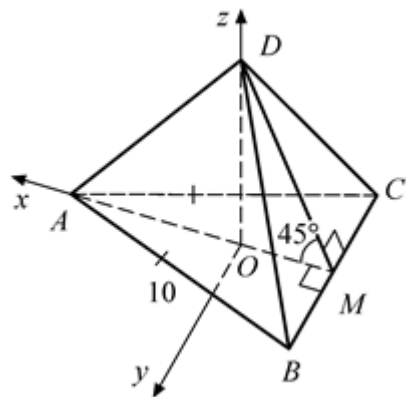
10. Дано: $ABCD$ – ромб, $AC = 8$, $BD = 6$, $\angle FDCB = 45^\circ$.



11. Дано: $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $CB = 3$, O – центр вписанной окружности, $\angle DACB = 45^\circ$.



12. Дано: $AB = AC = 10$, $BC = 12$, $\angle DBCA = 45^\circ$, O – центр вписанной окружности.



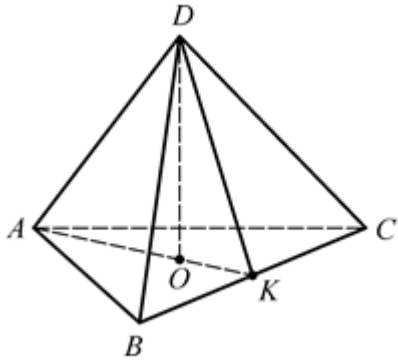
Нахождение координат вершин многогранников

1. $A(0; -\sqrt{2}; 0)$, $B(-\sqrt{2}; 0; 0)$, $C(0; \sqrt{2}; 0)$, $D(\sqrt{2}; 0; 0)$, $F(0; 0; \sqrt{2})$.
2. $A(6; -6; 0)$, $B(-6; -6; 0)$, $C(-6; 6; 0)$, $D(6; 6; 0)$, $F(0; 0; 6)$.
3. $A(0; -5\sqrt{3}; 0)$, $B(-5; 0; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $D(-5; 0; 5\sqrt{3})$.
4. $A(0; 0; 0)$, $B(-4\sqrt{3}; 4; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $D(-4\sqrt{3}; 4; 12)$.
5. $A(0; -20; 0)$, $B(-15; 0; 0)$, $C(15; 0; 0)$, $D(0; 0; 20)$.
6. $A(\sqrt{3}; -3; 0)$, $B(-2\sqrt{3}; 0; 0)$, $C(\sqrt{3}; 3; 0)$, $D(0; 0; 6)$.
7. $A(-3; -\sqrt{3}; 0)$, $B(0; 2\sqrt{3}; 0)$, $C(3; -\sqrt{3}; 0)$, $D(0; 0; 3)$.
8. $A(3; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 3\sqrt{3}; 0)$, $D(3; 3\sqrt{3}; 0)$, $F(0; 0; 3)$.
9. $A(0; 0; 0)$, $B(6; 8; 0)$, $C(-6; 8; 0)$, $D(0; 0; 8)$.
10. $A(0; -4; 0)$, $B(-3; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $D(3; 0; 0)$, $F(0; 0; 2,4)$.
11. $A(1; -3; 0)$, $B(-2; 1; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 0; 1)$.
12. $A(5; 0; 0)$, $B(-3; 6; 0)$, $C(-3; -6; 0)$, $D(0; 0; 3)$.

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

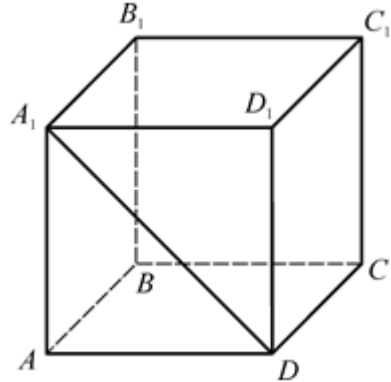
1. Дано: $DABC$ – правильный тетраэдр.

Найдите: $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$,
 $(\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{DK} \wedge \overrightarrow{BC})$.



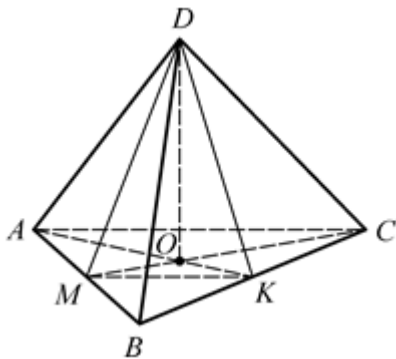
2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.

Найдите: $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_1 C_1})$,
 $(\overrightarrow{A_1 D} \wedge \overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{A_1 D} \wedge \overrightarrow{BC_1})$.



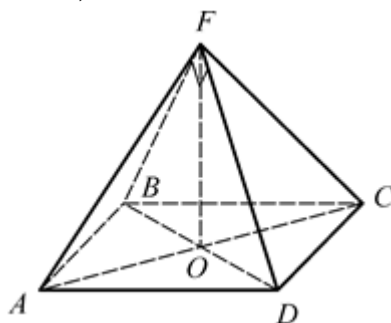
3. Дано: $DABC$ – правильный тетраэдр.

Найдите: $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DO})$,
 $(\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{CA})$, $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AD})$.



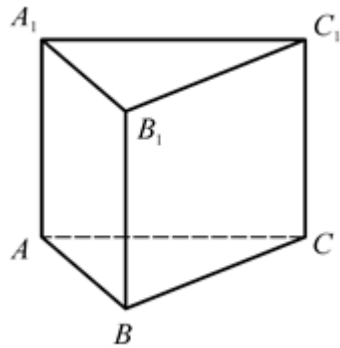
4. Дано: $FABCD$ – правильная пирамида, $\angle BFD = 90^\circ$.

Найдите: $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DB})$,
 $(\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{CA})$, $(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{FO})$.



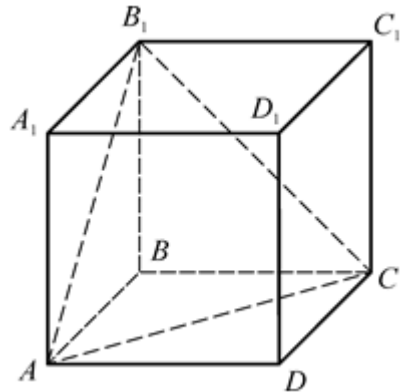
5. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма.

Найдите: $(\overline{AB} \wedge \overline{B_1C_1})$,
 $(\overline{AA_1} \wedge \overline{BC})$, $(\overline{BB_1} \wedge \overline{C_1C})$.



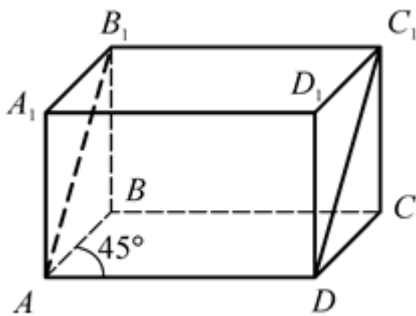
6. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.

Найдите: $(\overline{AB_1} \wedge \overline{CB_1})$,
 $(\overline{AC} \wedge \overline{CB_1})$, $(\overline{CB_1} \wedge \overline{AA_1})$.



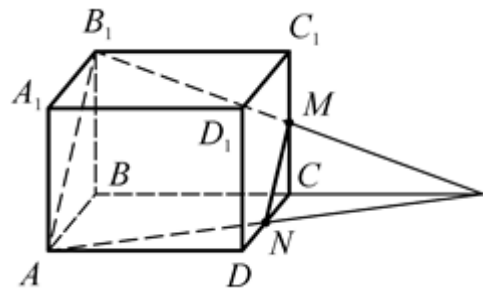
7. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед, $\angle BAD = 45^\circ$.

Найдите: $(\overline{AB} \wedge \overline{C_1D_1})$,
 $(\overline{AB} \wedge \overline{D_1A_1})$, $(\overline{AB_1} \wedge \overline{DC_1})$.



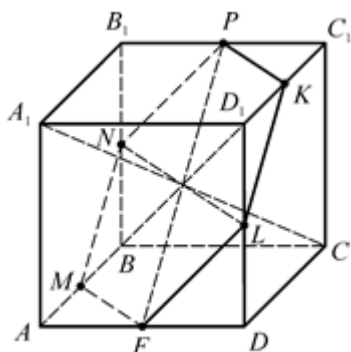
8. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, $CM = MC_1$, $CN = ND$.

Найдите: $(\overline{AB_1} \wedge \overline{NM})$,
 $(\overline{DD_1} \wedge \overline{MN})$, $(\overline{AD} \wedge \overline{AB_1})$.



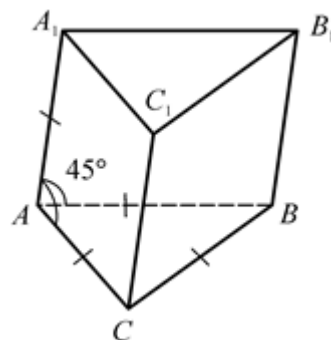
9. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб,
 $AM = MB, BN = NB_1,$
 $B_1 P = PC_1, C_1 K = KD_1,$
 $DL = LD_1, AF = FD.$

Найдите: $(\overline{MF} \wedge \overline{LK}),$
 $(\overline{PF} \wedge \overline{NL}), (\overline{A_1 C} \wedge \overline{PF}).$



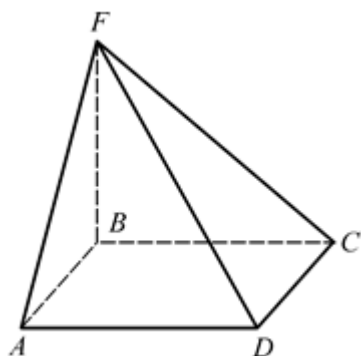
10. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ – призма,
 $\angle CAA_1 = \angle BAA_1 = 45^\circ,$
 $AB = BC = AC = AA_1.$

Найдите: $(\overline{AC} \wedge \overline{C_1 B_1}),$
 $(\overline{CC_1} \wedge \overline{CB}), (\overline{BA} \wedge \overline{CC_1}).$



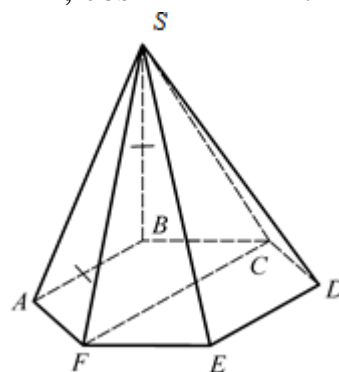
11. Дано: $FABCD$ – пирамида,
 $ABCD$ – квадрат, $FB \perp (ABC).$

Найдите: $(\overline{AD} \wedge \overline{BF}),$
 $(\overline{AC} \wedge \overline{BF}), (\overline{DC} \wedge \overline{FC}).$



12. Дано: $SABCDKF$ – пирамида, $BS \perp (ABC),$
 $BS = AB, ABCDEF$ –
 правильный шестиугольник.

Найдите: $(\overline{BS} \wedge \overline{DE}),$
 $(\overline{SD} \wedge \overline{DE}), \cos (\overline{FS} \wedge \overline{CF}).$



Угол между векторами

1. $60^\circ, 120^\circ, 90^\circ$.

2. $90^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

3. $90^\circ, 180^\circ, 90^\circ$.

4. $45^\circ, 135^\circ, 90^\circ$.

5. $120^\circ, 90^\circ, 180^\circ$.

6. $60^\circ, 120^\circ, 45^\circ$.

7. $180^\circ, 135^\circ, 0^\circ$.

8. $0^\circ, 135^\circ, 90^\circ$.

9. $120^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

10. $120^\circ, 90^\circ, 135^\circ$.

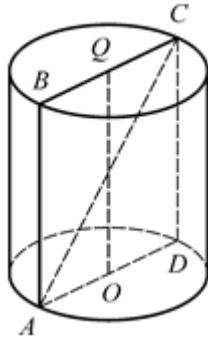
11. $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$.

12. $90^\circ, 90^\circ, -0,75$.

ЦИЛИНДР, КОНУС, ШАР

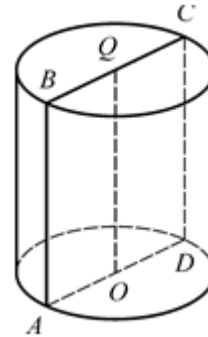
ЦИЛИНДР

1. Дано: $R = 3, H = 8$.
Найдите AC .

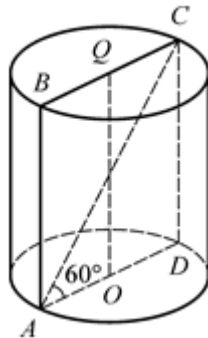


2. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $S_{ABCD} = 12$.

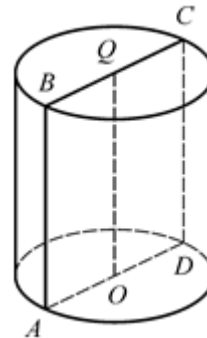
Найдите $\frac{S_{\text{осн}}}{\pi}$.



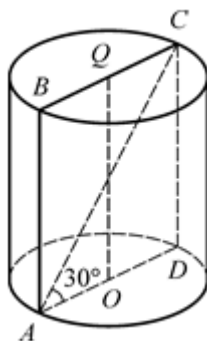
3. Дано: $R = \sqrt{3}, \angle CAD = 60^\circ$.
Найдите H .



4. Дано: $S_{\text{бок}} = 36\pi$.
Найдите S_{ABCD} .

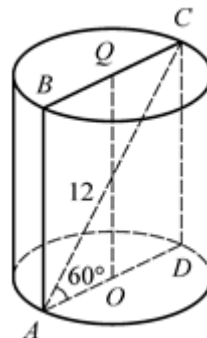


5. Дано: $S_{\text{осн}} = 3\pi, \angle CAD = 30^\circ$.
Найдите H .

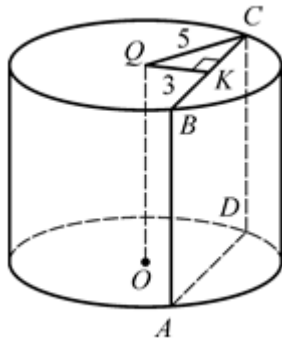


6. Дано: $AC = 12, \angle CAD = 60^\circ$.

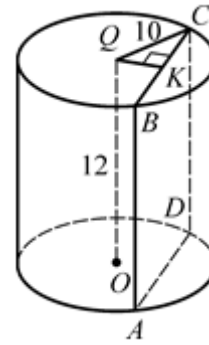
Найдите $\frac{S_{\text{осн}}}{\pi}$.



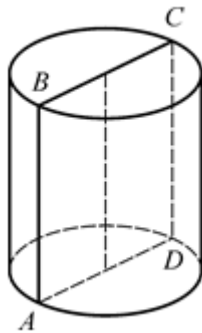
7. Дано: $H = 7$, $R = 5$, $AB \parallel OQ$,
 $QK \perp BC$, $QK = 3$.
 Найдите S_{ABCD} .



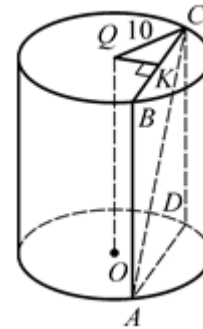
8. Дано: $H = 12$, $R = 10$,
 $AB \parallel OQ$, $AB = BC$, $QK \perp BC$.
 Найдите QK .



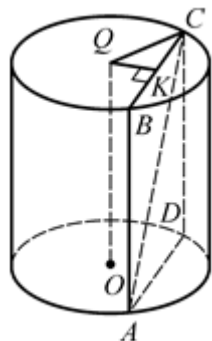
9. Дано: $S_{ABCD} = 6$.
 Найдите $S_{\text{бок.цил.}}$.



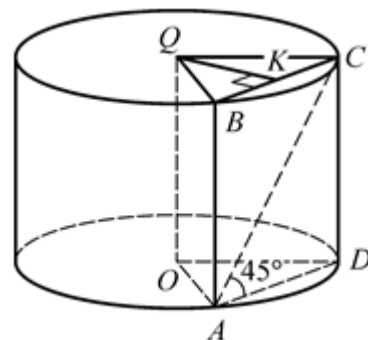
10. Дано: $H = 5$, $R = 10$,
 $AB \parallel OQ$, $AC = 13$, $QK \perp BC$.
 Найдите QK .



11. Дано: $H = 7$, $AB \parallel OQ$,
 $AC = 25$, $QK \perp BC$, $QK = 5$.
 Найдите R .



12. Дано: $R = 13$, $QK \perp BC$,
 $QK = 5$, $\angle CAD = 45^\circ$.
 Найдите H .



Цилиндр

1. 10.

2. 3.

3. 6.

4. 36.

5. 2.

6. 9.

7. 56.

8. 8.

9. 6π.

10. 8.

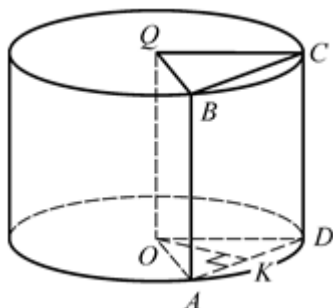
11. 13.

12. 24.

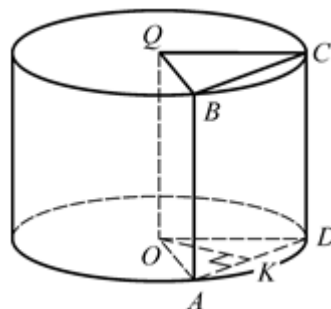
ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Найдите $S_{\text{бок.цил.}}$.

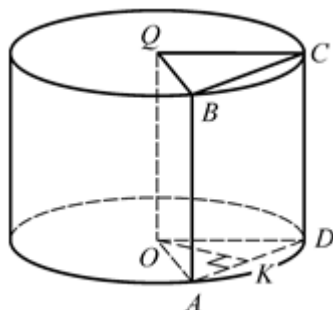
1. Дано: $H = 10$, $\angle AOD = 60^\circ$,
 $OK \perp AD$, $OK = 4\sqrt{3}$.



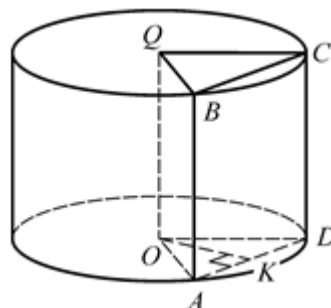
2. Дано: $H = 10$, $\angle AOD = 90^\circ$,
 $OK \perp AD$, $OK = \sqrt{2}$.



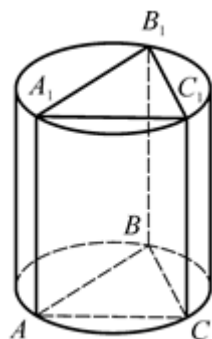
3. Дано: $H = 10$, $\angle AOD = 120^\circ$,
 $OK \perp AD$, $OK = 5$.



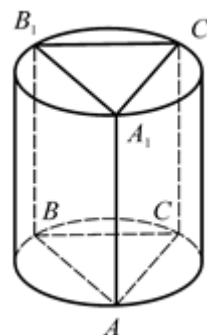
4. Дано: $\angle AOD = 60^\circ$, $OK \perp AD$, $OK = \sqrt{3}$, $S_{ABCD} = 8$.



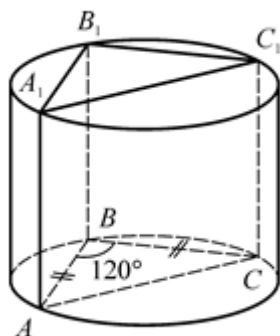
5. Дано: $AC = 8$, $BC = 6$,
 $AB = 10$, $AA_1 = 4$.



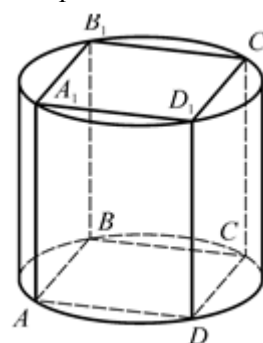
6. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная
 призма, $AB = \sqrt{3}$, $AA_1 = 5$.



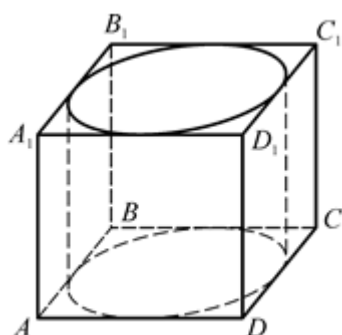
7. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $AB = AC = 6$, $\angle ABC = 120^\circ$, $AA_1 = 10$.



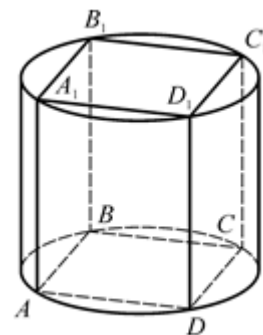
8. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед, $ABCD$ – квадрат, $AB = \sqrt{2}$, $AA_1 = 3$.



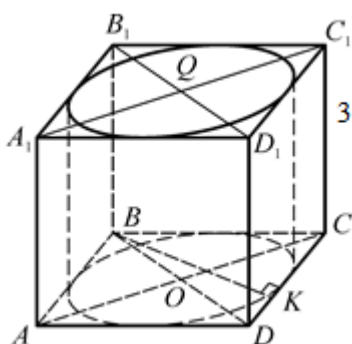
9. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, $AC_1 = 6\sqrt{3}$.



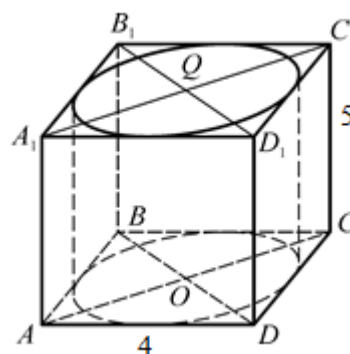
10. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, $AC_1 = 6\sqrt{3}$.



11. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед, $AA_1 = 3$, $ABCD$ – ромб, $BK \perp DC$, $BK = 8$.



12. Дано: $H = 5$, $ABCD$ – ромб, $\angle BAD = 30^\circ$, $AB = 4$.

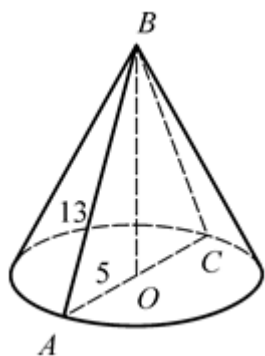


Площадь боковой поверхности цилиндра

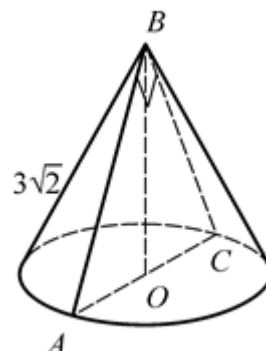
- | | | | |
|---------------|--------------|---------------|-----------------------|
| 1. 160π . | 4. 16π . | 7. 120π . | 10. $36\sqrt{2}\pi$. |
| 2. 40π . | 5. 40π . | 8. 6π . | 11. 24π . |
| 3. 200π . | 6. 10π . | 9. 36π . | 12. 10π . |

КОНУС

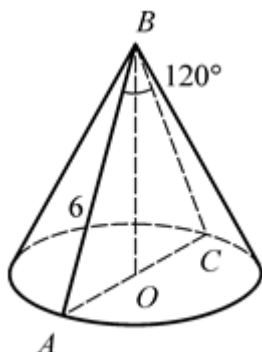
1. Дано: $l = 13$, $R = 5$.
Найдите H .



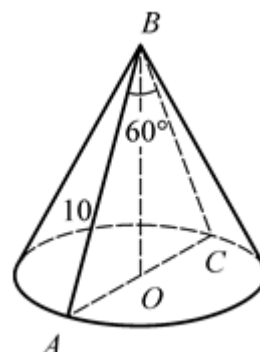
2. Дано: $\angle ABC = 90^\circ$, $l = 3\sqrt{2}$.
Найдите H .



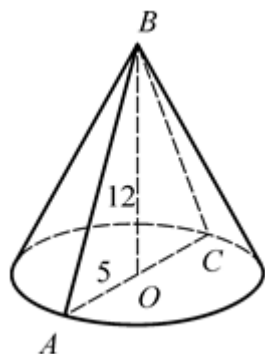
3. Дано: $\angle ABC = 120^\circ$, $l = 6$.
Найдите H .



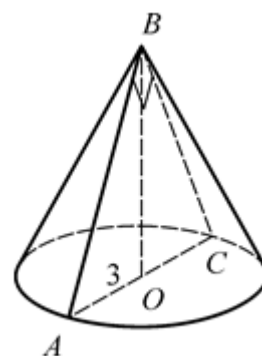
4. Дано: $\angle ABC = 60^\circ$, $l = 10$.
Найдите R .



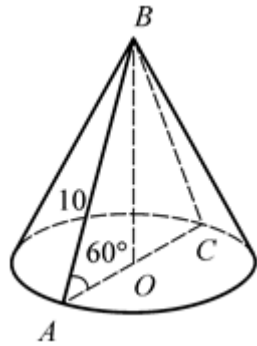
5. Дано: $R = 5$, $H = 12$.
Найдите l .



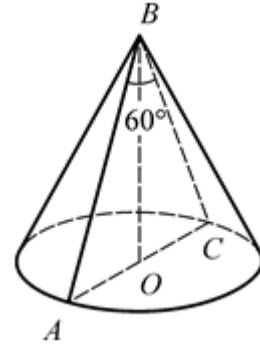
6. Дано: $\angle ABC = 90^\circ$, $R = 3$.
Найдите S_{ABC} .



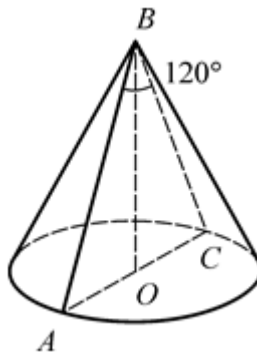
7. Дано: $l = 10$, $\angle BAC = 60^\circ$.
Найдите R .



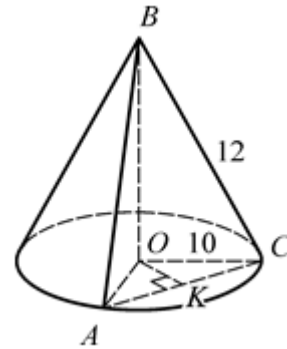
8. Дано: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{ABC} = 16\sqrt{3}$.
Найдите l .



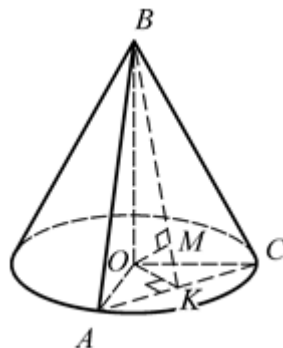
9. Дано: $\angle ABC = 120^\circ$,
 $S_{ABC} = 16\sqrt{3}$.
Найдите l .



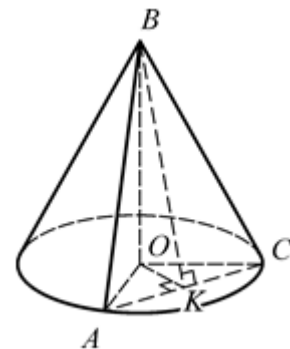
10. Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний, $l = 12$, $R = 10$, $OK \perp AC$.
Найдите OK .



11. Дано: $H = 12$, $OK \perp AC$,
 $\angle OKB = 60^\circ$, $OM \perp BK$.
Найдите OM .



12. Дано: $H = 12$, $OK \perp AC$,
 $\angle OKB = 30^\circ$, $\angle AOC = 60^\circ$.
Найдите R .



Конус

1. 12.

2. 3.

3. 3.

4. 5.

5. 13.

6. 9.

7. 5.

8. 8.

9. 8.

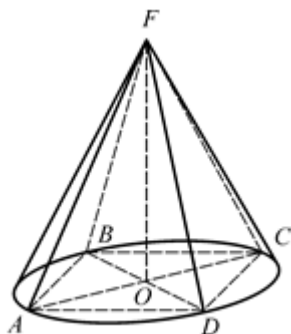
10. 8.

11. 6.

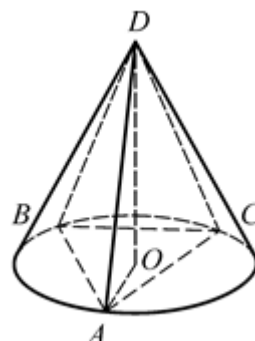
12. 24.

ВПИСАННЫЙ ИЛИ ОПИСАНЫЙ КОНУС

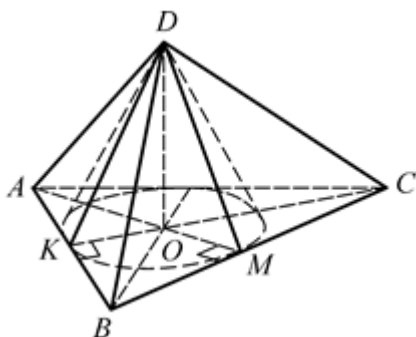
1. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $AB = 4\sqrt{2}$, $H = 3$.
 Найдите $S_{\text{бок. кон.}}$



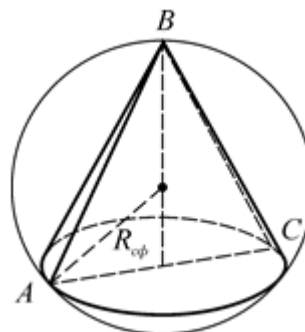
2. Дано: $AB = AC = BC = 3$, $H = 1$.
 Найдите l .



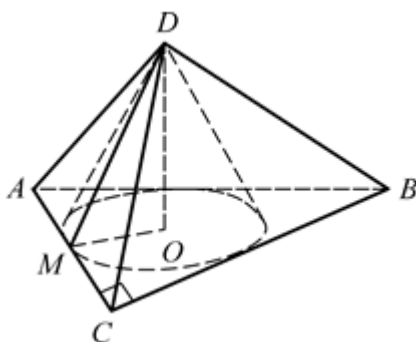
3. Дано: $AB = AC = BC = 6$,
 $DO \perp (ABC)$, $DO = 1$.
 Найдите l .



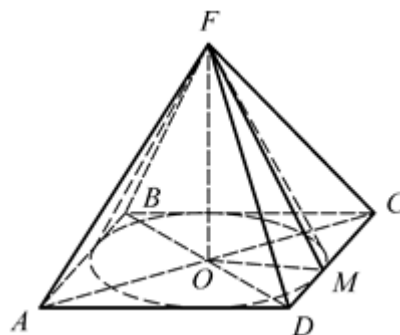
4. Дано: $\angle ABC = 60^\circ$,
 $R_{\text{опис. сферы}} = 6$.
 Найдите $S_{\text{бок. кон.}}$



5. Дано: $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$,
 $CB = 4$, $l = \sqrt{5}$.
 Найдите H .



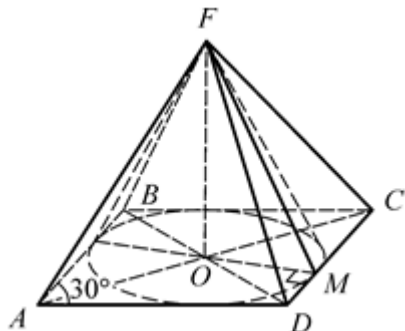
6. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $S_{ABCD} = 64$, $H = 3$.
 Найдите $S_{\text{бок. кон.}}$



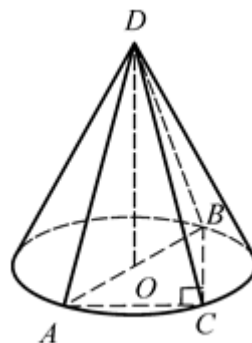
7. Дано: $ABCD$ – ромб, $\angle BAD = 30^\circ$,
 $S_{\text{бок. кон.}} = 20\pi$, $l = 5$.

8. Дано: $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = 6$,
 $BC = 8$, $H = 12$.

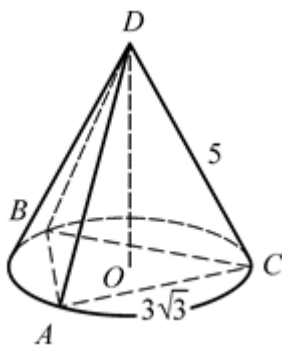
Найдите S_{ABCD} .



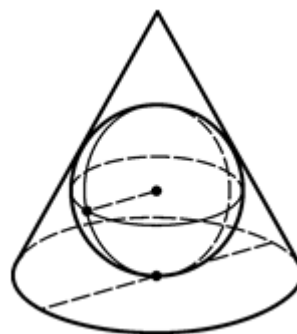
Найдите $S_{\text{бок. кон.}}$.



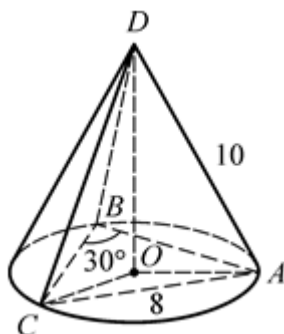
9. Дано: $AB = AC = BC = 3\sqrt{3}$,
 $DC = 5$.
 Найдите H .



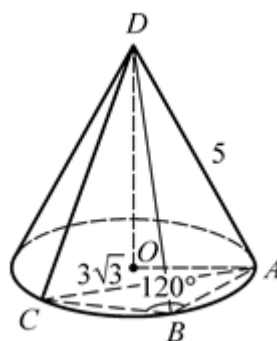
10. Дано: $r_{\text{впис. сферы}} = \sqrt{3}$,
 $H = 3r_{\text{сф.}}$.
 Найдите $S_{\text{бок. кон.}}$.



11. Дано: $AC = 8$, $\angle ABC = 30^\circ$,
 $AD = 10$.
 Найдите $S_{\text{бок. цил.}}$.



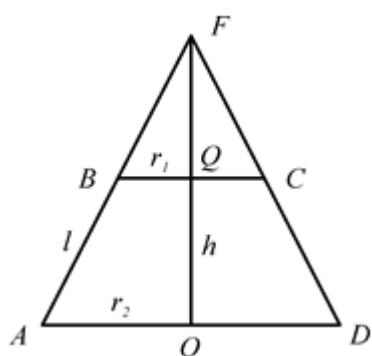
12. Дано: $AC = 3\sqrt{3}$,
 $\angle ABC = 120^\circ$, $AD = 5$.
 Найдите $S_{\text{бок. цил.}}$.



Вписанный или описанный конус

- | | | |
|--------------|---------------------|--|
| 1. 20π . | 5. $2(r = p - c)$. | 9. 4. |
| 2. 2. | 6. 20π . | 10. 18π . |
| 3. 2. | 7. 128. | 11. 80π ($R = 8$ по теореме синусов). |
| 4. 54π . | 8. 65π . | 12. 15π . |

УСЕЧЕННЫЙ КОНУС



AFD – осевое сечение конуса;

$ABCD$ – осевое сечение усеченного конуса;

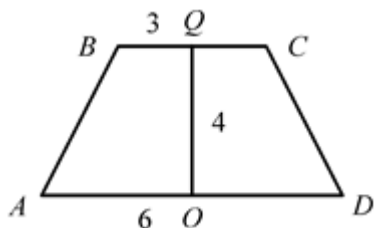
r_1 – радиус верхнего основания усеченного конуса;

r_2 – радиус нижнего основания усеченного конуса;

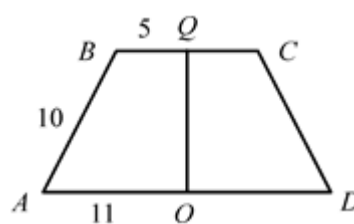
h – высота усеченного конуса;

l – образующая усеченного конуса.

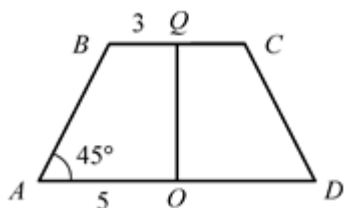
1. Дано: $r_1 = 3$, $r_2 = 6$, $h = 4$.
Найдите l .



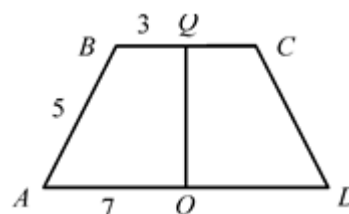
2. Дано: $r_1 = 5$, $r_2 = 11$, $l = 10$.
Найдите h .



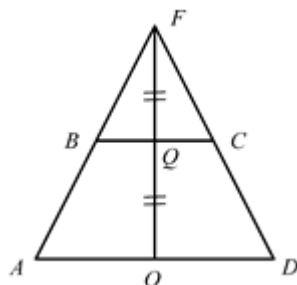
3. Дано: $r_1 = 3$, $r_2 = 5$,
 $\angle BAO = 45^\circ$.
Найдите h .



4. Дано: $r_1 = 3$, $r_2 = 7$, $l = 5$.
Найдите S_{ABCD} .

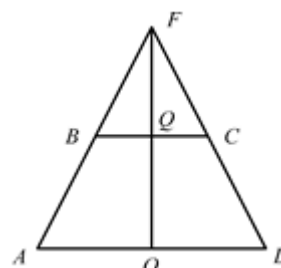


5. Дано: $OQ = QF$, $S_1 = 16\pi$.
Найдите r_2 .



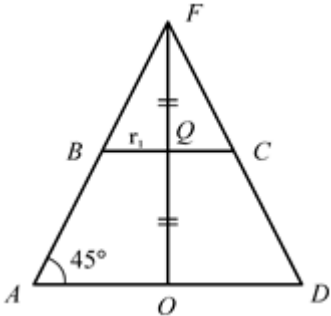
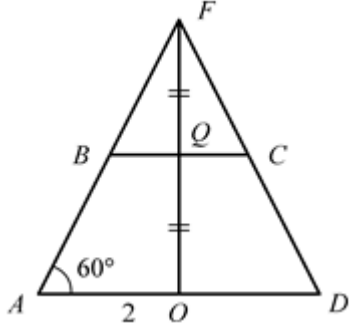
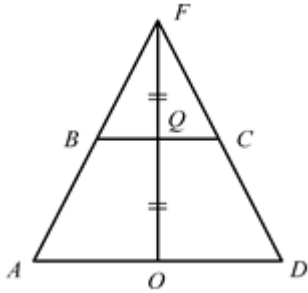
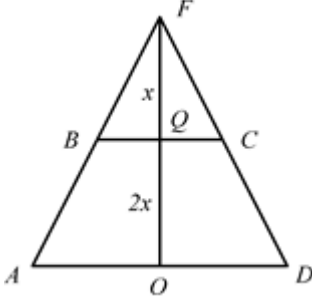
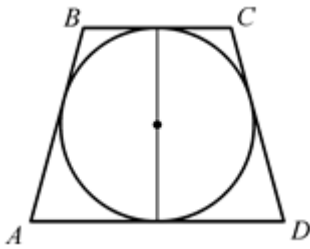
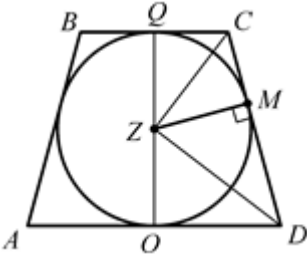
6. Дано: $S_1 = 9\pi$, $S_2 = 36\pi$.

Найдите $\frac{OF}{QF}$.



7. Дано: $OQ = QF$,
 $S_{\text{бок. усеч}} = 12\pi\sqrt{2}$.

8. Дано: $OQ = QF$, $r_2 = 2$.
Найдите $S_{\text{бок. усеч}}$.

<p>Найдите r_1.</p> 	
<p>9. Дано: $OQ = QF$.</p> <p>Найдите $\frac{S_{\text{бок. усеч}}}{S_{\text{бок}}}$.</p> 	<p>10. Дано: $FQ : QO = 1 : 2$.</p> <p>Найдите $\frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок. усеч}}}$.</p> 
<p>11. Дано: в усеченный конус вписана сфера, $l = 5$, $r_2 = 4r_1$. Найдите радиус вписанной сферы.</p> 	<p>12. Дано: в усеченный конус вписана сфера, $r_1 = 9$, $r_2 = 16$. Найдите S_{ABCD}.</p> 

Усеченный конус

1. 5.

4. 30.

7. 2.

10. 1,125.

2. 8.

5. 8.

8. 6π .

11. 2.

3. 2.

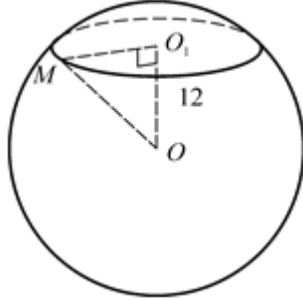
6. 2.

9. 0,75.

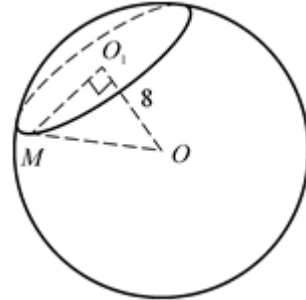
12. 600.

СФЕРА

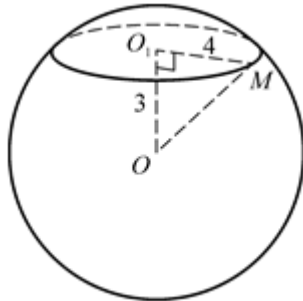
1. Дано: $\alpha \cap W = \omega$, $OO_1 \perp \alpha$,
 $OO_1 = 12$, $S_\omega = 25\pi$.
 Найдите $R_{\text{сф}}$.



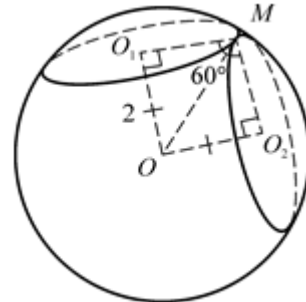
2. Дано: $\alpha \cap W = \omega$, $OO_1 \perp \alpha$,
 $OO_1 = 8$, $C_\omega = 12\pi$.
 Найдите $S_{\text{сф}}$.



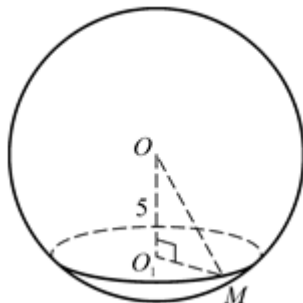
3. Дано: $\alpha \cap W = \omega$, $OO_1 \perp \alpha$,
 $OO_1 = 3$, $r_\omega = 4$.
 Найдите $S_{\text{сф}}$.



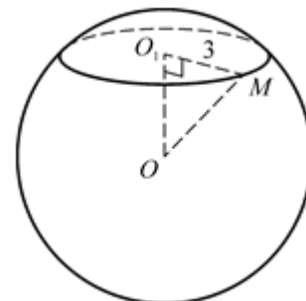
4. Дано: $\alpha \cap W = \omega_1$, $\beta \cap W = \omega_2$, $\omega_1 \cap \omega_2 = M$,
 $OO_1 \perp \alpha$, $OO_2 \perp \beta$, $OO_1 = OO_2 = 2$, $\angle O_1MO_2 = 60^\circ$.
 Найдите $R_{\text{сф}}$.



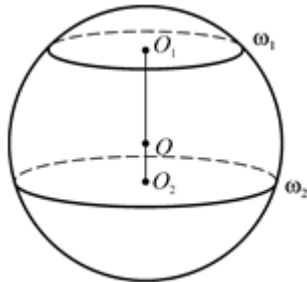
5. Дано: $\alpha \cap W = \omega$, $OO_1 \perp \alpha$,
 $S_{\text{сф}} = 676\pi$, $OO_1 = 5$.
 Найдите r_ω .



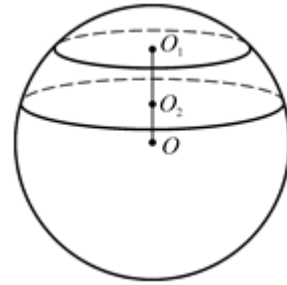
6. Дано: $\alpha \cap W = \omega$, $OO_1 \perp \alpha$,
 $S_{\text{сф}} = 100\pi$, $r_\omega = 3$.
 Найдите $\rho(O, \alpha)$.



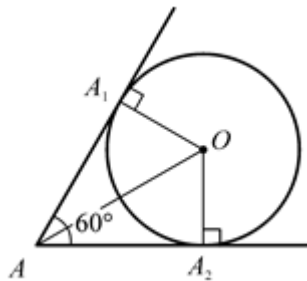
7. Дано: $\alpha_1 \cap W = \omega_1$,
 $S_{\omega_1} = 25\pi$, $\alpha_2 \cap W = \omega_2$,
 $S_{\omega_2} = 144\pi$, $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, $O_1O_2 = 17$.
 Найдите $S_{\text{сф}}$.



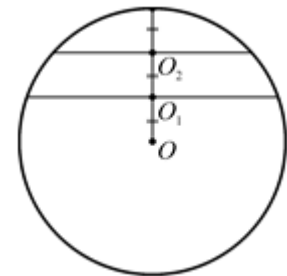
8. Дано: $\alpha_1 \cap W = \omega_1$,
 $C_{\omega_1} = 10\pi$, $\alpha_2 \cap W = \omega_2$,
 $C_{\omega_2} = 24\pi$, $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, $O_1O_2 = 7$.
 Найдите $S_{\text{сф}}$.



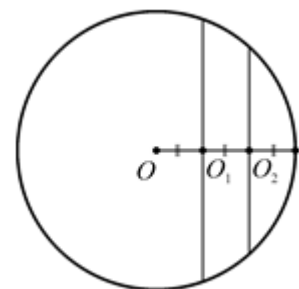
9. Дано: $\alpha_1 \cap W = A_1$,
 $\alpha_2 \cap W = A_2$, $S_{\text{сф}} = 36\pi$,
 $\angle(\alpha_1, \alpha_2) = 60^\circ$, $\alpha_1 \cap \alpha_2 = a$.
 Найдите $\rho(O, a)$.



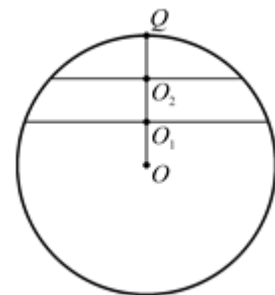
10. Дано: $\alpha_1 \cap W = \omega_1$,
 $\alpha_2 \cap W = \omega_2$, $\alpha_1 \parallel \alpha_2$,
 $OO_1 = O_1O_2 = \frac{1}{3}R_{\text{сф}}$, $S_{\omega_2} = 5\pi$.
 Найдите $S_{\text{сф}}$.



11. Дано: $\alpha_1 \cap W = \omega_1$,
 $\alpha_2 \cap W = \omega_2$, $\alpha_1 \parallel \alpha_2$,
 $OO_1 = O_1O_2 = \frac{1}{3}R_{\text{сф}}$, $S_{\text{сф}} = 36\pi$.
 Найдите $S_{\omega_1} + S_{\omega_2}$.



12. Дано: $\alpha_1 \cap W = \omega_1$,
 $\alpha_2 \cap W = \omega_2$, $\alpha_1 \parallel \alpha_2$,
 $OO_1 : O_1O_2 : O_2Q = 1 : 3 : 2$,
 $S_{\omega_1} + S_{\omega_2} = 55\pi$.
 Найдите $S_{\text{сф}}$.



Сфера

1. 13.
2. 400π .
3. 100π .

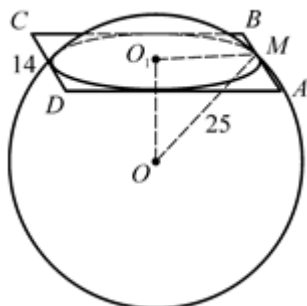
4. 4.
5. 12.
6. 4.

7. 676π .
8. 676π .
9. 6.

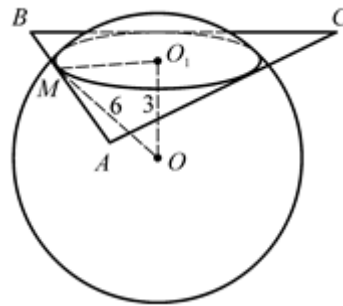
10. 36π .
11. 13π .
12. 144π .

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ

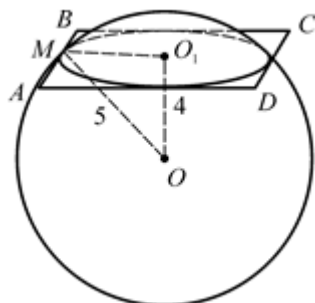
1. Дано: $ABCD$ – квадрат, $AB = 14$, все стороны касаются сферы, $R_{\text{сф}} = 25$.
Найдите $\rho(O, (ABC))$.



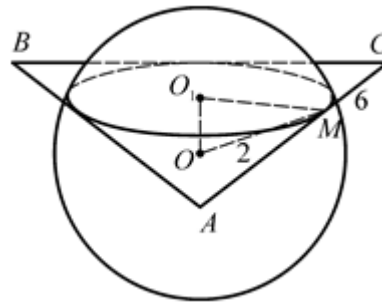
2. Дано: $\triangle ABC$ – правильный, $OO_1 \perp (ABC)$, $OO_1 = 3$, все стороны касаются сферы, $R_{\text{сф}} = 6$.
Найдите AB .



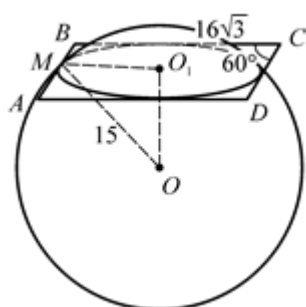
3. Дано: $ABCD$ – квадрат, все стороны касаются сферы, $R_{\text{сф}} = 5$, $OO_1 \perp (ABC)$, $OO_1 = 4$.
Найдите AB .



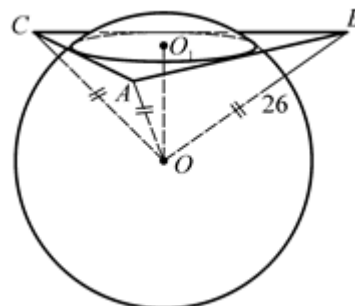
4. Дано: $\triangle ABC$, $AB = AC = BC = 6$, все стороны касаются сферы, $R_{\text{сф}} = 2$, $OO_1 \perp (ABC)$.
Найдите OO_1 .



5. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 16\sqrt{3}$, $\angle BAD = 60^\circ$, все стороны касаются сферы, $R_{\text{сф}} = 15$, $OO_1 \perp (ABC)$.
Найдите OO_1 .



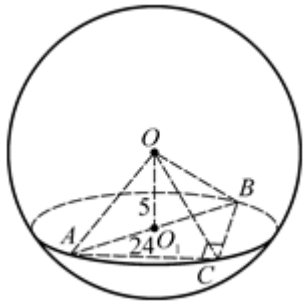
6. Дано: $\triangle ABC$ – правильный, все стороны касаются сферы, $P_{ABC} = 144\sqrt{3}$, $AO = BO = CO = 26$, $OO_1 \perp (ABC)$.
Найдите OO_1 .



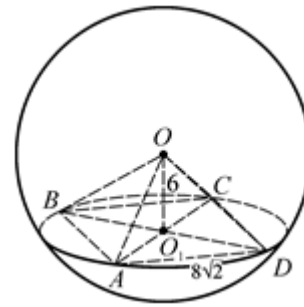
7. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,

8. Дано: $ABCD$ – квадрат,

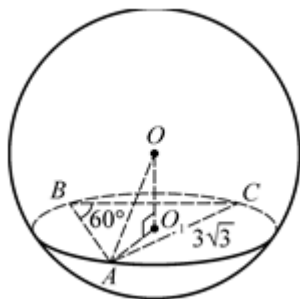
$A \in W, B \in W, C \in W, AB = 24, OO_1 \perp (ABC), OO_1 = 5$.
Найдите $S_{\text{сф}}$.



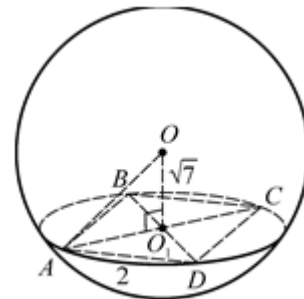
$A \in W, B \in W, C \in W, AB = 8\sqrt{2}, OO_1 \perp (ABC), OO_1 = 6$.
Найдите $S_{\text{сф}}$.



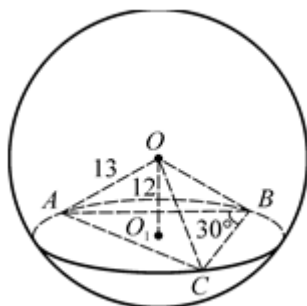
9. Дано: $\triangle ABC, \angle ABC = 60^\circ, AC = 3\sqrt{3}, A \in W, B \in W, C \in W, OO_1 \perp (ABC), R_{\text{сф}} = 5$.
Найдите OO_1 .



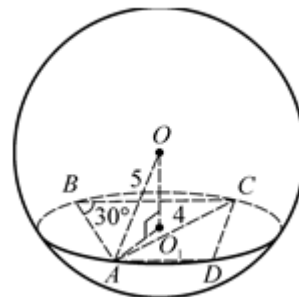
10. Дано: $ABCD$ – ромб, $A \in W, B \in W, C \in W, AB = 2, OO_1 \perp (ABC), OO_1 = \sqrt{7}$.
Найдите $R_{\text{сф}}$.



11. Дано: $\triangle ABC, A \in W, B \in W, C \in W, OO_1 \perp (ABC), OO_1 = 12, R_{\text{сф}} = 13, \angle ABC = 30^\circ$.
Найдите AC .



12. Дано: $ABCD$ – трапеция, $A \in W, B \in W, C \in W, D \in W, AC = 4, \angle ABC = 30^\circ, OO_1 \perp (ABC), R_{\text{сф}} = 5$.
Найдите OO_1 .



1. 24.

2. 18.

3. 6.

4. 1.

5. 9.

6. 10.

7. 676π .

8. 400π .

9. 4.

10. 3.

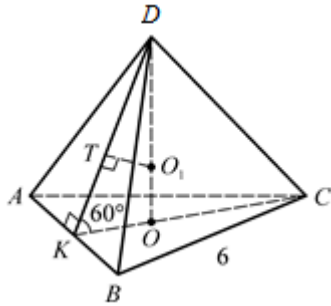
11. 5.

12. 3.

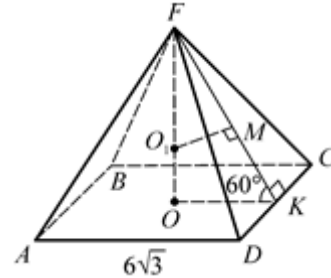
СФЕРА, ВПИСАННАЯ В ПИРАМИДУ

O_1 – центр сферы, вписанной в пирамиду.

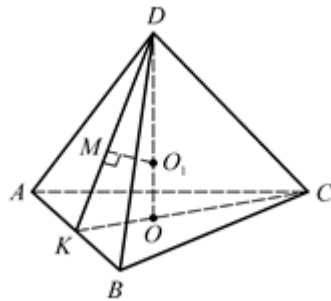
1. Дано: $\triangle ABC$ – правильный, $AB = 6$, $DK \perp AB$, $\angle DKC = 60^\circ$.
Найдите $r_{\text{сф}}$.



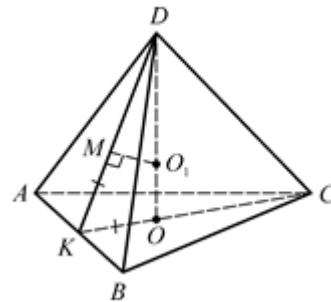
2. Дано: $ABCD$ – квадрат, $AB = 6\sqrt{3}$, $FK \perp DC$, $\angle FKO = 60^\circ$. Найдите $r_{\text{сф}}$.



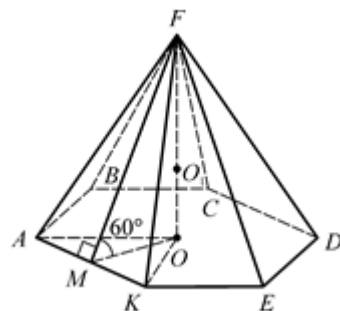
3. Дано: $\triangle ABC$ – правильный, $DO_1 : O_1O = 2 : 1$, M – точка касания вписанной сферы.
Найдите $\angle DKO$.



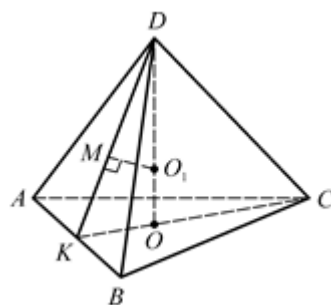
4. Дано: $\triangle ABC$ – правильный, M – точка касания вписанной сферы, $DM = KO$.
Найдите $\angle DKO$.



5. Дано: $ABCDEK$ – правильный, $S_{\text{осн}} = 6\sqrt{3}$, $FM \perp AK$, $\angle FMO = 60^\circ$. Найдите $r_{\text{сф}}$.



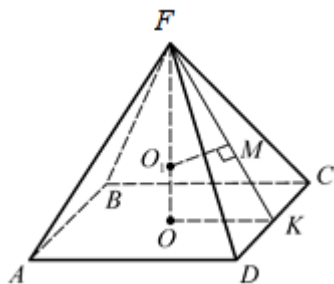
6. Дано: $\triangle ABC$ – правильный, M – точка касания вписанной сферы, $KM = \sqrt{3}$. Найдите P_{ABC} .



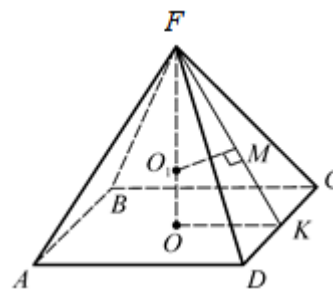
7. Дано: $ABCD$ – квадрат, M – точка касания вписанной сферы, $\angle OFM = 30^\circ$.

8. Дано: $ABCD$ – квадрат, M – точка касания вписанной

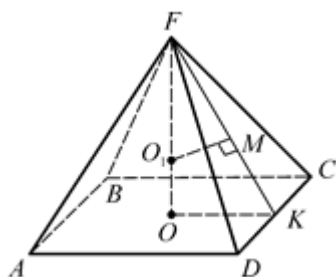
Найдите $\frac{FO_1}{O_1O}$.



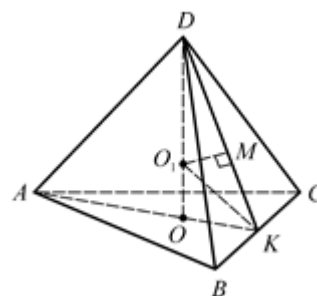
сферы, $P_{ABCD} = 8\sqrt{3}$, $OO_1 = 1$.
Найдите $\angle OKM$.



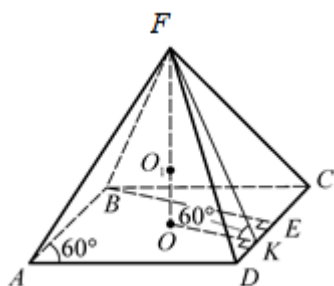
9. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 M – точка касания вписанной
сферы, $AD = 6$, $FK = 5$.
Найдите $r_{\text{сф}}$.



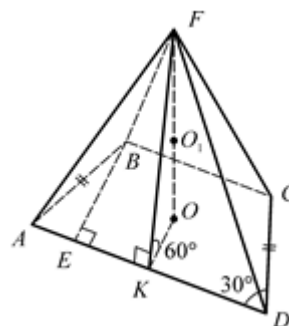
10. Дано: $\triangle ABC$ – правильный, $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$, M – точка касания
вписанной сферы, $\angle DKO = 30^\circ$.
Найдите DO .



11. Дано: $ABCD$ – ромб,
 $\angle BAD = 60^\circ$, $FK \perp DC$,
 $\angle FKO = 60^\circ$, $S_{\text{впис. сф}} = 64\pi$.
Найдите AD .



12. Дано: $ABCD$ – трапеция,
 $AB = CD$, $\angle BAD = 30^\circ$,
 $S_{\text{впис. сф}} = 4\pi$, $FK \perp AD$,
 $\angle FKO = 60^\circ$. Найдите P_{ABCD} .



Сфера, вписанная в пирамиду

1. 1.

2. 3.

3. 60° .

4. 60° .

5. 1.

6. 18.

7. 2.

8. 60° .

9. 1,5.

10. 1.

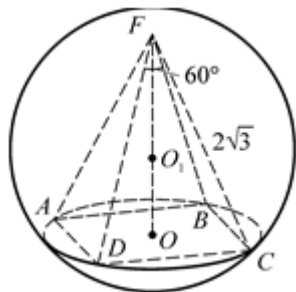
11. 16.

12. $16\sqrt{3}$.

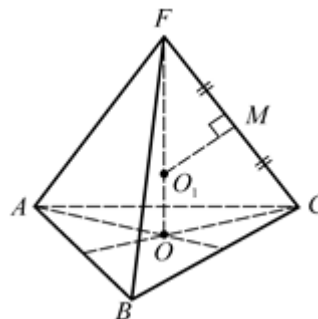
СФЕРА, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ПИРАМИДЫ

O_1 – центр сферы, описанной около пирамиды.

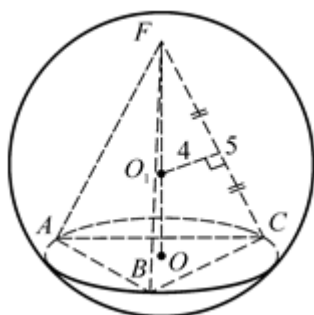
1. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $AF = 2\sqrt{3}$, $\angle BFD = 60^\circ$.
 Найдите $R_{\text{сф}}$.



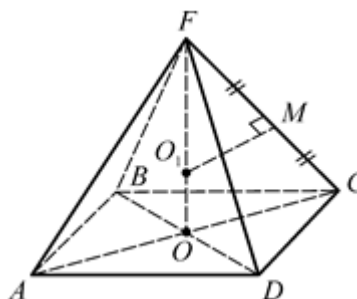
2. Дано: $\triangle ABC$ – правильный, $FO_1 : O_1O = 2 : 1$.
 Найдите $\angle FCO$.



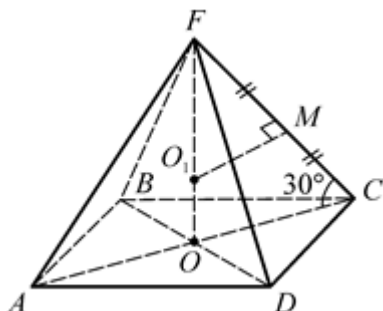
3. Дано: $\triangle ABC$ – правильный,
 $FC = 5$, $FO = 4$.
 Найдите $R_{\text{сф}}$.



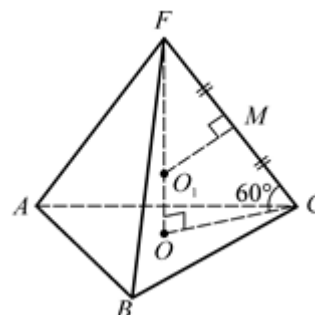
4. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $AB = 3\sqrt{2}$, $FC = 5$.
 Найдите $R_{\text{сф}}$.



5. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $R_{\text{сф}} = 2$, $\angle FCO = 30^\circ$.
 Найдите FC .



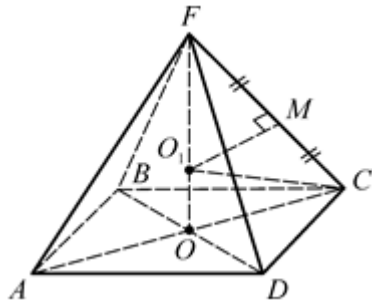
6. Дано: $FO \perp (ABC)$, O – центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, $\angle FCO = 60^\circ$, $R_{\text{сф}} = 4$.
 Найдите FC .



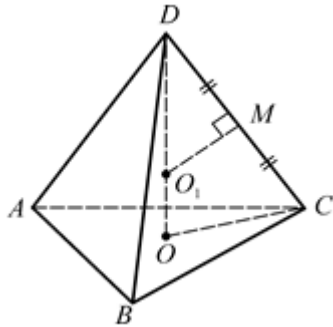
7. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $AF = AC$.

8. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $AF = AC = 3\sqrt{3}$. Найдите $R_{\text{сф}}$.

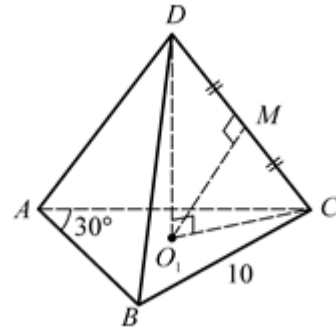
Найдите $\angle FO_1C$.



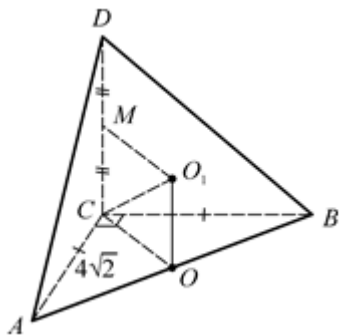
9. Дано: $\triangle ABC$, O – центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности,
 $DC = 10$.
 Найдите $DO_1 \cdot DO$.



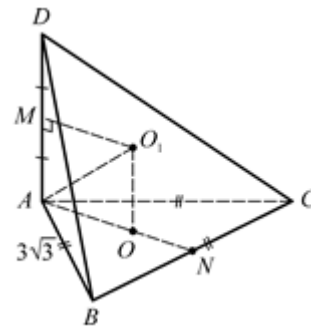
10. Дано: $\triangle ABC$, O_1 – центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности,
 $BC = 10$, $\angle BAC = 30^\circ$.
 Найдите DO_1 .



11. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AC = CB = 4\sqrt{2}$, $DC \perp (ABC)$,
 $DC = 6$.
 Найдите $R_{\text{сф}}$.



12. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = AC = 3\sqrt{3}$, $AD = 8$.
 Найдите $R_{\text{сф}}$.



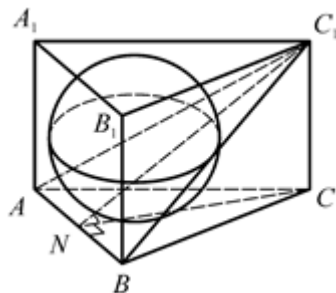
Сфера, описанная около пирамиды

- | | | | |
|---------------------|---------------------|------------------|---------|
| 1. 2. | 4. $\frac{25}{8}$. | 7. 120° . | 10. 10. |
| 2. 60° . | 5. 2. | 8. 3. | 11. 5. |
| 3. $\frac{25}{8}$. | 6. $4\sqrt{3}$. | 9. 50. | 12. 5. |

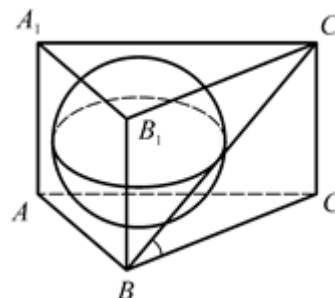
СФЕРА, ВПИСАННАЯ В ПРИЗМУ

Сфера вписана в призму.

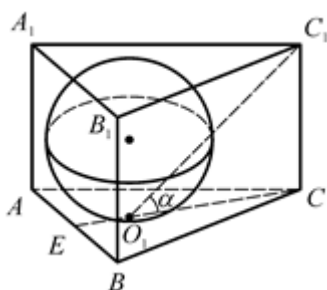
1. Дано: $\triangle ABC$ – правильный, $CN \perp AB$. Найдите $\text{ctg} \angle C_1NC$.



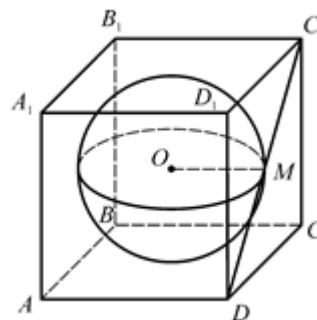
2. Дано: $\triangle ABC$ – правильный. Найдите $\angle C_1BC$.



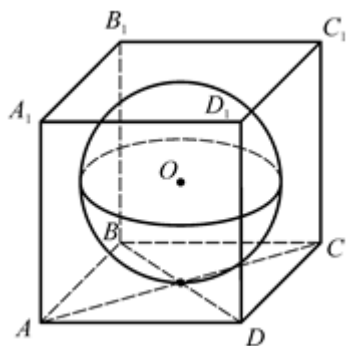
3. Дано: $\triangle ABC$ – правильный, O_1 – центр ABC . Найдите $\angle C_1O_1C$.



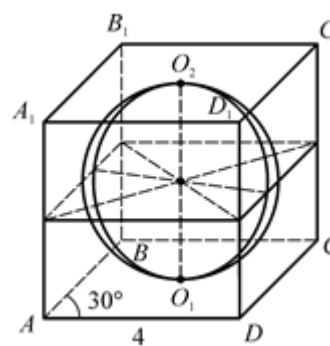
4. Дано: $ABCD$ – квадрат, $DC_1 = 4\sqrt{2}$. Найдите $r_{\text{сф}}$.



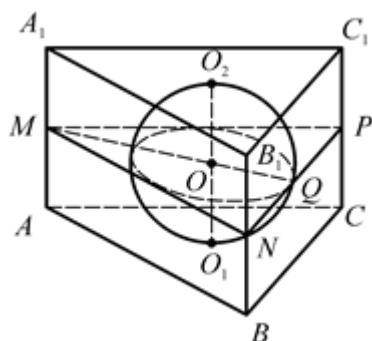
5. Дано: $ABCD$ – ромб, $AC = 12$, $BD = 16$. Найдите $r_{\text{сф}}$.



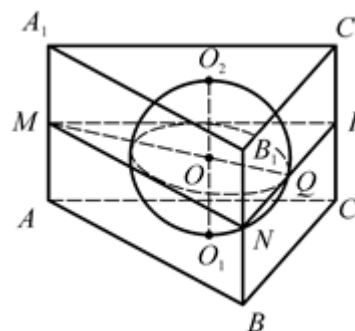
6. Дано: $ABCD$ – ромб, $AD = 4$, $\angle BAD = 30^\circ$. Найдите AA_1 .



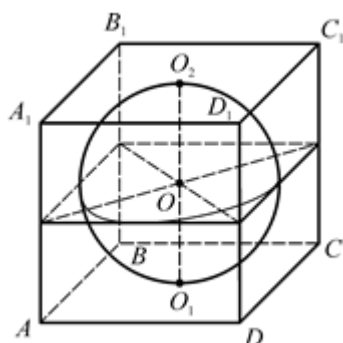
7. Дано: $\triangle ABC$ – правильный,
 $r_{\text{сф}} = \sqrt{3}$. Найдите AB .



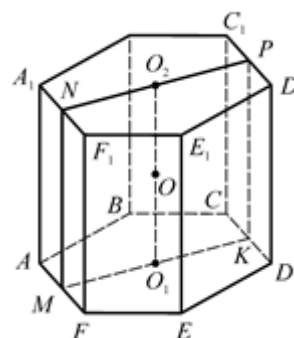
8. Дано: $\triangle ABC$ – правильный,
 $AB = 12\sqrt{3}$. Найдите AA_1 .



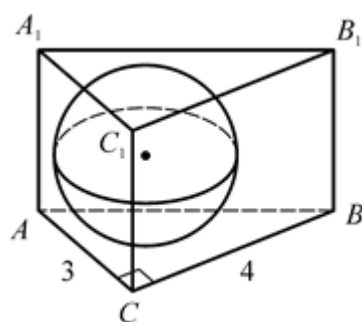
9. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб,
 $S_{\text{сф}} = 64\pi$. Найдите $S_{\text{куба}}$.



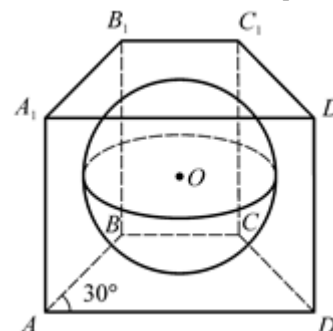
10. Дано: $ABCDEF$ – правильный,
 сумма всех ребер равна $24 + 12\sqrt{3}$.
 Найдите $r_{\text{сф}}$.



11. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AC = 3$, $BC = 4$. Найдите $r_{\text{сф}}$.



12. Дано: $ABCD$ – трапеция,
 $AB = CD$, $P_{ABCD} = 16$,
 $\angle BAD = 30^\circ$. Найдите $r_{\text{сф}}$.



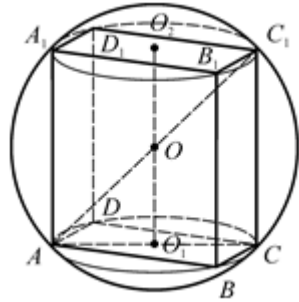
Сфера, вписанная в призму

- | | | | |
|--------------------|---------|---------|------------------|
| 1. $\frac{2}{3}$. | 4. 2. | 7. 6. | 10. $\sqrt{3}$. |
| 2. 30° . | 5. 4,8. | 8. 12. | 11. 1. |
| 3. 45° . | 6. 2. | 9. 384. | 12. 1. |

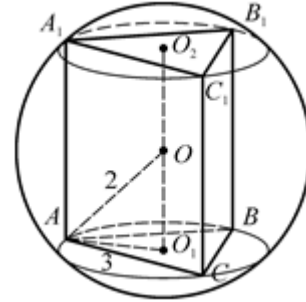
СФЕРА, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ПРИЗМЫ

Сфера описана около призмы.

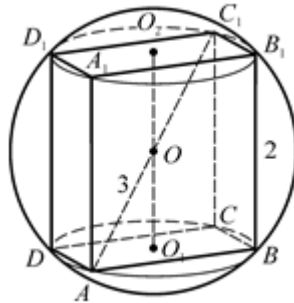
1. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 2$, $CC_1 = 8$.
 Найдите $R_{\text{сф}}$.



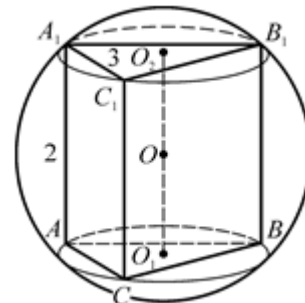
2. Дано: $\triangle ABC$, $AB = AC = BC = 3$,
 $R_{\text{сф}} = 2$.
 Найдите AA_1 .



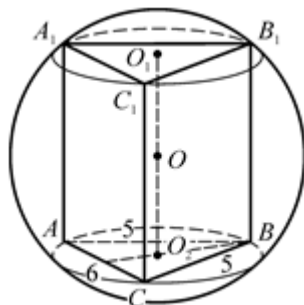
3. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $R_{\text{сф}} = 3$, $AA_1 = 2$.
 Найдите AB .



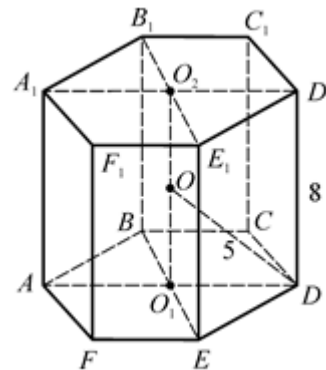
4. Дано: $\triangle ABC$, $AB = AC = BC = 3$,
 $AA_1 = 2$.
 Найдите $R_{\text{сф}}$.



5. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = 5$,
 $AC = 6$, $AA_1 = \frac{\sqrt{26}}{2}$.
 Найдите $R_{\text{сф}}$.

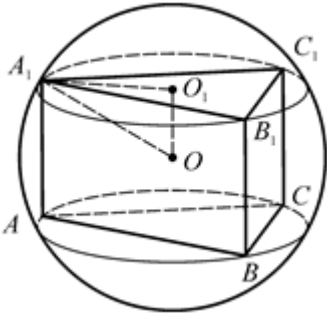
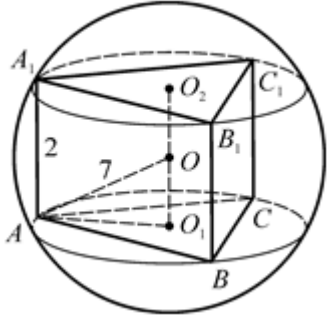
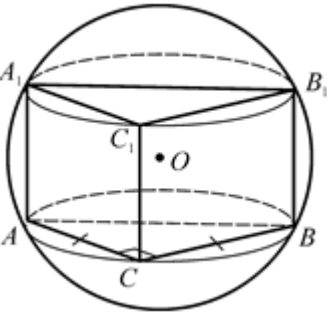
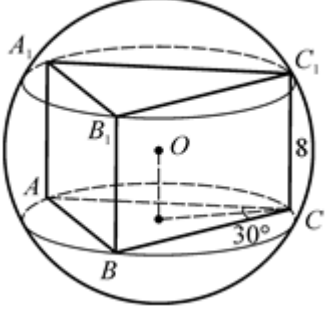
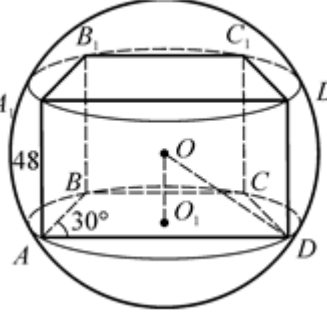
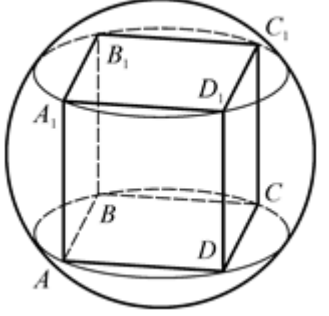


6. Дано: $ABCDEF$ – правильный,
 $AA_1 = 8$, $R_{\text{сф}} = 5$.
 Найдите AB .



7. Дано: $\triangle ABC$ – правильный,
 $R_{\text{сф}} = 10$, $S_{\text{осн}} = 27\sqrt{3}$.

8. Дано: $\triangle ABC$ – правильный,
 $R_{\text{сф}} = 7$, $AA_1 = 2$.

<p>Найдите AA_1.</p> 	<p>Найдите AB.</p> 
<p>9. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB$, $AA_1 = 12$, $R_{\text{сф}} = 10$. Найдите $S_{\text{осн}}$.</p> 	<p>10. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 30^\circ$, $R_{\text{сф}} = 5$, $CC_1 = 8$. Найдите AB.</p> 
<p>11. Дано: $ABCD$ – трапеция, $\angle BAD = 30^\circ$, $R_{\text{сф}} = 25$, $AA_1 = 48$. Найдите BD.</p> 	<p>12. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, $AB = 6\sqrt{3}$. Найдите $R_{\text{сф}}$.</p> 

Сфера, описанная около призмы

1. 5.

4. 2.

7. 16.

10. 3.

2. 2.

$\frac{27}{8}$
5. 8.

8. 12.

11. 7.

3. 4.

6. 3.

9. 64.

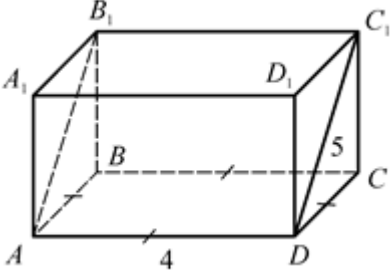
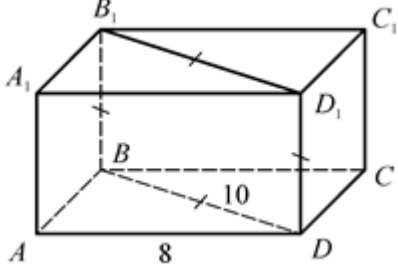
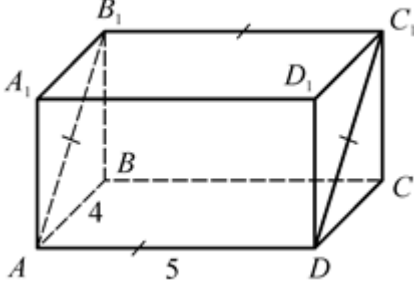
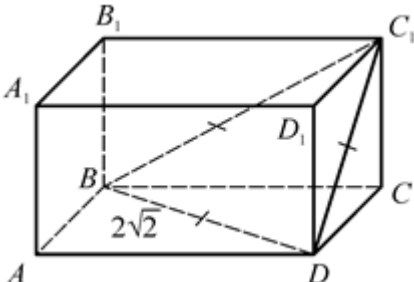
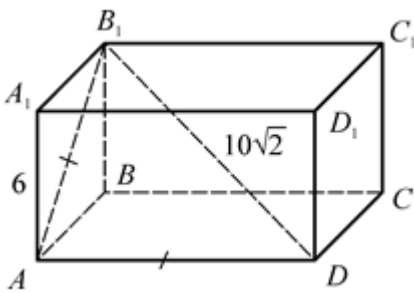
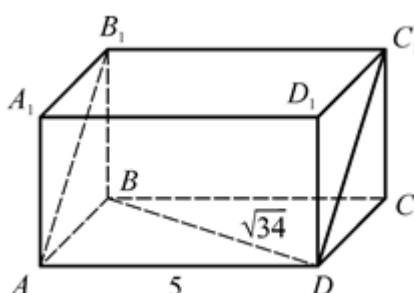
12. 9.

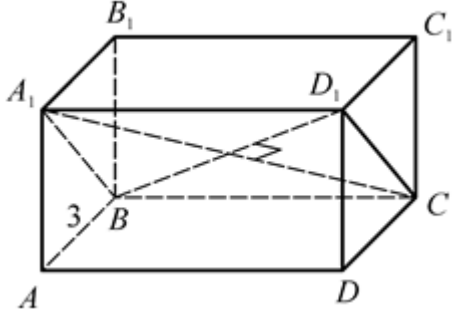
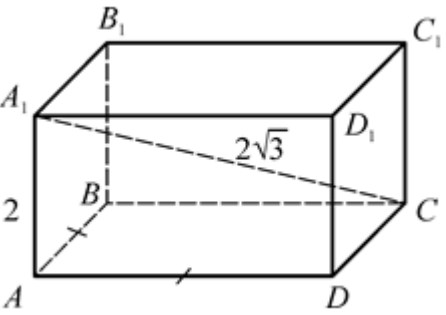
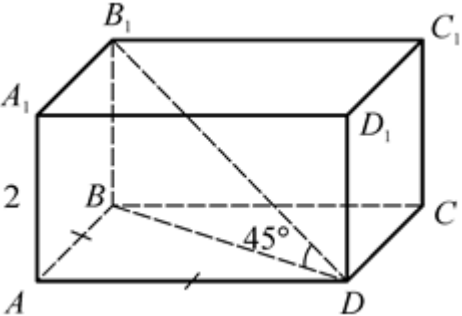
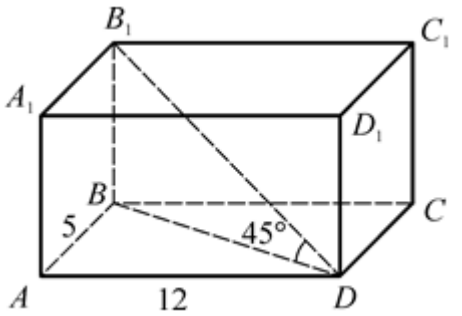
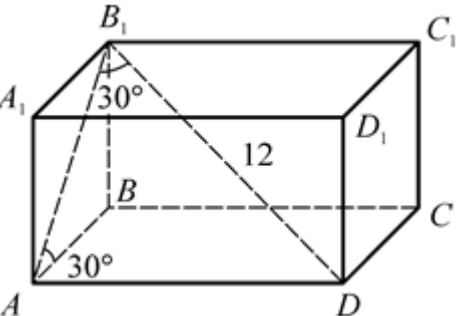
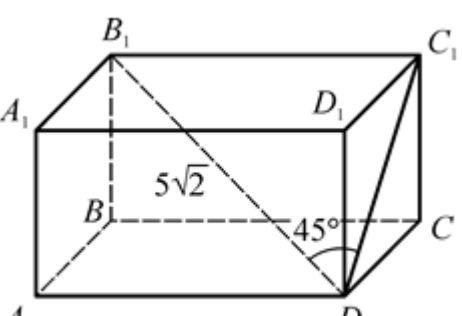
Объемы параллелепипеда, призмы, цилиндра

ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед.

Найдите объем параллелепипеда.

<p>1. Дано: $ABCD$ – квадрат, $AD = 4$, $DC_1 = 5$.</p> 	<p>2. Дано: $BB_1 D_1 D$ – квадрат, $BD = 10$, $AD = 8$.</p> 
<p>3. Дано: $AB_1 C_1 D$ – квадрат, $AD = 5$, $AB = 4$.</p> 	<p>4. Дано: $BD = BC_1 = DC_1 = 2\sqrt{2}$.</p> 
<p>5. Дано: $AA_1 = 6$, $B_1 D = 10\sqrt{2}$, $AB_1 = AD$.</p> 	<p>6. Дано: $AB_1 C_1 D$ – квадрат, $BD = \sqrt{34}$, $AD = 5$.</p> 
<p>7. Дано: $BD_1 \perp A_1 C$, $BD_1 = 5\sqrt{2}$, $AB = 3$.</p>	<p>8. Дано: $AB = AD$, $A_1 C = 2\sqrt{3}$,</p>

	$AA_1 = 2.$ 
<p>9. Дано: $AA_1 = 2, AB = AD,$ $\angle B_1DB = 45^\circ.$</p> 	<p>10. Дано: $AB = 5, AD = 12,$ $\angle B_1DB = 45^\circ.$</p> 
<p>11. Дано: $\angle AB_1D = \angle B_1AB = 30^\circ,$ $B_1D = 12.$</p> 	<p>12. Дано: $B_1D = 5\sqrt{2},$ $\angle B_1DC_1 = 45^\circ, \sin \angle C_1DC = 0,8.$</p> 

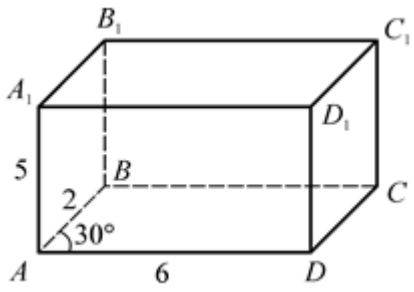
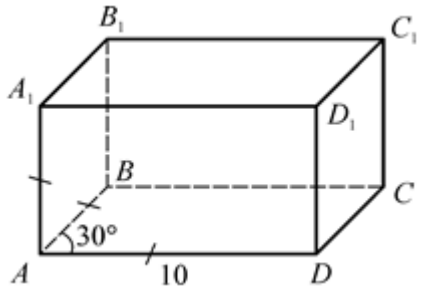
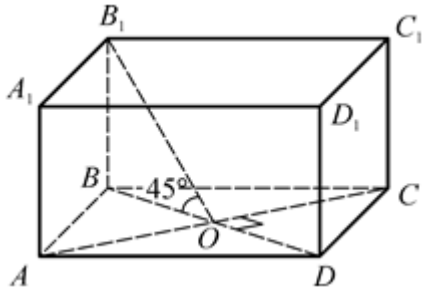
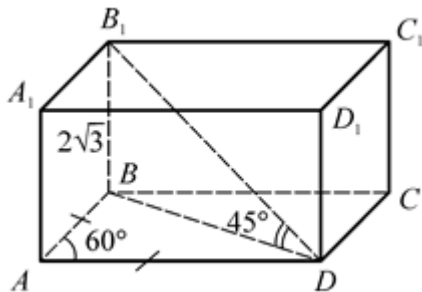
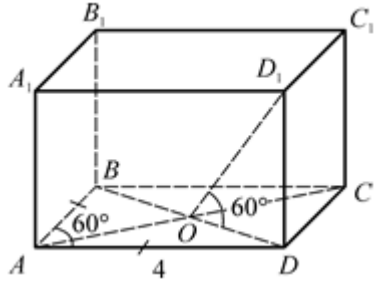
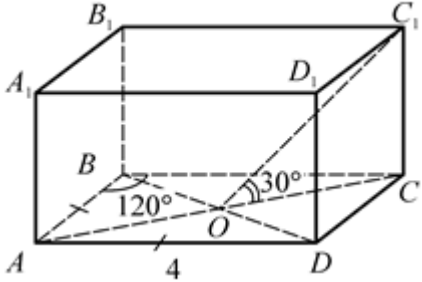
Объем прямоугольного параллелепипеда

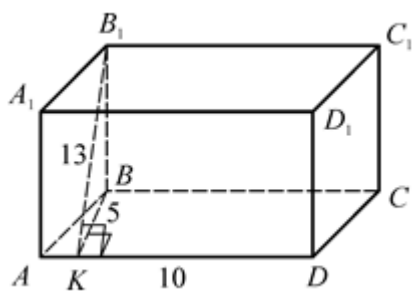
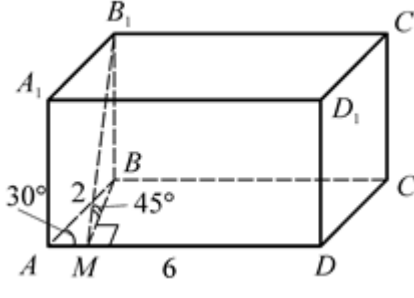
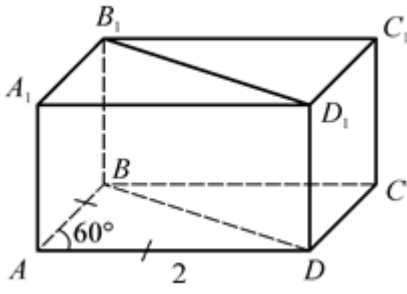
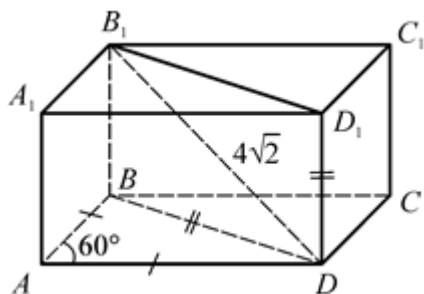
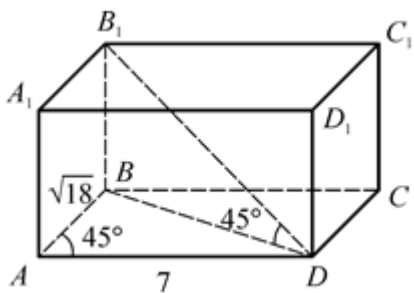
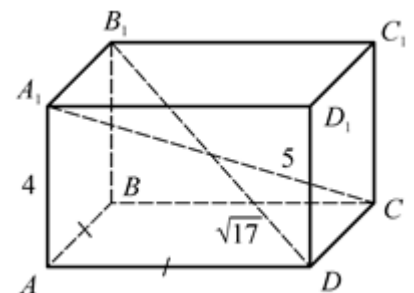
- | | | | |
|---------|---------|--------|--------------------|
| 1. 48. | 4. 8. | 7. 60. | 10. 780. |
| 2. 480. | 5. 480. | 8. 8. | 11. $162\sqrt{3}.$ |
| 3. 60. | 6. 60. | 9. 4. | 12. 60. |

ОБЪЕМ ПРЯМОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИДЕДА

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед.

Найдите объем параллелепипеда.

<p>1. Дано: $AB = 2, AD = 6, AA_1 = 5, \angle BAD = 30^\circ$.</p> 	<p>2. Дано: $AB = AD = AA_1 = 10, \angle BAD = 30^\circ$.</p> 
<p>3. Дано: $AC \perp BD, AC = 6, BD = 8, \angle BOB_1 = 45^\circ$.</p> 	<p>4. Дано: $AB = AD, \angle BAD = 60^\circ, \angle B_1DB = 45^\circ, BB_1 = 2\sqrt{3}$.</p> 
<p>5. Дано: $AB = AD = 4, \angle BAD = 60^\circ, \angle D_1OD = 60^\circ$.</p> 	<p>6. Дано: $AB = AD = 4, \angle ABC = 120^\circ, \angle C_1OC = 30^\circ$.</p> 
<p>7. Дано: $AB = AD, AD = 10, BK \perp AD, BK = 5, B_1K = 13$.</p>	<p>8. Дано: $AB = 2, AD = 6, \angle BAD = 30^\circ, BM \perp AD, \angle B_1MB = 45^\circ$.</p>

	
<p>9. Дано: $AB = AD = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$, BB_1D_1D – квадрат.</p> 	<p>10. Дано: $AB = AD$, $\angle BAD = 60^\circ$, $BD = DD_1$, $B_1D = 4\sqrt{2}$.</p> 
<p>11. Дано: $AD = 7$, $AB = \sqrt{18}$, $\angle BAD = 45^\circ$, $\angle BDB_1 = 45^\circ$.</p> 	<p>12. Дано: $AB = AD$, $A_1C = 5$, $B_1D = \sqrt{17}$, $AA_1 = 4$.</p> 

Объем прямого параллелепипеда

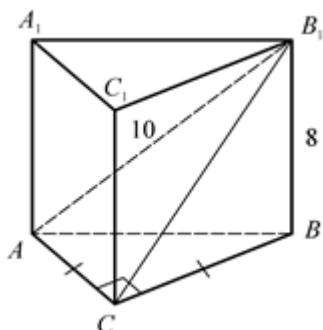
- | | | | |
|---------|-------------------|------------------|---|
| 1. 30. | 4. 36. | 7. 600. | 10. $32\sqrt{3}$. |
| 2. 500. | 5. 48. | 8. 6. | 11. 105. |
| 3. 128. | 6. $16\sqrt{3}$. | 9. $4\sqrt{3}$. | 12. $6 (S_{\text{осн}} = S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} d_1 d_2)$. |

ОБЪЕМ ПРЯМОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

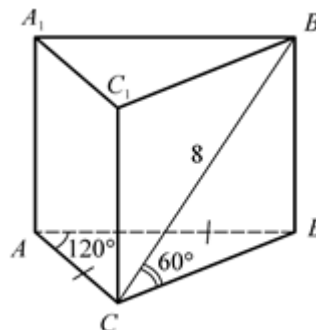
$ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная призма.

Найдите объем призмы.

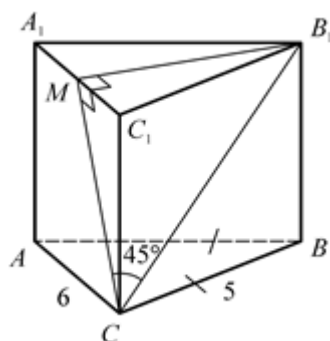
1. Дано: $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB$,
 $AB_1 = 10$, $BB_1 = 8$.



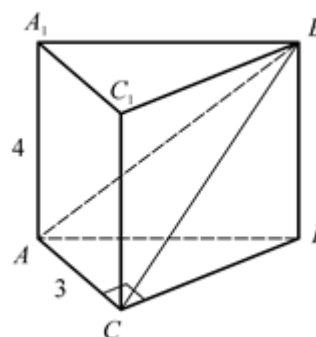
2. Дано: $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$,
 $B_1C = 8$, $\angle B_1CB = 60^\circ$.



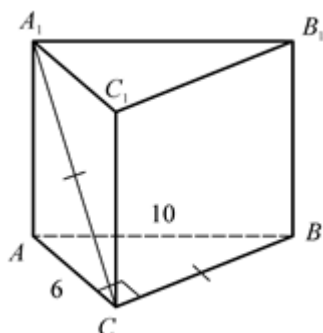
3. Дано: $AB = BC = 5$, $AC = 6$,
 $B_1M \perp A_1C_1$, $\angle MCB_1 = 45^\circ$.



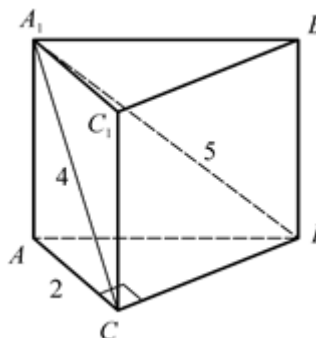
4. Дано: $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$,
 $AA_1 = 4$, $\angle((AB_1C), (ABC)) = 45^\circ$.



5. Дано: $\angle ACB = 90^\circ$, $A_1C = BC$,
 $AB = 10$, $AC = 6$.



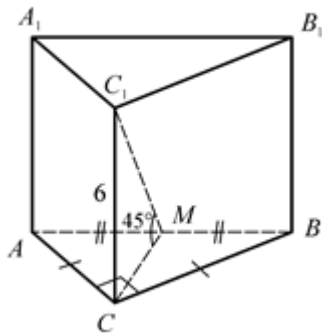
6. Дано: $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 2$,
 $A_1C = 4$, $A_1B = 5$.



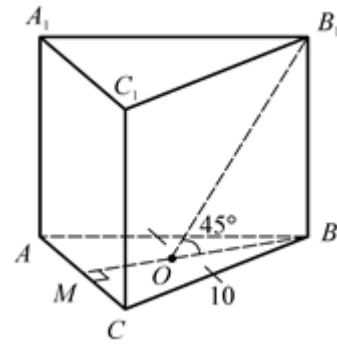
7. Дано: $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB$,

8. Дано: $AB = BC = 10$, $AC = 16$,
 O – точка пересечения медиан

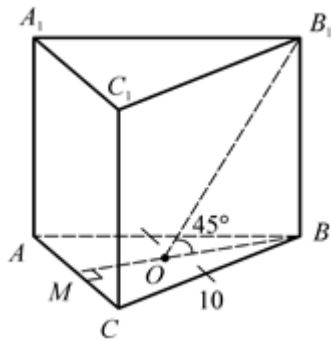
$AM = MB$, $\angle C_1MC = 45^\circ$, $CC_1 = 6$.



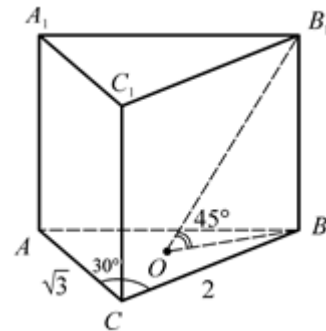
$\triangle ABC$, $\angle B_1OB = 45^\circ$.



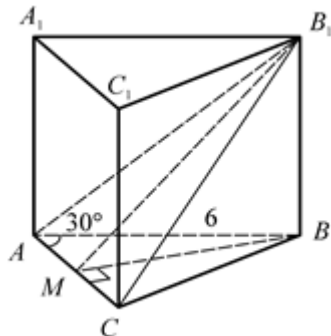
9. Дано: $AB = BC = 10$, $AC = 12$,
 O – центр вписанной окружности,
 $\angle B_1OB = 45^\circ$.



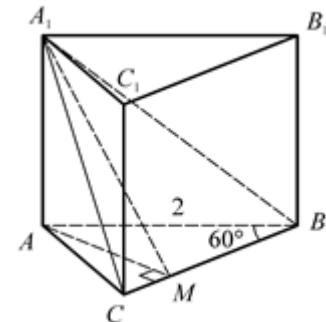
10. Дано: $AC = \sqrt{3}$, $BC = 2$,
 $\angle ACB = 30^\circ$, O – центр описанной
 окружности, $\angle B_1OB = 45^\circ$.



11. Дано: $AC = 2$, $AB = 6$,
 $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle((ABC), (AB_1C)) = 45^\circ$.



12. Дано: $AB = 2$, $BC = 6$,
 $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle((ABC), (A_1BC)) = 45^\circ$.



Объем прямой треугольной призмы

1. 72. 2. 16. 3. $12\sqrt{7}$. 4. 24. 5. $48\sqrt{7}$. 6. $6\sqrt{3}$.
7. 216. 8. 192. 9. 240 (использовать формулу $S = pr$).

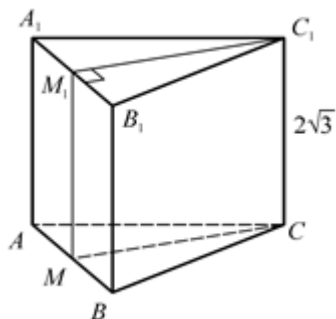
10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($AB = 1$ по теореме косинусов, $R = 1$ по теореме синусов).
11. 9. 12. 9.

ОБЪЕМ ПРАВИЛЬНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

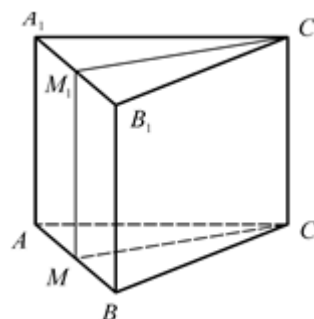
$ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма.

Найдите объем призмы.

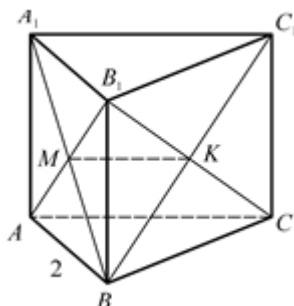
1. Дано: $C_1M_1 \perp A_1B_1$, MM_1C_1C – квадрат, $CC_1 = 2\sqrt{3}$.



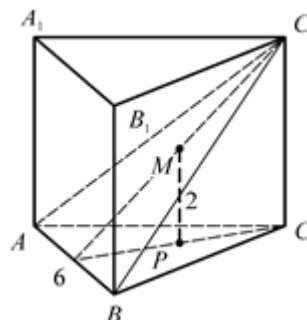
2. Дано: $AM = MB$, $A_1M_1 = M_1B_1$, $AB = 2$, MM_1C_1C – квадрат.



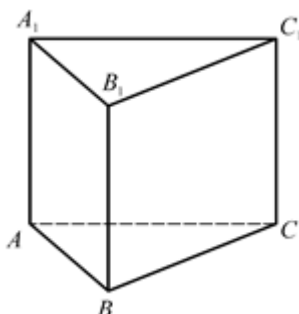
3. Дано: $AB = 2$, $AB_1 \cap A_1B = M$, $BC_1 \cap B_1C = K$, $CC_1 = 2MK$.



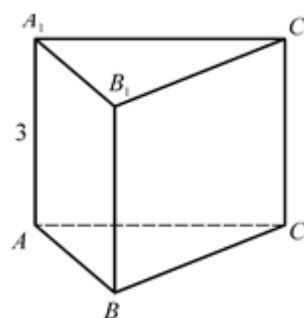
4. Дано: $AB = 6$, M – точка пересечения медиан $\triangle AC_1B$, $MP \perp (ABC)$, $MP = 2$.



5. Дано: в грань AA_1B_1B вписана окружность единичного радиуса.

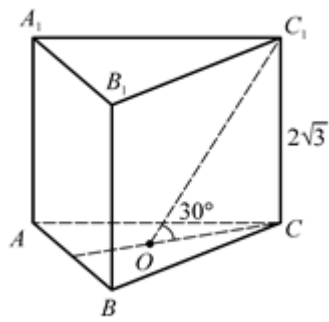


6. Дано: $AA_1 = 3$, около грани AA_1B_1B описана окружность, $R = 2,5$.

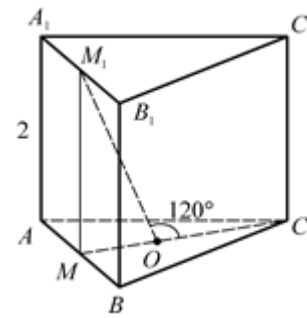


7. Дано: $AA_1 = 2\sqrt{3}$, O – центр $\triangle ABC$, $\angle C_1OC = 30^\circ$.

8. Дано: $AM = MB$, $A_1M_1 = M_1B_1$, $AA_1 = 2$, O – центр $\triangle ABC$,

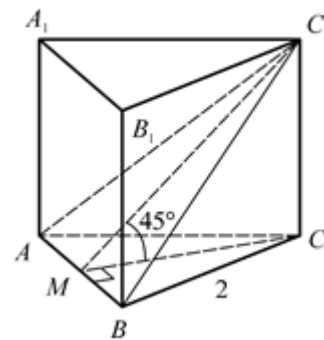
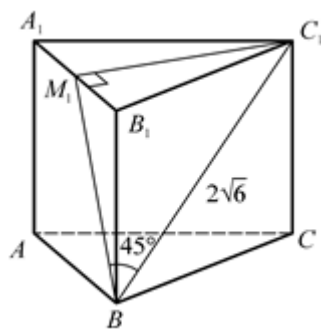


$$\angle M_1OC = 120^\circ.$$



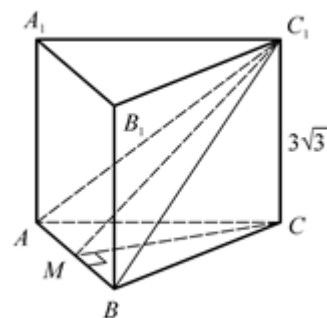
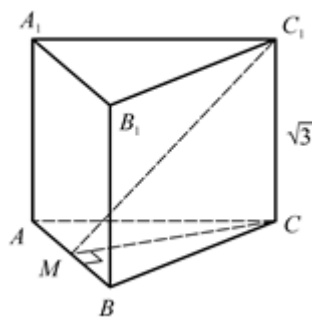
9. Дано: $C_1M_1 \perp A_1B_1$, $BC_1 = 2\sqrt{6}$,
 $\angle(BC_1, (AA_1B_1)) = 45^\circ$.

10. Дано: $AB = 2$,
 $\angle((ABC), (AC_1B)) = 45^\circ$.



11. Дано: $CC_1 = \sqrt{3}$,
 $\rho(C_1, AB) = 2\sqrt{3}$.

12. Дано: $CC_1 = 3\sqrt{3}$,
 $\angle(CC_1, (AC_1B)) = 30^\circ$.



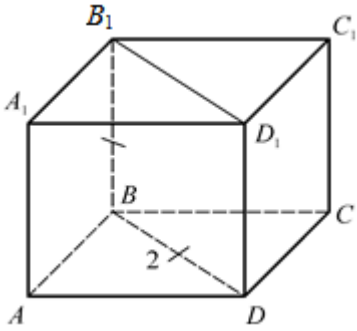
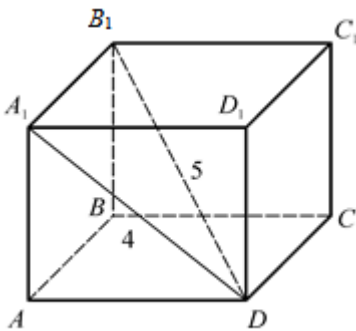
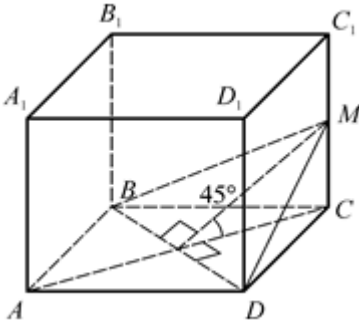
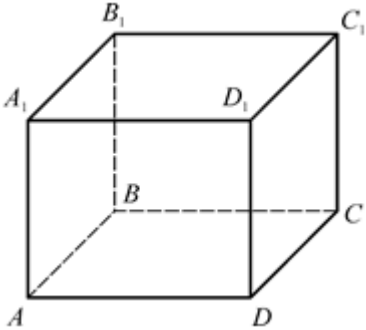
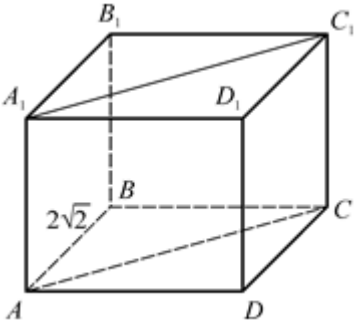
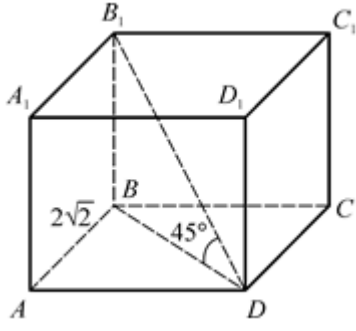
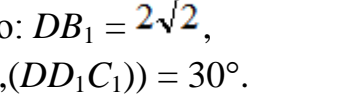
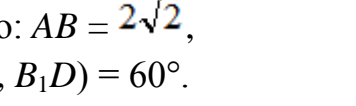
Объем правильной треугольной призмы

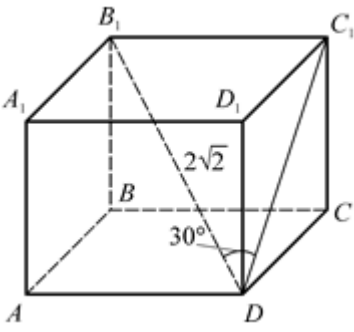
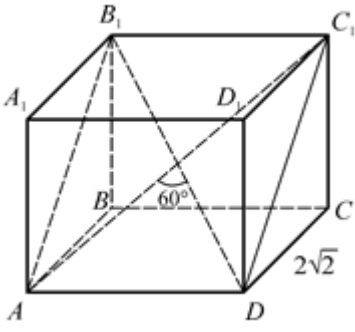
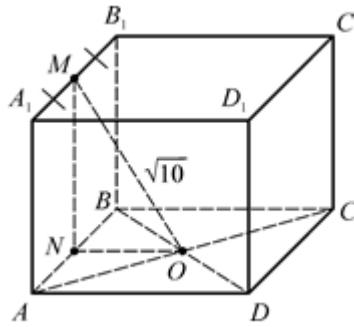
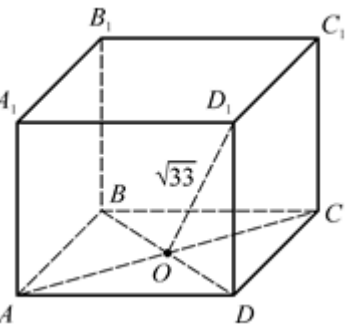
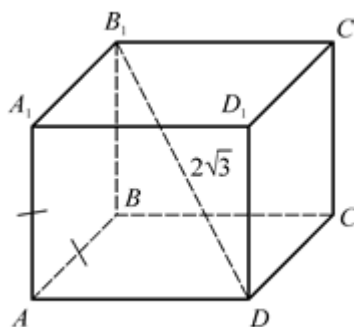
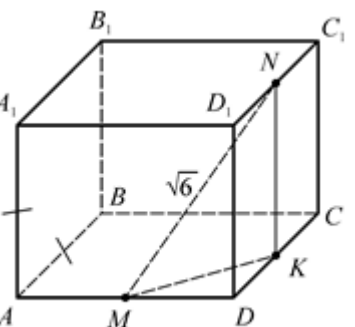
- | | | | |
|------------------|-------------------|------------------|---------|
| 1. 24. | 4. $54\sqrt{3}$. | 7. 162. | 10. 3. |
| 2. 3. | 5. $2\sqrt{3}$. | 8. $8\sqrt{3}$. | 11. 9. |
| 3. $2\sqrt{3}$. | 6. $12\sqrt{3}$. | 9. $8\sqrt{6}$. | 12. 27. |

ОБЪЕМ ПРАВИЛЬНОЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – правильная четырехугольная призма.

Найдите объем призмы.

<p>1. Дано: $BB_1 = BD = 2$.</p> 	<p>2. Дано: $A_1D = 4, B_1D = 5$.</p> 
<p>3. Дано: $CM : MC_1 = 3 : 4$, $BD = 6, \angle((ABC), (BDM)) = 45^\circ$.</p> 	<p>4. Дано: в грань AA_1D_1D вписана окружность единичного радиуса.</p> 
<p>5. Дано: $AB = 2\sqrt{2}$, около прямоугольника AA_1C_1C описана окружность, $R = 2,5$.</p> 	<p>6. Дано: $AB = 2\sqrt{2}, \angle(DB_1, (ABC)) = 45^\circ$.</p> 
<p>7. Дано: $DB_1 = 2\sqrt{2}, \angle(DB_1, (DD_1C_1)) = 30^\circ$.</p> 	<p>8. Дано: $AB = 2\sqrt{2}, \angle(AC_1, B_1D) = 60^\circ$.</p> 

	
<p>9. Дано: $AC \cap BD = O$, $A_1M = MB_1$, $MO = \sqrt{10}$, $S_{ABCD} = 4$.</p> 	<p>10. Дано: $AC \cap BD = O$, $D_1O = \sqrt{33}$, $S_{ABCD} = 16$.</p> 
<p>11. Дано: $AA_1 = AB$, $DB_1 = 2\sqrt{3}$.</p> 	<p>12. Дано: $AA_1 = AB$, $AM = MD$, $D_1N = NC_1$, $MN = \sqrt{6}$.</p> 

Объем правильной четырехугольной призмы

1. 4.

4. 8.

7. 4.

10. 80.

2. $9\sqrt{7}$.

5. 24.

8. 32.

11. 8.

3. 126.

6. 32.

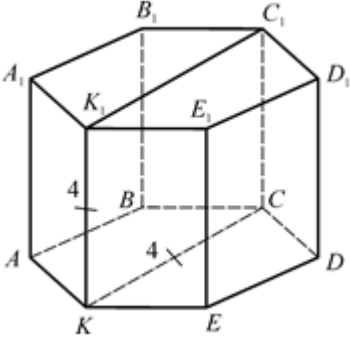
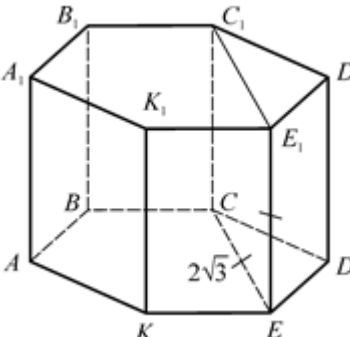
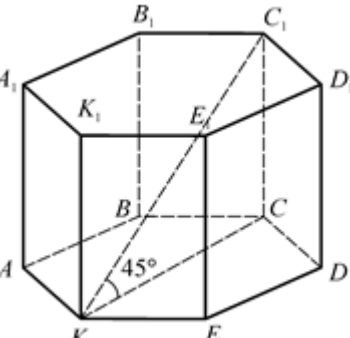
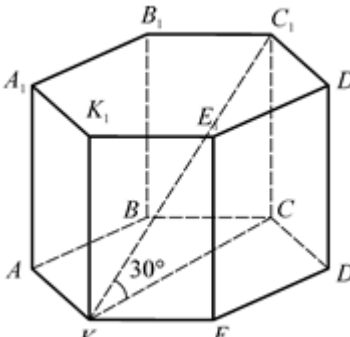
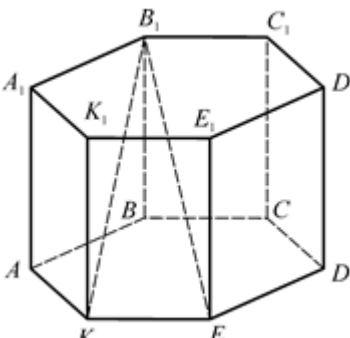
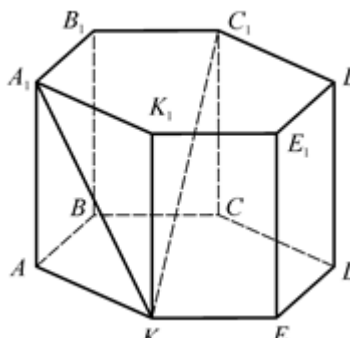
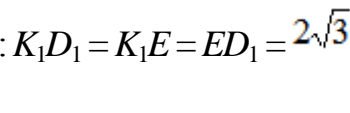
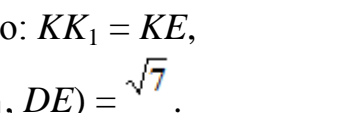
9. 12.

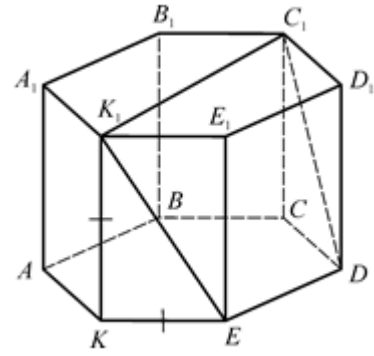
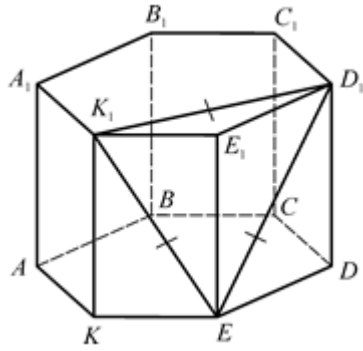
12. 8.

ОБЪЕМ ПРАВИЛЬНОЙ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

$ABCDEKA_1B_1C_1D_1E_1K_1$ – правильная шестиугольная призма.

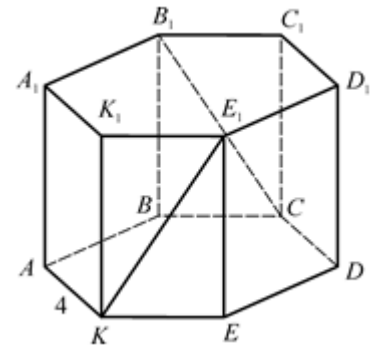
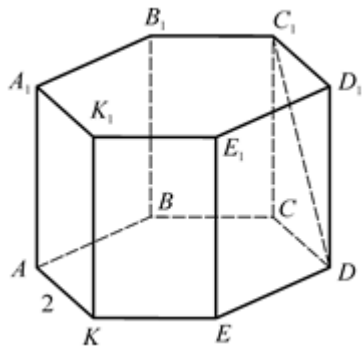
Найдите объем призмы.

<p>1. Дано: $KK_1 = KC = 4$.</p> 	<p>2. Дано: $CE = EE_1 = 2\sqrt{3}$.</p> 
<p>3. Дано: $KC_1 = 2\sqrt{6}$, $\angle(KC_1, (ABC)) = 45^\circ$.</p> 	<p>4. Дано: $AB = 2$, $\angle C_1KC = 30^\circ$.</p> 
<p>5. Дано: $KB_1 = 2$, $B_1E = \sqrt{5}$.</p> 	<p>6. Дано: $KC_1 = \sqrt{5}$, $A_1K = \sqrt{2}$.</p> 
<p>7. Дано: $K_1D_1 = K_1E = ED_1 = 2\sqrt{3}$.</p> 	<p>8. Дано: $KK_1 = KE$, $\rho(K_1C_1, DE) = \sqrt{7}$.</p> 



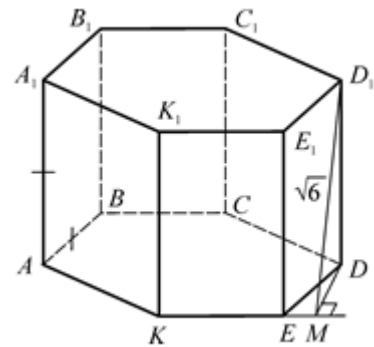
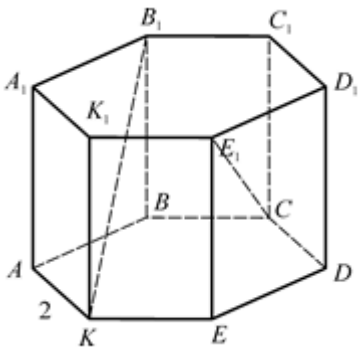
9. Дано: $AB = 2$,
 $\angle(KK_1, DC_1) = 45^\circ$.

10. Дано: $AB = 4$,
 $\angle(KE_1, CB_1) = 90^\circ$.



11. Дано: $AB = 2$,
 $\angle(KB_1, CE_1) = 90^\circ$.

12. Дано: $AB = AA_1$,
 $\rho(D_1, KE) = \sqrt{6}$.



Объем правильной шестиугольной призмы

1. $24\sqrt{3}$.

4. 24.

7. $12\sqrt{6}$.

10. $96\sqrt{3}$.

2. 36.

5. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. $12\sqrt{3}$.

11. 36.

3. 27.

6. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

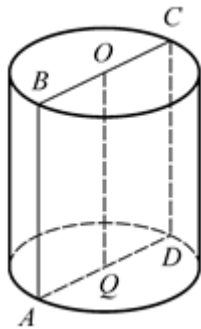
9. $12\sqrt{3}$.

12. $12\sqrt{3}$.

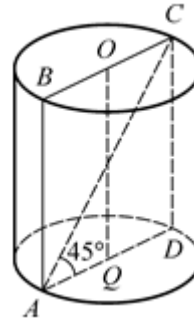
ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА

Найдите объем цилиндра.

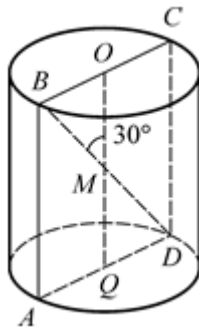
1. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $S_{ABCD} = 16$.



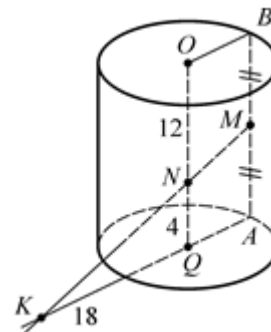
2. Дано: $AC = 2\sqrt{2}$, $\angle CAD = 45^\circ$.



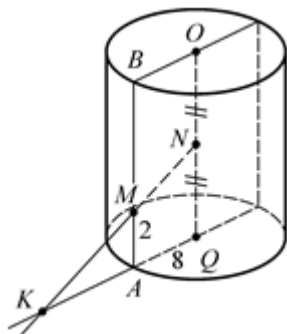
3. Дано: $BD \cap OQ = M$,
 $BD = 4\sqrt{3}$, $\angle BMO = 30^\circ$.



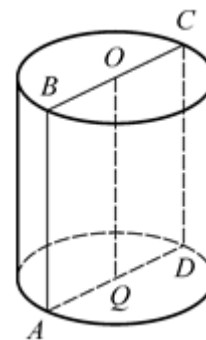
4. Дано: $ON = 12$, $AM = MB$,
 $MK \cap OQ = N$, $NQ = 4$, $QK = 18$.



5. Дано: $AQ = 8$, $ON = NQ$,
 $NK \cap AB = M$, $AM = 2$, $QK = 12$.



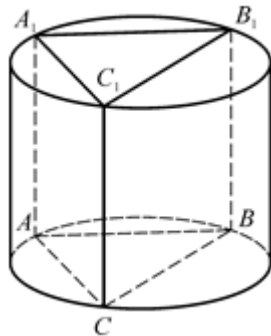
6. Дано: $ABCD$ – осевое сечение, в
 $ABCD$ вписана окружность
единичного радиуса.



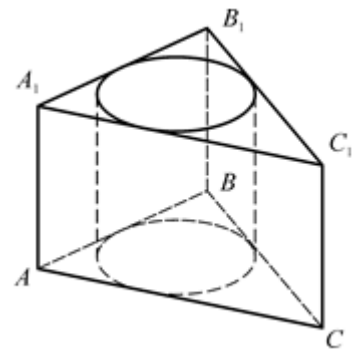
7. Дано: в цилиндр вписана

8. Дано: цилиндр вписан в

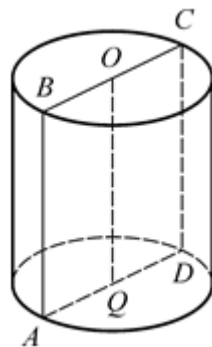
правильная треугольная призма,
 $AB = 3, AA_1 = 2$.



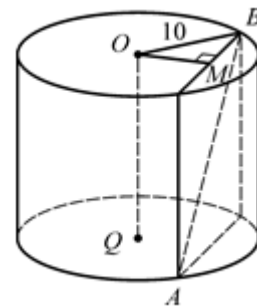
правильную треугольную призму,
 $AB = 6, AA_1 = 2$.



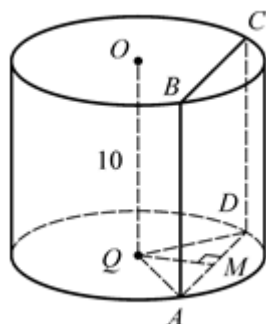
9. Дано: $S_{\text{осн}} = 25\pi, S_{ABCD} = 40$.



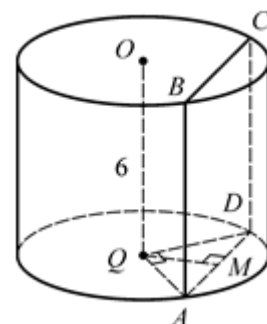
10. Дано: концы отрезка AB лежат на окружностях оснований цилиндра, $AB = 13, R = 10, \rho(OQ, AB) = 8$.



11. Дано: $\angle A Q D = 60^\circ, O Q = 10, \rho(O Q, (A B C)) = \sqrt{3}$.



12. Дано: $\angle A Q D = 90^\circ, O Q = 6, \rho(O Q, (A B C)) = \sqrt{2}$.



1. 16π .

2. 2π .

3. 18π .

4. 576π .

5. 768π .

6. 2π .

7. 6π .

8. 6π .

9. 100π .

10. 500π .

11. 40π .

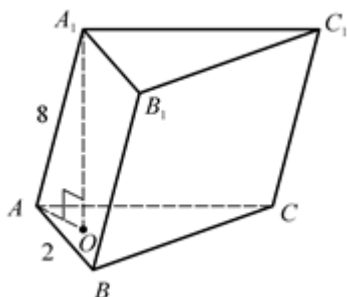
12. 24π .

ОБЪЕМ НАКЛОННОЙ ПРИЗМЫ

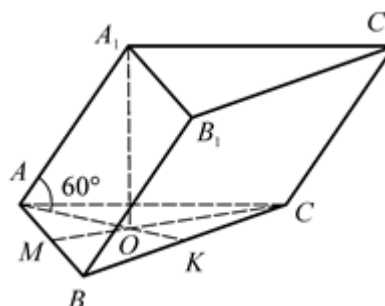
$$(V = S_{\text{осн}} \cdot H)$$

Найдите объем наклонной призмы.

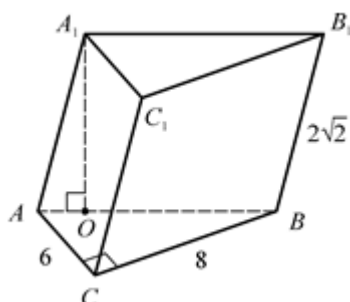
1. Дано: $\triangle ABC$ – правильный,
 $AB = 2$, $AA_1 = 8$, $\angle(AA_1, (ABC)) = 30^\circ$.



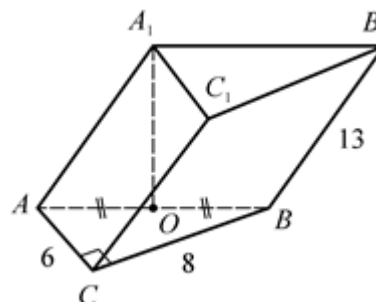
2. Дано: $\triangle ABC$ – правильный,
 $AB = 4\sqrt{3}$, O – центр $\triangle ABC$,
 $A_1O \perp (ABC)$, $\angle(AA_1, (ABC)) = 60^\circ$.



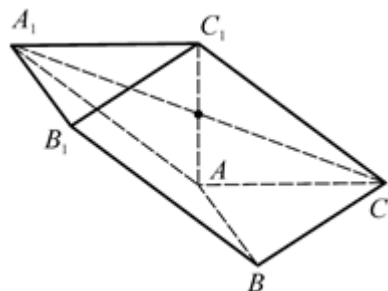
3. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AC = 6$, $BC = 8$, $(AA_1B_1) \perp (ABC)$,
 $\angle(AA_1, (ABC)) = 45^\circ$, $CC_1 = 2\sqrt{2}$.



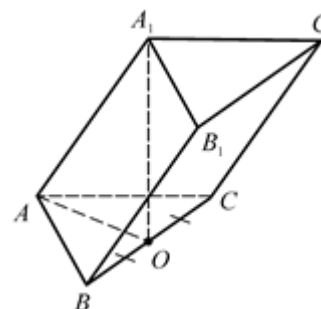
4. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AC = 6$, $BC = 8$, $AA_1 = 13$,
 $AA_1 = BB_1 = CC_1$.



5. Дано: $\triangle ABC$ – правильный,
 $AB = 4$, AA_1C_1C – ромб,
 $A_1C = 10$, $AC_1 \perp (ABC)$.



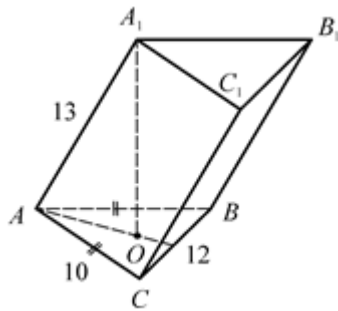
6. Дано: $\triangle ABC$ – правильный,
 $AB = AA_1$, $BO = OC$, $A_1O \perp (ABC)$,
 $S_{BB_1C_1C} = 4$.



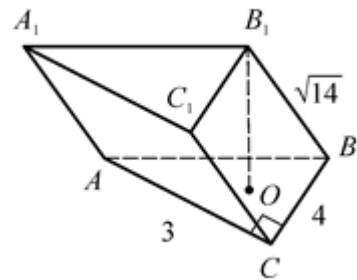
7. Дано: $AC = AB = 10$, $BC = 12$,
 O – центр вписанной в основание

8. Дано: $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$,
 $CB = 4$, O – центр вписанной в

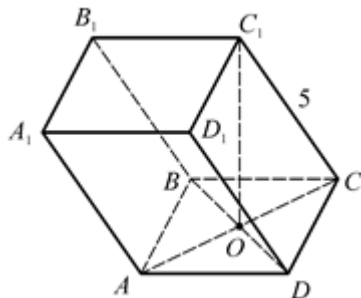
окружности, $A_1O \perp (ABC)$,
 $AA_1 = 13$.



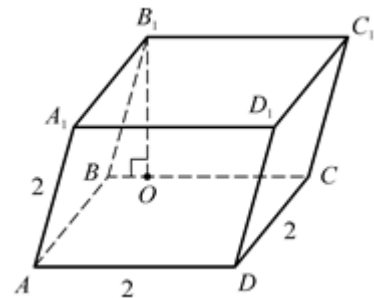
основание окружности, $B_1O \perp$
 $\perp (ABC)$, $BB_1 = \sqrt{14}$.



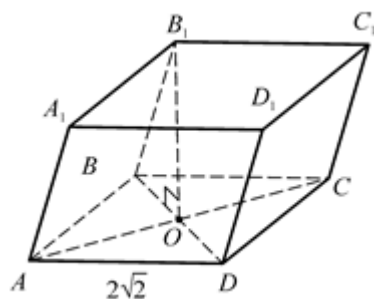
9. Дано: $ABCD$ – ромб, $AC = 8$,
 $BD = 6$, $AC \cap BD = O$,
 $C_1O \perp (ABC)$, $CC_1 = 5$.



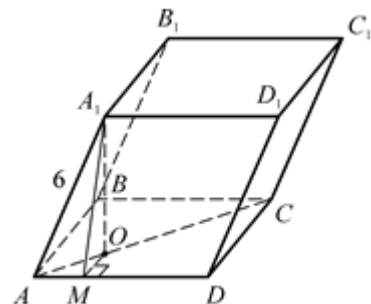
10. Дано: $AB = BC = AA_1 = 2$,
 $(BB_1C_1) \perp (ABC)$, $\angle((AA_1B_1),$
 $(ABC)) = 30^\circ$.



11. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $AB = 2\sqrt{2}$, $B_1O \perp (ABC)$,
 $\angle((BB_1, (ABC)) = 45^\circ$.



12. Дано: все грани
 параллелепипеда – равные ромбы
 со стороной 6 и острым углом 60° .



Объем наклонной призмы ($V = S_{\text{осн}} \cdot H$)

1. $4\sqrt{3}$.

2. 144.

3. 48.

4. 288.

5. $24\sqrt{3}$.

6. $\sqrt{3}$.

7. 576.

8. 12.

9. 72.

10. 4.

11. 16.

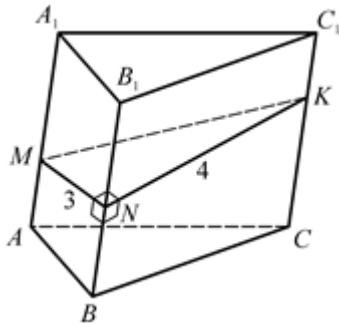
12. $108\sqrt{2}$.

ОБЪЕМ НАКЛОННОЙ ПРИЗМЫ

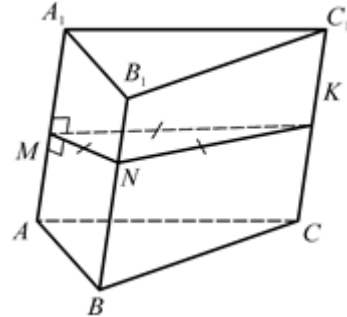
$$(V = S_{\text{сеч}} \cdot l)$$

Найдите объем призмы.

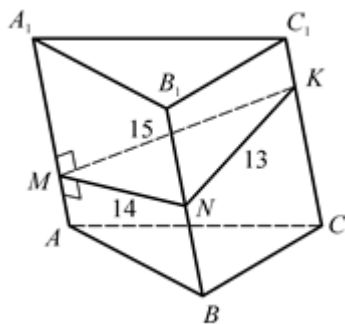
1. Дано: $BB_1 \perp MN$, $BB_1 \perp NK$,
 $MN \perp NK$, $MN = 3$, $NK = 4$,
 $MK = BB_1$.



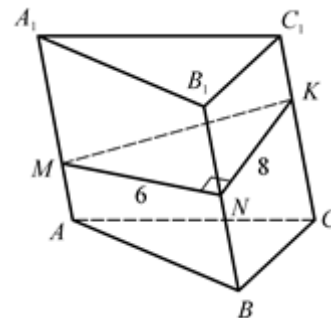
2. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$, $MN = MK = =$
 $NK = 6$, боковое ребро равно
 высоте сечения.



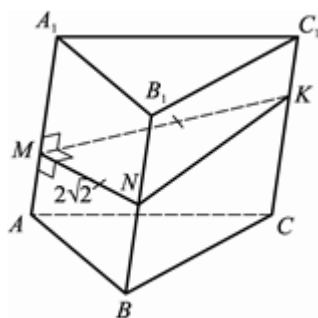
3. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$, $MK = 15$, $MN =$
 14 , $NK = 13$, $AA_1 = 2$.



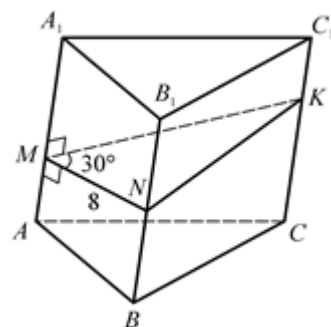
4. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$, $\angle MNK = =$
 90° , $MN = 6$, $NK = 8$, боковое
 ребро равно медиане треугольника,
 проведенной к гипотенузе.



5. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$, $MN \perp MK$,
 $MN = MK = 2\sqrt{2}$, боковое ребро
 равно высоте треугольника,
 проведенной к гипотенузе.



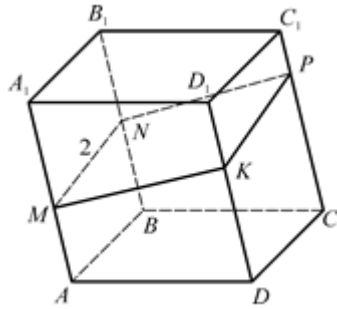
6. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$, $\angle MNK = =$
 30° , $MN = 8$, $MK = 6$, боковое
 ребро равно высоте треугольника к
 стороне MK.



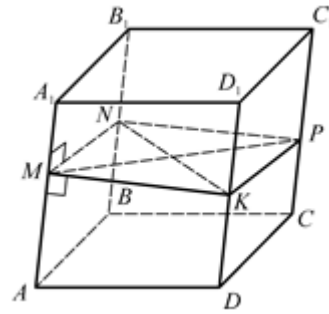
7. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$, $MNPK$ –
 квадрат, $MN = 2$, боковое ребро

8. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$, $MNPK$ –
 квадрат, $MP = 6$, $NK = 8$, боковое

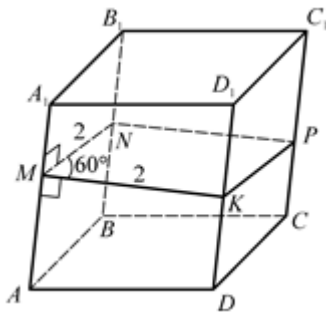
равно диагонали квадрата.



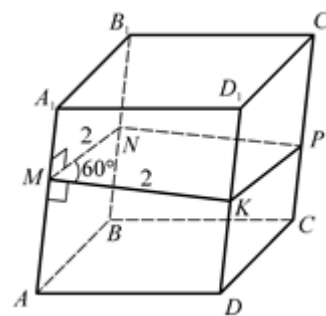
ребро равно стороне ромба.



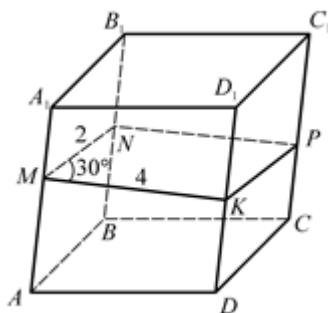
9. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$, $MNPK$ – ромб, $\angle NMK = 60^\circ$, $MN = 2$, боковое ребро равно меньшей диагонали ромба.



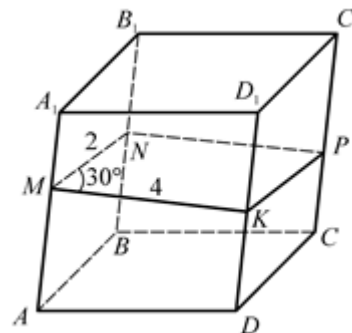
10. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$, $MNPK$ – ромб, $\angle NMK = 60^\circ$, $MN = 2$, боковое ребро равно большей диагонали ромба.



11. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$, $MNPK$ – параллелограмм, $\angle NMK = 30^\circ$, $MN = 2$, $MK = 4$, боковое ребро равно высоте параллелограмма, проведенной к большей стороне.



12. Дано: $AA_1 \perp (MNK)$, $MNPK$ – параллелограмм, $\angle NMK = 30^\circ$, $MN = 2$, $MK = 4$, боковое ребро равно высоте параллелограмма, проведенной к меньшей стороне.



Объем наклонной призмы ($V = S_{\perp \text{сеч}} \cdot D$)

1. 30.

2. 81.

3. 168.

4. 120.

5. 8.

6. 48.

7. $8\sqrt{2}$.

8. 120.

9. $4\sqrt{3}$.

10. 12.

11. 4.

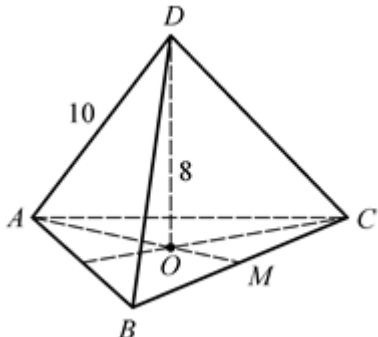
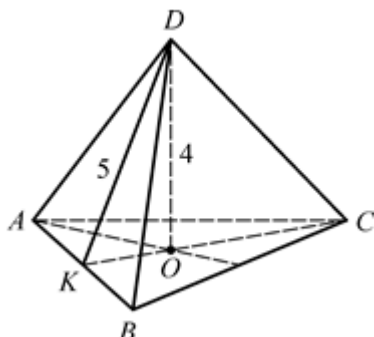
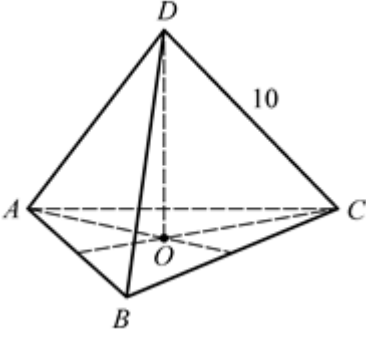
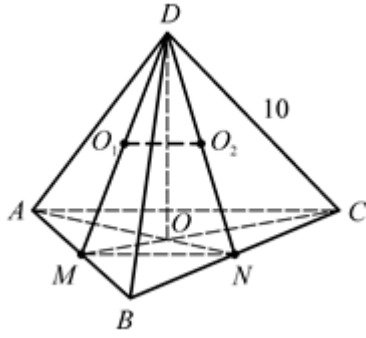
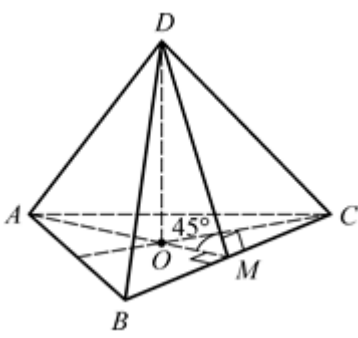
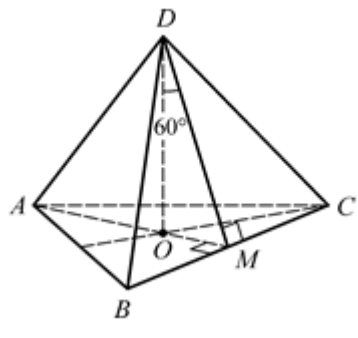
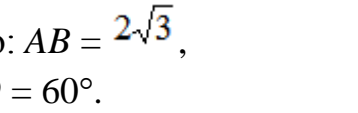
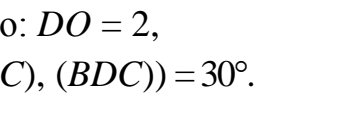
12. 8.

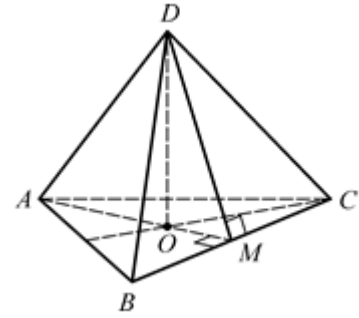
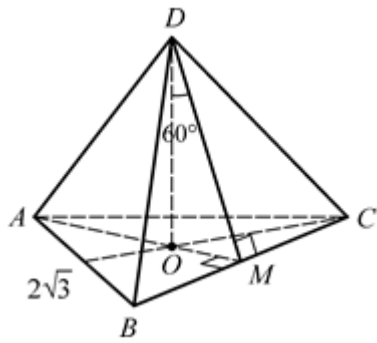
Объем пирамиды

ОБЪЕМ ПРАВИЛЬНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ

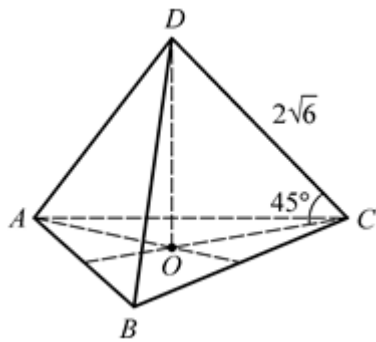
$DABC$ – правильная треугольная пирамида. $DO \perp (ABC)$. $DM \perp BC$. $DK \perp AB$.

Найдите объем пирамиды.

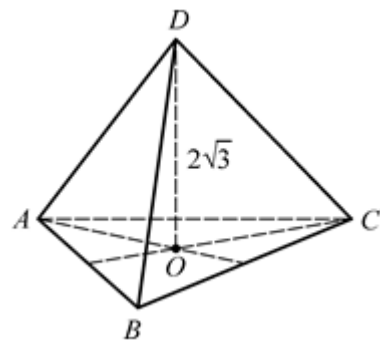
<p>1. Дано: $DO = 8$, $AD = 10$.</p> 	<p>2. Дано: $DK = 5$, $DO = 4$.</p> 
<p>3. Дано: $AB = 6\sqrt{3}$, $DC = 10$.</p> 	<p>4. Дано: O_1 и O_2 – точки пересечения медиан $\triangle ADB$ и $\triangle BDC$, $O_1O_2 = 2\sqrt{3}$, $DC = 10$.</p> 
<p>5. Дано: $DM = 2\sqrt{6}$, $\angle DMO = 45^\circ$.</p> 	<p>6. Дано: $DM = 2\sqrt{3}$, $\angle MDO = 60^\circ$.</p> 
<p>7. Дано: $AB = 2\sqrt{3}$, $\angle MDO = 60^\circ$.</p> 	<p>8. Дано: $DO = 2$, $\angle((ABC), (BDC)) = 30^\circ$.</p> 



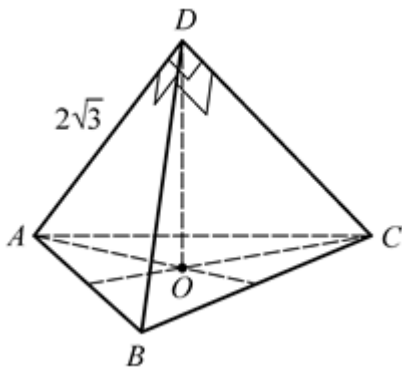
9. Дано: $DC = 2\sqrt{6}$,
 $\angle(DC, (ABC)) = 45^\circ$.



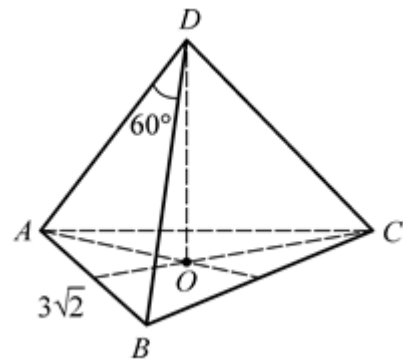
10. Дано: $\angle(DC, (ABC)) = 30^\circ$,
 $DO = 2\sqrt{3}$.



11. Дано: $\angle ADB = \angle BDC =$
 $= \angle ADC = 90^\circ$, $AD = 2\sqrt{3}$.



12. Дано: $AB = 3\sqrt{2}$,
 $\angle ADB = 60^\circ$.



Объем правильной треугольной пирамиды

1. $72\sqrt{3}$.

2. $36\sqrt{3}$.

3. $72\sqrt{3}$.

4. $72\sqrt{3}$.

5. 72.

6. 27.

7. 1.

8. $24\sqrt{3}$.

9. 18.

10. 54.

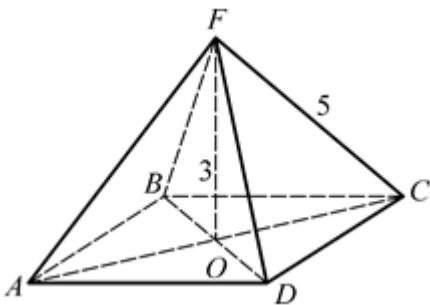
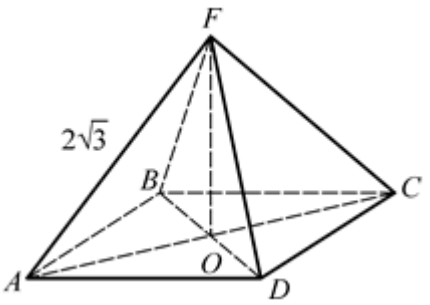
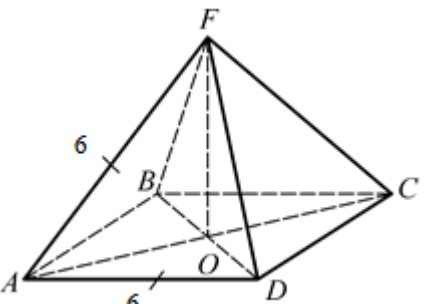
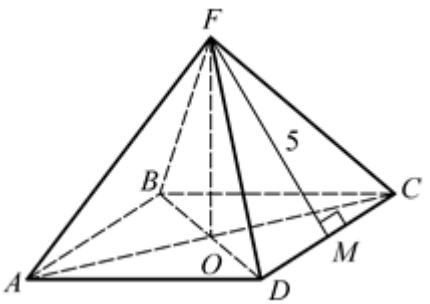
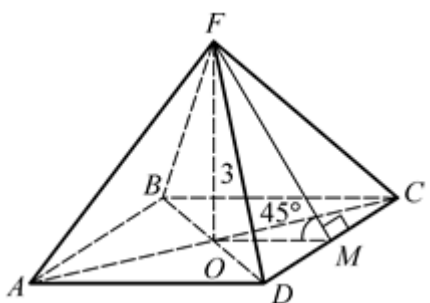
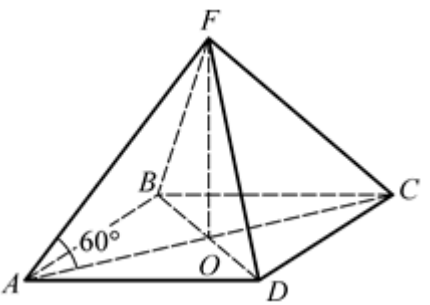
11. $4\sqrt{3}$.

12. 9.

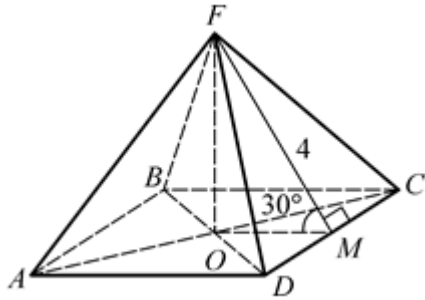
ОБЪЕМ ПРАВИЛЬНОЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ

$FABCD$ – правильная четырехугольная пирамида. $FO \perp (ABC)$.

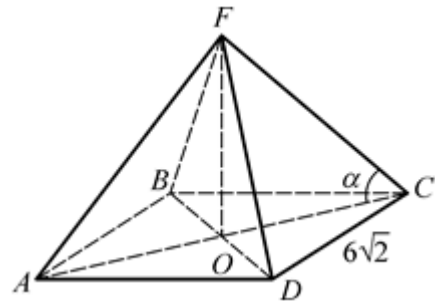
Найдите объем пирамиды.

<p>1. Дано: $FC = 5, FO = 3$.</p> 	<p>2. Дано: $AF = AC = 2\sqrt{3}$.</p> 
<p>3. Дано: $AF = AD = 6$.</p> 	<p>4. Дано: $FM \perp DC, FM = 5, S_{\text{бок}} = 60$.</p> 
<p>5. Дано: $FM \perp DC, FO = 3, \angle OMF = 45^\circ$.</p> 	<p>6. Дано: $S_{\text{осн}} = 6, \angle FAO = 60^\circ$.</p> 

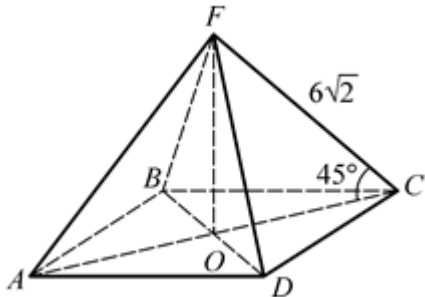
7. Дано: $FM \perp DC$, $FM = 4$,
 $\angle OMF = 30^\circ$.



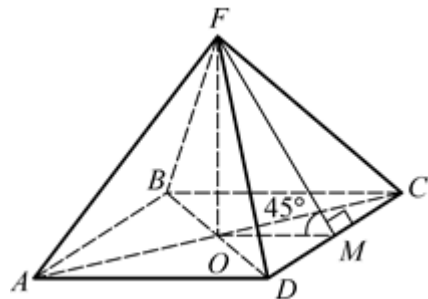
8. Дано: $AB = 6\sqrt{2}$,
 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.



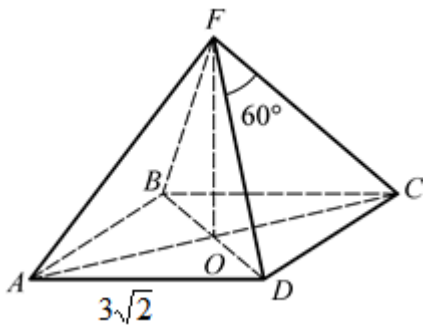
9. Дано: $FC = 6\sqrt{2}$, $\angle FCO = 45^\circ$.



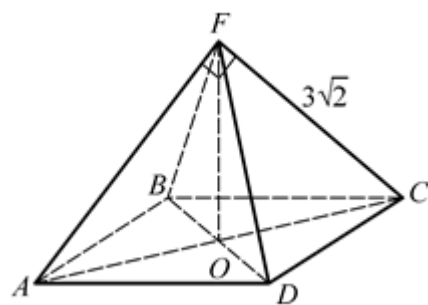
10. Дано: $S_{\text{бок}} = 36\sqrt{2}$,
 $FM \perp DC$, $\angle OMF = 45^\circ$.



11. Дано: $AB = 3\sqrt{2}$,
 $\angle DFC = 60^\circ$.



12. Дано: $AF = 3\sqrt{2}$,
 $\angle AFC = 90^\circ$.



Объем правильной четырехугольной пирамиды

1. 32.

4. 48.

7. 32.

10. 36.

2. 6.

5. 36.

8. 192.

11. 18.

3. $36\sqrt{2}$.

6. 6.

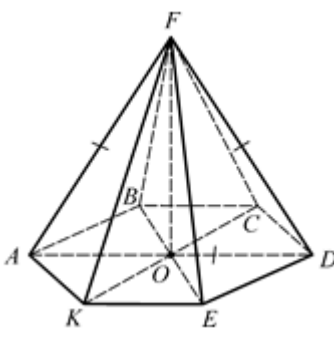
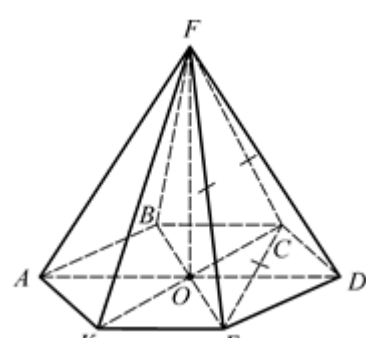
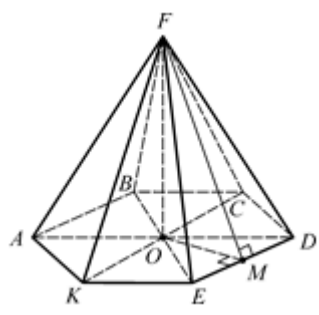
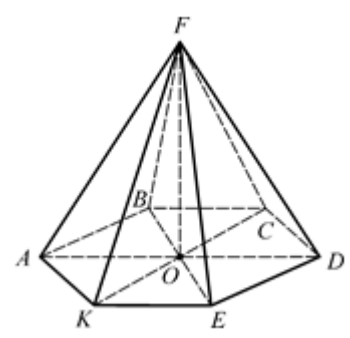
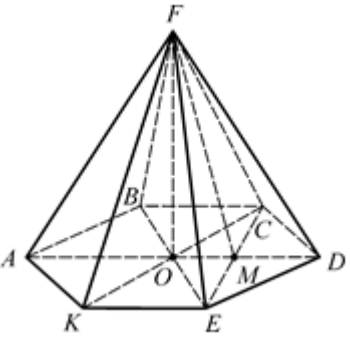
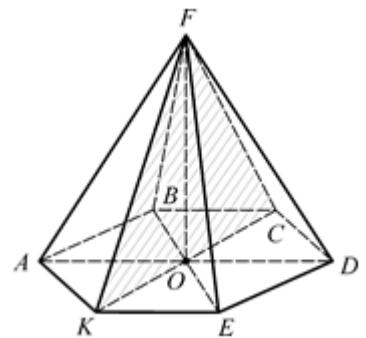
9. 144.

12. 18.

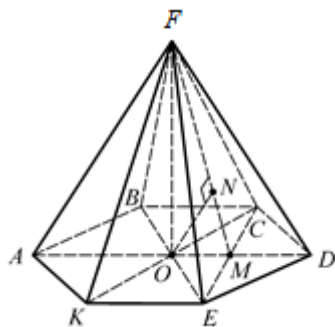
ОБЪЕМ ПРАВИЛЬНОЙ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ

$FABCDEK$ – правильная шестиугольная пирамида. $FO \perp (ABC)$.

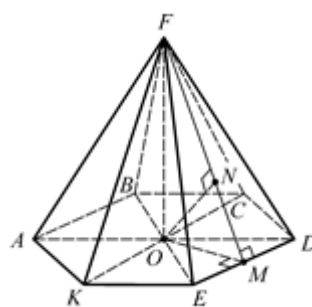
Найдите объем пирамиды.

<p>1. Дано: $AF = FD = AD = 4\sqrt{3}$.</p> 	<p>2. Дано: $FE = FC = EC = 2\sqrt{3}$.</p> 
<p>3. Дано: $AB = 12$, $\rho(F, DE) = \sqrt{111}$.</p> 	<p>4. Дано: $\rho(A, KE) = \sqrt{3}$, $AF = \sqrt{7}$.</p> 
<p>5. Дано: $\rho(F, CE) = 2$, $FO = \sqrt{3}$.</p> 	<p>6. Дано: $\rho(E, (KFC)) = \sqrt{3}$, $FO = \sqrt{3}$.</p> 

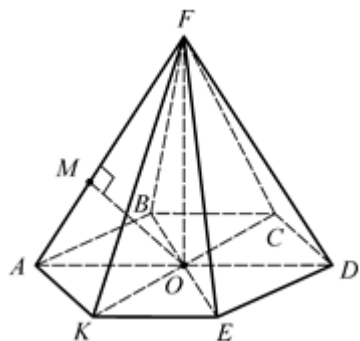
7. Дано: $\rho(O, (EFC)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $FO = \sqrt{3}$.



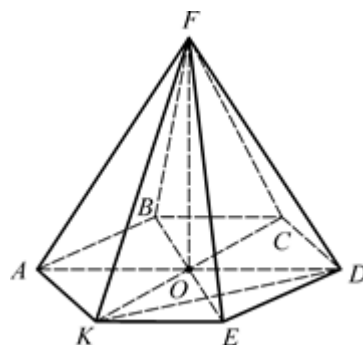
8. Дано: $\rho(O, (EFD)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $FO = \sqrt{3}$.



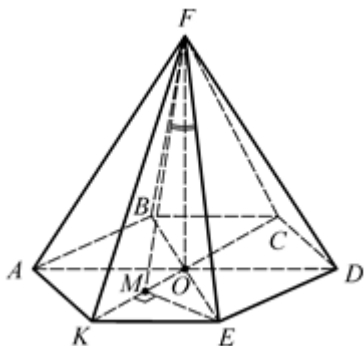
9. Дано: $\rho(O, AF) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $FO = \sqrt{3}$.



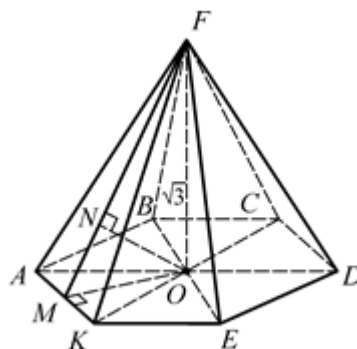
10. Дано: $\rho(K, CD) = 2\sqrt{3}$,
 $FD = \sqrt{7}$.



11. Дано: $\angle(FE, (KFC)) = \alpha$,
 $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AB = 2$.



12. Дано: $\rho(E, (AFK)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $FO = \sqrt{3}$.



Объем правильной шестиугольной пирамиды

1. $36\sqrt{3}$.

2. $4\sqrt{6}$.

3. 216.

4. 6.

5. 6.

6. 6.

7. 6.

8. 2.

9. 1,5.

10. 6.

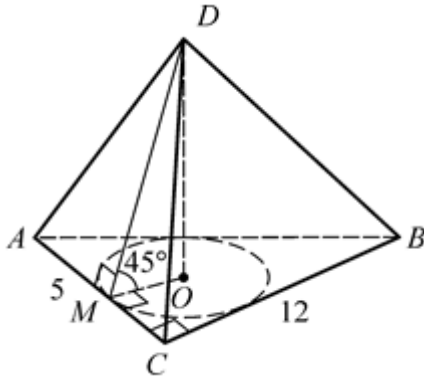
11. 6.

12. 2.

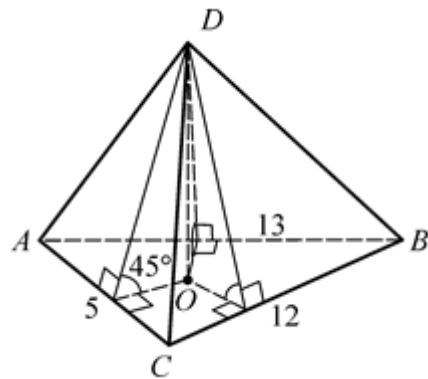
ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ, В ОСНОВАНИЕ КОТОРОЙ МОЖНО ВПИСАТЬ ОКРУЖНОСТЬ

Найдите объем пирамиды.

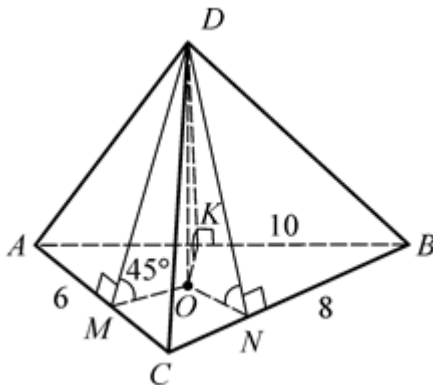
1. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 5$, $CB = 12$,
 OM – радиус вписанной
 окружности, $\angle DMO = 45^\circ$.



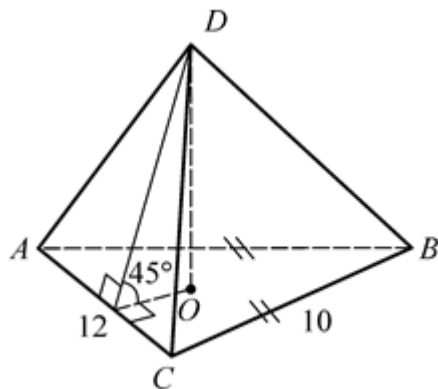
2. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AC = 5$, $CB = 12$, $AB = 13$,
 $\angle((ADC), (ABC)) = \angle((BCD), (ABC)) =$
 $= \angle((ABD), (ABC)) = 45^\circ$.



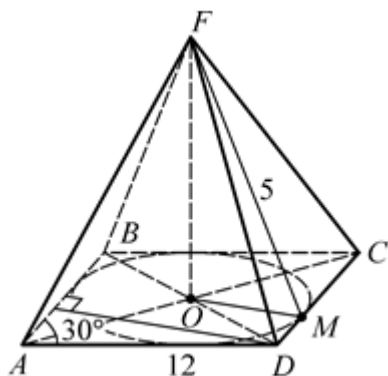
3. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $DM \perp AC$, $DK \perp AB$, $DN \perp CB$,
 $\angle DMO = \angle DNO = \angle DKO = 45^\circ$,
 $AC = 6$, $CB = 8$, $AB = 10$.



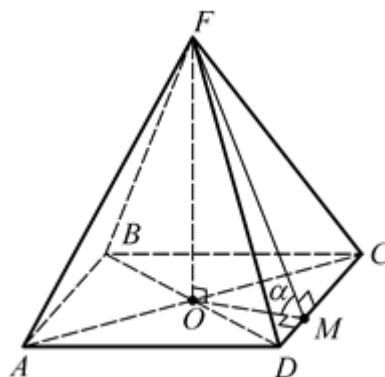
4. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AB = BC = 10$, $AC = 12$,
 $\angle((ADC), (ABC)) = \angle((BCD), (ABC)) =$
 $= \angle((ABD), (ABC)) = 45^\circ$.



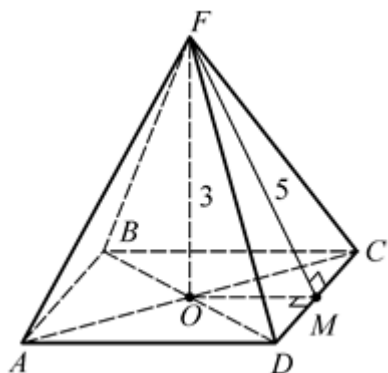
5. Дано: $FABCD$ – пирамида, $ABCD$ – ромб, $AB = 12$, $\angle BAD = 30^\circ$, OM – радиус вписанной окружности, $FO \perp (ABC)$, $FM \perp CD$, $FM = 5$.



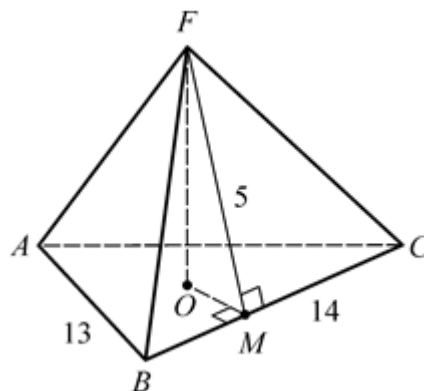
6. Дано: $FABCD$ – пирамида, $ABCD$ – ромб, $\angle((ABC), (ABF)) = \angle((ABC), (BCF)) = \angle((ABC), (DCF)) = \angle((ABC), (ADF)) = \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{6}$, $AC = 6$, $BD = 8$.



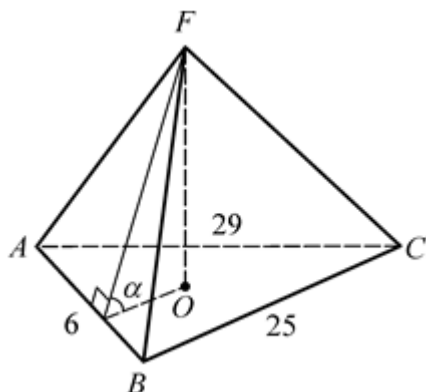
7. Дано: $FABCD$ – пирамида, $ABCD$ – прямоугольник, каждая из апофем равна 5, $FO \perp (ABC)$, $FO = 3$.



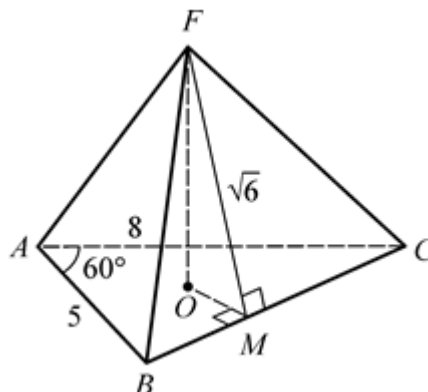
8. Дано: $FABC$ – пирамида, каждая из апофем равна 5, $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$.



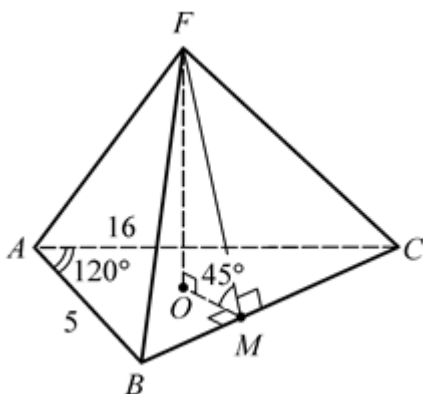
9. Дано: $FABC$ – пирамида, каждая из апофем составляет с высотой пирамиды угол α , $\text{ctg } \alpha = 0,3$, $AB = 6$, $AC = 29$, $BC = 25$.



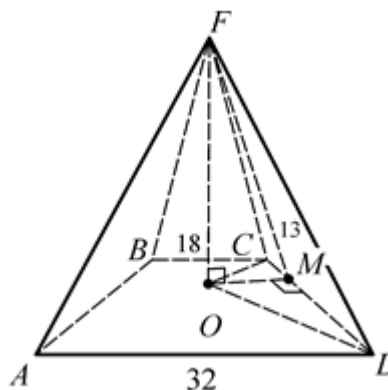
10. Дано: $FABC$ – пирамида, каждая из апофем равна $\sqrt{6}$, $AB = 5$, $AC = 8$, $\angle BAC = 60^\circ$.



11. Дано: $FABC$ – пирамида, каждая из боковых граней составляет с плоскостью основания угол 45° , $AB = 5$, $AC = 16$, $\angle BAC = 120^\circ$.



12. Дано: $FABCD$ – пирамида, $ABCD$ – трапеция, $AB = CD$, OM – радиус вписанной окружности, $AD = 32$, $BC = 18$, $FM = 13$.



Объем пирамиды, в основание которой можно вписать окружность

1. 20.

4. 48.

7. 64.

10. 10.

2. 20.

5. 96.

8. 112.

11. 20.

3. 16.

6. 16.

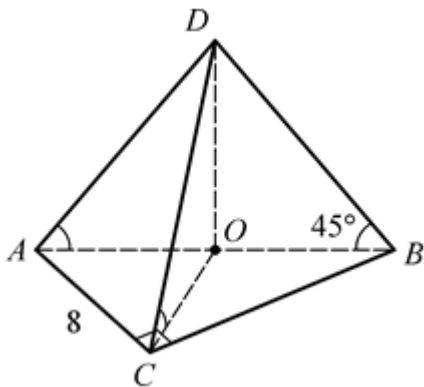
9. 12.

12. 1000.

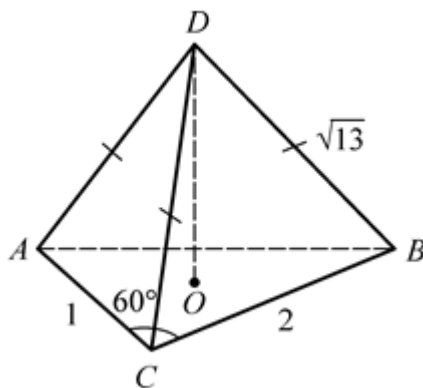
ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ, ОКОЛО ОСНОВАНИЯ КОТОРОЙ МОЖНО ОПИСАТЬ ОКРУЖНОСТЬ

Найдите объем пирамиды.

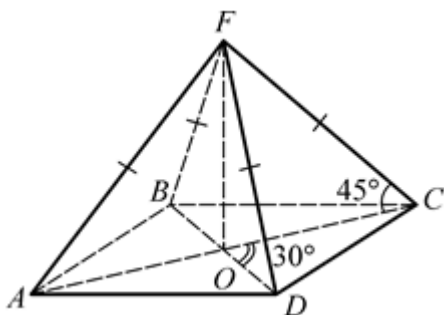
1. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $AC = 8$,
 $DO \perp (ABC)$, $\angle DAO = \angle DCO =$
 $= \angle DBO = 45^\circ$.



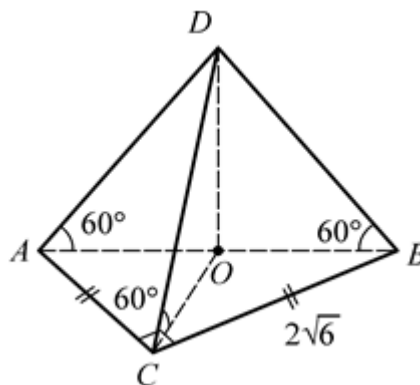
2. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AD = CD = BD = \sqrt{13}$, $AC = 1$,
 $CB = 2$, $\angle ACB = 60^\circ$.



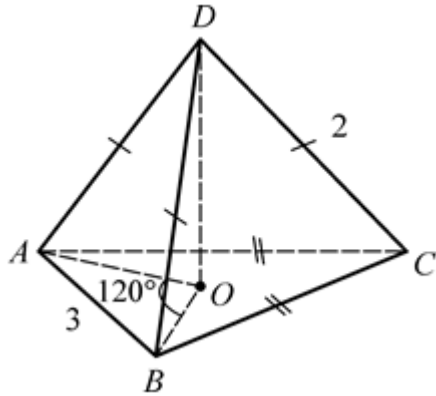
3. Дано: $FABCD$ – пирамида,
 $AF = BF = CF = DF$, $ABCD$ –
 прямоугольник, $S_{ABCD} = 9$,
 $AC \cap BD = O$, $\angle COD = 30^\circ$,
 $\angle FCO = 45^\circ$.



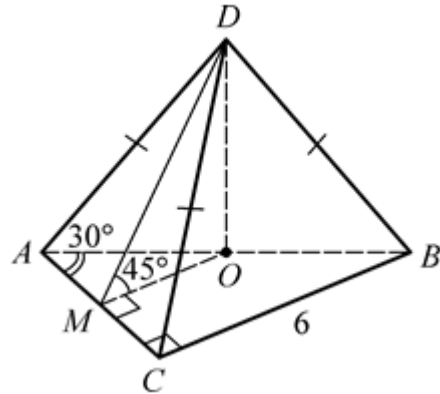
4. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB = 2\sqrt{6}$,
 $\angle DAO = \angle DCO = \angle DBO = 60^\circ$.



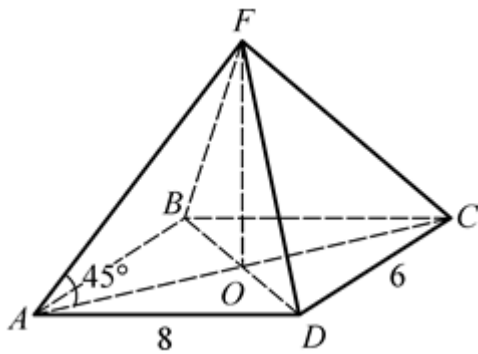
5. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AD = DB = DC = 2$, $DO \perp (ABC)$,
 $\angle AOB = 120^\circ$, $AB = 3$, $AC = BC$.



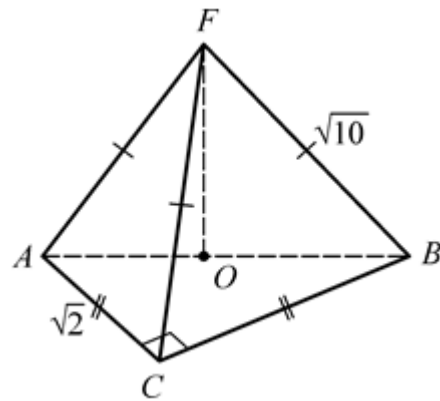
6. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $AD = DB = DC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $\angle BAC = 30^\circ$, $CB = 6$, $DO \perp (ABC)$,
 $OM \perp AC$, $\angle DMO = 45^\circ$.



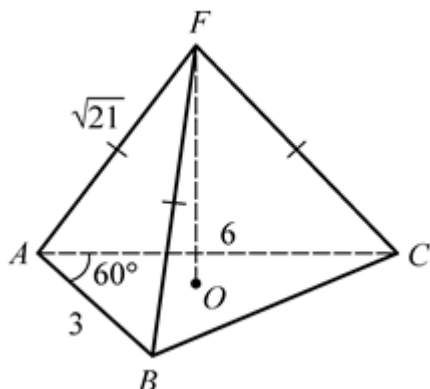
7. Дано: $FABCD$ – пирамида, $ABCD$
– параллелограмм,
 $FO \perp (ABC)$, $AB = 6$, $AD = 8$,
 $\angle FAO = \angle FBO = \angle FCO =$
 $= \angle FDO = 45^\circ$.



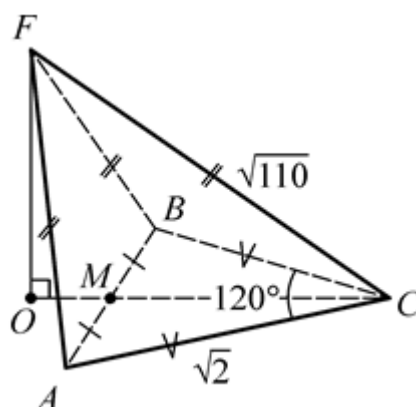
8. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $AF = BF = CF = \sqrt{110}$,
 $AC = BC = \sqrt{2}$, $\angle ACB = 90^\circ$.



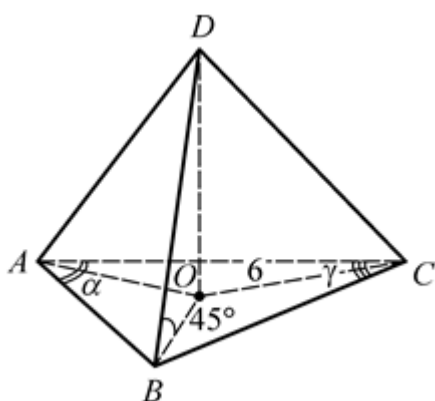
9. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $AF = BF = CF = \sqrt{21}$,
 $AB = 3, AC = 6, \angle BAC = 60^\circ$.



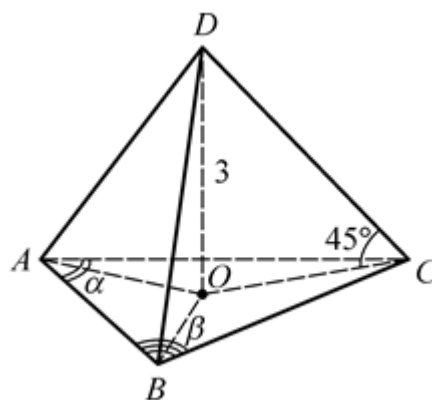
10. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $AF = BF = CF = \sqrt{110}$,
 $AC = BC = \sqrt{2}, \angle ACB = 120^\circ$.



11. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $DO \perp (ABC), \angle DAO = \angle DBO =$
 $= \angle DCO = 45^\circ, CO = 6,$
 $\angle BAC = \alpha, \angle ACB = \gamma$.



12. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $DO \perp (ABC), DO = 3, \angle DAO =$
 $= \angle DBO = \angle DCO = 45^\circ,$
 $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta$.



**Объем пирамиды, около основания которой
 можно описать окружность**

1. 40.

4. 24.

7. 80.

10. 3.

2. 1.

$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

8. 1.

11. $144 \sin \alpha \sin \gamma \sin (\alpha + \gamma)$.

3. 9.

6. $18\sqrt{3}$.

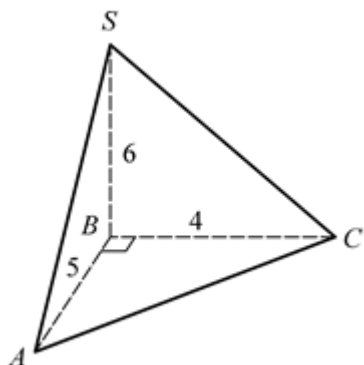
9. 9.

12. $18 \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta)$.

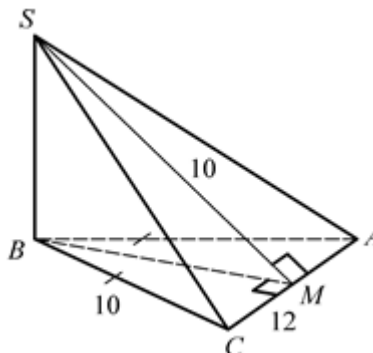
ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ, У КОТОРОЙ ОДНО ИЗ БОКОВЫХ РЕБЕР ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ПЛОСКОСТИ ОСНОВАНИЯ

$SB \perp (ABC)$. Найдите объем пирамиды.

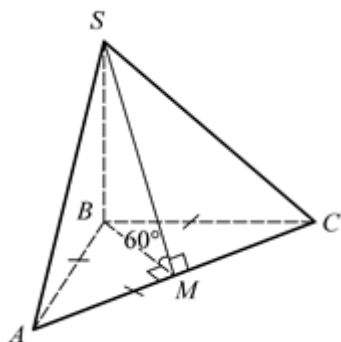
1. Дано: $AB = 5$, $BC = 4$, $SB = 6$.



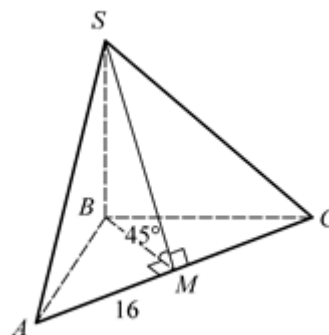
2. Дано: $AB = BC = 10$,
 $AC = 12$, $SM \perp AC$.



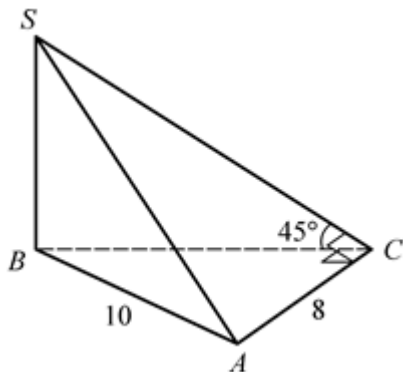
3. Дано: $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$,
 $SM \perp AC$, $\angle SMB = 60^\circ$.



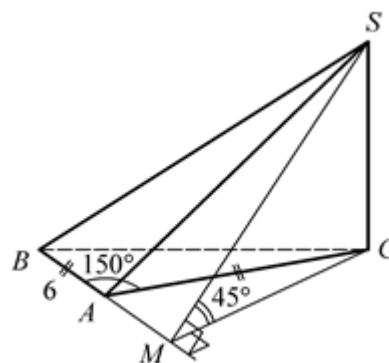
4. Дано: $SM \perp AC$, $AC = 16$,
 $S_{ABC} = 24$, $\angle SMB = 45^\circ$.



5. Дано: $AB = 10$, $AC = 8$,
 $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle SACB = 45^\circ$.



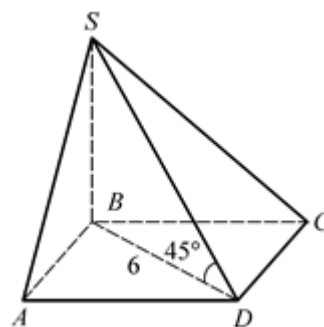
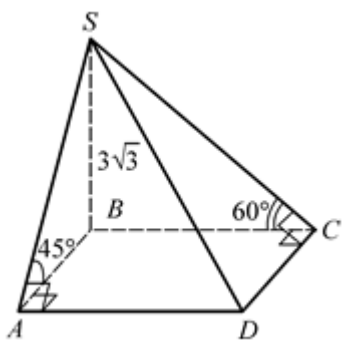
6. Дано: $AC = AB = 6$,
 $\angle BAC = 150^\circ$, $\angle SACB = 45^\circ$.



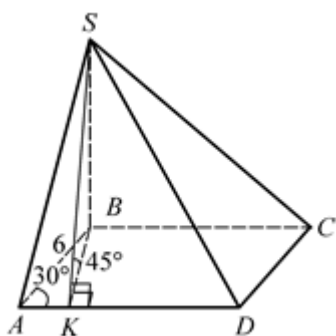
7. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $\angle SABC = 45^\circ$, $\angle SDCB = 60^\circ$,

8. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $BD = 6$, $\angle BDS = 45^\circ$.

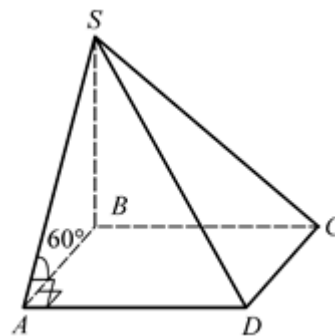
$$SB = 3\sqrt{3}.$$



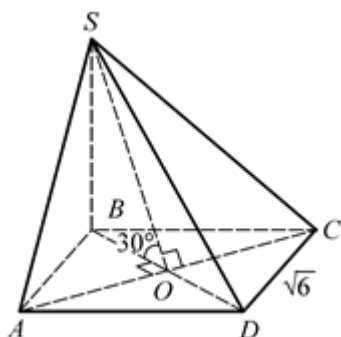
9. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 6$,
 $\angle DAB = 30^\circ$, $SK \perp AD$,
 $\angle SKB = 45^\circ$.



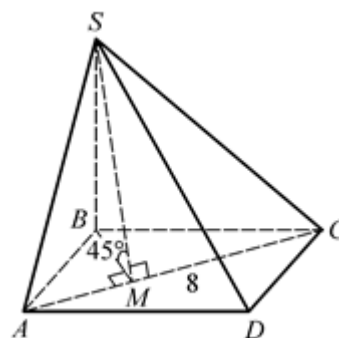
10. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $AC = \sqrt{6}$, $\angle SAB = 60^\circ$.



11. Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $AB = \sqrt{6}$, $AC \cap BD = O$,
 $\angle SOB = 30^\circ$.



12. Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $S_{ABCD} = 24$, $AC = 8$, $\angle SACB = 45^\circ$.



Объем пирамиды, у которой одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания

1. 20.

2. 96.

3. 9.

4. 24.

5. 48.

6. 9.

7. 27.

8. 36.

9. 18.

10. 3.

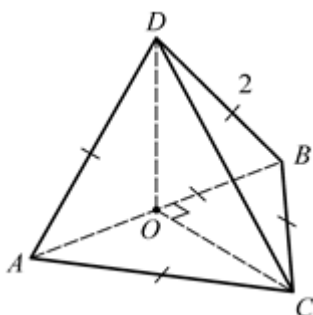
11. 2.

12. 24.

ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ С ГРАНЬЮ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ОСНОВАНИЮ

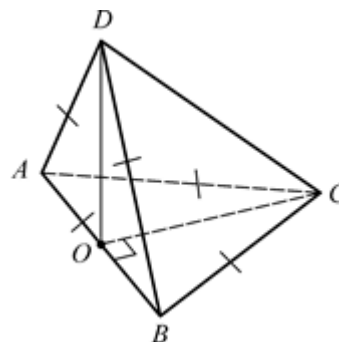
1. Дано: $(ADB) \perp (ABC)$, $AB = BC = AC = AD = BD = 2$.

Найдите V_{DABC} .



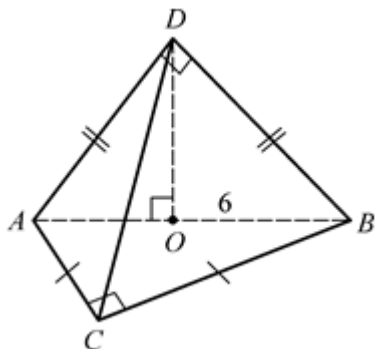
2. Дано: $(ADB) \perp (ABC)$, $AB = BC = AC = AD = BD$, $V_{DABC} = 1$.

Найдите AB .



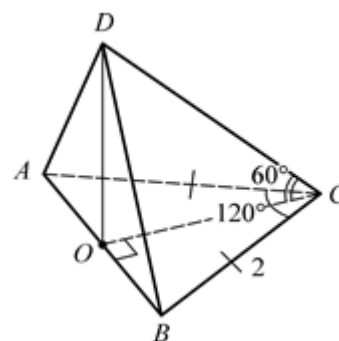
3. Дано: $(ADB) \perp (ABC)$, $AC = CB$, $AD = DB$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ$, $AB = 6$.

Найдите V_{DABC} .



4. Дано: $(ADB) \perp (ABC)$, $AC = CB = 2$, $\angle ACB = 120^\circ$, $CO \perp AB$, $\angle DCO = 60^\circ$.

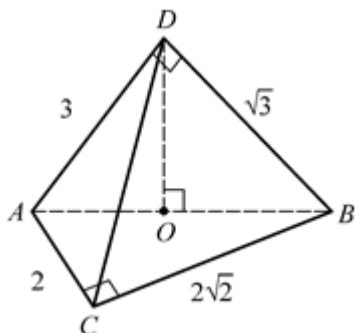
Найдите V_{DABC} .



5. Дано: $DO \perp (ABC)$, $O \in AB$, $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, $AD = 3$,

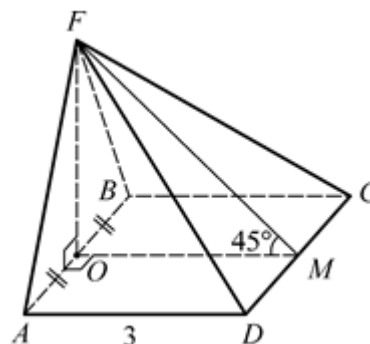
$DB = \sqrt{3}$, $AC = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$.

Найдите V_{DABC} .



6. Дано: $(AFB) \perp (ABC)$, $ABCD$ – квадрат, $\angle FDCB = 45^\circ$, $AB = 3$.

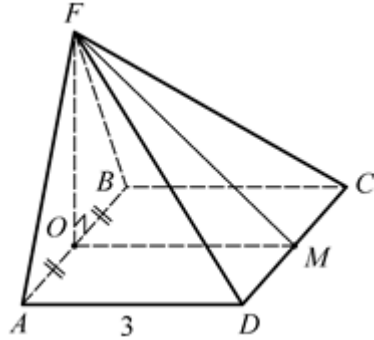
Найдите V_{FABCD} .



7. Дано: $(AFB) \perp (ABC)$, $ABCD$ – квадрат, $AB = 3$, $V_{DABC} = 18$.

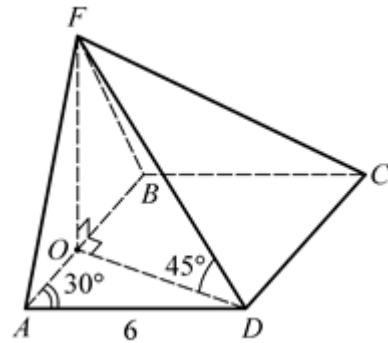
8. Дано: $ABCD$ – ромб, $AB = 6$, $\angle BAD = 30^\circ$, $(AFB) \perp (ABC)$,

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, где $\alpha = \angle((ABC), (FDC))$.



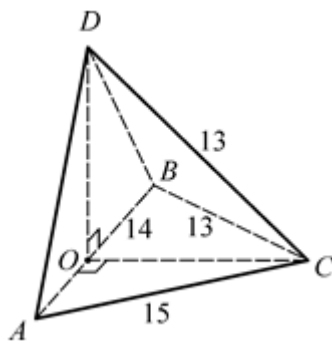
$\angle FDO = 45^\circ$.

Найдите V_{FABCD} .



9. Дано: $(ADB) \perp (ABC)$, $AB = 14$,
 $AC = 15$, $BC = 13$, $DC = 13$.

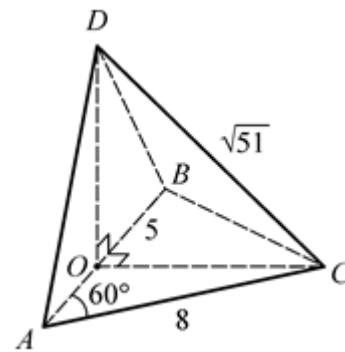
Найдите V_{DABC} .



10. Дано: $(ADB) \perp (ABC)$, $AB = 5$,

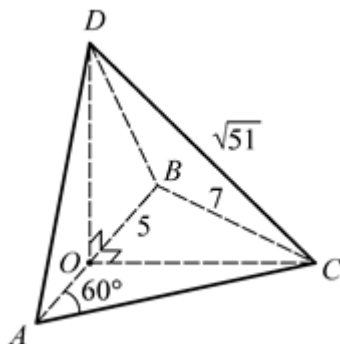
$AC = 8$, $\angle BAC = 60^\circ$, $DC = \sqrt{51}$.

Найдите V_{DABC} .



11. Дано: $(ADB) \perp (ABC)$, $AB = 5$,
 $BC = 7$, $\angle BAC = 60^\circ$, $DC = \sqrt{51}$.

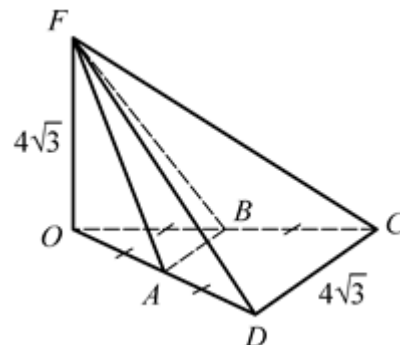
Найдите V_{DABC} .



12. Дано: $FO \perp (ABC)$,
 $\angle COD = 60^\circ$, $OA = AD$,

$OB = BC$, $OF = DC = 4\sqrt{3}$.

Найдите V_{FABCD} .



Объем пирамиды с гранью, перпендикулярной основанию

1. 1.

2. 2.

3. 9.

4. 1.

5. $\sqrt{2}$.

6. 9.

7. 2.

8. 18.

9. 140.

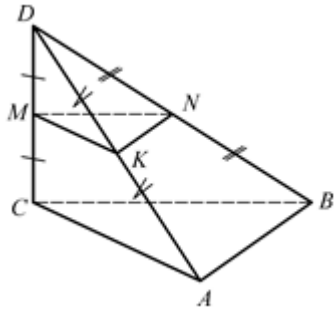
10. 10.

11. 10.

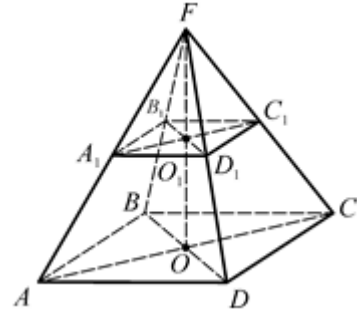
12. 36.

ОБЪЕМ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

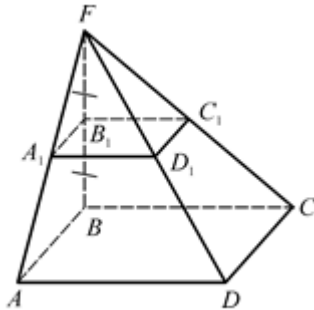
1. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $CD \perp (ABC)$, $CM = MD$,
 $AK = KD$, $BN = ND$,
 $V_{DABCD} = 16$. Найдите $V_{\text{ус. пир.}}$.



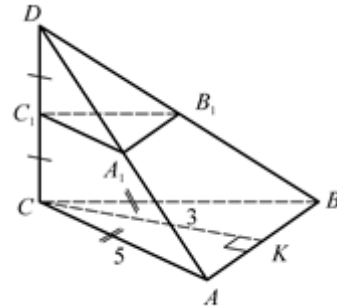
2. Дано: $FABCD$ – пирамида,
 $AC \parallel A_1C_1$, $BD = B_1D_1$,
 $FO_1 = O_1O$, $V_{\text{ус. пир.}} = 49$.
 Найдите V_{FABCD} .



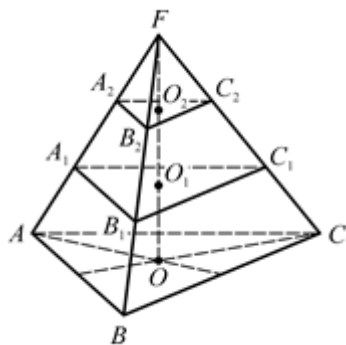
3. Дано: $FABCD$ – пирамида,
 $FB \perp (ABC)$, $AB \parallel A_1B_1$,
 $BC \parallel B_1C_1$, $BB_1 = B_1F$,
 $V_{FA_1B_1C_1D_1} = 2$.
 Найдите $V_{\text{ус. пир.}}$.



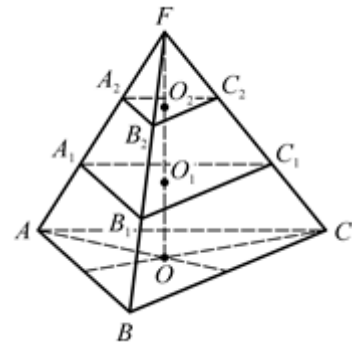
4. Дано: $DABC$ – пирамида,
 $CD \perp (ABC)$, $CD = 4$, $CC_1 = C_1D$,
 $AC = CB = 5$, $CK \perp AB$, $CK = 3$,
 $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$.
 Найдите $V_{DA_1B_1C_1}$.



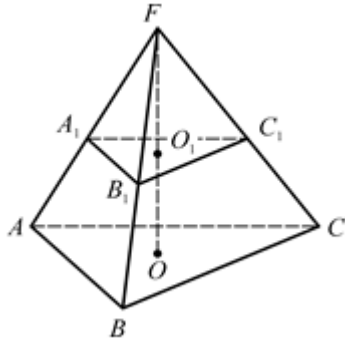
5. Дано: $FABC$ – пирамида, $(A_1B_1C_1) \parallel (A_2B_2C_2) \parallel (ABC)$,
 $OO_1 = O_1O_2 = O_2F$, $V_{FABC} = 27$.
 Найдите $V_{A_1B_1C_1A_2B_2C_2}$.



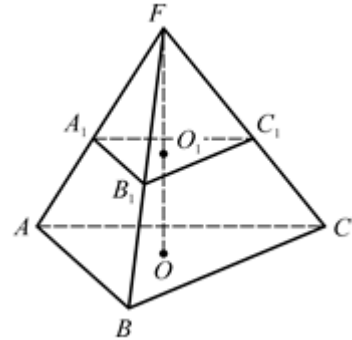
6. Дано: $FABC$ – пирамида, $(A_1B_1C_1) \parallel (A_2B_2C_2) \parallel (ABC)$,
 $OO_1 = O_1O_2 = O_2F$,
 $V_{A_1B_1C_1A_2B_2C_2} = 7$. Найдите $V_{ABCA_1B_1C_1}$.



7. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $S_{ABC} = 16$, $S_{A_1B_1C_1} = 9$, $OO_1 = 6$.
 Найдите $V_{\text{ус. пир.}}$



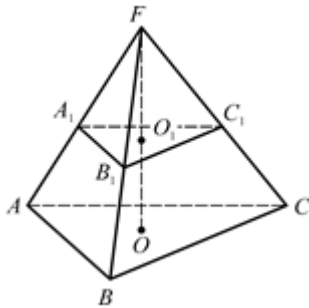
8. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $V_{\text{ус. пир.}} = 49$, $S_{ABC} = 25$,
 $S_{A_1B_1C_1} = 9$. Найдите OO_1 .



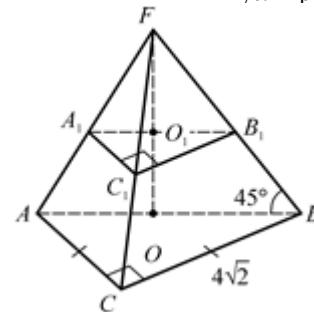
9. Дано: $FABC$ – пирамида,

$$V_{FA_1B_1C_1} = \frac{8}{125} V_{FABC}.$$

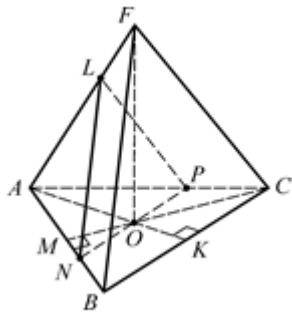
 Найдите $\frac{FO_1}{O_1O}$.



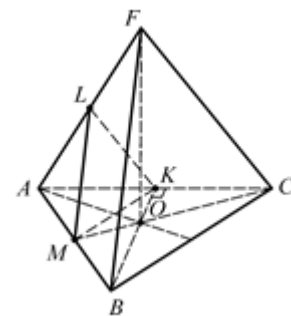
10. Дано: $FABC$ – пирамида,
 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB = 4\sqrt{2}$,
 $FO \perp (ABC)$, $\angle FAO = \angle FBO =$
 $= \angle FCO = 45^\circ$, $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$,
 $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}$. Найдите $V_{\text{ус. пир.}}$



11. Дано: $FABC$ – правильный тетраэдр,
 $CM \perp AB$, $AK \perp BC$,
 $AK \cap CM = O$, $NP \parallel BC$,
 $O \in NP$, $NL \parallel BF$, $AB = 6\sqrt{3}$.
 Найдите $V_{\text{ус. пир.}}$



12. Дано: $FABC$ – правильный тетраэдр,
 $CM \perp AB$, $BK \perp AC$, $ML \parallel BF$,
 $KL \parallel CF$, $AB = 4\sqrt{3}$.
 Найдите $V_{\text{ус. пир.}}$



Объем усеченной пирамиды

1. 14.

4. 2.

7. 74.

10. 21.

2. 56.

5. 7.

8. 3.

11. $38\sqrt{6}$.

3. 14.

6. 19.

9. $\frac{2}{3}$.

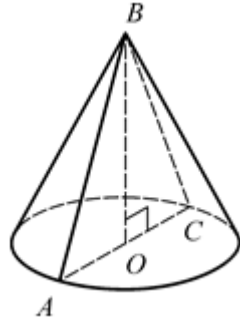
12. $14\sqrt{6}$.

Объем конуса

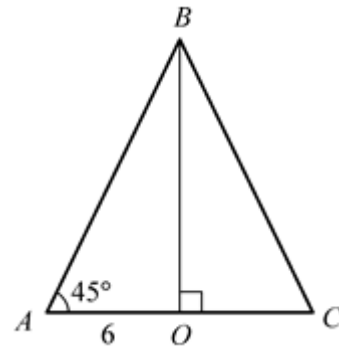
ОБЪЕМ КОНУСА

Дан прямой круговой конус. $\triangle ABC$
– осевое сечение.

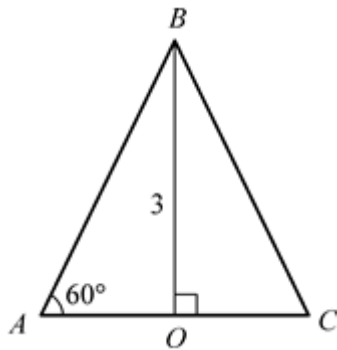
Найдите $V_{\text{конуса}}$.



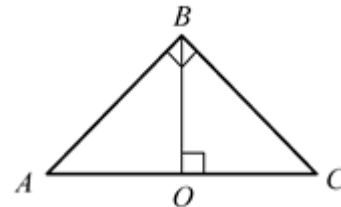
1. Дано: $R = 6$, $\angle BAO = 45^\circ$.



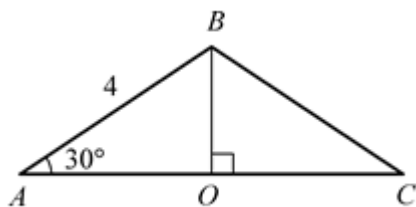
2. Дано: $H = 3$, $\angle BAO = 60^\circ$.



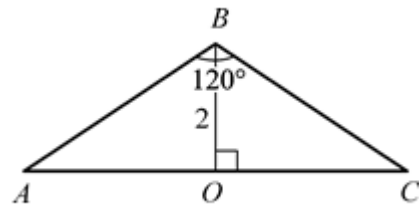
3. Дано: $S_{ABC} = 9$, $\angle ABC = 90^\circ$.



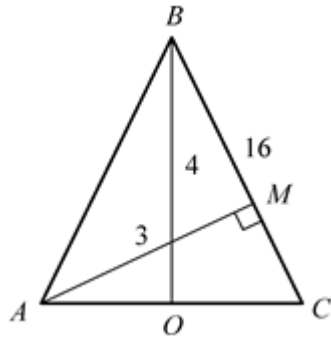
4. Дано: $AB = 4$, $\angle BAC = 30^\circ$.



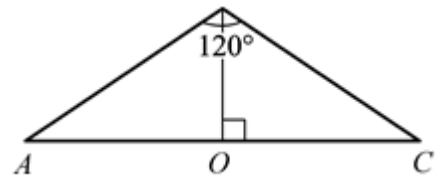
5. Дано: $H = 2$, $\angle ABC = 120^\circ$.



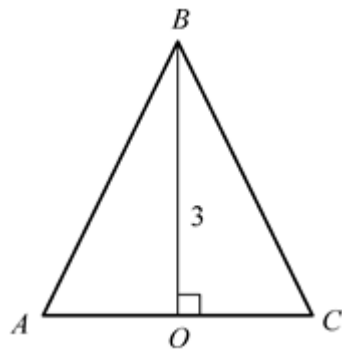
6. Дано: $BC = 16$, $H = 4$,
 $AM \perp BC$, $AM = 3$.



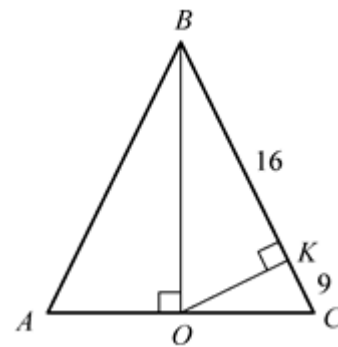
7. Дано: $AC = 4\sqrt{3}$, $\angle ABC = 120^\circ$.



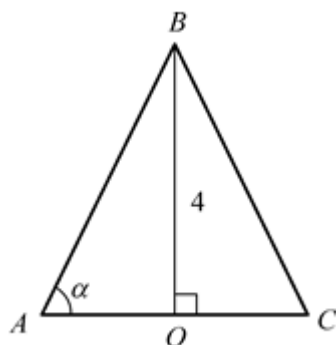
8. Дано: $AB = BC = AC$, $H = 3$.



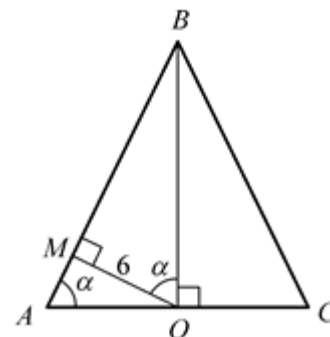
9. Дано: $OK \perp BC$, $BK = 16$,
 $KC = 9$.



10. Дано: $H = 4$, $\cos \alpha = 0,6$.



11. Дано: $OM \perp AB$, $OM = 6$,
 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.



Объем конуса

1. 72π .

2. 3π .

3. 9π .

4. 8π .

5. 8π .

6. 48π .

7. 8π .

8. 3π .

9. 1500π .

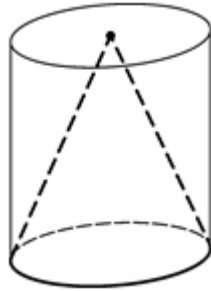
10. 12π .

11. 250π .

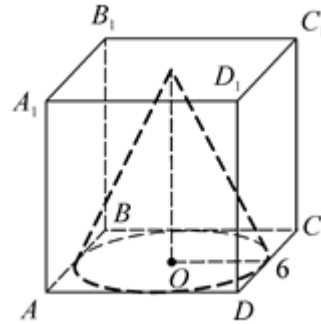
ОБЪЕМ ВПИСАННОГО ИЛИ ОПИСАННОГО КОНУСА

Найдите объем конуса.

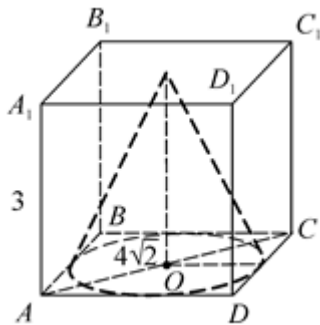
1. Дано: $V_{\text{цил}} = 81$.



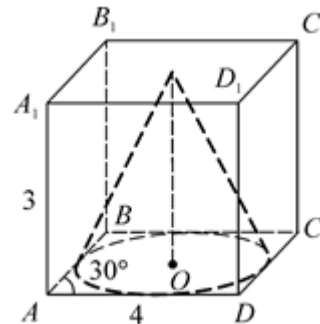
2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, $AB = 6$.



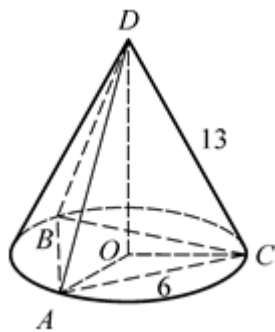
3. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AA_1 = 3$, $AC = 4\sqrt{2}$.



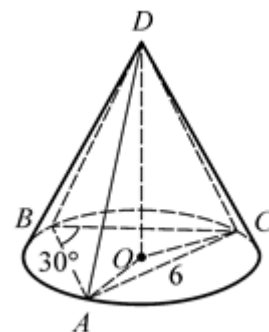
4. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед, $AA_1 = 3$, $AD = 4$, $\angle BAD = 30^\circ$.



5. Дано: $DABC$ – правильная пирамида, $AC = 6$, $DC = 13$.



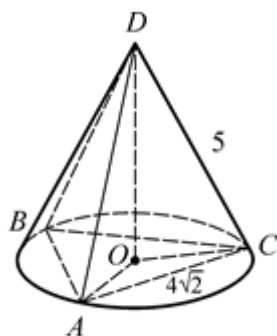
6. Дано: $DABC$ – пирамида, $AC = 6$, $\angle ABC = 30^\circ$, $DC = 10$.



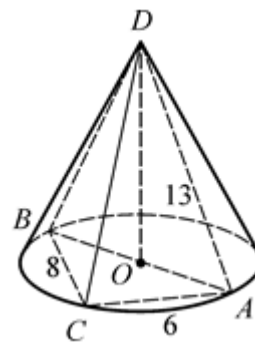
7. Дано: $DABC$ – пирамида,

8. Дано: $DABC$ – пирамида, $DO \perp (ABC)$, $O \in AB$, $AC = 6$,

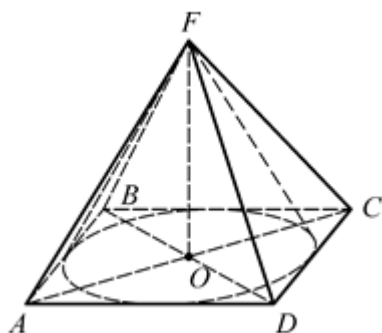
$\angle ABC = 45^\circ, AC = 4\sqrt{2}, DC = 5.$



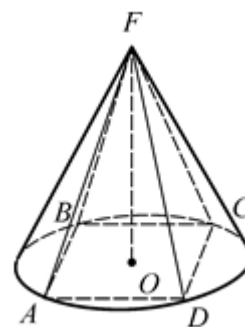
$BC = 8, AD = 13.$



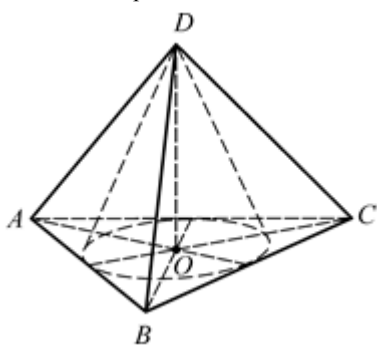
9. Дано: $FABCD$ – правильная пирамида, $V_{\text{пирамиды}} = 12.$



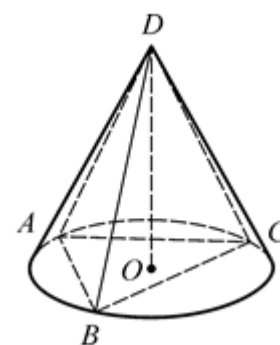
10. Дано: $FABCD$ – правильная пирамида, $V_{\text{пирамиды}} = 12.$



11. Дано: $DABC$ – правильная пирамида, $V_{\text{пирамиды}} = 3\sqrt{3}.$



12. Дано: $DABC$ – правильная пирамида, $V_{\text{пирамиды}} = 3\sqrt{3}.$



Объем вписанного или описанного конуса

1. 27.

4. $\pi.$

7. $16\pi.$

10. $6\pi.$

2. $18\pi.$

5. $4\pi.$

8. $100\pi.$

11. $\pi.$

3. $4\pi.$

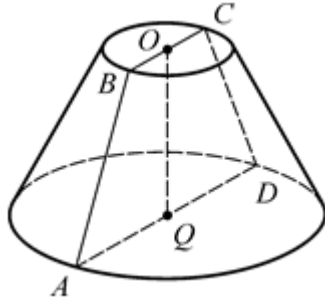
6. 96π ($r = 6$ по теореме синусов).

9. $3\pi.$ 12. $4\pi.$

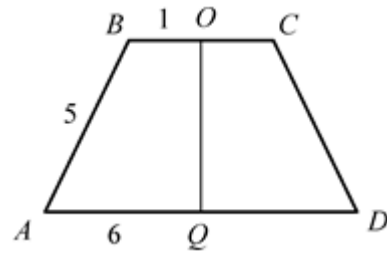
ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Дан усеченный конус. $ABCD$ – осевое сечение.

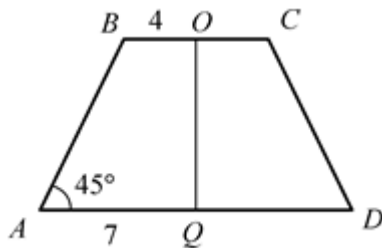
Найдите объем конуса.



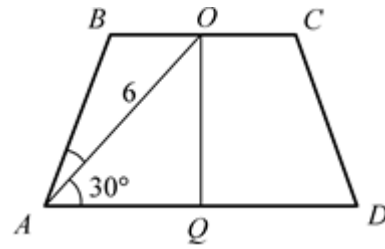
1. Дано: $r = 1$, $R = 6$, $AB = 5$.



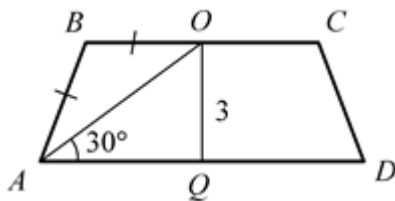
2. Дано: $r = 4$, $R = 7$, $\angle BAD = 45^\circ$.



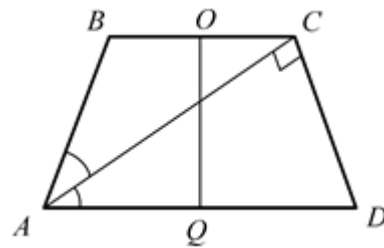
3. Дано: $AO = 6$, $\angle BAO = \angle OAQ = 30^\circ$.

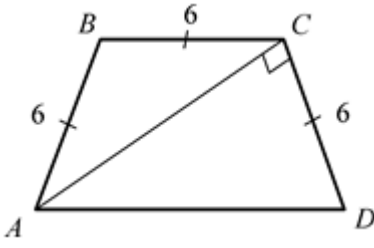
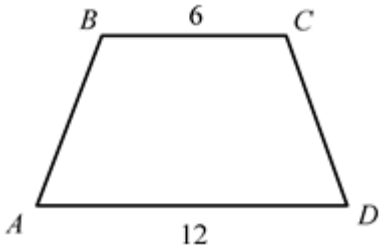
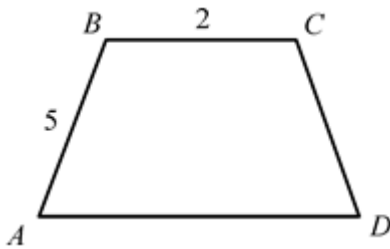
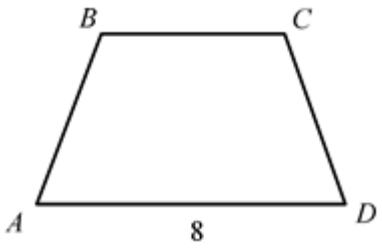
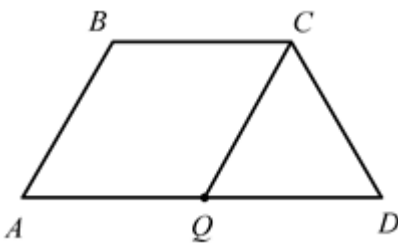
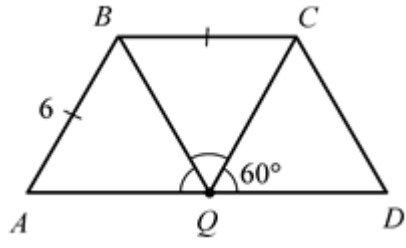


4. Дано: $OQ = 3$, $AB = BO$, $\angle OAQ = 30^\circ$.



5. Дано: $AD = 12$, $AC \perp CD$, $\angle BAC = \angle CAD$.



<p>6. Дано: $AB = BC = CD = 6$, $AC \perp CD$.</p> 	<p>7. Дано: $BC = 6$, $AD = 12$, в $ABCD$ можно вписать окружность.</p> 
<p>8. Дано: $AB = 5$, $BC = 2$, в $ABCD$ можно вписать окружность.</p> 	<p>9. Дано: $AD = 8$, $P_{ABCD} = 20$, в $ABCD$ можно вписать окружность.</p> 
<p>10. Дано: $ABCQ$ – ромб, $AD = 12$.</p> 	<p>11. Дано: $\angle AQB = \angle BQC = \angle CQD =$ $= 60^\circ$, $AB = BC = 6$.</p> 

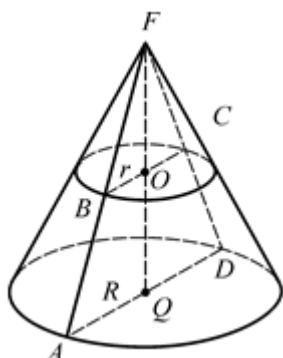
Объем усеченного конуса

- | | | | |
|--------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. 31π . | 4. 57π . | 7. $126\sqrt{2}\pi$. | 10. $63\sqrt{3}\pi$. |
| 2. 93π . | 5. $63\sqrt{3}\pi$. | 8. 28π . | 11. $63\sqrt{3}\pi$. |
| 3. 57π . | 6. $63\sqrt{3}\pi$. | 9. 28π . | |

ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

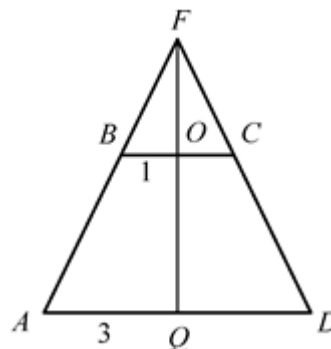
В конусе проведено сечение параллельно основанию.

$AQ = R, BO = r, FQ = H,$
 $OQ = h, S_{\text{осн}} = S, S_{\text{сеч}} = S_1.$

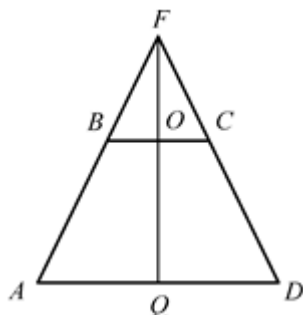


1. Дано: $BO = 1, AQ = 3,$
 $V_{\text{конуса}} = 27.$

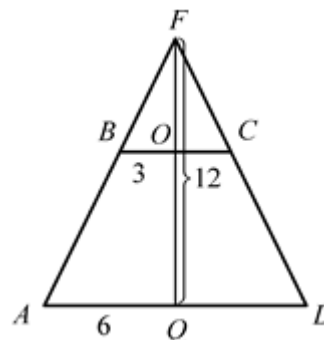
Найдите $V_{\text{усеч. конуса}}.$



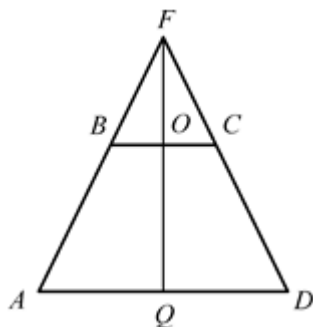
2. Дано: $H = 6, h = 4, V_{\text{усеч. конуса}} = 52.$
 Найдите $V_{\text{конуса}}.$



3. Дано: $R = 6, r = 3, H = 12.$
 Найдите $V_{\text{усеч. конуса}}.$

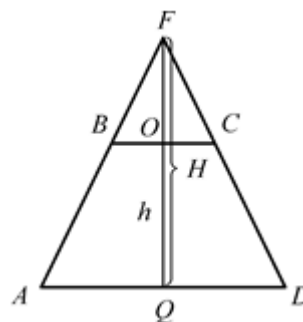


4. Дано: $H = 12, h = 4, V_{\text{конуса}} = 54.$
 Найдите $V_{\text{усеч. конуса}}.$



5. Дано: $h : H = 2 : 3.$

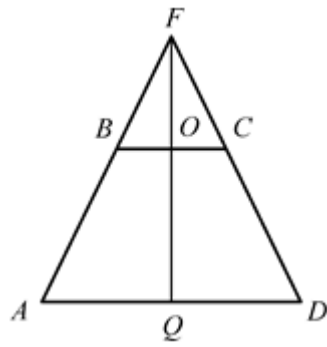
Найдите $\frac{V_{\text{усеч. конуса}}}{V_{\text{конуса}}}.$



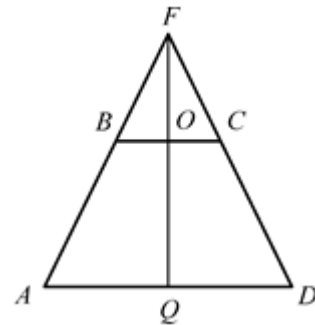
6. Дано: $S_1 : S_2 = 1 : 9.$

Найдите $\frac{V_{\text{усеч. конуса}}}{V_{\text{конуса}}}.$

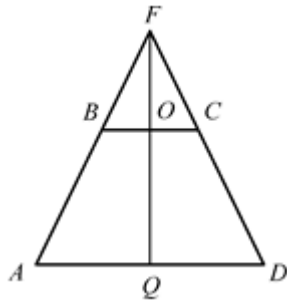
7. Дано: $\frac{V_{\text{усеч. конуса}}}{V_{\text{кон}}} = \frac{7}{8}.$



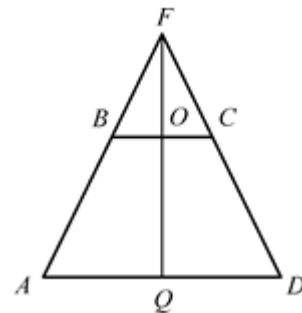
Найдите $\frac{S_1}{S_2}$.



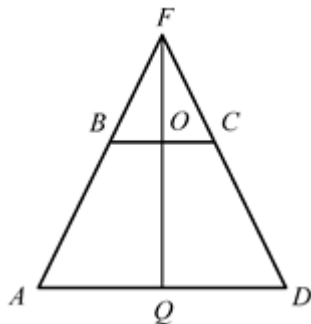
8. Дано: $H = 9$, $R = 3$, $S_1 = \pi$.
Найдите $V_{\text{усеч. конуса}}$.



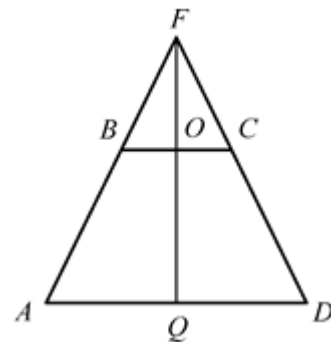
9. Дано: $S_1 = 9\pi$, $S_1 : S = 1 : 4$,
 $H - h = 4$.
Найдите $V_{\text{усеч. конуса}}$.



10. Дано: $H = 9$, $S = 36\pi$,
 $FO : FQ = 2 : 3$.
Найдите $V_{\text{усеч. конуса}}$.



11. Дано: $H = 20$, $R = 25$,
 $FO : FQ = 2 : 5$.
Найдите $V_{\text{усеч. конуса}}$.



Объем усеченного конуса

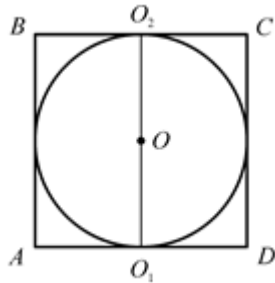
- | | | | |
|----------|----------------------|--------------------|------------|
| 1. 26. | 4. 38. | 7. $\frac{1}{4}$. | 10. 76π. |
| 2. 54. | 5. $\frac{26}{27}$. | 8. 26π. | 11. 3900π. |
| 3. 126π. | 6. $\frac{26}{27}$. | 9. 84π. | |

Объем шара и площадь сферы

ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

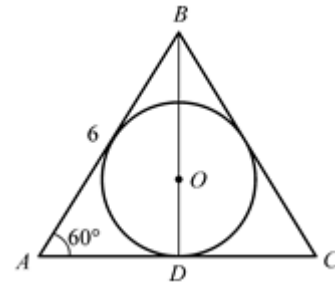
1. Дано: O – центр шара, вписанного в цилиндр, $ABCD$ – осевое сечение цилиндра.

Найдите $\frac{S_{\text{бок. цилл}}}{S_{\text{сф}}}$.

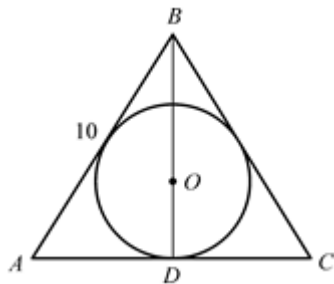


2. Дано: O – центр шара, вписанного в конус, ABC – осевое сечение конуса, $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = 6$.

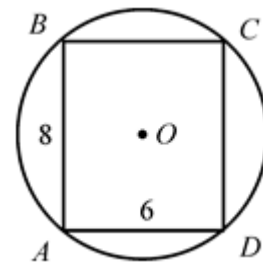
Найдите $S_{\text{сф}}$.



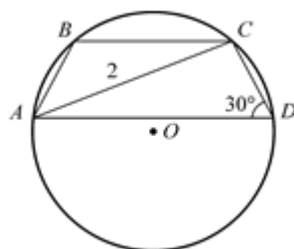
3. Дано: O – центр шара, вписанного в конус, ABC – осевое сечение конуса, $AC = 12$, $AB = 10$.
Найдите $S_{\text{сф}}$.



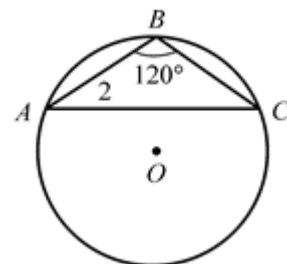
4. Дано: $ABCD$ – осевое сечение цилиндра, O – центр шара, описанного вокруг цилиндра, $AB = 8$, $AD = 6$.
Найдите $S_{\text{сф}}$.



5. Дано: $ABCD$ – осевое сечение усеченного конуса, O – центр шара, описанного вокруг усеченного конуса, $AC = 2$, $\angle CDA = 30^\circ$.
Найдите $S_{\text{сф}}$.



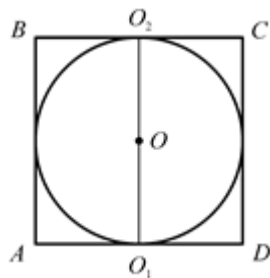
6. Дано: O – центр шара, описанного вокруг конуса, ABC – осевое сечение конуса, $AB = 2$, $\angle ABC = 120^\circ$.
Найдите $S_{\text{сф}}$.



7. Дано: O – центр шара,

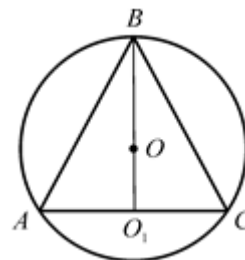
8. Дано: O – центр шара,

вписанного в цилиндр, $ABCD$ – осевое сечение цилиндра, $S_{\text{сф}} = 6$.
Найдите $S_{\text{бок. цил.}}$



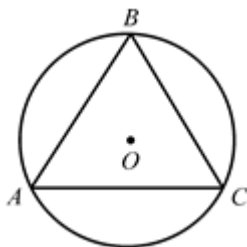
описанного вокруг конуса, ABC – осевое сечение конуса, $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$.

Найдите $S_{\text{сф.}}$



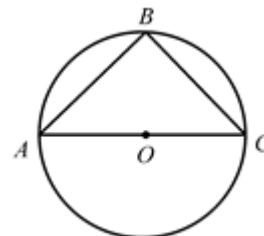
9. Дано: O – центр шара, описанного вокруг конуса, ABC – осевое сечение конуса, $AB = BC = AC$.

Найдите $\frac{S_{\text{сф}}}{S_{\text{бок. кон.}}}$.



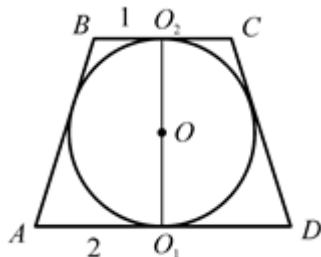
10. Дано: O – центр шара, описанного вокруг конуса, ABC – осевое сечение конуса, O лежит на основании конуса, $S_{\text{бок. кон.}} = \sqrt{2}$.

Найдите $S_{\text{сф.}}$



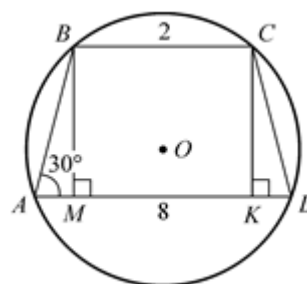
11. Дано: O – центр шара, вписанного в усеченный конус, $ABCD$ – осевое сечение усеченного конуса, $AO_1 = 2$, $BO_2 = 1$.

Найдите $S_{\text{сф.}}$



12. Дано: $ABCD$ – осевое сечение усеченного конуса, O – центр шара, описанного вокруг усеченного конуса, $BC = 2$, $\angle BAD = 30^\circ$.

Найдите $S_{\text{сф.}}$



Площадь сферы

1. 1.

2. 12π .

3. 12π .

4. 100π .

5. 16π .

6. 48π .

7. 6.

8. 16π .

$\frac{8}{3}$.

9. $\frac{8}{3}$.

10. 4.

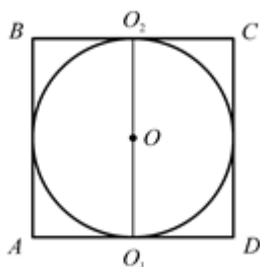
11. 8π .

12. 112π .

ОБЪЕМ ШАРА

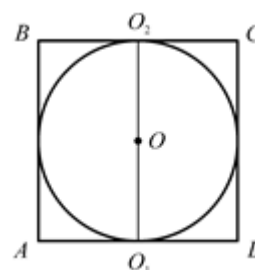
1. Дано: O – центр шара, вписанного в цилиндр, $ABCD$ – осевое сечение цилиндра.

Найдите $\frac{V_{\text{цил}}}{V_{\text{ш}}}$.



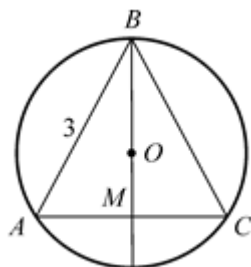
2. Дано: O – центр шара, вписанного в цилиндр, $ABCD$ – осевое сечение цилиндра, $V_{\text{ш}} = \frac{32\pi}{3}$.

Найдите $V_{\text{цил}}$.



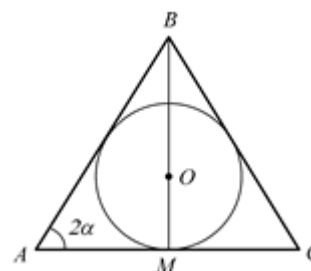
3. Дано: ABC – осевое сечение конуса, O – центр шара, описанного вокруг конуса, $AB = AC = 3$.

Найдите $V_{\text{ш}}$.



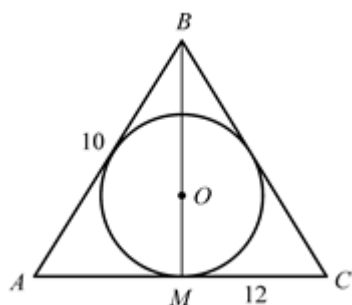
4. Дано: ABC – осевое сечение конуса, O – центр шара, вписанного в конус, $\angle BAC = 2\alpha$, $\text{tg } \alpha = 0,6$,

$AC = 10$. Найдите $V_{\text{ш}}$.



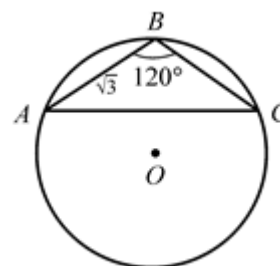
5. Дано: ABC – осевое сечение конуса, O – центр шара, вписанного в конус, $AB = 10$, $AC = 12$.

Найдите $V_{\text{ш}}$.

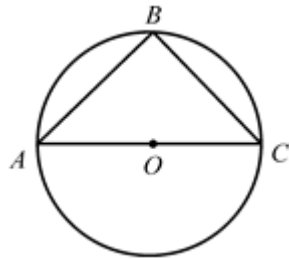


6. Дано: ABC – осевое сечение конуса, O – центр шара, описанного вокруг конуса, $\angle ABC = 120^\circ$,

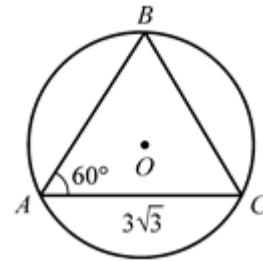
$AB = \sqrt{3}$. Найдите $V_{\text{ш}}$.



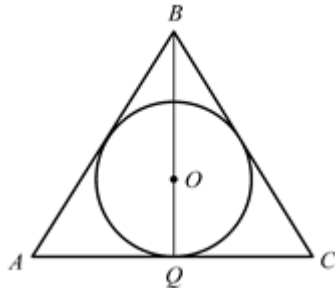
7. Дано: ABC – осевое сечение конуса, O – центр шара, описанного вокруг конуса, $V_{\text{ш}} = 12$.
Найдите $V_{\text{кон}}$.



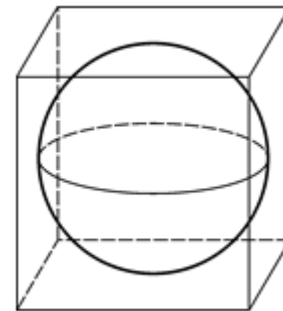
8. Дано: ABC – осевое сечение конуса, O – центр шара, описанного вокруг конуса, диаметр основания равен $3\sqrt{3}$, $\angle BAC = 60^\circ$.
Найдите $V_{\text{ш}}$.



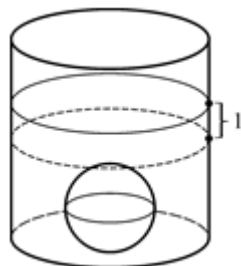
9. Дано: ABC – осевое сечение конуса, O – центр шара, вписанного в конус, $BQ = 9$, $BO = 2QO$.
Найдите $V_{\text{ш}}$.



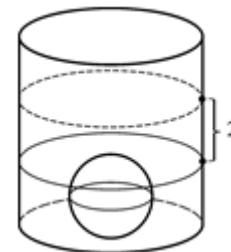
10. Дано: шар вписан в куб, $V_{\text{куба}} = 216$. Найдите $V_{\text{ш}}$.



11. Дано: в цилиндр с водой поместили шар, причем уровень воды поднялся на 1. $R_{\text{цил}} = 6$.
Найдите $R_{\text{ш}}$.



12. Дано: из цилиндра с водой вынули шар, причем уровень воды упал на 2. $R_{\text{ш}} = 6$.
Найдите $R_{\text{цил}}$.



Объем шара

1. 1,5.

2. 16π .

3. $4\sqrt{3}\pi$.

4. 36π .

5. 36π .

6. 36π .

7. 3.

8. 36π .

9. 36π .

10. 36π .

11. 3.

12. 12.

