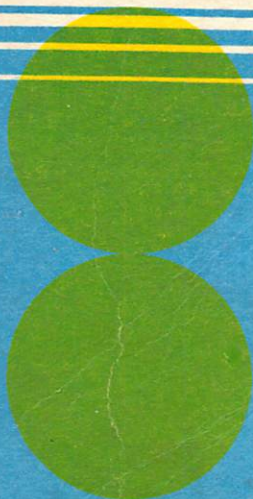


Acad. GH. MIHOC

Conf. dr. MICU

**TEORIA  
PROBABILITĂȚILOR  
ȘI STATISTICĂ  
MATEMATICĂ**



# TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI, - 1980

Referent : Conf. univ. dr. I. CUCULESCU

Redactor : prof. *EUGENIA PANTELIMON*

Tehnoredactor : *PARASCHIVA GAȘPAR*

Coperta : *NICOLĂE SÎRBU*

## CUVINT INAINTE

Cartea aceasta a fost scrisă în primul rînd pentru profesorii care predau teoria probabilităților și statistica matematică în ultima clasă de liceu. Se știe că ei au la dispoziție un manual care conține numai cîteva elemente de teoria probabilităților (evenimente, probabilități, variabile aleatoare discrete) și cîteva elemente de statistică matematică (serii statistice, reprezentarea lor grafică, sondaje). Se explică această restrîngere la minim a cunoștințelor de teoria probabilităților prin faptul că programul de matematică pentru liceu este destul de încărcat și în nici un caz nu mai poate fi amplificat. Pentru profesor însă un comentariu al materiei predate, este nu numai util, dar și necesar. El găsește în cartea de față exemple care pot îmbogăți cursul său și unele informații, care îi largesc cercul său de cunoștințe în aceste domenii și îi dau mai multă siguranță în predare.

Este firesc ca unii profesori, care ca studenți n-au urmat un curs de teoria probabilităților să se întrebe ce devin toate noțiunile din manual cînd numărul evenimentelor nu mai este finit. Pentru aceștia a fost scris un capitol special, în care sînt arătate corespondențele noțiunilor din cîmpul finit pentru un cîmp general de probabilitate.

## SCURTĂ PRIVIRE ASUPRA TEORIEI PROBABILITĂȚILOR

Teoria probabilităților este una din ramurile importante ale matematicii. Cele mai multe din domeniile de bază ale matematicii au apărut din activități și necesități practice ale oamenilor sau din observații directe asupra naturii. Nici teoria probabilităților nu face excepție, dar obârșia sa nu este dintre cele mai demne de laudă.

Dacă aritmetica a apărut din necesitatea omului de a număra (pentru a cunoaște numărul membrilor tribului, numărul de capete dintr-o turmă etc.), iar mai târziu geometria, după cum o arată chiar numele său, din necesitatea de a măsura pământul, calculul probabilităților a apărut din practica jocurilor de noroc.

Din punct de vedere cronologic teoria probabilităților nu se găsește nici printre cele mai vechi domenii ale matematicii, nici printre cele mai noi. Desigur, jocurile de noroc se practică de mii de ani. Dar evaluarea șanselor de câștig ale unui jucător într-un anumit moment al jocului s-a făcut multă vreme intuitiv sau pe baza experienței acumulate la mesele de joc.

O dată cu apariția jocurilor de noroc din ce în ce mai complicate și cu răspîndirea obiceiului de a juca, au apărut probleme de evaluare a șanselor tot mai multe și mai dificile, probleme a căror rezolvare depășea capacitatea de a raționa a jucătorilor de rînd și care au atras asupra lor atenția unor oameni care posedau din plin această capacitate. Și cînd spunem aceasta ne gîndim la Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli și alți oameni de știință iluștri.

Și astfel, probleme care s-au născut la masa de joc au fost transferate pe masa de lucru a unor savanți. Primele discuții mai serioase de calculul probabilităților\* datează de ceva mai bine de 300 de ani.

O dată acest pas făcut, calculul probabilităților s-a dezvoltat vertiginos, atît pe plan teoretic, cît și din punctul de vedere al aplicațiilor și în ciuda obârșiei sale a pătruns rapid în cele mai variate domenii ale activității și cunoașterii umane.

Iată ce spune Laplace în acest sens: „Este remarcabil faptul că o știință care a început cu analiza jocurilor de noroc, a devenit cea mai importantă metodă a cunoașterii omenești”.

Teoria probabilităților este astăzi o disciplină complexă: aproape că nu există domeniu al matematicii cu care să nu aibă un contact nemijlocit.

Punerea teoriei pe baze riguroase, axiomatice este o realizare de dată recentă. Dar la fel ca aritmetica sau geometria, ea s-a dezvoltat destul de mult încă înainte de această realizare. Calculul probabilităților s-a dezvoltat paralel cu controversele privind natura, fundamentele sau contradicțiile forței. Și-a parcurs drumul firesc plecînd de la un timp de activitate umană, a devenit o teorie matematică, s-a dezvoltat extraordinar, beneficiînd de un

\* Deoarece în primele sale aplicații, teoria probabilităților se reduce la calcularea unei probabilități, această disciplină se mai numește și calculul probabilităților.

formidabil aparat matematic, după care a revenit ca instrument ajutător în cele mai variate domenii de activitate practică. Într-adevăr, după cum spune W. Weaver: „Președintele, generalii și politicienii au nevoie de teoria probabilităților. Oamenii de afaceri, medicii, judecătorii, inginerii și gospodinele au nevoie de teoria probabilităților. Elevii și elevele au, probabil, cel mai mult nevoie de teoria probabilităților, pentru că ei vor deveni, peste câțiva ani, ingineri, medici, judecători etc.” (Doamna Șansă, Editura științifică, București, 1969).

În ce privește natura teoriei probabilităților părerile sînt împărțite. „Unii autori o consideră drept o teorie pur matematică, alții ca o formă sau o ramură a logicii, iar alții ca pe o parte a studiului naturii”. (G. Polya: *Matematica și raționamentele plauzibile*, vol. II Editura științifică, București, 1962.)

Ea poate fi abordată din oricare din aceste puncte de vedere. Într-adevăr la fel ca alte discipline matematice de bază, rîguros constituite, teoria modernă a probabilităților se bazează pe un sistem de axiome și poate fi dezvoltată ca o teorie pur matematică, făcîndu-se abstracție de originile sale. Dar obiectele teoriei matematice sînt idealizări ale unor obiecte ale lumii reale (este suficient să amintim în acest sens de obiectele geometrice cum ar fi punctul, dreapta, planul), iar relațiile dintre ele (axiomele) nu sînt alese în mod artificial, ci se impun pe baza intuiției, a experienței umane milenare. Acesta este și cazul teoriei probabilităților.

Pe de altă parte logica clasică operează — după cum se știe — doar cu două valori de adevăr: fals și adevăr, simbolizate respectiv prin 0 și 1. Aceasta corespunde faptului că răspunsul la orice întrebare care are sens în cadrul logicii clasice poate fi redus la *da* sau *nu* sau că orice afirmație din cadrul acestui sistem logic este fie falsă, fie adevărată. De exemplu o afirmație de genul: „evenimentul A se realizează, (s-a realizat, se va realiza) dacă este îndeplinit sistemul de condiții B” dacă este accesibilă logicii clasice este fie falsă, fie adevărată. Cu alte cuvînte acestei afirmații îi va corespunde fie valoarea 0, fie valoarea 1.

După cum se știe și după cum se va vedea mai departe teoria probabilităților acceptă o clasă mai largă de afirmații de acest tip, cărora le atașează orice valoare cuprinsă între 0 și 1 inclusiv.

Dacă vom pune întrebarea „a plouat ieri la Suceava?” am putea destul de ușor să primim un răspuns monosilabic — respectiv *da* sau *nu* — care să ne satisfacă. Dacă însă vom întreba „va ploua mâine la Suceava?” nu vom mai primi un astfel de răspuns și chiar dacă l-am primi nu ne-ar satisface pentru că ar fi neargumentat. Dacă vom consulta Institutul meteorologic vom primi ca răspuns „timpul probabil” pentru ziua următoare și pentru zona respectivă.

Mai bine zis răspunsul ne-ar da „timpul mai probabil” pentru că acesta ar indica — pe baza informațiilor și datelor statistice deținute de respectivul institut — care din variantele „va ploua” și „nu va ploua” are mai mult de 50 de șanse din 100 în favoarea sa. Azi cam oricine știe ce se înțelege prin asta.

Credem că institutele meteorologice se găsesc în oarecare dificultate cînd datele arată că șansele sînt la paritate și nu li se acceptă răspunsuri de genul „este la fel probabil să plouă sau să nu plouă mâine”. Dar nu numai în cazul afirmațiilor care au caracter de prognoză, fiind legate de evenimentele viitoare, se face apel la raționamente de tip probabilist. Astfel, dacă ne interesează dacă a plouat la Suceava între 21 mai și 24 mai 1612, vom putea obține, în funcție de informațiile existente, tot un răspuns „probabil”. Atunci și numai atunci cînd deținem toate informațiile referitoare la un anumit eveniment putem fi siguri de realizarea sau nerealizarea acestuia. Acesta este cazul extrem, cel mai neinteresant în teoria probabilităților.

Desigur raționamentul probabilist nu se substituie raționamentului din logica clasică. Teoria matematică a probabilităților este elaborată ca oricare altă teorie matematică. O propoziție din cadrul teoriei matematice a probabilităților nu poate fi, bineînțeles, decât fie adevărată, fie falsă.

Și acum o scurtă privire istorică asupra începuturilor teoriei probabilităților. Primele preocupări mai serioase în această direcție au fost declanșate de problemele pe care cavalerul de Méré — om de spirit și amator de jocuri de noroc — i le-a prezentat lui Pascal în 1654.

În acea perioadă se practica un joc cu mult mai vechi în care „banca” punea la miză egale, cu orice jucător că acesta va obține cel puțin o dată fața cu șase puncte în patru aruncări ale unui zar. Se știa din experiență că acest joc este defavorabil pentru jucător, dar nu din cale afară. Se poate arăta printr-un calcul destul de simplu că în cazul unui zar „corect” banca câștiga în medie de 671 de ori din 1296 de pariuri.

Se părea că șansele de a obține cel puțin o dublă de șase în 24 de aruncări ale unei perechi de zaruri sînt egale cu acelea de a obține un șase în patru aruncări ale unui zar, deoarece la aruncarea a două zaruri sînt de șase ori mai multe cazuri posibile, iar jucătorului i se oferă de șase ori mai multe aruncări. Cavalerul de Méré a prezentat această problemă lui Pascal (1632—1662) care a arătat că lucrurile nu stau așa (vom vedea cum) și că jocul este ușor favorabil jucătorului dacă banca mizează pe 24 de aruncări, dar că este ușor favorabil băncii dacă se joacă pe 25 de aruncări.

O altă problemă pe care cavalerul de Méré a pus-o lui Pascal era o problemă cunoscută mai demult și care stîrnise multe controverse.

Este vorba de problema „împărțirii mizei” sau „problema punctelor”. Mai precis, dacă un joc se întrerupe din motive obiective înainte de sfîrșitul său, cum trebuie împărțită miza pusă în joc în funcție de situația existentă în momentul întreruperii? Pascal a precizat că pentru ca împărțirea să fie echilibrată, partea care revine fiecărui jucător trebuie să fie proporțională cu probabilitatea ca el să fi câștigat jocul dacă acesta ar fi fost dus pînă la capăt. Apoi pe cîteva exemple particulare el a arătat cum trebuie făcută această împărțire.

Curînd după aceasta Pascal a început să corespundă în legătură cu aceste probleme cu Fermat (1601—1665). Nu după mult timp se arată interesat în aceste chestiuni și Christian Huygens (1629—1695) care se deplasează la Paris special pentru a discuta aceste probleme. Marele pas fusese făcut.

Preocupări pe linia evaluării unor probabilități au existat și înainte de anul 1654. Astfel pe la mijlocul secolului al XVI-lea Cardano a scris „Liber de Ludo Aleae” (Cartea despre jocul cu zaruri) care însă a fost publicată abia în 1663.

De asemenea, la începutul secolului al XVII-lea, Galilei se arată interesat în studiul erorilor de măsurare. Tot în acea perioadă apar și primele preocupări de teoria asigurărilor. Dar toate acestea nu au condus la un studiu sistematic al probabilităților. Într-un fel, era firesc ca acest studiu să pornească de la analizarea jocurilor de noroc, întrucît acestea oferă modele din cele mai simple și posibilități nelimitate de repetare a experiențelor.

O dată stîrnit interesul de lucrările lui Pascal, Fermat și Huygens, teoria probabilităților cunoaște o dezvoltare vertiginosă.

Au urmat apoi lucrările lui J. Bernoulli (1654—1705) care dă prima formă a legii numerelor mari, generalizată mai târziu de Poisson, Borel, Cantelli, Kolmogorov.

Moiyre (1667—1754) face primele observații asupra legii normale, care va fi studiată ulterior temeinic de Gauss (1777—1855). Prin lucrările lui Laplace (1749—1827) teoria probabilităților ia o mare răspîndire. În afară de lucrări cu caracter teoretic, acesta a fost preocupat și de aplicațiile calculului probabilităților, limitate în acel timp la demografie, asigurări și teoria erorilor de observație. Laplace, întrevădea însă, aplicațiile teoriei probabilităților în domenii mult mai vaste.

Următoarea perioadă de dezvoltare este dominată de lucrările lui Cebîșev (1821—1894), Leapunov (1857—1918), Markov (1856—1922), care au adus contribuții importante în așa-numita teoremă centrală a teoriei probabilităților și au inaugurat studiul variabililor aleatoare dependente.

În această perioadă, sfera aplicațiilor teoriei probabilităților s-a mărit, cuprinzînd și științele naturii, în special fizica.

Perioada modernă începe cu axiomatizarea acestei discipline, în deceniul al treilea al secolului nostru, de către A. N. Kolmogorov. Contribuții în acest domeniu au mai adus, în ordine cronologică, S. Bernstejn, Mises, Borel, Cantelli, Glivenko, Onicescu, de Finetti și alții.

Necesitatea axiomatizării a apărut și din considerații de ordin practic, deoarece aplicațiile din ce în ce mai importante ale teoriei probabilităților în fizică, biologie și celelalte ramuri ale științei, în inginerie și în problemele militare, economice și filozofice, aveau nevoie de un instrument matematic abstract, general, cu noțiuni de bază bine precizate.

În afară de puternica dezvoltare teoretică a teoriei probabilităților și statisticii matematice, s-au extins continuu și continuă să se extindă domeniile de aplicabilitate ale acestora. În zilele noastre unele din aceste domenii de aplicare au început să se contureze ca teorii distincte. Ar fi suficient să amintim în acest sens: teoria informației, teoria fiabilității, teoria așteptării, controlul statistic al calității.

\* \* \*

O introducere în teoria probabilităților se poate face în diverse moduri și cu diferite grade de dificultate. Pentru realizarea unei introduceri cât mai intuitivă este bine să acceptăm punctul de vedere conform căruia teoria probabilităților este o parte a studiului naturii. Teoria probabilităților este — din acest punct de vedere — teoria fenomenelor aleatoare (intimplătoare) de masă, sau mai precis, *teoria fenomenelor aleatoare de masă cărora le este caracteristică proprietatea de stabilitate a frecvențelor*.

Noi ne vom mărgini să precizăm aceste noțiuni prin câteva exemple.

Mai întâi însă vom menționa că un eveniment legat de o anumită experiență poate fi sigur, imposibil sau aleator în raport cu această experiență: Aici prin experiență înțelegem realizarea unui complex de condiții  $S$ .

*Evenimentul sigur* este acel eveniment care se produce de fiecare dată când sînt realizate condițiile  $S$ . Astfel, la presiunea de 1 atm și temperatura de 20°C, apa este în stare lichidă.

*Evenimentul imposibil* este acel eveniment care nu se poate produce niciodată cînd condițiile  $S$  sînt realizate. De exemplu, în condițiile de mai sus apa să fie în stare solidă.

*Evenimentul aleator* este acela care în prezența condițiilor  $S$  se poate produce sau nu.

Și acum exemplele pe care le anticipasem.

1. În cazul unei nașteri nu putem prevedea sexul noului născut. Deci, sexul noului născut este un eveniment aleator.

Dar, deși nu putem face nici o previziune certă în cazul fiecărei nașteri în parte, vom observa că dacă facem un număr mare de înregistrări, raportul dintre numărul fetelor nou născute și numărul total de nou născuți tinde să se stabilească în jurul unei anumite valori, valoare care depinde de zona și perioada de timp în care facem observațiile.

Cu cît numărul observațiilor este mai mare, cu atît această tendință este mai evidentă. Numim raportul de mai sus *frecvență*. Prin stabilitatea frecvenței înțelegem proprietatea evidențiată mai sus de a se apropia de o anumită valoare cînd numărul experiențelor crește. Vom considera această valoare ca *probabilitatea evenimentului*.

2. Se spune uneori despre o mașină care produce un anumit tip de piese că dă un număr de procente — să zicem 1,1 — rebut. Ce se înțelege prin asta? Că despre nici o piesă în parte nu putem spune cu certitudine că este bună sau defectă, dar că s-a constatat că dacă controlăm un număr mare de piese produse de mașina respectivă, în medie 11 din 1 000 vor fi defecte. Deci, *frecvența relativă* a apariției rebuturilor este de aproximativ 0,011 cînd numărul de piese controlate este mare.

3. Pe o suprafață plană se aruncă un corp în formă de paralelipiped dreptunghic cu fețele numerotate de la 1 la 6. Dacă ne interesează cît de *frecvent* acest obiect se oprește pe fața 1, nu avem altă posibilitate decît să-l aruncăm de multe ori și să calculăm frecvența relativă a apariției feței 1, fără a ne opri pînă cînd nu ne-am convins că a început să se

manifeste stabilitatea frecvențelor. Vom obține astfel o valoare aproximativă a *probabilității* ca acest corp să se oprească pe fața 1, probabilitatea fiind pentru noi o măsură a șanselor de realizare al acestui eveniment.

Este la îndemna oricui să găsească numeroase alte exemple de acest fel.

*Să reținem deci că teoria matematică a probabilității este modelul matematic al fenomenelor aleatoare de masă. Probabilitatea corespunde în mod intuitiv constantei în jurul căreia oscilează frecvențele și către care șirul acestor frecvențe tinde când numărul probelor crește nelimitat, fără să încastrăm, acest proces de limită într-o teorie matematică.*

Un caz particular interesant este acela al experiențelor care au un număr finit de rezultate posibile, fiecare dintre acestea fiind la fel de posibile. Pe scurt, este vorba de experiențele cu un număr finit de cazuri egal posibile. Intuitiv, este destul de clar despre ce fel de experiențe este vorba. Să revenim la exemplul 3<sup>o</sup> de mai sus. În cazul general, nu putem face nici o precizare asupra probabilităților ca corpul considerat să se așeze pe o anumită față, fără a efectua experiența de un număr suficient de mare de ori.

Dacă nu este îndeplinită condiția de omogenitate a materialului din care este confecționat paralelipipedul, oricât de corect ar fi acesta din punct de vedere geometric, nu putem spune apriori nici măcar că frecvența așezării pe o anumită față este aproximativ egală cu frecvența așezării pe fața opusă. Îndată însă ce această condiție este îndeplinită, dacă  $a$  și  $b$  sînt două fețe opuse ale paralelipipedului, atunci oricine va accepta din motive de simetrie că evenimentele „aparitia feței  $a$ ” și „aparitia feței  $b$ ” au aceeași șansă de a se produce, cu alte cuvinte că sînt evenimente egal posibile.

Dacă, în plus, muchiile paralelipipedului sînt egale, deci acesta se reduce la un cub, nu avem nici un motiv să credem că — făcînd un număr mare de aruncări — o față oarecare va apare sistematic mai frecvent decît o altă față. Cu alte cuvinte, în acest caz, toate cele șase cazuri posibile ale experienței sînt egal posibile.

Dacă ne fixăm atenția asupra unei fețe oarecare din cele șase, vom putea pronostica că frecvența relativă a acesteia va oscila în imediata apropiere a valorii  $1/6$ , dacă numărul probelor este destul de mare.

La fel, dacă se aruncă o monedă „corectă” oricine va spune că probabilitatea apariției „stemei” este  $1/2$ , înțelegînd prin aceasta că „stema” și „banul” au șanse egale de apariție la fiecare aruncare, sau că la un număr mare de aruncări fiecare din cele două fețe apare cam la același număr de ori (diferențele sînt nesemnificative față de numărul probelor). Recurgînd efectiv la experiență se obțin în general frecvențele prevăzute. Aceasta nu înseamnă că rezultatul repetării experienței nu este obiectiv, că el se realizează pentru că noi am fi uimiți în caz contrar. Nu avem motive să credem că stabilitatea frecvențelor ar înceta să se manifeste, sau că acestea ar oscila în jurul altor valori dacă aruncările ar fi efectuate de o maimuță care nu ar urmări prin aceasta să obțină confirmarea sau infirmarea vreunei ipoteze.

De fapt, în unele cazuri concrete, repetarea unei experiențe poate duce la infirmarea rezultatului așteptat. De exemplu, la aruncarea unui zar se presupune că se aruncă un zar ideal, absolut „corect”.

Este posibil însă ca zarul să fie suficient de „incorect” pentru a duce la unele abateri sensibile și sistematice ale frecvențelor de la valorile așteptate, valori care la rîndul lor sînt așteptate deoarece zarul este aparent suficient de „corect” pentru a nu ne da seama de defectele sale.

Un model de experiență cu un număr finit de cazuri egal posibile îl oferă extragerile din urne conținînd bile. Dacă o urnă conține  $n$  bile de aceeași formă, dimensiune și greutate, numerotate cu  $1, 2, \dots, n$  și dacă din această urnă se extrage o bilă, atunci această experiență are  $n$  cazuri posibile. Nu avem motive să credem că dacă facem un număr mare de extrageri (punînd după fiecare extragere bila înapoi în urnă) una din bile va apare cu o frecvență sensibil diferită de frecvența apariției altei bile. Deci se poate prevedea că frec-

vența relativă a apariției unei anumite bile, oricare ar fi aceasta, oscilează în jurul valorii  $1/n$  când numărul probelor crește și ne așteptăm ca apropierea să fie cu atât mai mare cu cât numărul probelor este mai mare.  $1/n$  este limita către care ar tinde în general șirul frecvențelor evenimentului „apariția bilei 1” — de exemplu — dacă numărul probelor ar putea crește indefinit. Cu alte cuvinte vom spune că probabilitatea să apară bila 1 la o extragere este  $1/n$ ; la fel, probabilitatea apariției bilei 2 este  $1/n$  etc.

Urna cu bile oferă un model simplu pentru orice experiență cu un număr finit de cazuri egal posibile. Astfel, aruncarea unui zar „corect” poate fi înlocuită cu o extragere dintr-o urnă cu șase bile, iar aruncarea a două zaruri cu extragerea a două bile dintr-o urnă cu șase bile (cu introducerea bilei extrase) sau cu o extragere dintr-o urnă cu 36 bile (stabilindu-se o corespondență între mulțimea celor 36 de cazuri posibile de la aruncarea a două zaruri și mulțimea cazurilor posibile de la extragerea din urnă).

Să revenim la urna care conține  $n$  bile numerotate  $1, 2, \dots, n$  din care se extrage o bilă și se consideră evenimentul: „apariția unui număr  $\leq m$ ” ( $m \leq n$ ).

Dacă repetăm experiența de un număr  $r$  de ori foarte mare și dacă bila  $k$  a apărut de  $r_k$  ori ( $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$ ) rezultă că evenimentul considerat s-a produs de  $r_1 + r_2 + \dots + r_m$  ori și deci frecvența sa relativă este suma frecvențelor relative ale evenimentelor elementare: „apariția feței  $k$ ” ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Și dacă fiecare din aceste frecvențe oscilează în apropierea lui  $1/n$  atunci frecvența relativă a evenimentului nostru oscilează în jurul lui  $\frac{m}{n}$  și tinde către această valoare când  $r$  crește.

Aceste considerații ne duc la următoarea definiție: *probabilitatea unui eveniment legat de o experiență cu un număr finit de cazuri egal posibile este raportul dintre numărul cazurilor favorabile evenimentului și numărul total al cazurilor posibile ale experienței.*

Această definiție este aplicabilă numai la o categorie restrinsă de experiențe și anume la cele care au număr finit de cazuri posibile și acestea sînt toate egal posibile. Cele mai simple probleme de calculul probabilităților cer probabilitatea unui eveniment legat de o astfel de experiență și se reduc la calcularea a două numere: — numărul  $n$  al cazurilor (egal) posibile ale experienței care este caracterizat numai de experiență, fără a fi numit vreun eveniment și — numărul  $m$  al cazurilor favorabile producerii evenimentului considerat. În acest caz spunem că probabilitatea acestui eveniment este  $\frac{m}{n}$ ; sau într-un limbaj mai intuitiv

că producerii evenimentului respectiv îi sînt favorabile „ $m$  șanse din  $n$ ”.

În general, avem destul de multă încredere în considerentele de mai sus. Așa de multă incit dacă — de exemplu — după un număr mare de aruncări ale unui zar observăm că frecvența relativă unei fețe se abate sistematic de la  $1/6$  (valoarea teoretică a probabilității apariției acelei fețe) și pe măsură ce numărul de aruncări crește această frecvență tinde să se stabilizeze în apropierea unei alte valori, preferăm să ne îndoim de „corectitudinea” zarului decît să credem că modelul matematic propus nu concordă cu acel aspect al lumii reale pentru care a fost creat.

Această încredere se bazează pe faptul că ne satisface intuiția care este o manifestare a experienței acumulate de om pe parcursul evoluției sale.

De îndată însă ce nu ne mai mulțumim cu atât și dorim să găsim fundamentele logice ale legăturii dintre teoria pur matematică a probabilităților și aplicațiile sale la fenomene aleatoare ale lumii reale, vom întîmpina dificultăți. De fapt, pătrunzînd nițel mai adînc în această problemă ajungem destul de repede la constatarea că nu este posibilă stabilirea unei punți de legătură între teorie și aplicarea ei la fenomene ale lumii reale, care sînt prezente nici o lacună din punct de vedere logic. Nu vom intra în amănuntele acestei „dileme a teoriei probabilităților”\* pentru că acesta nu este unul din scopurile cărții noastre. Să aruncăm totuși o scurtă privire asupra problemei. În primul rînd să observăm că atunci cînd vrem

\* „Dilema teoriei probabilităților” este titlul unei note din cartea „Varietăți matematice” de J. E. Littlewood (Ed. Enciclopedică, București, 1969).

să exprimăm tendința de apropiere a frecvenței unui eveniment de o constantă, folosim — așa cum am și făcut-o în scurta noastră expunere — expresii ca „dacă facem de un număr mare de ori experiența” sau „dacă numărul probelor este suficient de mare”.

Dar nu precizăm pentru nici o experiență cât de mare trebuie să fie acel număr pentru a fi „suficient de mare”. Cu alte cuvinte, pentru un eveniment legat de o anumită experiență, cât de mare trebuie să fie numărul de efectuări ale experienței (probe) pentru ca stabilitatea frecvenței să se manifeste în mod necesar? Și mai precis, dacă  $f_n$  este frecvența relativă după  $n$  probe a unui eveniment  $A$  și  $p$  este probabilitatea acestuia vom putea determina un  $N(\epsilon)$  astfel ca  $|f_n - p| < \epsilon$  cu certitudine dacă  $n > N(\epsilon)$ ?

Pătrunzînd mai adînc în problemă vom constata că tendința de apropiere a lui  $f_n$  de  $p$  odată cu creșterea lui  $n$ , nu poate fi exprimată decît tot în termeni probabilistici ceea ce creează un cerc vicios. De exemplu, dacă nu putem face ca inegalitatea  $|f_n - p| < \epsilon$  să aibă loc cu certitudine, putem considera un tip de convergență legat de probabilitatea  $P$  cu care această inegalitate are loc și putem înlătura o parte din nedeterminarea existentă raționînd pe serii de serii de frecvențe. Și acest proces poate continua. Dar este evident că „... nu putem elimina în întregime o oarecare nedeterminare în această problemă”.\* În mod obișnuit se recomandă să ne oprim după cel de al doilea pas. „Nu este cazul să credem că dificultățile de acest fel ar fi o particularitate a teoriei probabilităților. Cînd studiem matematic fenomene reale, o anumită schematizare este inevitabilă. Abaterile desfășurării fenomenelor reale de la schema teoretică pot fi supuse la rîndul lor, unui studiu matematic. Pentru aceasta însă, trebuie să le încadrăm într-o nouă schemă, fără a mai supune abaterile de la aceasta din urmă la o analiză matematică formală”.\*

Se poate face de asemenea observația că însăși exprimarea principiului stabilității frecvențelor printr-o trecere la limită presupune posibilitatea repetării de un număr nelimitat de ori a unuia și aceluiași experiențe, adică presupune conservarea strictă a unor condiții pe timp nelimitat. Desigur, însăși formarea seriilor infinite de frecvențe nu poate avea o semnificație reală.

În sfîrșit să mai observăm că atunci cînd am dat „definiția clasică a probabilității”<sup>4</sup> ne-am bazat pe egal — posibilitatea, sau, cum se mai spune echiprobabilitatea evenimentelor. Dar echiprobabilitatea a două sau mai multe evenimente este acceptată intuitiv pe considerente de simetrie.

Astfel, dacă de exemplu, într-o urnă se găsesc două bile: una albă și una neagră și pe care nu le putem deosebi decît după culoare și dacă din această urnă se extrage o bilă spunem că evenimentele „aparitia bilei albe” și „aparitia bilei negre” sînt echiprobabile. Prin această înțelegem nu că ar fi nelogic ca în mai multe serii lungi de frecvențe unul din aceste evenimente să se producă sistematic mai des decît celălalt, ci că ar fi nefiresc. Cu alte cuvinte, o astfel de situație nu ar intra în conflict cu principiile logicii ci cu bunul simț.

Cele spuse mai sus nu trebuie să ne slăbească încrederea în teoria probabilităților ca mediu matematic al fenomenelor aleatoare de masă și mai ales în posibilitatea aplicării rezultatelor teoriei matematice ale probabilităților la fenomene ale lumii reale. În zilele noastre, rezultatele obținute prin aplicarea teoriei probabilităților și statisticii matematice în cele mai variate domenii cum ar fi: fizică, biologie, medicină, comunicații, demografie, în tehnică, în domeniul militar etc., ca și concordanța sistematică dintre previziunile teoretice și datele experimentale sînt mărturiile incontestabile ale utilității practice a teoriei. „Este mai mult ca sigur că nu puteți da o descriere satisfăcătoare din punct de vedere logic a faptului că umbrați, dar aceasta nu vă face să stați imobil.” (W. Weaver: *Doamna Șansă*.)

După cum am mai spus, calculul probabilităților s-a dezvoltat și a fost aplicat cu bune rezultate în practică înainte de axiomatizarea sa.

\* A. N. Kolmogorov: Teoria probabilităților (cap. XI din „Matematica, conținutul, metodele și importanța ei”, vol. II, p. 324, 325, 334).

Încrederea în posibilitățile de aplicare și în semnificația practică a unora din rezultatele calculului probabilităților și statisticii matematice a crescut continuu. De exemplu, nimeni nu se mai îndoiește de câțiva ani încoace de existența unei legături între obiceiul de a fuma și incidența cancerului pulmonar, deși nici până azi nu s-a găsit mecanismul prin care fumul de tutun sau compuși ai acestuia pot provoca acest cancer. Cu alte cuvinte, nu s-au adus probe medicale în sprijinul existenței acestei legături. Singurele argumente sînt de ordin statistic.

Inginerii, medicii, biologii etc. pot apela la rezultatele teoriei probabilităților și statisticii matematice, dispensîndu-se de subtilitățile teoretice ale acestora. De asemenea „este recomandabil ca începătorul să se mulțumească cu accepția intuitivă a termenilor de *eveniment* și *probabilitate*, însă este util de știut că semnificația reală a acestor noțiuni, care nu admite o formalizare completă, nu influențează claritatea formală completă a expunerii pur-matematice, axiomatice, a teoriei probabilităților“.\*

Calculul probabilităților și statistica matematică oferă posibilitatea studierii unor aspecte ale lumii reale și rezolvării unor probleme practice inabordabile din alte puncte de vedere. În ultimă instanță ele constituie un nou mod de a gândi.

În ce privește teoria abstractă, axiomatică a teoriei probabilităților, aceasta ar putea părea la prima vedere un capitol al teoriei măsurii. Dar ea se detașează net prin natura problemelor pe care și le pune. De exemplu, propoziții din teoria probabilităților în care intervin noțiuni ca dependență, independență, condiționare etc. ar fi cu totul artificiale în cadrul teoriei măsurii și dealtfel nici nu s-ar fi putut naște în cadrul acestuia dacă nu ar fi existat teoria probabilităților.

„Existența unei teorii axiomatizate a probabilităților ne eliberează de tentația de „a defini“ probabilitatea cu ajutorul unor procedee de la care s-ar pretinde să fie, în același timp, direct convingătoare din punct de vedere al științelor naturii și potrivite ca fundament pentru construirea unei teorii matematice formal riguroase.

Astfel de definiții ar corespunde, în geometrie, aproximativ „definiției“ punctului ca ceva ce se obține dacă tăiem de nenumărate ori din toate părțile un corp fizic, micșorînd de fiecare dată diametrul său, să zicem la jumătate.

Din această categorie de definiții face parte definiția probabilității ca limită a frecvențelor, cînd numărul de experiențe crește indefinit“. (A. N. Kolmogorov op. cit.)

## CAPITOLUL 1

# INTRODUCERE ELEMENTARĂ ÎN TEORIA PROBABILITAȚILOR

### 1.1. EVENIMENTE, PROBABILITATE

Se pot da extrem de multe exemple (practic din orice domeniu) de experiențe aleatoare și în cadrul fiecăreia din aceste experiențe se pot da exemple de evenimente pentru care se poate pune problema evaluării șanselor de a se produce. Întrucît găsirea unor astfel de exemple este la îndemîna oricui, nu vom mai proceda la enumerarea unora dintre ele.

În primele aplicații și exemplificări se apelează în mod curent la modelul urnelor cu bile, care oferă o modalitate comodă de exprimare. Dar nu trebuie să se creadă că în aceste cazuri urnele și bilele nu pot fi luate decît ca atare. De exemplu, în cazul unor probleme în care este vorba de o urnă cu bile albe și negre, bila albă (respectiv neagră) ar putea reprezenta o pișă bună (respectiv defectă) sau un nou născut de sex masculin (respectiv feminin), etc.

Reamintim că printre evenimentele legate de o experiență considerăm totdeauna și *evenimentul sigur* și *evenimentul imposibil*.

*Evenimentul sigur* este acela care se produce cu certitudine la orice efectuare a experienței. Astfel, la aruncarea unui zar pe o suprafață plană „apariția uneia din cele șase fețe” este evenimentul sigur.

*Evenimentul imposibil* nu se produce la nici o efectuare a experienței. Două sau mai multe evenimente sînt *incompatibile* dacă nu se pot realiza împreună. În caz contrar ele sînt *compatibile*.

De exemplu, dacă experiența constă în aruncarea unui zar și considerăm evenimentele

**A** : apariția unui număr par de puncte

**B** : apariția unui număr impar

**C** : apariția unui număr  $< 3$

**D** : apariția uneia din fețele 2 sau 3

**E** : apariția uneia din fețele 1 sau 3

**F** : apariția unui număr  $> 4$

**G** : apariția unui număr  $\leq 4$

$H$  : apariția feței 4;

$I$  : apariția feței 5;

$J$  : apariția feței 6,

atunci evenimentele  $A$  și  $B$  sînt incompatibile. Evenimentele  $C$  și  $D$  sînt compatibile, deoarece ele se realizează simultan, dacă drept rezultat al aruncării zarului apare fața 2 (cu două puncte). Evenimentele  $C, D, E$  sînt incompatibile (în totalitatea lor) deoarece nu se pot realiza simultan toate trei, dar ele sînt compatibile două cîte două. Evenimentele  $C, F, H$  sînt incompatibile două cîte două.

Spunem că  $A_1$  implică alt eveniment  $A_2$  ( $A_1 \rightarrow A_2$ ) dacă realizarea lui  $A_1$  atrage după sine realizarea lui  $A_2$ , cu alte cuvinte dacă de fiecare dată cînd  $A_1$  s-a realizat, s-a realizat cu certitudine și  $A_2$ . Dacă revenim la exemplul anterior, vom observa că  $C \rightarrow G$ ;  $D \rightarrow G$ ;  $E \rightarrow G$ ;  $E \rightarrow B$ ;  $H \rightarrow A$ ;  $H \rightarrow G$ ;  $C \rightarrow D$  etc. Dacă  $A_1, A_2$  sînt două evenimente legate de o experiență « $A_1$  sau  $A_2$ » este evenimentul a cărui realizare înseamnă realizarea a cel puțin unuia din cele două evenimente. În exemplul de mai sus se vede că « $E$  sau  $I$ » =  $A$ . În mod analog, se pot lega prin „sau” mai mult de două evenimente. Astfel, în exemplul citat « $C$  sau  $D$  sau  $H$ » =  $G$  precum și « $D$  sau  $E$  sau  $F$ » =  $\Omega$ , unde prin  $\Omega$  am notat evenimentul sigur al experienței.

« $A_1$  și  $A_2$ » este evenimentul care se realizează dacă și numai dacă s-au realizat ambele evenimente  $A_1, A_2$ . În exemplul de mai sus « $A$  și  $F$ » =  $J$ ; « $C$  și  $F$ » =  $\emptyset$ ; « $C$  și  $D$  și  $E$ » =  $\emptyset$  unde prin  $\emptyset$  am notat evenimentul imposibil. Cu aceste notații incompatibilitatea (respectiv compatibilitatea) a două evenimente  $A_1, A_2$  se poate scrie « $A_1$  și  $A_2$ » =  $\emptyset$  (respectiv « $A_1$  și  $A_2$ »  $\neq \emptyset$ ).

Spunem că  $A_2$  este evenimentul contrar al evenimentului  $A_1$  ( $A_2 = \bar{A}_1$ ) dacă realizarea lui  $A_2$  este echivalentă cu nerealizarea lui  $A_1$ . Evident că dacă  $A_2$  este evenimentul contrar al lui  $A_1$ , atunci  $A_1$  este evenimentul contrar al lui  $A_2$ , adică relațiile  $A_2 = \bar{A}_1$  și  $A_1 = \bar{A}_2$  sînt echivalente. De aici reiese și  $\bar{\bar{A}}_1 = A_1$ . Datorită simetriei putem spune că  $A_1$  și  $A_2$  sînt evenimente contrare (sau complementare).

Apelînd din nou la exemplul folosit pînă în prezent, vom observa că  $\bar{A} = B$ ;  $\bar{F} = G$ ; « $C$  sau  $D$ » = « $\bar{F}$  sau  $\bar{H}$ » = « $\bar{F}$  și  $\bar{H}$ ».

Evenimentul sigur și evenimentul imposibil sînt evenimente contrare. Dacă  $A_1$  și  $A_2$  sînt evenimente contrare, atunci la orice efectuare a experienței se realizează cu certitudine unul și numai unul din ele.

Mai general, spunem că evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n$  formează un sistem complet de evenimente dacă se realizează cu certitudine unul și numai unul din aceste evenimente. Se observă că cele  $n$  evenimente formează un sistem complet dacă și numai dacă

« $A_1$  sau  $A_2$  sau ... sau  $A_n$ » =  $\Omega$  (se realizează cel puțin unul din evenimente):

$A_1, A_2, \dots, A_n$  sînt incompatibile două cîte două (se realizează cel mult unul din evenimente).

Uneori, în loc de sistem complet de evenimente se mai spune *partiție a evenimentului sigur*  $\Omega$ . Se poate vorbi și de o partiție a unui eveniment  $A_1$  dacă în prima din condițiile de mai sus se înlocuiește  $\Omega$  prin  $A_1$  păstrîndu-se cea de a doua condiție.

În exemplul nostru, evenimentele  $G, I, J$  formează un sistem complet de evenimente.

Considerarea operațiilor cu evenimente și a relațiilor dintre evenimente este necesară pentru exprimarea primelor proprietăți ale probabilității, cele

mai simple, dar și cele mai importante. Proprietățile pe care urmează să le enumerăm pentru probabilitate, sînt — după cum se poate observa de la prima vedere — proprietăți evidente ale frecvenței evenimentelor, proprietăți care s-ar păstra printr-o trecere la limită obișnuită. Astfel, dacă două evenimente  $A, B$  legate de aceeași experiență sînt incompatibile și dacă efectuind de  $n$  ori experiența evenimentul  $A$  s-a realizat de  $n_A$  ori, iar evenimentul  $B$  de  $n_B$  ori, atunci, evident evenimentul « $A$  sau  $B$ » s-a realizat de  $n_A + n_B$  ori (deoarece  $A$  și  $B$  nu s-au realizat niciodată simultan).

Rezultă că între frecvențele celor 3 evenimente există relația

$$f_n(\text{«}A \text{ sau } B\text{») = } f_n(A) + f_n(B).$$

Este natural să transformăm această proprietate a frecvențelor într-o proprietate a probabilității. Oricare dintre proprietățile a)–f) poate fi verificată cu ușurință pentru frecvențe. Probabilitatea unui eveniment  $A$  o vom nota cu  $P(A)$ .

a)  $0 \leq P(A) \leq 1$  pentru orice eveniment  $A$ ;  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$ ;

b)  $P(\text{«}A \text{ sau } B\text{») = } P(A) + P(B)$  dacă  $A, B$  sînt evenimente incompatibile.

c)  $P(\text{«}A \text{ sau } B\text{») + } P(\text{«}A \text{ și } B\text{») = } P(A) + P(B)$ .

d)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

e)  $P(\text{«}A \text{ și } \bar{B}\text{») = } P(A) - P(B)$  dacă  $B \rightarrow A$ .

f)  $P(\text{«}\bar{A} \text{ și } \bar{B}\text{») = } P(A) - P(\text{«}A \text{ și } B\text{»)}$ .

Cunoașterea acestor proprietăți este necesară pentru obținerea printr-un calcul direct a probabilității unor evenimente cunoscînd probabilitatea altor evenimente, cît și pentru stabilirea proprietăților de bază ale unor noțiuni foarte importante din teoria probabilităților.

*Observații.* 1°. Proprietățile de mai sus nu sînt independente. Astfel, este evident că  $b$ , este o consecință directă a lui  $a$ ) și  $c$ ). Dealtfel, vom vedea mai departe că este suficient să cunoaștem numai o mică parte din aceste proprietăți toate celelalte fiind consecințe ale acelei părți.

2°. Proprietatea  $b$ ) se generalizează cu ușurință:

$$P(\text{«}A_1 \text{ sau } A_2 \text{ sau } \dots \text{ sau } A_n\text{») = } P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)^*$$

dacă evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sînt incompatibile două cîte două.

În particular, dacă  $A_1, A_2, \dots, A_n$  formează un sistem complet de evenimente, atunci

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

De asemenea, dacă avem un șir infinit de evenimente incompatibile două cîte două:  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , se acceptă că

$$P(\text{«}A_1 \text{ sau } A_2 \text{ sau } A_3 \dots\text{») = } P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Este natural ca primele probleme aplicative să fie legate de experiențe care au un număr finit de cazuri egal posibile. În multe cazuri vom subînțelege egal — posibilitatea experienței, chiar dacă ea nu este exprimată explicit. Cu alte cuvinte, vom admite tacit că complexul de condiții  $S$  care determină experiența include și acele condiții care asigură echiprobabilitatea tuturor cazurilor posibile. Astfel, cînd spunem că la aruncarea unui zar apariția feței 1 are probabilitatea  $1/6$ , înțelegem că acest eveniment are probabilitatea  $1/6$  în ipoteza că zarul este „corect”. (De multe ori, în probleme cu caracter practic, probabilitatea unui eveniment  $A$  se notează  $P(A/S)$ )

\* Uneori evenimentul « $A_1$  sau  $A_2$  sau... sau  $A_n$ » este numit suma evenimentelor  $A_1, A_2, \dots, A_n$  dacă acestea sînt incompatibile și chiar se folosește notația  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ . Deci proprietatea exprimă că probabilitatea sumei este egală cu suma probabilităților.

înțelegând prin aceasta probabilitatea lui  $A$  în ipoteza că este realizat complexul de condiții  $S$ ).

Reamintim că probabilitatea unui eveniment al unei experiențe care are un număr finit de cazuri egal-posibile este raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului și numărul cazurilor egal posibile ale experienței.

Dacă ne-am restringe numai la cazul experiențelor cu un număr finit de cazuri egal-posibile și am lua propoziția de mai sus ca definiție a probabilității, s-ar verifica cu ușurință toate proprietățile  $a)$ — $f)$ . Raționamentul este întru totul același cu cel din cazul frecvențelor. Cu titlu de exemplu să demonstrăm proprietatea  $c)$ .

Dacă experiența are  $n$  cazuri egal posibile dintre care  $n(A)$  sînt favorabile evenimentului  $A$ ,  $n(B)$  favorabile evenimentului  $B$ , atunci în suma  $n(A) + n(B)$  cazurile favorabile atît lui  $A$  cît și lui  $B$  (deci cazurile favorabile lui « $A$  și  $B$ ») au fost numărate de două ori: o dată printre cazurile favorabile lui  $A$  și o dată printre cele favorabile lui  $B$ . Deci  $n(A \text{ sau } B) = n(A) + n(B) - n(A \text{ și } B)$  și proprietatea  $c)$  rezultă prin înmulțire cu  $\frac{1}{n}$  în ambii membri.

Se poate pune și problema inversă: dacă considerăm probabilitatea ca o funcție de eveniment satisfăcînd proprietățile  $a)$ — $f)$ , atunci în cazul experiențelor cu un număr finit de cazuri egal-posibile, probabilitatea unui eveniment este raportul dintre numărul cazurilor favorabile evenimentului și numărul cazurilor posibile ale experienței.

Într-adevăr, dacă experiența are un număr finit de cazuri posibile atunci suma probabilităților evenimentelor elementare\* este 1, deoarece acestea formează un sistem cîmp de evenimente. Dacă numărul acestor evenimente este  $n$  și toate au aceeași probabilitate, atunci fiecare eveniment elementar are probabilitatea  $1/n$ . Dacă un eveniment  $A$  are  $p$  cazuri favorabile, atunci el se scrie cu suma celor  $p$  evenimente elementare corespunzătoare și deci  $P(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$ .

Considerații oarecum asemănătoare se pot face și pentru așa-numitele probabilități geometrice.

Să presupunem că am dispune de un procedeu prin care putem alege la întimplare un punct din intervalul  $[a, b]$ . În plus, vom presupune că acest procedeu ne asigură că nu există porțiuni «privilegiate» ale intervalului  $[a, b]$ . Precis, prin aceasta înțelegem că oricare ar fi două subintervale de aceeași lungime este la fel de probabil ca punctul să cadă într-unul din intervale ca și în celălalt. Deci, dacă am folosi de mai multe ori procedeu pentru a alege un număr mare de puncte, acestea vor fi repartizate aproximativ uniform în intervalul  $[a, b]$ , adică nu vor exista puncte în vecinătatea cărora punctul ales să cadă sistematic mai des decît în vecinătatea altora. Din cele spuse, reiese că probabilitatea ca punctul ales să cadă într-un subinterval al lui  $[a, b]$  dinainte ales, depinde de lungimea acelui subinterval nu și de poziția sa în interiorul intervalului  $[a, b]$ . Această afirmație ne conduce destul de repede, pe baza proprietăților probabilității enunțate mai înainte — la concluzia că probabilitatea ca punctul ales să cadă într-un anumit subinterval este proporțională cu lungimea intervalului. (Lăsăm demonstrarea acestei propoziții simple dar instructive în seama cititorului).

\* Aici prin eveniment elementar înțelegem un eveniment care are un singur caz favorabil.

Se poate observa analogia dintre experiența alegerii unui punct prin acest procedeu și experiențele cu un număr finit de cazuri egal posibile. Astfel, dacă considerăm evenimentul  $A$ : „punctul ales cade în intervalul  $[c, d]$ ” unde  $[c, d] \subset [a, b]$ , mulțimea punctelor intervalului  $[a, b]$  reprezintă mulțimea cazurilor posibile (și avem motive să le numim egal posibile) ale experienței, iar mulțimea punctelor intervalului  $[c, d]$  mulțimea cazurilor favorabile evenimentului. Este destul de natural să luăm probabilitatea acestui eveniment egală cu raportul dintre lungimile celor două intervale:  $\frac{d-c}{b-a}$ .

În particular, probabilitatea ca punctul ales să coincidă cu un anumit punct dinainte stabilit este zero. Acest lucru este de asemenea foarte natural căci în acest caz avem un eveniment cu un caz favorabil dintr-o infinitate posibilă. Această observație ne permite să nu ținem seama — cînd lucrăm cu probabilități geometrice — dacă intervalele sau subintervalele care intervin sînt închise sau deschise.

În plus, întrezărim posibilitatea teoretică ca un eveniment să aibă probabilitatea nulă fără să poată fi considerat imposibil.

De fapt, afirmația  $P(A) = \frac{d-c}{b-a}$  rezultă imediat din proporționalitatea probabilității evenimentului  $A$  cu lungimea intervalului  $[c, d]$ , dacă ținem cont de proprietățile probabilității. Mai departe, tot din aceste proprietăți rezultă că dacă  $M$  este un interval sau o reuniune finită de subintervale disjuncte ale lui  $[a, b]$  și  $m(M)$  este suma lungimilor acestor intervale, atunci probabilitatea ca punctul ales să cadă în  $M$  este  $\frac{m(M)}{b-a}$ .

Se poate pune și problema inversă: dacă ne restringem numai la evenimente de tipul: „punctul aparține lui  $M$ ” unde  $M$  este de forma de mai înainte și dacă luăm — prin definiție — probabilitatea unui astfel de eveniment numărul  $\frac{m(M)}{b-a}$  atunci se verifică foarte ușor proprietățile a) — f) pentru această probabilitate.

În mod analog, dacă se ia la întîmplare un punct dintr-un domeniu plan  $D$ , astfel ca să nu existe puncte sau porțiuni „privilegiate” atunci probabilitatea ca punctul să cadă într-un [subdomeniu  $D'$  este  $\frac{\text{aria } D'}{\text{aria } D}$ .

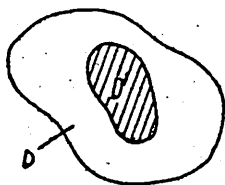


Fig. 1.1

La fel, în spațiul cu trei dimensiuni probabilitatea geometrică se exprimă ca raportul a două volume.

Încheiem acest paragraf cu câteva probleme cu caracter ilustrativ.

1°. S-a amestecat un pachet de 10 cărți de joc numerotate 1, 2, ..., 10. Care este probabilitatea ca deasupra să fie cartea 1?

**Rezolvare.** Cele 10 cărți pot fi aranjate în 10! moduri posibile (avem 10! cazuri egal posibile). Caz favorabil este orice aranjare în care pe primul loc se află numărul 1 și în continuare celelalte 9 numere într-o ordine oarecare. Reiese că numărul cazurilor favorabile este 9! și probabilitatea căutată este  $9!/10! = 1/10$ .

**Observație.** Putem număra cazurile posibile și favorabile din punctul de vedere al primului loc. Astfel, pe primul loc poate fi oricare din cele 10 cărți, deci din acest punct de vedere experiența are 10 cazuri posibile. Dintre acestea unul este favorabil. La fel, dacă ne interesează probabilitatea ca pe primele două locuri să fie cărțile 1 și 2 în această ordine putem raționa astfel: Pe primele două locuri poate fi în egală măsură orice pereche (ordonată) de numere și deci numărul cazurilor posibile este  $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ . Dintre acestea unul este favorabil. Probabilitatea căutată este  $1/90$ .

2°. Într-un lot de 100 de piese 5 sînt defecte. Se alege la întâmplare 5 piese din lot. Care este probabilitatea ca printre piesele alese cel puțin una să fie defectă?

**Rezolvare.** Se observă că evenimentele:

$A_0$ : toate piesele (alese) sînt bune;

$A_1$ : 1 piesă defectă, 4 piese bune;

$A_2$ : 2 piese defecte, 3 piese bune;

$A_3$ : 3 piese defecte, 2 piese bune;

$A_4$ : 4 piese defecte, 1 bună;

$A_5$ : toate piesele sînt defecte

formează un sistem complet de evenimente. Pentru a rezolva problema putem să calculăm probabilitățile ultimelor cinci evenimente și apoi să le însumăm. Dar intrucît suma probabilităților tuturor celor șase evenimente este 1, este mai comod să calculăm probabilitatea lui  $A_0$  și apoi s-o scădem din 1.

Numărul de moduri în care putem lua 5 piese din totalul de 100 este  $C_{100}^5$ . Numărul de moduri în care putem lua 5 piese bune din totalul de 95 este  $C_{95}^5$  și

$$\text{deci } P(A_0) = \frac{C_{95}^5}{C_{100}^5}, \text{ iar probabilitatea cerută este } 1 - \frac{C_{95}^5}{C_{100}^5}.$$

Următoarele trei probleme sînt probleme devenite de mult celebre. Primele două dintre acestea pot părea foarte simple astăzi, dar ele prezintă un fapt deosebit din punct de vedere istoric. Este vorba de problemele de care s-a ocupat Pascal la sugestia Cavalerului de Méré. Nu mai repetăm aici istoricul acestor probleme (am făcut-o pe scurt în introducerea ce precedă acest paragraf și dăm un enunț lapidar și simplificat al acestora.

3°. Dacă se aruncă de patru ori un zar, care este probabilitatea să apară cel puțin o dată fața șase? Dacă se aruncă două zaruri de 24 ori, care este probabilitatea să obținem cel puțin la o aruncare fața șase pe ambele zaruri (dublă de șase)? Dar dacă cele două zaruri se aruncă de 25 de ori?

**Rezolvare.** Dacă se aruncă un zar de 4 ori numărul rezultatelor posibile este  $6^4$ . Într-o serie de patru aruncări nu apare niciodată fața șase dacă de fiecare dată se obține un număr din mulțimea  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ . Numărul acestor rezultate este  $5^4$ . Rezultă

\* Dacă,  $A_1, A_2$  sînt mulțimi finite se poate arăta ușor că numărul elementelor produsului cartezian  $A_1 \times A_2$  este egal cu produsul dintre numărul elementelor lui  $A_1$  și numărul elementelor lui  $A_2$  (se arată direct prin enumerarea elementelor). Se scrie  $\text{card}(A_1 \times A_2) = \text{card}(A_1) \cdot \text{card}(A_2)$ . Apoi prin inducție:  $\text{card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \text{card} A_1 \cdot \text{card} A_2 \cdot \dots \cdot \text{card} A_n$ . În cazul nostru, dacă  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , ca rezultat a 4 aruncări obținem un sistem ordonat de 4 numere din  $\Omega$ , adică un element din  $\Omega \times \Omega \times \Omega \times \Omega$ . Numărul elementelor acestei ultime mulțimi este  $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ .

că probabilitatea ca în cele patru aruncări să nu apară niciodată fața șase este  $\frac{5^4}{6^4}$

și deci probabilitatea să apară cel puțin o dată șase este  $1 - \frac{5^4}{6^4} = \frac{671}{1296}$ .

Dacă se aruncă o dată două zaruri, numărul rezultatelor posibile este 36, iar dacă se aruncă de 24 de ori cele două zaruri numărul rezultatelor posibile este  $36^{24}$ . La o aruncare a perechii de zaruri există 35 de rezultate posibile diferite de dubla de șase și deci în 24 de aruncări există  $35^{24}$  cazuri în care nu apare niciodată dubla de șase. Probabilitatea de a nu apare niciodată dubla de șase este  $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ , iar probabilitatea de a apare cel puțin o dată dubla de șase în 24 de

aruncări este  $p_{24} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ .

La fel, probabilitatea de a apare cel puțin o dată dubla de șase în 25 de aruncări ale unei perechi de zaruri este  $p_{25} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25}$ .

Cu trei zecimale exacte  $p_{24} = 0,491$ ;  $p_{25} = 0,505$ .

4°. *Partida (și miza pusă în joc) este câștigată de jucătorul (la joc participă doi jucători) care câștigă trei jocuri. Dacă din motive de forță majoră jocul se întrerupe la scorul 2—1 cum trebuie împărțită miza? (Se admite că în fiecare joc șansele sînt egale).*

**Rezolvare.** La prima vedere s-ar părea că miza trebuie împărțită în trei părți egale și jucătorul care conduce să ia două părți. Dar nu aceasta este împărțirea echitabilă. Mai întîi trebuie stabilit criteriul de împărțire a mizei. Rezonabil este ca fiecare jucător să ia o parte proporțională cu probabilitatea pe care o are de a câștiga jocul dacă acesta ar continua. Rămîne deci să calculăm această probabilitate pentru fiecare jucător. Se observă că dacă partida ar continua învingătorul ar fi decis în cel mult două jocuri.

Să presupunem că se mai joacă două jocuri (indiferent de rezultatul primului joc). Să numim  $X$  jucătorul care conduce și  $Y$  pe celălalt. În cele două jocuri ipotetice sînt patru rezultate (egal) posibile:  $(X, X)$ ;  $(X, Y)$ ;  $(Y, X)$ ;  $(Y, Y)$  (prin perechea  $(X, Y)$  de exemplu, înțelegem  $X$  câștigă primul joc și  $Y$  pe al doilea). Se observă că din cele patru cazuri posibile trei sînt favorabile lui  $X$  și unul lui  $Y$ . Deci șansele de câștig ale lui  $X$  (și în consecință partea de miză ce-i revine) sînt de trei ori mai mari ca ale lui  $Y$ .

Ultimele două probleme pot fi tratate mai ușor după ce ne familiarizăm cu noțiunea de independență a evenimentelor (1.2).

5°. *Problema acului sau problema lui Buffon. [G. Buffon (1707—1783)]. Pe un plan sînt trasate drepte paralele, astfel ca distanța între oricare două drepte consecutive să fie  $2a$ . Pe acest plan se aruncă la întîmplare un ac de lungime  $2l < 2a$ . Care este probabilitatea ca acul să întretaie una din drepte?*

**Rezolvare.** Poziția acului față de dreptele rețelei este determinată de distanța  $d$  a mijlocului său  $M$  la cea mai apropiată din drepte și prin unghiul  $\alpha$  pe care-l face direcția acului cu direcția dreptelor.

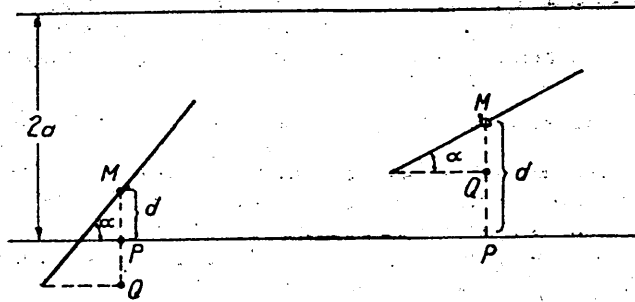


Fig. 1.2

Se observă că  $d$  ia o valoare în intervalul  $[0, a]$  iar  $\alpha$  în  $[0, \pi]$ . Poziția acului fiind determinată de două numere, poate fi reprezentată printr-un punct din plan. Mulțimea pozițiilor posibile ale acului este reprezentată de mulțimea punctelor domeniului  $D$  (fig. 1.3).

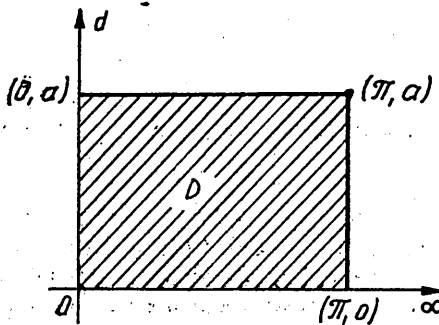


Fig. 1.3

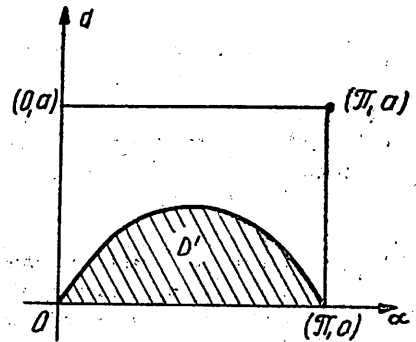


Fig. 1.4

Din figura 1.2 reiese că acul intersecționează una din dreptele rețelei dacă  $MP \leq MQ$  adică  $0 \leq d \leq l \sin \alpha$ . În figura 1.4 este trasat graficul funcției  $d = l \sin \alpha$  și este hașurat domeniul  $D'$  în care este verificată inegalitatea  $d \leq l \sin \alpha$ . Mulțimea punctelor domeniului  $D'$  reprezintă mulțimea cazurilor favorabile. Probabilitatea căutată este

$$p = \frac{\text{aria } D'}{\text{aria } D} = \frac{1}{a\pi} \int_0^{\pi} l \sin \alpha \, d\alpha = \frac{2l}{\pi a}$$

**Observație.** Ținând cont de rezultatul obținut se poate încerca obținerea pe cale experimentală

a valorii aproximative a lui  $\pi$ . Astfel, dacă luăm  $l = \frac{a}{2}$  înseamnă că  $p = \frac{1}{\pi}$ . Dacă

aruncând de  $n$  ori acul și intersecția are loc de  $m$  ori, atunci pentru  $n$  suficient de mare vom avea  $p \simeq \frac{m}{n}$  adică  $\frac{m}{n} \simeq \frac{1}{\pi}$  și deci  $\pi \simeq \frac{n}{m}$ .

S-au făcut asemenea experiențe. Astfel, în secolul trecut, profesorul german R. Wolf aruncând de 5 000 de ori un ac de 36 mm pe o suprafață hașurată cu drepte paralele cu distanța de 45 mm între dreptele consecutive a realizat intersecția de 2 532 ori. De aici, a scos  $\pi \simeq 3,159$ .

Este de așteptat că făcând un număr mai mare de aruncări să obținem o aproximație mai bună. Este drept că au fost declarate obțineri de rezultate mai apropiate de valoarea exactă decât cea a lui Wolf. Unele rezultate par chiar cam „prea bune“ față de numărul aruncărilor. Astfel, S. Lazzarini obține valoarea lui  $\pi$  cu șase zecimale exacte, făcând 3 408 aruncări. În orice caz se poate constata o concordanță satisfăcătoare între rezultatul teoretic și cel experimental.

Problema care urmează, cunoscută sub numele de *paradoxul lui Bertrand*, este elocventă asupra griii cu care trebuie folosite unele raționamente cu caracter probabilist.

6°. *Care este probabilitatea ca o coardă a unui cerc aleasă la întâmplare să fie mai mare ca latura triunghiului echilateral înscris în cerc?*

*Rezolvare.* După cum vom vedea imediat rezolvare nu este prea bine spus pentru că nu avem o problemă bine pusă pe care să o rezolvăm. Dacă în problema precedentă ni s-a descris o experiență concretă care a și fost efectuată, în această problemă ni se spune doar să alegem o coardă „la întâmplare“ fără a preciza sensul acestei expresii. Folosirea ei presupune descrierea unui procedeu de alegere sau cel puțin a proprietăților unui astfel de procedeu, care fac ca problema în care intervine să fie determinată. Astfel, când am început discutarea probabilităților geometrice în cazul unidimensional am presupus că dispunem de un procedeu de alegere a unui punct din intervalul  $[a, b]$  astfel ca probabilitatea evenimentului „punctul cade în  $I$ “ unde  $I$  este un subinterval al lui  $[a, b]$  să fie invariantă la translații ale lui  $I$  în interiorul lui  $[a, b]$ . Este bine să știm că un astfel de procedeu există, dar descrierea lui în fiecare problemă în parte în care ar interveni ar fi stînjenoare.

Ne putem imagina un procedeu de alegere a unui punct din intervalul  $[a, b]$  care să aibă proprietatea de *uniformitate* menționată mai sus. Astfel, dacă pe o suprafață plană a fost trasată o rețea de drepte paralele — distanța între două drepte consecutive fiind  $2(b - a)$  — și dacă pe această suprafață se aruncă un ac foarte bine ascuțit la unul din capete și  $d$  este distanța de la acest vîrf la cea mai apropiată din drepte, atunci  $0 \leq d \leq b - a$  și dacă  $x = a + d$ , atunci  $a \leq x \leq b$ .

De fapt, aici pe noi nu ne interesează aruncarea unui ac pe plan, ci aruncarea unui punct (vîrfurile acului), dar folosirea acului face posibilă efectuarea sau imaginarea experienței. Desigur toate celelalte spuse aici sînt aproximative, deoarece oricît de ascuțit ar fi un creion, dreptele trasate nu sînt *drepte* în adevăratul înțeles al cuvîntului, planul nu este plan, iar punctul nu este punct.

Dar nici nu avem pretenția (absurdă) să obținem o concordanță perfectă între experiență și model, ci una satisfăcătoare.

În cazul procedurii descrisă mai sus, nu avem motive rezonabile să credem că pentru distanța  $d$  există valori sau intervale de valori preferate în intervalul  $[0, b - a]$  și desigur, același lucru este valabil și pentru  $x$  în intervalul  $[a, b]$ .

În continuare un astfel de procedeu îl vom numi convențional „procedeu de alegere uniformă“.

Să vedem în continuare cum s-ar rezolva problema noastră pentru diferite interpretări ale expresiei „la întâmplare“. În toate cazurile considerăm raza cercului egală cu unitatea, acest lucru fiind neesențial.

a) Lungimea unei coarde a cercului este perfect determinată de distanța  $d$  a centrului cercului la coardă. Mulțimea valorilor posibile ale lui  $d$  este intervalul  $[0, 1]$ . Pentru latura triunghiului echilateral înscris  $d = \frac{1}{2}$ . O coardă este mai mare ca latura triunghiului echilateral dacă  $d < \frac{1}{2}$ .

Deci, dacă presupunem că ceea ce se ia la întâmplare (printr-un procedeu oarecare cu proprietatea descrisă mai înainte), este  $d$ , atunci problema este echivalentă cu următoarea: dacă se alege la întâmplare un punct din intervalul  $[0, 1]$  care este probabilitatea ca el să cadă în intervalul  $[0, \frac{1}{2}]$ ? Și răspunsul este  $\frac{1}{2}$ .

Un procedeu destul de natural de obținere a coardei și care să corespundă interpretării dată aici expresiei „la întâmplare“ este următorul:

Se aruncă un cerc pe o suprafață plană brăzdată de o rețea de drepte paralele cu distanța între ele egală cu diametrul cercului. Cu excepția cazului limită (și de probabilitate nulă) când cercul este tangent la două drepte ale rețelei, o singură dreaptă va tăia cercul în două puncte și va determina coarda.

b) Lungimea unei coarde  $AB$  este determinată de unghiul  $AOB$  ( $O =$  centrul cercului). Dacă luăm la întâmplare (uniform) acest unghi atunci problema noastră se reduce la următoarea:

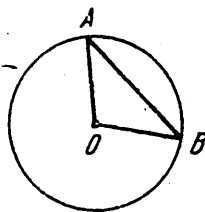


Fig. 1.5

toarea: dacă se ia la întâmplare un punct din intervalul  $[0, \pi]$  (mulțimea valorilor posibile ale unghiului) care este probabilitatea ca aceasta să cadă în intervalul  $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ ? Și răspunsul este  $\frac{1}{3}$  (raportul lungimilor celor două intervale).

c) O coardă a unui cerc este determinată dacă se cunoaște poziția mijlocului său. O coardă este mai mare decât latura triunghiului echilateral înscris dacă mijlocul său se găsește la mai puțin de jumătate de rază distanță de centru, adică dacă se găsește în interiorul cercului concentric cu raza de două ori mai mică decât a cercului inițial.

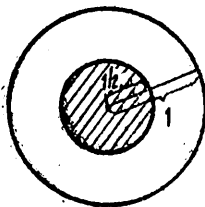


Fig. 1.6

Problema noastră poate fi redusă la următoarea: Dacă se ia la întâmplare un punct din interiorul unui cerc de rază 1, care este probabilitatea ca acesta să aparțină cercului concentric de rază  $\frac{1}{2}$ ? Răspunsul este  $\frac{1}{4}$  (raportul arilor celor două cercuri).

Aici la întâmplare a fost ales mijlocul coardei.

d) Dacă unitatea este raza cercului, lungimea unei coarde este dată de un număr din intervalul  $[0, 2]$ . O coardă este mai mică decât latura triunghiului echilateral înscris dacă lungimea sa este dată de un număr din intervalul  $[\sqrt{3}, 2]$ . Dacă se alege la întâmplare lungimea coardei, atunci probabilitatea ca această coardă să fie mai mare decât latura triunghiului echilateral înscris este  $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$  (raportul lungimilor celor două intervale).

Putem să dăm și alte interpretări (cam artificiale) expresiei „la întâmplare“ din această problemă și pentru fiecare din acestea să obținem drept răspuns un alt număr din intervalul  $[0, 1]$ .

Concluzia de reținut este că în problemele în care planează vreo incertitudine asupra sensului expresiei „la întâmplare“ este bine să precizăm interpretarea acesteia, altminteri riscăm să nu putem găsi o soluție unică a problemei. Problema 6° este un exemplu grăitor în acest sens.

Cititorul interesat poate reveni asupra acestei probleme și asupra noțiunii de probabilitate geometrică (cazul unidimensional) după ce vom vorbi despre distribuția uniformă (1.7).

## 1.2. PROBABILITATEA CONDIȚIONATĂ. DEPENDENȚA ȘI INDEPENDENȚA EVENIMENTELOR

Să presupunem că ne interesează probabilitatea ca un nou născut să aibă mai puțin de 3 kg. Vom face un număr suficient de mare de observații și vom calcula frecvența evenimentului. Să presupunem că apoi ne va interesa dacă sexul noului născut are vreun efect asupra acestei probabilități. Cu alte cuvinte ne va interesa și probabilitatea ca un nou născut de sex masculin să cîntărească mai puțin de 3 kg. Din punctul de vedere care ne interesează un nou născut poate fi:

- băiat ( $A$ ),
- fată ( $\bar{A}$ ),
- sub 3 kg ( $B$ ),
- de cel puțin 3 kg ( $\bar{B}$ ).

Să zicem că am luat sub observație un număr mare  $n$  de nou născuți și am constatat că dintre aceștia:

$m$  sînt băieți (și restul de  $n-m$  fete),

$p$  au sub 3 kg (restul de  $n-p$  au cel puțin 3 kg),

$q$  băieți au sub 3 kg (restul de  $m-q$  băieți au cel puțin 3 kg).

Rezultă că frecvența apariției printre cei  $n$  nou născuți a unui băiat este  $f(A) = \frac{m}{n}$ , a unui nou născut cîntărind sub 3 kg este  $f(B) = \frac{p}{n}$ , a unui băiat cîntărind sub 3 kg  $f(A \text{ și } B) = \frac{q}{n}$ , etc.

Se observă de asemenea că frecvența apariției unui nou născut sub 3 kg printre băieții nou născuți este  $\frac{q}{m}$ . Vom nota această frecvență cu  $f(B/A)$  și vom spune că este „frecvența apariției unui nou născut sub 3 kg, știind că acest nou născut este băiat“ sau cu notațiile noastre „frecvența lui  $A$  condiționată de  $B$ “. Dacă nu ne-ar interesa decât această frecvență am putea renunța la înregistrarea a  $n-m$  rezultate sau le-am ignora. Dacă

însă vrem s-o încadrăm printre rezultatele celor  $n$  observații și s-o scriem cu ajutorul frecvențelor obținute din acestea, vom observa că

$$f(B/A) = \frac{q}{m} = \frac{\frac{q}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{f(A \text{ și } B)}{f(A)}.$$

La fel:  $f(A/B) =$  frecvența băieților printre nou născuții cîntărind sub 3 kg  $= \frac{q}{p} = \frac{q/n}{p/n} = \frac{f(A \text{ și } B)}{f(B)}.$

În general, dacă efectuînd de  $n$  ori o experiență un eveniment  $A$  se produce de  $m$  ori dintre care de  $p$  ori împreună cu un eveniment  $B$  (care eventual se mai produce și fără  $A$ ), atunci frecvența producerii lui  $B$  printre cazurile cînd s-a produs  $A$  este  $\frac{p}{m} = \frac{p/n}{m/n}$  adică

$$f(B/A) = \frac{f(A \text{ și } B)}{f(A)}.$$

Aceasta ne sugerează să scriem și pentru probabilități

$$P(B/A) = \frac{P(A \text{ și } B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0 \quad (1.2.1)$$

unde prin  $P(B/A)$  înțelegem *probabilitatea ca evenimentul  $B$  să se realizeze în ipoteza că evenimentul  $A$  s-a realizat ( $P(A) \neq 0$ ) sau probabilitatea lui  $B$  condiționată de (realizarea lui)  $A$ .*

În cazul experienței cu un număr finit de cazuri egal-possibile egalitatea de mai sus se demonstrează cu ușurință (exact la fel ca pentru frecvențe). Într-adevăr, dacă experiența are  $n$  cazuri (egal) posibile dintre care  $m$  favorabile unui eveniment  $A$ ,  $p$  unui eveniment  $B$  și  $q$  favorabile lui « $A$  și  $B$ » (printre cele  $m$  cazuri favorabile lui  $A$   $q$  sînt favorabile și lui  $B$ ), atunci  $P(A) = \frac{m}{n}$ ;  $P(B) = \frac{p}{n}$ ;  $P(A \text{ și } B) = \frac{q}{n}$ . Dacă primim informația

că  $A$  s-a realizat, atunci știm că a apărut unul din cele  $m$  cazuri favorabile lui  $A$ , dar nu știm care și deci mai putem întreba care este probabilitatea lui  $B$ . Cele  $m$  cazuri devin acum cazuri (egal)-posibile. Dintre acestea  $q$  sînt favorabile lui  $B$  și deci probabilitatea lui  $B$  dacă  $A$  s-a realizat este

$$P(B/A) = \frac{q}{m} \text{ adică}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \text{ și } B)}{P(A)}.$$

În cazul în care probabilitatea este definită ca o funcție de eveniment satisfăcînd anumite condiții (de exemplu  $a) - f)$  din 1.1) această egalitate se ia ca definiție a probabilității lui  $B$  condiționată de  $A$ . Se arată ușor că dacă fixăm pe  $B(P(B) \neq 0)$  funcția de eveniment  $P(\cdot/A)$  satisface aceleași condiții (1.3).

Să refacem raționamentul de mai sus pe un exemplu.

✓ O urnă conține patru bile albe dintre care două numerotate cu 1 și două numerotate cu 2 și cinci bile negre dintre care trei numerotate cu 1 și două cu 2.

Din această urnă se extrage o bilă. Să considerăm evenimentele

$A$  : bila extrasă este albă.

$B$  : bila extrasă poartă numărul 1.

Avem patru bile albe din nouă și cinci bile cu numărul 1 din nouă, deci  $P(A) = \frac{4}{9}$ ,  $P(B) = \frac{5}{9}$ . De asemenea, avem două bile albe și cu numărul 1 din nouă și deci  $P(A \text{ și } B) = \frac{2}{9}$ .

Să presupunem acum că sîntem suficient de aproape de cel ce extrage pentru a vedea că bila ieșită este albă și suficient de departe pentru a nu putea vedea numărul înscris pe ea. În acest moment pentru noi nu mai există nouă cazuri (egal) posibile ci patru : bila extrasă poate fi în egală măsură oricare din cele patru bile albe. Cazurile inițial favorabile lui  $A$  au devenit după înregistrarea realizării acestuia cazuri posibile. Față de situația inițială (înainte de extragere) în situația actuală avem o informație în plus (că  $A$  s-a realizat). Și în primul caz și în cel de-al doilea ne poate interesa „probabilitatea lui  $B$ ” și dacă vrem să ne raportăm mereu la situația inițială, în cel de-al doilea caz vom numi această probabilitate „probabilitatea lui  $B$  condiționată de  $A$ ” scoțind în evidență informația suplimentară ce s-a adăugat condițiilor inițiale.

Din cele patru cazuri posibile după realizarea lui  $A$  două sînt favorabile lui  $B$  și deci

$$P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{P(A \text{ și } B)}{P(A)}$$

În aplicații putem fi puși în situația de a calcula o probabilitate condiționată în funcție de „probabilitățile inițiale” folosind direct formula (1.2.1). Dar mai des vom putea calcula direct, probabilitatea condiționată ținînd cont de semnificația ei concretă, ceea ce va înlesni calcularea probabilității „inițiale” a altor evenimente. Pe exemple se va înțelege mai bine acest lucru.

✱ O urnă conține trei bile albe și patru bile negre. Din această urnă se extrag succesiv două bile (fără întoarcerea bilei extrase). Considerăm evenimentele :

$A$  : prima bilă extrasă este albă,

$B$  : a doua bilă extrasă este albă.

Ne întrebăm care este probabilitatea ca a doua bilă să fie albă dacă prima este albă ( $P(B|A)$ ) ?

Pentru a aplica formula (1.2.1) trebuie să cunoaștem  $P(A \text{ și } B)$  și  $P(A)$ . Evident

$$P(A) = \frac{3}{7}$$

$A$  și  $B$  este evenimentul „ambele bile extrase sînt albe”. Dacă extragem două bile succesiv din totalul de șapte, numărul cazurilor posibile este  $A_7^2 = 42$  dintre care favorabile lui  $A$  și  $B$   $A_3^2 = 6$  deci

$$P(A \text{ și } B) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} \text{ iar conform (1.2.1) :}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ și } B)}{P(A)} = \frac{1/7}{3/7} = \frac{1}{3}$$

Nu este rezonabil să procedăm astfel cînd putem raționa altfel : dacă prima bilă extrasă este albă, atunci în urnă rămîn două bile albe și patru bile negre și deci probabili-

tatea ca a doua bilă să fie albă, știînd că prima a fost albă este  $P(B|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

De aici rezultă imediat  $P(A \text{ și } B)$  :

$$P(A \text{ și } B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}.$$

Să luăm un alt exemplu :

\* Urna  $U_1$  conține trei bile albe și patru bile negre, iar urna  $U_2$  conține patru bile albe și cinci bile negre. Din una din aceste urne (aleasă la întâmplare) se extrage o bilă.

Considerăm evenimentele :

$A_1$  : urna aleasă (pentru efectuarea extragerii) este  $U_1$ ,

$A_2$  : urna aleasă este  $U_2$  (a se observa că  $A_2 = \bar{A}_1$ ),

$A$  : bila extrasă este albă.

Nu putem spune dintr-o dată care este  $P(A)$ . În schimb putem spune imediat cât este  $P(A|A_1)$  nu folosind (1.2.1) ci ținând cont că aceasta este probabilitatea ca bila să fie albă știind că extragerea se face din urna  $U_1$  :  $P(A|A_1) = \frac{3}{7}$ . La fel  $P(A|A_2) = \frac{4}{9}$ . Cunoscând aceste probabilități condiționate se poate calcula imediat  $P(A)$  folosind o formulă pe care o vom da în 1.4. (Formula probabilității totale.)

\* O urnă conține 16 bile numerotate cu 1, 2, 3, ..., 16. Primele trei bile sînt albe, următoarele 10 sînt negre și ultimele trei roșii. Din această urnă se extrage o bilă.

Să reținem că avem  $\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 13, 14, 15, 16}_{\substack{3 \text{ bile albe} \quad 10 \text{ bile negre} \quad 3 \text{ bile roșii}}}$  și să considerăm evenimentele :

$A$  : bila extrasă este neagră,

$B$  : numărul extras este  $\leq 9$ .

Cu aceste notații avem :

$$P(A) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}; \quad P(B) = \frac{9}{16}; \quad P(\bar{A}) = \frac{3}{8}; \quad P(\bar{B}) = \frac{7}{16}.$$

Dacă știm că bila extrasă este neagră dar nu știm ce număr este înscris pe ea, atunci avem 10 cazuri posibile (4, 5, 6, ..., 13) dintre care șase favorabile lui  $B$  (4, 5, 6, 7, 8, 9) Rezultă că

$$P(B|A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Dacă se realizează  $\bar{A}$  (bila extrasă nu e neagră) avem șase cazuri posibile (1, 2, 3, 14, 15, 16) dintre care trei favorabile lui  $B$  (1, 2, 3). Putem scrie

$$P(B|\bar{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Probabilitatea lui  $B$  cînd nu ni se dă nici o informație asupra lui  $A$  este  $9/16$ ; dacă știm că  $A$  s-a realizat probabilitatea lui  $B$  devine  $3/5$ ; dacă știm că  $A$  nu s-a realizat probabilitatea lui  $B$  devine  $1/2$ . De asemenea, putem observa că  $P(A) = \frac{5}{8}$ ,  $P(A|B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ;  $P(A|\bar{B}) = \frac{4}{7}$ .

Vedem că fiecare din evenimentele  $A$ ,  $B$  își schimbă probabilitatea în funcție de realizarea sau nerealizarea celuilalt. Este natural să numim aceste două evenimente *dependente* unul de celălalt din punct de vedere probabilistic. Noi vom spune pe scurt că evenimentele  $A$ ,  $B$  sînt *dependente*.

Să eliminăm acum din această urnă o bilă roșie — să zicem cea cu numărul 16. Acum avem

$$\begin{array}{ccc} 1, 2, 3, & 4, 5, 6, \dots, 13, & 14, 15 \\ \hline 3 \text{ bile albe} & 10 \text{ bile negro} & 2 \text{ bile roșii} \end{array}$$

Din această urnă se extrage o bilă și considerăm evenimentele:

$A$ : bila extrasă este neagră,

$B$ : numărul obținut este  $\leq 9$ .

În acest caz avem:

$$P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}; \quad P(B) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; \quad P(\bar{A}) = \frac{1}{3}; \quad P(\bar{B}) = \frac{2}{5}.$$

Calculînd diferite probabilități condiționate ce se pot scrie cu evenimentele  $A$ ,  $B$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ , obținem:

$$P(A/B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \quad P(A/\bar{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$P(\bar{A}/B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}; \quad P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$P(B/A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \quad P(B/\bar{A}) = \frac{3}{5}.$$

$$P(\bar{B}/A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}; \quad P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{2}{5}.$$

Ce se observă? Că probabilitatea realizării (sau nerealizării) oricăruia din cele două evenimente nu se modifică în funcție de realizarea, nerealizarea sau ignorarea celuilalt. Este potrivit să numim două astfel de evenimente *independente*.

Deci, în general, spunem că evenimentele  $A$ ,  $B$  sînt *independente* dacă sînt îndeplinite condițiile:

$$P(A) = P(A/B) = P(A/\bar{B}); \quad P(\bar{A}) = P(\bar{A}/B) = P(\bar{A}/\bar{B}).$$

$$P(B) = P(B/A) = P(B/\bar{A}); \quad P(\bar{B}) = P(\bar{B}/A) = P(\bar{B}/\bar{A}).$$

Evident că au sens toate aceste egalități dacă  $P(A) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(B) \neq 0$ . Cu această restricție se poate arăta ușor că toate egalitățile scrise sînt echivalente între ele și echivalente cu  $P(A \text{ și } B) = P(A) \cdot P(B)$ .

De exemplu

$$P(A) = P(A/B) \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A \text{ și } B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \text{ și } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Celelalte cazuri le lăsăm aici în seama cititorului (a se vedea și exemplul din 1.3). Sintem conduși spre următoarea

**Definiție:** *Evenimentele  $A$ ,  $B$  sînt independente dacă*

$$P(A \text{ și } B) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.2.2)$$

În aplicații practice noțiunea de independență o întâlnim în două sensuri. În primul rând putem avea de a face cu evenimente a căror dependență sau independență nu este cunoscută a priori ci trebuie stabilită. Astfel, dacă vrem să știm dacă există sau nu o dependență între obiceiul de a fuma și incidența cancerului pulmonar vom face un număr mare de observații, organizând cu grijă experiența și vom compara frecvența îmbolnăvirilor de cancer pulmonar printre fumători, cu frecvența îmbolnăvirilor de cancer pulmonar printre nefumători (sau cu frecvența acestor îmbolnăviri pe totalul populației studiate). Dacă aceste frecvențe ar coincide (ceea ce nu este cazul) am trage concluzia că evenimentele „fumător” și „bolnav de cancer pulmonar” sînt independente. Acest caz se reduce în ultimă instanță — după cum am arătat — la stabilirea unei relații de tipul (1.2.2) între frecvențe. Dacă însă vom constata că există o diferență sensibilă între frecvențele îmbolnăvirilor de cancer pulmonar printre fumători și printre nefumători vom trage concluzia că cele două evenimente sînt dependente.

Celălalt sens în care putem întâlni noțiunea de independență apare mult mai frecvent și anume în cazul în care avem de a face cu evenimente a căror independență este cunoscută, reiese din context și nu avem nici un dubiu asupra ei.

Să presupunem că se aruncă două zaruri unul roșu și celălalt alb (pentru a le putea distinge) și să considerăm evenimentele

$A$ : apare fața 1 pe zarul roșu,

$B$ : apare fața 3 pe zarul alb.

Nu avem nici un motiv să credem că apariția (sau neapariția) feței 1 pe primul zar ar putea spori sau micșora șansele de apariție a feței cu trei puncte la cel de-al doilea zar. De asemenea, realizarea sau nerealizarea lui  $B$  nu schimbă probabilitatea lui  $A$ .

Urnele  $U_1$  și  $U_2$  conțin bile albe și negre. Din fiecare din aceste urne se extrage o bilă.

$A$ : bila extrasă din prima urnă este albă,

$B$ : bila extrasă din a doua urnă este albă.

Din nou observăm că evenimentele  $A$ ,  $B$  sînt independente în sensul că realizarea sau nerealizarea unuia din ele nu modifică în nici un fel probabilitatea de realizare sau nerealizare a celuilalt. Nu avem nici un motiv rezonabil să ne îndoim că lucrurile ar sta așa.

Fiecare din cele două experiențe menționate aici constă în efectuarea a cite două experiențe independente. Astfel, „o aruncare a unei perechi de zaruri” constă în „aruncarea primului zar” și „aruncarea celui de-al doilea zar”. Ultimele două experiențe sînt *independente* în sensul că cunoașterea rezultatului uneia din experiențe nu modifică probabilitatea niciunui eveniment legat de cealaltă experiență.

Extragerea a două bile, cîte una din fiecare din urnele  $U_1$  și  $U_2$  constă în efectuarea experiențelor independente „extragerea unei bile din  $U_1$ ” și „extragerea bilei din  $U_2$ ”.

Să presupunem că o experiență  $\mathcal{E}_1$  constă în efectuarea experiențelor independente  $\mathcal{E}_1$  care are  $n_1$  cazuri egal posibile și  $\mathcal{E}_2$  care are  $n_2$  cazuri egal posibile.

$A$  este eveniment legat de prima experiență, avînd în cadrul acesteia  $m_1$  cazuri favorabile, iar  $B$  este un eveniment legat de  $\mathcal{E}_2$  și are  $m_2$  cazuri

favorabile dintre cele  $n_2$  cazuri posibile ale lui  $\mathcal{E}_2$ . Dacă efectuăm ambele experiențe (efectuăm  $\mathcal{E}$ ) se pot realiza ambele evenimente  $A, B$ \*

Experiența  $\mathcal{E}$  are  $n_1 n_2$  cazuri posibile. Un rezultat al experienței  $\mathcal{E}$  este dat de un rezultat din mulțimea  $\Omega_1$  a rezultatelor posibile ale experienței  $\mathcal{E}_1$  și unul din mulțimea  $\Omega_2$  a rezultatelor posibile ale experienței  $\mathcal{E}_2$ .

Mulțimea rezultatelor posibile ale experienței  $\mathcal{E}$  poate fi reprezentată prin mulțimea  $\Omega_1 \times \Omega_2$  (produsul cartezian) care are  $n_1 n_2$  elemente.

Pentru a se realiza evenimentul « $A$  și  $B$ » legat de experiența  $\mathcal{E}$  trebuie să apară un caz din cele  $m_1$  favorabile lui  $A$  în cadrul experienței  $\mathcal{E}_1$  împreună cu un caz din cele  $m_2$  favorabile lui  $B$  în cadrul experienței  $\mathcal{E}_2$ .

Rezultă că evenimentul « $A$  și  $B$ » are  $m_1 m_2$  cazuri favorabile și

$$P(A \text{ și } B) = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A) \cdot P(B).$$

Dacă experiențele  $\mathcal{E}_1$  și  $\mathcal{E}_2$  nu au amândouă un număr finit de cazuri egal posibile recurgem la frecvențe și la tendința de stabilitate a acestora. Nu putem spune că dacă am făcut de  $n$  ori experiența  $\mathcal{E}$  avem egalitatea exactă  $f(A \text{ și } B) = f(A) \cdot f(B)$  ci numai că această se manifestă ca tendință când  $n$  crește indefinit, că experiența ne sugerează că egalitatea există între constantele către care „tind” frecvențele celor trei evenimente scrise, în ultimă instanță, între probabilitățile lor. Pe un exemplu se va lămuri mai bine ce vrem să spunem cu aceasta.

\* Se aruncă două zaruri (nu neapărat „corecte”) și considerăm evenimentele:

$A$ : apariția feței 1 pe primul zar,

$B$ : apariția unui număr par pe al doilea zar.

Primul eveniment este legat de experiența aruncării primului zar ( $\mathcal{E}_1$ ), al doilea de experiența aruncării celui alt zar ( $\mathcal{E}_2$ ) și amândouă de experiența  $\mathcal{E}$  a aruncării celor două zaruri.

Să admitem că aruncând de un număr mare de ori numai primul zar frecvența evenimentului  $A$  a manifestat tendința de stabilizare în apropierea unei valori  $p$ . Să presupunem apoi că aruncăm ambele zaruri astfel încât  $B$  să se realizeze de un număr mare de ori. Nu este rezonabil să presupunem că frecvența realizărilor lui  $A$  printre realizările lui  $B$  ( $f(A/B)$ ) nu manifestă aceeași tendință ca frecvența lui  $A$  pe totalul probelor. Mai precis, dacă s-ar face de un număr foarte mare de ori experiența și:

a) înregistrăm toate probele și calculăm frecvența lui  $A$ :  $f(A)$  sau

b) ignorăm probele în care pe al doilea zar apare un număr impar și înregistrăm numai probele în care s-a realizat  $B$  și cu ajutorul datelor obținute calculăm frecvența lui  $A$ :  $f(A/B)$ .

\* Aici am considerat evenimentul  $A$  legat de experiența  $\mathcal{E}_1$  și ca eveniment legat de experiența  $\mathcal{E}$ . În general nu vom face o distincție între aceste cazuri. Ca eveniment al experienței  $\mathcal{E}$ , (adică dacă s-ar efectua numai acesta)  $A$  are  $m_1$  cazuri favorabile din  $n_1 n_2$  posibile. Ca eveniment al experienței  $\mathcal{E}$ , acest eveniment are  $m_1 n_2$  cazuri favorabile din  $n_1 n_2$  posibile. De exemplu la aruncarea a două zaruri (ce se pot distinge într-un fel astfel încât să putem vorbi de primul zar și de al doilea zar) evenimentul „aparitiei feței 1” când se aruncă numai primul zar (sau se ignoră cel de-al doilea) are un caz favorabil din șase, iar evenimentul „aparitiei feței 1 pe primul zar” când se aruncă două zaruri are șase cazuri favorabile din 36. Nu vom distinge între aceste două evenimente.

Datorită ipotezei de stabilitate a frecvențelor și a faptului că s-au luat un număr suficient de probe este rezonabil să ne așteptăm ca  $f(A/B) \simeq f(A)$ ,  $(f(A \text{ și } B)/f(B) \simeq f(A))$  adică

$$f(A \text{ și } B) \simeq f(A) \cdot f(B)$$

și ca precizia acestei aproximări să crească cu numărul probelor.

Concluzia care se desprinde din cele spuse aici este că în aplicații trebuie să ținem cont de semnificația reală a noțiunii de independență.

Egalitatea  $P(A \text{ și } B) = P(A) \cdot P(B)$  este echivalentă cu independența (probabilistică) a evenimentelor  $A$ ,  $B$  în sensul că dacă ea are loc, atunci sîntem siguri că realizarea sau nerealizarea unuia din aceste evenimente nu influențează probabilitatea de realizare a celuilalt și reciproc dacă evenimentele sînt independente înțelegînd prin asta că realizarea unuia nu poate modifica probabilitatea celuilalt, atunci egalitatea are loc. În teoria matematică a probabilităților unde nu dispunem de o semnificație neformală a independenței, egalitatea (1.2.2) se ia ca definiție a independenței evenimentelor  $A$ ,  $B$ .

Să ilustrăm cele spuse pe două exemple din cele mai simple.

\* 1) Se aruncă un zar o singură dată și se consideră evenimentele

$A$ : apariția uneia din fețele 1, 2, 3;

$B$ : apariția uneia din fețele 2, 3, 4, 5.

Sînt aceste evenimente independente?

*Rezolvare.* Într-adevăr, nu putem răspunde dintr-o dată la această întrebare. Experiența constă dintr-o singură aruncare a unui singur zar și nu avem la îndemînă o descompunere evidentă a acestora în două experiențe independente de care să legăm cele două evenimente. Avem

$$P(A) = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \quad P(A \text{ și } B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

și deci evenimentele  $A$ ,  $B$  verifică relația (1.2.2):

$$P(A \text{ și } B) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = P(A) \cdot P(B)$$

ceea ce asigură independența lor.

\* 2) Două mașini produc fiecare același tip de piese. Se știe că probabilitatea ca o piesă produsă de prima mașină să fie defectă este 0,03, iar o piesă produsă de cea de-a doua este defectă cu probabilitatea 0,04. Se ia cîte o piesă de la fiecare mașină. Care este probabilitatea ca amîndouă piesele să fie defecte? Dar probabilitatea ca amîndouă să fie corecte?

*Rezolvare.* Să notăm

$A$ : piesa luată de la prima mașină este defectă ( $P(A) = 0,03$ );

$B$ : piesa luată de la a doua mașină este defectă ( $P(B) = 0,04$ ).

Se observă că  $A$  și  $B$  sînt evenimente independente, că fac parte din experiențe diferite: „alegerea unei piese de la prima mașină” și „alegerea piesei de la a doua mașină”, care sînt independente deoarece oricum am alege una din piese nu putem influența calitatea celeilalte.

\* În mod curent, în aplicații nu se mai scot în evidență experiențele și nici noi nu o vom face decît atunci cînd acest lucru se va impune.

Ni se cere  $P(A \text{ și } B)$ . Apelăm la (1.2.2)

$$P(A \text{ și } B) = P(A) \cdot P(B) = 0,03 \cdot 0,04 = 0,0012.$$

Evenimentul „ambele piese sînt corecte” se scrie « $\bar{A}$  și  $\bar{B}$ » și

$$P(\bar{A} \text{ și } \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - 0,03)(1 - 0,04) = 0,97 \cdot 0,96 = 0,9312.$$

În aplicația 4 din 1.1 s-a afirmat că dacă doi jucători joacă două jocuri și în fiecare din ele șansele sînt egale, atunci în cele două jocuri sînt posibile patru rezultate echiprobabile. Deși acest lucru este destul de evident, să vedem cum putem aborda acum această problemă.

Numim cei doi jucători „primul” și „al doilea” și considerăm evenimentele

$A$ : primul jucător cîștigă primul joc,

$B$ : primul jucător cîștigă al doilea joc.

Evident, cunoașterea rezultatului unuia din jocuri nu modifică probabilitatea vre-

unui eveniment legat de celălalt joc. Întrucît jocul este echitabil  $P(A) = \frac{1}{2}$ ;

$$P(B) = \frac{1}{2} \text{ și}$$

$$P(A \text{ și } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P(A \text{ și } \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4};$$

$$P(\bar{A} \text{ și } B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P(\bar{A} \text{ și } \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

În sfîrșit să vedem cum se pune problema independenței unui număr mai mare de două evenimente. Acum trebuie să găsim o definiție care să ne asigure nu numai că realizarea unui eveniment oarecare nu modifică probabilitatea fiecăruia din celelalte evenimente considerate (acestea ar fi independența *două cîte două*) ci și că realizarea unui grup oarecare din evenimentele considerate nu modifică probabilitatea de realizare a oricărui (sau a oricăror) dintre celelalte evenimente.

✱ O urnă conține patru bile numerotate, 1, 2, 3, 4 și luăm

$A$ : apariția uneia din bilele 1, 2;

$B$ : apariția uneia din bilele 2, 3;

$C$ : apariția uneia din bilele 1, 3.

$$\text{Avem: } P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{1}{2}; \quad P(C) = \frac{1}{2}.$$

$$P(A \text{ și } B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B);$$

$$P(B \text{ și } C) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C);$$

$$P(C \text{ și } A) = \frac{1}{4} = P(C) \cdot P(A).$$

Rezultă că evenimentele  $A, B, C$  sînt independente două cite două. Dacă se realizează evenimentul « $A$  și  $B$ » (apare bila 2) probabilitatea lui  $C$  devine

$$P(C/\langle A \text{ și } B \rangle) = 0.$$

Dacă nu se realizează « $A$  și  $B$ », atunci  $P(C/\langle A \text{ și } B \rangle) = \frac{2}{3}$ .

Deci, dacă se realizează unul din cele trei evenimente nu se modifică probabilitatea niciunui din celelalte două, dar dacă se realizează două probabilitatea celui de al treilea se modifică. Putem spune că aceste evenimente sînt independente două cite două, dar nu că sînt independente în totalitatea lor.

Dacă trei evenimente sînt independente două cite două :

$$P(A \text{ și } B) = P(A) \cdot P(B); P(B \text{ și } C) = P(B) \cdot P(C); P(A \text{ și } C) = P(A) \cdot P(C),$$

pentru a putea spune că sînt independente ar trebui să avem și alte condiții care să ne asigure că, de exemplu

$$P(C/\langle A \text{ și } B \rangle) = P(C). \quad (1.2.3)$$

Dar această relație se mai scrie succesiv

$$\frac{P(A \text{ și } B \text{ și } C)}{P(A \text{ și } B)} = P(C);$$

$$\frac{P(A \text{ și } B \text{ și } C)}{P(A) \cdot P(B)} = P(C);$$

$$P(A \text{ și } B \text{ și } C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C). \quad (1.2.4)$$

Dacă  $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \neq 0$  relațiile (1.2.4) și (1.2.3) sînt echivalente.

Deoarece relația (1.2.4) este simetrică în  $A, B, C$  ea va fi echivalentă și cu fiecare din relațiile

$$P(A/B \text{ și } C) = P(A); P(B/A \text{ și } C) = P(B).$$

Deci independența a trei evenimente  $A, B, C$  este asigurată de patru relații :

$$P(A \text{ și } B) = P(A) \cdot P(B); P(B \text{ și } C) = P(B) \cdot P(C). \quad (1.2.5)$$

$$P(A \text{ și } C) = P(A) \cdot P(C); P(A \text{ și } B \text{ și } C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

În cazul a patru evenimente independența se exprimă scriind relațiile de tipul (1.2.5) pentru cite două, cite trei și pentru toate patru. Trecerea la un număr oarecare de evenimente este evidentă.

Considerațiile făcute referitor la utilizarea noțiunii de independență a două evenimente se pot face în cazul general.

Pentru completări a se vedea referirile la noțiunea de independență din 1.3.

✂ Trei trăgători trag asupra unei ținte. Primul nimereste această țintă cu probabilitatea  $\frac{2}{3}$ , al doilea cu probabilitatea  $\frac{3}{4}$ , iar al treilea cu probabilitatea  $\frac{4}{5}$ .

a) Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de trei ori ? b) Dar probabili-

tatea ca ținta să fie atinsă exact de două ori? Dar probabilitatea ca ținta să fie atinsă cel puțin o dată?

**Rezolvare.** Luăm evenimentele:

- $A$ : primul trăgător nimereste ținta,  
 $B$ : al doilea trăgător nimereste ținta,  
 $C$ : al treilea trăgător nimereste ținta.

Prin ipoteză  $P(A) = \frac{2}{3}$ ;  $P(B) = \frac{3}{4}$ ;  $P(C) = \frac{4}{5}$ . a) Evenimentul „ținta este atinsă de trei ori” se poate scrie « $A$  și  $B$  și  $C$ ». Evenimentele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  fiind independente

$$P(A \text{ și } B \text{ și } C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}.$$

b) Evenimentul  $D$  „ținta este atinsă de două ori” se poate scrie

$$D = (A \text{ și } B \text{ și } \bar{C}) \text{ sau } (A \text{ și } \bar{B} \text{ și } C) \text{ sau } (\bar{A} \text{ și } B \text{ și } C).$$

Parantezele reprezintă evident evenimente incompatibile, iar evenimentele din aceeași paranteză sînt independente. Rezultă

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \text{ și } B \text{ și } \bar{C}) + P(A \text{ și } \bar{B} \text{ și } C) + P(\bar{A} \text{ și } B \text{ și } C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + \\ &+ P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{13}{30}. \end{aligned}$$

c) Este mai ușor de calculat probabilitatea evenimentului contrar. Evenimentul „ținta nu este atinsă” poate fi scris « $\bar{A}$  și  $\bar{B}$  și  $\bar{C}$ » iar

$$P(\bar{A} \text{ și } \bar{B} \text{ și } \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{60}.$$

Rezultă că probabilitatea evenimentului „ținta este atinsă” este  $1 - \frac{1}{60} = \frac{59}{60}$

După ce vom avea la îndemînă notații mai comode și mai familiare precum și un număr mai mare de formule, în 1.4 vom face mai multe aplicații dintre care unele se vor referi sau vor utiliza probabilități condiționate sau noțiunea de independență.

### 1.3. UTILIZAREA TERMINOLOGIEI ȘI NOTAȚIILOR TEORIEI MULȚIMILOR. AXIOMELE PROBABILITĂȚII.

De mai multă vreme, în mai toate cărțile de calculul probabilităților sînt folosite notațiile și limbajul teoriei mulțimilor. Aceasta pentru că modelul matematic al teoriei probabilităților este ansamblist.

Modelul matematic al unui aspect al lumii reale (sau cel puțin o primă formă a sa) este sugerat de multe ori de situații sau observații dintre cele mai simple. Comentariile și îmbunătățirile ulterioare ale modelului pot avea un tot mai pronunțat caracter speculativ.

Cînd Euclid a început încercarea sa de a axiomatiza geometria (în ultimă instanță de a crea un model matematic) nu a făcut-o pentru a delimita geometria care azi îi poartă numele, de alte geometrii (neeulidiene) pe care, desigur nici nu le-a bănuțit.

Să scoatem acum în evidență unele considerații simple care ar putea sugera modelul matematic ansamblist al calculului probabilităților.

Pentru ușurarea expunerii să considerăm o experiență aleatoare simplă; de exemplu, extragerea unei bile dintr-o urnă ce conține 10 bile numerotate 1, 2, 3, ..., 10. Să alegem niște evenimente legate de această experiență :

$A$  : numărul extras este  $\leq 6$  ;

$B$  : numărul extras este  $\geq 3$  ;

$C$  : numărul extras este par.

Experiența are o mulțime  $\Omega'$  de rezultate posibile pe care o putem scrie

$$\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Se observă că atunci cînd ne gîndim la evenimentul  $A$  ne gîndim la o submulțime a lui  $\Omega'$  și anume  $A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Aceasta este mulțimea cazurilor favorabile lui  $A$ . Se observă că evenimentul  $A$  și mulțimea  $A'$  se determină reciproc. La fel, evenimentului  $B$  îi corespunde mulțimea  $B' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  iar evenimentului  $C$  mulțimea  $C' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ .

Să trecem la o experiență care are o mulțime  $\Omega'$  (nu neapărat finită) de rezultate posibile. Fiecărui eveniment  $A$  îi atașăm mulțimea  $A' \subset \Omega'$  a rezultatelor experienței favorabile realizării lui  $A$ .

Se observă de la început că evenimentului sigur  $\Omega$  îi corespunde mulțimea totală  $\Omega'$ , iar evenimentului imposibil îi corespunde mulțimea vidă.

Dacă evenimentul  $A$  are mulțimea  $A'$  de cazuri favorabile și evenimentul  $B$  are mulțimea  $B'$  de cazuri favorabile, atunci evenimentul „ $A$  sau  $B$ ” se realizează dacă și numai dacă apare un caz care realizează pe  $A$  sau\* realizează pe  $B$ . Acest caz trebuie să aparțină uneia (cel puțin) din cele două mulțimi  $A'$ ,  $B'$ . Rezultă că mulțimea cazurilor favorabile lui „ $A$  sau  $B$ ” este  $A' \cup B'$ .

La fel rezultă că în cadrul acestei corespondențe dintre evenimente și submulțimi ale lui  $\Omega'$  evenimentului „ $A$  și  $B$ ” îi corespunde  $A' \cap B'$ .

Evenimentului „non  $A$ ” =  $\bar{A}$  — care prin definiție se realizează dacă și numai dacă  $A$  nu se realizează — îi corespunde mulțimea  $\bar{A}$  (complementara mulțimii  $A'$ ).

Prin definiție „evenimentul  $A$  implică evenimentul  $B$ ” dacă și numai dacă realizarea lui face certă realizarea lui  $B$ . Deci orice caz favorabil lui  $A$  se găsește printre cazurile favorabile lui  $B$ . Rezultă că relația „ $A$  implică  $B$ ” este echivalentă cu  $A' \subset B'$ .

Evenimentele  $A$ ,  $B$  sînt incompatibile, adică nu se pot realiza împreună dacă și numai dacă nu există nici un caz favorabil atît lui  $A$  cît și lui  $B$ , cu alte cuvinte mulțimile  $A'$  și  $B'$  sînt disjunctive.

Se vede că oricare din submulțimile lui  $\Omega'$  ce se atașează unui eveniment îl determină pe acesta și reciproc oricărui eveniment îi corespunde o singură submulțime a lui  $\Omega'$ . Pe scurt, putem spune că fiecare eveniment se identifică cu o submulțime a lui  $\Omega'$ . Dacă vom nota cu  $A$ ,  $B$ , ... eveni-

\* „sau” este luat în această carte totdeauna în sens nedisjunctiv dacă nu se specifică în mod expres contrariul.

mentele și tot cu  $A, B, \dots$  submulțimile corespunzătoare ale lui  $\Omega'$  (care la rîndul lui îl vom nota cu  $\Omega$ ) obținem următoarea dualitate de limbaj și de interpretare

*Limbajul evenimentelor*

Evenimentul sigur.  
 Eveniment.  
 «A sau B».  
 «A și B».  
 «non A»,  $\bar{A}$ .  
 A implică B.  
 A, B incompatibile.

*Limbajul mulțimilor*

Mulțimea totală  $\Omega$ .  
 Submulțime a lui  $\Omega$ .  
 Mulțimea vidă  $\emptyset$ .  
 A reunit cu B,  $A \cup B$ .  
 A intersectat cu B,  $A \cap B$ .  
 Complementara lui A,  $\bar{A}$ ,  $A^c$ .  
 A inclus în B,  $A \subset B$ .  
 A, B disjunctive,  $A \cap B = \emptyset$ .

Uzul a introdus o anumită suprapunere a limbajului ansamblist peste cel al evenimentelor astfel încît uneori vom vorbi de „reuniunea evenimentelor“\* „intersecția evenimentelor“\* sau de „evenimentul complementar“ unui eveniment dat. Noi vom continua să utilizăm și notația  $\bar{A}$  pentru a desemna evenimentul contrar lui A, deoarece această notație este destul de comodă.

Reținem că evenimentele pot fi interpretate ca submulțimi ale unei anumite mulțimi  $\Omega$  — care la rîndul ei reprezintă evenimentul sigur — iar operațiile cu evenimente „sau“, „și“, «non» devin acest caz respectiv operațiile cu mulțimi  $\cup, \cap, \bar{\phantom{A}}$ .

Modelul ne-a fost sugerat de cazul — care poate părea particular — al unei experiențe căreia îi putem discerne toate cazurile posibile.

Dar noi n-am urmărit să justificăm modelul ci numai să-l sugerăm. S-ar mai putea da probabil o interpretare a mulțimii  $\Omega$  care să ne sugereze modelul.

Poate că e recomandabil ca în prima instanță să ne mulțumim cu observarea perfecte analogii dintre proprietățile operațiilor cu evenimente „sau“, „și“, „non“ și operațiile cu mulțimi  $\cap, \cup, \bar{\phantom{A}}$  în sensul că orice proprietate din teoria mulțimilor care se poate exprima numai cu aceste operații se transformă într-o proprietate a evenimentelor prin trecerea la limbajul dual. (Există în matematică teoreme care justifică destul de bine interpretarea evenimentelor ca mulțimi: teorema de reprezentare a lui Stone, teorema Loomis-Sikorski).

Dar pentru ca o teorie să fie cu adevărat o teorie matematică, pentru a putea beneficia de întregul aparat matematic existent, ea trebuie să se detașeze de acel aspect al lumii reale care l-a generat, să se poată dezvolta independent de acesta. De aceea în teoria matematică a probabilităților se lucrează cu mulțimi foarte generale, cărora nu trebuie să li se mai atribuie o semnificație reală.

După punerea pe baze riguroase, axiomatice a teoriei probabilităților, au fost găsite în interiorul modelului rezultate deja existente, ceea ce a dat acestuia dreptul la viață. Apoi teoria matematică a probabilităților a căpătat o puternică dezvoltare, în numeroase cazuri primind confirmarea practică a rezultatelor sale, sau chiar devansînd cerințele, astfel ca la apariția unor

\* Uneori de  $A \cap B$  se mai scrie  $AB$  și chiar se vorbește despre „produsul“ evenimentelor. Dacă A, B sînt incompatibile în loc de  $A \cup B$  se mai scrie  $A + B$ .

probleme concrete acestea și-au găsit rezolvarea sau posibilitatea rezolvării în rezultatele teoriei pure.

Dar să continuăm cu descrierea modelului nostru. Deci  $\Omega$  este o mulțime (numită uneori și mulțimea evenimentelor elementare) iar un eveniment este o submulțime a lui  $\Omega$ . Din motive asupra cărora nu vom insista aici nu luăm ca mulțime a evenimentelor, familia *tuturor* submulțimilor lui  $\Omega$ , ci numai o anumită familie  $\mathcal{X}$  de submulțimi ale lui  $\Omega$ . Acum, fiecărui eveniment din  $\mathcal{X}$  îi corespunde o probabilitate care este un număr real. Deci probabilitatea face ca fiecărui eveniment din  $\mathcal{X}$  să-i corespundă un număr real (și numai unul). Este deci natural ca în model să considerăm probabilitatea ca o funcție  $P$  definită pe  $\mathcal{X}$  și cu valori reale :

$$P : \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}$$

Dar aceasta nu ar ajuta la nimic dacă  $P$  ar fi o aplicație oarecare  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}$ . Orice astfel de aplicație care se vrea model matematic al noțiunii empirice (ce-i drept, cam nebulosă) de „valoare limită“ (sau terminală—după unii autori) a frecvenței trebuie să satisfacă proprietățile a)–f) din 1.1.

Dar odată spus acest lucru apare deja o problemă. Printre aceste proprietăți vedem

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B);$$

$$P(\Omega) = 1; P(A^c) = 1 - P(A).$$

Dar domeniul de definiție al lui  $P$  este familia  $\mathcal{X}$  de părți ale lui  $\Omega$  și când scriem  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(A \cup B)$ ,  $P(A \cap B)$ ,  $P(\Omega)$ ,  $P(A^c)$  trebuie să ne asigurăm că  $A$ ,  $B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A^c$ ,  $\Omega$  aparțin lui  $\mathcal{X}$ .

Dacă vrem ca prima din relațiile scrise mai sus să fie valabilă pentru orice  $A, B \in \mathcal{X}$ , trebuie să impunem lui  $\mathcal{X}$  condiții care să ne asigure că dacă  $A \in \mathcal{X}$  și  $B \in \mathcal{X}$  atunci  $A \cup B \in \mathcal{X}$  și  $A \cap B \in \mathcal{X}$ . De asemenea, pentru a avea cea de a treia relație de mai sus pentru orice  $A \in \mathcal{X}$  trebuie să cerem ca pentru orice  $A \in \mathcal{X}$  să avem  $A^c \in \mathcal{X}$ . Trebuie desigur să ne asigurăm și că  $\Omega \in \mathcal{X}$ .

**Definiție.** Fie  $\Omega$  o mulțime nevidă. Familia nevidă  $\mathcal{X}$  de părți ale lui  $\Omega$  se numește corp (de părți ale lui  $\Omega$ ) dacă

- 1) pentru orice  $A \in \mathcal{X}$  avem  $A^c \in \mathcal{X}$ ,
- 2) pentru orice  $A, B \in \mathcal{X}$  avem  $A \cup B \in \mathcal{X}$ .

*Proprietăți.* Orice corp  $\mathcal{X}$  de părți ale lui  $\Omega$  satisface condițiile

- 3)  $\Omega \in \mathcal{X}$ ,  $\emptyset \in \mathcal{X}$ ,
- 4) dacă  $A \in \mathcal{X}$ ,  $B \in \mathcal{X}$  atunci  $A \cup B \in \mathcal{X}$ .

Într-adevăr, dacă  $A \in \mathcal{X}$  ( $\mathcal{X}$  este nevidă), atunci  $A^c \in \mathcal{X}$  (conform 1) și deci  $\Omega = A \cup A^c \in \mathcal{X}$  (conform 2). De aici  $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{X}$ .

Dacă  $A \in \mathcal{X}$ ,  $B \in \mathcal{X}$  atunci  $A^c \in \mathcal{X}$ ,  $B^c \in \mathcal{X}$  (conform 1) și de aici  $A^c \cup B^c \in \mathcal{X}$  (conform 2). În sfârșit, ținând din nou cont de 1 rezultă

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{X}.$$

Datorită asociativității operațiilor  $\cap$  și  $\cup$  proprietățile 1 și 4 pot fi scrise pentru orice familie finită de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{X}$ .

Putem spune că un corp de părți ale lui  $\Omega$  este o familie nevidă de submulțimi ale lui  $\Omega$  închisă la reuniune finită, intersecție finită și trecerea la complementară.

Desigur, dacă  $A, B \in \mathcal{X}$  mai avem  $A - B = A \cap B^c \in \mathcal{X}$ ,  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{X}$ .

Acum are sens să definim o aplicație  $P$  a lui  $\mathcal{X}$  în  $\mathbb{R}$  care să satisfacă condițiile  $\alpha$ — $f$ . Dar dacă ne-am oprit aici cu definirea probabilității, am limita extrem de mult posibilitățile de dezvoltare a teoriei precum și aplicabilitatea sa din cauza constringerii de a nu lucra în același timp decât cu un număr finit de evenimente. Astfel, putem scrie  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$  dacă  $A_1, A_2, \dots, A_n$  din  $\mathcal{X}$  sînt disjuncte două cite două, dar nu putem scrie  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$  pentru un șir infinit  $A_1, A_2, \dots$  de evenimente incompatibile două cite două. Or, la tot pasul sîntem puși în situația de a lucra cu șiruri infinite de evenimente (vom vedea acest lucru și în paragrafele următoare).

De aceea este bine să impunem lui  $\mathcal{X}$  o condiție care să ne asigure închiderea sa față de reuniune numărabilă și intersecție numărabilă.

**Definiție.** O familie nevidă  $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  se numește  $\sigma$  — corp sau corp borelian dacă

$$(\sigma_1) A \in \mathcal{X} \Rightarrow A^c \in \mathcal{X}$$

$$(\sigma_2) A_n \in \mathcal{X}, n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$$

(aici și peste tot în continuare  $n$  este un număr întreg și pozitiv).

Evident că orice  $\sigma$  — corp este și un corp, deoarece

$$A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{X} \Rightarrow A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \dots \in \mathcal{X}.$$

Deci proprietățile 3 și 4 ale corpului sînt valabile și pentru  $\sigma$  — corpuri, ultima dintre ele fiind valabilă în acest caz și pentru familii numărabile de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{X}$  (demonstrația este aceeași).

Acum putem defini probabilitatea  $P$  pe  $\mathcal{X}$  impunându-i să satisfacă condițiile  $\alpha$ — $f$  din 1.1 dintre care  $b$ ) generalizată la familii numărabile de evenimente. Dar se arată ușor că putem să impunem lui  $P$  numai o parte din aceste condiții, celelalte fiind consecințe ale acelei părți.

**Definiție.**  $\mathcal{X}$  fiind un  $\sigma$  — corp de părți ale lui  $\Omega$  se numește probabilitate (pe  $\mathcal{X}$ ) aplicația

$$P: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfăcînd axiomele

$$(P_1) \text{ pentru orice } A \in \mathcal{X}: P(A) \geq 0$$

( $P_2$ ) dacă  $(A_n), n \geq 1$  este o familie numărabilă de mulțimi disjuncte două cite două din  $\mathcal{X}$  atunci

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$$(P_3) P(\Omega) = 1.$$

Cu titlu de exercițiu să arătăm proprietățile enunțate în 1.1 și încă vreo cîteva.

( $P_4$ ) Dacă  $A_1, A_2, \dots, A_n$  din  $\mathcal{X}$  sînt disjuncte două cite două, atunci

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

*Demonstrație.*  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$  și se aplică  $(P_2)$ .

$(P_5)$   $A, B \in \mathcal{X}, B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$  unde  $A - B = A \cap B^c$ .

*Demonstrație.* Evident  $A - B \in \mathcal{X}$  și  $A = B \cup (A - B)$  iar  $B$  și  $A - B$  sînt disjuncte. Conform  $(P_1)$ :  $P(A) = P(B) + P(A - B)$ .

$(P)$   $A, B \in \mathcal{X}, B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$  (proprietatea de monotonie a probabilității).

*Demonstrație.*  $B \subset A \Rightarrow P(A) - P(B) = P(A - B) \geq 0$  ( $(P_5)$  și  $(P_1)$ )

$(P_7)$  Pentru orice  $A \in \mathcal{X}, P(A^c) = 1 - P(A)$ ;  $P(\emptyset) = 0$ .

*Demonstrație.*  $A \cup A^c = \Omega, A \cap A^c = \emptyset$  și  $P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$  (s-a ținut cont de  $(P_1)$  și  $(P_3)$ );  $P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 0$ .

$(P_8)$  Pentru orice  $A \in \mathcal{X}, 0 \leq P(A) \leq 1$ .

*Demonstrație.*  $\emptyset \subset A \subset \Omega \Rightarrow P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$  (conform  $(P_5)$ )

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad ((P_7) \text{ și } (P_8)).$$

$(P_9)$   $A, B \in \mathcal{X} \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ .

*Demonstrație.*  $A - B = A - (A \cap B)$  și  $A \cap B \subset A$ . Deci  $(P_5)$ :

$$P(A - B) = P(A - (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$$

$(P_{10})$   $A, B \in \mathcal{X} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

*Demonstrație.*  $A \cup B = B \cup (A - B)$  iar  $B$  și  $A - B$  sînt disjuncte. Deci conform  $(P_4)$

$$P(A \cup B) = P(B \cup (A - B)) = P(B) + P(A - B)$$

și ținînd cont de  $(P_{10})$

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B).$$

*Observație.* Proprietatea  $(P_{10})$  se poate generaliza:

$$(P'_{10}) \quad P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = P(A_1) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

Demonstrația acestei proprietăți se face destul de ușor prin inducție ținînd cont de distributivitatea intersecției față de reuniune și o lăsăm în seama cititorului.

Să mai observăm că proprietatea  $(P_{10})$  rămîne adevărată dacă schimbăm între ele operațiile  $\cup$  și  $\cap$ . Și pentru că și reuniunea este distributivă față de intersecție se demonstrează la fel ca  $(P'_{10})$  și proprietatea

$$(P''_{10}) \quad P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i \cup A_j) + \sum P(A_i \cup A_j \cup A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n).$$

În continuare dăm cîteva proprietăți în care intervin șiruri infinite de evenimente și probabilitățile acestora. Pentru ușurarea scrierii vom introduce niște notații. Dacă  $(A_n)_n \geq 1$  este un șir descrescător (respectiv crescător) de mulțimi, adică pentru orice  $n \geq 1, A_{n+1} \subset A_n$  (respectiv  $A_{n+1} \supset A_n$ ) și

$\bigcap_{n \geq 1} A_n = A$  (respectiv  $\bigcup_{n \geq 1} A_n = A$ ) vom scrie  $A_n \downarrow A$  (respectiv  $A_n \uparrow A$ ). La fel, pentru șiruri de numere reale : dacă  $(x_n)_{n \geq 1}$  este un șir descrescător (respectiv crescător) și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ( $x$  finit sau nu) vom scrie  $x_n \downarrow x$  (respectiv  $x_n \uparrow x$ ).

(P<sub>11</sub>)  $A_n \in \mathcal{X}, n \geq 1, A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow P(A_n) \downarrow 0$ .

*Demonstrație.* Pentru orice  $n$ ,  $A_n$  se scrie ca o reuniune numărabilă de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{X}$  :

$$A_n = \bigcup_{k \geq n} (A_k - A_{k+1})$$

și conform (P<sub>2</sub>)

$$P(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k - A_{k+1}).$$

Pentru  $n = 1$  :

$$P(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k - A_{k+1}).$$

Din aceste relații rezultă că restul  $R_n$  al seriei convergente  $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k - A_{k+1})$  este  $P(A_n)$  și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0.$$

Șirul de numere  $P(A_n)$  este descrescător conform (P<sub>6</sub>)

O consecință imediată este :

(P'<sub>11</sub>). Dacă  $A_n \in \mathcal{X}, n \geq 1$ , atunci

$$A_n \downarrow A \Rightarrow P(A_n) \downarrow P(A).$$

$$A_n \uparrow A \Rightarrow P(A_n) \uparrow P(A).$$

*Demonstrație.*  $A_n \downarrow A \Rightarrow A_n - A \downarrow \emptyset \Rightarrow P(A_n - A) \downarrow 0$  ;

$$P(A_n - A) = P(A_n) - P(A)$$

$$A_n \uparrow A \Rightarrow A - A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow P(A - A_n) \downarrow 0 ; P(A - A_n) = P(A) - P(A_n)$$

(P<sub>12</sub>) Dacă  $A_i \in \mathcal{X}, i \in I$  unde  $I$  este o familie finită sau numărabilă de indici atunci (proprietatea de subaditivitate a probabilității) :

$$P\left(\bigcup_I A_i\right) \leq \sum_I P(A_i).$$

*Demonstrație.* Pentru  $I$  finit se arată prin inducție. Fie  $I = \{1, 2, \dots, \dots, n\}$ . Pentru  $n = 2$  :

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2).$$

Dacă

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) \tag{1.3.1}$$

atunci

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i). \end{aligned}$$

Dacă familia de indici  $I$  este numărabilă, atunci luăm  $I = \mathbb{N}$  și observăm

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \uparrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

și ținând cont de  $(P_n)$

$$P\left(\bigcup_{i \leq n} A_i\right) \uparrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

și dacă facem  $n \rightarrow \infty$  în (1.3.1.) rezultă

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Să transcriem cu notațiile și limbajul de care dispunem acum noțiunile introduse în 1.2.

**Definiție.** Fînd dată probabilitatea  $P$  pe  $\sigma$  — corpul  $\mathcal{X}$  de părți ale lui  $\Omega^*$  și  $B \in \mathcal{X}$ ,  $P(B) \neq 0$ , se numește probabilitatea lui  $A$  condiționată de  $B$ :

$$P(A/B) \doteq \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Aceasta se mai notează în mod curent cu  $P_B(A)$ . Aplicația  $P_B: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $B$  fixat) definită cu ajutorul unei probabilități  $P$  pe  $(\Omega, \mathcal{X})$  este de asemenea o probabilitate pe  $(\Omega, \mathcal{X})$ . Pentru a vedea acest lucru trebuie să arătăm că verifică axiomele probabilității. Acest lucru se face destul de ușor și-l lăsăm cititorului ca exercițiu.

Să trecem la noțiunea de independență a evenimentelor.

**Definiție.** Evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sînt independente dacă pentru orice  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$  avem

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_r}) \quad (1.3.2.)$$

Dacă evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sînt independente, atunci sînt independente și evenimentele  $B_1, B_2, \dots, B_n$  unde pentru orice  $i = 1, 2, \dots, n$  avem  $B_i = A_i$  sau  $B_i = \bar{A}_i$ . Pentru a arăta acest lucru trebuie să arătăm că dacă toate relațiile de tipul (1.3.2) sînt adevărate, orice relație de acest tip rămîne adevărată dacă înlocuim unul sau mai multe din evenimentele  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$  prin complementarele respective. Este suficient să dovedim acest lucru pentru cazul unei singure înlocuiri. După aceea se poate trece la cazul mai multor înlocuiri, făcîndu-le pe acestea una cîte una. Să arătăm că (1.3.2)

\* Cuplul  $(\Omega, \mathcal{X})$  se numește cîmp borelian de evenimente sau spațiu probabilitabil, iar tripletul  $(\Omega, \mathcal{X}, P)$  cîmp borelian de probabilitate sau spațiu probabilitizat.

rămâne valabilă dacă înlocuim  $A_{t_1}$  prin  $\bar{A}_{t_1}$ . Notăm  $B = A_{t_2} \cap \dots \cap A_{t_r}$ .  
Putem scrie

$$P(A_{t_1}^c \cap B) = P(B - A_{t_1}) = P(B) - P(A_{t_1} \cap B) \text{ (conform } (P_9))$$

Revenind la vechile notații

$$\begin{aligned} P(A_{t_1}^c \cap A_{t_2} \cap \dots \cap A_{t_r}) &= P(A_{t_2} \cap \dots \cap A_{t_r}) - P(A_{t_1} \cap A_{t_2} \cap \dots \cap A_{t_r}) = \\ &= P(A_{t_2}) \cdot P(A_{t_3}) \cdot \dots \cdot P(A_{t_r}) - P(A_{t_1}) \cdot P(A_{t_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{t_r}) = \\ &= (1 - P(A_{t_1})) \cdot P(A_{t_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{t_r}) = P(A_{t_1}^c) \cdot P(A_{t_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{t_r}). \end{aligned}$$

Să trecem acum la independența familiilor arbitrare de evenimente.

**Definiție.** Evenimentele familiei  $(A_i)_{i \in I}$  sînt independente dacă pentru orice  $J$  finită,  $J \subset I$  evenimentele familiei  $(A_i)_{i \in J}$  sînt independente.

**Propoziție.** Dacă evenimentele  $A_n$ ,  $n \geq 1$  sînt independente, atunci

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \prod_{n \geq 1} P(A_n).$$

*Demonstrație.* Dacă  $B_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$ , atunci

$$P(B_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i); \quad B_n \downarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Dacă ținem cont și de  $(P'_{11})$  vom obține

$$\prod_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Încheiem acest paragraf cu cîteva aplicații.

1°. Să se arate că dacă  $A, B \in \mathcal{X}$ ,  $0 < P(A)$ ,  $P(B) < 1$

$$P(A/B) = P(A/B^c)$$

atunci evenimentele  $A$  și  $B$  sînt independente.

*Rezolvare.* Egalitatea dată se scrie

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}.$$

Ținînd cont de  $(P_9)$  și  $(P_7)$  obținem

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

care scrisă sub forma cea mai simplă este

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Dacă  $0 < P(A)$ ,  $P(B) < 1$  este adevărată și reciproca.

2°. Dacă evenimentele  $A, B$  sînt independente și probabilitatea de a se realiza unul singur din ele este  $1/2$ , atunci cel puțin unul din aceste evenimente are probabilitatea  $1/2$ .

*Rezolvare.* Prin ipoteză  $P(A - B) + P(B - A) = \frac{1}{2}$ . Aceasta se mai poate scrie datorită proprietății  $(P_9)$ :

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

și deoarece  $A$  și  $B$  sînt independente

$$2P(A) + 2P(B) - 4P(A) \cdot P(B) - 1 = 0$$

sau sub o formă convenabilă

$$(2P(A) - 1)(1 - 2P(B)) = 0.$$

3°. Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  un spațiu probabilitizat. Pentru orice  $A, B \in \mathcal{K}$  notăm  $d(A, B) = P(A - B) + P(B - A)$ . Să se arate că pentru orice  $A, B, C \in \mathcal{K}$ :

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C).$$

*Rezolvare.*  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$  este diferența simetrică a mulțimilor  $A, B$ . Se verifică ușor relația

$$A \Delta C \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C).$$

Aplicînd  $P$  acestei relații și ținînd cont de  $(P_9)$  și  $(P_{12})$  obținem succesiv

$$\begin{aligned} d(A, C) &= P(A \Delta C) \leq P((A \Delta B) \cup (B \Delta C)) \leq P(A \Delta B) + P(B \Delta C) = \\ &= d(A, B) + d(B, C). \end{aligned}$$

4°. Evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n$  satisfac condițiile

a)  $A_i \subset \bigcup_{j \neq i} A_j,$

b)  $A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset$  pentru orice  $1 \leq i < j < k \leq n$ .

Se cere:

c) să se arate că  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P(A_i),$

d) să se deducă că în limbajul evenimentelor grupul de condiții a), b) este echivalent cu afirmația:

dacă se realizează unul din aceste evenimente, atunci se mai realizează unul și numai unul din celelalte.

*Rezolvare.* c) Scrise desfășurat relațiile a) sînt

$$A_1 \subset A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n,$$

$$A_2 \subset A_1 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n,$$

.....

$$A_n \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}.$$

Dar evident relația  $M \subset N$  este echivalentă cu  $M \cap N = M$ .  
Folosind această observație, putem scrie condițiile a) sub forma

$$\begin{aligned} A_1 &= (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup \dots \cup (A_1 \cap A_n), \\ A_2 &= (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap A_3) \cup \dots \cup (A_2 \cap A_n) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

În fiecare din aceste relații parantezele din membrul drept sînt disjuncte două cîte două, deoarece intersecția a două astfel de paranteze este intersecția a trei mulțimi diferite din cele  $n$  și conform condiției b) aceasta este vidă. Trecînd cu  $P$  peste fiecare din relațiile (1.3.3) obținem

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + \dots + P(A_1 \cap A_n), \\ P(A_2) &= P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_3) + \dots + P(A_2 \cap A_n) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Însumînd aceste egalități rezultă

$$\sum P(A_i) = 2 \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j)$$

sau altfel scris :

$$\sum_{i < j} P(A_i \cup A_j) = \frac{1}{2} \sum P(A_i). \tag{1.3.4}$$

Dar conform proprietății (P<sub>10</sub>) și condiției b) :

$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j).$$

De aici și din (1.3.4) reiese

$$P(\cup A_i) = \frac{1}{2} \sum P(A_i).$$

d) Ținînd cont de dualitatea de limbaj prima relație (1.3.3) de exemplu, se citește : realizarea lui  $A_1$  implică realizarea a cel puțin unuia din evenimentele  $A_2, A_3, \dots, A_n$ . Totalitatea relațiilor (1.3.3) ne asigură că dacă se realizează unul din cele  $n$  evenimente, atunci se realizează cel puțin două. Dar condiția b) spune că cele  $n$  evenimente sînt incompatibile trei cîte trei, adică nu este posibilă realizarea a mai mult de două evenimente.

*Observație.* Concluzia c) se păstrează, evident, dacă în loc de ipoteza b) luăm ipoteza

$$b') P(A_i \cap A_j \cap A_k) = 0 \text{ pentru orice } 1 \leq i < j < k \leq n.$$

5°. Folosind rezultatele problemei precedente și al problemei 5° din 1.1 să se arate că dacă se aruncă un poligon convex rigid de diametru mai mic decît  $2a$  pe un plan pe care sînt trasate drepte paralele cu distanța  $2a$  între cele consecutive, atunci probabilitatea ca acest poligon să fie tăiat de o dreaptă a rețelei este  $\frac{L}{2a\pi}$ , unde prin  $L$  am notat perimetrul poligonului.

**Rezolvare.** Fie  $a_1, a_2, \dots, a_n$  laturile poligonului și  $A_i$  evenimentul: latura  $a_i$  este intersectată,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se observă că evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n$  verifică condițiile a) și b') deci verifică și c):

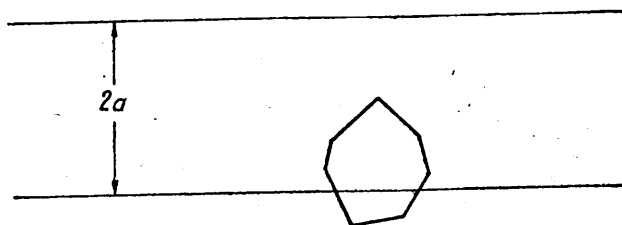


Fig. 1.7

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \frac{1}{2} \sum P(A_i). \quad (1.3.5)$$

Să observăm că  $B = \bigcup_{i=1}^n A_i$  este evenimentul „cel puțin o latură este intersectată” sau echivalent „poligonul este intersectat”. Acest eveniment îi căutăm probabilitatea. Dacă ne interesează numai  $P(A_i)$  ( $i$  fixat) putem face abstracție de existența celorlalte laturi și presupunem că se aruncă un ac de lungime  $a_i$  și probabilitatea intersectării acestuia va fi conform problemei 5° din 1.1.

$$P(A_i) = \frac{a_i}{a\pi}.$$

Revenind la (1.3.5) putem scrie

$$P(B) = \frac{\sum a_i}{2a\pi} = \frac{L}{2a\pi}.$$

**Observație.** Rezultatul se păstrează dacă în loc de un poligon se aruncă o curbă închisă convexă rigidă cu diametrul mai mic decât distanța între paralele consecutive.

## 1.4. FORMULE ȘI SCHEME PROBABILISTE

În acest paragraf, așa cum reiese și din titlul său — vom da câteva formule uzuale al calculului probabilităților și vom prezenta unele scheme probabiliste. Desigur că ne vom mărgini doar la acele formule ce pot fi expuse pe baza materialului de care dispunem în prezent.

Rolul schemelor este de a da o rezolvare unor probleme de un anumit tip, pentru a nu fi nevoiți să apelăm de fiecare dată la un raționament sau la un calcul complicat când întâlnim o problemă de tipul respectiv. De exemplu, una din scheme dă probabilitatea ca un eveniment de probabilitate cunoscută să se realizeze de un număr de ori, când repetăm experiența de care e legat de un număr dat de ori. Odata cunoscută această schemă, dacă vom întâlni o problemă în care este dată o anumită experiență care se repetă în condiții identice, putem apela la rezultatul cunoscut.

### 1.4.a. Regula de înmulțire a probabilităților.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

*Demonstrație.* Folosind direct definiția probabilității condiționate

$$P(A_1) = P(A_1),$$

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)},$$

$$P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)},$$

.....

$$P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

și egalitatea căutată rezultă din înmulțirea membru cu membru a acestor relații.

*Observație.* Aceasta este o generalizare a cazului evenimentelor independente. Dacă  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sînt evenimente independente, atunci

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

\* *Aplicații. a<sub>1</sub>)* Într-o urnă sînt 5 bile albe și 3 bile negre. Se scot trei bile una cîte una fără întoarcerea bilei extrase în urnă. Care este probabilitatea obținerii a trei bile albe? Dar probabilitatea de a avea două bile albe și una neagră?

*Rezolvare.* Introducem notațiile:

$A_1$ : prima bilă extrasă este albă,

$A_2$ : a doua bilă extrasă este albă,

$A_3$ : a treia bilă extrasă este albă.

Cu aceste notații:

$$P(A_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; P(A_2/A_1) = \frac{4}{9}; P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{3}{8}.$$

De exemplu  $P(A_3/A_1 \cap A_2)$  este probabilitatea ca a treia bilă să fie albă știind că în primele două extrageri au ieșit bile albe (știm deci că în urnă sînt trei bile albe și cinci negre).

Aplicînd regula de înmulțire a probabilităților probabilitatea evenimentului „cele trei bile sînt albe” ( $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ) este

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}.$$

Pentru a răspunde la cea de a doua întrebare să observăm că evenimentul  $B$  „două albe una neagră” se scrie

$$B = (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

adică este reuniune de trei evenimente incompatibile. Vom aplica deci mai întâi regula de adunare a probabilităților :

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Apoi aplicăm regula de înmulțire a probabilităților :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(\bar{A}_3/A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{36}.$$

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = P(A_1)P(\bar{A}_2/A_1)P(A_3/\bar{A}_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{36}.$$

$$P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{36}.$$

În sfârșit

$$P(B) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{5}{12}.$$

*Observație.* Recomandăm să se compare această rezolvare cu cea care se poate da cu ajutorul schemei bilei neintoarse, care se găsește expusă în acest paragraf.

\* a<sub>2</sub>) Într-un lot de 48 de piese 3 sînt defecte, iar în alt lot de 50 de piese 3 sînt defecte. Din fiecare lot se iau cîte trei piese. Care este probabilitatea să avem primele două piese bune și a treia defectă din primul lot și trei piese bune din cel de al doilea lot ?

*Rezolvare.* A : din primul lot se iau două piese bune și apoi una defectă,

B : din al doilea lot se iau trei piese bune,

A<sub>1</sub> : prima piesă din primul lot este bună,

A<sub>2</sub> : a doua piesă din primul lot este bună,

A<sub>3</sub> : a treia piesă din primul lot este defectă,

B<sub>1</sub> : prima piesă din al doilea lot este bună,

B<sub>2</sub> : a doua piesă din al doilea lot este bună,

B<sub>3</sub> : a treia piesă din al doilea lot este bună.

A, B sînt evenimente independente :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Pe de altă parte

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3; \quad B = B_1 \cap B_2 \cap B_3$$

de unde rezultă

$$P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{3}{46},$$

$$P(B) = P(B_1)P(B_2/B_1)P(B_3/B_1 \cap B_2) = \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48}$$

și în sfârșit

$$P(A \cap B) = \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48} = \frac{297}{6272}.$$

### 1.4 b) Formula probabilității totale

Dacă  $A_1, A_2, \dots, A_n$  formează un sistem complet de evenimente, atunci pentru orice eveniment  $A$  avem

$$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + \dots + P(A_n)P(A/A_n).$$

*Demonstrație.* Reamintim că o mulțime de evenimente formează un sistem complet de evenimente, dacă acestea sînt incompatibile două cîte două și reuniunea lor este evenimentul sigur. Altfel spus, din acele evenimente se realizează cu certitudine unul și numai unul.

Un eveniment  $A$  nu se poate realiza decît împreună cu unul și numai unul din evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup \dots \cup (A \cap A_n).$$

(Această relație rezultă imediat și dacă intersectăm cu  $A$  în ambii membrii ai relației  $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  și ținem cont de distributivitatea intersecției față de reuniune). Dacă trecem cu  $P$  peste această relație, obținem

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \dots + P(A \cap A_n)$$

și conform regulii de înmulțire a probabilităților

$$P(A \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(A/A_i)$$

și formula este demonstrată.

\* b<sub>1</sub>) Se dau două urne identice în exterior. Una conține trei bile albe și patru bile negre, iar cealaltă patru bile albe și cinci bile negre. Din una din aceste urne aleasă la întâmplare se extrage o bilă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă ?

*Rezolvare.* Considerăm evenimentele :

$A_1$  : extragerea se face din prima urnă,

$A_2$  : extragerea se face din a doua urnă,

$A$  : bila extrasă este albă.

Se observă imediat că  $A_1, A_2$  formează un sistem complet de evenimente și

$$P(A_1) = \frac{1}{2}; P(A_2) = \frac{1}{2}; P(A/A_1) = \frac{3}{7}; P(A/A_2) = \frac{4}{9}.$$

Aplicînd formula probabilității totale putem scrie

$$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{55}{126}.$$

\* b<sub>2</sub>) Într-un depozit se aduc piese de un anumit tip de la trei ateliere. Primul atelier are două mașini care fabrică aceste piese și dă 3% rebut; al doilea atelier are două mașini și dă 2% rebut, iar al treilea atelier are trei mașini și dă 3% rebut. Care este probabilitatea ca o piesă luată la întâmplare din depozit să fie defectă, știind că fiecare mașină produce același număr de piese în unitatea de timp ?

*Rezolvare.* Introducem notațiile :

$A_1$  : piesa provine de la primul atelier,

$A_2$  : piesa provine de la al doilea atelier,

$A_3$  : piesa provine de la al treilea atelier,

$A$  : piesa este defectă.

Este evident că  $A_1, A_2, A_3$  formează un sistem complet de evenimente. Să mai observăm că în depozit sînt aduse piese de la șapte mașini dintre care două sînt în primul atelier, două în al doilea, trei în al treilea atelier. Rezultă:

$$P(A_1) = \frac{2}{7}; P(A_2) = \frac{2}{7}; P(A_3) = \frac{3}{7}.$$

În datele problemei se mai spune

$$P(A/A_1) = \frac{3}{100}; P(A/A_2) = \frac{2}{100}; P(A/A_3) = \frac{3}{100}.$$

În aceste condiții

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3) = \\ &= \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{100} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{100} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{100} = \frac{19}{700}. \end{aligned}$$

#### 1.4 c. Formula lui Bayes

Dacă  $A_1, A_2, \dots, A_n$  formează un sistem complet de evenimente, atunci pentru orice eveniment  $A$

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \cdot P(A/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(A/A_n)}$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ )

*Demonstrație.* Conform regulii de înmulțire a probabilităților

$$P(A \cap A_i) = P(A) \cdot P(A_i/A),$$

$$P(A_i \cap A) = P(A_i) \cdot P(A/A_i).$$

Din aceste egalități rezultă

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i)P(A/A_i)}{P(A)}.$$

Sau dacă scriem  $P(A)$  conform formulei probabilității totale

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i)P(A/A_i)}{P(A_1)P(A/A_1) + \dots + P(A_n)P(A/A_n)}$$

*Observație.* Se observă că dacă  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sînt echiprobabile:

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n}, \text{ formula lui Bayes devine}$$

$$P(A_i/A) = \frac{P(A/A_i)}{P(A/A_1) + \dots + P(A/A_n)}. \quad (1.4.1)$$

\* c.) Se dau două urne identice în exterior. Una conține trei bile albe și patru bile negre, iar cealaltă patru bile albe și cinci bile negre. Din una din aceste urne aleasă la întâmplare se ia o bilă de asemenea la întâmplare. Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din prima urnă?

**Rezolvare.** Se observă că datele acestei probleme sînt cele ale problemei  $b_1$ ). Vom folosi și notațiile introduse la rezolvarea problemei  $b_1$ ). Cu acele notații probabilitatea care ni se cere se scrie  $P(A_1/A)$ . Se observă de asemenea, că evenimentele  $A_1, A_2$  sînt echiprobabile:

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \text{Vom folosi forma (1.4.1) a formulei lui Bayes:}$$

$$P(A_1/A) = \frac{P(A_1/A_1)}{P(A_1/A_1) + P(A_1/A_2)} = \frac{3/7}{\frac{3}{7} + \frac{4}{9}} = \frac{27}{55}$$

**c<sub>2</sub>)** Într-un depozit se aduc piese de la trei ateliere. Primul atelier are două mașini care fabrică aceste piese și dă 3% rebut; al doilea atelier are două mașini și dă 2% rebut, iar al treilea atelier are trei mașini și dă 3% rebut. Din depozit a fost luată o piesă care s-a dovedit a fi defectă. Care este probabilitatea ca piesa să provină de la al doilea atelier? Dar probabilitatea ca ea să provină de la al treilea atelier?

**Rezolvare.** Datele problemei sînt cele de la  $b_2$ ). Cu notațiile de la rezolvarea problemei  $b_2$  și pe baza formulei lui Bayes putem scrie:

$$P(A_2/A) = \frac{P(A_2)P(A/A_2)}{P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{19}{700}} = \frac{4}{19}$$

$$P(A_3/A) = \frac{P(A_3)P(A/A_3)}{P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3)} = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{100}}{\frac{19}{700}} = \frac{9}{19}$$

#### 1.4. d.) Schema bilei neîntoarse

Într-o urnă sînt  $a$  bile albe și  $b$  bile negre. Din această urnă se extrag  $n$  bile una cîte una fără întoarcerea bilei extrase în urnă (sau se scot  $n$  bile deodată). Probabilitatea ca dintre cele  $n$  bile  $\alpha$  să fie albe și  $\beta = n - \alpha$  să fie negre este:

$$\frac{C_a^\alpha \cdot C_b^\beta}{C_{a+b}^n}$$

Dacă în urnă sînt bile de  $m$  culori:  $a_1$  de culoarea  $c_1$ ,  $a_2$  de culoarea  $c_2, \dots, a_m$  de culoarea  $c_m$  și dacă se extrag  $n$  bile deodată (sau una cîte una fără întoarcerea bilei extrase în urnă), atunci probabilitatea de a obține  $\alpha_1$  bile de culoarea  $c_1$ ,  $\alpha_2$  bile de culoarea  $c_2, \dots, \alpha_m$  bile de culoarea  $c_m$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$ ) este:

$$\frac{C_{a_1}^{\alpha_1} \cdot C_{a_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot C_{a_m}^{\alpha_m}}{C_{a_1 + a_2 + \dots + a_m}^n}$$

**Demonstrație.** Pentru ușurarea expunerii considerăm cazul a două culori. Să presupunem că se iau  $n$  bile deodată. Numărul cazurilor posibile este  $C_{a+b}^n$ . Un grup  $\alpha$  de bile albe dintr-un total de  $a$  poate fi luat în  $C_a^\alpha$  moduri. Un grup de  $\beta$  bile negre din totalul de  $b$  poate fi luat în  $C_b^\beta$  moduri. Un grup de  $\alpha$  bile albe și un grup de  $\beta$  bile negre pot fi luate în  $C_a^\alpha \cdot C_b^\beta$  moduri.

Probabilitatea căutată este

$$\frac{C_a^\alpha \cdot C_b^\beta}{C_{a+b}^n}$$

Dacă bilele ar fi fost luate una câte una, numărul cazurilor posibile ar fi fost  $A_{a+b}^n = n! \cdot C_{a+b}^n$ .

Un grup dinainte stabilit de  $\alpha$  bile albe și  $\beta$  bile negre poate fi luat într-un singur mod dacă bilele se iau toate odată și în  $n!$  moduri ( $n = \alpha + \beta$ ) dacă bilele se iau una câte una. Drept urmare în a doua variantă numărul cazurilor favorabile este de  $n!$  ori mai mare decât în prima variantă.

Intrucit în a doua variantă atit numărul cazurilor posibile cît și numărul cazurilor favorabile crește de același număr de ori probabilitatea va fi aceeași în ambele cazuri.

În situația cînd în urnă sînt mai mult de două culori, raționamentul este absolut același.

\* d<sub>1</sub>) Să se demonstreze relația

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

folosind rezultatul de la schema bilei neîntoarse.

*Rezolvare.* Într-o urnă sînt  $2n$  bile:  $n$  albe și  $n$  negre. Din această urnă se iau  $n$  bile odată. Probabilitatea apariției a  $k$  bile albe și  $n - k$  bile negre este conform schemei bilei neîntoarse

$$p_k = \frac{C_n^k \cdot C_n^{n-k}}{C_{2n}^n} = \frac{(C_n^k)^2}{C_{2n}^n}$$

Dacă  $A_k$  este evenimentul „apar  $k$  bile albe și  $n - k$  bile negre“ atunci  $p_k = P(A_k)$  și evident  $A_0, A_1, \dots, A_n$  formează un sistem complet de evenimente. În consecință  $\sum_{k=0}^n p_k = 1$ , adică

$$\frac{1}{C_{2n}^n} \cdot \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = 1; \quad \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

\* d<sub>2</sub>) Într-o urnă sînt cinci bile albe și cinci bile negre. Se scot trei bile succesiv fără întoarcerea bilei. Care este probabilitatea obținerii a trei bile albe? Dar probabilitatea de a avea două bile albe și una neagră?

*Rezolvare.* Aceasta este problema a<sub>1</sub>) din acest paragraf. Acum, cunoscînd schema bilei neîntoarse putem da răspunsul direct la fiecare din cele două întrebări:

$$\frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{12} \text{ respectiv } \frac{C_5^2 \cdot C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{5}{12}$$

\* d<sub>3</sub>) Într-un lot de 100 de piese, șase piese au defecte remediable, patru piese sînt rebuturi, iar restul sînt piese bune. Din acest lot au fost luate la întîmplare 10 piese. Care este probabilitatea ca din acestea șapte să fie bune, două să aibă defecte remediable și una să fie rebut?

*Rezolvare.* Se observă că problema se încadrează în schema bilei neîntoarse. Putem interpreta piesele de cele trei categorii ca bile de trei culori diferite. Așa înclt putem scrie direct rezultatul

$$\frac{C_{90}^7 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{100}^{10}}$$

#### 1.4. e. Schema lui Poisson

Dacă evenimentele independente  $A_1, A_2, \dots, A_n$  au probabilități cunoscute :

$$P(A_1) = p_1; P(A_2) = p_2; \dots; P(A_n) = p_n$$

atunci probabilitatea ca din cele  $n$  evenimente să se realizeze  $k$  (și să nu se realizeze  $n - k$ ) este coeficientul lui  $x^k$  din polinomul :

$$Q(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2) \dots (p_nx + q_n)$$

unde  $q_i = 1 - p_i; i = 1, 2, \dots, n$ .

*Demonstrație.* Pentru comoditatea expunerii să luăm pentru început  $n = 4, k = 2$ . Evenimentul a cărui realizare înseamnă realizarea a două evenimente și nerealizarea celorlalte două se scrie

$$(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) \cup (A_1 \cap A_3 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_4) \cup (A_1 \cap A_4 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup \\ (A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_1 \cap \bar{A}_4) \cup (A_2 \cap A_4 \cap \bar{A}_1 \cap \bar{A}_3) \cup (A_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2).$$

El este reuniunea a șase evenimente incompatibile, fiecare dintre acestea fiind intersecția a patru evenimente independente.

Probabilitatea acestui eveniment este

$$p_1p_2q_3q_4 + p_1p_3q_2q_4 + p_1p_4q_2q_3 + p_2p_3q_1q_4 + p_2p_4q_1q_3 + p_3p_4q_1q_2.$$

Este evident că tot atit este și coeficientul lui  $x^2$  din polinomul

$$Q(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3)(p_4x + q_4).$$

Acum este destul de clar că în cazul general, evenimentul a cărui realizare înseamnă realizarea a  $k$  din cele  $n$  este reuniunea a  $C_n^k$  evenimente, fiecare dintre acestea fiind intersecția a  $n$  evenimente independente

$$\cup (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap \bar{A}_{i_{k+1}} \cap \dots \cap \bar{A}_{i_n}).$$

Probabilitatea acestui eveniment este

$$\sum p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_k} \cdot q_{i_{k+1}} \cdot \dots \cdot q_{i_n}$$

Acesta este și coeficientul lui  $x^k$  din polinomul

$$Q(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2) \dots (p_nx + q_n).$$

*Observații.* 1) După cum reiese din demonstrație se vede că această regulă nu simplifică foarte mult calculul probabilității respective. Ea ne scutește numai de scrierea evenimentului. Dar însăși existența unei reguli este destul de utilă. În plus, această regulă este de asemenea utilă la deducerea altor rezultate. Vom avea prilejul s-o mai întâlnim în acest capitol.

2) Uneori se vorbește de probabilitatea ca un eveniment  $A$  legat de fiecare din experiențele independente  $E_1, E_2, \dots, E_n$  să se realizeze de  $k$  ori cînd se fac toate cele  $n$  experiențe, cunoscînd probabilitatea evenimentului  $A$  în cadrul fiecărei experiențe.

Desigur această exprimare conține un abuz de limbaj. Aici nu este vorba de un acelaș eveniment ci de  $n$  evenimente independente care pot avea chiar probabilități diferite. Considerarea unui singur eveniment se bazează pe o suprapunere a exprimării verbale a celor  $n$  evenimente. Convențional se

acceptă acest abuz de limbaj altă timp cât nu conduce la confuzie; neacceptarea sa ar face destul de greoaie unele exprimări. Într-un fel, ne-am folosit și noi de el până acum și ne vom folosi în continuare la nevoie,

Să presupunem că avem  $n$  urne care conțin bile albe și negre în proporții cunoscute și că în fiecare urnă se extrage o bilă. Care este probabilitatea să apară  $k$  bile albe și  $n - k$  bile negre?

Aici este vorba de  $n$  experiențe independente: „extragerea unei bile din prima urnă“ „extragerea unei bile din a doua urnă“, etc. Dacă s-a precizat experiența, se poate vorbi de evenimentul „apariția unei bile albe“. Dar cum nu putem considera în același timp decât evenimente legate de o aceeași experiență, în cadrul experienței globale care constă în extragerea celor  $n$  bile vom vorbi de evenimentele independente „apariția unei bile albe din prima urnă“, „apariția unei bile albe din a doua urnă“, etc. și vom spune că se cere probabilitatea realizării a exact  $k$  din aceste  $n$  evenimente. Dar este destul de clar și când spunem că se cere probabilitatea ca evenimentul: „apariția unei bile albe“ să se realizeze de  $k$  ori când facem cele  $n$  experiențe.

\* e<sub>1</sub>) *Avem trei loturi de câte 100 de piese. În primul lot trei piese sînt defecte, în al doilea lot patru piese sînt defecte, iar în al treilea lot cinci piese sînt defecte. Din fiecare lot se ia câte o piesă. Care este probabilitatea obținerii a două piese bune și a uneia defecte?*

*Rezolvare.* Evenimentele:

$A_1$ : piesa luată din primul lot este bună.  
 $A_2$ : piesa luată din al doilea lot este bună,  
 $A_3$ : piesa luată din al treilea lot este bună  
 sînt independente și

$$p_1 = P(A_1) = \frac{97}{100}; \quad p_2 = P(A_2) = \frac{96}{100}; \quad p_3 = P(A_3) = \frac{95}{100}.$$

$$q_1 = 1 - p_1 = \frac{3}{100}; \quad q_2 = 1 - p_2 = \frac{4}{100}; \quad q_3 = 1 - p_3 = \frac{5}{100}.$$

Probabilitatea ca din cele trei evenimente să se realizeze exact două este coeficientul lui  $x^2$  din polinomul  
 $(0,97x + 0,03)(0,96x + 0,04)(0,95x + 0,05)$ .

\* e<sub>2</sub>) *Patru trăgători trag asupra unei ținte. Primul atinge ținta cu probabilitatea  $\frac{2}{3}$ , al doilea cu probabilitatea  $\frac{3}{4}$ , al treilea cu probabilitatea  $\frac{4}{5}$ , iar al patrulea cu probabilitatea  $\frac{5}{6}$ . Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă exact de trei ori?*

*Rezolvare.* Evenimentele

$A_1$ : primul trăgător atinge ținta,  
 $A_2$ : al doilea trăgător atinge ținta,  
 $A_3$ : al treilea trăgător atinge ținta,  
 $A_4$ : al patrulea trăgător atinge ținta,  
 sînt independente și

$$p_1 = P(A_1) = \frac{2}{3}; \quad p_2 = P(A_2) = \frac{3}{4}; \quad p_3 = P(A_3) = \frac{4}{5}; \quad p_4 = P(A_4) = \frac{5}{6}$$

$$q_1 = 1 - p_1 = \frac{1}{3}; \quad q_2 = 1 - p_2 = \frac{1}{4}; \quad q_3 = 1 - p_3 = \frac{1}{5}; \quad q_4 = 1 - p_4 = \frac{1}{6}.$$

Probabilitatea ca din aceste patru evenimente să se realizeze trei și unul nu, este coeficientul lui  $x^3$  din polinomul

$$\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)$$

#### 1.4.f. Schema binomială sau schema lui Bernoulli

Se consideră o experiență și un eveniment legat de această experiență, de probabilitate cunoscută  $p$ . În acest caz probabilitatea ca acest eveniment să se realizeze de  $k$  ori când se efectuează de  $n$  ori experiența este

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

unde  $q = 1 - p$ .

*Demonstrație.* În general, fiind date  $n$  evenimente independente avind aceeași probabilitate  $p$ , probabilitatea ca dintre acestea să se realizeze exact  $k$  este — conform schemei lui Poisson — coeficientul lui  $x^k$  din polinomul

$$(px + q)(px + q) \dots (px + q) = (px + q)^n \quad (q = 1 - p)$$

Acest coeficient este (binomul lui Newton)  $C_n^k p^k q^{n-k}$ . Un mod de a obține un număr oarecare de evenimente independente avind aceeași probabilitate  $p$  este considerarea unei experiențe de care este legat un eveniment de probabilitate  $p$ , repetarea experienței de numărul dorit de ori și considerarea în fiecare probă a evenimentului respectiv. Pe un exemplu se înțelege mai bine ce vrem să spunem. Să luăm experiența aruncării unui zar și legat de ea, evenimentul „apariția feței 1” de probabilitatea  $1/6$ . Dacă facem de  $n$  ori experiența, atunci evenimentele „apariția feței 1 la prima aruncare”, „apariția feței 1 la a doua aruncare”, etc. sînt independente și au aceeași probabilitate.

*f<sub>1</sub>)* Se aruncă o pereche de zaruri de șase ori. Care este probabilitatea ca (exact) de trei ori să obținem un total de șapte puncte?

*Rezolvare.* Într-o singură probă evenimentul „un total de șapte puncte” are șase cazuri favorabile din 36 (egal) posibile și deci probabilitatea sa este  $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ . Probabilitatea ca în șase probe acest eveniment să se producă de exact trei ori este — conform schemei binomiale

$$C_6^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

*f<sub>2</sub>)* Un trăgător atinge o țintă dintr-un foc cu probabilitatea 0,8. Dacă trage 10 focuri asupra țintei, care este probabilitatea s-o atingă exact de 8 ori?

*Rezolvare.* Este evident că ne încadrăm în schema lui Bernoulli cu  $n = 10$ ,  $p = 0,8$ ,  $q = 0,2$   $k = 8$ . Rezultatul este

$$C_{10}^8 (0,8)^8 (0,2)^2.$$

Cu schema binomială încheiem expunerea unor aspecte ale acelei mici părți a teoriei probabilităților în care nu intervine noțiunea de variabilă aleatoare. De aceea problemele care urmează au un caracter recapitulativ și nu sînt toate legate de formulele și schemele care au făcut obiectul acestui paragraf.

\* 1°. O urnă conține  $n$  bile numerotate  $1, 2, \dots, n$ . Se extrag la întâmplare una câte una, toate aceste bile. Spunem că la extragerea  $k$ -s-a produs o concordanță dacă în urma acestei extrageri se obține bila cu numărul  $k$ . Care este probabilitatea obținerii a cel puțin unei concordanțe?

**Rezolvare.** Notăm  $A_i$  evenimentul obținerii unei concordanțe la extragerea  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Din cele  $n!$  moduri în care ar putea ieși cele  $n$  bile ( $n-1$ )! sînt favorabile evenimentului  $A_i$ . (Într-adevăr, celelalte  $n-1$  bile:  $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$  pot ieși într-o ordine arbitrară.) Deci

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

(Sau alt mod de a raționa: la extragerea  $i$  poate apare în egală măsură oricare din cele  $n$  bile  $1, 2, \dots, n$ ; dintre aceste  $n$  cazuri posibile unul singur este favorabil lui  $A_i$ .)

Dacă fixăm doi indici oarecare  $i, j$ ;  $1 \leq i < j \leq n$  atunci din cele  $n!$  cazuri posibile  $(n-2)!$  cazuri sînt favorabile evenimentului  $A_i \cap A_j$  (deoarece într-un caz favorabil  $(n-2)$  bile pot ieși într-o ordine oarecare)

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

(Sau: la extragerile  $i$  și  $j$  se poate obține orice pereche ordonată de numere; numărul acestor perechi este  $A_n^2 = n(n-1)$  și dintre acestea una singură reprezintă un caz favorabil pentru  $A_i \cap A_j$ .)

În general, dacă  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Evenimentul  $A$  „apariția unei concordanțe” se poate scrie

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

Reamintim formula ( $P'_{10}$ ):

$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i \cap A_j) + \sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

În cazul nostru prima sumă are  $n$  termeni fiecare egal cu  $\frac{(n-1)!}{n!}$  a doua sumă are  $C_n^2$  termeni fiecare egal cu  $\frac{(n-2)!}{n!}$ , a treia sumă are  $C_n^3$  termeni fiecare egal cu  $\frac{(n-3)!}{n!}$ , etc. Rezultă

$$P(A) = C_n^1 \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \cdot \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^{n+1} C_n^n \cdot \frac{1}{n!}.$$

Dar:

$$C_n^k \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$$

și în sfîrșit.

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}.$$

Probabilitatea de a nu avea nici o concordanță este

$$P(A) = 1 - P(A) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Observație. Se știe că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Pentru  $x = -1$

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!}$$

Seria de mai sus converge foarte rapid. Probabilitățile calculate în problemă sînt foarte apropiate pentru diferite valori ale lui  $n > 4$ . Astfel, dacă numărul bilelor este mai mare ca 8 atunci primele șase zecimale ale probabilității rămîn neschimbate oricare ar fi acest număr.

Enunțul problemei poate fi găsit în multe variante. Forma inițială a fost dată de Montfort într-un tratat asupra analizei jocurilor de noroc publicat în 1708.

2°. Două persoane aruncă succesiv o monedă ale cărei fețe le numim  $a$  și  $b$ . Jocul este câștigat de acela care obține primul, la aruncarea lui fața  $a$ . Să se calculeze probabilitatea de câștig pentru fiecare din cei doi jucători, știind că pentru fiecare jucător probabilitatea de a obține fața  $a$  dintr-o aruncare este  $\frac{1}{2}$ .

Rezolvare. Prima metodă. Notăm cu  $p$  probabilitatea de câștig a celui care aruncă primul și cu  $q$  probabilitatea de câștig a celui alt. Întrucît evenimentele „primul jucător câștigă”, „al doilea jucător câștigă” sînt evenimente contrare

$$p + q = 1$$

Considerăm evenimentele:

$A$  : primul jucător câștigă jocul,

$A_1$  : primul jucător obține fața  $a$  la prima aruncare.

Evenimentele  $A_1, \bar{A}_1$  formează un sistem complet de evenimente și  $P(A_1) = P(\bar{A}_1) = \frac{1}{2}$ . De asemenea

$$P(A/A_1) = 1; P(A/\bar{A}_1) = q.$$

Justificările acestor două egalități sînt imediate: dacă la prima aruncare apare fața  $a$  jocul se încheie cu victoria primului jucător; dacă la prima aruncare a sa primul jucător obține fața  $b$ , el trece în situația celui care aruncă al doilea. Aplicînd formula probabilității totale rezultă

$$p = P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(\bar{A}_1)P(A/\bar{A}_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q.$$

Din ecuațiile

$$p + q = 1; p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q$$

rezultă  $p = \frac{2}{3}; q = \frac{1}{3}$ .

*Meloda a doua.* Pe ansamblul aruncărilor celor doi jucători, primului jucător îi revin aruncările de ordin impar. Deci problema se poate pune și altfel. Se aruncă moneda pînă la apariția feței  $a$ . Care este probabilitatea ca numărul aruncărilor să fie impar?

Pentru a se realiza evenimentul „numărul aruncărilor este impar” trebuie să avem una din succesiunile care mai jos sînt notate  $A_1, A_2, \dots$

$a; \quad bba; \quad bbbba; \dots$

$A_1 \quad A_2 \quad A_3$

(Iată un exemplu de situație în care sîntem nevoiți să lucrăm cu o infinitate de evenimente). Evenimentele  $A_2, A_3, A_4, \dots$  sînt la rîndul intersecției de trei, cinci, șapte, ... evenimente independente și de probabilitate  $\frac{1}{2}$  fiecare.

Deci:

$$P(A_1) = \frac{1}{2}; \quad P(A_2) = \frac{1}{2^3}; \quad P(A_3) = \frac{1}{2^5}; \dots$$

Probabilitatea cerută (probabilitatea de cîștig a primului jucător) este

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{2}{3}$$

3°. Trei jucători  $A, B, C$  joacă un joc în următoarele condiții. Mai întîi joacă  $A$  cu  $B$  și  $C$  stă; apoi joacă  $C$  cu învingătorul și învinsul stă, ș.a.m.d. după fiecare partidă învinsul este înlocuit. Este declarat învingător acel jucător care cîștigă două partide consecutiv. Să se calculeze probabilitatea de cîștig pentru fiecare jucător.

*Rezolvare.* Mai întîi menționăm că acest sistem de joc este destul de des întîlnit (mai ales printre șahiști). Dacă sînt trei amatori să participe la un joc de două persoane se procedează ca mai sus, pentru ca nimeni să nu fie exclus. În problema noastră nu se specifică natura jocului. Dacă ar fi vorba de șah lucrurile s-ar complica prin introducerea posibilității de remiză și prin ușorul avantaj pe care l-ar avea cel care mută primul. În problema noastră vom subînțelege că fiecare partidă dă un învingător și că șansele sînt egale în fiecare partidă. Pentru că natura jocului nu interesează putem presupune că fiecare partidă constă în aruncarea unei monede, stabilindu-se în prealabil fața cîștigătoare pentru fiecare din cei doi jucători care-și dispută punctul în acea aruncare.

Vom nota rezultatul fiecărei partide cu notații de genul  $A(B), B(C), B(A)$  etc. prima din acestea de exemplu însemnînd  $A$  cîștigă la  $B$ . Dacă scriem  $A(B) C(A) B(C)$  vom înțelege că în primele trei partide  $A$  cîștigă la  $B$ , apoi  $C$  cîștigă la  $A$ , apoi  $B$  cîștigă la  $C$ . În fiecare paranteză este trecut învinsul, iar în fața parantezei învingătorul. Oricare din evenimentele  $A(B), B(A), A(C), C(A), B(C), C(B)$  are probabilitatea  $1/2$ . Un eveniment de forma  $A(B) C(A) B(C) \dots$  este intersecție de evenimente independente de probabilitate  $1/2$ .

Să introducem evenimentele:

$D$ : jucătorul  $A$  cîștigă jocul,

$E$ : jucătorul  $A$  cîștigă prima partidă.  $P(E) = \frac{1}{2}$ .

Conform formulei probabilității totale:

$$P(D) = P(E) P(D|E) + P(\bar{E}) P(D|\bar{E}) = \frac{1}{2} [P(D|E) + P(D|\bar{E})].$$

Probabilitatea ca jucătorul  $A$  să câștige jocul după ce a câștigat primul punct ( $P(D|E)$ ) este probabilitatea reuniunii succesiunilor următoare (începând cu a doua partidă).

$$A(C), C(A) B(C) A(B) A(C), C(A) B(C) A(B) C(A) B(C) A(B) A(C), \dots$$

Această probabilitate este

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \dots = \frac{4}{7}$$

Probabilitatea ca  $A$  să câștige jocul după ce a pierdut primul punct ( $P(D|\bar{E})$ ) este probabilitatea reuniunii succesiunilor incompatibile (începând cu a doua partidă):

$$C(B) A(C) A(B), C(B) A(C) B(A) C(B) A(C) A(B), C(B) A(C) B(A) C(B) A(C) B(A) C(B) A(C) A(B), \dots$$

Rezultă

$$P(D|\bar{E}) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \dots = \frac{1}{7}$$

În sfârșit:

$$P(D) = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{7} + \frac{1}{7} \right) = \frac{5}{14}$$

Deoarece  $A$  și  $B$  care încep jocul au șanse egale probabilitatea de câștig pentru  $B$  este tot  $\frac{5}{14}$  și deci probabilitatea ca jocul să fie câștigat de  $C$  este  $\frac{4}{17}$ .

*Observație.* Dacă se trage la sorți perechea care începe jocul și șansele de a începe sunt egale pentru toți, atunci datorită simetriei probabilitatea de câștig ar fi  $1/3$  pentru fiecare jucător.

4°. Trei trăgători trag câte un foc asupra unei ținte. Probabilitatea de succes pentru fiecare din cei trei trăgători este respectiv  $p_1, p_2, p_3$ . După trageri s-a constatat că ținta a fost alinsă o singură dată. Care este probabilitatea ca ea să fi fost alinsă de primul trăgător?

*Rezolvare.* Introducem notațiile:

$A_i$ : trăgătorul  $i$  nimerește ținta;  $i = 1, 2, 3$

$B$ : un singur trăgător nimerește ținta.

În primul rând să observăm că

$$A_1 \cap B = A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

și deoarece  $A_1, A_2, A_3$  sunt evenimente independente

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = P(A_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) = p_1(1 - p_2)(1 - p_3);$$

Pe de altă parte (v. schema lui Poisson)  $P(B)$  este egal cu coeficientul lui  $x$  din polinomul:

$$(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3); \quad q_i = 1 - p_i; \quad i = 1, 2, 3$$

$$P(B) = p_1q_2q_3 + p_2q_1q_3 + p_3q_1q_2$$

în problemă ni se cere  $P(A_1|B)$ . Avem:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{p_1q_2q_3}{p_1q_2q_3 + p_2q_1q_3 + p_3q_1q_2}$$

Probabilitatea ca succesul să fi fost realizat de al doilea și respectiv al treilea este

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{p_2 q_1 q_3}{p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2};$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{p_3 q_1 q_2}{p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2}.$$

★ 5°. Să se arate că dacă evenimentele  $A, B, C, D$  sînt independente, atunci și evenimentele  $A \cup B, C \cup D$ , sînt independente. De asemenea  $A, B, C \cup D$  sînt independente.

*Rezolvare.* Folosind distributivitatea intersecției față de reuniune obținem

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D).$$

Din formula ( $P'_{10}$ ) din 1.3 deducem acum.

$$\begin{aligned} P[(A \cup B) \cap (C \cup D)] &= P(A \cap C) + P(B \cap C) + P(A \cap D) + P(B \cap D) - \\ &- P(A \cap B \cap C) - P(A \cap C \cap D) + P(A \cap C \cap B \cap D) - P(B \cap C \cap D) - \\ &- P(A \cap B \cap D) = P(A)P(C) + P(B)P(C) + P(A)P(D) + P(B)P(D) - \\ &- P(A)P(B)P(C) - P(A)P(C)P(D) - P(B)P(C)P(D) - P(A)P(B)P(D) + \\ &+ P(A)P(B)P(C)P(D) = [P(A) + P(B) - P(A)P(B)][P(C) + P(D) - \\ &- P(C)P(D)] = P(A \cup B) \cdot P(C \cup D). \end{aligned}$$

$$\text{Altă cale. } \overline{(A \cup B) \cap (C \cup D)} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{C} \cap \bar{D})$$

$$\begin{aligned} P(\overline{(A \cup B) \cap (C \cup D)}) &= P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(\bar{C} \cap \bar{D}) - P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D}) = \\ &= P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(\bar{C} \cap \bar{D}) - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})P(\bar{D}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(\bar{C} \cap \bar{D}) - \\ &- P(\bar{A} \cap \bar{B})P(\bar{C} \cap \bar{D}) = 1 - (1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}))((1 - P(\bar{C} \cap \bar{D}))) = 1 - P(A \cup B) \\ &P(C \cup D) \end{aligned}$$

$$P[(A \cup B) \cap (C \cup D)] = P(A \cup B)P(C \cup D).$$

În mod asemănător se demonstrează partea a doua a propoziției.

*Observație.* Se pot face numeroase alte afirmații. De exemplu, dacă  $A, B, C, D, E$  sînt independente, atunci  $A \cup B, C \cap D$  sînt independente sau  $A - B, C, D$  sînt independente, sau  $(A \cap C) \cup B, \bar{D} \cup E$  sînt independente. Trecerea la un număr oarecare de evenimente este imediată. Concluzia care se desprinde este următoarea: dacă avem o familie de evenimente independente și dacă împărțim această familie în subfamilii disjuncte, atunci orice afirmație am face asupra evenimentelor unei subfamilii, aceasta nu modifică probabilitatea de verificare a oricăror afirmații făcute asupra evenimentelor celorlalte subfamilii.

★ 6°. Evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sînt independente și au probabilități cunoscută  $P(A_i) = p_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ . Să se calculeze probabilitatea ca din cele  $n$  evenimente să se realizeze un număr impar.

*Rezolvare. Prima metodă.* Fie  $B_k$  evenimentul a cărui realizare înseamnă realizarea a exact  $k$  din cele  $n$  evenimente. Evident,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  sînt evenimente incompatibile

două câte două și evenimentul  $A$  a cărui realizare înseamnă realizarea unui număr impar din evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n$  se scrie

$$A = B_1 \cup B_2 \cup \dots$$

unde reuniunea se face după toți indicii impari mai mici ca  $n$ .

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) + \dots$$

Dar  $P(B_k)$  este — conform schemei lui Poisson — coeficientul lui  $x^k$  din polinomul  $Q(x) = (p_1x + 1 - p_1)(p_2x + 1 - p_2) \dots (p_nx + 1 - p_n)$ .

Din cele spuse rezultă că  $P(A)$  este suma coeficienților puterilor impare din polinomul  $Q(x)$ .

Dacă  $T(x)$  este un polinom cu coeficienți numerici

$$T(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

atunci

$$T(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$T(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n$$

$$\frac{1}{2} [T(1) - T(-1)] = a_1 + a_3 + a_5 + \dots$$

În cazul nostru

$$P(A) = \frac{1}{2} [Q(1) - Q(-1)] = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2p_1)(1 - 2p_2) \dots (1 - 2p_n)].$$

*Metodă a doua.* Fie  $B_k$  evenimentul a cărei realizare înseamnă realizarea unui număr impar din primele  $k$  evenimente date și

$$P_k = P(B_k)$$

Să mai observăm că

$$B_1 = A_1; \quad k > 1 \Rightarrow B_k = (B_{k-1} \cap \bar{A}_k) \cup (\bar{B}_{k-1} \cap A_k) \quad (\text{verificați!})$$

$B_{k-1}$  se referă la primele  $k - 1$  evenimente\* deci este independent de  $A_k$

$$P(B_1) = P(A_1) = p_1$$

$$P(B_k) = P(B_{k-1} \cap \bar{A}_k) + P(\bar{B}_{k-1} \cap A_k) = P(B_{k-1})P(\bar{A}_k) + P(\bar{B}_{k-1})P(A_k). \quad (k \geq 2)$$

Să reținem regula de recurență

$$P_1 = p_1$$

$$P_k = P_{k-1}(1 - p_k) + (1 - P_{k-1})p_k. \quad (2 \leq k \leq n)$$

A doua relație se mai poate scrie

$$2P_k - 1 = (1 - 2p_k)(2P_{k-1} - 1), \quad k \geq 2. \quad (1.4.1)$$

Se vede că dacă  $p_k = \frac{1}{2}$ , atunci  $P_k = \frac{1}{2}$  și dacă  $n > k$ ,  $P_k = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{k+1} = \frac{1}{2}$

adică  $P_j = \frac{1}{2}$  pt.  $j \geq k$ . Aceasta înseamnă că dacă printre evenimentele  $A_1,$

\* Dacă luăm  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$  atunci operația  $\Delta$  este asociativă (exercițiul!) ceea ce ne permite să vorbim despre  $A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$  pentru orice  $n \geq 2$ . Să se arate că pentru orice evenimente  $C_1, C_2, \dots, C_m$  evenimentul  $C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_m$  se realizează dacă și numai dacă se realizează un număr impar din cele  $m$  evenimente date.

$A_2, \dots, A_n$  există unul de probabilitate  $1/2$ , atunci  $P_n = \frac{1}{2}$ . Reciproc, dacă există indici  $j$  pentru care  $P_j = \frac{1}{2}$ , atunci fie  $k$  primul indice cu această proprietate. Dacă  $k = 1$  atunci  $p_1 = P_1 = \frac{1}{2}$ , iar dacă  $k > 1$ , atunci  $P_{k-1} \neq \frac{1}{2}$ ,  $P_k = \frac{1}{2}$  și ținând cont de asta în (1.4.1) rezultă  $p_k = \frac{1}{2}$ .

Dacă  $p_k \neq \frac{1}{2}$   $k = 1, 2, \dots, n$  atunci dând lui  $k$  valorile  $2, 3, \dots, n$  în (1.4.1) și înmulțind relațiile obținute rezultă

$$2P_n - 1 = -(1 - 2p_1)(1 - 2p_2) \dots (1 - 2p_n)$$

$$P_n = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2p_1)(1 - 2p_2) \dots (1 - 2p_n)].$$

Se observă apoi că formula rămâne adevărată și dacă există  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$  astfel ca  $p_k = \frac{1}{2}$ .

\* 7°. (Ruina jucătorului) Jucătorul  $A$  dispune de  $a$  lei, iar jucătorul  $B$  de suma de  $b$  lei. Jocul constă într-un șir de partide. Cel care câștigă o partidă dă un leu partenerului. Jocul continuă pînă cînd unul din jucători pierde toți banii (se ruinează). Dacă în fiecare partidă șansele sînt egale care este probabilitatea ca  $A$  să ruineze pe  $B$ ?

*Rezolvare.* În orice moment al jocului suma totală de care dispun cei doi jucători este  $a + b$ . Fie  $P_n$  probabilitatea ca un jucător care dispune de  $n$  lei din cei  $a + b$  să-și ruineze adversarul. Observăm că

$$P_0 = 0, P_{a+b} = 1.$$

Putem scrie pentru orice  $n = 1, 2, \dots, a + b - 1$

$$P_n = \frac{1}{2} P_{n+1} + \frac{1}{2} P_{n-1}. \quad (1.4.2)$$

Într-adevăr, dacă ne fixăm atenția asupra unui singur jucător și acesta dispune de  $n$  lei și  $C$  este evenimentul ca el să-și ruineze adversarul, iar  $C_1$  este evenimentul ca în primul joc ce se va disputa să câștige un leu, atunci

$$P(C) = P(C_1)P(C|C_1) + P(\bar{C}_1)P(C|\bar{C}_1). \quad (1.4.3)$$

Dar

$$P(C_1) = P(\bar{C}_1) = \frac{1}{2}$$

iar pe de altă parte, dacă jucătorul nostru avînd  $n$  lei câștigă jocul ce urmează, el trece în situația unui jucător ce are  $n + 1$  lei din cei  $a + b$  și probabilitatea de a-și ruina adversarul devine

$$P(C|C_1) = P_{n+1}.$$

La fel

$$P(C|\bar{C}_1) = P_{n-1}.$$

Înlocuind în (1.4.3) obținem (1.4.2) care exprimă că numerele  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{a+b}$  formează o progresie aritmetică. Ținând cont că  $P_0 = 0, P_{a+b} = 1$  rezultă că rația acestei progresii este  $\frac{1}{a+b}$ . De aici rezultă că probabilitatea succesului final este

$$P_a = \frac{a}{a+b}$$

pentru jucătorul A și

$$P_b = \frac{b}{a+b}$$

pentru jucătorul B.

*Observație.* Dacă jocul nu este echitabil, adică șansele nu sînt egale în fiecare partidă, rezultatul are o formă mai complicată. Dacă cu notațiile introduse în rezolvarea problemei

$$P(C_1) = p; P(\bar{C}_1) = 1 - p = q$$

atunci (1.4.3) devine

$$P_n = pP_{n+1} + qP_{n-1}. \quad (1.4.4)$$

Aceasta este o ecuație cu diferențe finite de ordinul doi.

Ne vom mărgini aici strict la cazul care ne interesează. Vrem să găsim toate șirurile de numere reale  $(x_n)$  care satisfac condiția:

$$(*) \quad \alpha x_{n+1} + \beta x_n + \gamma x_{n-1} = 0; \quad \forall n > 1; \quad (\alpha, \beta, \gamma \in R - \{0\}) \quad \beta^2 > 4\alpha\gamma.$$

Mai întii vom observa că dacă  $(x_n)$  și  $(x'_n)$  sînt două șiruri îndeplinind condiția de mai sus, atunci și  $(\lambda_1 x_n + \lambda_2 x'_n)$  ( $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ ) este un astfel de șir.

Să considerăm acum ecuația de gradul doi

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

cu rădăcinile (reale și diferite — prin ipoteză)  $x_1, x_2$ .

Deoarece  $x_1$  este o rădăcină putem scrie

$$\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0.$$

Înmulțind această egalitate cu  $x_1^{n-1}$  ( $n > 1$ )

$$\alpha x_1^{n+1} + \beta x_1^n + \gamma x_1^{n-1} = 0$$

și deci dacă  $x_n = x_1^n$ , atunci  $(x_n)$  este unul din șirurile căutate. La fel, o altă soluție este șirul  $(x_2^n)_{n \geq 1}$ . Deci și șirul  $(x_n)$  dat de egalitatea

$$x_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n \quad (1.4.5)$$

unde  $\lambda_1, \lambda_2 \in R$  sînt arbitrari — constituie o soluție. Dar (1.4.5) constituie forma generală a soluției. Într-adevăr, se vede că dacă un șir satisface condiția (\*) atunci el este determinat de primii doi termeni ai săi. Dacă  $(a_n)$  este o soluție și găsim un șir  $(x_n)$  de forma (1.4.5) unde

$$x_1 = a_1; \quad x_2 = a_2$$

atunci cele două șiruri coincid, adică  $(a_n)$  este de forma (1.4.5). Dar sistemul (în care necunoscutele sînt  $\lambda_1, \lambda_2$ )

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = a_1 \quad (x_1 = a_1)$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = a_2 \quad (x_2 = a_2)$$

este totdeauna compatibil.

Revenind la problema noastră din (1.4.4) vom deduce

$$P_n = \lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

(Ecuatia  $px^2 - x + q = 0$  are rădăcinile  $x_1 = 1$  și  $x_2 = \frac{q}{p}$ ). Ținînd cont de „condițiile inițiale“  $P_0 = 0, P_{a+b} = 1$  rezultă

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}; \quad \lambda_2 = \frac{-1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

și deci probabilitatea de succes final pentru jucătorul A este

$$P_a = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

8°. Un fir rigid (un segment dat) este frînt în două puncte alese la întîmplare. Care este probabilitatea ca, cu cele trei segmente obținute să se poată forma un triunghi ?

*Rezolvare.* 8°a. Să presupunem că segmentul dat este de lungimea 1 (sau mai bine zis ne luăm unitatea de măsură egală cu lungimea segmentului dat). Alegerea celor două puncte la întîmplare va fi deci echivalentă cu alegerea, pe rînd, a două puncte din intervalul  $(0, 1)$  printr-un procedeu de alegere „uniformă“ și independent unul de celălalt. Să presupunem că firul nostru este  $AB$ , iar  $M$  și  $N$  sînt cele două puncte. Pentru a se putea distinge între ele să presupunem că ele se aleg pe rînd: alegem mai întîi un punct pe care îl notăm cu  $M$  și apoi, independent de rezultatul obținut, pe al doilea pe care îl notăm cu  $N$ . După alegerea celor

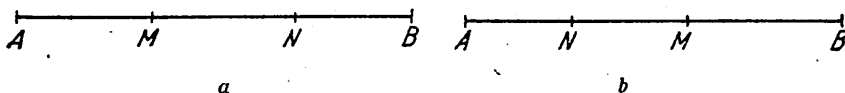


Fig. 1.8

doi puncte ne aflăm într-una din situațiile descrise în figurile 1.8, a și 1.8, b. Notăm distanțele

$$AM = x; AN = y.$$

Alegerea celor două numere  $x$  și  $y$  uniform și independent unul de altul în intervalul  $(0, 1)$  este echivalentă cu alegerea „uniformă” a unui punct  $(x, y)$  din pătratul  $(0, 1) \times (0, 1)$  (fig. 1.8, c).

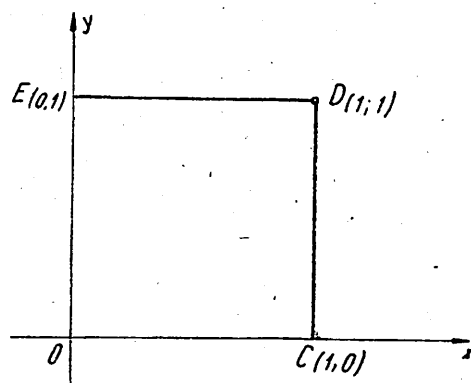


Fig. 1.8 c

Cu alte cuvinte mulțimea cazurilor favorabile este reprezentată de mulțimea punctelor interioare pătratului  $OCDE$ . Să vedem care este mulțimea de puncte corespunzătoare cazurilor favorabile.

Este evident că pentru a putea construi un triunghi cu cele trei segmente, fiecare dintre ele trebuie să fie mai mic decât  $1/2$ :

$$\min(x, y) < \frac{1}{2}; \quad |x - y| < \frac{1}{2}; \quad 1 - \max(x, y) < \frac{1}{2}. \quad (1.4.6)$$

Să vedem care este mulțimea punctelor  $(x, y)$  din pătratul  $OCDE$  care satisfac aceste condiții. Să căutăm mai întâi printre punctele pentru care  $y \geq x$  (fig. 1.8, d)

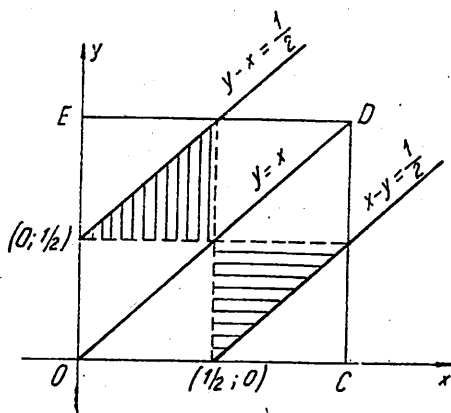


Fig. 1.8 d

adică printre punctele situate deasupra primei bisectoare a axelor. În acest caz inegalitățile (1.4.6) devin

$$x \leq \frac{1}{2}; \quad y - x < \frac{1}{2}; \quad y > \frac{1}{2}.$$

Se găsește imediat porțiunea hașurată vertical în figura 1.4, d. Dacă  $x > y$ , atunci relațiile (1.4.6) devin

$$y < \frac{1}{2}; \quad x - y < \frac{1}{2}; \quad x > \frac{1}{2}.$$

Probabilitatea căutăată este egală cu raportul dintre aria porțiunii hașurate (orizontal sau vertical) și aria întregului pătrat, adică  $1/4$ .

8°b. Lungimile celor trei segmente sînt trei numere pozitive a căror sumă este 1. Cunoașterea a trei astfel de numere este echivalentă cu cunoașterea a două din ele. Să presupunem că alegem „uniform” perechea de numere  $(x, y)$  reprezentînd lungimile a două segmente — să zicem cel mai din stînga și respectiv cel mai din dreapta. Mai precis, alegem o pereche de numere la întîmplare din mulțimea perechilor de numere reale, pozitive și de sumă  $< 1$ . Mulțimea cazurilor posibile este reprezentată de mulțimea punctelor din interiorul triunghiului  $OCD$  (fig. 1.8, e).

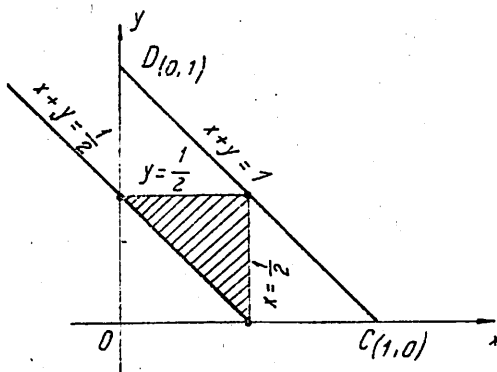


Fig. 1.8 e

Pentru ca un punct  $(x, y)$  să fie caz favorabil trebuie să avem

$$x < \frac{1}{2}; \quad y < \frac{1}{2}; \quad x + y > \frac{1}{2}$$

condiții care exprimă că toate cele trei segmente sînt mai mici ca  $1/2$ .

Mulțimea cazurilor favorabile este reprezentată de mulțimea punctelor interioare triunghiului median (hașurat în fig. 1.8, e) al triunghiului  $OCD$ .

Raportul ariilor celor două triunghiuri este  $1/4$ .

*Observație.* 8°b reprezintă de fapt o metodă de rezolvare a problemei 8°, în care — așa cum am arătat în 8°a — se alege la întîmplare punctele de frîngere și nu lungimile segmentelor. Dacă frîngerea se face prin procedeul de la 8°a, adică alegînd la întîmplare (uniform) punctele  $u$  și  $v$  din intervalul  $(0, 1)$  respectiv, alegînd la întîmplare punctul  $(u, v)$  din pătratul  $OCDE$  din (fig. 1.8, c) și dacă  $x$  și  $y$  au semnificația de la 8°b atunci

$$x = \min(u, v); \quad y = 1 - \max(u, v).$$

Și poate că nu este prea evident că alegerea uniformă și independentă a punctelor  $u$  și  $v$  în intervalul  $(0, 1)$  este echivalentă cu alegerea uniformă a punctului  $(x, y)$  în interiorul triunghiului  $OCD$  din figura 1.8, e.

Cititorul poate încerca să verifice singur această echivalență (eventual, după ce va fi parcurs întregul capitol 1).

3<sup>c</sup>. Să presupunem din nou că alegem la întâmplare unghiurile celor trei segmente luate într-o anumită ordine. Fie  $x, y, z$  aceste lungimi.

Mulțimea cazurilor posibile este mulțimea tripletelor ordonate de numere reale pozitive  $(x, y, z)$  pentru care  $x + y + z = 1$ . Aceasta este reprezentată de mulțimea punctelor interioare triunghiului  $CDE$  din figura 1.8. f. Pentru ca un punct  $(x, y, z)$  să reprezinte un caz favorabil, coordonatele sale trebuie să verifice relațiile

$$\begin{aligned} x + y &> z, \\ y + z &> x, \\ z + x &> y. \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

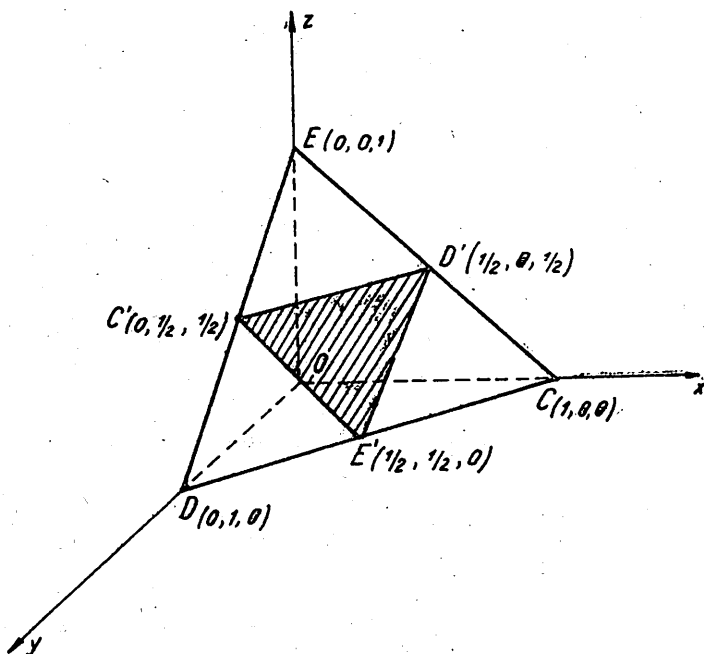


Fig. 1.8 f

Planul  $x + y = z$  trece prin punctele  $O, C', D'$ , iar coordonatele punctului  $E'$  (de exemplu) verifică prima relație (1.4.7). Rezultă că această inegalitate este verificată de toate punctele interioare trapezului  $C'D'CD$ . La fel rezultă că a doua inegalitate (1.4.7) este verificată de toate punctele interioare trapezului  $D'E'DE$ , iar ultima din aceste inegalități este îndeplinită în interiorul trapezului  $C'E'CE$ . Intersecția acestor trei trapeze este triunghiul  $C'D'E'$ . Mulțimea cazurilor favorabile este reprezentată de mulțimea punctelor din interiorul acestui triunghi. Raportul arilor triunghiurilor  $C'D'E'$  și  $CDE$  — și deci probabilitatea noastră — este  $1/4$ .

3<sup>d</sup>. Problema poate fi tratată în plan dacă ne folosim de o proprietate geometrică simplă a triunghiului echilateral :

Suma distanțelor de la un punct variabil în interiorul unui triunghi echilateral dat la laturile acestui triunghi este constantă și anume este egală cu înălțimea triunghiului.

Într-adevăr, dacă  $AB = BC = CA = a$ , iar  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  este înălțimea triunghiului  $ABC$  rezultă — scriind aria acestui triunghi ca suma ariilor

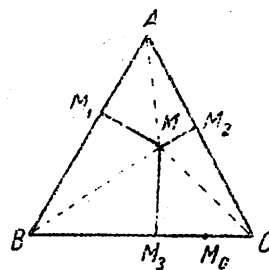


Fig. 1.8 g

triunghiurilor  $AMB_1$ ,  $BMC_2$ ,  $CMA_3$ :

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}aMM_1 + \frac{1}{2}aMM_2 + \frac{1}{2}aMM_3,$$

$$MM_1 + MM_2 + MM_3 = h.$$

În particular, dacă  $M_0$  se află pe o latură oarecare a triunghiului suma distanțelor de la el la celelalte două laturi este de asemenea  $h$ .

Revenind la problema noastră, vom lua un triunghi echilateral  $CDE$  de înălțime egală cu unitatea. Fie  $x, y, z$ , distanțele unui punct  $M$  interior

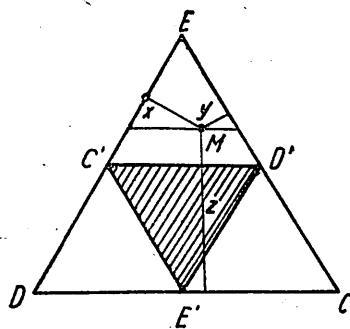


Fig. 1.8 h

triunghiului respectiv la laturile  $DE, EC, CD$ . Este evident că punctul  $M$  și tripletul  $(x, y, z)$  ( $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ ) se determină reciproc.

Putem ale ge la întimplare un astfel de triplet, alegînd la întimplare un punct din triunghiul echilateral  $CDE$ . Mulțimea acestor puncte va reprezenta mulțimea cazurilor posibile.

Pentru ca cu  $x, y, z$  să putem forma un triunghi trebuie să fie verificate inegalitățile (1.4.7) echivalente cu

$$x < \frac{1}{2}, \quad y < \frac{1}{2}, \quad z < \frac{1}{2}.$$

Se observă că  $z < \frac{1}{2}$  dacă  $M$  este interior trapezului  $C'D'CD$ . Făcând observații analoge pentru celelalte două inegalități va rezulta că mulțimea cazurilor favorabile este reprezentată de mulțimea punctelor din interiorul triunghiului  $C'D'E'$ .

9°. (*Problema lui Banach*). *Un fumător cumpără două cutii de chibrituri, fiecare conținând  $n$  bețe. Apoi, de fiecare dată când are nevoie de chibrit scoate la întâmplare o cutie din care consumă un băț. Care este probabilitatea ca în momentul în care constată că o cutie este goală cealaltă să mai conțină  $k$  bețe?*

Pe baza rezultatului obținut să se arate că

$$C_{2n}^n + 2 C_{2n-1}^n + 2^2 C_{2n-2}^n + \dots + 2^n C_n^n = 2^{2n}.$$

*Rezolvare.* Constatarea că o cutie este goală se face atunci când ea este scoasă din buzunar a  $(n+1) - a$  oară. Dacă în acest moment cea de a doua cutie mai are  $k$  bețe, înseamnă că ea a fost scoasă de  $n - k$  ori.

În total, cutiile au fost scoase din buzunar de  $(2n - k + 1)$  ori. Se vede că problema poate fi enunțată în felul următor:

O urnă conține o bilă albă și una neagră. Se extrage din urnă o bilă punându-se bila înapoi în urnă și se repetă experiența pînă când una din bile (oarecare) apare a  $(n+1) - a$  oară. Care este probabilitatea ca la sfîrșit cealaltă să fi ieșit de  $(n - k)$  ori?

Să introducem evenimentele:

$A$ : în  $(2n - k)$  trageri bila albă apare de  $n$  ori iar bila neagră de  $(n - k)$  ori;

$B$ : în  $(2n - k)$  extrageri bila neagră apare de  $n$  ori iar bila albă de  $(n - k)$  ori;

$C$ : în a  $(2n - k + 1) - a$  extragere apare bila albă.

Din motive de simetrie este evident că  $P(A) = P(B)$ .

Evenimentul „în momentul când una din bile a ieșit a  $(n+1) - a$  oară cealaltă a ieșit de  $(n - k)$  ori“ se scrie

$$(A \cap C) \cup (B \cap \bar{C})$$

din care cauză probabilitatea căutată este

$$P(A \cap C) + P(B \cap \bar{C}) = P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(\bar{C}) = \frac{1}{2} P(A) + \frac{1}{2} P(B) = P(A).$$

Se vede că pentru calcularea lui  $P(A)$  putem aplica schema lui Bernoulli deoarece avem o experiență (extragerea unei bile din urnă) care se efectuează de  $(2n - k)$  ori și se cere ca probabilitatea unui eveniment legat de această experiență (aparitia bilei albe) să se producă exact de  $n$  ori; probabilitatea acestui eveniment este

$$p = \frac{1}{2} \text{ și deci } q = 1 - p = \frac{1}{2}. \text{ Rezultă}$$

$$P(A) = C_{2n-k}^n p^n q^{n-k} = C_{2n-k}^n \frac{1}{2^{2n-k}}.$$

Dacă notăm

$A_k$ : „cînd se constată că una din cutii este goală cealaltă cutie mai conține  $k$  bețe“ atunci putem spune că evenimentele  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  formează un sistem complet de evenimente și deci suma probabilităților lor este egală cu unitatea:

$$C_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}} + C_{2n-1}^n \frac{1}{2^{2n-1}} + C_{2n-2}^n \frac{1}{2^{2n-2}} + \dots + C_n^n \frac{1}{2^n} = 1$$

adică

$$C_{2^n}^n + 2C_{2^n-1}^n + 2^2C_{2^n-2}^n + \dots + 2^n C_n^n = 2^{2^n}$$

10°. Se aruncă o monedă de  $n$  ori. Să se arate că probabilitatea ca numărul de apariții ale „stemei“ să fie multiplu de trei este  $\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \cos \frac{n\pi}{3} \right)$ .

*Rezolvare.* Să notăm cu  $A_k$  evenimentul „stema apare de  $k$  ori“ legat de experiența care constă în  $n$  aruncări ale banului. Evident, evenimentele  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  formează un sistem complet de evenimente.

Probabilitatea evenimentului  $A_k$  se calculează pe baza schemei binomiale ( $p = \frac{1}{2}$ ) și este

$$P(A_k) = C_n^k \left( \frac{1}{2} \right)^n \left( \frac{1}{2} \right)^{n-k} = \frac{1}{2^n} C_n^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Evenimentul „numărul de apariții ale stemei este divizibil cu trei“ se scrie

$$A_0 \cup A_3 \cup A_6 \cup \dots$$

reuniunea făcîndu-se după toți indicii multipli de 3. Probabilitatea acestui eveniment este

$$\begin{aligned} P(A_0) + P(A_3) + P(A_6) + \dots &= \frac{1}{2^n} (C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{3} \left( 2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2^{n-1}} \cos \frac{n\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

Am folosit aici egalitatea

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3} \left( 2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right).$$

Pentru a o demonstra notăm  $\alpha = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$  și observăm că

$$\alpha^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \alpha^3 = 1. \text{ Avem:}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n;$$

$$C_n^0 + C_n^1 \alpha + C_n^2 \alpha^2 + C_n^3 + \dots = (1 + \alpha)^n;$$

$$C_n^0 + C_n^1 \alpha^2 + C_n^2 \alpha + C_n^3 + \dots = (1 + \alpha^2)^n.$$

Adunînd aceste trei egalități obținem

$$3(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots) = 2^n + (1 + \alpha)^n + (1 + \alpha^2)^n \quad (1.4.8)$$

Pe de altă parte

$$1 + \alpha = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}; \quad 1 + \alpha^2 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$$

și deci

$$(1 + \alpha)^n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}; \quad (1 + \alpha^2)^n = \cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3}$$

Revenind acum la (1.4.8) rezultă

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3} \left( 2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right).$$

11°. Într-o urnă se găsesc trei cartonașe identice ca formă, dimensiuni și greutate. Unul din ele are ambele fețe roșii, al doilea are o față roșie și una albă, iar al treilea are ambele fețe albe. Se extrage la întâmplare un cartonaș din această urnă și se așază pe masă. Dacă fața de deasupra este roșie care este probabilitatea ca fața pe care este așezat cartonașul să fie albă?

**Rezolvare.** Este posibil ca unele persoane să fie induse în eroare de simetria existentă în urnă și să răspundă instantaneu că probabilitatea cerută este  $1/2$ .

Pentru rezolvarea problemei să presupunem că cele șase fețe ale cartonașelor sînt numerotate astfel:

primul cartonaș are fețele 1 și 2 (ambele roșii),

al doilea cartonaș are fețele 3 (roșie) și 4 (albă),

al treilea cartonaș are fețele 5 și 6 (ambele albe).

Dacă fața superioară a cartonașului extras este roșie atunci avem trei cazuri (egal) posibile: această față poate fi în egală măsură oricare din fețele 1, 2, 3.

Dintre aceste trei cazuri unul singur este favorabil (adică face ca fața pe care este așezat cartonașul să fie albă) și anume cazul cînd deasupra este fața 3. Deci probabilitatea cerută este  $1/3$ .

Se observă că acest rezultat a fost obținut fără a se face vreo legătură cu simetria dintre roșu și alb din urnă. Raționamentul și rezultatul ar fi rămas neschimbate dacă al treilea cartonaș ar fi lipsit sau — dimpotrivă — dacă s-ar mai fi introdus un număr oarecare de cartonașe fără nici o față roșie.

În sfîrșit, mai menționăm că putem rezolva problema observînd că ni se cere o probabilitate condiționată. Fie

$A$ : cartonașul extras este așezat pe o față albă,

$B$ : fața de deasupra a cartonașului extras este roșie.

Experiența are șase cazuri egal posibile: cartonașul poate fi așezat pe oricare din cele șase fețe. Evenimentul  $B$  are trei cazuri favorabile (cazuri în care cartonașul extras este așezat pe fața 1 sau pe fața 2 sau pe fața 4):

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Să mai observăm că evenimentul  $A \cap B$  este evenimentul „cartonașul extras este așezat pe fața 4“:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Nouă ne este cerută probabilitatea ca acest cartonaș să fie așezat pe o față albă sînd că fața de deasupra este roșie ( $P(A/B)$ ).

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

12° Într-o urnă sînt bile de  $k$  culori:  $a_1$  bile de culoarea  $c_1$ ,  $a_2$  bile de culoarea  $c_2$ , ...,  $a_k$  bile de culoarea  $c_k$ . Se extrag bilele una cîte una pînă la golirea urnei. Care este probabilitatea ca să dispară culorile complet din urnă în ordinea  $c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1$ ?

Folosind rezultatul obținut să se arate că

$$\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} \frac{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{k-1}}}{(a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k})(a_{i_2} + a_{i_3} + \dots + a_{i_k}) \dots (a_{i_{k-1}} + a_{i_k})} = \sum_{i=1}^k a_i \quad (1.4.9)$$

unde suma din membrul stîng se face după toate permutările indicilor  $1, 2, \dots, k$ . Folosind rezultatul obținut în cazul particular cînd în urnă sînt trei culori să se arate că

$$1 + \frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{m(m-1)} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots 2 \cdot 1}{m(m-1)(m-2)\dots(m-\alpha+1)} = \\ = \frac{m+1}{m-\alpha+1}$$

pentru  $\alpha, m$  numere naturale  $\alpha \leq m$ .

*Rezolvare.* Remarcăm mai întîi că problema noastră este echivalentă cu o altă problemă.

Să considerăm aceeași urnă și aceeași experiență. Probabilitatea ca să fie epuizate culorile în ordinea  $c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1$  este egală cu probabilitatea ca să apară culorile din urnă în ordinea  $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}, c_k$ .

Este ușor de văzut că cele două evenimente au același număr de cazuri favorabile din cele  $n!$  egal posibile ( $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ ). Pentru aceasta este suficient să observăm că dacă extragerea bilelor într-o anumită ordine constituie un caz favorabil pentru unul din cele două evenimente, atunci extragerea bilelor în ordine inversă constituie un caz favorabil pentru celălalt eveniment.

Să rezolvăm problema sub cea de a doua formă, adică vom calcula probabilitatea ca prima bilă extrasă să fie de culoarea  $c_1$ , apoi prima bilă de culoare diferită de  $c_1$  să fie de culoare  $c_2$  ș.a.m.d. Pe scurt, se cere probabilitatea ca pentru orice  $i < j$  prima bilă de culoare  $c_i$  să apară înaintea primei bile de culoare  $c_j$ .

Probabilitatea acestui eveniment este aceeași în cazul cînd în urnă sînt numai cele  $n$  bile de  $k$  culori și în cazul cînd în afara acestora mai sînt alte bile de culori diferite de  $c_1, c_2, \dots, c_k$ . Această afirmație este destul de intuitivă, căci ne dăm seama că dacă ne interesează numai succesiunea culorilor  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , putem ignora extragerile în care apar bile de alte culori. Să ne convingem totuși printr-un raționament de valabilitatea afirmației (în care eventual ne putem imagina că toate bilele care intervin sînt numerotate diferit pentru a putea distinge între bilele de aceeași culoare).

Să considerăm o urnă care conține cele  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$  bile și o altă urnă care conține  $n + a_0$  bile dintre care  $a_0$  de culoarea  $c_0$  diferită de  $c_1, c_2, \dots, c_k$  iar în rest are aceeași compoziție cu prima urnă. Dacă scoatem bilele una cîte una din prima urnă și le așezăm în linie dreaptă în ordinea extragerii



și dacă în cele  $(n+1)$  spații dintre ele introducem într-un mod oarecare  $a_0$  bile de culoarea  $c_0$ , obținem un caz posibil al experienței constînd în extragerea succesivă a bilelor din a doua urnă. Dacă cele  $a_0$  bile pot fi repartizate în  $m$  moduri

diferite\* în cele  $(n + 1)$  spații înseamnă că putem asocia fiecărui caz posibil al primei experiențe  $m$  cazuri posibile diferite ale celei de a doua (epuizându-le și pe acestea din urmă). Deci numărul cazurilor posibile este de  $m$  ori mai mare la a doua experiență.

Dacă o succesiune de bile reprezintă un caz favorabil evenimentului legat de prima experiență „cunorile apar în ordinea  $c_1, c_2, \dots, c_k$ “, atunci introducând în oricare mod cele  $a_0$  bile printre cele  $n$  vom obține un caz favorabil evenimentului „culorile  $c_1, c_2, \dots, c_k$  apar în această ordine“ legat de cea de a doua experiență. Deci în a doua situație evenimentul considerat are de asemenea de  $m$  ori mai multe cazuri favorabile ca evenimentul considerat legat de prima experiență.

Întrucât atât numărul cazurilor posibile cât și numărul cazurilor favorabile crește de  $m$  ori prin introducerea celor  $a_0$  bile, probabilitatea evenimentului nu se schimbă. Pentru  $k = 2$ , adică dacă în urnă sînt bile numai de două culori:  $a_1$  bile de culoarea  $c_1$  și  $a_2$  bile de culoarea  $c_2$ , atunci evenimentul „culoarea  $c_1$  apare înaintea culorii  $c_2$ “ se exprimă simplu „prima bilă extrasă este de culoarea  $c_1$ “ și probabilitatea noastră este

$$p_2(a_1, a_2) = \frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

Pentru  $k = 3$ , considerăm evenimentele

$A_1$ : prima bilă extrasă este de culoare  $c_1$ ,

$A$ : culoarea  $c_2$  apare înaintea culorii  $c_3$ .

Cu aceste notații putem scrie

$$\begin{aligned} p_3(a_1, a_2, a_3) &= P(A_1 \cap A) = P(A_1) \cdot P(A/A_1) = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} \cdot \frac{a_2}{a_2 + a_3} = \\ &= \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2 + a_3)(a_2 + a_3)}. \end{aligned}$$

(De fapt, din cele spuse mai sus este clar că evenimentele  $A_1, A$  sînt independente, respectiv  $P(A/A_1) = P(A)$ . Într-adevăr, dacă prima bilă este de culoare  $c_1$ , atunci singura modificare în urnă va fi că vom avea  $(a_1 - 1)$  bile de culoare  $c_1$ , dar numărul bilelor de această culoare nu influențează probabilitatea lui  $A$ ).

Raționînd la fel, pentru  $k = 4$  rezultă

$$p_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{a_1 a_2 a_3}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_2 + a_3 + a_4)(a_3 + a_4)}.$$

Astfel, ne este sugerat rezultatul general:

$$p_k(a_1, a_2, \dots, a_k) = \frac{a_1 a_2 \dots a_{k-1}}{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)(a_2 + a_3 + \dots + a_k)(a_{k-1} + a_k)}. \quad (1.4.10)$$

Să demonstrăm această afirmație prin inducție. Dacă ea este adevărată în cazul a  $k$  culori, atunci rămîne adevărată în cazul a  $(k + 1)$  culori. Într-adevăr, dacă în urnă sînt  $a_i$  bile de culoarea  $c_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, k$  și

$A_0$ : prima bilă extrasă este de culoare  $c_0$ ,

\* În raționamentul nostru nu are importanță cunoașterea valorii lui  $m$ , care dealtfel este aproape evident egal cu  $(n + 1)(n + 2) \dots (n + a_0)$ .

$A$  : culorile  $c_1, c_2, \dots, c_k$  apar în această ordine atunci

$$P_{k+1}(a_0, a_1, a_2, \dots, a_k) = P(A_0 \cap A) = P(A_0) \cdot P(A) = \frac{a_0}{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k} \cdot \frac{a_1 a_2 \dots a_{k-1}}{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)(a_2 + \dots + a_k) \dots (a_{k-1} + a_k)}$$

ceea ce încheie demonstrarea variabilității relației (1.4.10) pentru orice  $k$ .

Relația (1.4.9) rezultă scriind că suma probabilităților corespunzătoare celor  $k!$  moduri de ordonare a culorilor este 1.

Să demonstrăm ultima egalitate din enunțul problemei. Pentru aceasta să presupunem că în urnă sînt  $a$  bile albe,  $b$  bile negre și  $c$  bile roșii. Se scoț toate bilele una câte una. Probabilitatea ca să apară culorile din urnă în ordinea alb, negru, roșu este

$$p_3(a, b, c) = \frac{ab}{(a+b+c)(b+c)}$$

Să calculăm probabilitatea aceluiași eveniment (pe care-l notăm cu  $A$ ) pe altă calc. Pentru aceasta considerăm evenimentele

$A_k$  : primele  $k$  bile extrase sînt albe iar a  $(k+1)$ -a este neagră. ( $k = 1, 2, \dots, a$ ). Evident aceste  $a$  evenimente sînt incompatibile două câte două și

$$A = \bigcup_{k=1}^a A_k; P(A_k) = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)b}{(a+b+c)(a+b+c-1)\dots(a+b+c-k)}$$

Rezultă

$$p_3(a, b, c) = P(A) = \sum_{k=1}^a \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)b}{(a+b+c)(a+b+c-1)\dots(a+b+c-k)}$$

$$= \frac{ab}{(a+b+c)(a+b+c-1)} \left( 1 + \frac{a-1}{a+b+c-2} + \frac{(a-1)(a-2)}{(a+b+c-2)(a+b+c-3)} + \dots + \frac{(a-1)\dots 1}{(a+b+c-2)\dots(b+c)} \right)$$

Egalînd cele două expresii obținute pentru  $p_3(a, b, c)$  rezultă

$$1 + \frac{a-1}{a+b+c-2} + \frac{(a-1)(a-2)}{(a+b+c-2)(a+b+c-3)} + \dots + \frac{(a-1)\dots 1}{(a+b+c-2)\dots(b+c)} = \frac{a+b+c-1}{b+c}$$

Dacă luăm

$$a-1 = \alpha; a+b+c-2 = m \quad (\Rightarrow b+c = m - \alpha + 1)$$

rezultă egalitatea din enunț.

13°. Care este probabilitatea ca într-un grup de  $n$  persoane să existe cel puțin două care-și aniversează ziua de naștere în aceeași zi a anului? (Se admite că anul are 365 de zile și că pentru orice persoană ziua nașterii poate fi în egală măsură orice zi a anului).

**Rezolvare.** Dacă  $n > 365$  atunci, evident, probabilitatea coincidenței a cel puțin două aniversări este 1. Dacă  $n \leq 365$  vom calcula probabilitatea evenimentului contrar „fiecare din cele  $n$  persoane își aniversează nașterea într-o zi diferită de a celorlalte  $n - 1$ ”.

Vom considera cele  $n$  persoane într-o anumită ordine. Dacă numerotăm zilele anului 1, 2, 3, ..., 365 și notăm  $M = \{1, 2, 3, \dots, 365\}$  atunci zilele de naștere ale celor  $n$  persoane sînt date de un sistem ordonat de  $n$  elemente (nu neapărat distincte) ale lui  $M$  sau mai precis de un element al produsului cartezian  $M \times M \times \dots \times M = M^n$ . Numărul cazurilor posibile este deci  $365^n$ . Un caz favorabil este dat de un sistem ordonat de  $n$  elemente distincte ale lui  $M$ . Deci, numărul cazurilor favorabile este  $A_{365}^n = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)$ . Probabilitatea evenimentului „nici o aniversare comună” este

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

iar probabilitatea evenimentului din enunț

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

**Observație.** Dacă numărul persoanelor este  $n = 23$  atunci probabilitatea ca cel puțin două să fie născute în aceeași lună și în aceeași zi a lunii este puțin mai mare decît  $1/2$  (0,507). Dacă  $n = 50$  această probabilitate este de 0,97.

14°. Două semnale pot ajunge la receptor la întîmplare și independent unul de celălalt în intervalul  $(0, t)$ . Receptorul este „înecat” dacă între momentele sosirilor celor două semnale trece un timp mai scurt de  $t_0$ . Care este probabilitatea ca receptorul să fie „înecat”?

**Rezolvare.** Fie  $x$  și  $y$  momentele sosirilor la receptor a celor două semnale. Mulțimea cazurilor posibile este reprezentată de mulțimea punctelor din pătratul  $OABC$  (fig. 1.8 i)

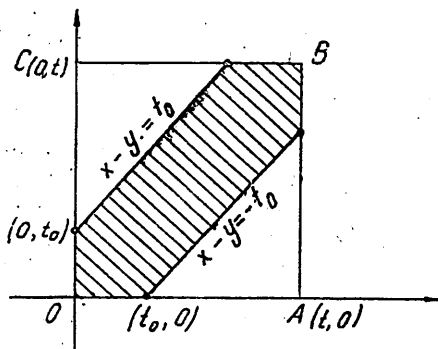


Fig. 1.8 i

Pentru ca un punct  $(x, y)$  din acest pătrat să reprezinte un caz favorabil trebuie ca

$$|x - y| < t_0$$

Această inegalitate este satisfăcută de punctele din porțiunea hașurată în figura 1.8, 1. Aria acestei porțiuni este aria pătratului micșorată cu suma ariilor celor două triunghiuri separate de regiunea hașurată:  $t^2 - 2 \frac{(t - t_0)^2}{2} = 2tt_0 - t_0^2$ . Probabilitatea „înecării“ receptorului este:

$$\frac{2tt_0 - t_0^2}{t^2}$$

15°. Într-un lot de 100 de piese 8 sînt defecte, iar în alt lot de 120 de piese 9 sînt defecte. Din unul din aceste loturi luat la întîmplare se iau 10 piese. Care este probabilitatea ca între piesele alese să fie 8 piese bune și 2 defecte?

Rezolvare. Notăm

A : piesele sînt luate din primul lot,

B : din cele 10 piese luate 8 sînt corecte și 2 defecte.

Conform formulei probabilității totale

$$P(B) = P(A) P(B/A) + P(\bar{A}) P(B/\bar{A})$$

$P(B/A)$  este probabilitatea ca luînd 10 piese din primul lot să avem 8 piese bune și 2 piese defecte. Conform schemei bilei neîntoarse

$$P(B/A) = \frac{C_{92}^8 \cdot C_8^2}{C_{100}^{10}}$$

În mod asemănător rezultă

$$P(B/\bar{A}) = \frac{C_{111}^8 \cdot C_9^2}{C_{120}^{10}}$$

În sfîrșit

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{92}^8 \cdot C_8^2}{C_{100}^{10}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{111}^8 \cdot C_9^2}{C_{120}^{10}}$$

## 1.5. VARIABILE ALEATOARE. FUNCȚII DE REPARTIȚIE. DENSITATE DE REPARTIȚIE

Cu excepția scurtei prezentări a noțiunii de probabilitate sub forma ei abstractă (ca funcție de mulțime) în toate formulele și aplicațiile întîlnite în paragrafele precedente era vorba de probabilitatea de realizare a unui sau mai multe evenimente legate de o experiență aleatoare. Dacă revenim asupra lor, vom observa că cele mai multe din evenimentele considerate se referă la anumite mărimi legate de experiențele respective, mărimi care iau valori în funcție de rezultatul experienței. Realizarea unui astfel de eveniment înseamnă luarea de către mărimea corespunzătoare a unei valori date sau a unei valori dintr-o mulțime dată. Pe un exemplu se vor observa ușor cele spuse. Să luăm cazul simplu al experienței constînd dintr-o aruncare a unui zar și următoarele evenimente legate de această experiență :

A : apariția feței cu trei puncte,

B : apariția unei fețe cu un număr  $\leq 3$  de puncte,

C : apariția uneia din fețele 2, 3, 4,

D : apariția unui număr par;

E : apariția uneia din fețele 1, 2, 5.

Se observă că fiecare din aceste evenimente se referă la numărul de puncte care apare la o aruncare a zarului. Să notăm cu  $X$  acest număr. Cu această notație evenimentul  $A$  se poate scrie  $\{X = 3\}$ . La fel:  $B = \{X \leq 3\}$ ,  $C = \{2 \leq X \leq 4\}$ ,  $D = \{X \in \{2, 4, 6\}\}$ ,  $E = \{X \in \{1, 2, 5\}\}$ . De asemenea mai putem scrie :

$$A^c = \{X \neq 3\}, B^c = \{X > 3\}, B \cup C = \{X \leq 4\}, B \cap D = \{X = 2\} \text{ etc.}$$

În general, pot fi scoase în evidență mai multe mărimi legate de o aceeași experiență. În exemplul nostru, putem considera următorul joc : cel care aruncă zarul primește un punct dacă obține o față cu un număr par și pierde un punct în caz contrar. Să notăm cu  $Y$  numărul de puncte pe care îl realizează un jucător la o aruncare a zarului. Variabila  $Y$  ia una din valorile 1 sau  $-1$  după cum jucătorul obține o față pară sau o față impară. Deci, ca și în cazul mărimii  $X$ , mărimea  $Y$  ia valori la întâmplare în funcție de rezultatul experienței. Evenimentul  $\{Y = 1\}$  este evenimentul  $D$  de mai sus, iar  $\{Y = -1\} = \bar{D}$ .

Legat de aceeași aruncare a zarului putem să ne imaginăm alt joc : o persoană primește un punct dacă apare fața 3 sau 4 ; două puncte dacă apare fața 5, trei puncte dacă apare fața 6 și nici un punct în celelalte cazuri. Dacă notăm cu  $Z$  numărul de puncte realizate de persoana respectivă în acea aruncare a zarului, vedem că  $Z$  ia la întâmplare, în funcție de rezultatul experienței, una din valorile 0, 1, 2, 3.

$X, Y, Z$  sînt mărimi legate de experiența aruncării unui zar și iau valori la întâmplare în funcție de rezultatul experienței.

Vom numi astfel de mărimi variabile aleatoare.

Fiecare din variabilele aleatoare  $X, Y, Z$  are o mulțime finită de valori posibile. Variabilele aleatoare cu această proprietate le vom numi variabile aleatoare simple sau etajate.

În afară de acestea, printre variabilele aleatoare care iau valori reale trebuie studiate și cele care au o mulțime numărabilă de valori posibile ca și acelea care au o mulțime nenumerabilă de valori posibile.\*

Să presupunem că se aruncă o monedă pînă la prima apariție a „stemei” și să notăm cu  $U$  numărul de aruncări efectuate. Teoretic, sîntem nevoiți să acceptăm că  $U$  poate lua orice valoare întreagă și pozitivă, întrucît nu putem preciza un număr de aruncări în cadrul cărora să apară cu certitudine și „stema”. În acest exemplu, experiența trebuie considerată ca constînd dintr-un șir infinit de aruncări ale monedei, iar  $U$  este numărul de ordine al aruncării în care apare pentru prima oară „stema”.

Variabilele aleatoare care au o mulțime finită sau numărabilă de valori se numesc variabile aleatoare discrete.

Variabila aleatoare a cărei mulțime de valori posibile este un interval al dreptei reale (nu neapărat mărginit) se numește variabilă aleatoare de tip continuu.

\* În ultima situație ne interesează în special cazul în care variabilele aleatoare pentru care mulțimea valorilor posibile este un interval  $(a, b)$  (unde eventual  $a = -\infty$  sau/și  $b = +\infty$ ).

Să presupunem că alegem la întâmplare printr-un „procedeu de alegere uniformă” (a se vedea 1.2 — probabilități geometrice) un punct din intervalul  $[a, b]$  și fie  $V$  numărul obținut. În acest caz, experiența constă în utilizarea procedurii menționat, iar  $V$  este o mărime care ia valori la întâmplare în intervalul  $[a, b]$  în funcție de rezultatul experienței. În plus, se vede că  $V$  poate lua orice valoare din acest interval și că în afara intervalului nu poate lua valori.  $V$  este o variabilă aleatoare de tip continuu.

Toate exemplele prezentate ne conduc la observația că dacă  $\Omega$  este mulțimea rezultatelor posibile ale unei experiențe, iar  $X$  este o variabilă aleatoare legată de această experiență, atunci  $X$  este o aplicație  $\Omega \rightarrow R$ .

Desigur că cunoașterea valorilor posibile ale unei variabile aleatoare nu este suficientă pentru studierea acesteia.

Să presupunem că se aruncă un zar o singură dată și că un jucător primește un punct dacă apare fața 1 și pierde un punct în celelalte cazuri. Dacă  $Y'$  este numărul de puncte realizate de acest jucător, atunci  $Y'$  este o variabilă aleatoare care poate lua valorile 1 și  $-1$  ca și variabila  $Y$  de mai sus. Dar, în timp ce în cazul variabilei  $Y$  cele două valori sînt la fel de probabile, în cazul variabilei  $Y'$  valoarea  $-1$  este de cinci ori mai probabilă decît valoarea 1.

În cele ce urmează vom nota schematic o variabilă aleatoare discretă printr-un tablou cu două linii: în prima linie vom trece valorile posibile variabilei, iar în linia a doua probabilitățile corespunzătoare fiecărei valori. Revenind la exemplele de la începutul acestui paragraf vom putea scrie

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}; Y: \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}; Z: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$U: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & \dots & 1/2^k & \dots \end{pmatrix} \text{ sau } U: \begin{pmatrix} k \\ 1/2^k \end{pmatrix} k = 1, 2, \dots$$

Vom numi lege de probabilitate această corespondență între valorile posibile ale variabilei aleatoare și probabilitățile corespunzătoare.

Este evident că elementele din linia a doua a unui tabel care dă legea de probabilitate a unei variabile aleatoare discrete trebuie să fie nenegative iar suma lor este egală cu unitatea.

În cazul variabilelor aleatoare de tip continuu legea de probabilitate este corespondența dintre intervalele dreptei reale și probabilitățile corespunzătoare acestor intervale:  $I \rightarrow P(X \in I)$  ( $X =$  variabilă aleatoare,  $I \subset R$  interval). Aceasta deoarece valorile posibile ale unei astfel de variabile aleatoare nu mai pot fi scrise într-un șir și în plus, după cum vom vedea vom avea adesea  $P(X = x) = 0$  ( $x \in R$ ) dacă  $X$  este variabilă aleatoare de tip continuu.

În aplicațiile practice ale teoriei probabilităților, cînd vorbim de variabile aleatoare nu se precizează amănunțit pentru fiecare dintre acestea în ce constau experiențele de care sînt legate, sau dacă aceste experiențe reies din context, care este mulțimea rezultatelor posibile în raport cu care variabilele respective iau valori. În aceste aplicații prin variabilă aleatoare vom înțelege o mărime care ia valori sub influența unor factori aleatori. Iată cîteva exemple de variabile aleatoare:

- numărul de zile ploioase într-un an într-o regiune dată,
- numărul de băuți la sută de nou-născuți,
- numărul de piese rebutate produse de o anumită mașină într-o perioadă de timp dată,

- numărul de apeluri telefonice la o centrală în unitatea de timp,
- timpul de funcționare fără avarii a unui utilaj (în ore de ex.),
- timpul ce se scurge între două apeluri consecutive la o centrală telefonică.

Se poate observa imediat că unele din aceste variabile aleatoare sînt discrete, iar altele sînt de tip continuu.

Dacă vrem să definim noțiunea matematică de variabilă aleatoare reală, atunci definiția aleasă trebuie să ne permită să lucrăm cu probabilități de forma:  $P(X = x)$ ,  $P(X < x)$ ,  $P(a < X < b)$ ,  $P(X \geq x)$  etc.

Făcînd legătura cu cele spuse în paragraful 1.3 și în prezentul paragraf sîntem conduși spre următoarea:

**Definiție.** Se numește variabilă aleatoare reală pe cîmpul de evenimente  $(\Omega, \mathcal{X})$  orice aplicație  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care

$$\{\omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{X}$$

oricare ar fi intervalul  $I$  al dreptei reale.

Într-adevăr, pentru a putea vorbi de  $P(a < X < b)$ , de exemplu, trebuie ca  $\{a < X < b\} = \{\omega : X(\omega) \in (a, b)\}$  să aparțină domeniului de definiție al lui  $P$ , adică lui  $\mathcal{X}$ .

Se poate arăta că dacă  $X, Y$  sînt variabile aleatoare în sensul acestei definiții atunci  $X + Y$ ,  $X \cdot Y$ ,  $\frac{X}{Y}$  ( $Y(\omega) \neq 0$ ) etc. sînt de asemenea variabile aleatoare.

Este ușor de arătat că pentru a cunoaște probabilitățile tuturor evenimentelor de forma  $\{X \in I\}$  unde  $I$  este un interval al dreptei reale, este suficient să cunoaștem probabilitățile evenimentelor de forma  $\{X < x\}$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  (sau pentru orice  $x \in D$  unde  $D$  este o parte peste tot densă a lui  $\mathbb{R}$ ).

**Definiție.** Se numește funcția de repartiție (sau de distribuție) a variabilei aleatoare  $X$  aplicația  $F = F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  dată de

$$F(x) = P(X < x).$$

Orice funcție de repartiție  $F$  are proprietățile:

(R<sub>1</sub>) Este nedescrescătoare pe  $\mathbb{R}$ :  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ .

(R<sub>2</sub>)  $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ;  $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .

(R<sub>3</sub>) Este continuă la stînga:  $F(x_0 - 0) = \lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0)$ ;

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Ca exercițiu să demonstrăm aceste proprietăți cu ajutorul proprietăților demonstrate 1.3.

(R<sub>1</sub>)  $x_1 < x_2 \Rightarrow \{X < x_1\} \subset \{X < x_2\} \Rightarrow$  (conform (P<sub>6</sub>) din 1.3)

$$P(X < x_1) \leq P(X < x_2) \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2).$$

(R<sub>2</sub>)  $x_n \in \mathbb{R}, (n \geq 1) x_n \downarrow -\infty \Rightarrow \{X < x_n\} \downarrow \emptyset \Rightarrow P(X < x_n) \downarrow 0$   
 ((P<sub>11</sub>) din 1.3)

$$x_n \uparrow +\infty \Rightarrow \{X < x_n\} \uparrow \Omega \Rightarrow F(x_n) \uparrow 1 \quad ((P'_{11}) \text{ din 1.3})$$

(R<sub>3</sub>)  $x_n \uparrow x \Rightarrow \{X < x_n\} \uparrow \{X < x\} \Rightarrow F(x_n) \uparrow F(x)$ .

Se poate arăta că orice aplicație  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  care satisface condițiile  $(R_1)$ ,  $(R_2)$ ,  $(R_3)$  este funcția de repartiție a unei variabile aleatoare, adică pentru orice astfel de funcție  $F$  se pot construi un câmp de probabilitate și o variabilă aleatoare  $X$  pe acest câmp astfel ca  $F$  să fie funcția de repartiție a variabilei aleatoare  $X$ .

Funcțiile de repartiție pot fi studiate și independent de noțiunile de variabilă aleatoare și probabilitate; pentru aceasta este suficient să numim funcție de repartiție orice aplicație  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  satisfăcând  $(R_1)$ ,  $(R_2)$ ,  $(R_3)$ .

Să enunțăm acum cîteva proprietăți simple în care intervin atît variabila aleatoare cît și funcția sa de repartiție

$$\begin{aligned} P(a \leq X < b) &= F(b) - F(a), & a, b \in \mathbb{R}, a < b; \\ P(X = x) &= F(x + 0) - F(x), & x \in \mathbb{R}; \\ P(X \geq x) &= 1 - F(x), & x \in \mathbb{R}; \\ P(a \leq X \leq b) &= F(b + 0) - F(a), & a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \end{aligned}$$

Prima din aceste proprietăți rezultă imediat din  $(P_5)$  (1.3):

$$\begin{aligned} \{a \leq X < b\} &= \{X < b\} - \{X < a\} \Rightarrow P(a \leq X < b) = \\ &= P(X < b) - P(X < a) \end{aligned}$$

deoarece  $a < b \Rightarrow \{X < a\} \subset \{X < b\}$ .

Cea de a doua egalitate rezultă din  $(P'_{11})$  (1.3):

$$\{X = x\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ x \leq X < x + \frac{1}{n} \right\}$$

sau altfel scris

$$\left\{ x \leq X < x + \frac{1}{n} \right\} \uparrow \{X = x\} \quad (n \uparrow \infty)$$

și deci

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(x \leq X < x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right) = \\ &= F(x + 0) - F(x). \end{aligned}$$

A treia egalitate rezultă imediat din observația

$$\{X \geq x\} = \{X < x\}^c \text{ etc.}$$

Revenind la cea de a doua egalitate vom observa că dacă funcția de repartiție a variabilei aleatoare  $X$  este continuă în punctul  $x \in \mathbb{R}$ , atunci  $P(X = x) = 0$  și reciproc. Întrucît funcția de repartiție este nedescrescătoare pe  $\mathbb{R}$ , rezultă că ea are o mulțime finită sau numărabilă de puncte de discontinuitate. În consecință, pentru orice variabilă aleatoare  $X$  există o mulțime cel mult numărabilă de puncte  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $P(X = x) \neq 0$ .

Funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare de tip continuu întîlnite în prezent în aplicații practice sînt cel mai adesea continue pe  $\mathbb{R}$  (ba chiar derivabile).

Dacă funcția de repartiție  $F$  a variabilei aleatoare  $X$  este continuă în punctele  $a, b$  din  $\mathbb{R}$ , atunci

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

Chiar dacă variabila aleatoare  $X$  ia valori numai într-un interval  $[a, b]$ , funcția sa de repartiție  $F$  este definită — după cum reiese din definiție — pe  $\mathbb{R}$ . În acest caz avem

$$F(x) = 0 \text{ pentru } x \leq a; \quad F(x) = 1 \text{ pentru } x > b$$

Să mai observăm că funcția de repartiție este definită pentru orice variabilă aleatoare  $X$ , indiferent dacă aceasta este discretă sau de tip continuu.

Graficul unei funcții de repartiție continue este de forma arătată de figura 1.9.

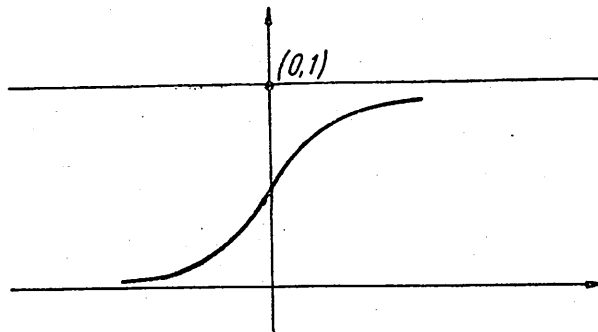


Fig. 1.9

Dacă funcția de repartiție are un punct de discontinuitate  $x_0$ , atunci graficul său este ca în figura 1.10

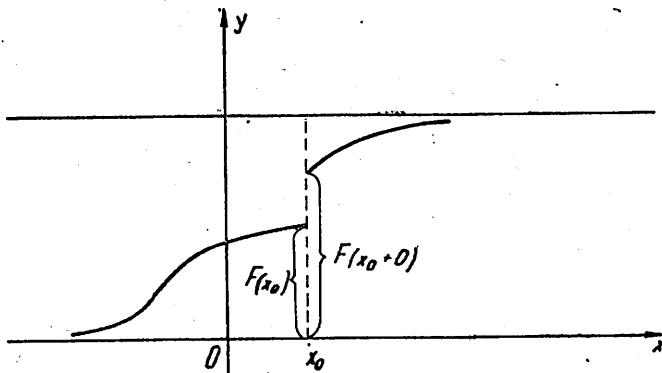


Fig. 1.10

Dacă variabila aleatoare  $X$  are funcția de repartiție reprezentată în figura 1.10, atunci

$$P(X = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0).$$

Este ușor de imaginat graficul unei funcții de repartiție cu mai multe puncte de discontinuitate.

\* În cazul unei variabile aleatoare discrete funcția de repartiție este o funcție „în scară”. Ca exemplu, să luăm o variabilă aleatoare  $X$  care ia valorile 1; 2; 3 respectiv cu probabilitățile 0,2; 0,3; 0,5. Tabloul distribuției acestei variabile aleatoare este

$$X: \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{Bmatrix}.$$

Se observă că dacă  $F$  este funcția de repartiție a lui  $X$ , atunci pentru orice  $x \leq 1$  avem

$$F(x) = P(X < x) = P(\emptyset) = 0.$$

La fel

$$1 < x \leq 2 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = 0,2$$

$$2 < x \leq 3 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\}) = \\ = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,2 + 0,3 = 0,5$$

$$x > 3 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(\Omega) = 1.$$

Graficul funcției  $F$  este în figura 1.11.

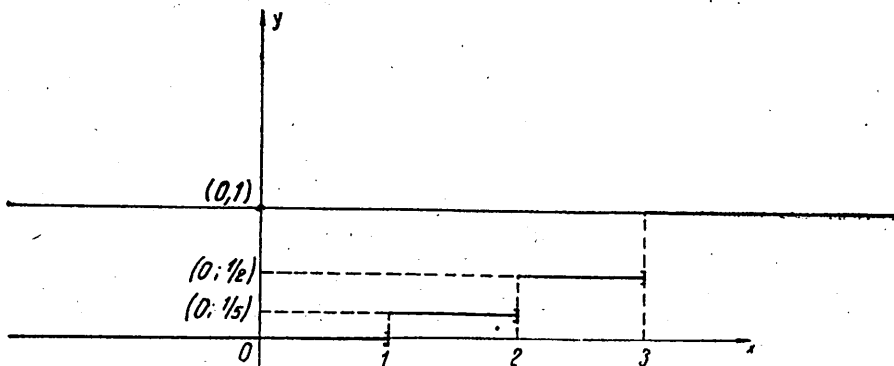


Fig. 1.11

Menționăm că pot exista variabile aleatoare care nu sînt nici discrete nici de tip continuu, adică mulțimea valorilor posibile nu este nici finită, nici numărabilă, nici interval. Funcția de repartiție este definită și pentru aceste variabile aleatoare. Ca exemplu, să considerăm o variabilă aleatoare  $X$  pentru care mulțimea valorilor posibile este formată dintr-un punct și un interval:  $\{1\} \cup [2; 3]$ .

Să presupunem că  $P(X = 1) = \frac{1}{2}$  și că funcția sa de repartiție  $F$  pe intervalul  $[2; 3]$  este o funcție de gradul I. În acest caz avem :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq 1, \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } 1 < x \leq 2, \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{pentru } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{pentru } x > 3. \end{cases}$$

Graficul acestei funcții de repartiții este dat în figura 1.12.

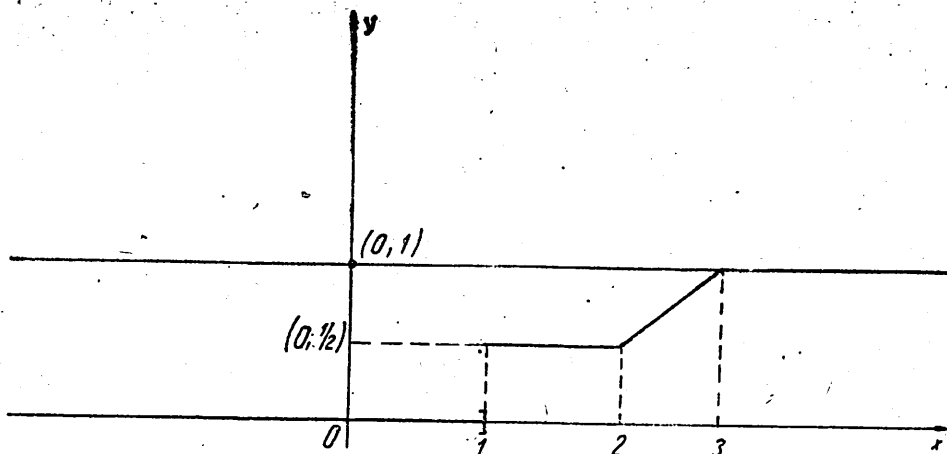


Fig. 1.12

După cum s-a văzut, dacă cunoaștem funcția de repartiție a unei variabile aleatoare  $X$ , atunci cunoaștem probabilitățile tuturor evenimentelor de forma  $\{X \in I\}$  unde  $I$  este un interval al dreptei reale.

Cu alte cuvinte, legea de probabilitate a oricărei variabile aleatoare reale\* este determinată de funcția sa de repartiție. Legea de probabilitate a unei variabile aleatoare poate fi exprimată prin orice altă funcție care determină în mod unic funcția de repartiție a variabilei aleatoare.

Pentru multe variabile aleatoare de tip continuu ce apar în practică, legea de probabilitate este exprimată prin *densitatea de repartiție* sau *densitatea de probabilitate*.

**Definiție** Spunem că variabila aleatoare  $X$  are o densitate de repartiție (sau de probabilitate) dacă există o aplicație  $f = f_x : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  astfel că :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

unde  $F$  este funcția de repartiție a variabilei aleatoare  $X$ . În acest caz  $f$  se numește *densitatea de repartiție* sau *densitatea de probabilitate a variabilei  $X$* .

Se observă, făcînd  $x \uparrow \infty$  în relația din definiția densității de repartiție, că :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

O aplicație  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare  $X$ , dacă :

$$(D_1) : f(x) \geq 0 \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

$$(D_2) : f \text{ este integrabilă pe } \mathbb{R} \text{ și } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

\* De cîte ori vom vorbi despre variabile aleatoare fără alte specificări vom înțelege că este vorba de variabile aleatoare reale.

Cu alte cuvinte, pentru orice aplicație  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  satisfăcând  $(D_1)$  și  $(D_2)$  se poate construi o variabilă aleatoare care are densitatea de repartiție  $f$ .  
**Apl i c a ț i e.** Să se determine constanta  $c$ , astfel ca funcția

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2}; \quad x \in \mathbf{R}$$

să fie o densitate de repartiție.

Aplicația  $f$  trebuie să satisfacă  $(D_2)$ :

$$c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 1$$

de unde rezultă că  $c = \frac{1}{\pi}$ , adică

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Și întrucît  $f(x) > 0$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f$  este o densitate de repartiție. Dacă variabila aleatoare  $X$  are o densitate de repartiție  $f$ , atunci

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad a, b \in \mathbf{R}, a < b.$$

Într-adevăr, dacă  $F$  este funcția de repartiție corespunzătoare ( $F$  este continuă):

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Această relație rămîne adevărată și dacă  $a = -\infty$  sau și  $b = +\infty$ .

Dacă variabila aleatoare  $X$  ia valori numai în intervalul  $(a, b)$ , atunci  $f$  se anulează în afara acestui interval. Într-adevăr, în acest caz:

$$P(a < X < b) = 1 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = 1.$$

Pe de altă parte

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

iar de aici se deduce imediat concluzia dorită.\*

În continuare vom presupune că  $F$  este o funcție derivabilă pe  $\mathbf{R}$ . În acest caz  $f = F'$  sau altfel spus  $F$  este o primitivă a lui  $f$ . În această situație putem lucra cu integrale Riemann și se deduc imediat proprietățile enunțate anterior. Astfel, de exemplu,  $F$  fiind o primitivă a lui  $f$ , avem:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = P(a < X < b).$$

\* De fapt concluzia este că  $f$  se anulează aproape peste tot în afara intervalului  $(a, b)$ . Dar în acest capitol vom lua „peste tot“ în loc de „aproape peste tot“. Dacă  $F$  este derivabilă, cum se consideră în continuare, atunci afirmațiile devin exacte.

Sau, dacă  $X$  își ia toate valorile în intervalul  $(a, b)$ , atunci

$F(x) = 0$ , dacă  $x \leq a$ ,  $F(x) = 1$  dacă  $x \geq b$  și deci  
 $f(x) = F'(x) = 0$  dacă  $x \notin (a, b)$ .

De asemenea, proprietățile  $(D_1)$  și  $(D_2)$  sînt imediate. Astfel,  $(D_1)$  exprimă că  $F'(x) \geq 0$ , ( $x \in \mathbf{R}$ ) și știm că  $F$  este nedescrescătoare.

Dacă variabila aleatoare  $X$  are densitatea de repartiție reprezentată în figura 1.13, atunci  $P(a < X < b)$  este aria porțiunii hașurate.

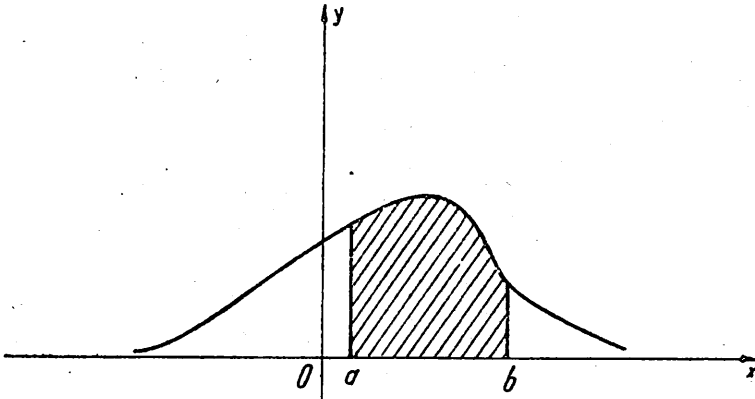


Fig. 1.13

În particular, dacă  $a = -\infty$ ,  $b = x$ , atunci  $F(x) = P(X < x)$  este aria porțiunii hașurate în figura 6.

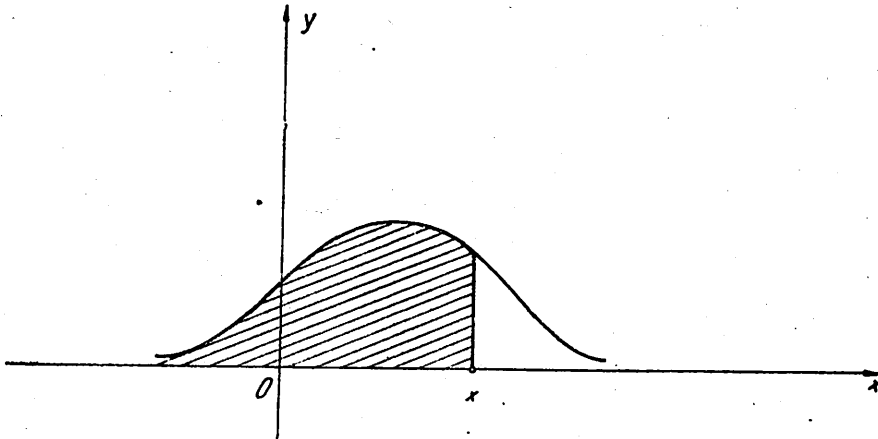


Fig. 1.14

Dacă  $\Delta x$  este foarte mic atunci

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) \simeq f(x)\Delta x$$

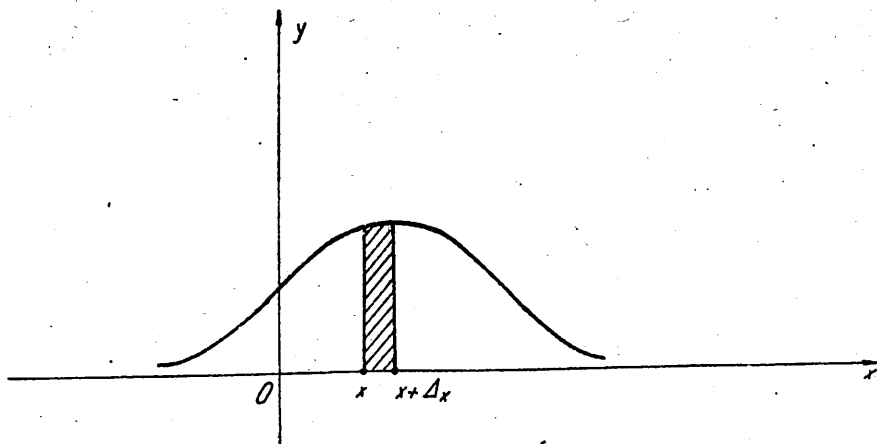


Fig. 1.15

*Aplicație. Variabila aleatoare X are densitatea de repartiție*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

- a) Să se scrie funcția de repartiție corespunzătoare.  
 b) Să se calculeze probabilitatea ca variabila X să ia o valoare cuprinsă între  $-1$  și  $1$ .

*Rezolvare.* a) Funcția de repartiție corespunzătoare este

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{du}{(1+u^2)} = \frac{1}{\pi} \left( \text{arc tg } u \Big|_{-\infty}^x \right) = \frac{1}{\pi} \left( \text{arc tg } x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \text{arc tg } x + \frac{1}{2}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$b) \quad P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

Din cele spuse pînă în prezent în acest paragraf reiese că legea de probabilitate a oricărei variabile aleatoare poate fi exprimată prin funcția sa de repartiție. Pentru unele variabile aleatoare legea de probabilitate poate fi exprimată prin densitatea de repartiție. Există și alte moduri de a exprima legea de probabilitate a unei variabile aleatoare (de exemplu, funcția caracteristică).

Individual, fiecare variabilă aleatoare este determinată complet din punct de vedere probabilistic de legea sa de probabilitate.

Dar cînd lucrăm cu familii de variabile aleatoare cunoașterea legii de probabilitate a fiecărei variabile în parte nu mai este suficientă, întrucît din acestea nu rezultă interdependența variabilelor considerate.

În practică sîntem adesea puși în situația de a lua în considerare simultan două sau mai multe variabile aleatoare. Dacă  $X$ ,  $Y$  sînt două variabile aleatoare reale, atunci cuplul  $Z = (X, Y)$  este un *vector aleator bidimensional*. Se observă că valorile lui  $X$  și valorile lui  $Y$  sînt numere reale, iar valorile lui  $Z$  sînt perechi de numere reale.

În general, dacă  $X_1, X_2, \dots, X_m$  sînt variabile aleatoare reale, atunci  $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$  se numește *vector aleator m — dimensional*.

**Exemple :** — O mașină produce un anumit tip de piese la care se măsoară două dimensiuni (considerate într-o anumită ordine) pentru a vedea dacă piesa corespunde standardului. Rezultatul controlării fiecărei piese este aleator și nu se exprimă printr-un număr, ci printr-o pereche de numere. Dacă  $X$  este valoarea primei dimensiuni, iar  $Y$  valoarea celei de a doua, atunci avem de considerat vectorul aleator bidimensional  $(X, Y)$ .

— La centrele militare, recrușilor li se măsoară înălțimea, greutatea și perimetrul toracic (în unități de măsură prestabilite). Rezultatul variază de la un recrut la altul. Rezultatul examinării fiecărui recrut se exprimă prin trei numere. Avem deci de a face cu un vector aleator tridimensional.

— Se aruncă cinci zăruri (distincte). Rezultatul aruncării se exprimă printr-un sistem ordonat de cinci numere. Dacă notăm cu  $X$  acest rezultat atunci  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  unde  $X_i$  este numărul de puncte ce apar la zarul  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ).  $X$  este un vector aleator 5 — dimensional.

În continuare vom face câteva considerații asupra legii de probabilitate a vectorilor aleatori bidimensionali.

**Definiție.** Se numește funcția de repartiție a vectorului bidimensional  $(X, Y)$  aplicația  $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow [0, 1]$

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)^*$$

Vom enunța în continuare unele proprietăți ale funcției de repartiție bidimensionale definite aici. Demonstrațiile, care sînt simple, le lăsăm în seama cititorului

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y); \text{ oricare ar fi } y \in \mathbf{R};$$

$$y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \leq F(x, y_2); \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0;$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F(x, y) = 1;$$

$$F_x(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y); \quad x \in \mathbf{R};$$

$$F_y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y); \quad y \in \mathbf{R};$$

$$P(a \leq X < b, Y < c) = F(b, c) - F(a, c); \quad a, b, c \in \mathbf{R};$$

$$P(X < a, b \leq Y < c) = F(a, c) - F(b, c); \quad a, b, c \in \mathbf{R};$$

$$P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c);$$

$$a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

**Definiție.** Se numește densitatea de repartiție a vectorului aleator  $(X, Y)$  derivata a doua parțială mixtă (dacă există) a funcției sale de repartiție.

Deci, dacă  $F$  este funcția de repartiție, densitatea de repartiție corespunzătoare este

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y).$$

\*  $\{X < x, Y < y\} = \{X < x\} \cap \{Y < y\}$

Orice densitate de repartiție bidimensională  $f(x, y)$  are proprietățile :

$$f(x, y) \geq 0, \quad x, y \in \mathbf{R}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Dacă  $\Delta x$  și  $\Delta y$  sînt mici, atunci  $f(x, y)\Delta x\Delta y$  aproximează probabilitatea ca punctul aleator  $(X, Y)$  să cadă în dreptunghiul  $(x, x + \Delta x) \times (y, y + \Delta y)$  dublul hașurat în figura 1.16.

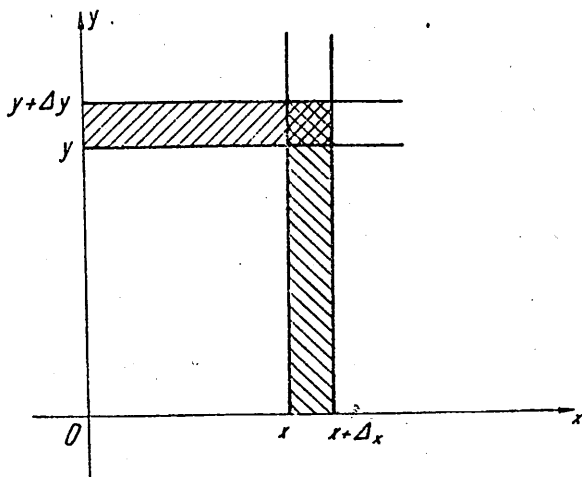


Fig. 1.16

Această observație ne sugerează formula

$$P((Y, X) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

unde  $D$  este un domeniu plan.

În sfârșit mai menționăm că dacă  $f(x, y)$  este densitatea de repartiție a vectorului aleator  $(X, Y)$ , atunci

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

unde  $f_X$  și  $f_Y$  sînt densitățile de repartiție ale variabilelor aleatoare unidimensionale  $X$  și respectiv  $Y$ .

Trecerea la cazul  $m$  — dimensional se face în mod natural.

Funcția de repartiție a vectorului aleator  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$  este

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_m < x_m)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbf{R}.$$

Funcția de repartiție a variabilei  $X_i$  este

$$F_i(x) = \lim_{\substack{x_i \rightarrow \infty \\ k \neq i}} F(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad x_i = x.$$

Densitatea de repartiție corespunzătoare funcției de repartiție  $m$  — dimensionale  $F$  este (dacă există)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{\partial^m F(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}.$$

Densitatea de repartiție a vectorului  $k$  — dimensional ( $k < m$ )

$$(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}) \quad (\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, m\})$$

este :

$$f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_{j_1} \dots dx_{j_{m-k}},$$

$$\{j_1, j_2, \dots, j_{m-k}\} = \{1, 2, \dots, m\} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\}.$$

Cazul cel mai simplu întilnit în studiul interdependenței dintre variabilele aleatoare ale unei anumite familii este cazul independenței.

Să considerăm mai întâi familiile formate din două variabile aleatoare.

Să presupunem că se aruncă două zaruri și să notăm cu  $X$  numărul de puncte care apar la primul zar și cu  $Y$  numărul de puncte care apar la al doilea zar. Este clar că cunoașterea valorii luate de una din cele două variabile nu modifică probabilitatea ca cealaltă să ia o valoare oarecare. Cu alte cuvinte, evenimentele  $\{X = k\}$ ,  $\{Y = l\}$  sînt independente oricare ar fi  $k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  :

$$P(X = k, Y = l) = P(X = k) \cdot P(Y = l).$$

Este natural să spunem că variabilele aleatoare  $X$  și  $Y$  sînt independente.

Să luăm un alt exemplu. O urnă conține 5 bile : două numerotate cu 1, două numerotate cu 2 și una numerotată 3 ; o altă urnă conține 8 bile : una numerotată cu 1, două numerotate cu 2, trei numerotate cu 3 și două numerotate cu 4. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Dacă  $X$  este numărul obținut din prima urnă și  $Y$  numărul obținut din cea de a doua urnă, se observă că dacă, de exemplu,  $X = 1$ , atunci  $P(Y = 1/X = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{8}$ ,  $P(Y = 1/X = 2) = \frac{1}{8}$ . În general, evenimentele  $\{X = k\}$ ,  $\{Y = l\}$  sînt independente pentru orice  $k = 1, 2, 3$ ;  $l = 1, 2, 3, 4$ .

Să considerăm aceleași două urne. Din prima urnă se extrage o bilă care se introduce în cea de a doua urnă, după care se extrage o bilă și din aceasta. Dacă  $X$  este numărul obținut din prima urnă iar  $Y$  numărul obținut în a doua extragere, atunci

$$P(Y = 1/X = 1) = \frac{2}{9}$$

deoarece dacă numărul obținut în prima extragere este 1, atunci a doua extragere se face dintr-o urnă cu 9 bile dintre care două numerotate cu 1.

De asemenea

$$P(Y = 1/X \neq 1) = \frac{1}{9}.$$

Se mai observă că

$$P(X = 1) = \frac{2}{5}; \quad P(X = 1/Y = 1) = \frac{4}{7}$$

(recomandăm cititorului să deducă ultima egalitate).

Rezultă că nu putem afirma că perechile de evenimente  $\{X = k\}$ ,  $\{Y = l\}$  sînt independente pentru orice  $k = 1, 2, 3$ ;  $l = 1, 2, 3, 4$ .

În general, vom spune că variabilele aleatoare discrete  $X_1$  și  $X_2$  sînt *independente* dacă

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \quad \forall x_1, x_2$$

Este ușor de arătat că această condiție este echivalentă cu :

$$P(X_1 \in I_1, X_2 \in I_2) = P(X_1 \in I_1) \cdot P(X_2 \in I_2)$$

oricare ar fi intervalele  $I_1, I_2$  ale dreptei reale.

Echivalența menționată este valabilă numai dacă variabilele aleatoare  $X_1$  și  $X_2$  sînt discrete. În cazul variabilelor aleatoare de tip continuu se folosește a doua formă.

Trecerea la cazul unui număr finit oarecare de variabile aleatoare este imediată.

**Definiție.** Variabilele aleatoare  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sînt independente dacă pentru orice  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq n$  și orice intervale  $I_1, I_2, \dots, I_s$  ale dreptei reale

$$P(X_{k_1} \in I_1, X_{k_2} \in I_2, \dots, X_{k_s} \in I_s) = P(X_{k_1} \in I_1) \cdot P(X_{k_2} \in I_2) \cdot \dots \\ \dots \cdot P(X_{k_s} \in I_s).$$

Se poate arăta că pentru ca această relație să fie verificată pentru intervale de orice tip, este suficient să fie verificată pentru intervale de forma  $(-\infty, x)$ .

**Definiție.** Variabilele aleatoare  $X_i, i \in I$  sînt independente ( $I$  fiind o familie arbitrară de indici) dacă pentru orice  $I' \subset I$ ,  $I'$  finit variabilele aleatoare  $X_i, i \in I'$  sînt independente.

**Teoremă.** Variabilele aleatoare  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sînt independente dacă și numai dacă oricare ar fi întregii  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq n$  și numerele reale  $x_1, x_2, \dots, x_s$ .

$$P(X_{k_1} < x_1, X_{k_2} < x_2, \dots, X_{k_s} < x_s) = P(X_{k_1} < x_1) \cdot P(X_{k_2} < x_2) \cdot \dots \\ \dots \cdot P(X_{k_s} < x_s)$$

sau altfel spus :

$$F_{k_1, k_2, \dots, k_s}(x_1, x_2, \dots, x_s) = F_{k_1}(x_1) \cdot F_{k_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{k_s}(x_s)$$

unde  $F_{k_1, k_2, \dots, k_s}$  este funcția de repartiție a vectorului aleator  $(X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_s})$  iar  $F_i$  este funcția de repartiție a variabilei aleatoare  $X_i$ .

Dacă variabilele aleatoare independente  $X_i$  au densități de repartiție, atunci se pot scrie relațiile analoge pentru acestea.

**Teoremă.** Dacă variabilele independente  $X_1, X_2, \dots, X_n$  au densitățile de repartiție  $f_1, f_2, \dots, f_n$  atunci vectorul aleator  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  are o densitate de repartiție  $f$  și

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n); \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}.$$

Mai menționăm următoarea proprietate importantă :

Dacă variabilele aleatoare independente  $X, Y$  au densitățile de repartiție  $f_1$  și respectiv  $f_2$  atunci variabila aleatoare  $X + Y$  are densitatea de repartiție dată de

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(x - y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x - y) \cdot f_2(y) dy$$

Încheiem acest paragraf cu câteva probleme aplicative.

1°. Variabilele aleatoare discrete  $X$  și  $Y$  au distribuțiile date de următoarele tablouri :

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}; \quad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}$$

Să se arate că dacă

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$

atunci

$$\sum_i p_{ij} = q_j; \quad \sum_j p_{ij} = p_i; \quad \sum_{i,j} p_{ij} = 1.$$

**Rezolvare.** Variabila aleatoare  $X$  ia una și numai una din valorile  $x_i$ , adică evenimentele  $\{X = x_i\}$  formează un sistem complet de evenimente. Același lucru se poate spune despre evenimentele  $\{Y = y_j\}$ . În particular, din aceste observații rezultă  $\sum_i p_i = 1$ ;

$$\sum_j q_j = 1$$

Putem deci scrie :

$$\sum_i p_{ij} = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j) = P(\cup_i \{X = x_i, Y = y_j\}) =$$

$$= P(\{Y = y_j\} \cap \cup_i \{X = x_i\}) = P(\{Y = y_j\} \cap \Omega) = q_j$$

$$\sum_j p_{ij} = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = P(\cup_j \{X = x_i, Y = y_j\}) =$$

$$= P(\{X = x_i\} \cap \cup_j \{Y = y_j\}) = P(\{X = x_i\} \cap \Omega) = p_i$$

$$\sum_{i,j} p_{ij} = \sum_i \sum_j p_{ij} = \sum_i p_i = 1.$$

**Observație.** Proprietățile demonstrate reprezintă analogele unor proprietăți menționate în cazul variabilelor aleatoare de tip continuu  $X, Y$  pentru care vectorul aleator  $(X, Y)$  are o densitate de repartiție  $f(x, y)$ . Dacă notăm cu  $f_i$  densitatea de

repartiție a variabilei aleatoare  $X$ , iar cu  $f_2$  densitatea de repartiție a variabilei aleatoare  $Y$ , atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = f_2(y); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = f_1(x); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

2°. Dacă variabilele aleatoare  $X$  și  $Y$  sînt independente, iar  $f$  și  $g$  sînt două aplicații  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  strict crescătoare sau strict descrescătoare pe  $\mathbf{R}$ , atunci variabilele aleatoare  $f(X)$  și  $g(Y)$  sînt independente.

*Rezolvare.* Vom presupune că ambele funcții  $f$  și  $g$  sînt strict crescătoare, cazurile cînd acestea sînt amîndouă descrescătoare sau una crescătoare și cealaltă descrescătoare tratîndu-se în mod analog. Fie  $x, y \in \mathbf{R}$ .

$$\begin{aligned} P(f(X) < x, g(Y) < y) &= P(X < f^{-1}(x), Y < g^{-1}(y)) = \\ &= P(X < f^{-1}(x)) \cdot P(Y < g^{-1}(y)) = P(f(X) < x) \cdot P(g(Y) < y). \end{aligned}$$

*Observații.* a) Proprietatea este variabilă și în cazul unor funcții  $f, g$  care nu sînt monotone. Este destul de intuitiv că dacă  $X$  și  $Y$  iau valori independent una de cealaltă, același lucru îl putem spune despre  $f(X)$  și  $g(Y)$  oricare ar fi  $f$  și  $g$ . Din punct de vedere matematic trebuie să ne luăm măsura ca aplicațiile  $f, g$  aplicate unor variabile aleatoare să conducă tot la variabile aleatoare în sensul definiției matematice ale acestora. Aplicațiile monotone pe  $\mathbf{R}$  și aplicațiile continue pe  $\mathbf{R}$  îndeplinesc această condiție.

b) Proprietatea menționată și observația a) rămîn valabile în cazul unor familii arbitrare de variabile aleatoare independente.

3°. Variabilele aleatoare independente  $X_1, X_2, \dots, X_n$  au respectiv funcțiile de repartiție  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Să se găsească funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare  $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$  și  $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

*Rezolvare.* Fie  $F$  și  $G$  funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare  $Y$  și  $Z$ . Avem pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(Y < x) = P(X_1 < x, X_2 < x, \dots, X_n < x) = P(X_1 < x) \cdot \\ &\quad P(X_2 < x) \dots P(X_n < x) = F_1(x) \cdot F_2(x) \dots F_n(x) \\ G(x) &= P(Z < x) = 1 - P(Z \geq x) = 1 - P(X_1 \geq x, X_2 \geq x, \dots, X_n \geq x) \\ &= 1 - P(X_1 \geq x) \cdot P(X_2 \geq x) \dots P(X_n \geq x) = \\ &= 1 - [1 - P(X_1 < x)] \cdot [1 - P(X_2 < x)] \dots [1 - P(X_n < x)] = \\ &= 1 - (1 - F_1(x)) \cdot (1 - F_2(x)) \dots (1 - F_n(x)). \end{aligned}$$

4°. Se dă funcția

$$f(x) = \frac{c}{e^x + e^{-x}}, \quad (x \in \mathbf{R}).$$

a) Să se determine constanta  $c$  astfel ca  $f$  să fie o densitate de repartiție.

b) Dacă  $X$  și  $Y$  sînt variabile aleatoare independente avînd densitatea de repartiție  $f$ , să se calculeze  $P(X < 1, Y > 1)$ .

*Rezolvare.* a) Pentru ca  $f$  să fie o densitate de repartiție trebuie să avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

relație care implică  $c > 0$  adică  $f > 0$ . Rezultă

$$1 = c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = c \left( \operatorname{arctg} e^x \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right),$$

$$c = \frac{2}{\pi}; \quad f(x) = \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}.$$

b)  $P(X < 1, Y > 1) = P(X < 1) \cdot P(Y > 1),$

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^1 f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{\pi} \left( \operatorname{arctg} e^x \Big|_{-\infty}^1 \right),$$

$$P(X < 1) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e,$$

$$P(Y > 1) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e,$$

$$P(X < 1, Y > 1) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e \left( 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e \right).$$

5°. Variabila aleatoare  $X$  are densitatea de repartiție

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq -1, x \geq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dacă } -1 < x < 1 \end{cases}$$

a) Să se afle funcția de repartiție corespunzătoare.

b) Să se determine densitățile de repartiție ale variabilelor aleatoare  $Y = e^X$   
 $Z = 2X^2 + 1$ .

*Rezolvare.* a) Se observă imediat că  $f$  este într-adevăr o densitate de repartiție. Funcția de repartiție corespunzătoare este

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq -1, \\ \frac{x+1}{2} & \text{dacă } -1 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

b) Să determinăm mai întâi funcția de repartiție  $G$  a variabilei aleatoare  $Y$ . Întrucât  $Y > 0$ , pentru orice  $x \leq 0$  avem

$$G(x) = P(Y < x) = 0. \text{ Dacă } x > 0 \text{ atunci}$$

$$G(x) = P(Y < x) = P(e^X < x) = P(X < \ln x) = F(\ln x)$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in \left(-\infty, \frac{1}{e}\right), \\ \frac{1 + \ln x}{2} & \text{dacă } x \in \left[\frac{1}{e}, e\right], \\ 1 & \text{dacă } x \in [e, +\infty). \end{cases}$$

Densitatea de repartiție corespunzătoare este

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in \left(-\infty, \frac{1}{e}\right), \\ \frac{1}{2x} & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{e}, e\right). \end{cases}$$

Întrucît  $X$  ia valori numai în intervalul  $(-1, 1)$ ,  $Z = 2X^2 + 1$  ia valori numai în intervalul  $(1, 3)$ . Să determinăm funcția de repartiție  $H(x)$  a variabilei aleatoare  $Z$  pentru  $x \in (1, 3)$ :

$$\begin{aligned} H(x) &= P(Z < x) = P(2X^2 + 1 < x) = P\left(X^2 < \frac{x-1}{2}\right) = \\ &= P\left(-\sqrt{\frac{x-1}{2}} < X < \sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) = F\left(\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) - F\left(-\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{x-1}{2}}. \end{aligned}$$

Densitatea de repartiție corespunzătoare este

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (1; 3) \\ \frac{1}{2\sqrt{2(x-1)}} & \text{dacă } x \in (1; 3) \end{cases}$$

6°. Pe axa  $Oy$  se ia punctul  $A(0; 1)$  și prin acest punct se duce o dreaptă  $(\Delta)$  care face cu  $Oy$  unghiul  $\alpha$  și intersecționează  $Ox$  în punctul  $P(\lambda, 0)$ . Să se determine funcția de repartiție și densitatea de repartiție a variabilei aleatoare  $\lambda$  știind că  $\alpha$  ia valori la întâmplare după legea de probabilitate dată de funcția de repartiție:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ \frac{2}{\pi}x + \frac{1}{2} & \text{dacă } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{dacă } x \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

*Rezolvare.* Să observăm mai întâi că  $F$  este într-adevăr o funcție de repartiție. Pe figură se vede că  $\lambda = \operatorname{tg} \alpha$

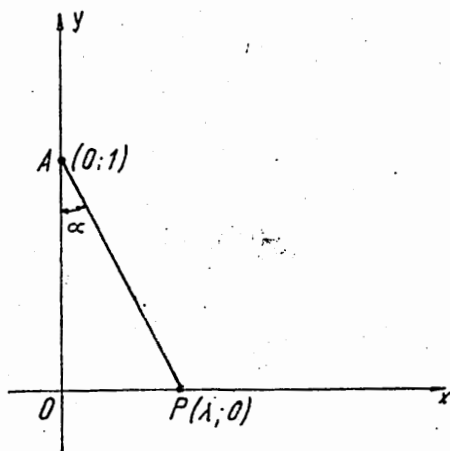


Fig. 1.17

Dacă  $G$  este funcția de repartiție a variabilei aleatoare  $\lambda$ , atunci pentru  $x \in (-1, 1)$

$$G(x) = P(\lambda < x) = P(\operatorname{tg} \alpha < x) = P(\alpha < \operatorname{arctg} x) = F(\operatorname{arctg} x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq -1, \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} & \text{dacă } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

Densitatea de repartiție corespunzătoare este-

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \notin (-1, 1), \\ \frac{2}{\pi(1+x^2)} & \text{dacă } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

7°. Variabila aleatoare  $X$  are funcția de repartiție  $F$ . Să se determine funcția de repartiție a variabilei aleatoare  $-X$ . Dacă  $F$  este derivabilă, să se găsească densitatea de repartiție a lui  $-X$  în funcție de  $f = F'$ .

Rezolvare. Fie  $G$  funcția de repartiție a variabilei  $-X$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Avem:

$$G(x) = P(-X < x) = P(X > -x) = 1 - P(X \leq -x) = 1 - F(-x + 0).$$

Dacă  $F$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  (deci și continuă pe  $\mathbb{R}$ ) atunci densitatea de repartiție  $g$  corespunzătoare funcției de repartiție  $G$  este dată de:

$$g(x) = G'(x) = f(-x), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

8°. Variabilele aleatoare independente  $X$  și  $Y$  au o densitate de repartiție comună. Să se arate că  $P(X < Y) = P(Y < X)$ .

Rezolvare. Fie  $f$  densitatea de repartiție comună. Întrucât variabila aleatoare  $X$  are densitatea de repartiție  $f(x)$  iar variabila aleatoare  $-Y$  are densitatea de repartiție  $f(-x)$  și în plus cele două variabile aleatoare ( $X$  și  $-Y$ ) sînt independente (problema 2°.) atunci densitatea de repartiție a variabilei aleatoare  $X - Y$  este

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)f(-x+y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \cdot f(-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y) \cdot f(y) dy$$

Făcînd un raționament asemănător deducem că variabila aleatoare  $Y - X$  are de asemenea densitatea de repartiție  $g$ . În consecință:

$$P(X < Y) = P(X - Y < 0) = \int_{-\infty}^0 g(x)dx = P(Y - X < 0) = P(Y < X).$$

## 1.6. VALORI MEDII. DISPERSIE. INEGALITATEA LUI CEBIȘEV. MOMENTE

Să considerăm următorul joc: se aruncă un zar și un jucător primește 2 puncte dacă apare fața 1; primește 4 puncte dacă apare fața 2 sau fața 3; primește 5 puncte dacă apare fața 4; pierde 6 puncte dacă apare una din fețele 5 sau 6. Vom considera că zarul este corect.

Notăm cu  $X$  numărul de puncte obținute de jucătorul respectiv. Tabloul distribuției acestei variabile aleatoare este

$$X: \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & -6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Să presupunem acum că acest joc se repetă de  $n$  ori. Dacă în cele  $n$  aruncări ale zarului :

- de  $n_1$  ori a apărut fața 1,
- de  $n_2$  ori a apărut una din fețe 2 sau 3,
- de  $n_3$  ori a apărut fața 4,
- de  $n_4$  ori a apărut una din fețe 5 sau 6,

atunci jucătorul considerat a primit de  $n_1$  ori 2 puncte, de  $n_2$  ori 4 puncte, de  $n_3$  ori 5 puncte și de  $n_4$  ori — 6 puncte și deci a totalizat :

$$2n_1 + 4n_2 + 5n_3 - 6n_4 \text{ puncte} \quad (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n).$$

Acesta fiind numărul de puncte realizate în  $n$  jocuri, atunci într-un joc a obținut în medie

$$\frac{2n_1 + 4n_2 + 5n_3 - 6n_4}{n} \text{ puncte.}$$

Dacă  $n$  este suficient de mare, atunci frecvența apariției feței 1 a zarului  $\frac{n_1}{n}$  este aproximativ egală cu  $\frac{1}{6}$ ; la fel

$$\frac{n_2}{n} = \frac{1}{3}; \quad \frac{n_3}{n} \simeq \frac{1}{6}; \quad \frac{n_4}{n} \simeq \frac{1}{3}.$$

Rezultă că valoarea medie a numărului de puncte obținute la o aruncare a zarului este aproximativ

$$2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{6} - 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Dacă privim tabloul distribuției variabilei aleatoare  $X$ , observăm că acest număr s-a obținut înmulțind fiecare valoare posibilă a variabilei cu probabilitatea corespunzătoare și adunând rezultatele obținute.

În general, dacă  $X$  este o variabilă aleatoare simplă legată de o anumită experiență și poate lua valorile  $x_1, x_2, \dots, x_m$  respectiv cu probabilitățile  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , atunci efectuind de  $n$  ori experiența notăm cu  $n_k$  numărul de apariții ale valorii  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ;  $\sum n_k = n$ ). În cele  $n$  probe s-au obținut  $n$  numere a căror sumă este  $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_mx_m$  și media aritmetică a acestor numere este

$$\frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_mx_m) = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_mx_m$$

unde  $f_k = \frac{n_k}{n}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) este frecvența apariției valorii  $x_k$ . Dacă  $n$  este suficient de mare, atunci  $f_k \simeq p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) și aceste aproximări tind să devină egalități când  $n$  crește indefinit ( $n \rightarrow \infty$ ).

Aceste considerații ne conduc spre următoarea :

**Definiție.** Dacă variabila aleatoare simplă  $X$  ia valorile  $x_1, x_2, \dots, x_n$  respectiv cu probabilitățile  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ( $\sum p_i = 1$ ) atunci numărul

$$M(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

se numește valoarea medie sau speranța matematică a variabilei aleatoare  $X$ .

Să arătăm câteva din proprietățile mai importante ale valorii medii în cazul variabilelor aleatoare simple. În cele ce urmează variabilele  $X$  și  $Y$  au legi de probabilitate date de tablourile :

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \dots x_m \\ p_1 & p_2 \dots p_m \end{pmatrix}; \quad Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \dots y_n \\ q_1 & q_2 \dots q_n \end{pmatrix}$$

iar

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$(M_1) : M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

**Demonstrație.** Variabila aleatoare  $X + Y$  ia valoarea  $x_i + y_j$  cu probabilitatea  $p_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) și deci

$$\begin{aligned} M(X + Y) &= \sum_{i,j} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i,j} p_{ij} x_i + \sum_{i,j} p_{ij} y_j = \\ &= \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_i x_i p_i + \sum_j y_j q_j = \\ &= M(X) + M(Y). \end{aligned}$$

(Am folosit rezultate ale problemei 1<sup>o</sup> de la sfârșitul paragrafului 1.5)

**Observație.** Proprietatea se extinde la un număr finit oarecare de variabile aleatoare simple

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_k) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_k)$$

$$(M_2) : M(cX) = cM(X) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$(M_3) : X \leq Y \Rightarrow M(X) \leq M(Y).$$

**Demonstrație.** Este evident că dacă  $Z \geq 0$  atunci  $M(Z) \geq 0$ .

Dacă  $X \leq Y$ , atunci

$$Y - X \geq 0, \quad M(Y - X) \geq 0, \quad M(Y) - M(X) \geq 0$$

**(M<sub>4</sub>) :** Dacă  $X$  și  $Y$  sînt variabile aleatoare independente, atunci :

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

**Demonstrație.** Din definiția independenței variabilelor aleatoare rezultă  $p_{ij} = p_i \cdot q_j$ . Deci :

$$\begin{aligned} M(XY) &= \sum_{i,j} p_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j} p_i q_j x_i y_j = \sum_i p_i x_i \sum_j q_j y_j = \\ &= M(X) \cdot M(Y) \end{aligned}$$

**Observație.** Proprietatea se extinde la un număr finit oarecare de variabile aleatoare simple :

$$M(X_1 X_2 \dots X_k) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_k)$$

dacă  $X_1, X_2, \dots, X_k$  sînt independente.

**Definiție.** Dacă variabila aleatoare  $X$  are o mulțime numărabilă de valori  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , cărora le corespund probabilitățile  $p_1, p_2, p_3, \dots$  atunci numărul

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i.$$

Se numește valoarea medie a variabilei aleatoare  $X$  dacă seria  $\sum p_i x_i$  este absolut convergentă. Dacă  $\sum_i p_i |x_i| = +\infty$  spunem că  $X$  nu are o valoare medie.

Condiția ca seria  $\sum_i p_i x_i$  să fie absolut convergentă, este necesară pentru ca existența sau valoarea speranței matematice să nu depindă de ordinea în care înregistrăm valorile variabilei aleatoare  $X$ .

Proprietățile  $(M_1)$ ,  $(M_2)$ ,  $(M_3)$  și observațiile care le succed rămân adevărate în cazul variabilelor aleatoare discrete (simple sau nu) dacă în enunțul fiecăreia adăugăm „dacă valorile din membrul drept există”.

**Definiție.** Dacă  $X$  este o variabilă aleatoare de tip continuu avînd densitatea de repartiție  $f$ , atunci numărul

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

se numește valoarea medie a variabilei aleatoare  $X$  dacă integrala din membrul drept este convergentă.

Dacă variabila aleatoare  $X$  ia valori numai în intervalul  $(a, b)$ ,  $(-\infty < a < b < +\infty)$  atunci  $f(x) = 0$  pentru  $x \notin (a, b)$  și deci

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx.$$

Luarea acestei egalități ca definiție a valorii medii poate fi sugerată de următoarele considerente.

Împărțim intervalul  $(a, b)$  în subintervale disjuncte din ce în ce mai mici. La etapa  $n$  să presupunem că avem  $m_n$  subintervale  $\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \dots, \Delta_{m_n}^{(n)}$  cel mai mare dintre acestea avînd lungimea  $v_n$ . În fiecare subinterval  $\Delta_i^{(n)}$  alegem un punct  $\xi_i^{(n)}$  și construim o variabilă aleatoare simplă  $X_n$  dîndu-i acesteia valoarea  $\xi_i^{(n)}$  dacă  $X$  ia o valoare în  $\Delta_i^{(n)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m_n$ ). Rezultă, presupunînd  $v_n$  suficient de mic:

$$P(X_n) = \xi_i^{(n)} = P(X \in \Delta_i^{(n)}) \simeq f(\xi_i^{(n)}) \Delta_i^{(n)}$$

și deci

$$M(X_n) = \sum_{i=1}^{m_n} \xi_i^{(n)} P(X_n = \xi_i^{(n)}) \simeq \sum_i \xi_i^{(n)} f(\xi_i^{(n)}) \Delta_i^{(n)} \simeq \int_a^b x f(x) dx.$$

Pe de altă parte  $X_n$  poate fi ales oricît „de apropiat” de  $X$ . Într-adevăr:

$$|X - X_n| \leq v_n$$

și  $v_n$  poate fi făcut oricît de mic.

Proprietățile  $(M_1)$ ,  $(M_2)$ ,  $(M_3)$  rămîn valabile în cazul variabilelor aleatoare de tip continuu care au densități de repartiție cu condiția ca valorile medii din membrul drept al egalităților să existe. Ele sînt valabile — cu această restricție — și dacă unele variabile aleatoare sînt discrete iar altele de tip continuu.

Să arătăm pe un exemplu simplu utilitatea cunoașterii proprietăților valorii medii.

Se aruncă două zaruri. Să se calculeze valoarea medie a numărului total de puncte.

*Rezolvare.* Dacă  $X$  este numărul total de puncte, să vedem care este legea de probabilitate a acestei variabile aleatoare. Se observă că  $X$  ia valorile 2, 3, 4, ..., 12 și

$$P(X = 2) = \frac{1}{36}; \quad P(X = 3) = \frac{2}{36}; \text{ etc.}$$

Se obține tabloul

$$X: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{36} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

Conform definiției valorii medii

$$M(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{18} + 4 \cdot \frac{1}{12} + \dots = 7.$$

Problema se putea rezolva mai comod astfel: dacă  $X_1$  este numărul de puncte de la primul zar și  $X_2$  numărul de puncte de la cel de al doilea zar, atunci  $X = X_1 + X_2$  și deci

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2).$$

Dar  $X_1$  și  $X_2$  au aceeași lege de probabilitate dată de tabloul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

de unde reiese

$$M(X_1) = M(X_2) = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}$$

și

$$M(X) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7.$$

La fel, dacă se cere valoarea medie a produsului numerelor de puncte de la cele două zaruri, vom observa că variabilele aleatoare  $X_1$  și  $X_2$  sînt independente ceea ce ne va da dreptul să scriem

$$M(X_1 X_2) = M(X_1) \cdot M(X_2) = \frac{49}{4}.$$

Reținem deci că pentru a aplica regula „valoarea medie a produsului este produsul valorilor medii“ trebuie să avem asigurată în prealabil independența variabilelor aleatoare care intervin. O astfel de precauție nu este necesară cînd aplicăm regula „valoarea medie a sumei este egală cu suma valorilor medii“.

Să mai dăm o formulă foarte utilă în aplicații :

$$M(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

dacă integrala din membrul drept este convergentă și unde  $g$  este o funcție continuă  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , iar  $f$  este densitatea de repartiție a variabilei aleatoare  $X$ .

Să vedem în ce constă utilitatea acestei formule. Dacă se cunoaște densitatea de repartiție a variabilei aleatoare  $X$  și ni se cere valoarea medie a variabilei aleatoare  $Y = g(X)$  pentru a apela la definiția pe care noi am dat-o valorii medii ar trebui mai întâi să găsim densitatea de repartiție a lui  $Y$ .

Formula prezentată ne scutește de acest lucru.

*Aplicație. Variabila aleatoare  $X$  are densitatea de repartiție*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+x^2)} & \text{dacă } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{dacă } x \notin (-1, 1). \end{cases}$$

*Să se calculeze valoarea medie a variabilei aleatoare  $X^2$ .*

*Rezolvare.* Aplicăm formula menționată pentru  $g(x) = x^2 (x \in \mathbb{R})$  și obținem :

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{2x^2}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{2}{\pi} [(x - \arctg x)|_{-1}^1] = \frac{4}{\pi} - 1.$$

Valoarea medie este una dintre cele mai importante caracteristici numerice atașate variabilei aleatoare. Rolul acestor caracteristici numerice este de a ne permite, în anumite situații, să tragem unele concluzii asupra variabilelor aleatoare studiate, fără a apela la legile lor de probabilitate — de cele mai multe ori foarte dificil sau imposibil de obținut. De multe ori, cunoașterea tipului de interdependență dintre variabilele unui șir și a unora din caracteristicile lor numerice ne permit să tragem concluzii importante din punct de vedere practic sau teoretic. Amintim în acest sens unele teoreme cunoscute sub numele de legi ale numerelor mari sau cele cunoscute sub numele de teoreme — limită centrală.

Valoarea medie face parte dintr-o anumită categorie de caracteristici numerice și anume caracteristicile de poziție. Cu ajutorul acestora încercăm să tragem concluzii asupra poziției valorilor variabilei pe dreapta reală. Valoarea medie este un fel de *valoare centrală* a variabilei aleatoare ; o valoare în jurul căreia cad celelalte valori posibile, astfel ca media abaterilor de la această valoare să fie nulă (abaterile se consideră cu semnul + sau — după cum valoarea considerată cade la dreapta sau la stînga valorii medii).

Alte caracteristici de poziție mai frecvent întâlnite (în special în statistica matematică) sînt *modul* și *mediana*.

*Modul* este valoarea cea mai probabilă în cazul unei variabile aleatoare discrete sau punctul de maxim al funcției  $f$  în cazul variabilelor aleatoare de tip continuu care au densitatea de repartiție  $f$ .

Distribuțiile sînt unimodale sau plurimodale după cum modulul este unic sau nu.

Mediana variabilei aleatoare  $X$  este valoarea  $Me$  pentru care

$$P(X < Me) = P(X > Me)$$

Dacă  $X$  are o densitate de repartiție  $f$ , atunci  $Me$  este valoarea pentru care

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Geometric,  $Me$  este acel număr cu proprietatea că dreapta  $x = Me$  împarte aria cuprinsă între graficul funcției  $f(x)$  și axa  $Ox$  în două părți egale.

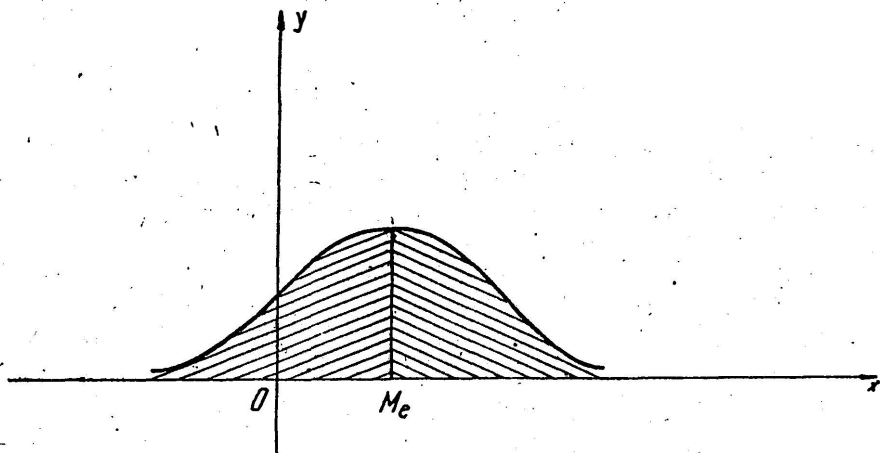


Fig. 1.18

Uneori se mai folosesc *cuartilele* și *decilele* care reprezintă punctele de pe axa  $Ox$  cu ajutorul cărora se împarte aria de mai sus în patru, respectiv zece, părți egale. Se observă că  $Me$  este o cuartilă și o decilă.

Desigur că în multe situații cunoașterea valorii medii a variabilei (sau variabilelor) aleatoare care ne interesează nu este suficientă.

De altfel din două variabile aleatoare (care au valori medii) cu legi de probabilitate foarte diferite putem obține totdeauna două variabile aleatoare cu aceeași valoare medie, printr-o simplă translație a uneia din ele.

O variabilă aleatoare este mult mai bine caracterizată dacă pe lângă valoarea medie  $m$  cunoaștem și gradul de împrăștiere a valorilor variabilei în jurul lui  $m$ . Pentru aceasta trebuie definită o nouă caracteristică numerică cu care să măsurăm acest grad de împrăștiere.

S-a menționat faptul evident că valorile unei variabile aleatoare cad de o parte sau alta a valorii medii astfel ca media acestor abateri este nulă. Deci indicatorul de dispersie pe care-l vom utiliza trebuie să facă pozitive toate aceste abateri individuale. De exemplu, dacă variabila aleatoare simplă  $X$  ia valorile  $x_1, x_2, \dots, x_n$  respectiv cu probabilitățile  $p_1, p_2, \dots, p_n$  atunci abaterea variabilei  $X$  de la media  $m = \sum p_i x_i$  este  $x_i - m$  cu probabilitatea  $p_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) și media acestor abateri este  $M(X - m) = 0$ .

În schimb  $M(|X - m|) = \sum p_i |x_i - m| > 0$ . Valoarea medie a modului de abatere:  $|X - m|$  poate fi luată ca indicator al dispersiei dar se dovedește incomod în calcule. De aceea în mod curent se folosește un alt indicator.

**Definiție.** Se numește dispersia sau varianța variabilei aleatoare  $X$  care are valoarea medie  $m$  numărul  $D^2(X) = M(X - m)^2$ \* (dacă variabila aleatoare  $(X - m)^2$  are o valoare medie).

Se observă că definiția are sens atât pentru variabilele aleatoare discrete cât și pentru variabilele aleatoare de tip continuu. Dacă  $X$  este variabila aleatoare discretă care ia valorile  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , respectiv cu probabilitățile  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , ( $\sum p_i = 1$ ) atunci

$$D^2(X) = \sum p_i (x_i - m)^2$$

iar dacă  $X$  este variabilă aleatoare de tip continuu cu densitatea de repartiție  $f$  atunci

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx.$$

Proprietățile generale ale dispersiei pe care le vom prezenta acum sînt valabile pentru orice tip de variabile aleatoare (cu singura condiție ca dispersiile din membrul drept al egalităților să existe). Demonstrațiile se bazează pe proprietățile valorii medii.

(D<sub>1</sub>)  $D^2(X) \geq 0$  oricare ar fi variabila aleatoare  $X$ .

$0 = D^2(X)$  dacă și numai dacă  $X \equiv m$  (sau mai exact dacă  $P(X = m) = 1$ ).

(D<sub>2</sub>):  $D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ .

*Demonstrație.*  $D^2(X) = M(X - m)^2 = M(X^2 - 2mX + m^2) =$   
 $= M(X^2) - 2mM(X) + m^2 = M(X^2) - 2m^2 + m^2 =$   
 $= M(X^2) - m^2 = M(X^2) - [M(X)]^2$ .

*Corolar:*  $M(X^2) \geq [M(X)]^2$

(D<sub>3</sub>):  $D^2(cX) = c^2 D^2(X)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

(D<sub>4</sub>): Dacă variabilele aleatoare  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sînt independente două cite două, atunci

$$D^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \dots + D^2(X_n)$$

*Demonstrație.* Fie  $m_i = M(X_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Avem

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = m_1 + m_2 + \dots + m_n,$$

$$D^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(\sum X_i - \sum m_i)^2 = M(\sum (X_i - m_i))^2 =$$

$$M[\sum_i (X_i - m_i)^2 + 2\sum_{i < j} (X_i - m_i)(X_j - m_j)] =$$

$$\sum_i M(X_i - m_i)^2 + 2\sum_{i < j} M(X_i - m_i) M(X_j - m_j) =$$

$$= \sum_i D^2(X_i)$$

deoarece

$$M(X_i - m_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

\* Vom scrie  $M(X - m^2)$  în loc de  $M[(X - m)^2]$

De regulă gradul de împrăștiere a valorilor variabilei aleatoare  $X$  în jurul valorii sale medii se măsoară nu prin varianța sa  $D^2(X)$  ci prin *abaterea medie pătratică*  $D(X) = \sqrt{D^2(X)}$  care este exprimată în aceleași unități de măsură ca și variabila aleatoare  $X$ .

Cunoașterea valorii medii și a dispersiei unei variabile aleatoare ne permite să tragem unele concluzii asupra acesteia. Unul din rezultatele cele mai cunoscute și mai importante în acest sens este

**Inegalitatea lui Cebîșev.** *Dacă variabila aleatoare  $X$  are valoarea medie  $m$  și dispersia  $\sigma^2$  atunci*

$$P(|X - m| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}, \quad k \in \mathbf{R}, \quad k > 0.$$

*Demonstrație.* Vom presupune mai întâi că  $X$  este o variabilă aleatoare discretă. Dacă  $X$  ia valorile  $x_1, x_2, \dots$  respectiv cu probabilitățile  $p_1, p_2, \dots$  vom presupune, fără a restringe generalitatea

$$|x_1 - m| \leq |x_2 - m| \leq \dots$$

Fie  $s$  cel mai mic dintre indicii  $i$  pentru care  $|x_i - m| \geq k\sigma^*$ :

$$|x_1 - m| \leq |x_2 - m| \leq \dots \leq |x_{s-1} - m| < k\sigma \leq |x_s - m| \leq \\ \leq |x_{s+1} - m| \leq \dots$$

Rezultă că  $|X - m| \geq k\sigma$  dacă și numai dacă  $X$  ia una din valorile  $x_s, x_{s+1}, \dots$  adică

$$\{|X - m| \geq k\sigma\} = \{X = x_s\} \cup \{X = x_{s+1}\} \cup \dots$$

și în consecință

$$P(|X - m| \geq k\sigma) = P(X = x_s) + P(X = x_{s+1}) + \dots = p_s + p_{s+1} + \dots$$

Pe de altă parte

$$\sigma^2 = D^2(X) = p_1 |x_1 - m|^2 + p_2 |x_2 - m|^2 + \dots + p_{s-1} |x_{s-1} - m|^2 + \\ + p_s |x_s - m|^2 + \dots,$$

$$\sigma^2 \geq p_s |x_s - m|^2 + p_{s+1} |x_{s+1} - m|^2 + \dots \geq p_s k^2 \sigma^2 + p_{s+1} k^2 \sigma^2 + \dots,$$

$$\sigma^2 \geq k^2 \sigma^2 (p_s + p_{s+1} + \dots),$$

$$\frac{1}{k^2} \geq p_s + p_{s+1} + \dots = P(|X - m| \geq k\sigma).$$

\* Dacă nu există astfel de indici, inegalitatea este banală intrucit  $P(|X - m| > k\sigma) = 0$

Dacă  $X$  este o variabilă aleatoare de tip continuu avind densitatea de repartiție  $f$ , atunci

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x) dx \geq \int_{-\infty}^{m-k\sigma} (x-m)^2 f(x) dx + \int_{m+k\sigma}^{+\infty} (x-m)^2 f(x) dx \geq \\ &\geq \int_{-\infty}^{m-k\sigma} k^2 \sigma^2 f(x) dx + \int_{m+k\sigma}^{+\infty} k^2 \sigma^2 f(x) dx = \\ &= k^2 \sigma^2 [P(X \leq m - k\sigma) + P(X \geq m + k\sigma)] = \\ &= k^2 \sigma^2 P(\{X - m \leq -k\sigma\} \cup \{X - m \geq k\sigma\}) = k^2 \sigma^2 P(|X - m| \geq k\sigma).\end{aligned}$$

Inegalitatea lui Cebîșev poate fi scrisă și sub alte forme :

$$P(|X - m| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}, \quad a \in \mathbf{R}, a > 0$$

$$P(|X - m| < a) = 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

După cum se vede inegalitatea lui Cebîșev ne dă o margine inferioară pentru probabilitatea ca o variabilă aleatoare  $X$  care are valoarea medie  $m$  și abaterea medie pătratică  $\sigma$  să ia valori în intervalul  $(m - a, m + a)$ . Evaluarea dată de inegalitatea lui Cebîșev se poate dovedi în unele situații nesatisfăcătoare. De exemplu, conform acestei inegalități

$$P(|X - m| < 2\sigma) = 1 - \frac{1}{4} = 0,75.$$

Dacă  $X$  are distribuție normală (1.7) atunci

$$P(|X - m| < 2\sigma) = 0,95.$$

Dar importanța inegalității lui Cebîșev constă în generalitatea sa, ea este valabilă pentru orice variabilă aleatoare (care posedă o varianță).

Bineînțeles că cunoașterea legii de probabilitate a variabilei aleatoare, adică deținerea informației complete asupra variabilei, conduce la rezultate mult mai bune. Inegalitatea lui Cebîșev reprezintă un exemplu de concluzie trasă pe baza unor informații parțiale.

Desigur că cu cât numărul informațiilor este mai mare cu atât rezultatele sînt mai precise.

**Definiție.** Se numește *moment de ordinul  $p$  al variabilei aleatoare  $X$*  numărul :

$$m_p = M_p(X) = \sum_{i \in I} p_i x_i^p$$

dacă  $X$  este variabilă aleatoare discretă care ia valorile  $x_i$  respectiv cu probabilitățile  $p_i$  ( $i \in I$ ) (și suma din membrul drept este absolut convergentă dacă  $I$  este numărabilă) sau

$$M_p(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p f(x) dx$$

dacă  $X$  este o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiție  $f$  (dacă integrala scrisă este convergentă).

Se numește *moment concentrat de ordinul p* al variabilei aleatoare  $X$  numărul

$$\mu_p = M_p(X - m)$$

unde  $m$  este valoarea medie a lui  $X$ .

Se numește *moment absolut de ordinul p* al variabilei aleatoare  $X$  numărul

$$m_p = M_p(|X|).$$

*Momentul concentrat absolut de ordinul p* al acestei variabile este numărul  $M_p(|X - m|)$ .

Din cele spuse rezultă că speranța matematică a unei variabile aleatoare este momentul de ordinul întâi al variabilei, iar dispersia — momentul centrat de ordinul doi.

Încheiem și acest paragraf cu câteva probleme :

### Probleme

1° Se dau trei urne : prima conține o bilă albă și o bilă neagră ; a doua : două bile albe și șapte negre ; iar a treia o bilă albă și trei negre. Din prima urnă se extrage o bilă care se introduce în cea de a doua urnă, după care se extrage o bilă din urna a doua și se introduce în cea de a treia și în sfârșit se extrage o bilă din cea de a treia urnă. Se cere valoarea medie și dispersia numărului de bile albe apărute în cele trei extrageri.

*Rezolvare.* Evident că numărul de bile albe ce apar din prima urnă nu poate fi egal decât cu zero sau cu unu. Același lucru este valabil pentru numărul de bile albe ce apar din a doua urnă ca și pentru cel al bilelor albe ce apar din a treia urnă. Fie  $X_1, X_2, X_3$  numărul de bile albe ce apar din prima și respectiv din a doua și a treia urnă.

Avem :

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}; \quad P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Din formula probabilității totale (1.4) rezultă :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1 | X_1 = 1) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1 | X_1 = 0) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Înseamnă că

$$P(X_2 = 0) = \frac{3}{4}.$$

La fel :

$$\begin{aligned} P(X_3 = 1) &= P(X_2 = 1)P(X_3 = 1 | X_2 = 1) + P(X_2 = 0)P(X_3 = 1 | X_2 = 0) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$P(X_3 = 0) = \frac{3}{4}.$$

Distribuțiile celor trei variabile aleatoare sînt

$$X_1: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad X_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}; \quad X_3: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Și deci:

$$M(X_1) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$M(X_2) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$M(X_3) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Dacă  $X$  este numărul total de bile albe ce apar în cele trei extrageri atunci

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

de unde rezultă

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

2°. Se consideră cele trei urne din problema precedentă. Din fiecare din aceste urne se extrage cîte o bilă. Se cer valoarea medie și abaterea medie pătratică a numărului de bile albe obținute în cele trei extrageri.

*Rezolvare.* Fie  $Y_1, Y_2, Y_3$  numărul de bile albe respectiv din prima, a doua și a treia urnă, iar  $Y$  numărul total de bile albe obținute în cele trei extrageri. Legile de probabilitate ale acestor variabile aleatoare sînt:

$$Y_1: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad Y_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}; \quad Y_3: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Putem deci scrie

$$M(Y_1) = \frac{1}{2}; \quad M(Y_2) = \frac{2}{9}; \quad M(Y_3) = \frac{1}{4}$$

$$M(Y) = M(Y_1 + Y_2 + Y_3) = M(Y_1) + M(Y_2) + M(Y_3) = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{1}{4} = \frac{35}{36}.$$

Pe de altă parte observînd că  $Y_i^2 = Y_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) vom scrie

$$M(Y_1^2) = \frac{1}{2}; \quad M(Y_2^2) = \frac{2}{9}; \quad M(Y_3^2) = \frac{1}{4}.$$

$$D^2(Y_1) = M(Y_1^2) - [M(Y_1)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

$$D^2(Y_2) = M(Y_2^2) - [M(Y_2)]^2 = \frac{2}{9} - \frac{4}{81} = \frac{14}{81};$$

$$D^2(Y_3) = M(Y_3^2) - [M(Y_3)]^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Intrucît variabilele aleatoare  $X_1, Y_1, Y_2$  sînt independente, putem scrie:

$$\begin{aligned} D^2(Y) &= D^2(Y_1 + Y_2 + Y_3) = \overline{D^2(Y_1)} + D^2(Y_2) + D^2(Y_3) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{14}{81} + \frac{3}{16} = \frac{471}{1296}. \\ D(Y) &= \frac{\sqrt{471}}{36}. \end{aligned}$$

**Observație.** În problema 1° nu putem aplica variabilelor aleatoare  $X_1, X_2, X_3$ , proprietatea „dispersia șumei este egală cu suma dispersiilor” deoarece nu este îndeplinită condiția de independență necesară.

**3°.** Se fac trageri asupra unui obiect pînă cînd acesta este doborât. Pentru doborîrea lui este suficientă o tragere reușită. La fiecare tragere în parte probabilitatea de succes este  $1/3$ . Se cer valoarea medie și dispersia numărului de trageri.

**Rezolvare.** Fie  $X$  numărul de trageri necesare. Aceasta înscamnă că primele  $X - 1$  trageri sînt ratate, iar tragerea  $X$  este reușită.

Se observă că  $P(X = 1) = \frac{1}{3}$ . Evenimentul  $\{X = 2\}$  se poate scrie ca intersecția a două evenimente independente: „prima tragere este ratată” și „a doua tragere este reușită”. Rezultă  $P(X = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ . În general, evenimentul  $\{X = k\}$  ( $k \geq 3$ ) este: „prima tragere este ratată” și „a doua tragere este ratată” și... și „a  $(k - 1)$  tragere este ratată” și „a  $k$  tragere este reușită”.

Rezultă  $P(X = k) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{k-1}}{3^k}$ . Tabloul distribuției variabilei

$X$  este:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ 1/3 & 2/3^2 & 2^2/3^3 & \dots & 2^{k-1}/3^k & \dots \end{pmatrix}$$

În consecință

$$\begin{aligned} M(X) &= 1 \cdot 1/3 + 2 \cdot \frac{2}{3^2} + \dots + k \cdot \frac{2^{k-1}}{3^k} + \dots = \\ &= \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \dots \right). \end{aligned}$$

Pentru a obține suma seriei din paranteză, vom calcula mai întîi suma seriei mai generale:  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + kx^{k-1} + \dots$  ( $0 < x < 1$ ) care este derivata funcției:

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots$$

Vom obține

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + kx^{k-1} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (*)$$

Lufnd aici  $x = \frac{2}{3}$  rezultă

$$1 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \dots = 9$$

și deci

$$M(X) = 3.$$

Pentru a calcula dispersia lui  $X$  vom folosi formula

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Să observăm că distribuția variabilei  $X^2$  este

$$X^2: \begin{pmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & \dots \\ 1/3 & 2/3^2 & 2^2/3^2 & \dots \end{pmatrix}$$

Va rezulta

$$M(X^2) = \frac{1}{3} \left( 1^2 + 2^2 \cdot \frac{2}{3} + 3^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots \right).$$

Pentru a calcula  $M(X^2)$  vom scrie egalitatea (\*) sub forma

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + kx^k + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad 0 < x < 1$$

și prin derivare vom obține

$$1^2 + 2^2 \cdot x + 3^2 \cdot x^2 + \dots + k^2 \cdot x^{k-1} + \dots = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Această egalitate scrisă pentru  $x = \frac{2}{3}$  conduce la

$$M(X^2) = 15$$

și în definitiv

$$D^2(X) = 15 - 9 = 6.$$

4°. Variabila aleatoare  $X$  are densitatea de repartiție

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin (-1, 1), \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Să se calculeze valoarea medie și dispersia variabilei aleatoare  $Z = 2X^2 + 1$ .

**Rezolvare.** Pentru calcularea valorii medii aplicăm formula

$$M(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

cu  $g(x) = 2x^2 + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Obținem

$$M(Z) = \int_{-1}^1 (2x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{5}{3}.$$

În mod asemănător, observăm că

$$D^2(Z) = M \left[ \left( Z - \frac{5}{3} \right)^2 \right] = M \left[ \left( 2X^2 + 1 - \frac{5}{3} \right)^2 \right] = M \left[ \left( 2X^2 - \frac{2}{3} \right)^2 \right]$$

pentru calculul dispersiei vom folosi aceeași formulă, cu  $g(x) = \left( 2x^2 - \frac{2}{3} \right)^2$ .

Vom avea

$$D^2(Z) = \left( 2x^2 - \frac{2}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{16}{45}$$

*Observație.* Dacă nu am fi folosit formula menționată în rezolvare, ar fi trebuit să determinăm mai întâi densitatea de repartiție a variabilei aleatoare  $Z$  așa cum am făcut în problema 5° din 1.5 ceea ce ar fi dus la lungirea calculului.

5°. Pe axa  $Oy$  a unui sistem de axe  $xOy$  se ia punctul  $A(0; 1)$ . O dreaptă care trece prin  $A$  face cu  $Oy$  unghiul  $\alpha$  și taie  $Ox$  în punctul  $P(\lambda; 0)$ . Se cere valoarea medie a lui  $\lambda$  știind că  $\alpha$  are densitatea de repartiție

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \notin \left( 0, \frac{\pi}{4} \right), \\ \frac{4}{\pi} & \text{dacă } x \in \left( 0, \frac{\pi}{4} \right). \end{cases}$$

*Rezolvare.* Deoarece  $\lambda = \operatorname{tg} \alpha$ , putem scrie

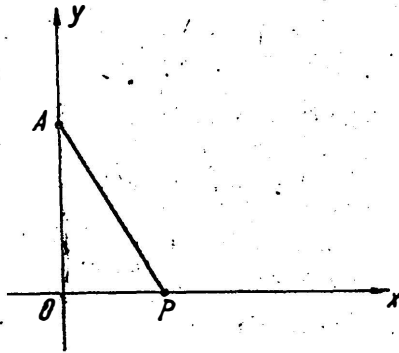


Fig. 1.19

$$M(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\pi} \operatorname{tg} x dx = \frac{4}{\pi} \ln \frac{1}{\cos x} = \frac{2 \ln 2}{\pi}$$

6°. Dacă o variabilă aleatoare are densitate de repartiție și valoare medie, atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - F(x)) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x F(x) = 0,$$

unde  $F$  este funcția de repartiție corespunzătoare.

**Rezolvare.** Fie  $f$  densitatea de repartiție a variabilei aleatoare. Prin ipoteză integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)du$$

este convergentă și deci

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^{+\infty} uf(u)du = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x uf(u)du = 0.$$

Pentru  $x > 0$ , avem :

$$0 \leq x(1 - F(x)) = x \int_x^{+\infty} f(u)du \leq \int_x^{+\infty} uf(u)du$$

și prima parte a problemei este rezolvată. La fel, dacă  $x < 0$ .

$$0 \geq xF(x) = x \int_{-\infty}^x f(u)du \geq \int_{-\infty}^x uf(u)du$$

și problema este complet rezolvată.

**7°. Dacă o variabilă aleatoare are o densitate de repartiție  $f$  și o valoare medie  $m$ , atunci**

$$m = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))dt - \int_{-\infty}^0 F(t)dt$$

unde  $F$  este funcția de repartiție corespunzătoare.

**Rezolvare.** Este suficient să demonstrăm egalitățile

$$\int_0^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} (1 - F(t))dt, \quad (i)$$

$$\int_0^{\infty} tf(t)dt = - \int_{-\infty}^0 F(t)dt. \quad (ii)$$

Pentru aceasta vom integra prin părți

$$\int_0^x tf(t)dt$$

luind  $t = u$ ;  $f(t)dt = dv$  și vom obține :

$$\int_0^x tf(t)dt = xF(x) - \int_0^x F(t)dt. \quad (iii)$$

Dacă facem  $x \rightarrow -\infty$  în această egalitate, rezultă ținând cont de cele demonstrate în problema 5°

$$\int_0^{-\infty} tf(t)dt = - \int_0^{-\infty} F(t)dt$$

care este echivalentă cu (ii).

Să mai observăm că (III) se mai poate scrie

$$\int_0^x t f(t) dt = -x(1 - F(x)) - \int_0^x (1 - F(t)) dt$$

În care dacă facem  $x \rightarrow \infty$  ținând cont de problema 5° rezultă (i).

8°. Variabila aleatoare  $X$  are valoare medie  $m = 30$  și abaterea medie-pătratică  $\sigma = 4$ . Să se arate că

$$P(16 < X < 44) \geq \frac{45}{49}.$$

Rezolvare. Adunând  $-30$  în cei trei membri ai dublei inegalități  $16 < X < 44$  rezultă că acesta se mai poate scrie  $|X - 30| < 14$ . Conform inegalității lui Cebîșev:

$$P(|X - 30| < 14) \geq 1 - \frac{4^2}{14^2} = \frac{45}{49}.$$

9°. Să se arate că dacă variabila aleatoare pozitivă  $X$  are valoarea medie  $m$  și  $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} nP(n \leq X < n+1)$  atunci

$$\lambda \leq m \leq 1 + \lambda.$$

Demonstrație. Întrucît valoarea lui  $X$  se găsește cu certitudine într-unul din intervalele  $[n, n+1)$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) putem scrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n \leq X < n+1) = 1.$$

Să construim acum variabilele aleatoare discrete  $Y$  și  $Z$  astfel:

$$Y = n \quad \text{dacă } n \leq X < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$Z = n+1 \quad \text{dacă } n \leq X < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Se observă că

$$Y \leq X < Z$$

de unde obținem

$$M(Y) \leq M(X) \leq M(Z) \quad (\alpha)$$

Valorile medii ale variabilelor aleatoare discrete  $Y$  și  $Z$  sînt

$$M(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(Y = n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n \leq X < n+1) = \lambda,$$

$$\begin{aligned} M(Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P(Z = n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P(n \leq X < n+1) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(n \leq X < n+1) + \sum_{n=0}^{\infty} P(n \leq X < n+1) = \lambda + 1. \end{aligned}$$

Revenind la relația  $(\alpha)$  rezultă

$$\lambda \leq m \leq \lambda + 1.$$

*Observație.* De fapt am demonstrat că  $X$  are o valoare medie  $m$  ( $m < \infty$ ) dacă și numai dacă  $\lambda < \infty$  și  $\lambda \leq m \leq \lambda + 1$ .

**10°.** Variabilele aleatoare pozitive  $X_n$ ,  $n \geq 1$  au aceeași valoare medie  $m$ . Fie  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , iar  $X$  o variabilă aleatoare care ia valori întregi și pozitive astfel că dacă

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{dacă } X = k \\ 0 & \text{dacă } X \neq k \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

atunci variabilele aleatoare  $X_k$  și  $Z_k = Y_1 + \dots + Y_{k-1}$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) sînt independente. Să se arate că:

$$M(S_X) = mM(X).$$

În particular, dacă variabilele aleatoare  $X_n$ ,  $n \geq 1$  sînt pozitive, independente și au aceeași lege de probabilitate, iar

$$N = N(t) = \sup \{n : S_n \leq t\}$$

$$N = 0 \text{ dacă } S_1 = X_1 > t$$

atunci variabila aleatoare  $X = N + 1$  verifică ipotezele făcute mai sus asupra variabilei  $X$  și deci verifică concluzia problemei (Ecuatia lui Wald).

*Rezolvare.* Direct din definiția valorii medii a variabilelor aleatoare discrete rezultă

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k); \quad M(Y_k) = 1P(X = k) + 0 \cdot P(Y = k) = P(X = k).$$

În consecință

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kM(Y_k).$$

Să mai observăm că

$$\sum_{k=1}^{\infty} Y_k = 1$$

deoarece, în funcție de valoarea pe care o ia  $X$ , una din variabilele  $Y_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) este egală cu 1 toate celelalte luînd valoarea zero. De aici reiese că variabilele aleatoare  $X_k$  și  $Y_k + Y_{k+1} + \dots = 1 - Z_k$  sînt independente oricare ar fi  $k = 2, 3, 4, \dots$

Pe de altă parte, întrucît egalitățile  $\{X = k\}$  și  $\{Y_k = 1\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) sînt echivalente:

$$S_X = S_1 Y_1 + S_2 Y_2 + S_3 Y_3 + \dots$$

și putem, deci, scrie:

$$\begin{aligned} M(S_X) &= M(S_1 Y_1) + M(S_2 Y_2) + M(S_3 Y_3) + \dots = M(X_1 Y_1) + \\ &+ M[(X_1 + X_2) Y_2] + M[(X_1 + X_2 + X_3) Y_3] + \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M[X_1(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots)] + M[X_2(Y_2 + Y_3 + \dots)] + \\
&\quad + M[X_3(Y_3 + \dots)] + \dots = m \cdot M(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots) + \\
&\quad + mM(Y_2 + Y_3 + \dots) + m(Y_3 + \dots) + \dots = m(M(Y_1) + \\
&\quad + 2 M(Y_2) + 3 M(Y_3) + \dots) = mM(X).
\end{aligned}$$

În cazul particular considerat este clar că variabilele aleatoare  $X_n$  ( $n \geq 1$ ) avînd aceeași lege de probabilitate au și aceeași valoare medie. Pe de altă parte variabilele aleatoare  $X_k$  și  $Z_k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) sînt independente deoarece aceasta din urmă se exprimă numai cu ajutorul variabilelor aleatoare  $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$ :

$$Z_k = \begin{cases} 1 & \text{dacă } S_{k-1} > t, \\ 0 & \text{dacă } S_{k-1} \leq t \end{cases} \quad k = 2, 3, \dots$$

**Observație.** Pe parcursul demonstrației am folosit următoarea proprietate:  $M(X_1 + X_2 + \dots) = M(X_1) + M(X_2) + \dots$  unde apare o mulțime numărabilă de variabile aleatoare. Această proprietate este valabilă în condiții destul de generale. Dacă de exemplu variabilele aleatoare considerate sînt pozitive, proprietatea este valabilă. De multe ori se acceptă ca variabilele aleatoare să aibă valoare medie infinită. Cele mai multe din proprietățile întîlnite rămîn valabile și în acest caz. Singura măsură de prevedere în acest caz este evitarea expresiilor de forma  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$  etc. O variabilă aleatoare  $X$  cu densitatea de repartiție  $f$  se numește *cvasilintegrabilă* dacă

$$\int_{-\infty}^0 xf(x)dx > -\infty \quad \text{sau} \quad \int_0^{\infty} xf(x)dx < +\infty.$$

Dacă este satisfăcută numai prima din aceste relații se ia  $M(X) = +\infty$ , iar dacă este satisfăcută numai a doua  $M(X) = -\infty$ . Dacă sînt satisfăcute amîndouă, atunci  $M(X) \in \mathbb{R}$ .

Să mai consemnăm că dacă variabilele aleatoare  $X_i$ ,  $i \in I$  sînt independente și  $I_1 \subset I$ ,  $I_2 \subset I$ ,  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ,  $I_1, I_2$  finite, atunci variabilele aleatoare  $Y = f(X_j, j \in I_1)$ ,  $Z = g(X_j, j \in I_2)$  sînt independente  $f$  și  $g$  fiind aplicații  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  sau  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  astfel ca  $Y$  și  $Z$  să fie variabile aleatoare.

Condițiile  $I_1, I_2$  finite nu sînt necesare. În general, orice eveniment constînd într-o afirmație referitoare la variabilele aleatoare  $X_i$ ,  $i \in I_1$ , este independent de orice eveniment constînd într-o afirmație referitoare la variabilele aleatoare  $X_j$ ,  $j \in I_2$ .

Proprietatea rămîne valabilă dacă se consideră mai multe submulțimi disjuncte două cîte două ale lui  $I$ .

**11°.** Se aruncă un ac de lungime  $l < 2a$  pe un plan hașurat de o rețea de drepte paralele cu distanța  $2a$  între dreptele consecutive. Se cere probabilitatea ca acul să taie una din dreptele rețelei. Pe același plan se aruncă un poligon convex cu diametrul mai mic decît  $2a$ . Se cere probabilitatea ca poligonul să fie traversat de o dreaptă a rețelei.

**Rezolvare.** Cele două rezultate cerute au fost obținute anterior. Este vorba de problema 5° din 1.1 și respectiv de problema 5° din 1.3. Acum vom da o rezolvare bazată pe proprietățile valorii medii.

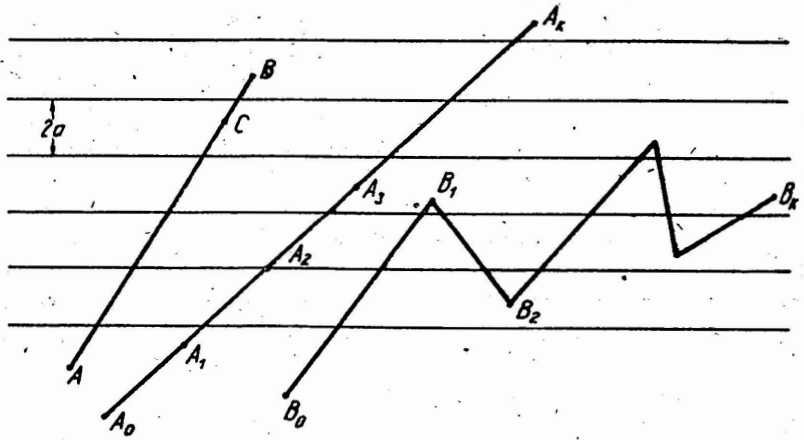


Fig. 1.20

Vom presupune pentru început că se aruncă un ac de lungime arbitrară. Dacă  $a$  este fixat, atunci valoarea medie a numărului de drepte ale rețelei intersectate de ac nu depinde decât de lungimea  $l$  a acului. Fie  $m(l)$  această valoare medie. Să observăm că

$$l_1 \leq l_2 \Rightarrow m(l_1) \leq m(l_2).$$

Într-adevăr, dacă  $AB = l_2$ ,  $AC = l_1$ , ca în figura 1.20 iar  $X$ ,  $X_1$  și  $X_2$  reprezintă numărul de drepte intersectate respectiv de  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$ , atunci

$$X_2 = X_1 + X; \quad M(X_2) = M(X_1) + M(X)$$

și ținând cont că  $M(X_2) = m(l_2)$ ;  $M(X_1) = m(l_1)$ ;  $M(X) = m(l_2 - l_1)$  rezultă

$$m(l_2) - m(l_1) = m(l_2 - l_1) \geq 0.$$

Să arătăm acum că  $m(l)$  este proporțional cu  $l$ . Dacă  $l_2 = kl_1$  unde  $k$  este un întreg pozitiv și  $X_i$  este numărul dreptelor intersectate de segmentul (acul)  $A_{i-1}A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) iar  $X$  este numărul dreptelor intersectate de acul  $A_0A_k$  (figura 1.20) atunci în ipoteza

$$A_0A_1 = A_1A_2 = \dots = A_{k-1}A_k = l_1$$

vom avea

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_k \Rightarrow M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_k).$$

Ținând cont că cu notațiile noastre

$$M(X) = m(l_2); \quad M(X_i) = m(l_1), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

rezultă

$$m(l_2) = km(l_1).$$

Dacă  $l_2 = rl$ , unde  $r = \frac{k}{n}$  ( $k, n$  întregi pozitivi) atunci fie

$$u = \frac{l_2}{k} = \frac{l_1}{n}, \quad l_2 = ku; \quad l_1 = nu.$$

Conform celor spuse mai înainte

$$m(l_2) = km(u); m(l_1) = nm(u)$$

adică

$$m(l_2) = rm(l_1).$$

Dacă  $l_2 = xl_1$  unde  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x > 0$ , atunci fie  $(r_n)$  și  $(r'_n)$  două șiruri de numere raționale astfel ca  $r_n \uparrow x$ ;  $r'_n \downarrow x$ . Întrucît

$$r_n l_1 \leq l_2 \leq r'_n l_1$$

putem scrie, ținînd cont de cele arătate anterior :

$$r_n m(l_1) \leq m(l_2) \leq r'_n m(l_1).$$

Făcînd în aceste inegalități  $n \rightarrow \infty$  rezultă

$$m(l_2) = xm(l_1)$$

și cu aceasta s-a demonstrat proporționalitatea dintre  $m(l)$  și  $l$ .

Fie

$$m(l) = c \cdot l, c \in \mathbf{R}; c > 0. \quad (*)$$

Dacă pe planul considerat se aruncă o linie poligonală rigidă  $B_0 B_1 \dots B_k$  (figura 1.20) și  $l_i = B_{i-1} B_i$ ,  $X_i$  este numărul de drepte intersectate de  $B_{i-1} B_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) iar  $X$  este numărul punctelor de intersecție dintre linia poligonală și rețeaua de drepte paralele, atunci :

$$X = \sum_{i=1}^k X_i \Rightarrow M(X) = \sum_{i=1}^k M(X_i) = \sum_{i=1}^k c \cdot l_i.$$

Rezultă că valoarea medie, a lui  $X$  este proporțională cu lungimea  $L$ , a liniei poligonale :

$$M(X) = c \cdot L. \quad (**)$$

În particular, dacă se aruncă pe plan un poligon convex rigid, atunci valoarea medie a numărului de puncte în care poligonul este tăiat de dreptele rețelei este  $cL$ , unde  $L$  este perimetrul poligonului.

Să presupunem acum că pe plan se aruncă un cerc rigid de rază  $R$ . Fie  $L_n$  și  $L'_n$  perimetrul poligonului regulat cu  $n$  laturi înscris în cerc și respectiv perimetrul poligonului regulat cu  $n$  laturi circumscris cercului. Dacă  $X$ ,  $X_n$ ,  $X'_n$  reprezintă numărul punctelor de intersecție ale rețelei respectiv cu : cercul, poligonul înscris, poligonul circumscris, atunci :

$$X_n \leq X \leq X'_n$$

deoarece orice dreaptă care taie poligonul înscris taie și cercul, iar orice dreaptă care taie cercul taie și poligonul circumscris. Rezultă

$$M(X_n) \leq M(X) \leq M(X'_n)$$

sau, pe baza celor anterioare

$$cL_n \leq M(X) \leq cL'_n.$$

Să facem aici  $n \rightarrow \infty$  ținînd cont că  $L_n \rightarrow 2\pi R$ ,  $L'_n \rightarrow 2\pi R$ . Vom obține

$$M(X) = 2c\pi R. \quad (***)$$

(Condiția că curba care se aruncă este un cerc, nu este esențială. Se pot considera și alte curbe convexe de lungime arbitrară  $L$  și se deduce că valoarea medie a numărului punctelor de intersecție cu rețeaua este  $c \cdot L$ ).

Dar dacă se aruncă un cerc de rază  $R = a$ , atunci  $X \equiv 2$ , adică în orice poziție ar cădea cercul, numărul punctelor de intersecție cu rețeaua este egal cu 2. În consecință  $M(X) = 2$  și înlocuind în (\*\*\*) rezultă

$$2 = 2c\pi a; \quad c = \frac{1}{a\pi}.$$

Revenind la relația (\*) vom scrie

$$m(l) = \frac{1}{a\pi}.$$

Dacă  $l < 2a$ , atunci numărul punctelor de intersecție cu rețeaua poate fi numai 0 sau 1. Dacă  $p$  este probabilitatea ca acul să întâlnească o dreaptă a rețelei, atunci acest număr are distribuția

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

și deci :

$$p = m(l) = \frac{1}{a\pi}.$$

Dacă se aruncă un poligon convex de diametru mai mic decât  $2a$ , atunci numărul punctelor de intersecție cu rețeaua poate fi 0 sau 2 (cu excepții de probabilitate nulă), distribuția acestui număr  $X$  este

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1-P & P \end{pmatrix}$$

unde  $P$  este probabilitatea ca poligonul să fie tăiat de o dreaptă a rețelei. Rezultă ținând cont de (\*\*)

$$2P = M(X) = c \cdot L = \frac{L}{a\pi}; \quad P = \frac{L}{2a\pi}$$

unde  $L$  este perimetrul poligonului.

**12°.** Evenimentele independente  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sînt independente și au probabilități de realizare cunoscute  $P(A_i) = p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Se cer valoarea medie și dispersia numărului de evenimente care se realizează.

*Rezolvare.* Prima metodă. Fie  $X$  numărul evenimentelor care se realizează.  $P(X = k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) este coeficientul lui  $x^k$  din polinomul

$$Q(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2) \dots (p_nx + q_n) \quad (\alpha)$$

unde  $q_i = 1 - p_i$ . (Schema lui Poisson - 1.4). Dacă

$$Q(x) = P_0 + P_1x + P_2x^2 + \dots + P_nx^n \quad (\beta)$$

atunci distribuția lui  $X$  este

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \dots n \\ -P_0 & P_1 & P_2 \dots P_n \end{pmatrix}$$

și valoarea sa medie este

$$M(X) = \sum_{k=1}^n kP_k.$$

Derivind în  $(\beta)$  rezultă

$$Q'(x) = P_1 + 2xP_2 + \dots + nx^{n-1}P_n,$$

$$Q'(1) = \sum_{k=1}^n kP_k = M(X).$$

Derivind în  $(\alpha)$  obținem

$$Q'(x) = p_1 \prod_{i \neq 1} (p_i x + q_i) + p_2 \prod_{i \neq 2} (p_i x + q_i) + \dots + p_n \prod_{i \neq n} (p_i x + q_i) \quad (\gamma)$$

$$Q'(1) = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

În concluzie

$$M(X) = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

Pentru a calcula dispersia  $D^2(X)$  folosim formula

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

și deci trebuie să determinăm  $M(X^2)$ .

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 P_k.$$

Din derivarea egalității

$$xQ'(x) = P_1 x + 2P_2 x^2 + \dots + nP_n x^n$$

rezultă

$$Q'(x) + xQ''(x) = P_1 + 2^2 P_2 x + \dots + n^2 P_n x^{n-1},$$

$$Q'(1) + Q''(1) = \sum_{k=1}^n k^2 P_k = M(X^2).$$

Derivind în  $(\gamma)$  reiese

$$Q''(1) = p_1 \sum_{i \neq 1} p_i + p_2 \sum_{i \neq 2} p_i + \dots + p_n \sum_{i \neq n} p_i,$$

$$Q''(1) = p_1(M(X) - p_1) + p_2(M(X) - p_2) + \dots + p_n(M(X) - p_n).$$

$$Q''(1) = M(X)(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) = [M(X)]^2 - (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2).$$

În sfârșit

$$D^2(X) = M(X^2) - M(X)^2 = p_1 + p_2 + \dots + p_n - p_1^2 - p_2^2 - \dots - p_n^2 = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n.$$

*Metoda a doua.* Introducem variabilele aleatoare  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{dacă } A_k \text{ se realizează,} \\ 0 & \text{dacă } A_k \text{ nu se realizează.} \end{cases}$$

Numărul evenimentelor care se realizează este în acest caz

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

și deci

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n).$$

Distribuția variabilei aleatoare  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) fiind

$$X_k: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P(A_k) & 1 - P(A_k) \end{pmatrix}$$

avem:

$$M(X_k) = P(A_k) = p_k$$

și deci

$$M(X) = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

(Din această rezolvare reiese că rezultatul acesta este valabil chiar dacă evenimentele  $A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  nu sînt independente.)

Variabilele aleatoare  $X_k$  sînt independente deoarece evenimentele  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) sînt independente. Această observație ne permite să scriem

$$D^2(X) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \dots + D^2(X_n).$$

Și cum pentru orice  $k = 1, 2, \dots, n$

$$D^2(X_k) = M(X_k^2) - [M(X_k)]^2 = p_k - p_k^2 = p_k q_k$$

va rezulta

$$D^2(X) = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n.$$

## 1.7. CITEVA LEGI DE PROBABILITATE UZUALE

Pentru început vom prezenta cîteva distribuții discrete unidimensionale.

**Distribuția binomială.** Spunem că variabila aleatoare  $X$  are distribuție binomială cu parametrii  $n$  și  $p$  ( $n$  întreg pozitiv,  $0 < p < 1$ ) dacă pentru orice  $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

unde  $q = 1 - p$ .

Dacă  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sînt evenimente independente și  $P(A_i) = p$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  iar  $X$  numărul evenimentelor care se realizează atunci  $X$  are distribuție binomială cu parametrii  $n$  și  $p$ . (Schema lui Bernoulli — 1.4)

În particular, dacă  $A$  este un eveniment legat de o anumită experiență aleatoare și probabilitatea ca  $A$  să se producă cînd efectuăm o singură dată experiența este  $P(A) = p$ , atunci numărul  $X$  al realizărilor lui  $A$  cînd efectuăm de  $n$  ori experiența are distribuție binomială cu parametrii  $n$  și  $p$ .

Dacă o variabilă aleatoare  $X$  are distribuție binomială cu parametrii  $n$  și  $p$  atunci valoarea medie și dispersia lui  $X$  sînt:

$$M(X) = np; D^2(X) = npq, (q = 1 - p).$$

Aceste egalități reprezintă cazuri particulare ale problemei 12° din 1.6. Cititorul poate găsi cu ușurință momentele sau momentele centrate de ordinul doi, trei, patru care au expresii ceva mai complicate.

**Distribuția binomială cu exponent negativ.** Spunem că variabila aleatoare  $X$  are distribuție binomială cu exponent negativ cu parametrii  $m$  și  $p$  ( $m$  întreg pozitiv,  $0 < p < 1$ ) dacă poate lua valorile  $m, m+1, m+2, \dots$  și

$$P(X = k) = C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}; \quad k \geq m$$

unde  $q = 1 - p$ .

O experiență se efectuează pînă la cea de a  $m$ -a realizare a unui eveniment  $A$  legat de ea. Dacă probabilitatea acestui eveniment cînd se face o singură dată experiența este  $p$ , atunci numărul  $X$  de efectuări ale experienței este variabilă aleatoare care are distribuție binomială cu exponent negativ cu parametrii  $m$  și  $p$ .

Într-adevăr, evenimentul  $\{X = k\}$  se scrie ca intersecția a două evenimente: „în primele  $k-1$  efectuări ale experienței evenimentul  $A$  se produce de  $m-1$  ori” și „în a  $k$ -a efectuare a experienței se produce  $A$ ”. Probabilitatea primului din aceste două evenimente este  $C_{k-1}^{m-1} p^{m-1} q^{k-m}$  (schema lui Bernoulli — 1.4) iar probabilitatea celui de al doilea este  $p$ . Deci :

$$P(X = k) = p C_{k-1}^{m-1} p^{m-1} q^{k-m} = C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}.$$

Dacă o variabilă aleatoare  $X$  are distribuție binomială cu exponent negativ cu parametrii  $m$  și  $p$  atunci valoarea medie și dispersia lui  $X$  sînt :

$$M(X) = \frac{m}{p}; \quad D^2(X) = \frac{mq}{p^2}; \quad (q = 1 - p).$$

Să arătăm prima din aceste două egalități, cea de-a doua tratîndu-se în mod analog. Pentru aceasta vom observa că pentru  $x \in (-1, 1)$  :

$$(1 - x)^{-m} = 1 + \frac{x}{1!} m + \frac{x^2}{2!} m(m+1) + \dots = \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} x^{-m}$$

(Numele distribuției provine din observația că  $C_{k-1}^{m-1} p^m q^{-m}$  este termenul general al dezvoltării  $\left(\frac{1}{p} - \frac{q}{p}\right)^{-m}$  după cum reiese din egalitățile :

$$C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = p^m (1 - q)^{-m} \triangleq \left(\frac{1}{p} - \frac{q}{p}\right)^{-m}.$$

Mai departe putem scrie

$$\frac{x^m}{(1-x)^m} = \sum_{k \geq m} C_{k-1}^{m-1} x^k$$

și prin derivare :

$$\left(\frac{x^m}{(1-x)^m}\right)' = \sum_{k \geq m} k C_{k-1}^{m-1} x^{k-1} = \frac{m x^{m-1}}{(1-x)^{m+1}}.$$

Să trecem acum la calculul valorii medii a variabilei aleatoare  $X$  :

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{k \geq m} k \cdot C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = p^m \cdot q^{-m+1} \sum_{k \geq m} k C_{k-1}^{m-1} q^{k-1} = \\ &= p^m q^{-m+1} \frac{m q^{m-1}}{p^{m+1}} = \frac{m}{p}. \end{aligned}$$

**Distribuția hipergeometrică.** Variabila aleatoare  $X$  are distribuție hipergeometrică cu parametrii  $a, b, n$  ( $a, b, n$  întregi pozitivi  $n \leq a + b$ ) dacă poate lua orice valoare întreagă între  $\max(0, n - b)$  și  $\min(n, a)$  și

$$P(X = k) = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

pentru orice  $k$  întreg  $\max(0, n - b) \leq k \leq \min(n, a)$ .

Este ușor de arătat că este îndeplinită condiția  $\sum_k P(X = k) = 1$ .

Dacă dintr-o urnă care conține  $a$  bile albe și  $b$  bile negre se extrag  $n$  bile una câte una, fără întoarcerea bilei extrase în urnă (sau toate  $n$  simultan) iar  $X$  este numărul de bile albe extrase, atunci  $X$  are distribuție hipergeometrică cu parametrii  $a, b, n$  (schema bilei neîntoarse — 1.4).

Valoarea medie și dispersia unei astfel de variabile aleatoare sînt:

$$M(X) = np; \quad D^2(X) = npq \frac{a+b-n}{a+b-1}$$

$$\text{unde } p = \frac{a}{a+b}; \quad q = \frac{b}{a+b}$$

Demonstrarea acestor egalități se face cu ajutorul identității

$$\sum_{k=0}^n C_a^k \cdot C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$$

(adică  $\sum_k P(X = k) = 1$ ) care se mai poate deduce calculînd coeficientul lui  $x^n$  în fiecare membru al relației  $(1+x)^a \cdot (1+x)^b = (1+x)^{a+b}$ .

$$M(X) = \sum_k k \cdot \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{a}{C_{a+b}^n} \sum_k C_{a-1}^{k-1} \cdot C_b^{n-k} = \frac{a}{C_{a+b}^n} \cdot C_{a+b-1}^{n-1} = \frac{an}{a+b}$$

Pentru calculul dispersiei vom scrie mai întii:

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \sum k^2 \cdot \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \sum k(k-1) \cdot \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} + \sum k \cdot \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \\ &= \frac{a(a-1)}{C_{a+b}^n} \sum C_{a-2}^{k-2} \cdot C_b^{n-k} + M(X) = \frac{a(a-1)}{C_{a+b}^n} \cdot C_{a+b-2}^{n-2} + np. \end{aligned}$$

Efectuînd calculele se obține

$$D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = npq \frac{a+b-n}{a+b-1}$$

Valoarea medie se poate calcula ușor și altfel. Pentru aceasta considerăm o urnă cu  $a$  bile albe și  $b$  bile negre din care se extrag una câte una  $n$  bile (fără întoarcere) și luăm variabilele aleatoare  $X_k$ :

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{dacă la extragerea } k \text{ se obține o bilă albă,} \\ 0 & \text{dacă la extragerea } k \text{ se obține o bilă neagră.} \end{cases}$$

Fiecare din aceste variabile aleatoare are distribuția

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b} \end{pmatrix}$$

iar numărul total de bile albe obținut este  $X = \sum_{k=1}^n X_k$  și deci

$$M(X) = \sum_k M(X_k) = \frac{na}{a+b}.$$

Nu putem afirma că  $D^2(X)$  este  $\sum D^2(X_k)$  deoarece variabilele aleatoare  $X_k$  nu sînt independente două cîte două.

**Distribuția Poisson.** Spunem că variabila aleatoare  $X$  are distribuție Poisson cu parametrul  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) dacă poate lua orice valoare întregă negativă și

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Se observă imediat că

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Valoarea medie și dispersia unei variabile aleatoare  $X$  cu distribuție Poisson de parametru  $\lambda$  sînt:

$$M(X) = \lambda; \quad D^2(X) = \lambda.$$

Într-adevăr,

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Să calculăm acum  $M(X^2)$ . Pentru aceasta observăm:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} - e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \\ &= M(X^2) - M(X) = M(X^2) - \lambda. \\ M(X^2) &= \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

În consecință

$$D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

În mod asemănător se pot calcula momentele și momentele centrate de ordin mai mare. Propunem cititorului să calculeze momentele centrate de ordinul 3 și de ordinul 4 corespunzătoare unei distribuții Poisson cu parametrul  $\lambda$ ; valorile acestor momente sînt, respectiv  $\lambda$  și  $3\lambda^2 + \lambda$ .

Să arătăm acum legătura dintre distribuția binomială și distribuția Poisson. Pentru aceasta vom fixa un întreg pozitiv  $k$  și pentru  $n > k$  vom considera variabilele  $X_n$  avînd distribuție binomială cu parametrii  $n$  și  $p_n$  astfel ca toate să aibă aceeași valoare medie  $\lambda$ :

$$M(X_n) = n \cdot p_n = \lambda; \quad p_n = \frac{\lambda}{n}.$$

Cu aceste notații putem scrie

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k q_n^{n-k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Aceasta ne arată că dacă  $p_n$  este suficient de mic și  $n$  suficient de mare, atunci putem aproxima distribuția binomială cu parametrii  $n$  și  $p_n$  prin distribuția Poisson de parametru  $\lambda = np_n$ . Din acest motiv distribuția Poisson se mai numește *legea evenimentelor rare*.

Dacă  $n \geq 30$  și  $np < 5$  atunci distribuția Poisson cu parametrul  $\lambda = np$  este o bună aproximare a distribuției binomiale cu parametrii  $n$  și  $p$ .

În continuare vom expune câteva distribuții continue și vom începe cu cea mai frecvent întâlnită.

**Distribuția normală sau legea normală.** Spunem că o variabilă aleatoare are distribuție normală sau că urmează legea normală cu parametrii  $m$  și  $\sigma$  dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in \mathbb{R}, \sigma > 0).$$

Să arătăm că funcția  $f$  de mai sus este într-adevăr o densitate de repartiție. Luind

$$\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = y; \quad dx = \sigma\sqrt{2} dy$$

rezultă :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

Ne-a rămas de arătat

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pentru aceasta introducem funcția de două variabile

$$h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$$

și considerăm domeniile :

$D_1$  : domeniul mărginit de semiaxele pozitive și cercul

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

$D_2$  : domeniul mărginit de semiaxele pozitive și cercul

$$x^2 + y^2 = 2r^2$$

$D$  : domeniul mărginit de semiaxele pozitive și dreptele

$$x = r; \quad y = r, \quad r > 0.$$

Se observă (figura 1) că

$$D_1 \subset D \subset D_2.$$

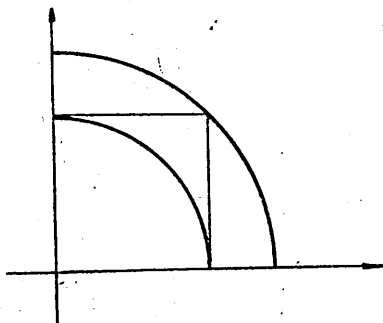


Fig. 1.21

Putem deci scrie :

$$\iint_{D_1} h(x, y) dx dy \leq \iint_D h(x, y) dx dy \leq \iint_{D_2} h(x, y) dx dy.$$

Pentru calculul primei și ultimei integrale trecem la coordonate polare :

$$x = \rho \cos \alpha ; y = \rho \sin \alpha$$

și obținem :

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} h(x, y) dx dy &= \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\alpha = \int_0^r \rho e^{-\rho^2} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha = \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-r^2} \right) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2}). \end{aligned}$$

La fel :

$$\iint_{D_2} h(x, y) dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2r^2}).$$

Pe de altă parte

$$\iint_D h(x, y) dx dy = \int_0^r \int_0^r e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy = \left( \int_0^r e^{-y^2} dy \right)^2.$$

Revenind la inegalitățile de mai sus vom scrie

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2}) \leq \left( \int_0^r e^{-y^2} dy \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2r^2}).$$

Făcînd  $r \rightarrow \infty$  rezultă

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Graficul funcției  $f$  are formă de clopot. Dreapta  $x = m$  este o axă de simetrie a acestui grafic. Pentru  $x = m$  se obține valoarea maximă care este  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ . Punctele  $x = m - \sigma$  și  $x = m + \sigma$  sînt puncte de inflexiune.

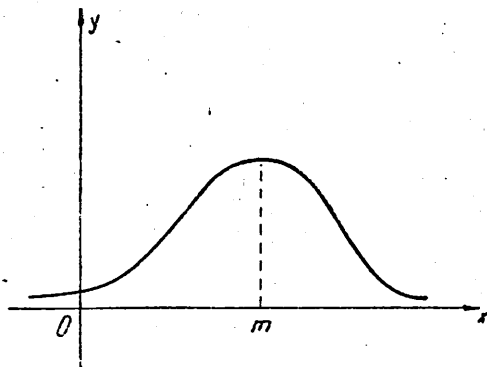


Fig. 1.22

În cele ce urmează vom nota cu  $f(x; m; \sigma)$  densitatea de repartiție normală cu parametrii  $m$  și  $\sigma$ . Funcția de repartiție corespunzătoare densității de repartiție  $f(x; 0, 1)$  este

$$F(x; 0, 1) = \int_{-\infty}^x f(t; 0, 1) dt = \int_{-\infty}^0 f(t; 0, 1) dt + \int_0^x f(t; 0, 1) dt = \\ = \frac{1}{2} + \Phi(x)$$

unde

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Pentru funcția integrală a lui Laplace  $\Phi$  sînt întocmite tabele.

Această funcție este folosită nu numai pentru cazul legii normale cu parametrii 0 și 1 ci și pentru orice pereche de valori ale parametrilor  $m$  și  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ). Aceasta deoarece dacă variabila aleatoare  $X$  urmează legea normală cu parametrii  $m$  și  $\sigma$  atunci variabila aleatoare  $Y = \frac{1}{\sigma}(X - m)$  urmează legea normală cu parametrii 0 și 1. Într-adevăr, dacă  $f$  este funcția de repartiție a lui  $Y$ :

$$F(x) = P(Y < x) = P(X < m + \sigma x) = F(m + \sigma x; m, \sigma).$$

Densitatea de repartiție a variabilei  $Y$  este

$$f(x) = F'(x) = \sigma f(m + \sigma x; m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x; 0, 1).$$

Dacă  $X$  urmează legea normală cu parametrii  $m$  și  $\sigma$  și  $a, b \in R$ , atunci

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a-m}{\sigma} < \frac{X-m}{\sigma} < \frac{b-m}{\sigma}\right) = \\ &= F\left(\frac{b-m}{\sigma}; 0, 1\right) - F\left(\frac{a-m}{\sigma}; 0, 1\right) = \\ &= \left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)\right] - \left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right] = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

În particular

$$P(|X - m| < k\sigma) = 2\Phi(k). \quad (1.7.1)$$

Aceasta deoarece

$$P(|X - m| < k\sigma) = P(m - k\sigma < X < m + k\sigma) = \Phi(k) - \Phi(-k),$$

iar funcția  $\Phi$  este evident impară:  $\Phi(-k) = -\Phi(k)$ .

Ultima relație demonstrată devine și mai semnificativă când constatăm că  $m$  și  $\sigma$  reprezintă valoarea medie și respectiv abaterea medie pătratică corespunzătoare distribuției normale cu parametrii  $m$  și  $\sigma$ . Într-adevăr, dacă  $X$  urmează o astfel de lege normală

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; m, \sigma) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

și luind

$$\frac{x-m}{\sigma} = y; \quad dx = \sigma dy$$

rezultă

$$M(X) = m \int_{-\infty}^{+\infty} f(y; 0, 1) dy + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}} dy = m.$$

De asemenea

$$\begin{aligned} D^2(X) &= M[(X - m)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x; m, \sigma) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned}$$

Dacă facem din nou schimbarea de variabilă

$$\frac{x-m}{\sigma} = y; \quad dx = \sigma dy$$

obținem

$$D^2(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Integrăm prin părți luind

$$u = y; \quad dv = ye^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

și obținem

$$D^2(X) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(y; 0, 1) dy - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} ye^{-\frac{y^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \sigma^2$$

$$D(X) = \sigma.$$

Luind  $k = 3$  în (1.7.1) rezultă

$$P(|X - m| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9974.$$

Această egalitate exprimă că practic aproape toate valorile variabilei  $X$  cad în intervalul  $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$ . Aceasta este așa-numita „răgulă a celor șase sigma“.

Să găsim acum și celelalte momente centrate ale legii normale cu parametrul  $m$  și  $\sigma$ . Fie  $k \geq 2$  și

$$\mu_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^k e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Dacă luăm

$$\frac{x - m}{\sigma\sqrt{2}} = y,$$

rezultă

$$\mu_k = \frac{(\sigma\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^k e^{-y^2} dy.$$

Integrând prin părți cu

$$u = y^{k-1}; \quad dv = ye^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

se obține imediat formula de recurență

$$\mu_k = (k-1)\sigma^2\mu_{k-2}.$$

Știind că  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = \sigma^2$  rezultă

$$\mu_{2m-1} = 0,$$

$$\mu_{2m} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)\sigma^{2m}.$$

O proprietate importantă a legii normale este următoarea: *dacă  $X$  și  $Y$  urmează legea normală și sînt independente, atunci  $X \pm Y$  urmează de asemenea legea normală.*

Legea normală reprezintă „cazul limită“ al multor alte legi de probabilitate. Astfel, menționăm următoarea

**Teoremă.** Dacă variabila aleatoare  $X_\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) are distribuție Poisson cu parametrul  $\lambda$ , atunci funcția de repartiție a variabilei aleatoare  $\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$  tinde către funcția de repartiție normală cu parametrii 0 și 1 când  $\lambda \rightarrow \infty$ . (Se mai spune că variabila aleatoare  $\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$  este asimptotic normală).

Să vedem acum care este legătura dintre distribuția binomială și legea normală.

**Teorema Moivre-Laplace.** Dacă variabila aleatoare  $X_n$  are distribuție binomială cu parametrii  $n$  și  $p$  ( $p$  nu depinde de  $n$ ) iar  $X$  are distribuție normală cu parametrii 0 și 1, atunci :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a < \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Cu alte cuvinte, pentru valori mai mari ale lui  $n$  putem folosi tabelele legii normale pentru studiul variabilelor aleatoare distribuite binomial. Acest lucru trebuie făcut cu oarecare grijă, adică trebuie să știm când  $n$  este suficient de mare pentru a putea aproxima distribuția binomială prin cea normală. Există o teoremă (teorema lui Bernstein) pe care noi nu o vom expune (v. de ex. M. Iosifescu, Gh. Mihoc, R. Theodorescu : Teoria probabilităților și statistică matematică, Ed. tehnică — București, 1966 pag. 300) la care se poate apela pentru a face precizări în acest sens. Noi vom prezenta numai următoarea regulă practică în care presupunem  $n \geq 30$  :

— Dacă  $np \geq 10$ ,  $nq \geq 10$  aproximarea este foarte bună.

— Dacă cel mai mic dintre numerele  $np$  și  $nq$  este cuprins între 5 și 10 aproximarea este acceptabilă dacă nu este nevoie de mare precizie.

— Dacă cel mai mic dintre numerele  $np$  și  $nq$  este inferior lui 5 nu se folosește aproximarea. (După cum s-a arătat mai înainte în acest caz se poate folosi aproximarea prin distribuția Poisson).

Teorema Moivre-Laplace este un caz particular al așa-numitei teoreme limită centrale care spune că funcția de repartiție a unei sume de variabile aleatoare independente tinde — în condiții destul de generale — către funcția de repartiție normală.

De fapt, prin teorema limită centrală se înțelege un grup de teoreme care tratează problema repartiției limită a sumelor de variabile aleatoare (nu totdeauna presupuse independente). Rezultatul cel mai general în cazul variabilelor independente este teorema Lindeberg-Feller. Foarte util în aplicații este un caz particular al acestei teoreme și anume

**Teorema lui Leapunov.** Dacă variabilele aleatoare independente  $X_n$ ,  $n \geq 1$  au momente de ordinul 3 și

$$m_k = M(X_k); \sigma_k^2 = D^2(X_k); \rho_k^3 = M(|X_k - m_k|^3), (k \geq 1)$$

$$\sigma_{(n)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}, \rho_{(n)} = \sqrt[3]{\rho_1^3 + \rho_2^3 + \dots + \rho_n^3}$$

și dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_{(n)}}{\sigma_{(n)}} = 0$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x; 0, 1)$$

unde  $F_n$  este funcția de repartiție a variabilei aleatoare

$$\frac{1}{\sigma(n)} \sum_{k=1}^n (X_k - m_k).$$

**Distribuția Gama.** O variabilă aleatoare are distribuție Gama (sau distribuție  $\Gamma$ ) cu parametrul  $p$  ( $p > 0$ ) dacă are densitatea de repartiție

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq 0, \\ \frac{e^{-x} x^{p-1}}{\Gamma(p)} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

unde

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Este evident că funcția  $f$  definită aici este într-adevăr o densitate de repartiție.

Printr-o simplă integrare prin părți se arată că

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Din această observație se deduc imediat momentele distribuției  $\Gamma$ . Momentul de ordinul  $k$  este

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p+k-1} dx = \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} = p(p+1) \dots (p+k-1).$$

Momentele centrate de ordinul 2, 3, 4 se calculează de asemenea ușor și sînt respectiv  $m$ ;  $2m$ ;  $3m^2 + 6m$ .

**Distribuția Beta.** Spunem că o variabilă aleatoare are distribuție beta cu parametrii  $p$  și  $q$  ( $p > 0$ ,  $q > 0$ ) dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} & \text{pentru } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{pentru } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

unde

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

Este evident că  $f$  este într-adevăr o densitate de repartiție.

Momentul de ordinul  $k$  corespunzător acestei distribuții este

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx &= \frac{1}{B(p, q)} \int_0^1 x^{k+p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{B(k+p, q)}{B(p, q)} \\ &= \frac{p(p+1) \dots (p+k-1)}{(p+q)(p+q+1) \dots (p+q+p-1)}. \end{aligned}$$

Rezultă că valoarea medie și dispersia variabilei aleatoare  $X$  cu distribuție beta de parametrii  $p$ ,  $q$  sînt

$$M(X) = \frac{p}{p+q}; \quad D^2(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+k+1)}.$$

**Distribuția  $\chi^2$ .** O variabilă aleatoare are distribuția  $\chi^2$  cu  $n$  grade de libertate dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq 0, \\ \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Uneori se ia mai general

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \quad (x > 0). \quad (*)$$

În acest caz distribuția are doi parametri  $n$  și  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ). Pentru  $\sigma = 1$  se obține definiția noastră. Dacă o variabilă aleatoare  $X$  are distribuția din definiție, atunci variabila aleatoare  $\sigma^2 X$  are distribuția (\*) și reciproc, dacă o variabilă  $Y$  are distribuția (\*) atunci  $\frac{1}{\sigma^2} Y$  are distribuția din definiție.

Se verifică ușor că această funcție este într-adevăr o densitate de repartiție adică

$$f(x) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Momentul de ordinul  $k$  este

$$m_k = \int_0^{\infty} x^k f(x) dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}+k-1} e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă  $\frac{x}{2} = y$  obținem

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{2^k}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} y^{\frac{n}{2}+k-1} e^{-y} dy = 2^k \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ &= 2^k \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) \dots \left(\frac{n}{2} + k - 1\right) = n(n+2) \dots (n+2k-2). \end{aligned}$$

Valoarea medie și dispersia corespunzătoare distribuției  $\chi^2$  cu  $n$  grade de libertate sînt respectiv  $n$  și  $2n$ .

Să vedem acum care este legătura între distribuția  $\chi^2$  și distribuția normală. Enunțăm în acest sens următoarele două teoreme:

**Teorema 1.** Dacă variabila  $X_n$  are distribuție  $\chi^2$  cu  $n$  grade de libertate ( $n \geq 1$ ) atunci densitatea de repartiție a variabilei

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$$

tinde către densitatea de repartiție normală cu parametrii 0 și 1.

**Teorema 2.** Dacă fiecare din variabilele aleatoare independente  $X_1, X_2, \dots, X_n$  are distribuție normală cu parametrul 0 și 1, atunci variabila aleatoare  $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$  are distribuție  $\chi^2$  cu  $n$  grade de libertate.

**Distribuția Student.** O variabilă aleatoare are distribuție Student cu  $n$  grade de libertate dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Momentele de ordin impar corespunzătoare acestei legi de probabilitate sînt nule:

$$m_{2k+1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+1} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx = 0$$

deoarece funcția de integrat este impară. Pe de altă parte, dacă  $2k < n$ , avem:

$$m_{2k} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx.$$

Dacă facem substituția  $\frac{x^2}{n} = y$  și vom ține cont că

$$\int_0^{\infty} y^{p-1} (1+y)^{-(p+q)} dy = B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

va rezulta în final

$$m_{2k} = \frac{n^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{(n-2)(n-4) \cdot \dots \cdot (n-2k)}.$$

Din cele spuse rezultă că valoarea medie și dispersia unei variabile aleatoare  $X$  cu distribuția Student cu  $n$  grade de libertate sînt:

$$M(X) = 0; \quad D^2(X) = \frac{n}{n-2}, \quad (n > 2).$$

În continuare vom enunța câteva proprietăți mai importante care fac legătura între distribuția Student și distribuția normală.

(S<sub>1</sub>): Dacă  $f_n(x)$  este densitatea de repartiție Student cu  $n$  grade de libertate, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x; 0, 1)$$

unde  $f(x; 0, 1)$  este densitatea de repartiție normală cu parametrul 0 și 1.

(S<sub>2</sub>): Dacă variabilele aleatoare independente  $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$  au fiecare densitate de repartiție normală cu parametri 0 și  $\sigma$  atunci variabila

$$\sqrt{n} \cdot \frac{X_{n+1}}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}}$$

are distribuție Student cu  $n$  grade de libertate.

(S<sub>3</sub>): Dacă variabilele aleatoare independente  $X_1, X_2, \dots, X_n$  au fiecare distribuție normală cu parametri 0 și  $\sigma$  iar

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$$

atunci variabila

$$\frac{\sqrt{n(n-1)} \cdot X}{\sqrt{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}}$$

urmează legea Student cu  $n - 1$  grade de libertate.

**Distribuția Snedecor. Distribuția Fisher.** O variabilă aleatoare are distribuție Snedecor cu parametrii  $n_1$  și  $n_2$  ( $n_1, n_2$  întregi pozitivi numiți grade de libertate) dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0 \\ \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n_1}{2} - 1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} x\right)^{-\frac{n_1 + n_2}{2}} & \text{pentru } x \geq 0. \end{cases}$$

Momentele de ordin  $k$  corespunzătoare sînt finite, dacă  $k < \frac{n_2}{2}$  și se calculează cu ușurință

$$m_k = \frac{n_2^k}{n_1^k} \cdot \frac{n_1(n_1 + 2) \dots (n_1 + 2k - 2)}{(n_2 - 2)(n_2 - 4) \dots (n_2 - 2k)}$$

În particular, rezultă că valoarea medie (momentul de ordinul 1) nu depinde de  $n_1$  fiind egală cu  $\frac{n_2}{n_2 - 2}$ .

Legătura cu legea normală este următoarea:

Dacă variabilele aleatoare independente  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, X_{n_1+1}, \dots, X_{n_1+n_2}$  urmează legea normală cu parametrii 0 și  $\sigma$  atunci variabila aleatoare

$$\frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{X_1^2 + \dots + X_{n_1}^2}{X_{n_1+1}^2 + \dots + X_{n_1+n_2}^2}$$

urmează legea Snedecor cu parametrii  $n_1$  și  $n_2$ .

Dacă variabila aleatoare  $X$  urmează legea Snedecor cu parametrii  $n_1$  și  $n_2$  atunci variabila

$$Y = \frac{1}{2} \ln X$$

are o distribuție Fisher cu parametri  $n_1$  și  $n_2$  adică densitatea sa de repartiție este

$$g(x) = 2 \binom{n_1}{n_2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot e^{n_1 x} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} e^{2x}\right)^{-\frac{n_1 + n_2}{2}},$$

$(x \in R).$

**Distribuția Weibull. Distribuția exponențială.** O variabilă aleatoare are distribuție Weibull cu parametri  $\lambda$  și  $\alpha$  dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq 0, \\ \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha} & \text{pentru } x > 0. \end{cases} \quad (\lambda, \alpha > 0)$$

Valoarea medie și dispersia corespunzătoare acestei distribuții sint respectiv :

$$m = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right),$$

$$\sigma^2 = \lambda^{-\frac{2}{\alpha}} \left[ \Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right].$$

Un caz particular important se obține luind  $\alpha = 1$  :

O variabilă aleatoare are distribuție exponențială cu parametrul  $\lambda$  dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Dacă o variabilă aleatoare  $X$  are distribuție exponențială cu parametrul  $\lambda$ , atunci valoarea medie și dispersia sa sint respectiv

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Înceiem această enumerare cu două distribuții multidimensionale : una discretă și una continuă.

**Distribuția multinomială.** Vectorul aleator  $m$  dimensional  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$  are distribuție multinomială cu parametri  $n$  și  $p_1, p_2, \dots, p_m$  ( $p_i > 0$ ,  $\sum p_i = 1$ ,  $n$  întreg pozitiv) dacă

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_m = k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m} \quad (*)$$

unde  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) sint întregi negativi și  $\sum k_i = n$ .

Expresia din membrul drept al egalității (\*) reprezintă termenul general al dezvoltării polinomului  $(p_1 + \dots + p_m)^n$ . Se observă că pentru  $n = 2$  se obține distribuția binomială.

Dacă evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_m$  legate de o experiență  $E$  formează un sistem complet și au probabilități cunoscute :  $P(A_i) = p_i$ , iar  $X_i$  reprezintă numărul de realizări ale evenimentului  $A_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) cînd facem

de  $n$  ori experiența, atunci vectorul aleator  $(X_1, \dots, X_m)$  are distribuție multinomială cu parametri  $n$  și  $p_1, \dots, p_m$ . Verificarea acestei afirmații se face cu ușurință și o propunem cititorului ca exercițiu.

**Teoremă.** Dacă vectorul aleator  $(X_1, \dots, X_m)$  are distribuție multinomială cu parametri  $n$  și  $p_1, \dots, p_m$  atunci funcția de repartiție a variabilei aleatoare

$$Y_m = \sum_{j=1}^m \frac{1}{np_j} (X_j - np_j)^2$$

ține către funcția de repartiție  $\chi^2$  cu  $m - 1$  grade de libertate.

**Distribuția normală multidimensională.** Vectorul aleator  $(X_1, \dots, X_n)$  are distribuție normală  $n$  — dimensională dacă densitatea sa de repartiție este :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\det A} e^{-\frac{1}{2} (x' - m') A (x - m)}$$

unde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix},$$

$$x' = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad m' = (m_1, m_2, \dots, m_n)$$

iar  $A$  este o matrice  $n \times n$  pozitiv definită.

Se poate arăta că  $m_j = M(X_j)$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) și că dacă  $A^{-1} = (b_{ij})$  atunci  $b_{ij} = M(X_i - m_i)(X_j - m_j)$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

**Teoremă.** Dacă vectorul aleator  $(X_1, \dots, X_m)$  are distribuție multinomială cu parametri  $n$  și  $p_1, \dots, p_m$  atunci funcția de repartiție a vectorului aleator

$Y_n = \left( \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1q_1}}, \dots, \frac{X_m - np_m}{\sqrt{np_mq_m}} \right)$  tinde către o funcție de repartiție normală  $(m - 1)$  — dimensională cu  $m' = (0, \dots, 0)$ .

Densitatea de repartiție bidimensională se obține luind  $n = 2$  în definiție :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right] \right\}$$

unde

$$\sigma_1^2 = D^2(X_1); \quad \sigma_2^2 = D^2(X_2);$$

$$\rho = \frac{M[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]}{\sigma_1\sigma_2}$$

### Probleme.

1°. Dacă  $\lambda$  este modul unei variabile aleatoare cu repartiția binomială de parametri  $n$  și  $p$  atunci

$$np - q \leq \lambda \leq np + p \quad (q = 1 - p).$$

**Rezolvare.** Dacă  $X$  este variabila aleatoare respectivă și  $\lambda$  este valoarea cea mai probabilă atunci

$$P(X = \lambda - 1) \leq P(X = \lambda),$$

$$P(X = \lambda + 1) \leq P(X = \lambda).$$

Aceste inegalități se scriu

$$C_n^{\lambda-1} p^{\lambda-1} q^{n-\lambda+1} \leq C_n^{\lambda} p^{\lambda} q^{n-\lambda},$$

$$C_n^{\lambda+1} p^{\lambda+1} q^{n-\lambda-1} \leq C_n^{\lambda} p^{\lambda} q^{n-\lambda}$$

care după simplificări se reduce respectiv la

$$\lambda \leq np + p,$$

$$\lambda \geq np - q.$$

**2°.** Dacă variabilele aleatoare independente  $X$  și  $Y$  au distribuții binomiale cu parametri  $n$  și  $p$  respectiv  $m$  și  $p$ , atunci variabila  $X + Y$  are distribuție binomială cu parametri  $m + n$  și  $p$ .

**Rezolvare.** Avem

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{j=0}^k P(X = j, Y = k - j) = \\ &= \sum_{j=0}^k C_n^j p^j q^{n-j} \cdot C_m^{k-j} p^{k-j} q^{m-k+j} = p^k q^{m+n-k} \sum_{j=0}^k C_n^j \cdot C_m^{k-j} = C_{m+n}^k p^k q^{m+n-k}. \end{aligned}$$

Egalitatea  $\sum_{j=0}^k C_n^j C_m^{k-j} = C_{m+n}^k$  rezultă egalind coeficientul lui  $x^k$  din dezvoltările  $(1+x)^n \cdot (1+x)^m$  și  $(1+x)^{n+m}$ .

Problema se poate rezolva observind că dacă  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$  sînt variabile aleatoare independente avînd distribuția comună

$$X_j: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, n+m$$

atunci variabilele aleatoare

$$X = X_1 + \dots + X_n,$$

$$Y = X_{n+1} + \dots + X_{n+m}$$

sînt independente și au distribuție binomială cu parametri  $n$  și  $p$  și respectiv  $m$  și  $p$  iar variabila aleatoare

$$X + Y = X_1 + \dots + X_{n+m}$$

are distribuție binomială cu parametri  $m + n$  și  $p$ .

**3°.** Un eveniment are probabilitatea de realizare  $p$  cînd facem o singură dată experiența de care este legat. Dacă  $\alpha_n$  este numărul de realizări ale evenimentului cînd facem de  $n$  ori experiența să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\alpha_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ . (Teorema lui Bernoulli).

**Demonstrație.** Vom aplica inegalitatea lui Cebîșev variabilei aleatoare  $\frac{\alpha_n}{n}$ . Pentru aceasta vom observa mai întâi că întrucît  $\alpha_n$  are distribuție binomială cu parametri  $n$  și  $p$ :

$$m = M\left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = \frac{1}{n} M(\alpha_n) = \frac{1}{n} \cdot np = p,$$

$$\sigma^2 = D^2\left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D^2(\alpha_n) = \frac{1}{n^2} \cdot npq = \frac{pq}{n}; \quad \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Fie  $\varepsilon > 0$  și  $k = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ . Rezultă

$$P\left(\left|\frac{\alpha_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{\alpha_n}{n} - p\right| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

**Observație.** O îmbunătățire a acestei proprietăți este dată de teorema lui Borel: în condițiile problemei 3° avem

$$P\left(\frac{\alpha_n}{n} \rightarrow p\right) = 1.$$

4°. Să se calculeze valoarea medie a distribuției binomiale cu exponent negativ cu ajutorul ecuației lui Wald (problema 10° din 1.7).

**Rezolvare.** Fie  $A$  un eveniment de probabilitate  $p$  și  $X$  numărul de probe pînă la cea de a  $n$ -a producere a lui  $A$ .  $X$  are distribuție binomială cu exponent negativ de parametrul  $n$  și  $p$ . Considerăm variabilele aleatoare independente  $X_k$  ( $k \geq 1$ ) definite astfel

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{dacă în proba } k \text{ } A \text{ s-a produs,} \\ 0 & \text{dacă în proba } k \text{ } A \text{ nu s-a produs.} \end{cases}$$

Evident, toate variabilele  $X_k$  au aceeași distribuție

$$X_k: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}, \quad q = 1 - p.$$

Notăm  $S_k = X_1 + \dots + X_k$  și

$$N = \sup \{k; S_k < n\}.$$

Din felul în care au fost definite variabilele aleatoare  $X$ ,  $X_k$  ( $k \geq 1$ ),  $N$  rezultă

$$X = N + 1; \quad S_X = n \quad (\Rightarrow M(S_X) = n).$$

Folosind ecuația lui Wald

$$M(S_X) = M(X) \cdot M(X_1)$$

vom obține

$$n = M(X) \cdot p; \quad M(X) = \frac{n}{p}.$$

5°. Variabilele aleatoare independente  $X_1$  și  $X_2$  au distribuții Poisson de parametru  $\lambda_1$  și respectiv  $\lambda_2$ . Să se arate că  $X_1 + X_2$  au distribuție Poisson de parametru  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

*Rezolvare.* Fie  $k \geq 0$  un întreg. Avem :

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{j=0}^k P(X_1 = j, X_2 = k - j) = \\ &= \sum_{j=0}^k P(X_1 = j) \cdot P(X_2 = k - j) = \sum_{j=0}^k \frac{\lambda_1^j}{j!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda_2} = \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \sum_{j=0}^k C_k^j \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}. \end{aligned}$$

6°. Variabilele aleatoare  $X$  și  $Y$  sînt independente ;  $X$  are distribuție uniformă pe intervalul  $(0, 1)$  iar  $Y$  are distribuție uniformă pe intervalul  $(0, 2)$ . Se cere densitatea de repartiție a variabilei  $X + Y$ .

*Rezolvare.* Prima metodă. Notăm cu  $f_1$  și  $f_2$  densitățile de repartiție ale variabilelor aleatoare  $X$  și respectiv  $Y$  :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in (0, 1); \\ 0 & \text{pentru } x \notin (0, 1); \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pentru } x \in (0, 2); \\ 0 & \text{pentru } x \notin (0, 2). \end{cases}$$

Dacă  $f$  este densitatea de repartiție a variabilei  $f$ , atunci

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y) f_2(y) dy.$$

Se observă că  $f(x) = 0$  pentru  $x \notin (0, 3)$ .

Dacă  $x \in (0, 1)$  atunci

$$f(x) = \int_0^x f_1(x-y) f_2(y) dy = \int_0^x \frac{1}{2} dy = \frac{x}{2}.$$

Dacă  $x \in [1, 2]$  atunci  $f_1(x-y) = 0$  dacă  $x-y \geq 1$  sau  $x-y \leq 0$  și ținînd cont că  $0 < x-y < 1 \Leftrightarrow x-1 < y < x$ , vom scrie

$$f(x) = \int_{x-1}^x f_1(x-y) f_2(y) dy = \int_{x-1}^x \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}.$$

În sfîrșit dacă  $x \in [2, 3)$  atunci produsul  $f_1(x-y) \cdot f_2(y)$  este nenul dacă și numai dacă  $0 < x-y < 1$ ,  $0 < y < 2$ , adică

$$y \in (x-1, x) \cap (0, 2) = (x-1, 2)$$

și deci în acest caz

$$f(x) = \int_{x-1}^2 f_1(x-y) f_2(y) dy = \frac{1}{2} (3-x).$$

Din cele spuse pînă acum a rezultat

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{pentru } x \in (0, 1); \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } x \in [1, 2); \\ \frac{1}{2}(3-x) & \text{pentru } x \in [2, 3); \\ 0 & \text{pentru } x \notin (0, 3). \end{cases}$$

*Metoda a doua.* Vectorul aleator  $(X, Y)$  este distribuit uniform în dreptunghiul  $(0, 1) \times (0, 2)$ .

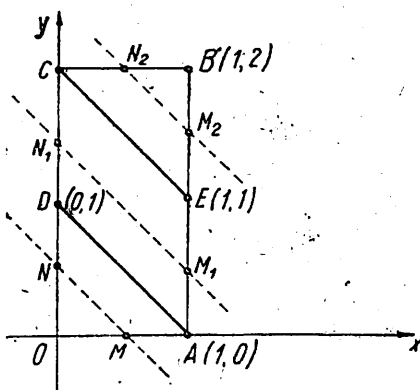


Fig. 1.23

Fie  $F$  funcția de repartiție a variabilei aleatoare  $X + Y$ :

$$F(x) = P(X + Y < x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

În figura 1.23 s-au trasat punctat dreptele  $X + Y - x = 0$  pentru  $x \in (0, 1)$ ,  $x \in (1, 2)$ ,  $x \in (2, 3)$  (respectiv dreptele  $MN$ ,  $M_1N_1$ ,  $M_2N_2$ ).

Dacă  $x \in (0, 1]$  inegalitatea  $X + Y - x < 0$  este satisfăcută de mulțimea punctelor din interiorul triunghiului  $OMN$  și deci

$$F(x) = P(X + Y - x < 0) = \frac{\text{aria } OMN}{\text{aria } OABC} = \frac{x^2}{4}.$$

La fel, dacă  $x \in [1, 2]$  atunci

$$F(x) = P(X + Y - x < 0) = \frac{\text{aria } OAM_1N_1}{\text{aria } OABC} = \frac{2x - 1}{4}.$$

Dacă  $x \in [2, 3)$

$$F(x) = \frac{\text{aria } OAM_2N_2C}{\text{aria } OABC} = \frac{6x - x^2 - 5}{4}.$$

Din toate acestea rezultă în definitiv

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{pentru } x \in (0, 1]; \\ \frac{2x-1}{4} & \text{pentru } x \in [1, 2]; \\ \frac{6x-x^2-5}{4} & \text{pentru } x \in [2, 3); \\ 0 & \text{pentru } x \notin (0, 3). \end{cases}$$

Acestei funcții de repartiție îi corespunde densitatea de repartiție găsită prin prima metodă.

7°. Dacă variabila aleatoare  $X$  are distribuție exponențială să se arate că

$$P(X < t + h | X > t), \quad t \geq 0, h > 0$$

nu depinde de  $t$ .

Rezolvare. Să presupunem că  $X$  urmează legea exponențială cu parametrul  $\lambda$ , adică funcția sa de repartiție este

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Direct din definițiile probabilității condiționate și a funcției de repartiție rezultă

$$P(X < t + h | X > t) = \frac{P(t < X < t + h)}{P(X > t)} = \frac{F(t + h) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda h}.$$

8°. Să se demonstreze reciproca afirmației din problema precedentă: dacă variabila aleatoare pozitivă  $X$  are funcție de repartiție continuă și

$$P(X > t + h | X > t), \quad t \geq 0, h > 0$$

nu depinde de  $t$ , atunci  $X$  are distribuție exponențială.

Rezolvare. Fie  $F$  funcția de repartiție a variabilei  $X$  și  $G = 1 - F$ .

$$P(X > t + h | X > t) = \frac{P(X > t + h)}{P(X > t)} = \frac{G(t + h)}{G(t)}.$$

Deci, prin ipoteză raportul  $\frac{G(t + h)}{G(t)}$  ( $t \geq 0, h \geq 0$ ) nu depinde de  $t$ . Fie

$$\frac{G(t + h)}{G(t)} = H(h).$$

Pentru  $t = 0$  obținem -- (ținând cont că  $G(0) = 1 - F(0) = 1$ ):

$$G(h) = H(h), \quad h \geq 0.$$

Se ajunge astfel la ecuația funcțională

$$G(t + h) = G(t) \cdot G(h), \quad t \geq 0, h \geq 0.$$

De aici rezultă imediat prin inducție

$$G(t_1 + \dots + t_n) = G(t_1) \dots G(t_n)$$

și în particular ( $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$ )

$$G(nt) = [G(t)]^n, \quad t \geq 0.$$

Dacă particularizăm acum pe  $t$  dându-i pe rînd valorile  $t = \frac{1}{n}$ ,  $t = \frac{1}{m}$  se

obține :

$$G\left(\frac{1}{n}\right) = [G(1)]^{\frac{1}{n}}$$

$$G\left(\frac{n}{m}\right) = \left[G\left(\frac{1}{m}\right)\right]^n = \left\{[G(1)]^{\frac{1}{m}}\right\}^n = [G(1)]^{\frac{n}{m}}$$

pentru orice întregi pozitivi  $n$  și  $m$ . Cu alte cuvinte

$$G(r) = [G(1)]^r$$

pentru orice  $r$  rațional pozitiv. Dacă  $x$  este un număr real pozitiv arbitrar și  $(r_n)$ ,  $(r'_n)$  două șiruri de numere raționale

$$r_n \uparrow x; \quad r'_n \downarrow x$$

atunci ținînd cont că  $G$  este neercscătoare ( $F$  este nedescrescătoare):

$$G(r'_n) \leq G(x) \leq G(r_n)$$

sau sub formă echivalentă

$$[G(1)]^{r'_n} \leq G(x) \leq [G(1)]^{r_n}.$$

Dacă facem aici  $n \rightarrow \infty$  obținem

$$G(x) = [G(1)]^x, \quad x \geq 0.$$

Să notăm  $G(1) = e^{-\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ . În acest caz

$$G(x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

și deci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{pentru } x \geq 0. \end{cases}$$

9°. Fiecare din variabilele aleatoare independente  $X_1, X_2, \dots, X_n$  are distribuție exponențială cu parametrul  $\lambda$ . Să se determine densitatea de repartiție a variabilei  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

Rezolvare. Fie  $f$  densitatea de repartiție comună a variabilelor  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

și  $f_n$  densitatea de repartiție a variabilei  $S_k = X_1 + \dots + X_k$ .

Pentru  $x > 0$  avem

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)f_1(y) dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-y)} \cdot \lambda e^{-\lambda y} dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

Dacă  $x \leq 0$ , atunci  $f_2(x) = 0$ . Mai departe, observăm că  $f_2$  este densitatea de repartiție a variabilei  $S_2 + X_2$  ( $S_2, X_2$  independente). Deci pentru  $x > 0$  putem scrie

$$f_3(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)f_2(y) dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-y)} \lambda^2 y e^{-\lambda y} dy = \lambda^3 \cdot \frac{x^2}{2} e^{-\lambda x}$$

Dacă vom continua, vom observa că densitatea de repartiție a variabilei  $S_4 = S_3 + X_4$  este

$$f_4(x) = \lambda^4 \frac{x^3}{3!} e^{-\lambda x} \text{ pentru } x > 0,$$

$$f_4(x) = 0 \text{ pentru } x \leq 0.$$

Prin inducție se deduce

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq 0, \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

(adică  $S_n$  are o distribuție Gamma).

10°. Fiecare din variabilele aleatoare  $X_n$  ( $n \geq 1$ ) are distribuție exponențială cu parametrul  $\lambda$  și  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , iar

$$N = \sup \{n : S_n < t\}, \quad t > 0$$

$$N = 0 \quad \text{dacă } S_1 = X_1 \geq t.$$

Să se arate că

$$P(N = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

**Rezolvare.** Fie  $F_n$  funcția de repartiție a variabilei  $S_n$  și  $f_n$  densitatea sa de repartiție. Se observă că :

$$P(N = 0) = P(X_1 \geq t) = 1 - F_1(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Dacă  $k \geq 1$  atunci

$$P(N = k) = P(S_k < t \leq S_{k+1}) = P(S_k < t) - P(S_{k+1} < t) = F_k(t) - F_{k+1}(t).$$

Pe de altă parte, ținând cont de rezultatul problemei precedente, putem scrie pentru  $t > 0$

$$F_{k+1}(t) = \int_{-\infty}^t f_{k+1}(x) dx = \int_0^t \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x} dx.$$

Integrăm prin părți ( $x^k = u$ ,  $e^{-\lambda x} dx = dv$ ) și obținem :

$$F_{k+1}(t) = \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \left( -\frac{x^k}{\lambda} e^{-\lambda x} \right)_0^t + \frac{k}{\lambda} \int_0^t x^{k-1} e^{-\lambda x} dx,$$

$$F_{k+1}(t) = -\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} + \int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} dx,$$

$$F_{k+1}(t) = -\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} + F_k(t).$$

în sfârșit :

$$P(N = k) = F_k(t) - F_{k+1}(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

11°. Dacă variabila aleatoare  $X$  urmează legea normală cu parametri  $m$  și  $\sigma$ , atunci variabila aleatoare

$$Y = \frac{1}{2\sigma^2} (X - m)^2$$

urmează legea  $\Gamma$  cu parametrul  $\frac{1}{2}$ .

*Rezolvare.* Fie  $F$  funcția de repartiție a lui  $Y$  și  $x > 0$ . Avem

$$F(x) = P(Y < x) = P\left(-\sqrt{2x} < \frac{X - m}{\sigma} < \sqrt{2x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{2x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Dacă facem substituția  $y = \frac{t^2}{2}$  rezultă

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} dy.$$

Derivând în raport cu  $x$  ( $x > 0$ ) se obține densitatea de repartiție corespunzătoare :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}.$$

Și cu aceasta problema este rezolvată dacă observăm că  $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ .

12°. Dacă variabilele aleatoare independente  $X$  și  $Y$  au distribuție Gamma cu parametrul  $p$  și respectiv  $q$ , să se arate că  $X + Y$  are distribuție Gamma cu parametrul  $p + q$ .

**Rezolvare.** Fie  $f, g, h$  respectiv densitățile de repartiție ale variabilelor aleatoare  $X, Y, X \rightarrow Y$ .  
Avem pentru  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = \\ &= \int_0^x \frac{1}{\Gamma(p)} (x-y)^{p-1} e^{-(x-y)} \cdot \frac{1}{\Gamma(q)} y^{q-1} e^{-y} dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} e^{-x} \int_0^x (x-y)^{p-1} y^{q-1} dy. \end{aligned}$$

Dacă facem substituția  $y = tx$  se obține:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{\Gamma(p) \Gamma(q)} e^{-x} x^{p+q-1} \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = \\ &= \frac{B(p, q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} e^{-x} x^{p+q-1} \end{aligned}$$

și problema este rezolvată știut fiind că

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

**13°.** Dacă variabilele aleatoare independente  $X, Y$  au distribuții  $\chi^2$  cu  $m$  și respectiv  $n$  grade de libertate, atunci  $X + Y$  are distribuție  $\chi^2$  cu  $m + n$  grade de libertate.

**Rezolvare.** Dacă  $f, g, h$  sînt densitățile de repartiție ale variabilelor aleatoare  $X, Y$  și respectiv  $X + Y$ , atunci pentru  $x > 0$

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_0^x \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} (x-y)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{(x-y)}{2}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy = \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} \int_0^x (x-y)^{\frac{m}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1} dy \end{aligned}$$

și problema se încheie la fel ca precedenta.

Proprietatea enunțată rezultă și din observația că dacă  $X_1, \dots, X_{m+n}$  sînt variabile aleatoare independente și fiecare urmează legea normală cu parametrul 0 și 1 atunci variabilele

$$\begin{aligned} X &= X_1^2 + \dots + X_m^2, \\ Y &= X_{m+1}^2 + \dots + X_{m+n}^2 \end{aligned}$$

sînt independente și urmează legea  $\chi^2$  cu  $m$  și respectiv  $n$  grade de libertate, iar

$$X + Y = X_1^2 + \dots + X_{m+n}^2$$

urmează legea  $\chi^2$  cu  $m + n$  grade de libertate.

14°. Se aruncă o monedă de 400 de ori. Care este probabilitatea ca numărul de apariții ale „stemei” să fie cuprins între 180 și 220 ?

*Rezolvare.* Numărul  $X$  de apariții ale „stemei” au distribuție binomială cu parametri  $n = 400$  și  $p = 0,5$ . Să observăm că  $M(X) = 400 \cdot 0,5 = 200$ ;  $D^2(X) = 400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 100$ . Inegalitatea

$$180 < X < 220$$

se mai poate scrie

$$-2 < \frac{X - 200}{10} < 2$$

și conform teoremei Moivre-Laplace

$$P\left(-2 < \frac{X - 200}{10} < 2\right) \approx \Phi(2) - \Phi(-2) = 0,95.$$

15°. De câte ori trebuie să aruncăm un zar corect pentru ca cu probabilitatea 0,95 abaterea frecvenței relative a feței 1 de la numărul  $p = \frac{1}{6}$  să fie cuprinsă între  $-0,03$  și  $0,03$  ?

*Rezolvare.* Întrucât dorim o abatere destul de mică ne așteptăm ca numărul aruncărilor să fie mare. Dacă în  $n$  aruncări fața 1 apare de  $\alpha_n$  ori căutăm  $n$  pentru care

$$P\left(-0,03 < \frac{\alpha_n}{n} - p < 0,03\right) = 0,95.$$

Această inegalitate se mai poate scrie

$$P\left(\left|\frac{\alpha_n - np}{\sqrt{npq}}\right| < \frac{0,03\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 0,95$$

unde  $q = 1 - p = \frac{5}{6}$ . Vom avea deci egalitatea aproximativă

$$2\Phi\left(\frac{0,03\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 0,95.$$

Căutăm în tabel  $\lambda$  pentru care

$$\Phi(\lambda) = \frac{0,95}{2} = 0,475$$

și găsim  $\lambda = 1,96$ . Numărul  $n$  rezultă din egalitatea

$$1,96 = \frac{0,03\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} = \frac{6 \cdot 0,03\sqrt{n}}{\sqrt{5}}.$$

Se obține:

$$n = 593.$$

16°. O mașină produce o piesă circulară. Piesa este bună dacă diametrul său  $d$  este cuprins între 4,99 cm și 5,01 cm. Care este probabilitatea producerii unui rebut de către mașina respectivă știind că  $d$  are distribuție normală cu media 5,002 cm și abaterea medie pătratică 0,005 cm ?

Rezolvare. Probabilitatea ca o piesă să fie bună este

$$P(4,99 < d < 5,01) = \Phi\left(\frac{5,01 - 5,002}{0,005}\right) - \Phi\left(\frac{4,99 - 5,002}{0,005}\right) = \\ = \Phi(1,6) - \Phi(-2,4) = \Phi(1,6) + \Phi(2,4) = 0,4452 + 0,4918 = 0,937.$$

Probabilitatea ca o piesă să fie necorespunzătoare este

$$1 - 0,937 = 0,063.$$

Cu alte cuvinte mașina produce 6,3% rebuturi.

17°. O mașină produce o piesă circulară. Când mașina este bine reglată, diametrul  $d$  al pieselor are distribuție normală cu media 10 cm și abaterea medie pătratică 0,08 cm. Se iau la întâmplare 4 piese fabricate de mașină și se constată că media aritmetică a diametrelor acestor piese este 10,14 cm. Se poate afirma că mașina s-a dereglat ?

Rezolvare. Fie  $d_1, d_2, d_3, d_4$  diametrele a 4 piese alese la întâmplare. Acestea sînt patru variabile aleatoare independente distribuite normal cu media 10 cm și abaterea medie pătratică 0,08. Variabila

$$\mu = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}{4}$$

are de asemenea distribuție normală cu media 10 cm dar cu abaterea medie pătratică 0,04 cm. Avem

$$P(9,88 < \mu < 10,12) = 2\Phi(3) = 0,997.$$

Deci  $\mu$  la valori în afara intervalului (9,88 ; 10,12) cu o probabilitate mai mică de 0,003 și deci este aproape sigur că mașina s-a defectat.

## 1.8. APLICAȚII ALE TEORIEI PROBABILITĂȚILOR (ÎN TEORIA AȘTEPTĂRII ȘI TEORIA FIABILITĂȚII)

**Teoria așteptării.** Teoria așteptării (teoria firelor de așteptare — teoria cozilor) este o ramură importantă a cercetării operaționale. Un sistem în cadrul căruia se execută un anumit serviciu se numește *sistem de servire*. Obiectele asupra cărora se execută serviciul respectiv se numesc *clienți* sau *unități*.

*Stație de servire* este o instalație (într-un sens foarte larg) care poate servi un singur client în același timp.

Dacă serviciul se execută în etape de către mai multe stații, atunci succesiunea acestor stații formează o *linie de servire*. Mai multe stații sau linii de servire care pot servi mai multe unități simultan formează un *canal de servire*.

Avem un proces de așteptare atunci când fie unitățile, fie stațiile de servire pot fi puse în situația să aștepte. Unitățile care așteaptă să fie servite formează un fir de așteptare (coadă).

Criteriul prin care este stabilită ordinea servirii unităților aflate în sistem se numește *disciplina firului de așteptare*. De cele mai multe ori este studiată regula „primul venit — primul servit”, dar există și numeroase situații în care unele unități se bucură de un regim preferențial.

Exemple de stații de servire :

- stațiile de benzină,
- centralele telefonice,
- cabinete medicale,
- birouri postale,
- case de bilete etc.

În care caz unitățile sînt respectiv :

- mașinile care se alimentează (sau așteaptă să se alimenteze),
- persoanele care doresc să obțină o legătură telefonică,
- persoanele care vin la consultație,
- scrisori care trebuie ștampilate,
- persoane care doresc să cumpere bilete etc.

De asemenea, unități pot fi considerate utilajele care așteaptă să fie reparate, situație în care mecanicii de întreținere constituie stațiile de servire.

O problemă de teoria așteptării apare de cele mai multe ori în cadrul mai general al unei probleme cu caracter economic.

Astfel, pentru întreprinderea de care țin mecanicii de întreținere de mai înainte se pune problema alegerii judicioase a numărului acestora avîndu-se în vedere pierderile provocate de neutilizarea utilajelor ce așteaptă prea mult să fie reparate, dacă numărul mecanicilor este prea mic și pierderile provocate de faptul că un timp prea îndelungat o parte din ei stau neocupați, dacă numărul lor este prea mare.

În general, se urmărește să se planifice sosirile unităților (dacă este posibil) sau să se stabilească numărul stațiilor de servire astfel ca suma costurilor generate de așteptare să fie minimă.

Prima problemă de teoria așteptării a fost formulată în 1905 într-o lucrare a inginerului danez K. A. Erlang — specializat în telefonie — care a observat că numărul apelurilor în unitatea de timp la o centrală telefonică urmează o lege Poisson. Această observație a fost esențială la determinarea capacității optime a centralelor telefonice.

*Starea sistemului* este o descriere a situației actuale care permite să se tragă concluzii (cu caracter probabilist) asupra comportării viitoare a sistemului.

Elementele de bază ale unui proces de așteptare sînt :

— intrarea unităților în sistem (sosirile), aceasta este dată de legea sosirilor ;

— serviciile — determinate prin legea serviciului.

Sosirile generează două mărimi aleatoare\* :

- numărul de unități care intră în sistem într-o perioadă de timp dată ;
- intervalul de timp dintre două serviri consecutive.

---

\* Aceste mărimi sînt în general aleatoare. Excepție fac cazurile când sosirile sînt programate și programul este respectat riguros. S-a constatat de exemplu, că deși sosirile avioanelor la aeroporturi sînt programate, se produc anumite abateri de la program datorate unor factori întâmplători care fac ca aceste sosiri să fie considerate aleatoare.

Cunoașterea legii de probabilitate a uneia din cele două mărimi determină legea de probabilitate a celeilalte.

Serviciul determină o variabilă aleatoare :

— timpul de servire al unei unități.

În practică, legile de probabilitate ale acestor variabile aleatoare se determină prin prelucrarea datelor statistice disponibile.

Vom utiliza următoarele notații :

$m$  — numărul elementelor populației (colectivității) din care pot proveni unitățile în sistemul de așteptare. Când acest număr este mare, calculele se simplifică adesea luând  $m = \infty$  fără ca precizia să fie afectată semnificativ.

$n$  — numărul de unități existente în sistem (în așteptare sau în curs de servire).

$v$  — numărul unităților din firul de așteptare (nu sînt în curs de servire).

$n$  și  $v$  pot depinde de timp,  $n = n(t)$ ,  $v = v(t)$  fiind numărul de unități existente în sistem, respectiv în firul de așteptare la momentul  $t$ .

$S$  — numărul stațiilor de servire.

$\sigma$  — numărul stațiilor neocupate la momentul  $t$  ( $\sigma = \sigma(t)$ ).

Fie  $p_k = p_k(t)$  probabilitatea să existe  $k$  unități în sistem la momentul  $t$ . Distribuția variabilei aleatoare  $n$  este :

$$n : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \dots & m \\ p_0 & p_1 & p_2 \dots & p_m \end{pmatrix}; \sum p_k = 1$$

Valoarea medie a numărului de unități din sistem este

$$\bar{n} = \sum_{k=0}^m k p_k.$$

Distribuția variabilei aleatoare  $v$  este

$$v : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m - S & 0 \\ p_{S+1} & p_{S+2} & \dots & p_m & \sum_{k=0}^S p_k \end{pmatrix}.$$

Valoarea medie a numărului de unități din firul de așteptare este :

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^{m-S} k p_{S+k} = \sum_{k=S+1}^m (k - S) p_k.$$

În mod analog :

$$\sigma : \begin{pmatrix} S & S - 1 & \dots & 1 & 0 \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{S-1} & \sum_{k=S}^m p_k \end{pmatrix}; \bar{\sigma} = \sum_{k=0}^S p_k (S - k)$$

Între  $\bar{n}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\sigma}$ ,  $S$  avem relația

$$\bar{n} = \bar{v} + \bar{\sigma} - S.$$

Într-adevăr :

$$\begin{aligned} \bar{v} - \bar{\sigma} &= \sum_{k>S} p_k (k - S) - \sum_{0 \leq k \leq S} p_k (S - k) = \sum_{k \geq 0} p_k (k - S) = \\ &= \sum_{k \geq 0} k p_k - S \sum_{k \geq 0} p_k = \bar{n} - S. \end{aligned}$$

Sosirile sînt caracterizate cel mai adesea de o lege Poisson. Mai precis, numărul sosirilor înregistrate într-un interval de timp de lungime  $t$  este o variabilă aleatoare cu distribuție Poisson. Să vedem în ce condiții apare această situație. Pentru aceasta fie  $p_k(t_0, t)$  probabilitatea să înregistrăm  $k$  intrări în sistem în intervalul de timp  $(t_0, t_0 + t)$ , ( $t_0 \geq 0$ ). Vom presupune că  $p_k(t_0, t)$ , satisface condițiile :

a)  $p_k(t_0, t)$  nu depinde de  $t_0$  (ci numai de  $k$  și de lungimea  $t$  a intervalului de timp) și nici de numărul intrărilor înregistrate în intervale anterioare momentului  $t_0$ . În acest caz vom pune  $p_k(t_0, t) = p_k(t)$ .

b) Probabilitatea înregistrării a două sau mai multe sosiri într-un interval de timp de lungime  $h$  este un infinit mic de ordin superior față de  $h$ . Mai precis dacă  $p_{>1}(h)$  este probabilitatea să fie înregistrate mai mult de o sosire în intervalul  $(t, t + h)$  ( $p_{>1}$  nu depinde de  $t$  — proprietatea a)) și

$$p_{>1}(h) = 0(h)$$

unde prin  $0(h)$  am notat o funcție de  $h$  ( $h > 0$ ) cu proprietatea că

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{0(h)}{h} = 0.$$

Dacă pe parcurs vom întîlni mai multe funcții cu această proprietate atunci le vom nota uneori  $o, o_1, o_2, \dots$  pentru a nu produce confuzii.

c) Proprietatea înregistrării unei singure sosiri în intervalul de timp  $(t, t + h)$  este

$$p_1(h) = \lambda h + o'(h).$$

Aceste condiții ne asigură că practic unitățile sosesc individual (nu în grupuri) independent unele de altele și că pentru intervalele de timp foarte mici probabilitatea sosirii unei unități este practic proporțională cu lungimea intervalului. Într-adevăr, proprietatea b) spune că probabilitatea ca să sosească două sau mai multe unități într-un interval de timp foarte mic este neglijabilă față de lungimea intervalului, sau altfel spus, este practic imposibil să înregistrăm două sau mai multe sosiri simultane. Independența sosirilor este asigurată de prima proprietate, în timp ce proprietatea c) ne asigură că diferența dintre adevărata valoare a probabilității unei sosiri într-un interval de timp foarte scurt  $h$  și  $\lambda h$  este neglijabilă în raport cu  $h$ , adică practic, pentru intervale foarte mici această probabilitate este proporțională cu lungimea intervalului.

Se observă că probabilitatea de a avea cel puțin o sosire într-un interval de lungime  $h$  este

$$p_{\geq 1}(h) = p_1(h) + p_{>1}(h) = \lambda h + o_1(h)$$

iar probabilitatea de a nu avea nici o sosire într-un interval de lungime dată  $h$  este

$$p_0(h) = 1 - p_{\geq 1}(h) = 1 - \lambda h - o_1(h).$$

**Teoremă.** În condițiile a), b), c) pentru orice  $t \geq 0$  :

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0; \quad (0! = 1)$$

**Demonstrație.** Să demonstrăm mai întîi teorema pentru  $k = 0$ . Pentru aceasta vom observa că pentru orice  $h > 0$

$$p_0(t + h) = p_0(t) p_0(h)$$

deoarece evenimentele „nu avem sosiri pînă la momentul  $t$ ” și „nu avem sosiri în intervalul de timp  $[t, t + h]$ ” sînt independente și intersecția lor este evenimentul „nu avem sosiri pînă la momentul  $t + h$ ”.

Scriind egalitatea de mai sus sub forma

$$p_0(t + h) = p_0(t) (1 - \lambda h - o_1(h)).$$

Se deduce imediat

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$$

de unde, ținînd cont că  $p_0(0) = 1$ :

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Pentru  $k \geq 1$  evenimentul „avem  $k$  sosiri în intervalul  $(0, t + h)$ ” este reuniunea după  $j$  de la 0 la  $k$  a evenimentelor „avem  $k - j$  sosiri în intervalul  $(0, t)$ ” și „ $j$  sosiri în intervalul  $[t, t + h]$ ” de unde se deduce imediat

$$p_k(t + h) = \sum_{j=0}^k p_{k-j}(t) \cdot p_j(h).$$

Dacă  $k \geq 2$ , atunci

$$0 \leq \sum_{j=2}^k p_{k-j}(t) \cdot p_j(h) \leq \sum_{j=2}^k p_j(h) \leq \sum_{j=2}^{\infty} p_j(h) = p_{>1}(h) = o(h).$$

Rezultă că pentru orice  $k \geq 1$

$$p_k(t + h) = p_k(t)p_0(h) + p_{k-1}(t) \cdot p_1(h) + o_2(h) = p_k(t)(1 - \lambda h - o_1(h)) + p_{k-1}(t)(\lambda h + o'(h)) + o_2(h).$$

Această relație se aduce imediat la forma

$$\frac{p_k(t + h) - p_k(t)}{h} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \frac{o''(h)}{h}$$

de unde se obține făcînd  $h \rightarrow 0$

$$p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t).$$

Dacă ținem cont de condițiile inițiale:  $p_k(0) = 0$  pentru orice  $k \geq 1$  se arată ușor prin inducție că

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}; \quad k = 1, 2, \dots$$

reprezintă soluția acestui sistem de ecuații diferențiale.

Noi vom prezenta totuși două metode de rezolvare a sistemului de ecuații diferențiale.

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t),$$

$$p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t), \quad (k \geq 1).$$

*Prima metodă.* Notăm  $\varphi_k(t) = e^{\lambda t} p_k(t)$  sau  $p_k(t) = e^{-\lambda t} \varphi_k(t)$ . Făcînd înlocuirile în ecuațiile diferențiale unde  $k \geq 1$  se obține

$$\varphi_k'(t) = \lambda \varphi_{k-1}(t).$$

Și intrucît

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad p_k(0) = 0, \quad (k \geq 1) \quad (\Leftrightarrow \varphi_0(t) = 1, \quad \varphi_k(0) = 0, \quad (k \geq 1))$$

se obține imediat

$$\begin{aligned}\varphi_1'(t) &= \lambda \Rightarrow \varphi_1(t) = \lambda t, \\ \varphi_2'(t) &= \lambda^2 t \Rightarrow \varphi_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2!}, \\ \varphi_3'(t) &= \lambda^3 t^2 \Rightarrow \varphi_3(t) = \frac{\lambda^3 t^3}{3!}, \\ &\dots\end{aligned}$$

Prin recurență se ajunge la

$$\varphi_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}; \quad p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

A doua metodă. Pentru  $t > 0$  și  $|x| \leq 1$  notăm

$$G(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) x^k$$

și vom ține cont că

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k'(t) x^k.$$

Înmulțim cu  $x^k$  ecuația diferențială cu membrul stâng  $p_k'(t)$  și însumăm după  $k$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k'(t) x^k = -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) x^k + \lambda x \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) x^k$$

sau altfel scris

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\lambda G + \lambda x G = \lambda(x-1)G.$$

De aici se obține imediat, ținînd cont că  $G(0, x) = 1$ .

$$G = e^{\lambda t(x-1)}.$$

Dacă scriem această egalitate sub forma

$$G(t, x) = e^{-\lambda t} e^{\lambda t x} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \right] x^k$$

și ne reamintim cum a fost definit  $G(t, x)$  reiese că

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Distribuția Poisson obținută nu apare numai în cazul sosirilor în anumite sisteme de așteptare. În general, se poate vorbi despre un flux de evenimente care se realizează în timp și care verifică condițiile a), b), c).

În acest caz avem de a face cu un flux simplu sau cu un proces Poisson staționar. În cazul nostru evenimentele considerate sînt intrările în sistem. Se poate arăta că: dacă sosirile constituie un proces Poisson staționar cu parametrul  $\lambda$ , atunci intervalele de timp dintre două intrări consecutive sînt variabile aleatoare independente care urmează legea exponențială cu

parametrul  $\lambda$  și reciproc, dacă intervalele de timp dintre intrările consecutive sînt independente și urmează fiecare lege exponențială cu parametrul  $\lambda$ , atunci fluxul sosirilor este un flux simplu de parametru  $\lambda$ .

Pînă acum am vorbit numai de sosiri, fără a ține cont și de servicii (sau de ieșiri din sistem). Ieșirile din sistem nu pot fi studiate independent de sosiri; astfel, nici nu putem aștepta ieșiri atît timp cît în sistem nu există unități (dar putem aștepta sosiri indiferent dacă în sistem există sau nu unități).

Model de așteptare cu o stație de servire, cu sosiri Poisson și timp de servire exponențial. Așa cum reiese din acest subtitlu, vom studia, un proces de așteptare în care avem o singură stație de servire, fluxul sosirilor este flux simplu cu parametrul  $\lambda$ , iar timpul de servire a unei unități este o variabilă aleatoare cu distribuție exponențială de parametru  $\mu$ . În plus, vom presupune că lungimea firului de așteptare (numărul unităților care-l compun) nu este limitată de vreun număr, că o unitate intrată în sistem nu-l mai părăsește decît după ce a fost servită. Ordinea servirii este ordinea intrării în sistem. În momentul în care o unitate a fost servită aceasta părăsește sistemul, iar următoarea unitate din sistem (dacă există) ocupă instantaneu stația. Timpul de servire al unei unități este independent de momentul intrării în serviciu și de timpii de servire sau de momentele intrării în sistem a altor unități. Atunci cînd avem fir de așteptare fluxul ieșirilor se comportă ca un flux simplu de parametru  $\mu$ , deoarece intervalele de timp dintre două ieșiri consecutive sînt independente și au distribuție exponențială de același parametru  $\mu$ . Reținem deci, că în totalitatea lui fluxul ieșirilor nu este un flux Poisson cu parametrul  $\mu$  deoarece intervalul de timp dintre cea de a  $k$  ieșire și de a  $(k + 1)$  — a ieșire nu este totdeauna timpul de servire al celei de a  $(k + 1)$  — a unități. Aceasta se întîmplă cînd după servirea celei de a  $k$  unități stația rămîne neocupată un timp. Dar atunci cînd în sistem există unități la momentul  $t$  putem spune de exemplu că probabilitatea de a avea o ieșire în intervalul  $(t, t + h)$  nu depinde de  $t$ , de numărul  $k \geq 1$  de unități existente în sistem sau de numărul de unități servite pînă în momentul  $t$  și această probabilitate este de forma  $\mu h + o(h)$ . De asemenea, dacă numărul unităților din sistem este  $\geq 2$ , atunci probabilitatea să avem două sau mai multe ieșiri în intervalul  $(t, t + h)$  este de forma  $o(h)$ . Se observă că probabilitățile de care vorbim sînt probabilități condiționate de existența unităților în sistem (nu de valoarea exactă a numărului acestor unități).

În cele ce urmează vom presupune că intensitatea sosirilor (valoarea medie a numărului de intrări în sistem în unitatea de timp)  $\lambda$  nu depășește intensitatea serviciilor (valoarea medie a numărului de unități care ar putea fi servite în unitatea de timp dacă stația ar fi ocupată un timp îndelungat fără întrerupere)  $\mu$ . Cu alte cuvinte intensitatea traficului (sau factorul de utilizare)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

Să determinăm ecuațiile diferențiale ale stării sistemului în ipotezele făcute. Pentru aceasta fie  $k \geq 1$ ,  $h > 0$ . Evenimentul că în sistem există  $k$  unități la momentul  $t + h$  se scrie ca o reuniune de evenimente incompatibile fiecare dintre acestea fiind o intersecție de trei evenimente:

- (I) — există  $k$  unități în sistem la momentul  $t$   
și — nu are loc nici o sosire în intervalul  $(t, t + h)$   
și — nu are loc nici o ieșire în intervalul  $(t, t + h)$

- sau (II) — există  $k + 1$  în unități în sistem la momentul  $t$   
și — are loc o ieșire în intervalul  $(t, t + h)$   
și — nu are loc nici o sosire în intervalul  $(t, t + h)$   
sau (III) — există  $k - 1$  unități în sistem la momentul  $t$   
și — nu are loc nici o ieșire în intervalul  $(t, t + h)$   
și — are loc o sosire în intervalul  $(t, t + h)$   
sau (IV) — există  $k$  unități în sistem la momentul  $t$   
și — are loc o ieșire în intervalul  $(t, t + h)$   
și — are loc o intrare în intervalul  $(t, t + h)$ .

Reuniunea celorlalte evenimente de forma

- există  $k + s$  unități la momentul  $t$  ( $s \geq 2$ )  
și — au loc  $r$  ieșiri între  $t$  și  $t + h$   
și — au loc  $q$  intrări între  $t$  și  $t + h$ . ( $r = s + q$ )

are evident o probabilitate de forma  $o(h)$ . De altfel este ușor de observat că și probabilitatea evenimentului (IV) de mai sus este de aceeași formă.

Să notăm cu  $p_k(t)$  probabilitatea ca în sistem să existe  $k$  unități la momentul  $t$ . Conform celor spuse mai înainte

$$\begin{aligned}
 p_k(t+h) &= p_k(t)(1 - \lambda h - o_1'(h))(1 - \mu h - o_2'(h)) + \\
 &+ p_{k+1}(t)(1 - \lambda h - o_1'(h))(\mu h + o_2(h)) + \\
 &+ p_{k-1}(t)(\lambda h + o_1(h))(1 - \mu h - o_2'(h)) + \\
 &+ p_k(t)(\lambda h + o_1(h))(\mu h + o_2(h)) + o'(h)
 \end{aligned}$$

Făcînd calculele, egalitatea de mai sus poate fi adusă la forma

$$\frac{p_k(t+h) - p_k(t)}{h} = -(\lambda + \mu)p_k(t) + \mu p_{k+1}(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

și de aici rezultă

$$p_k'(t) = -(\lambda + \mu)p_k(t) + \mu p_{k+1}(t) + \lambda p_{k-1}(t).$$

Cazul  $k = 0$ , duce la considerarea evenimentelor.

- (I') — nu există unități în sistem la momentul  $t$   
și — nu are loc nici o sosire în intervalul  $(t, t + h)$   
sau (II') — există o unitate la momentul  $t$   
și — are loc o ieșire între  $t$  și  $t + h$   
și — nu are loc nici o intrare între  $t$  și  $t + h$

de unde se obține

$$\begin{aligned}
 p_0(t+h) &= p_0(t)(1 - \lambda h - o_1'(h)) + p_1(t)(\mu h + o_2(h))(1 - \lambda h - \\
 &- o_1'(h)) + o_3(h)
 \end{aligned}$$

De aici rezultă imediat

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t).$$

Recapitulind reiese că avem de rezolvat sistemul cu o infinitate de ecuații diferențiale :

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$

$$p_k'(t) = -(\lambda + \mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \mu p_{k+1}(t), \quad (k \geq 1).$$

Obținerea soluțiilor generale ale acestui sistem este greoaie și cunoașterea lor nu se dovedește prea utilă în aplicații. În cazul altor modele de așteptare lucrurile stau și mai rău. O primă regulă de lucru în aplicațiile teoriei așteptării este aceea că soluțiile dependente de timp sînt practic imposibil de obținut sau de manipulat. Din fericire, pentru cvasi-totalitatea situațiilor concrete este suficientă cunoașterea soluțiilor independente de timp. Un proces de așteptare este în *regim staționar* sau *permanent* dacă probabilitățile  $p_k(t)$  nu depind de  $t$ . În caz contrar, procesul este în *regim tranzitoriu*. Se poate arăta că dacă  $p_k(t)$  sînt soluțiile sistemului nostru de ecuații diferențiale (cu condițiile inițiale  $p_0(0) = 1$ ,  $p_k(0) = 0$ ,  $k \geq 1$ ) atunci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) = p_k, \quad (k \geq 0)$$

unde  $p_k$  sînt soluțiile independente de  $t$ .

În practică, de regulă, fenomenele de așteptare se stabilizează la regim permanent după un interval de timp destul de scurt de la deschiderea sistemului. Astfel, s-a constatat că în cazul unor magazine, a unor depozite de materiale, cantine, centrale telefonice procesul se stabilizează la regim permanent dacă eliminăm 15—30 de minute de la începutul și sfîrșitul programului. De aceea înregistrarea datelor statistice ce urmează a fi prelucrate pentru stabilirea caracteristicilor sistemului de așteptare trebuie făcută în perioada de stabilizare a acestuia.

Să obținem acum soluțiile independente de timp ale sistemului nostru. Pentru aceasta vom observa că dacă  $p_k(t) = p_k$ , ( $k \geq 0$ ) nu depinde de  $t$  atunci  $p_k'(t) = 0$  ( $k \geq 0$ ) și sistemul devine :

$$\lambda p_0 = \mu p_1,$$

$$(\lambda + \mu)p_k = \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}, \quad (k \geq 1).$$

Din prima ecuație rezultă

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0.$$

Luînd  $k = 1$  în a doua ecuație rezultă

$$p_2 = \rho^2 p_0$$

și din aproape în aproape

$$p_k = \rho^k p_0, \quad (k \geq 1).$$

Pentru a determina  $p_0$  vom ține cont că

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

relație care se mai poate scrie

$$p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = 1; \quad p_0 = 1 - \rho.$$

În sfârșit, rezultă

$$p_k = (1 - \rho)\rho^k, \quad (k \geq 0).$$

Pe baza rezultatului obținut, să determinăm câteva caracteristici ale modelului studiat în cazul regimului staționar.

Valoarea medie a numărului de unități aflate în sistem este

$$\bar{n} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \rho(1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{k-1} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Valoarea medie a numărului de unități aflate în firul de așteptare este :

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^{\infty} (k - 1) p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k - \sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{1 - \rho} - (1 - p_0) = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

deoarece distribuția variabilei este

$$\bar{v} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots \\ p_0 + p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

Să determinăm acum legea de probabilitate a timpului total de așteptare al unei unități (din momentul intrării în sistem pînă în momentul ieșirii din sistem). Fie  $\tau$  acest timp și  $F$  funcția de repartiție a lui  $\tau$ . Considerăm evenimentele :

A : unitatea-reper găsește  $k$  unități în sistem la sosirea sa

B :  $k$  unități sînt servite într-un interval de timp de lungime  $t$  după intrarea unității reper

C : unitatea-reper părăsește sistemul între momentele  $t$  și  $t + h$ .

Avem :

$$\begin{aligned} P_k(t, h) &= P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | A \cap B) = \\ &= p_k \cdot \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} \cdot (\mu h + o(h)) = (1 - \rho) \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\mu t} \cdot (\mu h + o(h)). \end{aligned}$$

Acum putem scrie

$$\begin{aligned} F(t + h) - F(t) &= P(t < \tau < t + h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t, h) = \\ &= (1 - \rho) e^{-\mu t} (\mu h + o(h)) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = (1 - \rho) e^{-(\mu - \lambda)t} (\mu h + o(h)). \end{aligned}$$

Dacă scriem egalitatea obținută sub forma

$$\frac{F(t + h) - F(t)}{h} = \frac{\mu - \lambda}{\mu} e^{-(\mu - \lambda)t} \left( \mu + \frac{o(h)}{h} \right)$$

și facem  $h \rightarrow 0$  rezultă densitatea de repartiție a lui  $\tau$  :

$$f(t) = (\mu - \lambda) e^{-(\mu - \lambda)t}, \quad (t > 0), \quad (f(t) = 0 \text{ pt. } t \leq 0).$$

Deci  $\tau$  are o distribuție exponențială cu parametrul  $\mu - \lambda$ .

Valoarea medie a timpului total de așteptare este  $\frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{\bar{n}}{\lambda}$ .

Timpul de servire al unității considerate  $\tau'$  are distribuție exponențială cu parametrul  $\mu$ . Valoarea medie a timpului  $\tau - \tau'$  de așteptare în fir este

$$M(\tau - \tau') = M(\tau) - M(\tau') = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\bar{n}}{\mu}.$$

Procese de naștere și moarte. Sistemul de ecuații diferențiale pe care l-am obținut în cazul modelului de așteptare studiat este un caz particular al sistemului

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p_k'(t) &= -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \\ &+ \mu_{k+1} p_{k+1}(t) \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

cu ajutorul căruia se definește un proces de naștere și de moarte.

La aceste ecuații se ajunge absolut la fel ca la cele obținute anterior dacă vom presupune că sosirile satisfac condițiile a) și b) de la începutul acestui paragraf și proprietatea c') probabilitatea înregistrării unei sosiri în intervalul  $(t, t + h)$  știind că în sistem există  $k$  unități la momentul  $t$  este  $\lambda_k h + o(h)$ , iar sosirile satisfac condiții analoge cu singura modificare că probabilitatea înregistrării unei ieșiri între momentele  $t$  și  $t + h$  știind că la momentul  $t$  există în sistem  $k$  unități ( $k \geq 1$ ) este  $\mu_k h + o(h)$ .

Se observă că  $\lambda_k$  are indicii  $k = 0, 1, 2, \dots$ , iar pentru  $\mu_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  deoarece putem vorbi de ieșiri numai dacă în sistem există cel puțin o unitate.

Acum nu mai este necesar să considerăm că avem o singură stație de servire. Ne putem imagina ușor situații în care intensitatea sosirilor sau a serviciilor depinde de numărul de unități existente în sistem. De multe ori intensitatea sosirilor scade pe măsură ce numărul unităților din sistem crește unele unități renunțând să stea la o coadă prea lungă (dacă au dreptul s-o facă). De asemenea, numărul stațiilor de servire active poate varia în funcție de numărul de unități existente în sistem și deci ritmul ieșirilor depinde de acest număr.

Să rezolvăm sistemul de ecuații al procesului de naștere și moarte în cazul staționar (în continuare vom trata numai acest caz):

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

$$(\lambda_k + \mu_k) p_k = \lambda_{k-1} p_{k-1} + \mu_{k+1} p_{k+1}, \quad (k \geq 1).$$

Din prima ecuație avem

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0.$$

Și apoi folosind pe rînd celelalte ecuații obținem din aproape în aproape

$$p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0; \quad p_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} p_0; \quad \dots; \quad p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0$$

Și  $p_0$  se obține din condiția  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ . Avem soluția nebanală numai

$$\text{dacă } s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} < \infty \text{ și în acest caz } p_0 = \frac{1}{1 + s}.$$

Modelul de așteptare studiat anterior se obține luind

$$\lambda_k = \lambda, (k \geq 0), \quad \mu_k = \mu, (k' \geq 1).$$

**Model de așteptare cu o stație, sosiri Poisson, timp de servire exponențial, număr limitat de unități admise în sistem.** Cu o excepție toate condițiile sînt cele de la modelul studiat anterior. Deosebirea constă în faptul că nu se admit în sistem decît cel mult  $N$  unități. Dacă o unitate care sosește găsește  $N$  unități în sistem, atunci este respinsă (părăsește instantaneu sistemul). Ecuțiile corespunzătoare se obțin la fel ca mai înainte, iar la rezolvare se ține cont că  $\sum_{k=0}^N p_k = 1$ . De fapt, acesta poate fi interpretat ca un proces de naștere și moarte cu

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{pentru } k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \text{pentru } k \geq N \end{cases}; \mu_k = \mu, (k \geq 1),$$

adică

$$p_k = \rho^k p_0 \quad (0 \leq k < N); \quad p_k = 0, (k \geq N).$$

Deoarece  $\sum p_k = 1$ , obținem

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}; \quad p_k = \rho^k \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}; \quad 0 \leq k \leq N.$$

Valoarea medie a numărului de unități din sistem este

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{k=0}^N k p_k = \sum_{k=1}^N k \cdot \rho^k \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} = \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho^{N+1}} \sum_{k=1}^N k \rho^{k-1} = \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot \frac{1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{1 - \rho^{N+1}}. \end{aligned}$$

Valoarea medie a numărului de unități din firul de așteptare este :

$$\bar{v} = \sum_{k=2}^N (k-1)p_k = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \cdot \frac{1 - N\rho^{N-1} + (N-1)\rho^N}{1 - \rho^{N+1}}.$$

**Model de așteptare cu  $S$  stații, sosiri Poisson, timp de servire exponențial, număr nelimitat de unități.** Sosirile constituie un proces Poisson staționar de parametru  $\lambda$ , timpul de servire al unei unități este exponențial cu parametrul  $\mu$ .

Ordinea servirii este ordinea intrării în sistem. Dacă la intrarea în sistem o unitate găsește stații libere, atunci ocupă instantaneu una din aceste stații; dacă găsește toate stațiile ocupate, atunci se așează în firul de așteptare și părăsește sistemul decît după ce a fost servită. În momentul eliberării unei stații unitatea din fir (dacă există) care urmează a fi servită ocupă instantaneu această stație.

Sintem în cazul unui proces de naștere și moarte cu

$$\lambda_k = \lambda, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{pentru } 1 \leq k \leq S, \\ S\mu & \text{pentru } k \geq S. \end{cases}$$

Într-adevăr, dacă în sistem sînt  $k$  unități la momentul  $t$  și  $1 \leq k \leq S$ , atunci  $k$  din cele  $S$  stații sînt ocupate. Probabilitatea să nu avem un sfîrșit de serviciu la o anumită stație din cele ocupate în intervalul  $(t, t+h)$  este  $1 - h - o(h)$  și deci probabilitatea de a nu înregistra o ieșire din sistem în acest interval este

$$(1 - \mu h - o(h))^k = 1 - k\mu h - o_1(h).$$

Aceasta înseamnă că probabilitatea de a avea o ieșire în intervalul  $(t, t+h)$  este

$$\mu_k h + o_1(h)$$

unde

$$\mu_k = k\mu.$$

La fel, dacă în sistem există  $k$  unități la momentul  $t$ ,  $k \geq S$ , atunci toate stațiile sînt ocupate și probabilitatea de a nu avea loc o ieșire din sistem în intervalul  $(t, t+h)$  este

$$(1 - \mu h - o(h))^S = 1 - S\mu h - o_1(h)$$

de unde reiese :

$$\mu_k = S\mu, \quad (k \geq S).$$

Acum putem calcula  $p_k$ . Pentru  $k \leq S$  :

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0 = \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} p_0.$$

Pentru  $k > S$

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \dots \mu_s \mu_{s+1} \dots \mu_k} p_0 = \frac{\lambda^k}{S! S^{k-S} \mu^k} p_0$$

Probabilitatea  $p_0$  se determină din condiția  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ .

În cazul acestui model nu mai este necesar ca  $\frac{\lambda}{\mu} < 1$  ci

$$\frac{\lambda}{S\mu} < 1.$$

Valoarea medie a numărului de unități din sistem este

$$\bar{n} = \rho + p_0 \frac{\rho^{S+1}}{S \cdot S!} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{S}\right)^2}.$$

Valoarea medie a numărului de unități din fir este

$$\bar{v} = p_0 \frac{\rho^{S+1}}{S \cdot S!} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{S}\right)^2} = \bar{n} - \rho.$$

De aici rezultă că valoarea medie a numărului de stații ocupate este

$$\bar{n} - \bar{v} = \rho.$$

În mod asemănător poate fi tratat modelul de așteptare cu  $S$  stații. Sosiri Poisson, timp de servire exponențial și cu maximum  $N$  unități admise în sistem ( $N \geq S$ ). În calculul valorilor  $p_k$  deosebirea constă în faptul că  $p_0$  se scoate din condiția ca

$$\sum_{k=0}^N p_k = 1.$$

### Model de așteptare cu populația din care provin unitățile finite

În modelele prezentate pînă în prezent am presupus că populația din care provin unitățile este infinită. În unele situații această presupunere nu este justificată. De exemplu, dacă o întreprindere are  $m$  mașini de același tip și  $S$  mecanici de întreținere a acestor mașini, atunci sintem în cazul unui model de așteptare în care unitățile provin dintr-o populație cu  $m$  elemente și acest număr nu este în general suficient de mare pentru ca aproximările obținute luînd  $m = \infty$  să fie satisfăcătoare.

Să analizăm pe scurt modelul în care se încadrează exemplul dat. O unitate intrată în sistem este o mașină care se defectează. Dacă în momentul în care o mașină se defectează toți mecanicii sint ocupați, aceasta trebuie să aștepte pînă ce unul din ei se eliberează.

Mecanicii sint deci în acest caz stațiile de servire. Vom presupune că mașinile se defectează independent una de alta și că dacă o mașină se găsește în stare de funcționare la momentul  $t$ , atunci probabilitatea ca ea să se defecteze (să intre în sistem) între momentul  $t$  și  $t + h$  este  $\lambda h + o(h)$ .

Să tratăm mai întii cazul  $S = 1$ . Dacă în sistem există  $k$  ( $k < m$ ) unități la momentul  $t$ , atunci au rămas în afara sistemului  $m - k$  și probabilitatea să nu aibă loc nici o sosire în intervalul de timp  $(t, t + h)$  este

$$(1 - \lambda h - o(h))^{m-k} = 1 - (m - k)\lambda h - o'(h),$$

iar probabilitatea să aibă loc cel puțin o sosire în acest interval de timp este

$$\lambda_k h + o'(h)$$

unde

$$\lambda_k = (m - k)\lambda, \quad 0 \leq k < m.$$

Dacă timpul de servire a unei unități este exponențial cu parametrul  $\mu$ , atunci

$$\mu_k = \mu, \quad (1 \leq k \leq m).$$

Acum putem calcula probabilitățile  $p_k$  ( $0 \leq k \leq m$ )

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0 = \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)\lambda^k}{\mu^k} p_0$$

și  $p_0$  se calculează pe baza egalității  $\sum_{k=0}^m p_k = 1$ .

Valoarea medie a numărului de unități din sistem este

$$\bar{n} = m - \frac{1}{\rho} (1 - p_0).$$

Dacă avem  $S$  stații de servire ( $1 < S < m$ ) atunci modelul de așteptare apare ca un proces de naștere și moarte cu

$$\lambda_k = \begin{cases} (m - k)\lambda, & \text{pentru } 0 \leq k \leq m, \\ 0, & \text{pentru } k \geq m. \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, & \text{pentru } 1 \leq k < S, \\ S\mu, & \text{pentru } S \leq k \leq m. \end{cases}$$

Se obține imediat

$$p_k = \begin{cases} C_m^k \rho^k p_0, & \text{pentru } 1 \leq k < S, \\ \frac{k!}{S! S^{k-S}} \cdot C_m^k \rho^k p_0, & \text{pentru } S \leq k \leq m. \end{cases}$$

**Teoria fiabilității.** Teoria fiabilității (teoria siguranței în funcționare) are ca scop găsirea legilor de apariție a defecțiunilor echipamentelor sau utilajelor. Aici noțiunii de echipament sau utilaj îi dăm un sens foarte larg. Astfel, echipament sau utilaj pot fi: tractor, automobil, strung, aparatură industrială, fabrică, uzină, calculator, aparat de radio etc.

*Prin calitatea echipamentului înțelegem mulțimea proprietăților ce definesc gradul de utilitate în exploatare (grad de utilitate ce se măsoară prin volumul și calitatea produselor sau serviciilor).*

*Fiabilitatea echipamentului este capacitatea echipamentului de a-și conserva calitatea în condiții determinate de exploatare.*

Cînd defecțiunile apar treptat prin micșorarea valorii parametrilor ce definesc calitatea avem de a face cu uzura fizică sau îmbătrînirea echipamentului. Un echipament poate fi afectat și de o uzură normală atunci cînd apare un echipament destinat aceluiași scop, dar cu parametrii calitativi superiori. Noi nu ne vom ocupa de acest gen de uzură.

Problemele de teoria fiabilității se încadrează de cele mai multe ori în probleme cu caracter economic. Cunoașterea legii de îmbătrînire a unor utilaje și deci a gradului lor de uzură în timp este utilă pentru alegerea unor momente cît mai potrivite pentru înlocuirea acestora, pentru ca costul întregii operații de înlocuire să fie cît mai mic.

**Timpul de funcționare pînă la prima defecțiune.** În cazul sistemelor complexe se studiază atît fiabilitatea sistemului în ansamblul său cît și fiabilitatea unor părți componente considerate aparte ca entități de sine stătătoare. O parte indivizibilă a sistemului sau studiată ca un tot independent de părțile sale componente o vom numi **element**. În cazul unor echipamente sau a unor elemente perioada de timp de la darea în funcțiune pînă la apariția avariei coincide cu durata de viață a echipamentului sau elementului respectiv (de exemplu becurile — la care nu se pune problema reparării).

Să considerăm ca moment inițial momentul în care un element este pus în stare de funcționare și să notăm cu  $\tau$  timpul de funcționare pînă la apariția defecțiunii. Prin timp de funcționare înțelegem perioada de funcționare efectivă, eliminînd perioadele de întrerupere deliberată.  $\tau$  este o variabilă aleatoare a cărei funcție de repartiție o vom nota prin  $Q$ :

$$Q(t) = P(\tau < t), \quad (t > 0).$$

Vom presupune că funcția  $Q(t)$  este derivabilă în orice punct  $t > 0$  și notăm

$$q(t) = Q'(t).$$

Probabilitatea ca elementul să fie în stare de funcționare la momentul  $t$  (sau să funcționeze fără să se defecteze un timp mai lung decât  $t$ ) este

$$\Phi(t) = P(\tau > t) = 1 - P(t), \quad (t > 0).$$

Funcția  $P(t)$  se numește funcția de siguranță. Din proprietățile generale ale funcțiilor de repartiție și din condițiile impuse lui  $Q$  se deduc imediat proprietățile funcției de siguranță  $\Phi$ : este continuă (și derivabilă în orice  $t > 0$ ),  $\Phi(0) = 1$ ;  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0$ .

Valoarea medie a timpului de funcționare fără defectare este

$$M(\tau) = \int_0^{\infty} tq(t)dt = \int_0^{\infty} \Phi(t)dt.$$

(Pentru ultima egalitate a se vedea problema 7° din 1.6).

Dispersia lui  $\tau$  este

$$D^2(\tau) = \int_0^{\infty} (t - m)^2 q(t)dt = 2 \int_0^{\infty} t \Phi(t)dt - m^2$$

unde  $m = M(\tau)$ .

În practică întâlnim numeroase exemple în care este important ca avariile să fie prevenite. În acest caz se stabilește pe bază de calcule și experiență o limită de funcționare  $t_0$ . Aceasta înseamnă că indiferent de starea în care se găsește elementul sau echipamentul respectiv la momentul  $t_0$ , el este scos din funcțiune. (Este cazul cazanelor de la instalațiile de încălzire, al locomotivelor, avioanelor, vapoarelor etc.). Dacă  $\tau$  ar fi durata de viață a unui astfel de echipament fără impunerea unei durate maxime de funcționare, atunci adevărata valoare a acestei durate este

$$\tau^* = \min(\tau, t_0).$$

Dacă  $Q^*$  este funcția de repartiție a lui  $\tau^*$  se vede imediat că pentru orice  $t > 0$ :

$$Q^*(t) = P(\tau^* < t) = \begin{cases} Q(t) & \text{pentru } t \leq t_0, \\ 1 & \text{pentru } t > t_0. \end{cases}$$

Și corespunzător

$$\Phi^*(t) = 1 - Q^*(t) = \begin{cases} \Phi(t) & \text{pentru } t \leq t_0, \\ 0 & \text{pentru } t > t_0. \end{cases}$$

Valoarea medie a variabilei  $\tau^*$  este

$$m^* = \int_0^{\infty} \Phi^*(t)dt = \int_0^{t_0} \Phi(t)dt$$

iar dispersia acestei variabile

$$D^2(\tau^*) = 2 \int_0^{t_0} t \Phi(t)dt - m^{*2}.$$

**Funcția rise de defectare.** Să considerăm evenimentele

A: elementul funcționează fără să se defecteze pînă la momentul  $t$ ;

B: elementul nu se defectează între momentele  $t$  și  $t + h$ .

Se observă că  $A \cap B$  este evenimentul „elementul funcționează fără să se defecteze pînă la momentul  $t + h$ ”. Avem :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\tau > t + h)}{P(\tau > t)} = \frac{\Phi(t + h)}{\Phi(t)}$$

Cu alte cuvinte, dacă elementul nu se defectează pînă la momentul  $t$ , probabilitatea ca el să nu se defecteze pînă la momentul  $t + h$  este  $\frac{\Phi(t + h)}{\Phi(t)}$ . Înseamnă că în aceeași ipoteză probabilitatea ca el să se defecteze înainte de momentul  $t + h$  este

$$1 - \frac{\Phi(t + h)}{\Phi(t)} = \frac{\Phi(t) - \Phi(t + h)}{\Phi(t)}$$

Dacă  $h$  este mic atunci

$$\Phi(t) - \Phi(t + h) \approx -h\Phi'(t)$$

și deci pentru un astfel de  $h$

$$P(B^c/A) \approx -\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} h = \lambda(t) \cdot h.$$

Funcția  $\lambda(t)$  se numește **risc de defectare**. În teoria mortalității această funcție se numește funcția de supraviețuire. De cele mai multe ori graficul funcției empirice risc de defectare obținut prin prelucrarea datelor statistice este de forma

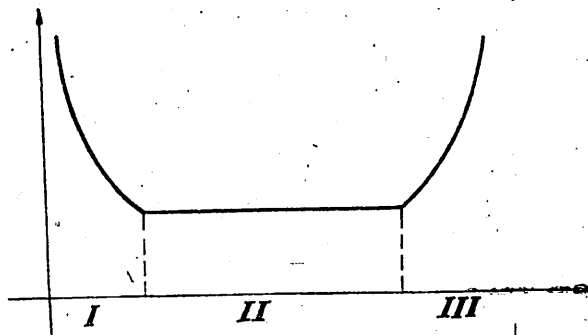


Fig. 1.24

Această formă a graficului sugerează existența a trei perioade distincte în timpul exploatării.

În prima perioadă (I de pe figură 1.24) riscul de defectare descreește cu timpul. În momentul punerii în stare de funcționare a echipamentului încep să se manifeste viciile de fabricație ascunse. Cei care lucrează cu anumite utilaje știu că riscul de defectare este mai mic după trecerea unui timp de la darea în exploatare. Aceasta este perioada **rodajului**.

A doua perioadă este **perioada de funcționare normală**. După trecerea perioadei de rodaj urmează o perioadă în care riscul de defectare se stabilizează și practic nu depinde de timp.

A treia perioadă este **perioada de îmbătrânire** a echipamentului. Sub influența unor factori fizici și chimici elementele se degradează ireversibil și riscul de defectare crește cu trecerea timpului.

Dacă considerăm ca moment inițial momentul în care se termină perioada rodajului și începe perioada de funcționare normală, o lungă perioadă de timp riscul de defectare va fi practic constant. De multe ori nu se pătrunde prea adânc nici în cea de a treia perioadă, echipamentul fiind înlocuit în scopul prevenirii avariilor sau a uzurii morale înainte ca el să devină incapabil să mai funcționeze. Dacă

$$\lambda(t) = \lambda, \quad \lambda > 0$$

aceasta înseamnă că

$$\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = -\lambda$$

de unde rezultă

$$\Phi(t) = e^{-\lambda t}.$$

Funcția de repartiție a duratei de funcționare fără defectare este

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (t > 0)$$

adică această durată are distribuție exponențială cu parametrul  $\lambda$ .

Această lege de fiabilitate nu este universală. În practică se întâlnesc frecvent situații în care datele experimentale nu concordă cu modelul de mai sus. O lege de probabilitate care apare din ce în ce mai des în teoria fiabilității este distribuția Weibull. Dacă  $\tau$  are distribuția Weibull cu parametrul  $\lambda$  și  $\alpha$ , adică funcția sa de repartiție este

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t^\alpha}, \quad (t > 0)$$

atunci funcția de siguranță corespunzătoare este

$$\Phi(t) = e^{-\lambda t^\alpha}$$

și deci îi va corespunde funcția risc de defectare

$$\lambda(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1}.$$

Legea Weibull este mai generală decât legea exponențială. Depinzând de doi parametri, ea poate cuprinde un număr mult mai mare de cazuri concrete decât legea exponențială. De altfel, aceasta din urmă este un caz particular al legii Weibull (cazul  $\alpha = 1$ ).

Dacă riscul de defectare este proporțional cu timpul:

$$\lambda(t) = 2\lambda t, \quad \lambda > 0 \text{ const.}$$

atunci din relațiile

$$\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = -2\lambda t; \quad \Phi(0) = 1$$

rezultă

$$\Phi(t) = e^{-\lambda t^2}$$

și sîntem deci în cazul unei legi Weibull cu parametrul  $\lambda$  și 2.

**Siguranța sistemelor cu elemente legate în serie.** Considerăm un sistem format din elemente a căror siguranță este cunoscută. Vom presupune că elementele se defectează independent unul de altul. Spunem că aceste elemente sînt legate în serie dacă prin defectarea sistemului înțelegem defectarea a cel puțin unui element. Dacă sistemul este compus din  $n$  elemente și timpul potențial de funcționare fără defectare a fiecăruia din aceste ele-

mente este respectiv  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  iar  $\tau$  este timpul corespunzător sistemului, atunci

$$\tau = \inf\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}.$$

În acest caz dacă  $\Phi$  și  $\Phi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) reprezintă funcția de siguranță a sistemului și respectiv a celor  $n$  elemente, avem

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= P(\tau > t) = P(\tau_1 > t, \tau_2 > t, \dots, \tau_n > t) = \\ &= P(\tau_1 > t) \cdot P(\tau_2 > t) \cdot \dots \cdot P(\tau_n > t) = \\ &= \Phi_1(t) \cdot \Phi_2(t) \cdot \dots \cdot \Phi_n(t)\end{aligned}$$

adică funcția de siguranță a sistemului este egală cu produsul funcțiilor de siguranță ale elementelor.

Dacă derivăm în raport cu  $t$  egalitatea

$$-\ln \Phi(t) = -\ln \Phi_1(t) - \ln \Phi_2(t) - \dots - \ln \Phi_n(t)$$

obținem :

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \dots + \lambda_n(t)$$

adică riscul de defectare a sistemului este suma riscurilor de defectare a elementelor înseriate.

**Siguranța sistemelor cu elemente legate în paralel.** Considerăm un sistem format din  $n$  elemente care se defectează independent unul de altul. Vom presupune că sistemul se defectează numai dacă se defectează toate elementele sale. Dacă păstrăm toate notațiile de mai sus putem scrie

$$\tau = \sup\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$$

și deci

$$\begin{aligned}Q(t) &= P(\tau < t) = P(\tau_1 < t, \tau_2 < t, \dots, \tau_n < t) = \\ &= P(\tau_1 < t) \cdot P(\tau_2 < t) \cdot \dots \cdot P(\tau_n < t) = \\ &= Q_1(t) \cdot Q_2(t) \cdot \dots \cdot Q_n(t)\end{aligned}$$

unde  $Q_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) este funcția de repartiție a lui  $\tau_k$ .

## 1.9. (ANEXĂ) FUNCȚIA CARACTERISTICĂ

Funcția caracteristică constituie un puternic instrument de analiză a variabilelor aleatoare reale și a familiilor de variabile aleatoare reale. Ea constituie o nouă reprezentare a conceptului matematic de lege de probabilitate.

Se numește funcția caracteristică a variabilei aleatoare  $X$  funcția de argument real

$$c(t) = M(e^{itX}).$$

Se observă că în fiecare punct  $t$  valoarea funcției caracteristice este valoarea medie a unei variabile aleatoare complexe :

$$e^{itX} = \cos tX + i \sin tX.$$

Dacă  $Z$  este o variabilă aleatoare care ia valori complexe

$$Z = X + iY$$

valoarea sa medie este

$$M(Z) = M(X) + iM(Y)$$

dacă variabilele reale  $X$  și  $Y$  au momente de ordinul  $l$ .

Se păstrează toate proprietățile mai importante ale valorii medii din cazul variabilelor aleatoare reale :

$M(Z_1 + Z_2) = M(Z_1) + M(Z_2)$ ;  $M(Z_1 Z_2) = M(Z_1)M(Z_2)$  dacă variabilele  $Z_1, Z_2$  sînt independente etc.

Dacă cunoaștem densitatea de repartiție  $f$  a unei variabile aleatoare  $X$ , atunci funcția caracteristică a acestei variabile este

$$c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

Dacă o variabilă aleatoare nu are o densitate de repartiție, atunci funcția sa caracteristică poate fi exprimată cu ajutorul funcției de repartiție. Dacă  $X$  este o variabilă aleatoare discretă

$$X: \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix}$$

atunci funcția sa caracteristică este

$$c(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}.$$

De exemplu dacă  $X$  are distribuție binomială

$$X: \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix} \quad 0 \leq k \leq n$$

atunci funcția sa caracteristică este

$$c(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} e^{itk} = \sum_{k=0}^n C_n^k (pe^{it})^k q^{n-k} = (pe^{it} + q)^n.$$

Să scoatem în evidență cîteva proprietăți uzuale ale funcțiilor caracteristice :

(c<sub>1</sub>) Dacă  $c(t)$  este funcția caracteristică a variabilei aleatoare  $X$ , atunci funcția caracteristică a variabilei  $aX + b$ , ( $a, b \in R$ ) este

$$e^{ibt} \cdot c(at).$$

(c<sub>2</sub>) Dacă  $X_1$  și  $X_2$  sînt variabile aleatoare independente și au respectiv funcțiile caracteristice  $c_1(t)$  și  $c_2(t)$  atunci funcția caracteristică  $c(t)$  a variabilei  $X + Y$  este

$$c(t) = c_1(t) \cdot c_2(t).$$

Proprietatea se extinde la un număr finit oarecare de variabile aleatoare independente.

(c<sub>3</sub>) Momentul de ordinul  $k$  (dacă există) al unei variabile aleatoare se obține luând  $t = 0$  în derivata de ordinul  $k$  a funcției caracteristice corespunzătoare înmulțită cu  $i^{-k}$ .

Aceste trei proprietăți cititorul le poate verifica singur cu ușurință.

(c<sub>4</sub>) Dacă  $f(x)$  este o densitate de repartiție și  $c(t)$  funcția caracteristică corespunzătoare, atunci

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} c(t) dt.$$

*Observație.* Mai general, se poate arăta că funcția caracteristică a unei variabile aleatoare determină în mod unic funcția de repartiție a variabilei.

(c<sub>5</sub>) Dacă șirul de funcții de repartiție  $(F_n)$  converge către funcția de repartiție  $F$ , atunci șirul corespunzător al funcțiilor caracteristice converge către funcția caracteristică corespunzătoare repartiției  $F$ .

(c) Dacă șirul de funcții caracteristice  $(c_n)$  converge către o funcție  $c$  continuă în origine, atunci șirul corespunzător al funcțiilor de repartiție converge către o funcție de repartiție  $F$  și  $c$  este funcția caracteristică corespunzătoare repartiției  $F$ .

Funcția caracteristică se atașează și vectorilor aleatori, dar noi nu ne vom ocupa de acest caz.

În continuare vom da funcția caracteristică corespunzătoare unor distribuții prezentate în 1.7.

— Distribuția binomială.

$$X: \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Funcția caracteristică:  $(pe^{it} + q)^n$

— Distribuția binomială cu exponent negativ.

$$X: \binom{k}{m} p^m q^{k-m} \quad k = m, m+1, m+2, \dots$$

Funcția caracteristică:  $\left(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^m$

— Distribuția Poisson.

$$X: \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Funcția caracteristică:  $e^{\lambda(e^{it}-1)}$ .

Distribuția normală.

Densitatea de repartiție:  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in R)$ .

Funcție caracteristică:  $e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

— Distribuția Gamma.

Densitate de repartiție:  $\frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x}, \quad x \geq 0.$

Funcția caracteristică :  $(1 - it)^{-n}$ .

— Distribuția  $\chi^2$ .

Densitatea de repartiție :  $\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \sigma^n \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}$ , ( $x > 0$ ).

Funcția caracteristică :  $(1 - 2\sigma^2 it)^{-\frac{n}{2}}$ .

Recomandăm să se calculeze momentele de primele două ordine corespunzătoare distribuțiilor prezentate aici pe baza proprietății ( $c_3$ ) a funcției caracteristice. De asemenea, să se rezolve cu ajutorul proprietăților ( $c_2$ ) și ( $c_4$ ), problemele 2°, 5°, 6°, 9°, 12°, 13° din 1.7. Ca model să arătăm că suma a două variabile aleatoare normale independente este tot o variabilă aleatoare normală. Să presupunem că variabilele aleatoare independente  $X_1$  și  $X_2$  au distribuții normale, prima cu parametrii  $m_1$  și  $\sigma_1$ , iar a doua cu parametrii  $m_2$  și  $\sigma_2$ . Funcțiile lor caracteristice sînt respectiv

$$c_1(t) = e^{im_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}}$$

$$c_2(t) = e^{im_2 t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}}$$

și deci funcția caracteristică a variabilei aleatoare  $X_1 + X_2$  este

$$c(t) = c_1(t) \cdot c_2(t) = e^{i(m_1+m_2)t - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}}$$

Se observă că  $c(t)$  este tocmai funcția caracteristică corespunzătoare legii normale cu parametrii  $m = m_1 + m_2$  și

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

## CAPITOLUL 2

### ASPECTE TEORETICE ALE CALCULULUI PROBABILITĂȚILOR

#### 2.1. CIMP DE PROBABILITATE

Pentru început vom defini unele familii de părți ale unei mulțimi nevide  $\Omega$ .

**Definiția 1.** Familia nevidă  $\mathcal{C}$  de părți ale lui  $\Omega$  este corp (de părți ale lui  $\Omega$ ) dacă :

$$- A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C},$$

$$- A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}.$$

Este ușor de observat că pentru orice corp  $\mathcal{C}$  de părți ale lui  $\Omega$  :

$$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}.$$

De asemenea

$$\emptyset \in \mathcal{C}, \Omega \in \mathcal{C}$$

Dacă  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{P}(\Omega)$ , există cel puțin un corp care conține  $\mathcal{F}_0$ .  $\mathcal{P}(\Omega)$  este un astfel de corp.

Dacă  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{P}(\Omega)$  atunci cel mai mic corp de părți ale lui  $\Omega$  care conține  $\mathcal{F}_0$  există și este intersecția tuturor corpurilor care conțin  $\mathcal{F}_0$ . Vom numi acest corp *corpul generat de  $\mathcal{F}_0$* .

**Teorema 1.** Corpul generat de  $\mathcal{F}_0$  se obține considerând succesiv familiile  $\mathcal{F}_1$  — formată din  $\emptyset, \Omega$ , elementele lui  $\mathcal{F}_0$  și complementarele lor —  $\mathcal{F}_2$  — formată din intersecțiile finite de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{F}_1$  și  $\mathcal{F}_3$  — formată din reuniunile finite de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{F}_2$ ;  $\mathcal{F}_3$  este corpul generat de  $\mathcal{F}_0$ .

*Demonstrație.* Evident  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3$ ;  $\mathcal{F}_1$  este închisă față de trecerea la complementară, iar  $\mathcal{F}_2$  față de intersecția finită.

Să arătăm că  $\mathcal{F}_3$  este închisă față de intersecția finită. Pentru aceasta luăm  $A_i \in \mathcal{F}_3$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) :

$$A_i = \bigcup_{j \in J_i} B_{ij}; \quad J_i \text{ finit}, B_{ij} \in \mathcal{F}_2, B_{ij} \cap B_{i'j'} = \emptyset \text{ dacă } j \neq j'$$

În acest caz

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{J_1, \dots, J_n} (B_{1j_1} \cap \dots \cap B_{nj_n}) \in \mathcal{F}_3.$$

Să arătăm că  $\mathcal{F}_3$  este închisă față de trecerea la complementară. Dacă

$$A \in \mathcal{F}_3, A = \bigcup_I B_i, (I \text{ finit}, B_i \in \mathcal{F}_2, B_i \cap B_j = \emptyset \text{ pt. } i \neq j)$$

atunci  $A^c = \bigcap_I B_i^c$  și este suficient să arătăm că

$$B \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}_3.$$

Într-adevăr, dacă

$$B = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, (A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_1)$$

atunci

$$B^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c (A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2)$$

În consecință :

$$B^c \in \mathcal{F}_3.$$

Deci  $\mathcal{F}_3$  este un corp conținând  $\mathcal{F}_0$ . Pe de altă parte orice corp care conține  $\mathcal{F}_0$  conține desigur  $\mathcal{F}_3$ .

Dacă  $\mathcal{F}_0$  este o partiție finită a lui  $\Omega$ , atunci corpul generat de  $\mathcal{F}_0$  este format din  $\emptyset$ , elementele lui  $\mathcal{F}_0$  și reuniunile de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{F}_0$ . Elementele lui  $\mathcal{F}_0$  sînt atomii acestui corp. (Prin atom al unui corp  $\mathcal{C}$  înțelegem o parte  $A \subset \Omega$ ,  $A \in \mathcal{C}$ ,  $A \neq \emptyset$ , astfel ca  $B \in \mathcal{C}$ ,  $B \subset A$ ,  $B \neq \emptyset \Rightarrow B = A$ ).

Se demonstrează ușor că orice corp finit posedă atomi și este generat de mulțimea atomilor săi.

**Definiția 2.** O familie  $\mathcal{F}$  de părți ale lui  $\Omega$  este semicorp dacă

1°.  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

2°.  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

3°.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c$  este reuniune finită de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{F}$  disjuncte două câte două.

**Teorema 2.** Corpul generat de un semicorp  $\mathcal{F}$  este format din reuniunile finite de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{F}$  disjuncte două câte două.

*Demonstrație.* Dacă în teorema precedentă luăm  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$  rezultă imediat că  $\mathcal{F}_1$  este formată din reuniunile finite de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{F}$  disjuncte două câte două și  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3$ . Egalitatea  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$  rezultă din observația :

$$\left( \bigcup_I A_i \right) \cap \left( \bigcup_J A_j' \right) = \bigcup_{I \times J} (A_i \cap A_j')$$

ținînd cont că  $\mathcal{F}$  este închisă la intersecție finită.

**Definiția 2.** O familie  $\mathcal{M}$  de părți ale lui  $\Omega$  se numește clasă monotonă dacă :

$$A_n \in \mathcal{M}, \quad A_n \subset A_{n+1} \quad (n \geq 1) \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M},$$

$$A_n \in \mathcal{M}, \quad A_n \supset A_{n+1} \quad (n \geq 1) \Rightarrow \bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}.$$

Cu notațiile din 1.3. putem spune că  $\mathcal{M}$  este clasă monotonă dacă este închisă față de operațiile  $\lim \uparrow$  și  $\lim \downarrow$ .

**Definiția 3.** Se numește  $\sigma$  — corp sau corp borelian de părți ale lui  $\Omega$  orice familie nevidă  $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  închisă față de reuniunea numărabilă și trecerea la complementară.

Din definiție rezultă imediat că orice  $\sigma$  — corp este închis și în raport cu intersecția numărabilă și reciproc, dacă familia  $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  este închisă față de intersecția numărabilă și trecerea la complementară atunci  $\mathcal{X}$  este un  $\sigma$  — corp.

Este de asemenea evident că orice  $\sigma$  — corp este în același timp corp și clasă monotonă. Reciproca acestei afirmații se arată cu ușurință: dacă  $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  este în același timp corp și clasă monotonă de părți ale lui  $\Omega$ , atunci  $\mathcal{X}$  este  $\sigma$  — corp de părți ale lui  $\Omega$ .

Se definește analog cu cazul corpului noțiunile de clasă monotonă generată de  $(\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{P}(\Omega))$  sau  $\sigma$  — corp generat de  $(\mathcal{F}_0)$ .

**Teorema 3.** Dacă  $\mathcal{C}$  este corp, atunci  $\sigma$  — corpul generat de  $\mathcal{C}$  coincide cu clasa monotonă generată de  $\mathcal{C}$ .

*Demonstrație.* Fie  $\mathcal{M}$  și  $\mathcal{X}$  respectiv clasa monotonă și  $\sigma$  — corpul generate de  $\mathcal{C}$ . Evident

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{X}$$

Pe de altă parte, dacă

$$\mathcal{M}' = \{A : A \in \mathcal{M}, A^c \in \mathcal{M}\}$$

atunci  $\mathcal{M}'$  este clasă monotonă și

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}.$$

Rezultă  $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$  și deci  $\mathcal{M}$  este închisă față de trecerea la complementară. Pentru  $A \in \mathcal{M}$  notăm:

$$\mathcal{M}_A = \{B : B \in \mathcal{M}, A \cap B \in \mathcal{M}\}.$$

Oricare ar fi  $A \in \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}_A$  este clasă monotonă și dacă  $A \in \mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_A \subset \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M}_A = \mathcal{M}.$$

Deci pentru orice  $A \in \mathcal{C}$  și orice  $B \in \mathcal{M}$

$$B \in \mathcal{M}_A$$

ceea ce este echivalent cu

$$A \in \mathcal{M}_B.$$

Rezultă că pentru orice  $B \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_B \subset \mathcal{M}$$

și de aici

$$\mathcal{M}_B = \mathcal{M}.$$

Cu aceasta propoziția este demonstrată deoarece am arătat că  $\mathcal{M}$  este corp și cum prin ipoteză este clasă monotonă, este și  $\sigma$  — corp, ceea ce conduce la  $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$ . Incluziunea inversă este evidentă.

**Definiția 4.** Familia  $\mathcal{S}$  de părți ale lui  $\Omega$  se numește clasă  $\sigma$  — aditivă dacă a)  $\Omega \in \mathcal{S}$ ; b)  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}, S_1 \cap S_2 = \emptyset \Rightarrow S_1 \cup S_2 \in \mathcal{S}$ ; c)  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}, S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_2 - S_1 \in \mathcal{S}$ ; d)  $S_n \in \mathcal{S}, S_n \uparrow S \Rightarrow S \in \mathcal{S}$ .

**Teorema 4.** Dacă  $\mathcal{F}_0$  este o familie de părți ale lui  $\Omega$  închisă față de intersecție finită, atunci  $\sigma$  — corpul generat de  $\mathcal{F}_0$  coincide cu clasa  $\sigma$  — aditivă generată de  $\mathcal{F}_0$ .

*Demonstrație.* Fie  $\mathcal{S}$  clasa  $\sigma$  — aditivă și  $\mathcal{K}$   $\sigma$  — corpul generate de  $\mathcal{F}_0$  iar

$$\mathcal{S}' = \{A : B \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}\}$$

Se vede că  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{S}'$  și se verifică imediat că  $\mathcal{S}'$  este clasă  $\sigma$  — aditivă. Concluzia :  $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ , adică

$$A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}. \quad (1)$$

Fie acum

$$\mathcal{S}_0 = \{A : B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}\}.$$

Din nou se verifică cu ușurință că  $\mathcal{S}_0$  este clasă  $\sigma$  — aditivă, iar (1) ne asigură că  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{S}_0$  și deci  $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_0$ . Rezultă că  $\mathcal{S}$  este închis la intersecție finită și eum, evident, este închis și față de trecerea la complementară  $\mathcal{S}$  este corp. Această observație și d) ne conduc la concluzia că  $\mathcal{S}$  este  $\sigma$  — corp și în consecință  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ . Incluțiunea inversă este evidentă.

**Definiția 5.** Familia  $\mathcal{C}$  de părți ale lui  $\Omega$  este clasă compactă dacă pentru orice parte a lui  $\mathcal{C}(C_i)_{i \in I}$ ,  $I$  numărabil  $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$  există  $I' \subset I$ ,  $I'$  finit astfel ca  $\bigcap_{i \in I'} C_i = \emptyset$ .

**Teorema 5.** Cea mai mică clasă de părți ale lui  $\Omega$  închisă la reuniune finită și intersecție numărabilă care conține clasa compactă  $\mathcal{C}$  este compactă.

Pentru demonstrație a se vedea J. Neveu [18].

Fie  $\mathcal{K}$  un  $\sigma$  — corp de părți ale lui  $\Omega$ .

**Definiția 6.** Aplicația  $P : \mathcal{K} \rightarrow R$  este o probabilitate pe  $\mathcal{K}$  dacă

$$(i) \quad P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{K}$$

(ii)  $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$  oricare ar fi familia numărabilă  $(A_i)$  de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{K}$  disjuncte două câte două.

$$(iii) \quad P(\Omega) = 1.$$

În cele ce urmează vom numi spațiu probabilizabil sau cîmp de evenimente cuplul  $(\Omega, \mathcal{K})$  iar spațiu probabilizat sau cîmp de probabilitate tripletul  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  unde  $\mathcal{K}$  este un corp borelian de părți ale lui  $\Omega$ , iar  $P$  o probabilitate pe  $\mathcal{K}$ .

Proprietățile elementare ale probabilității au fost prezentate în capitolul 1. Mai arătăm alte două astfel de proprietăți. Pentru aceasta vom observa mai întâi că dacă  $A_n \in \mathcal{K}, n \geq 1$  atunci

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

aparțin de asemenea lui  $\mathcal{K}$ .

În limbajul evenimentelor  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$  este evenimentul a cărui realizare înseamnă realizarea tuturor evenimentelor  $A_n$  cu excepția unui număr finit, iar realizarea evenimentului  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$  înseamnă realizarea unei infinități de evenimente din șirul  $A_1, A_2, \dots$

Pentru orice  $A \subset \Omega$  notăm cu  $I_A$  indicatorul mulțimii  $A$

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \omega \in A, \\ 0 & \text{dacă } \omega \in A^c. \end{cases}$$

Se observă imediat că

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(\omega) = 1\},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(\omega) = 1\}.$$

Spunem că șirul  $(A_n)$  de părți ale lui  $\Omega$  are limită dacă

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

și notăm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Cu alte cuvinte șirul  $(A_n)$  are limită dacă șirul de aplicații  $(I_{A_n})$  are limită și în acest caz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(\omega) = 1\}.$$

**Teorema 6.** Dacă  $A_n \in \mathcal{X}$ ,  $n \geq 1$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , atunci

$$P(\limsup A_n) = 0.$$

*Demonstrație.*  $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \ (n \uparrow \infty) \Rightarrow P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \downarrow P(\limsup A_n).$

Pe de altă parte

$$P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \downarrow 0, \quad (n \uparrow \infty)$$

deoarece  $\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$  este restul seriei convergente  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$

**Teorema 7.** Dacă  $A_n \in \mathcal{X}$ ,  $n \geq 1$ , avem

$$P(\liminf A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P(\limsup A_n).$$

*Demonstrație.*  $\bigcap_{k \geq n} A_k \uparrow \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \Rightarrow P(\bigcap_{k \geq n} A_k) \uparrow P(\liminf A_n).$  Pe de altă

parte

$$i \geq n \Rightarrow \bigcap_{k \geq n} A_k \subset A_i \Rightarrow P(\bigcap_{k \geq n} A_k) \leq P(A_i).$$

## Rezultă

$$P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) \leq \inf_{k \geq n} P(A_k)$$

în care dacă facem  $n \rightarrow \infty$  obținem

$$P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n).$$

Ultima inegalitate se demonstrează la fel.

Dacă  $A \in \mathcal{X}$ ,  $P(A) = 0$  și  $N \subset A$  spunem că  $N$  este  $P$  — neglijabilă sau — dacă nici o confuzie nu este posibilă — neglijabilă. Este ușor de observat că o reuniune numărabilă de părți ale lui  $\Omega$   $P$  — neglijabile este de asemenea  $P$  — neglijabilă.

În continuare vom nota prin  $\mathcal{N}$  mulțimea părților lui  $\Omega$  neglijabile în raport cu câmpul de probabilitate  $(\Omega, \mathcal{X}, P)$ . Vom spune că acest câmp de probabilitate este *complet* dacă  $\mathcal{N} \subset \mathcal{X}$ .

**Teorema 8.** Familia de părți ale lui  $\Omega$

$$\overline{\mathcal{X}} = \{A \Delta N : A \in \mathcal{X}, N \in \mathcal{N}\}$$

este  $\sigma$  — corpul generat de  $\mathcal{X} \cup \mathcal{N}$ . Aplicația  $\overline{P} : \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\overline{P}(A \Delta N) = P(A)$$

este o probabilitate pe  $\overline{\mathcal{X}}$ . Câmpul de probabilitate  $(\Omega, \overline{\mathcal{X}}, \overline{P})$  este complet și  $\overline{P}$  este prelungirea lui  $P$  la  $\overline{\mathcal{X}}$ .

*Demonstrație.* Fie  $\overline{A}_i = A_i \Delta N_i$ ,  $i \in I$ ,  $I$  numărabil,  $A_i \in \mathcal{X}$ ,  $N_i \in \mathcal{N}$ . Se observă ușor că

$$N = [\bigcup (A_i \Delta N_i)] \Delta (\bigcup A_i) \subset \bigcup N_i$$

iar de aici rezultă că  $N$  este  $P$  — neglijabil și că

$$\bigcup_I \overline{A}_i = \bigcup_I (A_i \Delta N_i) = (\bigcup_I A_i) \Delta N \in \overline{\mathcal{X}}.$$

De asemenea dacă

$$\overline{A} = A \Delta N \in \overline{\mathcal{X}}$$

atunci

$$\overline{A}^c = (A \Delta N)^c = A^c \Delta N \in \overline{\mathcal{X}}.$$

În consecință  $\overline{\mathcal{X}}$  este  $\sigma$  — corp. Desigur, el este cel mai mic  $\sigma$  — corp care conține  $\mathcal{X}$  și  $\mathcal{N}$ , deoarece orice  $\sigma$  — corp cu această proprietate trebuie să conțină  $\overline{\mathcal{X}}$ .

Aplicația  $\overline{P}$  este bine definită întrucât dacă

$$A_1 \Delta N_1 = A_2 \Delta N_2, \quad (A_1, A_2 \in \mathcal{X}, N_1, N_2 \in \mathcal{N})$$

atunci

$$A_1 \Delta A_2 = N_1 \Delta N_2$$

cu consecința că  $A_1 \Delta A_2 \in \mathcal{X}$  este  $P$  — neglijabil, adică

$$P(A_1 \Delta A_2) = 0$$

ceea ce implică

$$P(A_1) = P(A_2).$$

Se verifică cu ușurință că  $\bar{P}$  este o probabilitate pe  $(\Omega, \bar{\mathcal{X}})$ .  
Evident că  $\bar{P}$  este o prelungire a lui  $P$ :

$$A \in \mathcal{X} \Rightarrow \bar{P}(A) = P(A \Delta \emptyset) = P(A).$$

Această prelungire a lui  $P$  într-o probabilitate pe  $(\Omega, \bar{\mathcal{X}})$  este unică.  
Într-adevăr, dacă  $P_0$  este o prelungire a lui  $P$  la  $\bar{\mathcal{X}}$  și  $\bar{A} \in \bar{\mathcal{X}}$ ,  $\bar{A} = A \cup N$ ,  
 $N \subset B$ ,  $A, B \in \mathcal{X}$ ,  $P(B) = 0$ , atunci

$$P(A) = P_0(A) \leq P_0(\bar{A}) \leq P_0(A \cup B) = P(A \cup B) = P(A).$$

Cîmpul de probabilitate  $(\Omega, \bar{\mathcal{X}}, \bar{P})$  este complet deoarece dacă

$$N' \subset \bar{A} = A \cup N \in \bar{\mathcal{X}}, \quad N \subset B \in \mathcal{X}, \quad P(B) = 0, \quad \bar{P}(\bar{A}) = 0$$

reiese că  $P(A) = \bar{P}(\bar{A}) = 0$  și

$$N' \subset A \cup B \in \mathcal{X}, \quad P(A \cup B) = 0 \Rightarrow N' \in \mathcal{N} \subset \bar{\mathcal{X}}$$

$(\Omega, \bar{\mathcal{X}}, \bar{P})$  se numește completarea lui  $(\Omega, \mathcal{X}, P)$ .

**Definiția 7.** Funcțiile de mulțime definite pentru orice  $D \subset \Omega$

$$P^*(D) = \inf \{P(A) : A \supset D, A \in \mathcal{X}\},$$

$$P_*(D) = \sup \{P(A) : A \subset D, A \in \mathcal{X}\}.$$

Se numesc respectiv probabilitate exterioară și probabilitate interioară.  
Se observă imediat că

$$D_1 \subset D_2 \subset \Omega \Rightarrow P^*(D_1) \leq P^*(D_2); \quad P_*(D_1) \leq P_*(D_2),$$

$$A \in \mathcal{X} \Rightarrow P^*(A) = P_*(A) = P(A),$$

$$P^*(D) + P_*(D^c) = 1, \quad \forall D \subset \Omega.$$

**Teorema 9.** Pentru orice  $D \subset \Omega$  există  $A, B \in \mathcal{X}$  astfel ca

$$B \subset D \subset A, \quad P^*(D) = P(A); \quad P_*(D) = P(B).$$

*Demonstrație.* Fie  $A_n \in \mathcal{X}$ ,  $(n \geq 1)$  astfel ca

$$A_n \supset D; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P^*(D).$$

În acest caz  $\bigcap A_n \in \mathcal{X}$  și

$$\bigcap A_n \supset D \Rightarrow P(\bigcap A_n) \geq P^*(D).$$

Pe de altă parte

$$A_n \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k (n \geq 1) \Rightarrow P(A_n) \geq P(\bigcap A_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^*(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \geq P(\bigcap A_k).$$

Și prima parte a teoremei este verificată de  $A = \bigcap_{k \geq 1} A_k$ . Partea a doua se demonstrează analog.

**Teorema 10.** Dacă  $\bar{\mathcal{X}}$  este completarea lui  $\mathcal{X}$  în raport cu  $P$  atunci

$$\bar{\mathcal{X}} = \{D : D \subset \Omega, P^*(D) = P_*(D)\}.$$

Pe  $\bar{\mathcal{X}}$  avem  $\bar{P} = P_* = P^* = \bar{P}^* = \bar{P}_*$ .

*Demonstrație.* Fie  $D \subset \Omega$  astfel ca

$$P^*(D) = P_*(D)$$

și  $A, B \in \mathcal{X}$ :

$$B \subset D \subset A; P^*(D) = P(A); P_*(D) = P(B).$$

Pe de altă parte se observă că

$$N = A \Delta D = A - D \subset A - B; P(A - B) = 0$$

adică  $N$  este neglijabilă și o parte a teoremei este demonstrată intrucit

$$N = A \Delta D \Leftrightarrow D = A \Delta N \Rightarrow D \in \overline{\mathcal{X}}.$$

*Reciproc, dacă  $D \in \overline{\mathcal{X}}$ ;  $D = A \Delta N$ ,  $A \in \mathcal{X}$ ,  $N \subset B \in \mathcal{X}$ ,  $P(B) = 0$  atunci*

$$A - B \subset D \subset A \cup B$$

de unde

$$P(A) = P(A - B) \leq P_*(D) \leq P^*(D) \leq P(A \cup B) = P(A).$$

Vom face acum câteva observații ce ne vor fi necesare la demonstrarea importantei teoreme de prelungire a unei probabilități. Mai întâi remarcăm că dacă  $\mathcal{C}$  este un corp atunci familia  $\mathcal{F} = \mathcal{C}$  a reuniunilor numărabile de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{C}$  este cea mai mică clasă de părți ale lui  $\Omega$  închisă față de intersecție finită și reuniune numărabilă. Ea coincide cu familia reuniunilor șirurilor ascendente de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \mathcal{C}, A_n \subset A_{n+1} \right\}.$$

Definiția unei probabilități pe  $\mathcal{C}$  se obține din definiția 6 în care luăm  $\mathcal{C}$  în loc de  $\mathcal{X}$  iar axioma (ii) se completează cu condiția „dacă  $\bigcup A_i \in \mathcal{C}$ ”. Este ușor de observat că dacă  $P$  satisface condițiile (i) și (iii) atunci condiția (ii) este echivalentă cu perechea de condiții:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  oricare ar fi  $A, B \in \mathcal{C}$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ;
- $A_n \downarrow \emptyset, A_n \in \mathcal{C} \Rightarrow P(A_n) \downarrow 0$ .

În sfârșit, să demonstrăm următoarea

**Lemă.** Fie  $\mathcal{A}$  o familie de funcții reale definite pe  $\Omega$  astfel ca  $X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow \inf(X, Y) \in \mathcal{A}$

și  $M$  o aplicație  $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel ca

$$X \leq Y \text{ în } \mathcal{A} \Rightarrow M(X) \leq M(Y),$$

$$X_n \uparrow X \text{ în } \mathcal{A} \Rightarrow M(X_n) \uparrow M(X).$$

În aceste condiții, dacă  $(X_n)$  și  $(X'_n)$  sînt două șiruri crescătoare de funcții din  $\mathcal{A}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} X'_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M(X_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M(X'_n).$$

În particular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} X'_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(X'_n).$$

*Demonstrație.* Pentru orice  $m$  fixat

$$\inf(X_m, X'_n) \uparrow X_m \text{ în } \mathcal{A}, (n \uparrow \infty).$$

În consecință :

$$M(\inf(X_m, X'_n)) \uparrow M(X_m).$$

Pe de altă parte

$$X'_n \geq \inf(X_m, X'_n) \Rightarrow M(X'_n) \geq M(\inf(X_m, X'_n))$$

și dacă facem acum  $n \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(X'_n) \geq M(X_m).$$

Lema este demonstrată trecînd în ultima relație la lim.  
 $m \rightarrow \infty$

**Corolar.** Dacă  $A_n, A'_n \in \mathcal{O} (n \geq 1), A_n \uparrow A, A'_n \uparrow A'$  atunci

$$A \subset A' \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(A'_n).$$

În particular

$$A = A' \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A'_n).$$

*Demonstrație.* Luăm în leamă  $\mathcal{A}$  familia de funcții indicatoare  $\{I_A : A \in \mathcal{O}\}$  și  $M(I_A) = P(A)$ . Condițiile lemei sînt îndeplinite :

$$I_A, I_B \in \mathcal{A} \Rightarrow \inf(I_A, I_B) = I_{A \cap B} \in \mathcal{A},$$

$$I_A \leq I_B \Leftrightarrow A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \Leftrightarrow M(I_A) \leq M(I_B),$$

$$I_{A_n} \uparrow I_A \text{ în } \mathcal{A} \Leftrightarrow A_n \uparrow A \Rightarrow P(A_n) \uparrow P(A) \Leftrightarrow M(I_{A_n}) \uparrow M(I_A).$$

**Teorema 11.** Orice probabilitate  $P$  pe corpul  $\mathcal{O}$  de părți ale lui  $\Omega$  se prelungește în mod unic într-o probabilitate pe  $\sigma$  — corpul generat de  $\mathcal{O}$ .

*Demonstrație.* Vom face demonstrație în etape :

(I)  $\mathcal{F}$  este familia reuniunilor numărabile de părți ale lui  $\Omega$  din  $\mathcal{O}$ .

$$\Pi(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n), A_n \in \mathcal{O}, A_n \uparrow F \in \mathcal{F}.$$

Aplicația  $\Pi : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  este bine definită conform corolarului precedent ; ea are proprietățile

$$A \in \mathcal{O} \Rightarrow \Pi(A) = P(A),$$

$$\Pi(F_1 \cup F_2) = \Pi(F_1) + \Pi(F_2) - \Pi(F_1 \cap F_2), F_1, F_2 \in \mathcal{F},$$

$$F_1 \subset F_2 \text{ în } \mathcal{F} \Rightarrow \Pi(F_1) \leq \Pi(F_2),$$

$$F_n \uparrow F \text{ în } \mathcal{F} \Rightarrow \Pi(F_n) \uparrow \Pi(F).$$

Primele două proprietăți rezultă imediat, iar a treia este o exprimare a corolarului precedent. Să demonstrăm ultima proprietate. Pentru aceasta fie  $A_{mn} \in \mathcal{O}$  astfel ca pentru orice  $m \geq 1$

$$A_{mn} \uparrow F_m, (n \uparrow \infty).$$

Dacă  $m \leq n$  atunci

$$A_{mn} \subset F_m \subset F_n \Rightarrow \bigcup_{m=1}^n A_{mn} \subset \bigcup_{m=1}^n F_m \subset F_n.$$

Dacă  $B_n = \bigcup_{m=1}^n A_{mn}$  atunci șirul  $(B_n)$  este ascendent deoarece:

$$B_{n+1} = \bigcup_{m=1}^{n+1} A_{m, n+1} \supset \bigcup_{m=1}^n A_{m, n+1} \supset \bigcup_{m=1}^n A_{mn} = B_n.$$

Ținând cont că

$$n \geq m \Rightarrow A_{mn} \subset B_n \subset F_n \Rightarrow P(A_{mn}) \leq P(B_n) \leq \Pi(F_n) \quad (2)$$

rezultă trecînd la  $\bigcup_{n=m}^{\infty}$  și respectiv la  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ :

$$F_m \subset \bigcup B_n \subset F \Rightarrow B_n \uparrow F \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = \Pi(F),$$

$$\Pi(F_m) \leq \Pi(F) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(F_n).$$

Demonstrația se încheie făcînd  $m \rightarrow \infty$  în ultima relație.

(II) Pe  $\mathcal{P}(\Omega)$  definim funcția reală  $\Pi^*$ :

$$\Pi^*(\Omega_0) = \inf \{ \Pi(F) : F \supset \Omega_0, F \in \mathcal{F} \}.$$

$\Pi^*$  are proprietățile:

a)  $F \in \mathcal{F} \Rightarrow \Pi^*(F) = \Pi(F)$ . În particular,  $A \in \mathcal{C} \Rightarrow \Pi^*(A)\Pi(A) = P(A)$ ,

b)  $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \Pi^*(\Omega_1) \leq \Pi^*(\Omega_2)$ ,

c)  $\Pi^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) + \Pi^*(\Omega_1 \cap \Omega_2) \leq \Pi^*(\Omega_1) + \Pi^*(\Omega_2)$ .

În particular pentru orice  $\Omega_0 \subset \Omega : \Pi^*(\Omega_0) + \Pi^*(\Omega_0^c) \geq 1$

d)  $\Omega_n \uparrow \Omega_0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \Pi^*(\Omega_n) \uparrow \Pi^*(\Omega_0)$ .

Să dovedim proprietatea c). Pentru aceasta fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar și

$$F_1 \supset \Omega_1, F_2 \supset \Omega_2, F_1, F_2 \in \mathcal{F},$$

$$\Pi^*(\Omega_1) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \Pi(F_1),$$

$$\Pi^*(\Omega_2) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \Pi(F_2).$$

În acest caz

$$\Pi^*(\Omega_1) + \Pi^*(\Omega_2) + \varepsilon \geq \Pi(F_1) + \Pi(F_2) = \Pi(F_1 \cup F_2) +$$

$$+ \Pi(F_1 \cap F_2) \geq \Pi^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) + \Pi^*(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

Proprietatea c) rezultă făcînd  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pentru a dovedi d) luăm  $\varepsilon > 0$  arbitrar și  $\varepsilon_n > 0, (n \geq 1)$ .

$$\sum \varepsilon_n = \varepsilon$$

Pentru orice  $n \geq 1$  există  $F_n \in \mathcal{F}$  astfel ca

$$\Omega_n \subset F_n; \quad \Pi^*(\Omega_n) + \varepsilon_n \geq \Pi(F_n).$$

Să dovedim prin inducție că avem:

$$\Pi^*(\Omega_n) + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \geq \Pi\left(\bigcup_{k=1}^n F_k\right). \quad (3)$$

Pentru  $n = 1$  această relație se reduce la precedenta în care  $n = 1$ . Dacă este satisfăcută pentru  $n$  atunci:

$$\begin{aligned} \Pi\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} F_k\right) &= \Pi\left(\bigcup_{k=1}^n F_k\right) + \Pi(F_{n+1}) - \Pi(F_{n+1} \cap \bigcup_{k=1}^n F_k) \leq \\ &\leq \Pi^*(\Omega_n) + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k + \Pi^*(\Omega_{n+1}) + \varepsilon_{n+1} - \Pi^*(\Omega_n) = \\ &= \Pi^*(\Omega_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k. \end{aligned}$$

(Inegalitatea  $\Pi^*(\Omega_n) \leq \Pi(F_{n+1} \cap \bigcup_{k=1}^n F_k)$  rezultă din observația:

$\Omega_n \subset F_{n+1} \cap \bigcup_{k=1}^n F_k$ ). Relația (3) este deci valabilă pentru orice  $n$ . Dacă facem în ea  $n \rightarrow \infty$  rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^*(\Omega_n) + \varepsilon \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi\left(\bigcup_{k=1}^n F_k\right) = \Pi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \geq \Pi^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n\right).$$

Intrucit  $\varepsilon > 0$  este arbitrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^*(\Omega_n) \geq \Pi^*(\Omega_0).$$

Inegalitatea inversă este evidentă ( $\Omega_n \subset \Omega_0 \Rightarrow \Pi^*(\Omega_n) \leq \Pi^*(\Omega_0)$ )

(III) Considerăm clasa de părți ale lui  $\Omega$

$$\mathcal{D} = \{D : \Pi^*(D) + \Pi^*(D^c) = 1\}.$$

Să arătăm că  $\mathcal{D}$  este  $\sigma$ -corp și că restricția lui  $\Pi^*$  la  $\mathcal{D}$  este o probabilitate pe  $(\Omega, \mathcal{D})$ . Într-adevăr, se observă că  $\mathcal{D}$  nu este vidă ( $\emptyset, \Omega \in \mathcal{D}$ ) și că este închisă față de trecerea la complementară. Pe de altă parte pentru orice  $D_1, D_2$  din  $\mathcal{P}(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \Pi^*(D_1 \cup D_2) + \Pi^*(D_1 \cap D_2) &\leq \Pi^*(D_1) + \Pi^*(D_2), \\ \Pi^*[(D_1 \cup D_2)^c] + \Pi^*[(D_1 \cap D_2)^c] &\leq \Pi^*(D_1^c) + \Pi^*(D_2^c). \end{aligned} \quad (4)$$

Dacă  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$  aceste două relații sînt egalități intrucit prin adunare dau o egalitate:  $2 = 2$ . Dar acum, știind acest lucru și observînd că

$$\begin{aligned} \Pi^*(D_1 \cup D_2) + \Pi^*[(D_1 \cup D_2)^c] &\geq 1, \\ \Pi^*(D_1 \cap D_2) + \Pi^*[(D_1 \cap D_2)^c] &\geq 1 \end{aligned}$$

rezultă că și aceste relații sînt satisfăcute cu „=” și deci  $D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$  și  $\mathcal{D}$  este corp. Prima din relațiile (4) scrisă ca egalitate ne arată că  $\Pi^*$  este aditivă pe  $\mathcal{D}$ .

Dacă  $D_n \uparrow$  în  $\mathcal{D}$  atunci

$$\Pi^*(\cup D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^*(D_n)$$

iar pe de altă parte pentru orice  $k \geq 1$

$$(\cup_{n=1}^{\infty} D_n)^c \subset D_k^c \Rightarrow \Pi^*[(\cup D_n)^c] \leq \Pi^*(D_k^c) = 1 - \Pi^*(D_k)$$

și dacă facem  $k \rightarrow \infty$  ținind cont de egalitatea precedentă

$$\Pi^*[(\cup D_n)^c] + \Pi^*(\cup D_n) \leq 1.$$

Cum și inegalitatea inversă este valabilă rezultă  $\cup D_n \in \mathcal{D}$  și deci  $\mathcal{D}$  este  $\sigma$ -corp.

(IV) Întrucît  $\mathcal{D}$  este un  $\sigma$ -corp care conține  $\mathcal{C}$ , va conține și pe  $\mathcal{X}$ . Restricția lui  $\Pi^*$  la  $\mathcal{D}$  este o prelungire a lui  $P$  într-o probabilitate pe  $\mathcal{D}$ . Restricția lui  $\Pi^*$  la  $\mathcal{X}$  va fi deci o prelungire a lui  $P$  într-o probabilitate pe  $\mathcal{X}$ .

Această prelungire este unică. Într-adevăr, dacă am avea două prelungiri  $P_1$  și  $P_2$  și

$$\mathcal{X}' = \{A : A \in \mathcal{X}, P_1(A) = P_2(A)\}$$

atunci  $\mathcal{X}'$  este clasă monotonă și  $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}'$  cu consecința  $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}'$ . Și cu aceasta teorema este demonstrată.

Este ușor de observat că câmpul de probabilitate  $(\Omega, \mathcal{D}, \Pi^*/\mathcal{D})$  este completarea câmpului de probabilitate  $(\Omega, \mathcal{X}, \Pi^*/\mathcal{X})$ .

Înceiem această parte cu câteva considerații asupra independenței. Ne situăm într-un câmp de probabilitate  $(\Omega, \mathcal{X}, P)$ .

**Definiția 3.** Familia  $(\mathcal{X}_i)_{1 \leq i \leq n}$  de subcorpuri boreliene ale lui  $\mathcal{X}$  se numește independentă dacă

$$P(\cap A_i) = \prod P(A_i)$$

oricare ar fi  $A_i \in \mathcal{X}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Familia de subcorpuri boreliene ale lui  $\mathcal{X}$ ,  $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$  este independentă dacă oricare ar fi  $J \subset I$ ,  $J$  finită familia  $(\mathcal{X}_i)_{i \in J}$  este independentă. Mai general, dacă  $\mathcal{F}_i$ ,  $i \in I$  sînt familii de părți  $\mathcal{X}$ -măsurabile ale lui  $\Omega$  ele se numesc independente dacă pentru orice  $J$  finit  $J \subset I$  avem  $P(\cap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$  oricare ar fi  $A_j \in \mathcal{F}_j$ , ( $j \in J$ ).

**Teorema 12.** Dacă fiecare din familiile  $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{X}$ ,  $i \in I$  independente sînt închise față de intersecție și  $\mathcal{X}_i$  este  $\sigma$ -corpul general de  $\mathcal{F}_i$ , atunci familia  $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$  este independentă.

*Demonstrație.* Fie  $J = \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset I$  și

$$\mathcal{D}_1 = \{A : A \in \mathcal{X}, P(A \cap \cap_{j \in J - \{i_1\}} A_j) = P(A) \cdot \prod_{j \in J - \{i_1\}} P(A_j), A_j \in \mathcal{F}_j\}.$$

Se verifică ușor că  $\mathcal{D}_1$  este clasă  $\sigma$ -aditivă și cum  $\mathcal{F}_{i_1} \subset \mathcal{D}_1$  rezultă  $\mathcal{X}_{i_1} \subset \mathcal{D}_1$  adică

$$P(\cap_j A_j) = \prod_j P(A_j); \quad A_{i_1} \in \mathcal{X}_{i_1}, A_j \in \mathcal{F}_j, j \neq i_1.$$

Aplicînd acest raționament familiei  $\{\mathcal{X}_{i_1}, \mathcal{F}_{i_1}, \dots, \mathcal{F}_{i_n}\}$  luînd

$$\mathcal{D}_2 = \{A : A \in \mathcal{X}, P(A \cap \bigcap_{j \neq i_1} A_j) = P(A) \cdot \prod_{j \neq i_1} P(A_j); A_{i_1} \in \mathcal{X}_{i_1}, A_j \in \mathcal{F}_j (j \neq i_1)\}$$

vom obține

$$P(\bigcap_j A_j) = \prod_j P(A_j); A_j \in \mathcal{F}_j (j \neq i_1, i_2), A_{i_1} \in \mathcal{X}_{i_1}, A_{i_2} \in \mathcal{X}_{i_2}$$

Din aproape în aproape rezultă

$$P(\bigcap_j A_j) = \prod P(A_j), A_j \in \mathcal{X}_j, (j \in J).$$

**Teorema 13.** Dacă  $\sigma$  — corpurile  $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}$  ( $i \in I$ ) sînt independente și  $(I_j)$  ( $j \in J$ ) este o partiție a lui  $I$ , atunci  $\sigma$  — corpurile  $\mathcal{X}'_j$  ( $j \in J$ ) sînt independente,  $\mathcal{X}'_j$  fiind  $\sigma$  — corpul generat de  $\sigma$  — corpurile  $\mathcal{X}_i$ ,  $i \in I_j$ .

*Demonstrație.* Ne plasăm în condițiile teoremei precedente luînd

$$\mathcal{F}_j = \bigcap_k \{A_i : A_i \in \mathcal{X}_i, K \subset I_j, K \text{ finit}\}.$$

Se verifică imediat independența și închiderea la intersecție a familiilor  $\mathcal{X}'_j$ , ( $j \in J$ ). Dacă  $\mathcal{X}''$  este  $\sigma$  — corpul generat de  $\mathcal{F}_j$ , observînd că  $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{F}_j$ ,  $i \in I_j$  vom putea scrie  $\mathcal{X}'_j \subset \mathcal{X}''$  iar pe de altă parte din  $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{X}'_j$  rezultă  $\mathcal{X}'' \subset \mathcal{X}'_j$ .

În încheiere două proprietăți ce ne vor fi necesare în paragrafele următoare.

**Lemă.** Fie  $\mathcal{C}$  un corp de părți ale lui  $\Omega$  și  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$  compactă. Dacă  $P : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  este aditivă și  $P(\Omega) = 1$  și

$$P(A) = \sup \{P(C) : C \subset A, C \in \mathcal{C}\}, A \in \mathcal{C}$$

atunci  $P$  este  $\sigma$  — aditivă.

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon > 0$  și  $\varepsilon_n > 0$  ( $n \geq 1$ )  $\sum \varepsilon_n = \varepsilon$ . Fie  $A_n \in \mathcal{C}$ ,  $A_n \downarrow \emptyset$ . Pentru orice  $n \geq 1$  există  $C_n \in \mathcal{C}$ ,  $C_n \subset A_n$  astfel ca

$$P(A_n) \leq P(C_n) + \varepsilon_n.$$

În acest caz  $\bigcap C_n \subset \bigcap A_n = \emptyset$  și deci există  $N = N(\varepsilon)$  astfel ca  $\bigcap_{n=1}^N C_n = \emptyset$ . Dar

$$A_N = \bigcap_{n \leq N} A_n \subset \bigcup_{n \leq N} (A_n - C_n) \Rightarrow P(A_N) \leq \sum_{n \leq N} [P(A_n) - P(C_n)] \leq \varepsilon.$$

Deci  $n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow P(A_n) \leq \varepsilon$ .

**Teorema 14.** Dacă  $\mathcal{S}$  este un semicorp de părți ale lui  $\Omega$  și  $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$  clasă compactă. Dacă  $P : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$  este aditivă și  $P(\Omega) = 1$  și

$$P(A) = \sup \{P(C) : C \subset A, C \in \mathcal{C}\}; A \subset \mathcal{S}$$

atunci  $P$  este  $\sigma$  — aditivă pe  $\mathcal{S}$ .

*Demonstrație.* Clasa  $\mathcal{C}_s$  este inclusă în corpul  $\mathcal{C}$  generat de  $\mathcal{S}$  și este compactă. Dacă  $A \in \mathcal{C}$ ,  $A = \sum S_i$ , ( $S_i \in \mathcal{S}$ )  $P'(A) = \sum P(S_i)$  unde  $P'$  este prelungirea lui  $P$  la  $\mathcal{C}$ . Fie  $C_i \subset S_i$ ,  $C_i \in \mathcal{C}$  astfel ca  $P(S_i) \leq P(C_i) + \frac{\varepsilon}{n}$ .

Rezultă  $P'(A) \leq P'(\Sigma C_i) + \varepsilon$  și  $\Sigma C_i \subset A$ . Dar  $C' = \Sigma C_i \in \mathcal{E}_s$  și deci corpul  $\mathcal{E}$ , aplicația  $P'$  și  $\mathcal{E}_s$  satisfac condițiile lemei precedente și deci  $P'$  este  $\sigma$ -aditivă pe  $\mathcal{E}$ . Restricția sa la  $\mathcal{E}$ , adică  $P$  este deci  $\sigma$ -aditivă pe  $\mathcal{E}$ .

**Lema Borel-Cantelli pentru evenimente independente.** Dacă  $A_n, n \geq 1$  sînt evenimente independente și  $\sum_{n \geq 1} P(A_n) = \infty$  atunci  $P(\limsup A_n) = 1$ .

*Demonstrație.* Avem

$$P(\liminf A_n^c) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right).$$

Pe de altă parte pentru orice  $n \geq 1$ :

$$P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^{n+s} (1 - P(A_k)) \leq \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=n}^{n+s} P(A_k)} = 0$$

deoarece pentru orice  $x \geq 0$ :

$$1 - x \leq e^{-x}.$$

## 2.2. VARIABILE ALEATOARE. FUNCȚII DE REPARTIȚIE

Dacă  $f: E \rightarrow F$  notăm  $f^{-1}$  aplicația  $\mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  dată de

$$f^{-1}(F') = \{x: x \in E, f(x) \in F'\}, \quad F' \subset F.$$

Astfel definită aplicația  $f^{-1}$  are proprietățile

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(F_i),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(F_i),$$

$$f^{-1}(F_0^c) = (f^{-1}(F_0))^c.$$

unde  $I$  este o familie arbitrară de indici. Vom nota prin  $f^{-1}(\mathcal{F})$  familia  $\{f^{-1}(B): B \in \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(F)\}$ . Se vede imediat că

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{P}(F) \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{F}_1) \subset f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{P}(E).$$

Dacă  $X: \Omega \rightarrow \Omega'$  și  $\mathcal{X}'$  este un  $\sigma$ -corp (respectiv corp, clasă monotonă) atunci  $X^{-1}(\mathcal{X}')$  este un  $\sigma$ -corp (respectiv corp, clasă monotonă).

**Teorema 1.** Dacă  $\mathcal{X}'$  este  $\sigma$ -corpul (corpul) de părți ale lui  $\Omega$  generat de  $\mathcal{F}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$  atunci  $X^{-1}(\mathcal{X}')$  este  $\sigma$ -corpul (corpul) generat de  $X^{-1}(\mathcal{F}')$ .

*Demonstrație.* Fie  $\mathcal{X} = X^{-1}(\mathcal{X}')$  și  $\mathcal{X}_0$   $\sigma$ -corpul (corpul) generat de  $X^{-1}(\mathcal{F}')$ . Cu aceste notații putem scrie

$$\mathcal{F}' \subset \mathcal{X}' \Rightarrow X^{-1}(\mathcal{F}') \subset X^{-1}(\mathcal{X}') = \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}.$$

Pe de altă parte familia

$$\mathcal{D} = \{A': X^{-1}(A') \in \mathcal{X}_0\};$$

este un  $\sigma$  — corp (corp) care conține  $(\mathcal{F})$ . Rezultă  $\mathcal{X} \subset \mathcal{D}$  și de aici

$$\mathcal{X} = X^{-1}(\mathcal{X}') \subset X^{-1}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{X}_0$$

**Definiția 1.** Fiind date două spații probabilizabile  $(\Omega, \mathcal{X})$  și  $(\Omega', \mathcal{X}')$  aplicația  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$  este o aplicație măsurabilă a lui  $(\Omega, \mathcal{X})$  în  $(\Omega', \mathcal{X}')$  dacă  $X^{-1}(\mathcal{X}') \subset \mathcal{X}$ .

$X^{-1}(\mathcal{X}')$  este cel mai mic sub —  $\sigma$  — corp al lui  $\mathcal{X}$  în raport cu care  $X$  este măsurabilă. Îl vom numi  $\sigma$  — corpul generat de  $X$  și îl vom nota  $(X)$ .

**Teorema 2.** Dacă  $(\mathcal{F}) \subset \mathcal{P}(\Omega')$  generează  $\sigma$  — corpul  $\mathcal{X}'$  și  $X^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{X}$ , atunci  $X$  este măsurabilă.

*Demonstrație.*  $X^{-1}(\mathcal{X}')$  este  $\sigma$  — corpul generat de  $X^{-1}(\mathcal{F})$  (teorema 1) și deci dacă  $X^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{X}$ , atunci  $X^{-1}(\mathcal{X}') \subset \mathcal{X}$ .

**Teorema 3.** Dacă  $X$  este o aplicație măsurabilă a lui  $(\Omega, \mathcal{X})$  în  $(\Omega', \mathcal{X}')$ , iar  $X'$  o aplicație măsurabilă a lui  $(\Omega', \mathcal{X}')$  în  $(\Omega'', \mathcal{X}'')$  atunci  $X' \circ X$  este o aplicație măsurabilă a lui  $(\Omega, \mathcal{X})$  în  $(\Omega'', \mathcal{X}'')$ .

*Demonstrație.*

$$A'' \in \mathcal{X}'' = X^{-1}(A'') \in \mathcal{X}' \Rightarrow (X' \circ X)^{-1}(A'') = X^{-1}(X'^{-1}(A'')) \in$$

În cele ce urmează notăm cu  $\mathcal{B}$  familia părților boreliene ale dreptei reale  $\mathbb{R}$ , iar cu  $\overline{\mathcal{B}}$  familia părților boreliene ale dreptei încheiate  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ .

**Definiția 2.** Aplicația  $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  se numește variabilă aleatoare reală dacă este o aplicație măsurabilă a lui  $(\Omega, \mathcal{X})$  în  $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ .

O variabilă aleatoare finită este o aplicație măsurabilă a lui  $(\Omega, \mathcal{X})$  în  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . O aplicație a lui  $\Omega$  în mulțimea numerelor complexe este o variabilă aleatoare complexă dacă partea reală și partea imaginară sînt variabile aleatoare reale. Variabilele aleatoare multidimensionale se definesc prin analogie cu definiția 1. Variabilele aleatoare cu care vom lucra în continuare sînt reale fără a mai specifica acest lucru.

Pentru ca o aplicație  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  să fie variabilă aleatoare este suficient ca pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{X}$ . Aceasta deoarece mulțimea intervalelor  $(-\infty, x)$ , ( $x \in \mathbb{R}$ ) generează  $\mathcal{B}$ . De fapt este suficient ca această condiție să fie verificată de orice  $x \in D$  unde  $D$  este o parte densă a lui  $\mathbb{R}$ .

**Definiția 3.** O variabilă aleatoare finită se numește simplă sau etajată dacă mulțimea valorilor sale  $X(\Omega)$  este finită.

Se observă imediat că o aplicație  $X : \Omega \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$  este o variabilă aleatoare dacă și numai dacă  $\{\omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{X}$  oricare ar fi  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Teorema 4.** Orice variabilă aleatoare pozitivă este limita unui șir crescător de variabile aleatoare simple pozitive.

*Demonstrație.* Fie  $X \geq 0$  o variabilă aleatoare și

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} \text{ dacă } \frac{i-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{i}{2^n}; & i = 1, 2, \dots, n \cdot 2^n \\ n & \text{dacă } X(\omega) \geq n, \end{cases}$$

$(X_n)$  este un șir de variabile aleatoare simple pozitive și  $X_n \uparrow X$ .

**Corolar.** Orice variabilă aleatoare este limita unui șir de variabile aleatoare simple.

*Demonstrație.* Dacă  $X$  este o variabilă aleatoare, atunci

$$X^+ = \begin{cases} X & \text{dacă } X \geq 0, \\ 0 & \text{dacă } X \leq 0 \end{cases}$$

$$X^- = \begin{cases} 0 & \text{dacă } X \geq 0, \\ -X & \text{dacă } X \leq 0 \end{cases}$$

sînt variabile aleatoare (se arată ușor) pozitive și

$$X = X^+ - X^-$$

Reciproca acestui corolar este dată în

**Teorema 5.** Dacă  $X_n$  ( $n \geq 1$ ) sînt variabile aleatoare simple și  $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$  în orice  $\omega \in \Omega$ , atunci  $X$  este variabilă aleatoare.

*Demonstrație.* Avem pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\{\omega : X(\omega) < x\} = \bigcup_{k \geq 1} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \omega : X_n(\omega) < x - \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{X}.$$

O consecință imediată a teoremei 5 și a reciprocei sale este că dacă  $X$  și  $Y$  sînt variabile aleatoare atunci  $X + Y$ ,  $XY$ ,  $X/Y$  sînt de asemenea variabile aleatoare cu condiția ca operațiile scrise să aibă sens pentru orice  $\omega \in \Omega$ .

Să mai observăm acum că dacă  $(X_n)$  este un șir de variabile aleatoare atunci pentru orice  $x \in \mathbb{R}$

$$\{\omega : \inf_n X_n(\omega) < x\} = \bigcup_n \{X_n < x\} \in \mathcal{X}$$

adică  $\inf_n X_n$  este o variabilă aleatoare. Deci și  $\sup X_n = -\inf(-X_n)$  este variabilă aleatoare. Mergînd mai departe rezultă că

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} X_k,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} X_k$$

sînt variabile aleatoare. O consecință importantă a ultimei observații este că mulțimea punctelor în care un șir de variabile aleatoare are limită (finită sau nu) este măsurabilă (aparține lui  $\mathcal{X}$ ). Într-adevăr, această mulțime este

$$\{\omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)\} \in \mathcal{X}.$$

**Definiția 4.** Variabilele aleatoare ale familiei  $(X_i)_{i \in I}$  sînt independente dacă sub- $\sigma$ -corpurile  $\mathcal{X}(X_i)$   $i \in I$  sînt independente.

Conform teoremei 12 din 2.1 variabilele  $X_i$  ( $i \in I$ ) sînt independente dacă și numai dacă pentru orice familie finită  $I' \subset I$  și orice  $x_i$ ,  $i \in I'$

$$P\left(\bigcap_{I'} \{X_i < x_i\}\right) = \prod_{I'} P(X_i < x_i).$$

Dacă variabilele  $X_i$  ( $i \in I$ ) sînt discrete atunci ele sînt independente dacă și numai dacă pentru orice  $I'$  finit  $I' \subset I$  și orice  $x_i \in \mathbb{R}$ :

$$P\left(\bigcap_{I'} \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{I'} P(X_i = x_i)$$

Este de asemenea ușor de observat că dacă  $X_i (i \in I)$  sînt variabile aleatoare independente și  $f_i (i \in I)$  sînt aplicații măsurabile ale lui  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  în  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  atunci variabilele aleatoare  $f_i(X_i) i \in I$  sînt independente.

**Definiția 5.** Aplicația  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  este o funcție de repartiție dacă :

$$(F_I) : x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2),$$

$$(F_{II}) : F(x_0 - 0) = \lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R},$$

$$(F_{III}) : \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Dacă  $X$  este o variabilă finită și

$$F(x) = P(X < x), \quad x \in \mathbb{R}$$

atunci  $F$  este o funcție de repartiție și o vom numi funcția de repartiție a variabilei  $X$ .

Studiul familiei de funcții  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  satisfăcînd  $(F_I)$  și  $(F_{II})$  (nu neapărat și  $(F_{III})$ ) nu este cu mult mai complicat. Acestea corespund variabilelor aleatoare  $X$  pentru care suma  $P(X = -\infty) + P(X = +\infty)$  poate fi nenulă. Noi ne vom mărgini numai la funcțiile date prin definiția 5.

**Teorema 5.** Pentru orice probabilitate pe  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  există o funcție de repartiție unică astfel ca

$$P([a, b)) = F(b) - F(a), \quad a \leq b \quad (*)$$

și reciproc, fiecărei funcții de repartiție  $F$  îi corespunde o probabilitate unică  $P$  pe  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  astfel ca  $(*)$  să aibă loc.

**Demonstrație.** Fie  $P$  o probabilitate pe  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Dacă luăm

$$F(x) = P(-\infty, x)$$

atunci  $F$  este o funcție de repartiție și

$$P[a, b] = P(-\infty, b) - P(-\infty, a) = F(b) - F(a).$$

Dacă  $F_1$  este o funcție de repartiție satisfăcînd  $(*)$  atunci făcînd  $a \downarrow -\infty$  obținem

$$F_1(b) = P(-\infty, b) = F(b), \quad (b \in \mathbb{R}).$$

Reciproc, fie  $F$  o funcție de repartiție și  $\mathcal{J}$  mulțimea de intervale ale lui  $\mathbb{R}$ :

$$\mathcal{J} = \{(-\infty, x), [x, +\infty), [a, b), (a, b), (a, b], [a, b], (-\infty, +\infty); x, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(Intervalele  $[a, b), (a, b], [a, b]$  le considerăm definite pentru  $a \leq b$ .)

Pentru  $a = b$  luăm  $[a, b) = (a, b] = \emptyset$ , iar  $[a, a] = a$ ; intervalul  $(a, b)$  are sens doar pentru  $a < b$ .

Se verifică ușor că  $\mathcal{J}$  este un semicorp de părți ale lui  $\mathbb{R}$ . Să definim  $P : \mathcal{J} \rightarrow [0, 1]$  prin egalitățile

$$P(-\infty, x) = F(x); P[x, +\infty) = 1 - F(x); P[a, b) = F(b) - F(a),$$

$$P(a, b) = F(b) - F(a + 0); P(a, b] = F(b + 0) - F(a + 0);$$

$$P[a, b] = F(b + 0) - F(a); P(-\infty, +\infty) = 1.$$

Se verifică ușor că  $P$  este aditivă pe  $\mathcal{J}$ . Clasa  $\mathcal{C}$  a intervalelor de forma  $[a, b]$  este compactă și pentru orice  $I \in \mathcal{J}$ ,  $I \neq \emptyset$

$$P(I) = \sup \{P[a, b] : [a, b] \subset I\}.$$

Rezultă că  $P$  are o prelungire unică  $P'$  la o probabilitate pe  $\sigma$  — corpul generat de  $\mathcal{J}$ , adică pe  $\mathcal{B}$ .

Dacă  $P_1$  este o probabilitate pe  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  satisfăcând (\*) atunci  $P_1$  și  $P$  coincid pe  $\mathcal{J}$  și deci cu  $P'$  pe  $\mathcal{B}$ .

### 2.3. VALORI MEDII

**Definiția 1.** Dacă  $X$  este o variabilă aleatoare simplă pe  $(\Omega, \mathcal{X}, P)$  care ia valorile  $x_1, x_2, \dots, x_n$  atunci numărul

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

se numește valoarea medie sau integrala variabilei aleatoare  $X$ .

În acest paragraf vom nota prin  $\mathcal{G}$  familia variabilelor aleatoare simple și prin  $\mathcal{G}_+$  familia variabilelor aleatoare simple pozitive ( $\geq 0$ ).

Valoarea medie pe  $\mathcal{G}$  are următoarele proprietăți

$$M(aX) = aM(X), \quad a \in \mathbb{R},$$

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y),$$

$$X \in \mathcal{G}_+ \Rightarrow M(X) \geq 0,$$

$$X \leq Y \Rightarrow M(X) \leq M(Y),$$

$$|M(X)| \leq M(|X|),$$

$$M(X) + M(Y) = M(\inf(X, Y)) + M(\sup(X, Y))$$

$M(XY) = M(X)M(Y)$  dacă  $X, Y \in \mathcal{G}$  sînt independente.

Aceste proprietăți se demonstrează cu ușurință. Următoarele două teoreme sînt necesare pentru extinderea noțiunii de valoare medie.

**Teorema 1.** Dacă  $X_n \in \mathcal{G}_+$  ( $n \geq 1$ )  $X_n \downarrow 0$  atunci  $M(X_n) \downarrow 0$ .

*Demonstrație.* Fie  $\lambda = \sup_{\omega} X_1(\omega)$  și  $\varepsilon > 0$ . Luăm

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} \lambda & \text{dacă } X_n(\omega) > \varepsilon, \\ \varepsilon & \text{dacă } X_n(\omega) \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Evident  $0 \leq X_n \leq Y_n$  și deci

$$0 \leq M(X_n) \leq M(Y_n) = \lambda P(X_n > \varepsilon) + \varepsilon P(X_n \leq \varepsilon).$$

Dacă facem aici  $n \rightarrow \infty$  ținînd cont că  $P(X_n > \varepsilon) \downarrow 0$  deoarece  $\{X_n > \varepsilon\} \downarrow \emptyset$  va rezulta:

$$0 \leq \lim M(X_n) \leq \varepsilon$$

cu  $\varepsilon > 0$  arbitrar.

**Corolar.** Dacă  $X_n \in \mathcal{G}$ ,  $n \geq 1$ ,  $X \in \mathcal{G}$  atunci

$$X_n \uparrow X \Rightarrow M(X_n) \uparrow M(X),$$

$$X_n \downarrow X \Rightarrow M(X_n) \downarrow M(X).$$

**Teorema 2.** Dacă  $(X_n)$  și  $(X'_n)$  sînt două șiruri crescătoare de variabile aleatoare simple pozitive și  $\lim X_n \leq \lim X'_n$  atunci  $\lim M(X_n) \leq \lim M(X'_n)$ .

În particular, dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} X'_n$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} M(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(X'_n)$ .

*Demonstrație.* A se vedea lema ce precede teorema 11 din 2.1.

Dacă  $X$  este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare există un șir  $(X_n)$  în  $\mathcal{G}_+$  astfel ca  $X_n \uparrow X$  (teorema 4 — 2.2).

**Definiția 2.** Numărul  $M(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(X_n)$  se numește valoarea medie a variabilei aleatoare pozitive  $X$ . Vom spune că  $X$  este integrabilă dacă  $M(X) < \infty$ .

Această definiție este corectă deoarece teorema 2 ne asigură că  $M(X)$  nu depinde de alegerea șirului  $(X_n)$ , iar teorema 1 că dacă  $X \in \mathcal{G}_+$  atunci definiția 2 nu contrazice definiția 1.

Să mai observăm că dacă  $X$  este integrabilă atunci  $P(X = \infty) = 0$ .

Dacă variabila aleatoare  $X \geq 0$  are o mulțime numărabilă de valori posibile  $\{x_n, n \geq 1\}$  atunci luînd  $X_n = X \cdot I_{B_n}$  unde  $B_n = \bigcup_{i=1}^n \{X = x_i\}$

avem  $X_n \in \mathcal{G}_+$ ,  $X_n \uparrow X$ ;  $M(X_n) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$  și deci  $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$ .

Valoarea medie pe mulțimea variabilelor aleatoare pozitive are proprietățile :

$$M(cX) = cM(X), \quad c \in \mathbf{R}, c \geq 0,$$

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y),$$

$$X \leq Y \Rightarrow M(X) \leq M(Y),$$

$$M(\inf(X, Y)) + M(\sup(X, Y)) = M(X) + M(Y),$$

$$X_n \uparrow X \Rightarrow M(X_n) \uparrow M(X),$$

$M(XY) = M(X)M(Y)$  dacă  $X$  și  $Y$  sînt independente.

Să dovedim ultimele două proprietăți. Pentru prima dintre ele luăm  $X_{mn} \in \mathcal{G}_+$  astfel ca

$$X_{mn} \uparrow X_m, \quad (n \uparrow \infty)$$

și notăm

$$Y_{mn} = \sup_{m : m \leq n} X_{mn}.$$

Dacă  $m \leq n$  atunci

$$X_{mn} \leq X_m \leq X_n \Rightarrow Y_n \leq X_n.$$

Putem deci scrie

$$X_{mn} \leq Y_n \leq X_n, \quad (m \leq n)$$

și implicit

$$M(X_{mn}) \leq M(Y_n) \leq M(X_n), \quad (m \leq n).$$

Făcînd  $n \rightarrow \infty$  în amîndouă relațiile de mai sus rezultă

$$X_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} X_n,$$

$$M(X_m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M(Y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M(X_n)$$

și acum dacă  $m \rightarrow \infty$ :

$$X = \lim_{m \rightarrow \infty} X_m = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(X_n).$$

și proprietatea este demonstrată deoarece prin definiție  $M(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(Y_n)$ .

Pentru a demonstra ultima proprietate fie  $(X_n)$  și  $(Y_n)$  două șiruri de variabile aleatoare simple pozitive  $\mathcal{X}(X)$  și respectiv  $\mathcal{X}(Y)$  măsurabile astfel ca

$$X_n \uparrow X; Y_n \uparrow Y.$$

Întrucît  $\sigma$  — corpurile  $\mathcal{X}(X)$  și  $\mathcal{X}(Y)$  sînt independente, pentru orice  $n \geq 1$  variabilele  $X_n$  și  $Y_n$  sînt independente și prin urmare

$$M(X_n \cdot Y_n) = M(X_n) \cdot M(Y_n).$$

Întrucît  $(X_n \cdot Y_n)$  este un șir de variabile aleatoare simple pozitive și  $X_n \cdot Y_n \uparrow X \cdot Y$ :

$$M(XY) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(X_n Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(X_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} M(Y_n) = M(X) \cdot M(Y).$$

**Definiția 3.** Variabila aleatoare  $X$  este integrabilă dacă  $X^+$  și  $X^-$  sînt integrabile. În acest caz valoarea medie (integrala) lui  $X$  este

$$M(X) = M(X^+) - M(X^-).$$

Se vede imediat că orice variabilă aleatoare mărginită este integrabilă. Mai general, dacă  $X_1 \leq X \leq X_2$  și  $X_1, X_2$  sînt variabile aleatoare integrabile, atunci  $X$  este o variabilă aleatoare integrabilă.

Dacă  $X$  este o variabilă aleatoare integrabilă atunci  $P(X = \pm \infty) = 0$ .

Variabila aleatoare  $X$  este *quasi-integrabilă* dacă cel puțin una din variabilele aleatoare  $X^+, X^-$  este integrabilă; în acest caz încă scriem  $M(X) = M(X^+) - M(X^-)$ .

**Teorema 3.** Valoarea medie pe mulțimea variabilelor aleatoare quasi-integrabile are proprietățile:

$$(M_1): M(c \cdot X) = c \cdot M(X); c \in \mathbb{R};$$

$$(M_2): M(X + Y) = M(X) + M(Y) \text{ dacă } \max(M(X^+), M(Y^+)) < \infty$$

sau  $\max(M(X^-), M(Y^-)) < \infty$ ;

$$(M_3) : X \leq Y \Rightarrow M(X) \leq M(Y);$$

$$(M_4) : X_n \uparrow X \Rightarrow M(X_n) \uparrow M(X) \text{ dac\u0103 } M(X_1^-) < \infty;$$

$$X_n \downarrow X \Rightarrow M(X_n) \downarrow M(X) \text{ dac\u0103 } M(X_1^+) < \infty;$$

$(M_5) : M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$  dac\u0103  $X, Y$  s\u00ednt variabile aleatoare integrabile \u0219i independente.

*Demonstra\u021bie.*  $(M_2)$ . Variabila aleatoare  $X + Y$  este quasi-integrabil\u0103 deoarece

$$(X + Y)^+ \leq X^+ + Y^+; (X + Y)^- \leq X^- + Y^-.$$

Pe de alt\u0103 parte din

$$(X + Y)^+ + X^- + Y^- = (X + Y)^- + X^+ + Y^+$$

rezult\u0103

$$M((X + Y)^+) + M(X^-) + M(Y^-) = M((X + Y)^-) + M(X^+) + M(Y^+);$$

$(M_5) : X_n (n \geq 1)$  s\u00ednt variabile quasi-integrabile deoarece

$$X_n \geq X_1 \Rightarrow X_n^- \leq X_1^- \Rightarrow M(X_n^-) \leq M(X_1^-) < \infty.$$

Pe de alt\u0103 parte  $X_n + X_1^- \geq 0$  \u0219i

$$X_n + X_1^- \uparrow X + X_1^- \Rightarrow M(X_n) + M(X_1^-) \uparrow M(X) + M(X_1^-).$$

$(M_6) :$ Avem :

$$(XY)^+ = X^+Y^+ + X^-Y^-$$

$$(XY)^- = X^+Y^- + X^-Y^+$$

din care rezult\u0103

$$M[(XY)^+] = M(X^+)M(Y^+) + M(X^-) \cdot M(Y^-),$$

$$M[(XY)^-] = M(X^+) \cdot M(Y^-) + M(X^-) \cdot M(Y^+).$$

Deducem c\u0103  $XY$  este variabil\u0103 aleatoare integrabil\u0103 \u0219i proprietatea se ob\u021bine prin sc\u0103derea celor dou\u0103 rela\u021bii.

**Lema Fatou—Lebesque.** *Dac\u0103  $Y, Y'$  s\u00ednt variabile aleatoare integrabile atunci*

$$X_n \leq Y (n \geq 1) \Rightarrow M(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} M(X_n)$$

$$X_n \geq Y' (n \geq 1) \Rightarrow M(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} M(X_n).$$

*Demonstra\u021bie.* *Dac\u0103  $Y_n = \sup_{k \geq n} X_k$  atunci  $Y_n \downarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$  \u0219i*

$$Y_1^+ = (\sup_{k \geq 1} X_k)^+ = \sup_{k \geq 1} X_k^+ \leq Y^+.$$

Putem deci scrie

$$M(Y_n) \downarrow M(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n).$$

Pe de altă parte

$$k \geq n \Rightarrow X_k \leq Y_n \Rightarrow M(X_k) \leq M(Y_n) \Rightarrow \sup_{k \geq n} M(X_k) \leq M(Y_n).$$

Dacă acum facem  $n \rightarrow \infty$  rezultă

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} M(X_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M(Y_n) = M(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n).$$

Parte a doua se demonstrează la fel.

*Integrala definită.* Dacă variabila aleatoare  $X$  este quasi-integrabilă și  $A \in \mathcal{X}$  atunci numărul

$$\int_A X dP = M(I_A X)$$

se numește integrală pe mulțimea  $A$  (în raport cu  $P$ ) a lui  $X$ .

Se observă că  $M(X) = \int_{\Omega} X dP$ . Proprietățile integralei definite se deduc ușor din proprietățile valorii medii.

*Exprimarea valorii medii printr-o integrală Lebesgue-Stieltjes.*

Dacă  $X$  este o variabilă aleatoare finită atunci aplicația  $P' : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  dată prin relația

$$P'(B) = P(X^{-1}(B))$$

este o probabilitate pe  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Aceasta este singura probabilitate pe  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  astfel ca  $P'([a, b]) = P(X \in [a, b])$  (teorema 5 — 2.2).

Cu  $P'$  astfel ales putem enunța :

**Teorema 4.** Fie  $X$  o variabilă aleatoare finită pe  $(\Omega, \mathcal{X}, P)$  iar  $f$  o variabilă aleatoare finită pe  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P')$  ( $f$  este măsurabilă Borel).

Dacă este îndeplinită una din condițiile

- 1)  $f(X)$  este integrabilă (pe  $\Omega$  în raport cu  $P$ ).
- 2)  $f$  este integrabilă (pe  $\mathbb{R}$  în raport cu  $P'$ ) atunci sînt îndeplinite amîndouă și

$$M(f(X)) = \int_{\Omega} f(X) dP = \int_{\mathbb{R}} f dP'.$$

*Demonstrație.* Să facem demonstrația mai întii pentru cazul cînd  $f$  este o funcție indicatoare. Fie  $f = I_B$ ,  $B \in \mathcal{B}$ . În acest caz  $f(X) = I_{\{X^{-1}(B)\}}$  și

$$\int_{\Omega} f(X) dP = \int_{\Omega} I_{\{X^{-1}(B)\}} dP = P(X^{-1}(B)) = P'(B) = \int_{\mathbb{R}} I_B dP' = \int_{\mathbb{R}} f dP'.$$

Dacă  $f$  este o variabilă aleatoare simplă pe  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  :

$$f = \sum x_i I_{B_i}, \quad (B_i \in \mathcal{B}_i)$$

atunci avem

$$f(X) = \sum x_i I_{\{X^{-1}(B_i)\}}$$

și în consecință

$$\int_{\Omega} f(X) dP = \sum x_i \int_{\Omega} I_{\{X^{-1}(B_i)\}} dP = \sum x_i P(X^{-1}(B_i)) = \sum x_i P'(B_i) = \int_{\mathbb{R}} f dP'.$$

Dacă  $f \geq 0$  este o variabilă aleatoare pe  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  fie  $(f_n)$  un șir de variabile aleatoare simple pozitive pe  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$   $f_n \uparrow f$ . În acest caz

$$\int_{\mathbb{R}} f_n dP' \uparrow \int_{\mathbb{R}} f dP'; \quad \int_{\mathbb{R}} f_n dP' = \int_{\Omega} f_n(X) dP, \quad (n \geq 1).$$

Din aceste relații rezultă

$$\int_{\Omega} f_n(X) dP \uparrow \int_R f dP'.$$

Dar  $f_n(X)$  sînt variabile aleatoare simple pozitive pe  $(\Omega, \mathcal{X}, P)$  și

$$f_n(X) \uparrow f(X).$$

Deci prin definiție

$$\int_{\Omega} f_n(X) dP \uparrow \int_{\Omega} f(X) dP.$$

În sfîrșit să considerăm acum că  $f$  este o aplicație măsurabilă Borel oarecare. Avem

$$(f \circ X)^+ = f^+ \circ X; (f \circ X)^- = f^- \circ X$$

și, în consecință

$$\int_{\Omega} (f \circ X)^+ dP = \int_R f^+ dP'; \int_{\Omega} (f \circ X)^- dP = \int_R f^- dP'.$$

Rezultă că  $f \circ X$  este integrabilă (quasi-integrabilă) în raport cu  $P$  dacă și numai dacă  $f$  este integrabilă (quasi-integrabilă) în raport cu  $P'$ . Dacă  $f \circ X$  și  $f$  sînt quasi-integrabile atunci

$$\int_{\Omega} (f \circ X) dP = \int_{\Omega} (f \circ X)^+ dP - \int_{\Omega} (f \circ X)^- dP = \int_R f^+ dP' - \int_R f^- dP' = \int_R f dP'$$

și teorema este demonstrată.

Dacă  $P'$  este o probabilitate pe  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  și  $f$  o aplicație măsurabilă Borel și  $P'$  — integrabilă iar  $F$  funcția de repartiție corespunzătoare lui  $P'$  prin teorema 5 din 2.2 atunci  $\int_{[a,b]} f dP'$  se mai notează  $\int_a^b f dF$  iar  $\int_R f dP$  se mai scrie  $\int_{-\infty}^{+\infty} f dF$  și se numește *integrala Lebesgue-Stieltjes* a lui  $f$  în raport cu  $F$ .

**Teorema 5.** Dacă  $f$  este o funcție măsurabilă Borel continuă pe  $[a, b]$  atunci

$$\int_{[a,b]} f dP' = \int_a^b f dF$$

unde în membrul drept apare o integrală Riemann-Stieltjes.

*Demonstrație.*  $f$  fiind continuă pe  $[a, b]$  este mărginită pe  $[a, b]$  și deci  $P'$  — integrabilă pe acest interval. În plus,  $f$  este uniform continuă pe  $[a, b]$ , adică

$$|x' - x''| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \quad (x', x'' \in [a, b]).$$

Fie  $(\Delta_n)$  un șir de diviziuni ale intervalului  $[a, b]$  cu șirul normelor  $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ;

$$\Delta_n: a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{k_n}^{(n)} < x_{k_n+1}^{(n)} = b.$$

Fie de asemenea

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x_k^{(n)}) & \text{dacă } x_k^{(n)} \leq x < x_{k+1}^{(n)}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_n \\ 0 & \text{dacă } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

În acest caz

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(x_k^{(n)})| \text{ dacă } x \in [x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}].$$

Dacă  $n > N_\epsilon'$  atunci  $v(\Delta_n) < \delta_\epsilon$  și deci

$$|f(x) - f(x_k^{(n)})| < \epsilon.$$

Din cele spuse rezultă  $(f_n)$  este un șir mărginit de variabile aleatoare simple pe  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, P')$  și  $f_n \rightarrow I_{[a,b]} f$ . Conform lemei Fatou-Lebesgue :

$$\int_{\mathbf{R}} f_n dP' \rightarrow \int_{[a,b]} f dP'. \quad (1)$$

Pe de altă parte

$$\int_{\mathbf{R}} f_n dP' = \sum_{k=0}^{k_n} f(x_k^{(n)}) \cdot P'(x_k^{(n)} \leq x < x_{k+1}^{(n)}) = \sum_{k=0}^n f(x_k^{(n)}) (F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})).$$

Ultima sumă este o sumă Riemann-Stieltjes și deci

$$\int_{\mathbf{R}} f_n dP' \rightarrow \int_a^b f dF$$

unde ultima integrală este Riemann-Stieltjes. Confruntând această relație cu (1) rezultă

$$\int_{[a,b]} f dP' = \int_a^b f dF.$$

Dacă  $\int_a^b |f| dF$  (Riemann-Stieltjes) există pentru orice  $a < b$  ( $\in \mathbf{R}$ ) și are o limită finită când  $a \downarrow -\infty$ ,  $b \uparrow +\infty$ , atunci spunem că  $f$  este integrabilă Stieltjes pe  $\mathbf{R}$  în raport cu  $F$ . În aceste condiții  $\lim_{\substack{a \downarrow -\infty \\ b \uparrow +\infty}} \int_a^b f dF$  există, este finită și o notăm cu  $\int_{-\infty}^{+\infty} f dF$ .

Rezultă că dacă  $f$  este continuă pe  $\mathbf{R}$ , atunci ea este integrabilă pe  $\mathbf{R}$  în raport cu  $P'$  dacă și numai dacă este integrabilă Riemann-Stieltjes pe  $\mathbf{R}$  în raport cu  $F$  și

$$\int_{\mathbf{R}} f dP' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x).$$

Din cele spuse pînă acum rezultă că dacă  $X$  este o variabilă aleatoare finită pe  $(\Omega, \mathcal{X}, P)$  și  $f$  este măsurabilă Borel, iar  $P'$  este probabilitatea indusă de  $X$  și  $P$  pe  $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ , atunci  $f(X)$  este integrabilă dacă și numai dacă  $f$  este integrabilă și în acest caz

$$M(f(X)) = \int_{\mathbf{R}} f dP'.$$

Dacă  $F$  este funcția de repartiție a variabilei aleatoare  $X$  și  $f$  este o aplicație continuă a lui  $\mathbf{R}$  în  $\mathbf{R}$ , atunci

$$M(f(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x) \quad (2)$$

(în sensul că dacă unul din cei doi membri ai egalității de există, atunci există și celălalt și sint egali).

În particular, dacă  $f(x) = x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) rezultă că variabila aleatoare  $X$  este integrabilă dacă și numai dacă  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$  există și este finită și în acest caz

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x).$$

Rezultă de asemenea că  $X$  este integrabilă dacă și numai dacă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF(x) < \infty.$$

**Momente.** Momentul de ordinul  $p$  al variabilei aleatoare  $X$  ( $p \in \mathbf{N}$ ) este

$$M_p(X) = M(X^p)$$

dacă variabila  $X^p$  este integrabilă.

Dacă  $X$  are moment de ordinul  $p$ , atunci luind  $f(x) = x^p$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) în (2) obținem

$$M_p(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p dF(x)$$

unde  $F$  este funcția de repartiție a lui  $X$ .

Momentul absolut de ordinul  $r$ ,  $r > 0$ ,  $r \in \mathbf{R}$  este

$$\bar{M}_r(X) = M(|X|^r)$$

dacă  $|X|^r$  este integrabilă și în acest caz

$$\bar{M}_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r dF(x).$$

În cele ce urmează vom nota cu  $\mathcal{L}_r$  spațiul variabilelor aleatoare cu puterea  $r$  a modului integrabilă.  $\mathcal{L}_1$  este spațiul variabilelor aleatoare integrabile:  $\bar{M}_1(X) = M(|X|)$ .

**Teorema 6.** Au loc inegalitățile:

a)  $\bar{M}_r(X + Y) \leq c_r \bar{M}_r(X) + c_r \bar{M}_r(Y)$  unde

$$c_r = \begin{cases} 1 & \text{dacă } 0 < r \leq 1, \\ 2^{r-1} & \text{dacă } r > 1. \end{cases}$$

b) (Inegalitatea lui Hölder)

$$M(|XY|) \leq [\bar{M}_r(X)]^{1/r} \cdot [\bar{M}_s(Y)]^{1/s} \text{ dacă}$$

$$r, s > 0, \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

c)  $M(|XY|) \leq \sqrt{M(X^2)M(Y^2)}$  (inegalitatea lui Schwartz)

d)  $[\bar{M}_r(X + Y)]^{1/r} \leq [\bar{M}_r(X)]^{1/r} + [\bar{M}_r(Y)]^{1/r}$  dacă  $r \geq 1$

(inegalitatea lui Minkowski)

e)  $[\bar{M}_r(X)]^{1/r} \leq [\bar{M}_s(X)]^{1/s}$  dacă  $1 \leq r < s$ .

*Demonstrație.* a) Pentru  $0 < r \leq 1$

$$|X + Y|^r \leq |X|^r + |Y|^r$$

iar pentru  $r > 1$

$$|X + Y|^r \leq 2^{r-1}|X|^r + 2^{r-1}|Y|^r$$

și proprietatea decurge imediat. O consecință a acestei proprietăți este

$$X, Y \in \mathcal{L}_r \Rightarrow X + Y \in \mathcal{L}_r.$$

b) Se aplică inegalitatea

$$ab \leq \frac{a^r}{r} + \frac{a^s}{s}; \quad a, b > 0, \quad r, s > 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

Dacă luăm

$$a = |X| \cdot [\overline{M}_r(X)]^{-\frac{1}{r}}$$

$$b = |Y| \cdot [\overline{M}_s(Y)]^{-\frac{1}{s}}$$

vom obține:

$$|XY| [\overline{M}_r(X)]^{-\frac{1}{r}} [\overline{M}_s(Y)]^{-\frac{1}{s}} \leq \frac{1}{r} |X|^r [\overline{M}_r(X)]^{-1} + \frac{1}{s} |Y|^s [\overline{M}_s(Y)]^{-1}.$$

Dacă se aplică  $M$  în ambii membri rezultă

$$M(|XY|) [\overline{M}_r(X)]^{-\frac{1}{r}} [\overline{M}_s(Y)]^{-\frac{1}{s}} \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$$

c) este un caz particular al lui b):  $r = s = \frac{1}{2}$ .

d) Dacă luăm  $|X + Y|^{r-1}$  în loc de  $Y$  în b) obținem

$$M(|X| \cdot |X + Y|^{r-1}) \leq [\overline{M}_r(X)]^{1/r} [\overline{M}_s(|X + Y|^{r-1})]^{1/s}.$$

Pe de altă parte ținând cont că  $s(r-1) = r$

$$\overline{M}_s(|X + Y|^{r-1}) = M(|X + Y|^{s(r-1)}) = \overline{M}_r(X + Y).$$

Revenind la inegalitatea precedentă vom putea scrie

$$M(|X| \cdot |X + Y|^{r-1}) \leq [\overline{M}_r(X)]^{1/r} \cdot [\overline{M}_r(X + Y)]^{1/r}.$$

Schimbând  $X, Y$  între ele

$$M(|Y| \cdot |X + Y|^{r-1}) \leq [\overline{M}_r(Y)]^{1/r} \cdot [\overline{M}_r(X + Y)]^{1/r}.$$

Pe de altă parte

$$|X + Y|^r \leq |X| \cdot |X + Y|^{r-1} + |Y| \cdot |X + Y|^{r-1}$$

atrage după sine

$$\overline{M}_r(X + Y) \leq M(|X| \cdot |X + Y|^{r-1}) + M(|Y| \cdot |X + Y|^{r-1})$$

și dacă ținem cont de cele de mai sus

$$\overline{M}_r(X + Y) \leq [\overline{M}_r(X + Y)]^{1/r} \cdot [\overline{M}_r(X + Y)]^{1/r} + [\overline{M}_r(X + Y)]^{1/r} \cdot [\overline{M}_r(X + Y)]^{1/r}.$$

Demonstrarea proprietății d) se încheie amplificind această inegalitate cu  $[\overline{M}_r(X + Y)]^{-\frac{1}{s}}$  și ținind cont că  $1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{r}$ .

e) Dacă  $0 < r < s$  atunci  $\frac{s}{r} > 1$  și fie  $p$  astfel ca  $\frac{r}{s} + \frac{1}{p} = 1$ .

Dacă în b) luăm  $|X|^r$  în loc de  $|X|$ , 1 în loc de  $|Y|$ ,  $\frac{s}{r}$  în loc de  $r$  și  $p$  în loc de  $s$  obținem

$$M(|X|^r) = M(|X|^r \cdot 1) \leq M(|X|^r)^{1/p}.$$

O consecință a acestei proprietăți este că dacă  $0 < r < s$  atunci  $\mathcal{L}_r \subset \mathcal{L}_s$ .

## 2.4. ȘIRURI DE VARIABILE ALEATOARE DE DE FUNCȚII DE REPARTIȚIE

*Convergența aproape sigură (a.s.).* Pentru început un scurt comentariu asupra proprietăților a.s. Spunem că o proprietate punctuală referitoare la o familie de variabile aleatoare se verifică aproape sigur dacă există o parte neglijabilă  $N$  a lui  $\Omega$  astfel ca proprietatea să aibă loc în orice  $\omega \in N^c$ . Astfel, variabilele aleatoare  $X$  și  $Y$  sînt a.s. egale dacă  $P(X = Y) = 1$ . Vom scrie  $X = Y$  a.s. sau  $X_{a.s.} = Y$ . La fel definim relația  $X_{a.s.} \leq Y$  și altele. Dacă  $X$  este o variabilă aleatoare și  $Y$  o aplicație  $\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $X_{a.s.} = Y$  atunci  $Y$  este variabilă aleatoare pe  $(\Omega, \overline{\mathcal{X}})$  unde  $\overline{\mathcal{X}}$  este completarea lui  $\mathcal{X}$  în raport cu  $P$ . Relația  $X_{a.s.} = Y$  este o relație de echivalență. Multe proprietăți a.s. ale familiilor cel mult numărabile de variabile aleatoare sînt proprietăți ale claselor de echivalență corespunzătoare.

**Definiția 1.** Variabila aleatoare  $X$  este limita a.s. a șirului de variabile aleatoare  $(X_n)$  dacă  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$ .

Mulțimea punctelor  $\omega \in \Omega$  pentru care șirul de numere  $(X_n(\omega_n))$  are limită (finită sau nu) este măsurabilă:

$$\{\omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)\} \in \mathcal{X}.$$

De asemenea mulțimea  $\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\} \in \mathcal{X}$ :

$$\{\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = X\} \in \mathcal{X}$$

Pentru convergența a.s. are loc — după cum este ușor de observat — criteriul lui Cauchy: șirul de variabile aleatoare a.s. finite  $(X_n)$  converge a.s. către o variabilă aleatoare finită dacă și numai dacă  $X_m - X_n$  converge a.s. către zero cînd  $m, n \rightarrow \infty$ .

Dacă șirul  $(X_n)$  are limită a.s. și  $X_n \rightarrow X_1$  a.s.,  $X_n \rightarrow X_2$  a.s. atunci  $X_{1a.s.} = X_2$ . Deci limita a.s. nu este în mod necesar unică; dar două limite pot diferi numai pe o parte neglijabilă a lui  $\Omega$ .

Dacă pentru orice variabilă aleatoare  $X$  notăm cu  $\hat{X}$  clasa sa de echivalență și definim limita unui șir de clase de echivalență astfel: „șirul de clase de echivalență  $(\hat{X}_n)$  are ca limită clasa de echivalență  $\hat{X}$  dacă  $X_n \xrightarrow[a.s.]{} X$ ”, atunci limita dacă există este unică.

Se observă ușor că definiția de mai sus este bună în sensul că limita definită nu depinde de alegerea șirului reprezentanților claselor.

**Teorema 1.** *Dacă există un șir de numere pozitive  $(a_n)$  cu  $\sum a_n < \infty$  astfel ca*

$$\sum_n P(|X_{n+1} - X_n| > a_n) < \infty$$

atunci șirul de variabile aleatoare a.s. finite  $(X_n)$  are o limită a.s. finită.

*Demonstrație.* Fie  $A_n = \{|X_{n+1} - X_n| > a_n\}$  ( $n \geq 1$ )

$$\sum P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$$

(teorema 6 — 2.1). Dacă  $\omega \notin \limsup_n A_n$  atunci există  $N(\omega)$  astfel ca

$$n \geq N(\omega) \Rightarrow |X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)| \leq a_n$$

și deci

$$\sum_{n=N(\omega)}^{\infty} |X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)| \leq \sum_{n=N(\omega)}^{\infty} a_n.$$

Inseamnă că seria  $\sum |X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)|$  este absolut convergentă. Dacă facem  $n \rightarrow \infty$  în relația

$$X_n(\omega) = X_1(\omega) + \sum_{k=1}^{n-1} (X_{k+1}(\omega) - X_k(\omega))$$

rezultă că există  $X(\omega) \in \mathbb{R}$  astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad (\omega \in \liminf_n A_n^c).$$

**Teorema 2.** *O serie (sau un șir) de variabile aleatoare independente este a.s. convergent sau a.s. divergent.*

*Demonstrație.* Fie  $(X_n)$  un șir de variabile aleatoare independente și  $C$  mulțimea punctelor  $\omega \in \Omega$  pentru care seria  $\sum X_n(\omega)$  converge.

Notăm  $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ . Se observă că

$$C = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{r, q \geq n} \left\{ |S_r - S_q| < \frac{1}{m} \right\} \in \mathcal{C}.$$

Dacă pentru  $p > n$  notăm

$$C_{np}^m = \bigcap_{n \leq r, q < p} \left\{ |S_r - S_q| < \frac{1}{m} \right\}$$

atunci

$$P(C) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} C_{np}^m.$$

Pentru orice  $k: n \leq k \leq p$

$$C_{np}^m \subset C_{nk}^m \cap C_{kp}^m$$

și deci

$$P(C_{np}^m) \leq P(C_{nk}^m) \cdot P(C_{kp}^m).$$

Dacă în această relație facem  $p \rightarrow \infty$  reiese

$$\lim_{p \rightarrow \infty} P(C_{np}^m) \leq P(C_{nk}^m) \lim_{p \rightarrow \infty} P(C_{kp}^m).$$

Dacă aici  $k \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} P(C_{np}^m) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P(C_{nk}^m) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} P(C_{kp}^m).$$

Acum facem  $n \rightarrow \infty$  și obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} P(C_{np}^m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} P(C_{nk}^m) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} P(C_{kp}^m).$$

Și în sfârșit  $m \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} P(C_{np}^m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} P(C_{nk}^m) \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} P(C_{kp}^m)$$

adică:

$$P(C) \leq P(C) \cdot P(C)$$

relație care nu poate fi verificată decât dacă  $P(C) = 0$  sau  $P(C) = 1$ .

Pentru șiruri demonstrația este aceeași.

Teorema demonstrată este un caz particular al așa-numitei legea (0; 1) (legea zero—unu): dacă  $\sigma$  — corpurile  $\mathcal{X}_n$  ( $n \geq 1$ ) sînt independente ( $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$ ) și  $\mathcal{X}'_n$  este  $\sigma$  — corpul generat de familia  $\mathcal{X}_j$ ,  $j \geq n$  iar  $\mathcal{X}_0 = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{X}'_n$  atunci

$A \in \mathcal{X}_0 \Rightarrow P(A) = 0$  sau  $P(A) = 1$ .

Să dovedim această proprietate. Pentru aceasta vom observa că  $\sigma$  — corpurile  $\mathcal{X}_n$ ,  $n \geq 0$  sînt independente. Într-adevăr, dacă  $J \subset \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ,  $J$  finită,  $\sigma$  — corpurile  $\mathcal{X}_j$ ,  $j \in J$  sînt independente. Dacă  $0 \notin J$  afirmația este adevărată prin ipoteză; dacă  $0 \in J$  și  $j = \sup J$  atunci afirmația este adevărată deoarece  $\mathcal{X}_0 = \bigcap_{n > j} \mathcal{X}'_n$ . Deoarece  $\sigma$  — corpurile  $\mathcal{X}_n$ ,  $n \geq 0$  sînt independente atunci sînt independente  $\mathcal{X}_0$  și  $\mathcal{X}'_1$ . Dar  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}'_1$  și deci  $A \in \mathcal{X}_0 \Rightarrow A \in \mathcal{X}'_1$ , și  $P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A)$ .

Se vede imediat că teorema 2 este un caz particular al acestei legi și mai mult, teorema poate fi completată cu afirmația că dacă un șir (sau o serie) de variabile aleatoare independente este a.s. convergent, atunci limita este a.s. constantă; aceasta deoarece limita este o variabilă aleatoare  $\mathcal{X}_0$  — măsurabilă.

### Convergența în probabilitate

**Definiția 2.** Șirul  $(X_n)$  de variabile aleatoare a.s. finite converge în probabilitate către variabila aleatoare a.s. finită  $X$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Vom scrie  $X_n \xrightarrow{P} X$ ;  $(X_n)$  este Cauchy în probabilitate dacă

$$X_m - X_n \xrightarrow{P} 0 \quad (m, n \rightarrow \infty).$$

**Teorema 3.** Dacă  $(X_n)$  converge a.s. către variabila a.s. finită  $X$  atunci  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon > 0$ . Din relația

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{ |X_n - X| > \varepsilon \} \subset \{X_n \neq X\}$$

deducem

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{ |X_n - X| > \varepsilon \}) = 0$$

și deci

$$\lim P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

(teorema 7 — 2.2).

**Teorema 4.** Dacă șirul  $(X_n)$  este convergent în probabilitate atunci el este Cauchy în probabilitate.

*Demonstrație.*  $\{ |X_m - X_n| > \varepsilon \} \subset \{ |X_m - X| > \varepsilon/2 \} \cup \{ |X_n - X| > \varepsilon/2 \} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow P(|X_m - X_n| > \varepsilon) \leq P(|X_m - X| > \varepsilon/2) + P(|X_n - X| > \varepsilon/2).$

**Teorema 5.** Din orice șir  $(X_n)$  Cauchy în probabilitate se poate extrage un subșir convergent a.s.

*Demonstrație.* Luăm :

$$n_1 = 1; n_k = \inf \left\{ m : m > n_{k-1}, P\left(|X_r - X_s| > \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{3^k}, \forall r, s \geq m \right\}.$$

În acest caz

$$\sum_k P\left(|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| > \frac{1}{2^k}\right) < \sum_k \frac{1}{3^k} < \infty$$

și deci șirul  $(X_{n_k})_k$  este a.s. convergent (teorema 1).

**Teorema 6.** Dacă  $(X_n)$  este un șir de variabile aleatoare Cauchy în probabilitate atunci acest șir este convergent în probabilitate.

*Demonstrație.* Fie  $(X_{n_k})_k$  un subșir a.s. convergent către o variabilă aleatoare a.s. finită  $X$ . Avem :

$$P(|X_k - X| > \varepsilon) \leq P\left(|X_k - X_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|X_{n_k} - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Aceasta implică

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(|X_k - X| > \varepsilon) = 0, \quad (\varepsilon > 0).$$

Din cele spuse mai sus rezultă că din orice șir convergent în probabilitate se poate extrage un subșir convergent a.s. Pe de altă parte orice subșir al unui șir convergent în probabilitate este — evident — convergent în probabilitate către aceeași limită. În consecință putem afirma că din orice subșir al unui șir convergent în probabilitate se poate extrage un subșir convergent a.s. Este adevărată și afirmația reciprocă : dacă orice subșir al șirului  $(X_n)$  conține un subșir convergent a.s. către o aceeași limită a.s. finită  $X$  atunci  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

### Convergența în medie.

**Definiția 3.** Șirul  $(X_n)$  de variabile aleatoare integrabile converge în medie către variabila aleatoare integrabilă  $X$  dacă

$$M(|X_n - X|) \rightarrow 0 \text{ cînd } n \rightarrow \infty.$$

Vom scrie  $X_n \xrightarrow{M} X$ :  $(X_n)$  este Cauchy în medie dacă  $M(|X_m - X_n|) \rightarrow 0$ ,  $(m, n \rightarrow \infty)$ .

**Definiția 4.** Familia de variabile aleatoare integrabile  $(X_t)_{t \in T}$  este uniform integrabilă dacă

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\{|X_t| > a\}} |X_t| dP = 0$$

uniform în  $t$ .

**Teorema 7.** Familia de variabile aleatoare  $(X_t)_{t \in T}$  este uniform integrabilă dacă și numai dacă următoarele condiții sînt îndeplinite

a)  $\sup_T M(|X_t|) < \infty$ ,

b) pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel ca

$$P(A) < \delta \Rightarrow \sup_T \int_A |X_t| dP < \varepsilon.$$

*Demonstrație.* Dacă familia  $(X_t)_{t \in T}$  este uniform integrabilă atunci pentru orice  $t \in T$

$$M(|X_t|) = \int_{\{|X_t| \leq a\}} |X_t| dP + \int_{\{|X_t| > a\}} |X_t| dP \leq a + \int_{\{|X_t| > a\}} |X_t| dP$$

și deci

$$\sup_{t \in T} M(|X_t|) \leq a + \sup_T \int_{\{|X_t| > a\}} |X_t| dP < \infty,$$

Dacă  $A \in K$ ,  $a > 0$  și  $t \in T$ :

$$\begin{aligned} \int_A |X_t| dP &= \int_{A \cap \{|X_t| \leq a\}} |X_t| dP + \int_{A \cap \{|X_t| > a\}} |X_t| dP \leq aP(A) + \\ &+ \int_{\{|X_t| > a\}} |X_t| dP. \end{aligned}$$

De aici rezultă

$$\sup_T \int_A |X_t| dP \leq aP(A) + \sup_{t \in T} \int_{\{|X_t| > a\}} |X_t| dP.$$

Pentru  $a$  suficient de mare

$$\sup_{t \in T} \int_{\{|X_t| > a\}} |X_t| dP < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cu  $a$  astfel ales dacă

$$P(A) \leq \frac{\varepsilon}{2a}$$

atunci

$$\sup_{t \in T} \int_A |X_t| dP < \varepsilon.$$

Reciproc, să presupunem că condițiile a) și b) sînt îndeplinite. Pentru orice  $t \in T$

$$M(|X_t|) \geq \int_{\{|X_t| > a\}} |X_t| dP \geq aP(|X_t| > a).$$

De aici rezultă

$$\sup_{t \in T} P(|X_t| > a) \leq \frac{M}{a}$$

unde  $M = \sup_{t \in T} M(|X_t|)$ . Dacă  $a > \frac{\delta}{M}$  rezultă

$$P(|X_t| > a) < \delta, \quad \forall t \in T$$

și deci, conform b)

$$\int_{\{|X_t| > a\}} |X_t| dP < \varepsilon \quad \forall t \in T$$

Dacă un șir  $(X_n)$  converge în medie către  $X$  atunci  $X_n \xrightarrow{P} X$  după cum se vede din inegalitatea :

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} M(|X_n - X|).$$

Se observă că concluzia se păstrează dacă se consideră  $(X_n)$  este Cauchy în medie. Reciproca nu este în general valabilă.

**Teorema 8.** Dacă  $X_n \xrightarrow{P} X$  și  $(X_n)$  este un șir uniform integrabil atunci  $X$  este integrabilă și  $X_n \xrightarrow{M} X$ .

*Demonstrație.* Fie  $(X_{n_k})_k$  un subșir al lui  $(X_n)$  astfel ca

$$|X_{n_k}| \xrightarrow{a.s.} |X|$$

(teorema 5). După lema Fatou-Lebesgue

$$M(|X|) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} M(|X_{n_k}|) \leq \sup_k M(|X_{n_k}|) < \infty$$

adică  $X$  este integrabilă. Pe de altă parte

$$\begin{aligned} M(|X_n - X|) &= \int_{\{|X_n - X| \leq \frac{\varepsilon}{3}\}} |X_n - X| dP + \int_{\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{3}\}} |X_n - X| dP \leq \frac{\varepsilon}{3} + \\ &+ \int_{\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{3}\}} |X_n| dP + \int_{\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{3}\}} |X| dP. \end{aligned}$$

Rezultă că pentru  $n > N(\varepsilon)$  avem

$$M(|X_n - X|) \leq \varepsilon.$$

**Teorema 9.** Dacă șirul de variabile aleatoare integrabile  $(X_n)$  este Cauchy în medie atunci este convergent în medie.

*Demonstrație.* Dacă șirul  $(X_n)$  este Cauchy în medie atunci este Cauchy și deci convergent în probabilitate, adică există variabila aleatoare a.s. finită  $X$  astfel ca

$$X_n \xrightarrow{P} X.$$

Pe de altă parte, prin ipoteză pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N_\varepsilon$  astfel ca :

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow M(|X_m - X_n|) \leq \varepsilon.$$

Să mai observăm că din

$$\int_A |X_n| dP \leq \int_A |X_m| dP + \int_A |X_n - X_m| dP.$$

rezultă

$$\sup_n \int_A |X_n| dP \leq \sup_{m \leq N_\varepsilon} \int_A |X_m| dP + \varepsilon. \quad (*)$$

Într-adevăr, dacă  $n \leq N_\varepsilon$  :

$$\int_A |X_n| dP \leq \sup_{m \leq N_\varepsilon} \int_A |X_m| dP < \varepsilon + \sup_{m \leq N_\varepsilon} \int_A |X_m| dP$$

iar dacă  $n > N_\varepsilon$  :

$$\int_A |X_n| dP \leq \int_A |X_{N_\varepsilon}| dP + \int_A |X_n - X_{N_\varepsilon}| dP \leq \sup_{m \leq N_\varepsilon} \int_A |X_m| dP + \varepsilon.$$

Dacă în (\*)  $A = \Omega$  deducem

$$\sup_n M(|X_n|) < \infty \quad (**)$$

iar dacă  $P(A)$  este suficient de mic

$$\sup_n \int_A |X_n| dP \leq 2\varepsilon. \quad (***)$$

Relațiile (\*\*) și (\*\*\*) asigură integrabilitatea uniformă a șirului  $(X_n)$  (teorema 7) și conform teoremei 8 demonstrația este încheiată.

### Convergență în repartiție

**Definiția 5.** Șirul de funcții de repartiție  $(F_n)$  converge în repartiție către funcția de repartiție  $F$  dacă  $F_n(x) \rightarrow F(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) în fiecare punct de continuitate  $x$  al lui  $F$ .

Vom spune că un șir  $(X_n)$  de variabile aleatoare a.s. finite converge în repartiție către variabila aleatoare a.s. finită  $X$  dacă șirul corespunzător al funcțiilor de repartiție  $(F_{X_n})$  converge în repartiție către funcția de repartiție  $F_X$  a variabilei aleatoare  $X$ . Vom scrie  $X_n \xrightarrow{rep.} X$ .

Dacă în cazul convergenței a.s. și al convergenței în probabilitate două limite ale aceluiași șir sînt a.s. egale, în cazul convergenței în repartiție dacă  $X_1$  și  $X_2$  sînt limite ale aceluiași șir de variabile aleatoare aceasta nu înseamnă decît că  $X_1$  și  $X_2$  au aceeași lege de probabilitate.

**Teorema 10.** Dacă  $F_n$ ,  $n \geq 1$  și  $F$  sînt funcții de repartiție iar  $D$  este o parte peste tot densă a lui  $R$  și

$$F_n(x) \rightarrow F(x) \quad \forall x \in D$$

atunci  $(F_n)$  converge în repartiție către  $F$ .

*Demonstrație.* Fie  $x_0$  un punct de continuitate al lui  $F$  și  $x_1, x_2 \in D$

$$x_1 < x_0 < x_2; F(x_1) - F(x_2) < \varepsilon.$$

Există  $N(\varepsilon)$  astfel ca

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |F(x_1) - F_n(x_1)| < \varepsilon; |F_n(x_2) - F(x_2)| < \varepsilon.$$

În acest caz

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |F(x_0) - F_n(x_1)| \leq |F(x_0) - F(x_1)| + |F(x_1) - F_n(x_1)| < 2\varepsilon.$$

La fel

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |F(x_0) - F_n(x_2)| < 2\varepsilon.$$

În consecință pentru orice  $n > N(\varepsilon)$ :

$$-2\varepsilon < F_n(x_1) - F(x_0) \leq F_n(x_0) - F(x_0) \leq F_n(x_2) - F(x_0) < 2\varepsilon.$$

Reciproca este evidentă: funcția monotonă  $F$  are o mulțime cel mult numărabilă de puncte de discontinuitate și deci o mulțime densă peste tot în  $R$  de puncte de continuitate.

**Teorema 11.** Șirul  $(F_n)$  de funcții de repartiție converge în repartiție către funcția de repartiție  $F$  dacă și numai dacă

$$\int_R g(x) dF_n(x) \rightarrow \int_R g(x) dF(x) \quad (\alpha)$$

oricare ar fi funcția  $g$  continuă și mărginită pe  $R$ .

*Demonstrație.* Să presupunem că șirul  $(F_n)$  converge în repartiție către  $F$ . Dacă  $g: R \rightarrow R$  este o funcție continuă și  $|g(x)| \leq M$  atunci fie  $a = a_\varepsilon$ ,  $b = b_\varepsilon$  puncte de continuitate ale lui  $F$  astfel ca

$$F(a) < \varepsilon; \quad F(b) > 1 - \varepsilon.$$

Funcția  $g$  este uniform continuă pe  $[a, b]$ :

$$u, v \in [a, b], |u - v| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |g(u) - g(v)| < \varepsilon.$$

Considerăm diviziunea intervalului  $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

formată numai din puncte de continuitate ale lui  $F$  și astfel ca

$$\sup(x_{i+1} - x_i) < \delta_\varepsilon.$$

Introducem funcția

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} g(x_i) & \text{dacă } x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, k-1 \\ 0 & \text{dacă } x \notin [a, b). \end{cases}$$

Se observă că avem

$$|g(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b].$$

Pe de altă parte

$$\int_{(-\infty, a]} |g(x) - g_\varepsilon(x)| dF = \int_{(-\infty, a]} |g(x)| dF < M\varepsilon,$$

$$\int_{[a, b]} |g - g_\varepsilon| dF < \varepsilon, \quad \int_{[b, +\infty)} |g - g_\varepsilon| dF < M\varepsilon.$$

În consecință

$$\int_R |g - g_\varepsilon| dF = \int_{(-\infty, a)} + \int_{[a, b]} + \int_{[b, +\infty)} < 2M\varepsilon + \varepsilon.$$

Pentru  $n$  suficient de mare avem și

$$F_n(a) < \varepsilon; \quad F_n(b) > 1 - \varepsilon$$

și prin urmare luând  $F_n$  în loc de  $F$  în evaluările precedente vom avea

$$\int_R |g - g_\varepsilon| dF_n < 2M\varepsilon + \varepsilon.$$

Vom putea deci scrie pentru  $n$  suficient de mare

$$\begin{aligned} \left| \int_R g dF_n - \int_R g dF \right| &\leq \int_R |g - g_\varepsilon| dF_n + \int_R |g - g_\varepsilon| dF + \\ &+ \left| \int_R g_\varepsilon dF_n - \int_R g_\varepsilon dF \right| \leq 4M\varepsilon + 2\varepsilon + \left| \int_R g_\varepsilon dF_n - \int_R g_\varepsilon dF \right|. \end{aligned}$$

Demonstrația primei părți a teoremei se încheie dacă arătăm că ultimul modul scris tinde către zero când  $n \rightarrow \infty$ . Dar când  $n \rightarrow \infty$ :

$$\int_R g_\varepsilon dF_n = \sum g(x_i) [F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i)] \rightarrow \sum g(x_i) [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = \int_R g_\varepsilon dF.$$

Reciproc, să presupunem că  $(\alpha)$  are loc pentru orice funcție reală  $g$  continuă și mărginită pe  $R$ . Fie  $x_0$  un punct de continuitate al lui  $F$ :

$$|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

Introducem funcțiile

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \leq x_0 - \delta, \\ \frac{1}{\delta}(x_0 - x) & \text{dacă } x_0 - \delta \leq x \leq x_0, \\ 0 & \text{dacă } x \geq x_0. \end{cases}$$

$$g_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \leq x_0, \\ 1 - \frac{x - x_0}{\delta} & \text{dacă } x_0 \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 0 & \text{dacă } x \geq x_0 + \delta \end{cases}$$

$f$  și  $g$  sint continue și mărginite pe  $R$ : Avem

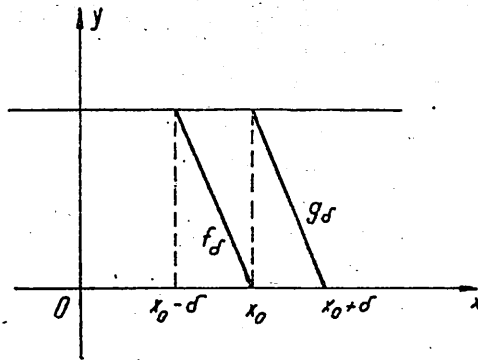


Fig. 2.1

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\delta} dF \geq \int_{(-\infty, x_0 - \delta)} dF = F(x_0 - \delta) \geq F(x_0) - \varepsilon,$$

$$\int_{\mathbb{R}} g_{\delta} dF \leq \int_{(-\infty, x_0 + \delta)} dF = F(x_0 + \delta) \leq F(x_0) + \varepsilon,$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\delta} dF_n \leq \int_{(-\infty, x_0)} dF_n = F_n(x_0),$$

$$\int_{\mathbb{R}} g_{\delta} dF_n \geq \int_{(-\infty, x_0)} dF_n = F_n(x_0).$$

Pe de altă parte, prin ipoteză, pentru  $n$  suficient de mare

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_{\delta} dF_n - \int_{\mathbb{R}} f_{\delta} dF \right| \leq \varepsilon,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g_{\delta} dF_n - \int_{\mathbb{R}} g_{\delta} dF \right| \leq \varepsilon.$$

Rezultă în sfârșit că pentru  $n$  suficient de mare

$$F(x_0) - \varepsilon - F_n(x_0) \leq \int_{\mathbb{R}} f_{\delta} dF - \int_{\mathbb{R}} f_{\delta} dF_n \leq \varepsilon \Rightarrow F(x_0) - F_n(x_0) \leq 2\varepsilon,$$

$$F(x_0) + \varepsilon - F_n(x_0) \geq \int_{\mathbb{R}} g_{\delta} dF - \int_{\mathbb{R}} g_{\delta} dF_n \geq -\varepsilon \Rightarrow F(x_0) - F_n(x_0) \geq -2\varepsilon.$$

**Teorema 12.**  $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{rep} X \quad (n \rightarrow \infty).$

*Demonstrație.* Dacă  $X_n \xrightarrow{P} X \quad (n \rightarrow \infty)$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă și mărginită pe  $\mathbb{R}$  atunci

$$g(X_n) \xrightarrow{P} g(X) \quad (n \rightarrow \infty)$$

și intrucit  $g$  este mărginită :

$$M[g(X_n)] \rightarrow [Mg(X)]$$

și demonstrația este încheiată dacă ținem cont de teorema precedentă și de teorema 5 din 2.3.

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Dar dacă  $X_n \xrightarrow{rep} X$  și  $X = c \in \mathbb{R}$  atunci  $X_n \xrightarrow{p} X$ . Într-adevăr, în acest caz funcția de repartiție a lui  $X$  este

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq c, \\ 1 & \text{dacă } x > c \end{cases}$$

și în plus, pentru orice  $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} P(|X_n - c| \geq \varepsilon) &= P(X_n \geq c + \varepsilon) + P(X_n \leq c - \varepsilon) = \\ &= 1 - F_n(c + \varepsilon) + F_n(c - \varepsilon + 0) \end{aligned}$$

iar  $c \pm \varepsilon$  sînt puncte de continuitate ale lui  $F$ .

Mulțimea  $\mathcal{F}$  a funcțiilor de repartiție poate fi organizată ca un spațiu metric complet prin introducerea unei metrici  $\rho$  astfel ca convergența în raport cu această metrică pe  $\mathcal{F}$  să fie echivalentă cu convergența în repartiție. Pentru aceasta vom nota pentru orice  $F, G \in \mathcal{F}$

$$\rho(F, G) = \inf \{ \varepsilon : F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R} \}.$$

Să observăm mai întii că în această definiție inf este atins. Într-adevăr, dacă

$$\varepsilon_0 = \inf \{ \varepsilon : F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon, x \in \mathbb{R} \}$$

și  $\varepsilon_n > \varepsilon_0$  ( $n \geq 1$ )  $\varepsilon_n \downarrow \varepsilon_0$  atunci făcînd  $n \rightarrow \infty$  în

$$F(x - \varepsilon_n) - \varepsilon_n \leq G(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

rezultă (deoarece  $x - \varepsilon_n \uparrow x - \varepsilon_0$  și  $F$  este continuă la stînga).

$$F(x - \varepsilon_0) - \varepsilon_0 \leq G(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fel, din relația

$$G(x + \varepsilon_0 - \varepsilon_n) \leq F(x + \varepsilon_0) + \varepsilon_n \quad (x \in \mathbb{R})$$

rezultă

$$G(x) \leq F(x + \varepsilon_0) + \varepsilon_0.$$

**Teorema 13.** Aplicația  $\rho : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  este o distanță pe  $\mathcal{F}$ .

*Demonstrație.* Evident  $\rho(F, F) = 0$ . Reciproc, dacă  $\rho(F, G) = 0$  atunci  $F = G$  deoarece în acest caz pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  inegalitățile

$$F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon$$

sînt verificate de  $\varepsilon = 0$ . Pe de altă parte

$$F(x - \varepsilon) - \varepsilon < G(x), \forall x \Leftrightarrow F(x) \leq G(x + \varepsilon) + \varepsilon, \forall x$$

$$G(x) < F(x + \varepsilon) + \varepsilon, \forall x \Leftrightarrow G(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F(x), \forall x$$

de unde rezultă

$$\rho(F, G) = \rho(G, F) \quad G, F \in \mathcal{F}.$$

Fie acum  $F, G, H \in \mathcal{F}$  și

$$\rho_1 = \rho(F, G); \quad \rho_2 = \rho(G, H).$$

Cu aceste notații avem :

$$F(x - \rho_1) - \rho_1 \leq G(x) \leq F(x + \rho_1) + \rho_1, \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad (\beta)$$

$$G(x - \rho_2) - \rho_2 \leq H(x) \leq G(x + \rho_2) + \rho_2, \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad (\gamma)$$

Punind  $x - \rho_2$  în loc de  $x$  în partea stângă a relației  $(\beta)$  avem

$$F(x - \rho_1 - \rho_2) - \rho_1 \leq G(x - \rho_2)$$

și ținând cont de  $(\gamma)$  :

$$F(x - \rho_1 - \rho_2) - \rho_1 - \rho_2 \leq H(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

În mod asemănător, punind  $x + \rho_2$  în loc de  $x$  în partea dreaptă a relației  $(\beta)$  și ținând cont de  $(\gamma)$  rezultă

$$H(x) \leq G(x + \rho_2) + \rho_2 \leq F(x + \rho_1 + \rho_2) + \rho_1 + \rho_2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

În concluzie

$$F(x - \rho_1 - \rho_2) - \rho_1 - \rho_2 \leq H(x) \leq F(x + \rho_1 + \rho_2) + \rho_1 + \rho_2, \quad x \in \mathbf{R},$$

relație care este echivalentă cu

$$\rho(F, H) \leq \rho_1 + \rho_2 = \rho(F, G) + \rho(G, H).$$

**Teorema 14.**  $\rho(F_n, F) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) ( $F_n, F \in \mathcal{F}$ ) dacă și numai 'dacă șirul  $(F_n)$  converge în repartiție către  $F$ .

*Demonstrație.* Dacă  $\rho_n = \rho(F_n, F) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) și  $x$  este un punct de continuitate al lui  $F$  atunci din

$$F(x - \rho_n) - \rho_n \leq F_n(x) \leq F(x + \rho_n) + \rho_n$$

rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x).$$

Reciproc, să presupunem că  $F_n(x) \rightarrow F(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) oricare ar fi punctul de continuitate  $x$  al funcției  $F$ . Fie  $a$  și  $b$  puncte de continuitate ale lui  $F$  cu :

$$F(a) \leq \frac{\varepsilon}{2}; \quad F(b) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerăm diviziunea intervalului  $[a, b]$  :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

formată numai din puncte de continuitate ale lui  $F$ , astfel ca

$$x_{i+1} - x_i \leq \varepsilon \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k-1).$$

Există  $N_\varepsilon$  astfel ca

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |F_n(x_i) - F(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}; \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Dacă  $x \in [a, b]$ , fie  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  și  $n \geq N_\varepsilon$ , atunci

$$F_n(x) \leq F_n(x_{i+1}) \leq F(x_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq F(x + \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon,$$

$$F_n(x) \geq F_n(x_i) \geq F(x_i) - \frac{\varepsilon}{2} \geq F(x - \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} > F(x - \varepsilon) - \varepsilon.$$

Dacă  $x \leq a$ :

$$F_n(x) \leq F_n(a) \leq F(a) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon,$$

$$F_n(x) \geq 0 \geq F(a) - \frac{\varepsilon}{2} \geq F(x) - \frac{\varepsilon}{2} \geq F(x - \varepsilon) - \varepsilon.$$

Dacă  $x \geq b$ :

$$F_n(x) \leq 1 \leq F(b) + \frac{\varepsilon}{2} \leq F(x) + \frac{\varepsilon}{2} \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon,$$

$$F_n(x) \geq F_n(b) \geq F(b) - \frac{\varepsilon}{2} \geq 1 - \varepsilon \geq F(x - \varepsilon) - \varepsilon.$$

Restrîngînd cele spuse mai sus vom scrie

$$\forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F_n(x) \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}$$

adică

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \rho(F_n, F) \leq \varepsilon.$$

**Teorema 15.** Dacă  $F_n \in (\mathcal{F})$ ,  $n \geq 1$ ,  $F \in (\mathcal{F})$ ,  $F_n \rightarrow F (n \rightarrow \infty)$  și  $F$  este continuă, atunci această convergență este uniformă.

*Demonstrație.* Se arată ușor că dacă  $F \in (\mathcal{F})$  este continuă, atunci este uniform continuă:

$$|x - x'| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |F(x) - F(x')| \leq \varepsilon.$$

Fie  $\eta = \min(\varepsilon, \delta_\varepsilon)$ . Avem:

$$n > N_\eta \Rightarrow \rho_n = \rho(F_n, F) \leq \eta.$$

Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și  $n > N_\eta$  vom avea

$$-2\varepsilon \leq F(x - \rho_n) - F(x) - \rho_n \leq F_n(x) - F(x) \leq F(x + \rho_n) - F(x) + \rho_n \leq 2\varepsilon.$$

În încheierea acestui paragraf vom demonstra că spațiul metric  $(\mathcal{F}, \rho)$  este complet. Pentru aceasta vom avea nevoie de următoarea

**Lemă.** Din orice șir de funcții de repartiție se poate extrage un subșir convergent către o funcție crescătoare, continuă la stînga, în toate punctele de continuitate ale acesteia.

*Demonstrație.* Fie  $(F_n)$  un șir de funcții de repartiție și  $D = \{r_n\}$ ,  $n \geq 1$  o mulțime numărabilă, densă peste tot în  $\mathbb{R}$ . Șirul numeric  $(F_n(r_1))_n$  fiind mărginit conține un subșir  $(F_{k_n}(r_1))_n$  convergent. Notăm  $F_n^1 = F_{k_n}$  ( $n \geq 1$ ). Șirul numeric  $(F_n^1(r_2))_n$  fiind mărginit conține un subșir convergent ș.a.m.d.

În acest caz, pentru orice  $k \geq 1$ , termenii șirului de funcții  $(F_n^n)_n$  cu excepția unui număr finit se găsesc printre termenii șirului  $(F_n^k)_n$  și deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^k(x)$  există.  $(F_n^n)$  este subșirul căutat. Într-adevăr, dacă

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^n(x), \quad (x \in D).$$

Extensia  $H$  a lui  $G$  la  $R$ :

$$H(x) = \sup_{\substack{y \leq x \\ y \in D}} G(y)$$

este mărginită și crescătoare.

Deoarece șirul  $(F_n^n)_n$  converge către  $F$  pe o mulțime densă  $D$  el converge către  $F$  pe mulțimea punctelor de continuitate ale lui  $F$  (Teorema 10. —  $H$  nu este în mod necesar o funcție de repartiție, dar urmărind demonstrația teoremei 10 observăm că în cursul ei nu s-a folosit ipoteza continuității la stînga și nici faptul că  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$ , ci numai faptul că  $F_n$  și  $F$  sînt crescătoare).

Funcția  $H$  poate fi modificată în punctele de discontinuitate transformînd-o într-o funcție continuă la stînga:

$$F(x) = \begin{cases} H(x), & \text{dacă } G \text{ este continuă în } x, \\ H(x-0), & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Pe scurt  $F(x) = H(x-0)$ ,  $F$  este crescătoare, mărginită și continuă la stînga pe  $R$ . Ea are aceleași puncte de continuitate cu  $H$  și deci

$$F_n^n(x) \rightarrow F(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

în orice punct de continuitate al lui  $F$ .

**Teorema 16.** Spațiul metric  $(\mathcal{F}, \rho)$  este complet.

*Demonstrație.* Fie  $(F_n)$  Cauchy în  $(\mathcal{F}, \rho)$  și  $(F_{n_k})_k$  un subșir al șirului  $(F_n)_n$  și  $F$  o funcție  $R \rightarrow R$  crescătoare și continuă la stînga, astfel ca

$$F_{n_k}(x) \rightarrow F(x), \quad k \rightarrow \infty$$

în orice punct de continuitate  $x$  al lui  $F$ . Să arătăm că  $F$  este o funcție de repartiție. Dacă  $\varepsilon > 0$ , există  $N_\varepsilon$  astfel ca

$$m, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \rho(F_m, F_n) \leq \varepsilon.$$

Dacă  $k \geq N_\varepsilon$  atunci

$$F_{N_\varepsilon}(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F_{n_k}(x) \leq F_{N_\varepsilon}(x + \varepsilon) + \varepsilon, \quad x \in I_1$$

iar dacă  $x$  este un punct de continuitate pentru  $F$  și  $k \rightarrow \infty$ :

$$F_{N_\varepsilon}(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F(x) \leq F_{N_\varepsilon}(x + \varepsilon) + \varepsilon, \quad x \in C_F,$$

unde  $C_F$  este mulțimea punctelor de continuitate ale lui  $F$ . Dacă acum facem  $x \rightarrow \infty$  rezultă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in C_F}} F(x) \geq 1 - \varepsilon.$$

iar dacă  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \leq \varepsilon$$

cu  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Deci  $F$  este funcție de repartiție și

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(F_{n_k}, F) = 0.$$

Dacă facem  $k \rightarrow \infty$  în inegalitatea

$$\rho(F_k, F) \leq \rho(F_k, F_{n_k}) + \rho(F_{n_k}, F)$$

va rezulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(F_k, F) = 0.$$

## 2.5. LEGEA NUMERELOR MARI

Un șir de variabile aleatoare integrabile  $(X_n)$  urmează legea slabă sau legea tare a numerelor mari după cum

$$\frac{S_n - M(S_n)}{n} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

în probabilitate sau aproape sigur,  $S_n$  fiind  $\sum_{k=1}^n X_k$ .

În cele ce urmează avem nevoie de următoarea observație : pentru orice variabilă aleatoare  $X$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|X| \geq k) \leq M(|X|) \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(|X| \geq k).$$

Într-adevăr, dacă  $A_k = \{k \leq |X| < k+1\}$ , ( $n \geq 0$ ) atunci  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pentru  $i \neq j$  și  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ . Deci

$$M(|X|) = \int_{\Omega} |X| dP = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} |X| dP.$$

Pe de altă parte

$$kP(A_k) \leq \int_{A_k} |X| dP \leq (k+1)P(A_k) = kP(A_k) + P(A_k)$$

și sumând după  $k$  de la 0 la  $\infty$  :

$$\sum_{k=1}^{\infty} kP(A_k) \leq M(|X|) \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} kP(A_k).$$

Seria dublă  $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$  unde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i > j \\ P(j \leq |X| < j+1) = P(A_j), & \text{dacă } i \leq j \end{cases}$$

are termenii pozitivi și deci

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}.$$

Dar

$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij} &= \sum_{j: j \geq i} P(j \leq |X| < j+1) = P(|X| \geq i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_i P(|X| \geq i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i a_{ij} &= \sum_{i=1}^j P(j \leq |X| < j+1) = jP(j \leq |X| < j+1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_j \sum_i a_{ij} = \sum_j jP(j \leq |X| < j+1). \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte

$$\sum_{k \geq 1} kP(A_k) = \sum_{k \geq 1} P(|X| \geq k)$$

În continuare ne propunem să demonstrăm o teoremă datorată lui Hincin referitoare la legea slabă a numerelor mari și o teoremă a lui Kolmogorov pentru legea tare a numerelor mari. Mai întâi teorema lui Hincin.

**Lema 1.** Dacă  $X_n \in \mathcal{L}_2$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} D^2(S_n) = 0$$

atunci șirul  $(X_n)$  urmează legea slabă a numerelor mari.

*Demonstrație.* Conform inegalității lui Cebîșev

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - M\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} D^2(S_n) \rightarrow 0$$

adică :

$$\frac{S_n - M(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

În cele ce urmează, peste tot  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , ( $n \geq 1$ ).

**Teorema 1.** (Hincin). Dacă variabilele aleatoare integrabile  $X_n$ ,  $n \geq 1$  sînt independente două cîte două și au aceeași lege de probabilitate atunci șirul  $(X_n)$  urmează legea slabă a numerelor mari.

*Demonstrație.* Fie

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega), & \text{dacă } |X_n(\omega)| < n, \\ 0, & \text{dacă } |X_n(\omega)| \geq n. \end{cases}$$

$$Z_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \quad (n \geq 1).$$

Să arătăm că șirul  $(Y_n)$  urmează legea slabă a numerelor mari

$$D^2(Z_n) = \sum_{k=1}^n D^2(Y_k) \leq \sum_{k=1}^n M(Y_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|x| \leq k} x^2 dF(x)$$

unde  $F$  este funcția de repartiție comună a variabilelor aleatoare  $X_n (n \geq 1)$ .  
Mai departe vom avea :

$$\begin{aligned} D^2(Z_n) &\leq \sum_{k \leq \sqrt{n}} \int_{|x| \leq k} x^2 dF(x) + \sum_{\sqrt{n} < k \leq n} \int_{|x| \leq k} x^2 dF(x), \\ D^2(Z_n) &\leq \sum_{k \leq \sqrt{n}} \sqrt{n} \int_{|x| \leq \sqrt{n}} |x| dF(x) + \sum_{\sqrt{n} < k \leq n} \sqrt{n} \int_{|x| \leq \sqrt{n}} |x| dF(x) + \\ &\quad + \sum_{\sqrt{n} \leq k < n} n \int_{\sqrt{n} < x \leq n} |x| dF(x) \leq \\ &\leq n \sqrt{n} \int_R |x| dF(x) + n^2 \int_{|x| > \sqrt{n}} |x| dF(x). \end{aligned}$$

De aici se obține

$$\frac{1}{n^2} D^2(Z_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_R |x| dF(x) + \int_{|x| > \sqrt{n}} |x| dF(x) \rightarrow 0$$

și conform lemei precedente șirul  $(Y_n)$  urmează legea slabă a numerelor mari. Dar aceasta este suficient pentru ca șirul  $(X_n)$  să urmeze această lege.  
Într-adevăr :

$$\frac{S_n}{n} = \frac{Z_n}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - Y_k)$$

iar

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - Y_k) \rightarrow 0 \text{ a.s.} \quad (n \rightarrow \infty)$$

deoarece seria  $\sum_{k=1}^{\infty} (X_k - Y_k)$  este a.s. convergentă :

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X_k \neq Y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq M(|X_1|) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} < \infty$$

și conform lemei Borel-Cantelli

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n \neq Y_n\}) = 0.$$

Pe de altă parte

$$\frac{Z_n - M(Z_n)}{n} \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow \frac{Z_n}{n} = \frac{Z_n - M(Z_n)}{n} + \frac{M(Z_n)}{n} \xrightarrow{P} m$$

unde  $m = M(X_1)$ , deoarece

$$\begin{aligned} M(Y_n) &= \int_{|x| \geq n} x dF \rightarrow \int_R x dF = m, \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{n} [M(Y_1) + \dots + M(Y_n)] &\rightarrow m, \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Pentru demonstrarea teoremei lui Kolmogorov avem nevoie de câteva propoziții ajutoare. Prima dintre ele este datorată de asemenea lui Kolmogorov.

**Teorema 2. (Inegalitatea lui Kolmogorov).** Dacă  $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{L}_2$  sînt variabile aleatoare independente cu  $M(X_i) = 0$ ,  $D^2(X_i) < \infty$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  atunci

$$P\left(\sup_k \left| \sum_{i=1}^k X_i \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n D^2(X_i).$$

*Demonstrație.* Introducem următoarele notații :

$$Y = \sup_k |S_k|; \quad S_k = \sum_{i=1}^k X_i; \quad A = \{Y \geq \varepsilon\},$$

$$A_k = \{|S_k| \geq \varepsilon\} \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} \{|S_i| < \varepsilon\}, \quad (k > 1); \quad A_1 = \{|X_1| \geq \varepsilon\}.$$

Se vede că

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k; \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dacă } i \neq j.$$

Cu notațiile de mai sus vom putea scrie

$$\begin{aligned} \int_{A_k} S_n^2 dP &= \int_{A_k} (S_k + X_{k+1} + \dots + X_n)^2 dP = \int_{A_k} S_k^2 dP + \\ &+ \int_{A_k} (X_{k+1} + \dots + X_n)^2 dP + 2 \int_{A_k} S_k (X_{k+1} + \dots + X_n) dP \end{aligned}$$

și ultima integrală scrisă este nulă intrucit  $S_k = X_1 + \dots + X_k$  și  $X_{k+1} + \dots + X_n$  sînt două variabile aleatoare independente iar  $I_{A_k}$  este o variabilă aleatoare pe  $\sigma$  — corpul generat de variabilele  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . Deci :

$$\begin{aligned} \int_{A_k} S_k (X_{k+1} + \dots + X_n) dP &= \int_{\Omega} (I_{A_k} S_k) (X_{k+1} + \dots + X_n) dP = \\ &= \int_{\Omega} I_{A_k} \cdot S_k dP \cdot \int_{\Omega} (X_{k+1} + \dots + X_n) dP = 0. \end{aligned}$$

Din aceste observații rezultă

$$\int_{A_k} S_n^2 dP \geq \int_{A_k} S_k^2 dP \geq \varepsilon^2 P(A_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Aceasta ne permite să scriem

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n D^2(X_k) &= D^2(S_n) = \int_{\Omega} S_n^2 dP \geq \int_A S_n^2 dP = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} S_n^2 dP \geq \sum_{k=1}^n \varepsilon^2 P(A_k) = \varepsilon^2 P(A). \end{aligned}$$

În concluzie

$$P(A) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n D^2(X_k).$$

**Teorema 3.** Dacă  $(X_n)$  este un șir de variabile aleatoare independente din  $\mathcal{L}_2$  astfel ca :

$$M(X_n) = 0, \quad (n \geq 1); \quad \sum_{n=1}^{\infty} D^2(X_n) < \infty$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$  converge a.s.

*Demonstrație.* Notăm  $Y_m = \sup_k |S_{m+k} - S_m|$  și demonstrăm că  $\inf_m Y_m = 0$  ceea ce echivalează cu convergența a.s. a seriei  $\sum X_n$ .

Conform teoremei precedente

$$P(\sup_{i \leq k \leq n} |S_{m+k} - S_m| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=m+1}^{m+n} D^2(X_i)$$

iar de aici

$$P(Y_m \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i>m} D^2(X_i).$$

Dacă facem  $m \rightarrow \infty$  în

$$P(\inf_m Y_m > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i>m} D^2(X_i)$$

rezultă

$$P(\inf Y_m > \varepsilon) = 0$$

cu  $\varepsilon > 0$  arbitrar.

**Lema 2.** Dacă  $x_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  astfel ca seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$  să fie convergentă

atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = 0$ .

*Demonstrație.* Dacă  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k}$  ( $n \geq 1$ ) atunci

$$s_n = \frac{x_n}{n} + \dots + \frac{x_3}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_1}{1},$$

$$s_n - s_1 = \frac{x_n}{n} + \dots + \frac{x_3}{3} + \frac{x_2}{2},$$

$$s_n - s_2 = \frac{x_n}{n} + \dots + \frac{x_3}{3}$$

$$s_n - s_{n-1} = \frac{x_n}{n}.$$

Adunând relațiile scrise obținem

$$ns_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k = \sum_{i=1}^n x_i$$

relație care se mai poate scrie

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = s_n - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} s_k$$

și lema este demonstrată deoarece

$$s_n \rightarrow a \Rightarrow \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} s_k \rightarrow a; \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{Cezaro})$$

**Teorema 4.** Dacă  $(X_n)$  este un șir de variabile aleatoare independente din  $\mathcal{L}_2$  și  $\sum_n \frac{D^2(X_n)}{n^2} < \infty$  atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M(X_i)) \underset{\text{a.s.}}{=} 0$$

șirul  $(X_n)$  urmează legea tare a numerelor mari.

*Demonstrație.* Fie  $Y_n = \frac{1}{n}(X_n - M(X_n))$ ,  $(n \geq 1)$ . Avem :

$$\sum_{n=1}^{\infty} D^2(Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} D^2(X_n) < \infty; \quad M(Y_n) = 0, \quad (n \geq 1)$$

Conform teoremei 3 seria  $\sum Y_n = \sum \frac{1}{n}(X_n - M(X_n))$  este convergentă a.s. și deci conform lemei 2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M(X_i)) = 0.$$

**Teorema 5.** (Kolmogorov). Dacă  $(X_n)$  este un șir de variabile aleatoare independente integrabile având aceeași lege de probabilitate, atunci

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \underset{\text{a.s.}}{\rightarrow} M(X_1), \quad (n \rightarrow \infty)$$

(șirul  $(X_n)$  urmează legea tare a numerelor mari).

*Demonstrație.* Introducem trunchiata la  $n$  a variabilei  $X_n$  :

$$\bar{X}_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{dacă } |X_n(\omega)| < n, \\ 0 & \text{dacă } |X_n(\omega)| \geq n. \end{cases}$$

Dacă  $\omega \notin \limsup \{|X_n| \geq n\}$  atunci există  $N(\omega)$  astfel ca

$$n > N(\omega) \Rightarrow \bar{X}_n(\omega) = X_n(\omega):$$

Dar  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n| \geq n\}) = 0$ . Într-adevăr

$$\sum_n P(|X_n| \geq n) = \sum_n P(|X_1| \geq n) \leq M(|X_1|) < \infty$$

și conform lemei Borel-Cantelli

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n| \geq n\}) = 0.$$

Din cele spuse rezultă că este suficient să arătăm că șirul  $(\bar{X}_n)$  urmează legea tare a numerelor mari. Trecerea de la șirul  $(\bar{X}_n)$  la șirul  $(X_n)$  prezintă avantajul că cel de al doilea este șir  $\mathcal{L}_2$  (de fapt șir în  $\mathcal{L}_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ ) deoarece pentru orice  $n \geq 1$  variabila  $X_n$  este a.s. mărginită. Avem :

$$\begin{aligned} D^2(\bar{X}_n) \leq M(\bar{X}_n^2) &= \int_{\{|X_n| < n\}} X_n^2 dP = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\{k \leq |X_n| < k+1\}} |X_n|^2 dP \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 P(k \leq |X_n| < k+1). \end{aligned}$$

În consecință

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^2(\bar{X}_n)}{n^2} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{n^2} P(k \leq |X_1| < k+1) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 P(k \leq |X_1| < k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \\ &\leq 3 + \sum_{k=0}^{\infty} k P(k \leq |X_1| < k+1) \leq 3 + M(|X_1|) < \infty. \end{aligned}$$

Am folosit aici evaluările

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{k},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k P(k \leq |X_1| < k+1) \leq M(|X_1|),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2P(k \leq |X_1| < k+1) = 2,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} P(k \leq |X_1| < k+1) < 1.$$

Întrucît

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^2(X_n)}{n^2} < \infty$$

conform teoremei 4 șirul  $(\bar{X}_n)$  urmează legea tare a numerelor mari.

**Teorema 6.** Dacă  $(X_n)$  este un șir de variabile aleatoare independente avînd aceeași lege de probabilitate și  $M(|X_n|) = \infty$  ( $n \geq 1$ ) atunci

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{n} = +\infty \text{ a.s.}$$

*Demonstrație.* În condițiile teoremei

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq n) \geq M(|X_1|) - 1 = \infty.$$

Dar deoarece variabilele  $X_n$  ( $n \geq 1$ ) au aceeași lege de probabilitate :

$$\sum_n P(|X_1| \geq n) = \sum_n P(|X_n| \geq n) = \infty$$

și evenimentele  $\{|X_n| \geq n\}$  ( $n \geq 1$ ) sînt independente. Conform lemei Borel-Cantelli :

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n| \geq n\}) = 1.$$

Pe de altă parte

$$\{|X_n| \geq n\} \subset \left\{ |S_n| \geq \frac{n}{2} \right\} \cup \left\{ |S_{n-1}| \geq \frac{n}{2} \right\}$$

de unde rezultă

$$P \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ |S_n| \geq \frac{n}{2} \right\} \right) = 1.$$

Acest raționament îl putem face și pentru șirul de variabile aleatoare  $\left(\frac{1}{2a} X_n\right)$ , unde  $a > 0$  este o constantă arbitrară, acesta avînd proprietățile șirului  $(X_n)$  : variabilele  $\frac{1}{2a} X_n$ ,  $n \geq 1$  sînt independente au aceeași lege de probabilitate și  $M\left(\left|\frac{1}{2a} X_1\right|\right) = \infty$ .

Rezultă

$$P \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{|S_n|}{n} \geq a \right\} \right) = 1$$

pentru orice  $a > 0$ . Evident, pentru orice  $\omega \in \limsup \left\{ \frac{|S_n|}{n} \geq a \right\}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n(\omega)|}{n} \geq a.$$

Cu alte cuvinte :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{n} \geq a \quad \text{a.s.}$$

oricare ar fi  $a > 0$ . Dacă considerăm  $a$  întreg

$$\limsup \left\{ \frac{|S_n|}{n} = \infty \right\} = \bigcap_a \limsup \left\{ \frac{|S_n|}{n} \geq a \right\}$$

și deci

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{n} = \infty$$

Următoarea teoremă este o reciprocă a teoremei 5.

**Teorema 7.** Dacă  $(X_n)$  este un șir de variabile aleatoare independente și echidistribuite și dacă există  $Y$  a.s. finită astfel ca

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} Y \quad (n \rightarrow \infty)$$

atunci variabilele aleatoare  $X_n$ ,  $n \geq 1$  sînt integrabile și

$$Y = M(X_1)_{\text{a.s.}}$$

Menționăm mai întii că putem — pe baza legii  $(0, 1)$  — să considerăm de la început  $Y = c \in \mathbb{R}$ . Dar nu este nevoie de această ipoteză.

*Demonstrație.* Știm că

$$M(|X_1|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq n).$$

Pe de altă parte

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

Datorită acestui fapt

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n| \geq n\}) = P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{\frac{|X_n|}{n} \geq 1\right\}\right) = 0$$

și intrucît evenimentele  $\left\{\frac{|X_n|}{n} \geq 1\right\}$ ,  $n \geq 1$  sînt independente avem conform lemei Borel-Cantelli

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq n) < \infty$$

cu consecința că  $X_1$  este integrabilă. Iar conform teoremei 5  $Y = M(X_1)_{\text{a.s.}}$ .

## CAPITOLUL 3

# STATISTICĂ MATEMATICĂ

## 3.1. POPULAȚIE STATISTICĂ

Statistica matematică este una din ramurile moderne ale matematicii, care se ocupă cu gruparea, analiza și interpretarea datelor referitoare la anumite fenomene, precum și cu unele previziuni privind producerea lor viitoare.

La baza statisticii matematice stă noțiunea de probabilitate. Am văzut că teoria probabilităților se ocupă de studiul variabilelor aleatoare și al proceselor stochastice, de modul de repartizare a frecvențelor acestora, utilizând în acest scop metodele deductive ale matematicii. Statistica matematică urmează o cale inversă.

Pornind de la cunoașterea modului de repartizare a frecvențelor statistice matematice își propune ca prin metode inductive să obțină informații referitoare la legile de probabilitate ale fenomenului care a produs frecvențele.

În cadrul analizei statistice a unui fenomen acționează mai întâi statistica formală sau descriptivă, care se ocupă cu culegerea datelor asupra fenomenului respectiv și cu înregistrarea datelor. Intervine apoi statistica matematică, cu ajutorul căreia datele sînt analizate și interpretate.

*Vom numi populație statistică, sau mai simplu populație, orice mulțime care formează obiectul unei analize statistice. Elementele unei populații statistice se numesc unități statistice sau indivizi. Trăsătura comună tuturor unităților unei populații se numește caracteristică.*

Iată câteva exemple de populații statistice :

a) *Ne interesează repartiția elevilor dintr-o clasă, după notele obținute la matematică.*

— *mulțimea tuturor elevilor din clasă formează populația statistică,*

— *fiecare elev este o unitate statistică,*

— *nota obținută la matematică este caracteristica studiată.*

b) Urmărim studiul statistic al numărului de locuitori din comunele rurale ale unei țări :

- mulțimea comunelor rurale formează populația statistică,
- fiecare comună rurală constituie o unitate statistică,
- numărul de locuitori dintr-o comună rurală la data considerată reprezintă caracteristica studiată.

c) Considerăm repartiția unei colectivități de recruți după înălțimea și greutatea corpului :

- mulțimea recruților constituie populația statistică,
- fiecare recruta reprezintă o unitate statistică,
- există două caracteristici : înălțimea și greutatea corporală.

Din punct de vedere matematic, o populație statistică este o partiție a unei mulțimi  $E$  :

$$E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}.$$

Submulțimile  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  poartă numele de clase. Unitățile statistice, care compun o clasă  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  sînt alese pe baza unei relații  $R$ . De exemplu la populația  $a$  :

$xRy$ ,  $x$  și  $y$  au aceeași notă la matematică ( $x \in A_i, y \in A_i$ ).

Se verifică fără dificultate că  $R$  este o relație de echivalență.

Relația de echivalență definită pe o mulțime statistică sau o populație reprezintă caracteristica populației.

Fie  $n_i (i = 1, 2, \dots, n)$  cardinalul clasei  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . Cunoașterea relației de echivalență nu ne poate da informații asupra populației considerate. În acest scop, trebuie să folosim numerele  $n_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . De exemplu, dacă în cazul populației  $a$ , numărul elevilor care au notele 8, 9, 10 este mare și nu avem nici un elev cu note mai mici de 5, putem trage concluzia că avem o clasă bună la matematică. Numerele  $n_i (i = 1, 2, \dots, n)$  poartă numele de frecvențe de clase sau de grupe.

Caracteristicile pot fi cantitative sau calitative. La populația  $b$ , de exemplu caracteristica studiată este calitativă. La populația  $c$  caracteristica studiată este măsurabilă, cantitativă.

Să considerăm o populație, formată din  $n$  unități, pentru care există două caracteristici calitative  $A$  și  $B$ .

Să notăm prin  $(A)$  numărul celor care prezintă caracteristica  $A$  și prin  $(B)$  numărul celor care au caracteristica  $B$ . Să observăm că în general avem :

$$(A) + (B) \geq n,$$

pentru că pot exista unități care au ambele caractere. De exemplu, dacă  $A$  se referă la faptul că un locuitor dintr-o populație posedă un frigider și  $B$  un televizor, se poate să existe locuitori care au și frigider și televizor.

În populația considerată, notăm prin  $(\bar{A})$ , numărul unităților care nu au caracteristica  $A$ . De asemenea, mai însemnăm prin  $(AB)$  numărul celor care au ambele caracteristici  $A$  și  $B$ . Cu această notație,  $(\bar{A}\bar{B})$  înseamnă, de pildă, numărul celor care nu posedă caracteristica  $A$  și au caracteristica  $B$ .

Avem relațiile evidente :

$$(A) + (\bar{A}) = n,$$

$$-(B) + (\bar{B}) = n,$$

$$(I) \quad \begin{aligned} (AB) + (\overline{A\overline{B}}) &= (A), \\ (AB) + (\overline{A}B) &= (B), \\ (\overline{A}B) + (\overline{A\overline{B}}) &= (\overline{A}), \\ (A\overline{B}) + (\overline{A\overline{B}}) &= (\overline{B}). \end{aligned}$$

Din relațiile de mai sus deducem :

$$(II) \quad \begin{aligned} (A\overline{B}) &= (A) - (AB), \\ (\overline{A}B) &= (B) - (AB), \\ (\overline{A\overline{B}}) &= n - (A) - (B) + (AB). \end{aligned}$$

În formulele (II) trebuie să avem

$$(A\overline{B}) \geq 0, \quad (\overline{A}B) \geq 0, \quad (\overline{A\overline{B}}) \geq 0.$$

Primele două inegalități nu dau nimic semnificativ, deoarece este evident că

$$(A) \geq (AB), \quad (B) \geq (AB).$$

În schimb ultima inegalitate ne arată că trebuie să avem :

$$(III) \quad n - (A) - (B) + (AB) \geq 0$$

adică o condiție necesară pentru ca să existe populația statistică.

**Exemplu.** Într-o comună sînt 1 560 familii, dintre care 881 au televizor, 975 frigider și 660 au și televizor și frigider.

Cîte familii n-au nici televizor, nici frigider ?

*Rezolvare.* Aplicăm ultima dintre formulele (II) :

$$(\overline{A\overline{B}}) = 1\,560 - 881 - 975 + 660 = 364.$$

Deci 364 n-au nici televizor nici frigider.

Să considerăm acum o populație la care ne interesează trei caractere calitative: A, B, C.

În acest caz, vom avea următoarele frecvențe, corespunzătoare diferitelor grupări de caracteristici

0 caracteristici	$n$
1 caracteristică	$(A), (B), (C); (\overline{A}), (\overline{B}), (\overline{C})$
2 caracteristici	$(\overline{A}B) (\overline{B}C) (\overline{C}A)$ $(A\overline{B}) (\overline{B}\overline{C}) (\overline{C}\overline{A})$ $(\overline{A}\overline{B}) (\overline{B}C) (\overline{C}A)$ $(\overline{A}B) (\overline{B}\overline{C}) (\overline{C}\overline{A})$
3 caracteristici	$(ABC) (\overline{A}BC)$ $(A\overline{B}C) (\overline{A}\overline{B}C)$ $(A\overline{B}\overline{C}) (\overline{A}BC)$ $(\overline{A}\overline{B}C) (\overline{A}\overline{B}\overline{C})$

Avem în total 27 de grupări, între care există anumite relații.

Toate grupările se pot exprima în raport cu  $n, (A), (B), (C), (AB), (BC), (CA), (ABC)$ .

Avem :

$$(\bar{A}) = n - (A),$$

$$(\bar{A}B) = (B) - (AB),$$

$$(\bar{A}\bar{B}) = n - (A) - (B) + (AB),$$

$$(\bar{A}BC) = (BC) - (ABC),$$

$$(\bar{A}\bar{B}C) = (C) - (AC) - (BC) + (ABC),$$

$$(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = n - (A) - (B) - (C) + (AB) + (BC) + (CA) - (ABC)$$

și corelativele acestor formule, obținute prin permutări circulare.

Pentru ca populația să existe rezultă din formulele de mai sus că trebuie să avem :

$$(IV) \quad (A) - (AB) - (AC) + (ABC) \geq 0,$$

$$(B) - (BC) - (BA) + (ABC) \geq 0,$$

$$(C) - (CB) - (AC) + (ABC) \geq 0,$$

$$n - (A) - (B) - (C) + (AB) + (BC) + (CA) - (ABC) \geq 0.$$

**Exemplu.** Completăm exemplul precedent în felul următor : în comună sînt 1560 familii, dintre care 881 au televizor, 975 frigider, 370 mașină de spălat. Statistica ne arată că există 525 care au televizor și frigider, 220 care au frigider și mașină de spălat, 215 care au mașină de spălat și televizor, 176 care au televizor, mașină de spălat și frigider. Cîte familii n-au nici televizor, nici frigider, nici mașină de spălat ? Cîte familii au numai televizor ?

*Rezolvare.* Avem :

$$(A) = 881 ; (B) = 975 ; (C) = 370 ;$$

$$(AB) = 525 ; (BC) = 220 ; (CA) = 215 ;$$

$$(ABC) = 176.$$

Formulele (IV), cu aceste date, sînt îndeplinite.

Pentru prima întrebare avem :

$$(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = n - (A) - (B) - (C) + (AB) + (BC) + (CA) - (ABC) = \\ = 1560 - 881 - 975 - 370 + 525 + 220 + 215 - 176 = 118.$$

Pentru întrebarea a doua :

$$(\bar{A}\bar{B}C) = (A) - (AB) - (AC) + (ABC) = 881 - 525 - 215 + 176 = 317.$$

Deci, 118 familii n-au televizor, frigider și mașină de spălat, iar 317 au numai televizor.

**Exemplu.** La exemplul anterior mai adăugăm următoarele informații : 60% din populație aparține mediului rural, 30% au fost injectați din mediul rural, care s-au îmbolnăvit. Între ce limite variază procentele corespunzătoare pentru

(i.b) = injectații bolnavi,

(b.r) = bolnavii din mediul rural,

(i.r) = injectații din mediul rural.

*Rezolvare.* Notăm prin

A = caracteristica privind injectarea,

B = caracteristica privind îmbolnăvirea,

C = caracteristica privind mediul rural.

Avem următoarele date :

$$= 100, (A) = 90, (B) = 40, (C) = 60, (ABC) = 30.$$

Notăm

$$(AB) = x, (BC) = y, (CA) = z.$$

Formulele (IV) ne dau :

$$\begin{aligned}x + z &\leq 120, \\y + z &\leq 70, \\z + y &\leq 90, \\x + y + z &\geq 120.\end{aligned}\quad (1)$$

Din ultimele două inegalități deducem :

$$\begin{aligned}120 - x &\leq y + z \leq 90, \\120 - x &\leq 90, \\x &\geq 30.\end{aligned}$$

Pe de altă parte :

$$\begin{aligned}x = (AB) &\leq (A) = 90, \\x = (AB) &\leq (B) = 40, \\x &\leq 40\end{aligned}$$

și deci

$$30 \leq x \leq 40.$$

În mod analog deducem

$$\begin{aligned}0 &\leq y \leq 40, \\50 &\leq z \leq 60.\end{aligned}$$

Se vede ușor că aceste margini pot fi atinse. Prin urmare, procentul injectațiilor bolnavi variază între 30% și 40% din totalul populației. Din plusul de date față de exemplele anterioare, rezultă o delimitare mai strinsă pentru acest procent. Bolnavii din mediul rural, reprezintă un procent mai mic, sau egal cu 40%. Reținem că 40% din populația totală s-a îmbolnăvit de gripă. Deci numărul bolnavilor din mediul rural este procentual mai mic sau numai în cazuri excepționale același. În sfârșit un procent cuprins între 50% și 60% din populația rurală a fost injectată.

Putem în același mod să considerăm cazul când avem patru sau mai multe caracteristici calitative.

Fie  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $n$  caracteristici calitative. Vom avea diferite grupări de tipul  $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r}$ , unde  $j_1, j_2, \dots, j_r$  iau valori distincte cuprinse între 1 și  $n$  inclusiv, iar  $r = 1, 2, \dots, n$ . Numărul grupărilor  $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r}$ , pentru  $r$  fixat, este  $C_n^r$  și cum  $r$  variază de la 1 la  $n$ , rezultă că avem

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n.$$

Dar mai avem și grupări de tipul  $A'_{j_1}, A'_{j_2}, \dots, A'_{j_r}$ , unde  $A'_{j_k}$  poate lua una din valorile  $A_{j_k}$  sau  $A_{j_k}$ . Pentru  $j_1, j_2, \dots, j_r$  dați se vede imediat că numărul grupărilor  $A'_{j_1}, A'_{j_2}, \dots, A'_{j_r}$  este  $2^r$ . Prin urmare, numărul total al grupărilor când facem să varieze și indicii  $j_1, j_2, \dots, j_r$ , este

$$1 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n = (1 + 2)^n = 3^n.$$

Avem un număr mare de grupări. Pentru  $n = 3$  există  $3^3 = 27$  grupări, pe care le-am scris la pag. 303. Pentru  $n = 4$  există  $3^4 = 81$  de grupări și așa mai departe. Este de remarcat că toate grupările de forma  $A'_{j_1}$ ,

$A'_{j_1}, \dots, A'_{j_r}$  se exprimă în raport cu grupările  $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r}$ , iar grupările conținând un număr oarecare de termeni se exprimă în raport cu grupările cu un număr superior de termeni. Numerele de unități avînd caracteristicile  $A'_{j_1}, A'_{j_2}, \dots, A'_{j_r}$  îndeplinesc niște relații, pe care le-am întilnit în partea I la studiul probabilităților evenimentelor compatibile.

Notăm :

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n} (A_{j_1}, A_{j_2}, A_{j_3}, \dots, A_{j_k}),$$

Expresiile  $(A'_{j_1}, A'_{j_2}, \dots, A'_{j_r})$  se exprimă linear în raport cu  $S_k^{(n)}$ .

De exemplu, numărul de unități statistice pentru care sînt verificate  $r$  caracteristici și  $(n - r)$  nu sînt verificate este

$$\sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k C_{r+k}^k S_{k+r}^{(n)}, \quad (r = 0, 1, \dots, n).$$

Caracteristicile cantitative se prezintă atunci cînd pot fi măsurate în numere reale. De exemplu, populația obținută prin repartizarea unor recruți după greutatea corporală se referă la o caracteristică de tip cantitativ.

De obicei, repartizarea se face grupînd datele.

Să considerăm astfel populația formată de 120 recruți, grupați după înălțimea lor.

Tabelul 1

176	173	161	171	174	168	178	166	169	172
181	172	163	174	173	169	172	175	158	182
186	190	173	173	169	171	176	172	188	175
162	170	176	177	171	164	162	175	176	176
170	176	178	164	174	177	180	175	175	180
174	171	175	170	179	186	177	178	169	180
188	173	172	174	183	177	176	177	181	159
183	174	179	167	165	182	176	178	171	169
168	179	177	177	181	178	184	177	173	177
162	177	173	170	176	179	170	168	174	175
173	178	185	185	171	165	167	174	175	172
179	168	171	175	165	178	172	175	166	171

Tabela, din cauza mulțimii datelor și neordonării lor, ne permite cu greutate să tragem unele concluzii. Putem însă s-o scriem sub forma următoare :

Tabelul 2

cm	Nr. pers.	cm	Nr. pers.	cm	Nr. pers.	cm	Nr. pers.	cm	Nr. pers.
158	1	165	3	171	8	177	9	183	2
159	1	166	2	172	7	178	7	184	1
161	1	167	2	173	8	179	5	185	2
162	3	168	4	174	9	180	3	186	2
163	1	169	5	175	10	181	3	188	2
164	2	170	5	176	9	182	2	190	1

Sub această formă, se pot desprinde imediat unele observații. Astfel cele mai multe persoane se găsesc în jurul înălțimii de 175 cm, iar la înălțimile extreme există puține persoane.

Putem însă merge și mai departe și să efectuăm o grupare a datelor, contopind mai multe dimensiuni ale caracteristicii.

Tabelul 3

Clasa de valori (cm)	Nr. pers.
160	2
160—165	7
165—170	16
170—175	37
175—180	40
180—185	11
185—190	7

Această tabelă a fost calculată după tabela 2 după regula următoare: intervalul 160—165 cuprinde valorile  $n$  ale caracteristicii pentru care  $160 \leq x < 165$  și aplicind același procedeu și pentru celelalte intervale.

Numărul de unități corespunzătoare valorii  $x$  a caracteristicii poartă numele de caracteristică. De exemplu, în tabela 2 frecvența corespunzătoare înălțimii 175 cm, este 10. În tabela 3, frecvența corespunzătoare clasei 175—180 este 40.

Suma frecvențelor ne dă efectivul total al populației. Am arătat, referitor la tabela 1, că ordonarea datelor prezintă avantaj la tragerea unor concluzii. În cazul când populația este mică această observație nu prezintă mare importanță, dar când avem sute de mii sau milioane de unități, ordonarea datelor devine o necesitate. Să considerăm astfel tabela care urmează.

Tabela 4

Distribuția populației R.S.R. pr grupe de vîrstă  
la data de 1 iulie, 1978

0—4 ani	2 006 897	60—64 ani	718 074
5—9 ani	2 014 500	65—69 ani	891 870
10—14 ani	1 659 653	70—74 ani	653 898
15—19 ani	1 542 069	75—79 ani	411 103
20—24 ani	1 849 583	80—84 ani	183 813
25—29 ani	1 724 042	85 ani și peste	89 905
30—34 ani	1 296 720	—	—
35—39 ani	1 367 387	—	—
40—44 ani	1 537 729	—	—
45—49 ani	1 498 522	—	—
50—54 ani	1 372 774	—	—
55—59 ani	1 036 188	—	—
<b>TOTAL</b>			<b>21 854 622</b>

În acest caz, necesitatea grupării este evidentă. Grupele nu corespund întotdeauna la intervale egale. De multe ori pe statistician îl interesează frecvența corespunzătoare unui interval care nu se găsește cuprins în tabelă, dar care poate fi dedus prin interpolare.

**Exemplu.** Ni se dau frecvențele corespunzătoare, în procente, pentru următoarele grupe de vîrste; prin  $x$  notînd vîrsta:

$12 \leq x < 15$	7,9%
$15 \leq x < 20$	8,9%
$20 \leq x < 30$	18,0%

Se cere procentul pentru grupa  $15 \leq x < 16$ .

**Rezolvare.** Înscriem numărul de ani pe axa absciselor, luînd intervalul  $(0, 2)$  pentru durata unui an și originea pentru vîrsta de 15 ani. Avem următoarea corespondență:

Vîrsta	Valoarea abscisei
12 ani	-0,3
15 ani	0
20 ani	1
30 ani	3

Vom proceda prin interpolare. Avem trei grupe de vîrstă. Se impune de aceea folosirea pentru interpolare al unui polinom de gradul al doilea:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Trebuie să avem:

$$\int_{-0,6}^0 f(x)dx = 7,9; \quad \int_0^1 f(x)dx = 8,9; \quad \int_1^3 f(x)dx = 18.$$

Obținem sistemul liniar:

$$-0,6a_0 - 0,18a_1 + 0,072a_2 = 7,9;$$

$$a_0 + 0,5a_1 + 0,333a_2 = 8,9;$$

$$2a_0 + 4a_1 + \frac{26}{3}a_2 = 18;$$

care ne dă:

$$a_0 = 11,117; \quad a_1 = 5,933; \quad a_2 = 2,25$$

$$f(x) = 11,117 - 5,933x + 2,25x^2.$$

Frecvența corespunzătoare intervalului

$$15 \leq x < 16$$

este dată de integrala

$$\int_0^{0,2} (11,117 - 5,933x + 2,25x^2)dx = 2,11.$$

Foarte des se folosește frecvența cumulată. Fie  $x$  o valoare a caracteristicii. Numim frecvență cumulată  $F(x)$  suma frecvențelor absolute ale tuturor valorilor caracteristicii pînă la  $x$ .

Considerăm populația formată din notele la teză a unei clase formată din 40 de elevi :

Nota	Frecvența absolută	Frecvența cumulată
2	1	1
3	1	2
4	2	4
5	4	8
6	7	15
7	15	30
8	6	36
9	3	39
10	1	40

Frecvența absolută ne dă numărul elevilor care au o anumită notă. De exemplu, nota 7 au obținut 15 elevi. Frecvența cumulată ne arată câți elevi au obținut o notă mai mică decât 7.

Modelul teoretic al frecvenței cumulate este funcția de repartiție din teoria probabilităților.

Vom da o altă soluție exemplului precedent folosind cumulara frecvențelor. Notînd prin  $x$  vîrsta, avem următoarele date

$12 \leq x < 15$	7,9%
$12 \leq x < 20$	16,8%
$12 \leq x < 30$	34,8%

Plecăm de la polinomul

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

pentru care punem condițiile :

$$f(0) = 7,9, \quad f(1) = 16,8, \quad f(3) = 34,8.$$

Pentru determinarea lui  $f(x)$  vom folosi formula de interpolare a lui Lagrange, care ne dă expresia unui polinom de gradul  $n$ , care pentru  $x = x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) ia respectiv valorile  $y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Acest polinom se poate pune sub forma

$$\sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)} y_k.$$

Pentru  $k = 2$  și ținînd seamă de valorile lui  $f(x)$  în punctele  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ , avem :

$$f(x) = 7,9 \frac{(x-1)(x-3)}{3} - 16,8 \frac{x(x-3)}{2} + 34,8 \frac{x(x-1)}{6}.$$

Rezultă :

$$f(0,2) = 9,675 ;$$

$$f(0,2) - f(0) = 1,78.$$

Obținem valoarea 1,78%. Prin cealaltă metodă am găsit 2,11%. Diferența dintre cele două valori este 0,33%.

Desigur, această problemă nu admite o soluție unică. Folosind alte metode de interpolare, vom găsi alte valori, diferite între ele dar în general apropiate.

Există o relație analogă cu formula lui Boole, dată în partea I pentru probabilități :

$$(A_1, A_2, \dots, A_m) \geq (A_1) + (A_2) + \dots + (A_m) - (m-1)n.$$

Demonstrația se poate da prin inducție completă, cum am procedat la pag. 218. Trecind însă la grupările superioare demonstrația este imediată.

Avem :

$$n = S(A'_1, A'_2, \dots, A'_m)$$

unde  $S$  înseamnă însumarea tuturor termenilor în care  $A'_j$  ia valorile  $A_j$  sau  $\bar{A}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) în toate modurile posibile.

De exemplu :

$$S(A'_1 A'_2) = (A_1 A_2) + (A_1 \bar{A}_2) + (\bar{A}_1 A_2) + (\bar{A}_1 \bar{A}_2).$$

Cum :

$$(A_1) = S(A_1, A'_2, \dots, A'_n), (A_2) = S(A'_1, A_2, A'_3, \dots, A'_n), \dots$$

rezultă că trebuie să demonstrăm că

$$S(A_1 A'_2, \dots, A'_m) + S(A'_1 A_2 A'_3, \dots, A'_n) + \dots + S(A'_1 A'_2, \dots, A'_{m-1} A_m) - (m-1)S(A'_1 A'_2, \dots, A'_m) \leq (A_1 A_2, \dots, A_m)$$

Termenii  $(A_1, A_2, \dots, A_m)$  se reduc.

De asemenea se reduc termenii de forma  $(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \dots A_m)$ , iar care avem două caracteristici complementare și  $(m-2)$  directe.

Toți ceilalți termeni, care rămân în primul membru se înmulțesc cu coeficienți negativi, astfel încît inegalitatea este evidentă.

**Exemplu.** La un institut de învățămînt superior se dau la matematică examene la următoarele discipline : analiză, geometrie, informatică. Au promovat la sfîrșitul sesiunii de examene 89% studenții la analiză, 91% studenții la geometrie și 92% studenții la informatică. Se cere numărul minim de studenți integrați.

*Rezolvare.* Luăm  $n = 100$  și aplicăm formula

$$(ABC) \geq (A) + (B) + (C) - 200$$

unde

$$(A) = 89, (B) = 91, (C) = 92$$

obținem :

$$(ABC) \geq 72.$$

Deci avem cel puțin 72% integrați.

Să vedem în ce caz această limită este atinsă.

Deci trebuie să avem :

$$(ABC) = (A) + (B) + (C) - 200.$$

Ținând seama că

$$100 = (ABC) + (\overline{ABC}) + (A\overline{BC}) + (AB\overline{C}) + (A\overline{B}\overline{C}) + (\overline{A}\overline{B}\overline{C}) + (\overline{A}\overline{BC}) + (\overline{A}B\overline{C})$$

$$(A) = (ABC) + (A\overline{BC}) + (AB\overline{C}) + (A\overline{B}\overline{C}) \text{ etc.}$$

rezultă că

$$\begin{aligned} (ABC) &= (ABC) + (A\overline{BC}) + (AB\overline{C}) + (A\overline{B}\overline{C}) + (ABC) + \\ &+ (\overline{ABC}) + (A\overline{BC}) + (\overline{A}\overline{B}\overline{C}) + (ABC) + (\overline{ABC}) + \\ &+ (A\overline{BC}) + (\overline{A}\overline{B}\overline{C}) - 2(ABC) - 2(\overline{ABC}) - 2(A\overline{BC}) - \\ &- 2(AB\overline{C}) - 2(A\overline{B}\overline{C}) - 2(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) - 2(\overline{A}\overline{BC}) - 2(\overline{A}B\overline{C}) \end{aligned}$$

sau :

$$-(A\overline{B}\overline{C}) - (\overline{A}\overline{B}\overline{C}) - (\overline{A}\overline{BC}) - 2(\overline{A}B\overline{C}) = 0,$$

ceea ce nu e posibil decât dacă

$$(A\overline{B}\overline{C}) = 0, (\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 0, (\overline{A}\overline{BC}) = 0, (\overline{A}B\overline{C}) = 0.$$

Deci numărul minim de integraliști se obține atunci când nu există nici un student care a căzut la mai mult de o materie.

Într-adevăr :

$$(\overline{BC}) = (A\overline{BC}) + (\overline{A}\overline{BC}) = 0.$$

La fel :

$$(\overline{AB}) = 0, (\overline{AC}) = 0, (\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 0.$$

### 3.2. VALORI MEDII. MOMENTE

În prima parte a acestei lucrări am definit noțiunea de valoare medie și de momente pentru o variabilă aleatoare. Definiția din teoria probabilităților se păstrează și în statistică, înlocuind în toate formulele probabilitatea prin frecvență. Astfel, dacă avem o variabilă aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_m \\ p_1, p_2, \dots, p_m \end{pmatrix}$$

valoarea medie  $M(X)$  este dată de relația

$$M(X) = \sum_{i=1}^m p_i a_i. \quad (1)$$

În cazul unei populații statistice sau a unei variabile statistice

$$Y : \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_m \\ f_1, f_2, \dots, f_m \end{pmatrix}$$

unde  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) sînt caracteristici cantitative, iar  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) frecvențe ( $f_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^m f_i = 1$ ), valoarea medie este

$$M(Y) = \sum_{i=1}^m f_i a_i. \quad (2)$$

În același mod definim valoarea medie a unei puteri

$$M(Y^r) = \sum_{i=1}^m f_i a_i^r \quad (3)$$

media de ordinul  $r$

$$M_r = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^m f_i a_i^r}. \quad (4)$$

Proprietățile formale pe care le-am expus pentru mediile probabilistice se păstrează fără nici o modificare și pentru mediile statistice. Există însă unele deosebiri rezultînd din modul de utilizare a celor două categorii de medii. Mediile din teoria probabilităților servesc pentru studiul teoretic al variabilelor aleatoare, pe cînd mediile statistice pentru determinarea unor valori tipice, care pot caracteriza în mod simplu și sugestiv populațiile statistice. Mediile din teoria probabilităților au un caracter teoretic, pe cînd mediile din statistică un caracter empiric. Mediile statistice slujesc pentru studierea unei populații statistice determinate, rezultate dintr-o experiență.

Mediile pot pune în evidență unele caracteristici ale unei populații. Dacă într-o clasă media notelor trimestriale ale elevilor la istorie este 8,90 se poate afirma că elevii și-au făcut datoria la această disciplină. Pentru acest motiv, mediile poartă numele și de valori tipice ale populațiilor statistice.

Mediile se împart în două mari categorii:

- a) medii de poziție,
- b) medii de împrăștiere.

Cele mai utilizate medii de poziție sînt: media aritmetică, mediana, modulul, media geometrică, media armonică.

Cele mai utilizate medii de împrăștiere sînt: dispersia și amplitudinea (rangul).

Vom examina fiecare din aceste medii în parte.

Media aritmetică este cea mai răspîdită medie de poziție.

Dacă avem o populație statistică dată prin valorile caracteristicii în  $n$  probe:

$$X: (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

media aritmetică este dată de formula:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}. \quad (5)$$

Dacă pentru fiecare caracteristică avem frecvența absolută  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) media aritmetică este

$$\bar{X} = \frac{n_1 X_1 + n_2 X_2 + \dots + n_m X_m}{n_1 + n_2 + \dots + n_m}. \quad (6)$$

În cazul frecvențelor relative :

$$f_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^n n_i}$$

$$\bar{X} = f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_m X_m \quad (7)$$

deoarece

$$\sum_{i=1}^m f_i = 1.$$

Media aritmetică a variabilei statistice  $X$  se notează de obicei prin  $\bar{X}$ . Media aritmetică este atît de răspîndită, încît atunci cînd se vorbește de medie în general, fără a se menționa natura ei, se înțelege media aritmetică. De exemplu, cînd vorbim de media unei clase, de recolta medie la hectar, etc. înțelegem media aritmetică.

Calculul mediei aritmetice este simplu ; de aceea nu insistăm asupra lui.

Dacă așezăm valorile variabilei în ordine crescătoare, mediana, este valoarea centrală, pentru care valorile mai mari sau mai mici decît ea apar cu frecvențe egale. Mediana este o medie de poziție.

Mediana nu este totdeauna unic determinată. Astfel, dacă avem un număr impar de termeni

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n x_{n+1} \dots x_{2n+1}$$

mediana este  $x_n$ .

În cazul unui număr par de termeni

$$x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \dots x_{2n}$$

mediana este un număr cuprins între  $x_n$  și  $x_{n+1}$ , care poate fi ales egal cu media aritmetică a acestor termeni.

În cazul cînd pentru valorile  $x_i$ , avem frecvențele  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , calculul medianeii se face de cele mai multe ori prin interpolare, folosind frecvența cumulată, corespunzătoare funcției de repartiție, din teoria probabilităților.

Ne propunem să calculăm, ca un exemplu, mediana pentru următorul tablou statistic :

Tabela 5

Distribuția precipitațiilor atmosferice la noi în țară în intervalul 1896—1938 în timpul verii, în raport cu cantitatea de apă

$x$ (mijlocul intervalului)	$f(x)$	$F(x) = \sum_{\xi \leq x} f(\xi)$
115	2	2
145	6	8
175	6	14
205	15	29
235	6	35
265	1	36
295	3	39
325	1	40

Mediana corespunde valorii 20, adică jumătate din 40.  
 Valoarea 20 este cuprinsă în ultima coloană între 14 și 20 care corespund intervalului (175, 205) de valori ale variabilelor.

Avem următoarea corespondență :

$x$	14	175
15	20	$x$
	29	205

Prin interpolare lineară rezultă

$$\frac{x - 175}{20 - 14} = \frac{205 - 175}{29 - 14}$$

$$x = 187.$$

Aceasta este valoarea mediane.

Mediana se bucură de unele proprietăți interesante, care rezultă din definiția ei.

Pentru distribuțiile discrete, notînd mediana prin  $\xi$ , trebuie să avem :

$$\sum_{k \leq \xi} f_k = \sum_{k \geq \xi} f_k = \frac{1}{2}$$

iar pentru distribuțiile continue

$$\int_{-\infty}^{\xi} f(x) dx = \int_{\xi}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Ambele cazuri pot fi cuprinse în aceeași notație, folosind integrala Stieltjes :

$$\int_{-\infty}^{\xi} dF(x) = \int_{\xi}^{+\infty} dF(x) = \frac{1}{2} \quad (8)$$

unde  $F(x)$  este funcția de repartiție pentru variabilele aleatoare și funcție de frecvență cumulată pentru distribuțiile statistice.

**Teoremă.** Suma abaterilor absolute în raport cu un punct de abscisă  $a$  este minimă cînd  $a$  coincide cu valoarea mediane.

*Demonstrație.* Considerăm un punct arbitrar  $b > a$ .

Avem de examinat următoarele cazuri :

1)  $x \leq a < b$ . Rezultă

$$\int_{-\infty}^a |x - a| dF(x) = \int_{-\infty}^a (a - x) dF(x) = \int_{-\infty}^a (b - x) dF(x) - \int_{-\infty}^a dF(x)(b - a) \quad (\alpha)$$

2)  $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b |x - a| dF(x) = \int_a^b (x - a) dF(x) = - \int_a^b (b - x) dF(x) + (b - a) \int_a^b dF(x) \quad (\beta)$$

3)  $a < b \leq x$

$$\int_b^{\infty} |x-a| dF(x) = \int_a^b (x-a) dF(x) = \int_b^{+\infty} (x-b) dF(x) + (b-a) \int_b^{\infty} dF(x) \quad (\gamma)$$

Adunînd relațiile  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  obținem :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x-a| dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-b| dF(x) - 2 \int_a^b (b-x) dF(x) - (b-a) \left[ \int_{-\infty}^a dF(x) - \int_a^{\infty} dF(x) \right]$$

Luînd  $a = \xi$ , rezultă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x-\xi| dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-b| dF(x) - 2 \int_a^b (b-x) dF(x).$$

Prin urmare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x-\xi| dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x-b| dF(x), \quad b \geq \xi.$$

În același mod se demonstrează inegalitatea de mai sus, dacă  $b \leq \xi$ . Prin urmare, teorema este demonstrată.

Putem pentru caracterizarea unei populații statistice să utilizăm relația :

$$\int_{-\infty}^{\xi} dF(x) = k \quad (9)$$

unde  $k \in [0, 1]$ .

Punctul  $\xi$  poartă numele de cuantilă de ordinul  $k$ . Pentru  $k = \frac{1}{2}$  avem relația (8) și  $\xi$  astfel obținut am văzut că poartă numele de mediană.

Fie  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , valorile corespunzătoare ecuațiilor

$$\int_{-\infty}^{\xi_1} dF(x) = \frac{1}{4}, \quad \int_{-\infty}^{\xi_2} dF(x) = \frac{1}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\xi_3} dF(x) = \frac{3}{4}.$$

Numerele  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  împart valorile populației, ordonate după mărimea lor, în patru intervale, astfel încît suma frecvențelor din fiecare interval este egală cu  $\frac{1}{4}$ . Aceste numere poartă numele de quartile.

Calculul quartilelor se face în general prin interpolare, în același mod ca și calculul medianeii.

Modulul este dat de valoarea caracteristicii pentru care frecvența corespunzătoare este maximă, presupunînd bineînțeles că există un singur maxim.

Sînt numeroase cazurile întîlnite în practică pentru care modulul trebuie să fie preferat medianeii sau mediei aritmetice. De exemplu, *dacă, pe baza unei statistici, ne propunem să determinăm orele de vîrf ale circulației pe o anumită linie de autobuz trebuie să folosim modulul, mediana și media aritmetică, neputînd să ne dea nici o indicație în această problemă.*

Dealtminteri, valorile tipice au diverse semnificații de care trebuie să ținem seamă în interpretarea datelor. Efectuînd o statistică a retribuiției dintr-o întreprindere, am găsit mediana egală cu 1 400 lei, media aritmetică cu 1 500 lei

și modulul cu 1 300 lei. Ce semnificație cu aceste date? Mediana ne spune că jumătate din numărul salariaților au retribuiția mai mică de 1 400 lei, iar cealaltă jumătate mai mare de 1 400 lei. Dacă totalitatea retribuiției plătite s-ar repartiza egal asupra tuturor angajaților, fiecărui angajat i-ar veni 1 500 lei. Modulul ne arată că cei mai mulți angajați au retribuiția de 1 300 lei.

În afară de cele trei medii clasice (media aritmetică, mediana, modulul) în practica statisticii se mai folosesc și alte medii. Vom menționa în primul rând dintre acestea media geometrică. Dacă avem o populație statistică dată printr-o serie de date

$$x_1, x_2, \dots, x_m,$$

media geometrică este dată de formula

$$g = \sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m}.$$

Dacă variabila statistică este scrisă sub forma

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ n_1 & n_2 & \dots & n_m \end{pmatrix}$$

unde  $n_i$  sînt frecvențe absolute:

$$\sum_{i=1}^m n_i = n$$

media geometrică este:

$$g = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_m^{n_m}}.$$

Dacă avem variabila statistică

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ f_1 & f_2 & \dots & f_m \end{pmatrix}$$

$f_i$  fiind frecvența relativă corespunzătoare caracteristicii  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ):

$$f_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m f_i = 1,$$

media geometrică este

$$g = x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \dots \cdot x_m^{f_m}.$$

Media geometrică este folosită la teoria indicilor statisticii (indicele de creștere a prețurilor, indicele de creștere a populației, indicele de creștere a producției industriale etc.). În general cînd creșterea unei populații este proporțională cu volumul ei, media geometrică este cea mai indicată dintre toate mediile.

O altă medie întrebuințată în aplicații este media armonică. Prin definiție, media armonică este inversă mediei aritmetice a inverselor valorilor caracteristicii. Astfel, dacă avem populația statistică

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ n_1 & n_2 & \dots & n_m \end{pmatrix}; n_i \geq 0; \sum_{i=1}^m n_i = n$$

și notăm prin  $A$  media armonică:

$$\frac{1}{A} = \frac{n_1 \cdot \frac{1}{x_1} + n_2 \cdot \frac{1}{x_2} + \dots + n_m \cdot \frac{1}{x_m}}{n}.$$

Mediile de poziție pot fi deduse cu ajutorul unei funcții determinate, folosind relațiile

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \underbrace{f(\xi, \xi_1, \dots, \xi)}_{m \text{ ori}} \quad (10)$$

$\xi$  este o medie în raport cu funcția  $f$ . Dacă

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m$$

rezultă din (10)

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m = n_1 \xi + n_2 \xi + \dots + n_m \xi$$

adică media aritmetică

$$\xi = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m}{n}$$

Dacă

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$$

relația (10) ne dă

$$x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m} = \xi^{n_1} \cdot \xi^{n_2} \dots \xi^{n_m}$$

sau

$$\xi = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}}$$

adică media geometrică. Dacă

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \dots + \frac{n_m}{x_m}$$

relația (10) ne dă

$$\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \dots + \frac{n_m}{x_m} = \frac{n_1}{\xi} + \frac{n_2}{\xi} + \dots + \frac{n_m}{\xi}$$

rezultând pentru  $\xi$  valoarea seriei armonice.

Proprietățile mediilor considerate pot fi stabilite folosind relația mai generală (10).

Dacă notăm prin  $f_i$  frecvența relativă a unei variabile statistice ( $f_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^m f_i = 1$ ) am văzut că, momentul de ordinul  $p$  al variabilei este dat de formula :

$$M_p = \sum_{i=1}^m f_i x_i^p \quad (11)$$

În particular, pentru  $p = 1$ , regăsim media aritmetică.

Folosind o notație generală, care se aplică și pentru distribuțiile continue și discrete, putem scrie :

$$M_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p dF(x) \quad (12)$$

unde  $F(x)$  este funcție de frecvență cumulată.

Momentul absolut de ordinul  $p$  este :

$$\bar{M}_p = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p dF(x) \quad (13)$$

$M_p$  este, prin definiție, media variabilei statistice  $X^p$ , iar  $\bar{M}_p$  este media variabilei  $|X|^p$ .

Media de ordinul  $p$ , notată prin  $m_p$ , este definită prin relația

$$m_p = \sqrt[p]{\bar{M}_p}$$

sau

$$m_p = \sqrt[p]{\int_{-\infty}^{+\infty} x^p dF(x)}. \quad (14)$$

Din (14) rezultă că  $m_p$  este de aceeași dimensiune cu  $X$ .

Mediile  $m_p$  sînt medii de poziție.

Aceste medii se bucură de cîteva proprietăți interesante.

Din definiție rezultă imediat :

$$m_{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m f_i \frac{1}{x_i}}$$

adică  $m_{-1}$  coincide cu media armonică.

Calculul lui  $m_0$  se poate face folosind logaritmii

$$\log m_p = \frac{1}{p} \log \left( \sum_{i=1}^m f_i x_i^p \right)$$

și trecînd la limită

$$\begin{aligned} \log m_0 &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{1}{p} \sum_{i=1}^m f_i x_i^p \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^m f_i x_i^p \log x_i \right) = \\ &= \log x_1^{f_1} x_2^{f_2} \dots x_m^{f_m}; \quad m_0 = x_1^{f_1} x_2^{f_2} \dots x_m^{f_m} \end{aligned}$$

adică  $m_0$  coincide cu media geometrică.

Teoremele care urmează sînt valabile pentru  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**Teoremă. Există inegalitățile**

$$\inf_i x_i \leq m_p \leq \sup_i x_i.$$

*Demonstrația este imediată.*

$$x_i \leq \sup_i x_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Prin urmare

$$m_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m f_i x_i^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m f_i (\sup_i x_i)^p} \leq \sup_i x_i$$

deoarece

$$\sum_{i=1}^m f_i = 1.$$

La fel se demonstrează și prima parte a inegalităților din teoremă.

**Teoremă.**

$$\lim_{p \rightarrow \infty} m_p = \sup_i x_i,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} m_p = \inf_i x_i.$$

*Demonstrație.* Putem scrie

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} m_p &= \sup_i x_i \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m p_i \left(\frac{x_i}{\sup_i x_i}\right)^p} = \\ &= \sup_i x_i \lim_{p \rightarrow \infty} (p_h)^{\frac{1}{p}} = \sup_i x_i \end{aligned}$$

notînd prin

$$x_h = \sup_i x_i$$

Dacă notăm  $r = -p$ , avem de determinat limita

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} m_p = \lim_{r \rightarrow \infty} m_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[r]{\sum p_i \frac{1}{x_i^r}}}$$

Însă conform, primei proprietăți de limită

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt[r]{p_i \cdot \frac{1}{x_i^r}} = \sup_i \frac{1}{x_i}.$$

Prin urmare

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} m_p = \frac{1}{\sup_i \frac{1}{x_i}} = \inf_i x_i.$$

**Teoremă.** Șirul  $m_p$  este crescător, pentru valorile întregi luate de  $p$ .

*Demonstrație.* Pornim de la relația evidentă

$$\sum_{i=1}^m p_i \left[ u x_i^{\frac{p-1}{2}} + v x_i^{\frac{p+1}{2}} \right] \geq 0$$

oricare ar fi  $u$  și  $v$ .

Ridicînd la pătrat această relație, se poate scrie

$$u^2 M_{p-1} + 2uv M_p + v^2 M_{p+1} \geq 0.$$

Pentru ca relația să aibe loc, oricare ar fi  $u$  și  $v$  trebuie să avem :

$$M_{p-1} M_{p+1} - M_p^2 \geq 0$$

sau

$$M_p^2 \leq M_{p-1} M_{p+1}.$$

Ridicind această relație la puterea  $p$  și dând lui  $p$  valori succesive începînd de la 1, obținem

$$M_1^2 \leq M_0 M_2$$

$$M_2^2 \leq M_1 M_3$$

$$\vdots$$

$$M_p^{2m} \leq M_{p-1}^p M_{p+1}^p.$$

Din înmulțirea acestor inegalități membru cu membru rezultă

$$M_p^{p+1} \leq M_{p+1}^p$$

sau

$$\sqrt[p]{M_p} \leq \sqrt[p+1]{M_{p+1}}$$

$$m_p \leq m_{p+1}. \quad (15)$$

Relația (15) este valabilă pentru orice  $p$  real, cum rezultă din demonstrația dată în partea I. Demonstrația pe care am dat-o aici are meritul că este elementară.

Din (15) rezultă

$$m_{-1} \leq m_0 \leq m_1$$

adică media armonică este mai mică decît media geometrică și aceasta este mai mică decît media aritmetică. Este o concluzie importantă pentru populațiile statistice avînd caracteristice pozitive.

**Exemplu.** Se consideră populația R.S.R la data de 1 iulie 1975, repartizată pe grupe de vîrstă, cerîndu-se să se calculeze media aritmetică, mediana și modulul.

Tabla 6.2

Grupa de vîrstă	Numărul locuitorilor
0 - 4 ani	1 927 822
5 - 9 ani	2 020 409
10 - 14 ani	1 412 573
15 - 19 ani	1 784 699
20 - 24 ani	1 794 610
25 - 29 ani	1 489 519
30 - 34 ani	1 270 273
35 - 39 ani	1 553 968
40 - 44 ani	1 528 461
45 - 49 ani	1 454 335
50 - 54 ani	1 263 529
55 - 59 ani	714 528
60 - 64 ani	990 806
65 - 69 ani	832 819
70 - 74 ani	606 329
75 - 79 ani	352 088
80 - 84 ani	166 187
Peste 85 ani	82 848

**Rezolvare.** Vom calcula mai întâi media aritmetică. În acest scop pentru fiecare grupă de vîrstă vom alege o singură vîrstă. Astfel, pentru grupa 0—4 ani, vom alege 2 ani, pentru 5—9 ani vom alege 7 ani etc. Pentru ultima grupă, cei în vîrstă mai mare de 85 ani alegem vîrsta de 90 ani.

Vom întocmi următorul tabel

$x$	$f$	$\Sigma f$	$xf$
2	1 927 822	1 927 822	3 855 644
7	2 020 409	3 948 231	14 142 863
12	1 412 573	5 360 304	16 950 876
17	1 784 699	7 145 503	30 339 883
22	1 794 610	8 940 113	39 481 420
27	1 489 519	10 429 632	40 217 043
32	1 270 273	11 699 905	40 648 736
37	1 553 668	13 253 873	57 485 710
42	1 528 461	14 782 334	67 195 362
47	1 454 335	16 236 669	68 353 745
52	1 263 529	17 500 198	65 703 508
57	714 528	18 214 726	40 728 096
62	990 806	19 205 532	61 429 972
67	832 819	20 038 351	55 798 873
72	606 329	20 644 680	43 655 688
77	352 088	20 996 768	27 110 776
82	166 187	21 162 955	13 627 334
90	82 148	21 245 103	7 393 320
			691 118 855

Media aritmetică este dată de raportul

$$\frac{691\,118\,855}{21\,245\,103} = 32,53.$$

Pentru calculul mediane, vom calcula mai întâi raportul

$$\frac{21\,245\,103}{2} = 10\,622\,551$$

care ne dă jumătate din numărul locuitorilor țării.

Din tabloul de mai sus, obținem datele

27	10 429 632
$x$	10 622 551
32	11 699 905

Trebuie să avem prin interpolare

$$\frac{x - 27}{32 - 27} = \frac{10\,622\,551 - 10\,429\,632}{11\,699\,905 - 10\,429\,632}$$

Rezultă

$$x = 27,76.$$

Modulul corespunde lui  $x = 7$ .

Prin urmare, vârsta medie a populației R.S.R. la 1 Iulie, 1975 este de 33 ani, iar jumătate din locuitorii țării sînt mai mici de 28 ani.

Să considerăm din nou variabila statistică sau populația

$$X: \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_m \\ f_1, f_2, \dots, f_m \end{pmatrix}$$

unde  $f_i (i = 1, 2, \dots, m)$  sînt frecvențe relative

$$f_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m f_i = 1.$$

Fie  $\bar{x}_m$  media aritmetică

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m f_i a_i.$$

Diferențele  $a_i - \bar{x}, i = 1, 2, \dots, m$ , poartă numele de abateri.

Expresia :

$$m_r = \sum f_i (a_i - \bar{x})^r, \quad r = 1, 2, \dots$$

poartă numele de moment centrat de ordinul  $r$ .

Se vede imediat că :

$$m_1 = M(X - \bar{x}) = M(X) - \bar{x} = 0.$$

Între momentele centrate și momentele obișnuite există o relație simplă. Într-adevăr, putem scrie

$$\begin{aligned} m_r &= M(X - \bar{x})^r = M(X^r - C_1^r \bar{x} X^{r-1} + C_2^r \bar{x}^2 X^{r-2} + \dots + (-1)^r \bar{x}^r) = \\ &= M_r - C_1^r \bar{x} M_{r-1} + C_2^r \bar{x}^2 M_{r-2} + \dots + (-1)^r \bar{x}^r \end{aligned}$$

ținînd seamă de faptul că valoarea medie a unei sume de variabile în număr finit este egală cu suma valorilor medii ale variabilelor.

Ne vom ocupa acum de mediile de împrăștiere.

Cea mai întrebuițată medie de împrăștiere este dispersia, care coincide cu momentul centrat de ordinul al doilea.

Dispersia se notează prin  $\sigma^2$  sau  $D^2(X)$ .

$$\sigma = \sqrt{m_2}$$

$\sigma$  mai poartă numele și de abatere medie pătratică.

În prima parte a lucrării, cînd am studiat dispersia pentru variabile aleatoare, am arătat unele proprietăți, care se păstrează fără modificare și pentru populațiile statistice. Astfel, dispersia este independentă de origina în raport cu care evaluăm datele. Cea mai mică valoare o ia cînd originea coincide cu valoarea medie.

Teorema lui Cebîșev, a cărei demonstrație am dat-o pentru variabile aleatoare, ne arată pentru care motiv putem considera dispersia ca un indice al împrăștierei.

Coeficientul de variabilitate este dat de expresia

$$100 \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

unde  $\sigma^2$  este dispersia și  $\bar{x}$  media aritmetică. El a fost introdus de statisticianul K. Pearson pentru a compara împrăștierea mai multor variabile.

Un alt indice de împrăștiere este amplitudinea, adică diferența dintre cea mai mare și cea mai mică valoare a unei populații.

**Exemplu.** Dintr-o urnă conținând bile albe și negre într-o proporție necunoscută, s-au făcut extracții, punându-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. S-au executat serii de 100 extracții și rezultatele au fost următoarele :

Numărul seriilor	Numărul biletelor albe obținute în 100 extracții
1	43
1	45
3	47
4	48
6	49
9	50
7	51
5	52
3	53
2	55
1	58

Să se calculeze media și dispersia bilelor albe obținute în cele 42 serii de extracții.

**Rezolvare.** Se vede că s-au obținut 9 serii cu câte 50 bile albe, 6 serii cu câte 49 bile albe etc. Intocmim tabloul :

$x$	$f$	$xf$
1	43	43
1	46	46
3	47	141
4	48	192
6	49	294
9	50	450
7	51	357
5	52	260
3	53	159
2	55	110
1	58	58

Avem :

$$\Sigma x = 42, \quad \Sigma xf = 2110.$$

Media aritmetică este

$$m = \frac{\Sigma xf}{\Sigma x} = 50,24.$$

Calculul dispersiei nu prezintă dificultăți deosebite.  
Se obține

$$\sigma^2 = 6,82, \quad \sigma = 2,61.$$

### 3.3. REPARTIȚII TEORETICE ȘI EMPIRICE. AJUSTĂRI

Funcțiile definite pînă acum în matematică, exprimă cea mai strînsă legătură dintre două fenomene. Relația

$$y = f(t)$$

denotă că pentru fiecare  $t$  din intervalul de definiție al funcției găsim o valoare bine determinată a lui  $y$ .

De pildă, pentru legea căderii corpurilor în vid :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b \quad (1)$$

unde  $g$ ,  $a$ ,  $b$  sînt niște constante.

Funcția de mai sus este o funcție *teoretică*.

Dacă realizăm o experiență și măsurăm corespondența dintre valorile lui  $t$  și valorile lui  $y$ , obținem o funcție *empirică*, în care se întîlnesc abateri de la valorile calculate prin (1) datorită faptului că o experiență nu poate fi efectuată în condiții perfecte.

Experiențele conduc în general la funcții empirice.

Funcția empirică poate fi reprezentarea aproximată a unei funcții teoretice definite în mod matematic.

Dar în natură găsim moduri de dependențe mult mai variate decît cele date de funcțiile matematice. Să considerăm astfel, dependența dintre înălțimea și greutatea unei persoane. O asemenea dependență există, căci oricine va spune despre un individ care are 1,60 m înălțime și 90 kg că este obez și despre un individ de 1,90 m și 60 kg că este slab, adică va aprecia că ambii indivizi ies din limitele situației normale. De asemenea, fără să facă măsurătorile respective nimeni nu va putea afirma cu precizie ce greutate are un anumit individ 1,75 m înălțime. Legătura dintre greutatea și înălțimea unui individ reprezintă o lege stochastică.

Există fără îndoială o corespondență între aceste două caracteristici referitoare la același individ, însă această corespondență iese din cadrul funcțiilor studiate în liceu.

Definirea legilor stochastice se face cu ajutorul noțiunii de probabilitate.

Repartițiile normale, binomiale, hipergeometrice, etc. pe care le-am întîlnit în teoria probabilităților sînt exemple de repartiții de natură stochastică.

Repartițiile empirice prezintă adesea neregularități datorate unor cauze necunoscute sau hazardului. Înlăturarea acestor neregularități se face prin operația de ajustare a datelor statistice.

Să presupunem că avem  $n$  puncte:

$$A_1(t_1, y_1), A_2(t_2, y_2), \dots, A_n(t_n, y_n) \quad (2)$$

corespunzătoare absciselor  $t_1, t_2, \dots, t_n$  și ordonatelor coresponzătoare  $y_1, y_2, \dots, y_n$  în sistemul de axe rectangulare  $Ox, Oy$ .

Punctele  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  pot fi de exemplu elementele unei serii statistice, în care abscisele măsoară diferite momente, iar ordonatele frecvențele fenomenului considerat.

Punctele  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  se dispun cu o oarecare neregularitate întâlnită la aproape toate seriile statistice. Scopul ajustării este să găsim o curbă care se apropie cel mai mult de punctele date  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  și care, din această cauză, să putem admite că ne poate indica direcția de dezvoltare a fenomenului respectiv.

Să considerăm punctele (2) și dreapta :

$$y = a + bt.$$

Vom determina coeficienții necunoscuți  $a$  și  $b$ , astfel încât expresia

$$\sum_{i=1}^n (a + bt_i - y_i)^2 = \text{minim.} \quad (3)$$

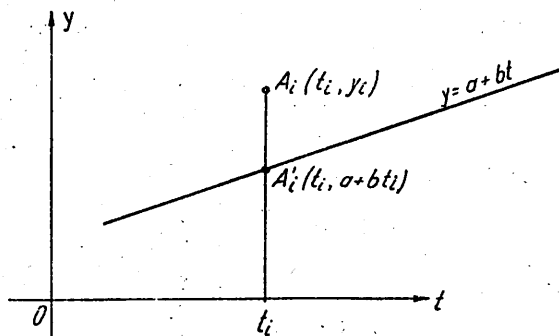


Fig. 3.1

Din figura 3.1 reiese imediat semnificația acestei metode. Fie  $A_i(t_i, y_i)$  un punct al seriei statistice date. Paralela  $Oy$ , care trece prin  $A_i$  taie dreapta  $y = a + bt$  în punctul  $A'_i(t_i, a + bt_i)$ .

Relația (3) ne arată că trebuie să determinăm pe  $a$  și  $b$ , astfel încât să avem :

$$\sum_{i=1}^n \overline{A_i A'_i}^2 = \text{minim.}$$

Suma pătratelor diferențelor dintre ordonatele teoretice și ordonatele empirice trebuie să fie minimă. Din această cauză procedeul de mai sus poartă numele de „metoda celor mai mici pătrate”. Metoda celor mai mici pătrate se datorește matematicianului K. F. Gauss.

Pentru determinarea lui  $a$  și  $b$ , vom considera funcția

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n (a + bt_i - y_i)^2.$$

și vom rezolva ecuațiile :

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0.$$

Obținem astfel sistemul

$$\begin{aligned} na + b\sum t_i &= \sum y_i \\ a\sum t_i + b\sum t_i^2 &= \sum y_i t_i \end{aligned} \quad (4)$$

unde indicele de însumare  $i$  ia valorile de la 1 la  $n$  inclusiv. Sistemul (4) se simplifică dacă printr-o schimbare a originii obținem alte coordonate  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), astfel încît

$$\sum t_i = 0.$$

Din sistemul (4), astfel transformat, deducem imediat

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum y_i}{n}, \\ b &= \frac{\sum t_i y_i}{\sum t_i^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ecuatiile (4) sau (5) poartă numele de ecuații normale.

*Exemplu.* Se consideră următorul tablou, care ne dă producția de sodă calcinată a R.S.R. pe anii 1951—1959 :

Anul	Producția de sodă calcinată (în mii tone)
1951	49,5
1952	50,8
1953	55,1
1954	42,0
1955	51,0
1956	50,6
1957	67,4
1958	83,3
1959	106,1

Se cere să se ajusteze aceste date printr-o dreaptă prin metoda celor mai mici pătrate.

*Rezolvare.* Alegem originea  $t' = 0$  în anul 1955.

Obținem următorul tablou :

$t'$	$y$	$t'y$	$t'^2$
-4	49,5	-198,0	16
-3	50,8	-152,4	9
-2	55,1	-110,2	4
-1	42,0	-42,0	1
0	51,0	0	0
1	50,6	50,6	1
2	67,4	134,8	4
3	83,3	249,9	9
4	106,1	424,4	16
	<u>555,8</u>	<u>357,1</u>	<u>60</u>

Relațiile (5) ne dau :

$$a = \frac{555,8}{9} = 61,75 ;$$

$$b = \frac{357,1}{60} = 5,95.$$

Obținem dreapta :

$$y = 61,75 + 5,95t.$$

Datele ajustate sînt :

Ani	Date empirice	Date ajustate
1951	49,5	37,90
1952	50,8	43,90
1953	55,1	49,90
1954	42,0	55,80
1955	51,0	61,80
1956	50,6	67,70
1957	67,4	73,70
1958	83,3	79,60
1959	106,1	85,50

Procedeele de ajustare printr-o dreaptă sînt cazuri particulare de ajustare parabolică :

$$y = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$$

Ecuțiile pentru determinarea coeficienților  $a_0, a_1, \dots, a_n$  se obțin din condiția :

$$\sum (a_0 + a_1t_i + a_2t_i^2 + \dots + a_nt_i^n - y_i)^2 = \text{minim.} \quad (6)$$

În cazul unei ajustări parabolice de gradul al doilea

$$y = a + bt + ct^2$$

se obțin ecuațiile normale :

$$\begin{aligned} na + b\sum t + c\sum t^2 &= \sum y, \\ a\sum t + b\sum t^2 + c\sum t^3 &= \sum ty, \\ a\sum t^2 + b\sum t^3 + c\sum t^4 &= \sum t^2y, \end{aligned} \quad (7)$$

unde am însemnat pentru simplificare

$$\sum t = \sum_i t_i$$

$$\sum ty = \sum_i t_i y_i, \text{ etc.}$$

Dacă ne alegem astfel axa  $Oy$ , încît originea să cadă în mijlocul seriei, iar punctul  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sînt luate simetrice față de origine, rezultă

$$\sum t = 0, \quad \sum t^3 = 0.$$

Sistemul de ecuații normale (7) devine atunci :

$$na + c\Sigma t^2 = \Sigma y,$$

$$b\Sigma t^2 = \Sigma ty,$$

$$a\Sigma t^2 + c\Sigma t^4 = \Sigma t^2 y.$$

Rezolvarea acestui sistem ne dă:

$$a = \frac{\Sigma t^2 \Sigma y - \Sigma t^2 \Sigma t^2 y}{n\Sigma t^4 - (\Sigma t^2)^2},$$

$$b = \frac{\Sigma ty}{\Sigma t^2},$$

$$c = \frac{n\Sigma t^2 y - \Sigma y \Sigma t^2}{n\Sigma t^4 - (\Sigma t^2)^2}.$$

**Exemplu.** Să considerăm datele din exemplul precedent și se cere să fie ajustate cu o parabolă de gradul al doilea folosind metoda celor mai mici pătrate.

**Rezolvare.** Vom așeza datele în modul următor :

Ant	t	t <sup>2</sup>	t <sup>4</sup>	y	ty	t <sup>2</sup> y
1951	-4	16	256	49,5	-198,0	792,0
1952	-3	9	81	50,8	-152,4	457,2
1953	-2	4	16	55,1	-110,2	220,4
1954	-1	1	1	42,0	-42,0	42,0
1955	0	0	0	51,0	0	0
1956	1	1	1	50,6	50,6	50,6
1957	2	4	16	67,4	134,8	269,6
1958	3	9	81	83,3	249,9	749,7
1959	4	16	256	106,1	424,4	1 697,6
		60	708	555,8	357,1	4 279,1

Aplicând formulele (8) obținem :

$$a = \frac{708 \cdot 555,8 - 60 \cdot 4 279,1}{9 \cdot 708 - 60^2} = 49,336;$$

$$b = \frac{357,1}{60} = 5,951;$$

$$c = \frac{9 \cdot 4 279,1 - 60 \cdot 555,8}{9 \cdot 708 - 60^2} = 1,863.$$

Curba de ajustare este :

$$y = 49,37 + 5,951t + 1,863t^2.$$

Datele ajustate se obțin făcând pe t să ia valorile -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4

Am obținut deci următoarele rezultate :

Ani	Date brute	Date ajustate printr-o dreaptă	Date ajustate printr-o parabolă de gradul al doilea
	$y$	$y_1$	$y_2$
1951	49,5	37,90	55,4
1952	50,8	43,90	48,3
1953	55,1	49,90	44,9
1954	42,0	55,80	45,3
1955	51,0	61,80	49,3
1956	50,6	67,70	57,1
1957	67,4	73,70	68,7
1958	83,3	79,60	83,9
1959	106,1	85,50	102,9

Se pune în mod natural întrebarea care dintre cele două serii de rezultate obținute este mai favorabil.

Vom avea mai departe, calculând pătratul diferențelor dintre valorile teoretice și valorile ajustate :

Ani	$(y - y_1)^2$	$(y - y_2)^2$
1951	134,56	134,81
1952	47,61	6,25
1953	27,04	104,04
1954	190,44	10,89
1955	116,44	2,89
1956	292,41	4,25
1957	39,69	1,69
1958	13,69	0,36
1959	424,36	10,24
	<u>1 286,44</u>	<u>213,42</u>

Se constată că suma pătratelor abaterilor este mai mică pentru ajustarea parabolică. Este un rezultat valabil numai pentru seria considerată. În cazul general, nu se poate afirma că ajustarea cu o parabolă de gradul al doilea dă rezultate mai bune decât o dreaptă. Dealtminteri, se poate vedea numai dintr-o simplă examinare a datelor că ajustarea parabolică duce în acest caz la rezultate mai bune, deoarece în afară de anii 1951 și 1952 datele ajustate sînt foarte apropiate de datele inițiale. În aplicațiile statistice se întîlnesc și alte tipuri de curbe decât cele polinomiale. De exemplu, se folosesc curbele exponențiale.

Dacă vom considera curba dată de relația

$$y = ab^t$$

prin aplicarea logaritmulor ajungem la

$$\log y = \log a + t \log b \quad (10)$$

care de data aceasta este un polinom de gradul întâi în  $t$  și deci putem aplica metoda celor mai mici pătrate.

Vom aplica această metodă la exemplele anterioare la care am aplicat metoda celor mai mici pătrate, folosind o linie dreaptă și un polinom de gradul al doilea pentru ajustarea datelor privind producția de sodă calcinată din R.S.R. pe ani 1951—1959.

„Datele le așezăm în tabloul de mai jos :

Ani	$y_t$	$t_t$	$t_t^2$	$\log y_t$	$t_t \log t_t$
1951	49,5	-4	16	1,69460	-6,77842
1952	50,8	-3	9	1,70586	-5,11759
1953	55,1	-2	4	1,74115	-3,48230
1954	42,0	-1	1	1,62324	-1,62324
1955	51,0	0	0	1,70757	0
1956	50,6	1	1	1,70415	1,70415
1957	67,4	2	4	1,82866	3,65732
1958	83,3	3	9	1,92064	5,76193
1959	106,1	4	16	2,02571	8,10286

Din formula (10) obținem logaritmii datelor ajustate și apoi datele ajustate :

Ani	Date brute	Logaritmii datelor ajustate	Date ajustate
1951	49,5	1,6240884	42,1
1952	40,8	1,6611668	45,8
1953	55,1	1,6982452	49,9
1954	42,0	1,7353236	54,4
1955	51,0	1,7724020	59,2
1956	50,6	1,8094804	64,5
1957	67,4	1,8465588	73,2
1958	83,3	1,8836372	76,5
1959	106,1	1,9207156	83,2

„Datele ajustate prin metoda exponențială au aceeași medie geometrică cu datele inițiale. Într-adevăr :

$$\sqrt[9]{49,5 \cdot 50,8 \cdot 55,1 \cdot 42,0 \cdot 51,0 \cdot 50,6 \cdot 67,4 \cdot 83,3 \cdot 106,1} = 59,2 ;$$

$$\sqrt[9]{42,1 \cdot 45,8 \cdot 49,9 \cdot 54,4 \cdot 59,2 \cdot 64,5 \cdot 73,2 \cdot 76,5 \cdot 83,2} = 59,2.$$

### 3.4. CORELAȚIE. REGRESIE

„Legătura dintre două sau mai multe variabile se numește corelație. Desigur această legătură poate îmbrățișa cele mai felurite forme. Dacă avem două variabile  $x$  și  $y$ , cea mai strînsă legătură dintre ele constă din relația :

$$y = f(x) \quad (1)$$

unde  $f(x)$  este o funcție de  $x$ , definită în sensul analizei matematice. Înseamnă că la o valoare dată a lui  $x$  corespunde o valoare bine determinată a lui  $y$ .  $x$  ne dă o informație despre  $y$  și anume informația maximă.

Să considerăm acum următorul tablou în care dăm notele la matematică și la limba română luate de 12 elevi dintr-o clasă.

Nr. de ordine al elevilor	Nota la matematică	Nota la limba română
1	5	5
2	5	6
3	6	7
4	6	6
5	6	6
6	7	8
7	8	8
8	9	8
9	9	8
10	9	9
11	9	9
12	10	10

Putem așeza acest tablou și sub altă formă. Vom întocmi un tablou cu două intrări. Pe linia absciselor vom așeza notele la matematică, iar pe linia ordonatelor notele la limba română. Vom nota printr-o linie existența unui

	5	6	7	8	9	10	$m_y$
10							10
9							8,50
8							8
7							8
6							6,33
5							5,5
$m_x$	5	5,66	6	8,25	9	10	

Fig. 3.2

elev care ia notele cuprinse în pătratul respectiv. Elevul Nr. 1 se găsește în pătratul (5,5). Un astfel de tablou poartă numele de *tablou de corelație*.

Să observăm că în general, cu cât cresc notele la matematică, cresc și la limba română. Vom spune că între aceste două variabile există o *corelație pozitivă*. Cum liniile din interiorul tabloului de corelație se grupează în jurul unei linii (care este una din diagonalele pătratului din figura 2) se poate afirma că avem de a face și cu o corelație liniară.

Și în acest caz una din variabile dă o informație asupra celeilalte. Numai că în acest caz, informația nu mai este atât de precisă ca în cazul relației (1).

În prima linie am așezat valorile  $m_x$ , care arată media valorilor luate la limba română de elevi care au luat nota  $x$  la matematică. În ultima coloană am așezat mediile  $m_y$  a notelor luate la matematică de elevii care au luat nota  $y$  la limba română. Să reprezentăm grafic pe  $m_x$  în raport cu  $x$  și pe  $m_y$  în raport cu  $y$ .

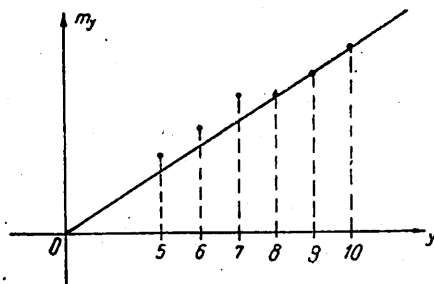


Fig. 3.3

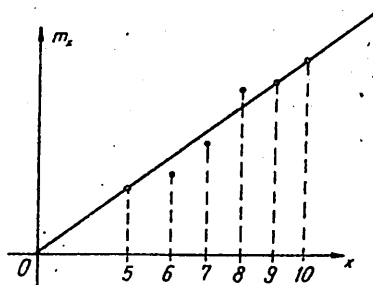


Fig. 3.4

Funcțiile  $m_x$  și  $m_y$  poartă numele de *funcții de regresie*. Atât în figura 3.3, cât și în figura 3.4, observăm că valorile funcțiilor de regresie se grupează în jurul primei bisectoare, adică a unei linii drepte. Sîntem în prezența unor *regresii lineare*.

În figura 3.3 ni se dă regresia lui  $y$  asupra lui  $x$ , pe cînd în figura 3.4 regresia lui  $y$  asupra lui  $x$ .

Vom preciza aceste idei considerînd în plan un vector  $V(\xi, \eta)$  unde  $\xi$  și  $\eta$  sînt două variabile aleatoare.

În partea întîii, am văzut că funcția de repartiție a vectorului  $V(\xi, \eta)$  pe care o notăm prin  $F(x, y)$  se bucură de mai multe proprietăți. Prin definiție :

$$F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y),$$

$$F(x, y) = 1, \quad \text{pentru } x = \infty, y = \infty;$$

$$F(x, y) = 0 \quad \text{pentru } x = -\infty, y = -\infty.$$

Din punct de vedere statistic, prezintă interes cazul cind vectorul  $V(\xi, \eta)$  ia un număr finit de valori :

$$v_{jk} = v_{jk}(a_j, b_k), \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

unde vectorul  $v_{jk}$  are componentele  $a_j, b_k$ . Notăm :

$$P(V(\xi, \eta) = v_{jk}) = p_{jk}.$$

Evident

$$p_{jk} \geq 0$$

$$\sum_j \sum_k p_{jk} = 1$$

Tabloul 1

$x \backslash y$	$b_1$	$b_2$		$b_n$	
$a_1$	$p_{11}$	$p_{12}$		$p_{1n}$	$p_1$
$a_2$	$p_{21}$	$p_{22}$		$p_{2n}$	$p_2$
$a_m$	$p_{m1}$	$p_{m2}$		$p_{mn}$	$p_m$
	$P_{.1}$	$P_{.2}$		$P_{.n}$	

Tabloul I poartă numele de tablou de corelație. În tablou sînt  $m$  linii și  $n$  coloane. Am notat :

$$\sum_k p_{jk} = p_j, \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_j p_{jk} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_j p_j = 1, \quad \sum_k p_k = 1.$$

$p_j$  și  $p_k$  poartă numele de *probabilități marginale*.  $p_j$  reprezintă probabilitatea ca  $\xi = a_j$ , oricare ar fi valoarea luată de componenta  $\eta$ , iar  $p_k$  probabilitatea ca  $\eta = b_k$ , oricare ar fi valoarea luată de  $\xi$ .  
Putem acum calcula și probabilitățile condiționate ale lui  $\xi$  în raport cu  $\eta$  sau invers. Avem :

$$P(\xi = a_i / \eta = b_j) = \frac{P(\xi = a_i, \eta = b_j)}{P(\eta = b_j)} = \frac{P_{ij}}{p_{.j}}$$

$$P(\eta = b_i / \xi = a_j) = \frac{P(\xi = a_j, \eta = b_i)}{P(\xi = a_j)} = \frac{P_{ij}}{p_j}$$

Dacă evenimentele  $\xi$ ,  $\eta$  sînt independente :

$$P(\xi = a_i, \eta = b_j) = P(\xi = a_i) \cdot P(\eta = b_j) = p_i \cdot p_j$$

sau

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j \quad (1)$$

Invers, dacă relațiile (1) au loc, oricare ar fi  $i$  și  $j$ , rezultă că cele două componente  $\xi$ ,  $\eta$  sînt independente.

Valorile medii pentru variabilele aleatoare bidimensionale se definesc în același mod ca și valorile medii pentru variabilele unidimensionale. Vom nota :

$$M_{rs} = \sum_j \sum_k p_{jk} a_j^r b_k^s$$

Rezultă :

$$M_{10} = \sum_j \sum_k p_{jk} a_j = \sum_j a_j \sum_k p_{jk} = \sum_j p_j \cdot a_j,$$

$$M_{01} = \sum_j \sum_k p_{jk} b_k.$$

Pentru simplificare notăm :

$$M_{10} = m_1, \quad M_{01} = m_2.$$

Punctul din plan avînd coordonatele  $(m_1, m_2)$  poartă numele de centru de greutate. El joacă același rol ca și media aritmetică pentru variabilele unidimensionale.

Momentele de ordinul al doilea sînt :

$$M_{20} = \sum_j \sum_k p_{jk} a_j^2 = \sum_j p_j \cdot a_j^2; \quad M_{11} = \sum_j \sum_k p_{jk} a_j b_k;$$

$$M_{02} = \sum_j \sum_k p_{jk} b_k^2 = \sum_k p_k \cdot b_k^2.$$

Momentele centrate sînt :

$$m_{rs} = M[(\xi - m_1)^r (\eta - m_2)^s]; \quad m_{rs} = \sum_j \sum_k p_{jk} (a_j - m_1)^r (b_k - m_2)^s.$$

Pentru primele momente centrate avem :

$$m_{10} = \sum_j \sum_k p_{jk} (a_j - m_1) = 0; \quad m_{01} = \sum_j \sum_k p_{jk} (b_k - m_2) = 0,$$

$$m_{20} = \sum_j \sum_k p_{jk} (a_j - m_1)^2 = \sum_j p_j (a_j - m_1)^2; \quad m_{11} = \sum_j \sum_k p_{jk} (a_j - m_1) (b_k - m_2)$$

$$m_{02} = \sum_j \sum_k p_{jk} (b_k - m_2)^2 = \sum_k p_k (b_k - m_2)^2.$$

Aceste momente au denumiri consacrate în teoria probabilităților. Astfel,  $m_{20}$ , notat de cele mai multe ori și prin  $\sigma_1^2$ , reprezintă dispersia lui  $\xi$ ;  $m_{02}$ , notat prin  $\sigma_2^2$ , este dispersia lui  $\eta$ ;  $m_{11}$  este covarianța variabilelor  $\xi$  și  $\eta$ .

Revenim la noțiunea de regresie, introdusă la pag. 344.

Notăm prin

$$M(\xi/\eta = b_j)$$

valoarea medie a lui  $\xi$ , condiționată de  $\eta = b_j$ . La fel

$$M(\eta/\xi = a_j)$$

reprezintă valoarea medie a lui  $\eta$ , condiționată de  $\xi = a_j$ .

Cu notațiile pe care le-am introdus

$$M(\xi/\eta = b_j) = \sum_i a_i P(\xi = a_i/\eta = b_j) = \frac{\sum p_{ij} a_i}{p_{.j}},$$

$$M(\eta/\xi = a_j) = \sum_j b_j P(\eta = b_j/\xi = a_j) = \frac{\sum p_{ij} b_j}{p_{.i}}.$$

Prima medie

$$M(\xi/\eta = b_j)$$

ne arată modul de comportare al variabilei  $\xi$ , atunci cînd  $\eta$  ia valoarea  $b_j$ , și anume care este media valorilor lui  $\xi$  pentru care  $\eta = b_j$ . Prin urmare, dacă vom considera toate valorile  $(a_i, b_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , iar  $b_j$  rămîne fix, diversele medii referitoare la  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , caracterizează modul de variație al variabilei  $\xi$  pentru  $\eta = b_j$  fixat. Dacă vrem să caracterizăm aceeași variație printr-o relație funcțională de forma :

$$\xi = \varphi(\eta)$$

este natural să determinăm pe  $\varphi$ , astfel încît

$$M_2(\xi - \varphi(b_j)/\eta = b_j) = \text{minim}$$

unde prin  $M_2$  am notat momentul de ordinul al doilea. Acest procedeu se întrebuițează însă rar.

De multe ori se caută să se exprime  $\eta$  linear în raport cu  $\xi$

$$\eta = \alpha\xi + \beta$$

astfel încît

$$M(\eta - \alpha\xi - \beta)^2 = \text{minim}$$

cînd parametrii  $\alpha$  și  $\beta$  variază. Însă :

$$M(\eta - \alpha\xi - \beta)^2 = \sum_i \sum_j p_{ij} (b_j - \alpha a_i - \beta)^2.$$

Derivînd în raport cu  $\alpha$  și  $\beta$  trebuie să avem

$$\sum_i \sum_j p_{ij} a_i (b_j - \alpha a_i - \beta) = 0,$$

$$\sum_i \sum_j p_{ij} (b_j - \alpha a_i - \beta) = 0$$

sau, în baza notațiilor introduse :

$$M_{11} - \alpha M_{20} - \beta m_1 = 0$$

$$m_2 - \alpha m_1 - \beta = 0.$$

Rezultă :

$$\alpha = \frac{M_{11} - m_1 m_2}{M_{20} - m_1^2},$$

$$\beta = \frac{m_2 M_{20} - m_1 M_{11}}{M_{20} - m_1^2}.$$

Însă :

$$M_{20} = \sigma_1^2 + m_1^2, \quad M_{20} = \sigma_2^2 + m_2^2.$$

Valorile lui  $\alpha$  și  $\beta$ , devin

$$\alpha = \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \beta = \frac{m_2\sigma_1 - m_1\rho\sigma_2}{\sigma_1},$$

unde

$$M_{11} = \rho\sigma_1\sigma_2.$$

Dreapta

$$y = \alpha x + \beta$$

sau cu valorile de mai sus ale lui  $\alpha$  și  $\beta$

$$y - m_2 = \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1} (x - m_1) \quad (2)$$

se bucură de proprietatea că valoarea medie a sumei pătratelor distanțelor de la punctele repartiției la dreapta de regresie, măsurată pe ordonatele punctelor, este minimă. În mod similar, găsim dreapta de regresie

$$y - m_2 = \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2} (x - m_1) \quad (3)$$

pentru care

$$M(x - \alpha y - \beta)^2$$

este minimă în raport cu  $\alpha$  și  $\beta$ .

Observăm că cele două drepte de regresie trec prin centrul de greutate  $(m_1, m_2)$  al repartiției.

În general, dreptele de regresie sînt diferite, în afară de cazul cînd

$$\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}$$

sau

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

Prin urmare, cele două drepte de regresie coincid cînd dispersiile  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  sînt egale.

Putem calcula și minimumul atins :

$$M \left[ y - m_2 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2} (x - m_1) \right]^2 = M(y - m_2)^2 - 2 \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1} M(x - m_1)(y - m_2) + \frac{\rho^2\sigma_2}{\sigma_1^2} M(x - m_1)^2 = \sigma_2^2 - \frac{2\rho\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \rho\sigma_2 \sigma_2 + \frac{\rho^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sigma_1^2 = \sigma_2^2(1 - \rho^2), \quad (\rho \leq 1).$$

La fel :

$$M \left[ (y - m_2 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2} (x - m_1)) \right]^2 = \sigma_2^2(1 - \rho^2), \quad (\rho \leq 1).$$

În formulele de mai sus am notat

$$\rho = \frac{M(x - m_1)(y - m_2)}{\sqrt{M(x - m_1)^2 \cdot M(y - m_2)^2}} \quad (4)$$

poartă numele de *coeficient de corelație*. Avem întotdeauna

$$-1 \leq \rho \leq 1.$$

În adevăr, să considerăm următoarea formă pătratică pozitiv definită

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j p_{ij} [\lambda(a_i - m_1) + \mu(b_j - m_2)]^2 &= \lambda^2 \sum_i \sum_j (a_i - m_1)^2 + \\ &+ 2\lambda\mu \sum_i \sum_j p_{ij} (a_i - m_1)(b_j - m_2) + \mu^2 \sum_i \sum_j p_{ij} (b_j - m_2)^2 = \\ &= \sigma_1^2 \lambda^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \lambda \mu + \mu^2 \sigma_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Discriminantul acestei forme pătratice pozitiv definită

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2) \geq 0$$

este pozitiv. Deci :

$$\rho^2 \leq 1; \quad -1 \leq \rho \leq 1$$

În cazul cînd  $\rho = \pm 1$ , discriminantul formei pătratice de mai sus este nul. Aceasta înseamnă că există doi parametri  $\lambda$  și  $\mu$ , astfel ca

$$\lambda(a_i - m_1) + \mu(b_j - m_2) = 0$$

oricare ar fi  $i$  și  $j$ . ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Prin urmare, toate punctele repartiției se găsesc pe o dreaptă

$$\lambda(x - m_1) + \mu(y - m_2) = 0.$$

Se constată ușor că dreapta aceasta coincide cu dreptele de regresie, care coincid și ele, dacă  $\rho = \pm 1$ .

Tragem deci concluzia, că dacă  $\rho = \pm 1$ , există între variabilele  $\xi$  și  $\eta$ , o dependență lineară. Dacă  $\rho = 1$ , există o dependență lineară pozitivă, adică  $\xi$  crește, dacă  $\eta$  crește. Dacă  $\rho = -1$ , avem o dependență lineară negativă,  $\xi$  crește cînd  $\eta$  descrește.

Să mai observăm că dacă variabilele  $\xi$  și  $\eta$  sînt independente, coeficientul de corelație este nul. Aceasta rezultă din

$$M(x - m_1)(y - m_2) = M(x - m_1) M(y - m_2) = 0.$$

Proprietatea inversă nu are însă loc. Dacă  $\rho = 0$ , nu rezultă că variabilele  $\xi$  și  $\eta$  sînt independente. Coeficientul de corelație funcționează însă ca un indicator al relației între  $\xi$  și  $\eta$ . Cu cît este în valoare absolută mai mare de 1, cu atît există o legătură mai strînsă între  $\xi$  și  $\eta$ .

Dacă  $m = n$ , Acad. O. Onicescu a introdus noțiunea de coeficient de corelație informațional :

$$\psi = \frac{\sum_i p_i \cdot p \cdot i}{\sqrt{\sum_i p_i^2 \cdot \sum p^2 \cdot i}} \quad (5)$$

Dacă  $\psi = 1$  avem, prin ridicare la pătrat

$$(\sum_i p_i \cdot p \cdot i)^2 = \sum_i p_i^2 \cdot \sum_i p^2 \cdot i.$$

Însă :

$$(\sum_i p_i \cdot p \cdot i)^2 - \sum_i p_i^2 \cdot \sum_i p^2 \cdot i = \sum_j \sum_j (p_i \cdot p \cdot j - p_j \cdot p \cdot i)^2 = 0$$

Prin urmare trebuie să avem :

$$p_i \cdot p_j - p_j \cdot p_i = 0$$

sau

$$\frac{p_i}{p_i} = \frac{p_j}{p_j} = \frac{\sum p_i}{\sum p_i} = 1.$$

Prin urmare

$$p_i = p_i$$

oricare ar fi  $i = 1, 2, \dots, m$

Se vede că în acest caz probabilitățile marginale sînt egale. Există prin urmare o strînsă legătură între  $\xi$  și  $\eta$ . Probabilitățile evenimentelor  $\xi = a_i$  și  $\eta = b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) sînt egale. Cea mai mică valoare a lui  $\psi$  este zero. În acest caz :

$$\sum p_i \cdot p_i = 0$$

Dacă  $p_i \neq 0$ , rezultă  $p_i = 0$ . Prin urmare, valorile  $a_i$  și  $b_i$  nu pot fi luate în același timp.

**Exemplu.** În tabloul de corelație de mai jos s-a trecut rezultatul mai multor experiențe privind lungimea de rupere și gradul de mărime S.R. pentru hîrtia de ziar. (N. Rancu, L. Tövissi).

$x$ $y$	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	Total
3 200—3 400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	5
3 000—3 200	—	—	—	—	—	—	—	—	1	7	8
2 800—3 000	—	—	—	—	—	—	—	—	7	3	10
2 600—2 800	—	—	—	—	—	—	—	3	5	—	8
2 400—2 600	—	—	—	—	—	—	1	8	2	—	11
2 200—2 400	—	—	—	—	—	—	6	4	—	—	10
2 000—2 200	—	—	—	—	—	8	8	—	—	—	16
1 800—2 000	—	—	—	1	11	7	—	—	—	—	19
1 600—1 800	5	5	9	14	4	—	—	—	—	—	37
1 400—1 600	10	10	6	—	—	—	—	—	—	—	26
											150

! Să se determine curba de regresie cea mai indicată.

**Rezolvare.** Am considerat pînă acum curbele de regresie formate din două linii drepte. Dar nu întotdeauna regresia liniară este cea mai indicată. Exemplul de față confirmă acest lucru. Dacă reprezentăm grafic datele din tabloul de corelație, constatăm că cea mai indicată curbă de regresie este o parabolă de gradul al doilea :

$$y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2.$$

Va trebui deci, să se determine coeficienții  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Punînd

$$\bar{y}_i = a_0 x_i^2 + a_1 x_i + a_2$$

și condiția pătratelor minime,

$$\sum (y_i - \bar{y}_i)^2 = \text{minim},$$

ajungem la următoarea problemă: să se determine parametrii  $a_0, a_1, a_2$  astfel ca expresia

$$\Sigma(y_i - a_0x_i^2 - a_1x_i - a_2)^2 \quad (6)$$

să fie minimă.

Se știe că o sumă este minimă atunci când derivatele în raport cu necunoscutele sînt egale cu zero. În expresia de mai sus sînt trei necunoscute  $a_0, a_1, a_2$ . Calculînd derivatele funcției în raport cu aceste necunoscute și egalîndu-le cu zero, se obțin următoarele trei ecuații cu trei necunoscute:

$$\begin{aligned} a_0 \Sigma x_i^2 f_i + a_1 \Sigma x_i f_i + a_2 \Sigma f_i &= \Sigma \bar{y}_i f_i, \\ a_0 \Sigma x_i^3 f_i + a_1 \Sigma x_i^2 f_i + a_2 \Sigma x_i f_i &= \Sigma x_i \bar{y}_i f_i, \\ a_0 \Sigma x_i^4 f_i + a_1 \Sigma x_i^3 f_i + a_2 \Sigma x_i^2 f_i &= \Sigma x_i^2 \bar{y}_i f_i. \end{aligned} \quad (7)$$

În aceste ecuații  $x_i$  sînt variabile obținute pentru gradul de măcinare, iar  $f$  indică numărul probelor pentru care s-a obținut aceeași valoare a gradului de măcinare. Ecuațiile pe baza cărora se calculează coeficienții  $a_0, a_1, a_2$  se pot scrie direct fără a fi necesar să se calculeze derivatele parțiale. Valorile sumelor

$$\Sigma x_i f_i, \Sigma x_i^2 f_i, \Sigma x_i^3 f_i, \Sigma x_i^4 f_i \text{ și } \Sigma \bar{y}_i f_i, \Sigma x_i \bar{y}_i f_i, \Sigma x_i^2 \bar{y}_i f_i$$

se vor calcula cu ajutorul tabelului:

$x$	$x_i$	$\Sigma y_i$	$\bar{y}_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i \bar{y}_i$	$x_i^2 \bar{y}_i$
28-32	30	23505	1567	900	27000	810000	47010	1410300
33-37	35	23655	1577	1225	42875	1500625	55195	1931825
38-42	40	24390	1626	1600	64000	2560000	65040	2601600
43-47	45	25755	1717	2025	91125	4100625	77265	3476925
48-52	50	21765	1851	2500	125000	6250000	92550	4627500
53-57	55	30390	2026	3025	166375	9150625	111430	6128650
58-62	60	33730	2242	3600	216000	12960000	134520	8071200
63-67	65	37500	2500	4225	274625	17850625	162500	10562500
68-72	70	42000	2800	4900	343000	24010000	196000	13720000
73-77	75	47130	3142	5625	421875	31640625	235650	17673750
Total	525		21048	29625	1771875	110833125	1177160	70204250

Pentru ușurință, în loc să se folosească toate valorile lui  $x$  obținute într-un interval, se ia numai centrul intervalului. Centrele intervalelor sînt date în coloana 2 a tabelului. În acest caz, trebuie să se calculeze media lungimilor de rupere  $y_i$ . Aceasta înseamnă că în locul celor 15 puncte corespunzătoare unui interval al gradului de măcinare, va fi un singur punct a cărui poziție este determinată de o pereche de valori; centrul intervalului  $x_i$  și mediei lungimii de rupere ( $\bar{y}_i$ ). Valorile lui  $y_i$  sînt date în coloana 4 a tabelului și se obțin împărțind suma valorilor lui  $y_i$  corespunzătoare unui interval dat (datele coloanei 3 din tabel) la numărul valorilor lui  $x$  cuprinse în acest interval  $f_i$ . Se observă că fiecare interval conține 15 valori ale lui  $x$ , deci  $f_i$  egal cu 15 este o cantitate constantă, fapt care permite să se împartă cele trei ecuații ale sistemului (7) prin 15 și să se obțină sistemul:

$$\begin{aligned} a_0 \Sigma x_i^2 + a_1 \Sigma x_i + 10a_2 &= \Sigma \bar{y}_i, \\ a_0 \Sigma x_i^3 + a_1 \Sigma x_i^2 + a_2 \Sigma x_i &= \Sigma x_i \bar{y}_i, \\ a_0 \Sigma x_i^4 + a_1 \Sigma x_i^3 + a_2 \Sigma x_i^2 &= \Sigma x_i^2 \bar{y}_i. \end{aligned} \quad (8)$$

$\Sigma x_i, \Sigma x_i^2, \Sigma x_i^3, \Sigma x_i^4, \Sigma \bar{y}_i, \Sigma x_i \bar{y}_i, \Sigma x_i^2 y_i$ , se obțin făcând totalul coloanelor 2, 5, 6, 7, 4, 8 și 9 ale tabelului. Făcând înlocuirile în sistemul de ecuații (8), se obține

$$\begin{aligned} 29\ 625a_0 + 525a_1 + 10a_2 &= 21\ 048, \\ 1\ 771\ 875a_0 + 29\ 625a_1 + 525a_2 &= 1\ 177\ 160, \\ 110\ 833\ 125a_0 + 1\ 771\ 875a_1 + 29\ 625a_2 &= 70\ 204\ 250. \end{aligned} \quad (9)$$

Soluția acestui sistem este :

$$\begin{aligned} a_0 &= \begin{vmatrix} 21\ 048 & 525 & 10 \\ 1\ 171\ 160 & 29\ 625 & 525 \\ 70\ 204\ 250 & 1\ 771\ 875 & 29\ 625 \end{vmatrix} = 0,833; \\ a_1 &= \begin{vmatrix} 29\ 625 & 21\ 048 & 10 \\ 1\ 771\ 875 & 1\ 171\ 160 & 525 \\ 110\ 833\ 125 & 70\ 204\ 250 & 29\ 625 \end{vmatrix} = 52,5; \\ a_2 &= \begin{vmatrix} 29\ 625 & 525 & 21\ 048 \\ 1\ 771\ 875 & 29\ 625 & 1\ 171\ 160 \\ 110\ 833\ 125 & 1\ 771\ 875 & 70\ 204\ 250 \end{vmatrix} = 2\ 393,443. \end{aligned}$$

Înlocuind valorile lui  $a_0, a_1$  și  $a_2$ , se obține

$$y_i = 0,833x_i^2 - 52,5x_i + 2\ 393,443.$$

### 3.5. TEORIA SELECȚIEI

Am văzut că în statistică lucrăm cu diverse populații, alcătuite în general dintr-un număr mare de unități, care pot fi persoane, obiecte, informații, etc. Studiul direct al populațiilor statistice este de cele mai multe ori greu de realizat din cauza numărului mare de unități care le compun. De multe ori un asemenea studiu este imposibil, deoarece numărul unităților poate fi infinit.

Din cauza dificultății semnalate mai sus, din populație se extrage o *populație parțială*, din studiul căreia urmărim să cunoaștem anumite date privind populația totală. De exemplu, ne interesează o statistică privitoare la cititorii unei biblioteci. În acest scop alegem la întâmplare o populație parțială egală cu 5% din populația totală, care e prea numeroasă. Dacă am fi avut probabilitatea să studiem populația totală, am fi putut să determinăm în mod exact aceste date pe baza unor informații complete. Dar noi avem la îndemână numai informațiile obținute din populația parțială, deci informații incomplete. Procedeu de a obține date privind populația totală pornind de la

informații incomplete poartă numele de *inferență*. Statistica este domeniul matematicii care se ocupă cu studiul inferențelor. Prin metodele ei specifice, statistică, pe baza unei mulțimi de date extrase dintr-o populație parțială, își propune să tragă concluzii privind întreaga populație.

Populația parțială poartă numele de *selecție* sau *sondaj*. Uneori este numită *eșantion*. În această lucrare vom folosi termenul *selecție*.

Se pune întrebarea dacă putem într-adevăr dintr-o selecție (populație parțială) să tragem concluzii valabile privitoare la structura populației totale.

Vom observa de la început că datele obținute din selecție sînt *variabile*, schimbîndu-se de la selecție la selecție. Această variabilitate a datelor caracterizează teoria selecției și putem spune întreaga statistică.

Să considerăm doi indivizi  $A$  și  $B$ , cărora le măsurăm înălțimea corpului. Dacă după această măsurătoare, făcută exact, reiese că  $A$  este cu 2 cm mai înalt decît  $B$ , putem trage concluzia că afirmația că  $A$  este mai înalt decît  $B$  este adevărată.

Să considerăm acum două populații  $A$  și  $B$  formată fiecare din cîte 1000 indivizi. Dacă măsurăm talia tuturor indivizilor și facem media înălțimilor indivizilor din  $A$  și media înălțimilor indivizilor din  $B$ , faptul că media din  $A$  este mai mare cu 2 cm decît media din  $B$ , ne permite să afirmăm că în medie indivizii din  $A$  sînt mai înalți decît indivizii din  $B$ .

Dar să presupunem că nu avem timpul și mijloacele necesare pentru a măsura toți indivizii și ne mulțumim să facem cîte 100 de măsurători din fiecare populație. Am efectuat prin urmare două selecții din  $A$  și  $B$ . Dacă media aritmetică a înălțimilor din selecția  $A$  este mai mare decît media înălțimilor din selecția  $B$ , putem afirma că același lucru se întîmplă și pentru mediile corespunzătoare populațiilor  $A$  și  $B$ ?

Răspunsul trebuie să-l dăm cu prudență. Trebuie să ne gîndim la faptul că dacă repetăm procedeu și alegem alte selecții de cîte 100 de indivizi, mediile nu vor mai fi aceleași pentru că nici indivizii din fiecare selecție nu mai sînt aceiași. Și atunci ne putem întreba în mod firesc dacă și relațiile de mărime între mediile obținute în a doua experiență nu se schimbă. Este aproape evident că dacă aliniem indivizii din  $A$  în ordinea descrescătoare a înălțimilor și luăm primii o sută și facem aceeași operație și pentru  $B$ , dar luăm ultimii o sută, media selecției din  $A$  este de așteptat să fie mai mare decît media selecției din  $B$ . În orice caz, rezultatul experienței noastre nu mai este *semnificativ*. Pentru ca să putem trage o concluzie, trebuie să facem două selecții, alegînd indivizii la întîmplare. Va trebui, cu alte cuvinte, să ne îngrijim ca selecția pe care o alcătuim să fie *reprezentativă*, înțelegînd prin aceasta că structura ei este aproximativ aceeași ca a populației totale.

În general, se obține o selecție reprezentativă dacă *fiecare unitate din selecție este aleasă la întîmplare și dacă fiecare unitate din populație are aceeași probabilitate ca să fie aleasă în selecție*.

Asigurarea reprezentativității selecției trebuie să fie făcută cu multă grijă. Să presupunem că pentru o anchetă de opinie dintr-un oraș (de exemplu, asupra necesității înființării unei noi linii de transport în comun) se formează o selecție alegîndu-se la întîmplare 1 000 persoane din cartea abonaților la telefon. Este selecție reprezentativă? Evident că nu. Se va obține opinia cetățenilor care au telefon, diferînd poate de opinia cetățenilor din oraș, cuprinzînd și pe cei care nu au telefon. Dar dacă se cercetează o opinie referitoare la funcționarea telefoanelor, selecția de mai sus poate deveni reprezentativă.

Examinarea unui elev la lecție sau la un concurs este un exemplu de aplicarea teoriei selecției. Populația este formată din cunoștințele elevului. Profesorul selectează câteva dintre ele, asupra căreia interoghează. Dacă selecția este reprezentativă, atunci examenul își atinge scopul. În cazul contrar nu.

Teoria selecției se bazează pe legea numerelor mari. În primă parte a lucrării am demonstrat teorema lui Bernoulli: „Pentru repartiția binomială, notînd prin  $p$  probabilitatea unei probe și prin  $\alpha$  numărul de bile albe ieșite în  $n$  probe, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[ \left| \frac{\alpha}{n} - p \right| < \varepsilon \right] = 1, \quad \varepsilon > 0.$$

Aceasta înseamnă că frecvența

$$f_n = \frac{\alpha}{n}$$

pentru marile valori ale lui  $n$ , este foarte apropiată de probabilitatea  $p$ , întrucît probabilitatea ca ea să difere de  $p$  cu un număr  $\varepsilon$  oricît de mic, tinde către 1 cînd  $n$  crește nemărginit.

Dintr-o urnă, în care avem bile albe și negre, într-o proporție necunoscută, facem extracții succesive, punînd de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. Nu cunoaștem compoziția urnei și deci probabilitatea  $p$  ca dintr-o extracție să scoatem o bilă albă. Valoarea exactă a lui  $p$  n-o putem determina, însă putem s-o estimăm, efectuînd un număr de  $n$  extracții din urnă. Să admitem că din aceste  $n$  extracții, am obținut  $\alpha$  bile albe, adică frecvența

$$f = \frac{\alpha}{n}.$$

Se pune problema estimării lui  $p$  în funcție de  $f$ .

Am arătat în 1.7 că expresia

$$\xi = \frac{\frac{\alpha}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}; \quad q = 1 - p$$

tinde, pentru  $n \rightarrow \infty$ , către repartiția normală.

Din tabela anexă I, obținem :

$$P[-1,96 < \xi < 1,96] = 0,95;$$

$$P[-2,576 < \xi < 2,576] = 0,99.$$

Ținînd seama de valoarea lui  $\xi$ , formulele de mai sus, pot fi scrise sub forma

$$P \left[ \frac{\alpha}{n} - 1,96 \sqrt{\frac{pq}{n}} < p < \frac{\alpha}{n} + 1,96 \sqrt{\frac{pq}{n}} \right] = 0,95;$$

$$P \left[ \frac{\alpha}{n} - 2,58 \sqrt{\frac{pq}{n}} < p < \frac{\alpha}{n} + 2,58 \sqrt{\frac{pq}{n}} \right] = 0,99.$$

Din inegalitățile din paranteză, putem obține intervalul de variație a lui  $p$ , delimitat de  $\alpha$  și  $n$ . Să notăm :

$$p_0 = \frac{\alpha}{n}$$

Inegalitățile din paranteze pot fi scrise sub forma

$$|p - p_0| < \theta \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

unde  $\theta$  este 1,96 sau 2,58.

Trebuie să avem, ridicind la pătrat :

$$\left(1 + \frac{\theta^2}{n}\right)p^2 - 2\left(p_0 + \frac{\theta^2}{2n}\right)p + p_0^2 \leq 0$$

și deci :

$$p_1 < p < p_2,$$

unde  $p_1$  și  $p_2$  sînt rădăcinile ecuației.

$$\left(1 + \frac{\theta^2}{n}\right)p^2 - 2\left(p_0 + \frac{\theta^2}{2n}\right)p + p_0^2 = 0$$

însă

$$p_1 = \frac{p_0 + \frac{\theta^2}{n} + \theta \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \left(1 + \frac{\theta^2}{4np_0 q_0}\right)}}{1 + \frac{\theta^2}{n}}$$

$$p_2 = \frac{p_0 + \frac{\theta^2}{n} - \theta \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \left(1 + \frac{\theta^2}{4np_0 q_0}\right)}}{1 + \frac{\theta^2}{n}}$$

$$(q_0 = 1 - p_0)$$

Dacă  $p_0$  nu este foarte aproape de 1 sau 0, putem neglija termenii în  $\frac{\theta^2}{n}$ , care sînt foarte mici în raport cu ceilalți, care sînt de ordinul lui  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , și obținem :

$$p_1 = p_0 + \theta \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}; \quad p_2 = p_0 - \theta \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$$

Am obținut astfel un interval

$$p_0 - \theta \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} < p < p_0 + \theta \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} \quad (1)$$

în care  $p$  „se găsește” cu probabilitatea 0,95 pentru  $\theta = 1,96$  și cu probabilitatea 0,99 pentru  $\theta = 2,58$ .

Un asemenea interval poartă numele de *interval de încredere*.

Este reținut că pentru alte valori ale  $\theta$  se găsesc probabilitățile calculate în tabloul I.

Rezultatul obținut este valabil numai dacă  $np_0 < 10$  și  $nq_0 > 10$ , din cauza aproximațiilor pe care le-am făcut.

În general putem scrie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( -h < \frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}} < k \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (2)$$

formulă care ne permite folosirea tabelii I nu numai pentru pragul de 5% sau 1%, ca în formulele precedente (1).

De exemplu, pentru  $\theta = 3$ , rezultă din tabela I o probabilitate egală cu 0,997 pentru a avea intervalul de încredere :

$$p_0 - 3 \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} < p < p_0 + 3 \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} \quad (3)$$

Deci, prin aplicarea formulei (3) lucrăm cu un prag de exactitate de 3% adică numai în 3 cazuri dintr-o mie, inegalitățile (3) nu sînt satisfăcute.

**Exemplu.** O mașină a executat 6 000 piese, dintre care 1 450 depășesc o anumită dimensiune. Ce se poate afirma despre probabilitatea teoretică ca o piesă luată la întâmplare să depășească dimensiunea dată ?

*Rezolvare.* Avem frecvența

$$p_0 = \frac{1\,450}{6\,000}$$

Cu o probabilitate egală cu 0,95, probabilitatea  $p$  căutată „se găsește” în intervalul

$$\left( \frac{1\,450}{6\,000} - 1,96 \sqrt{\frac{1}{6\,000} \cdot \frac{1\,450}{6\,000} \left( 1 - \frac{1\,450}{6\,000} \right)}, \frac{1\,450}{6\,000} + 1,96 \sqrt{\frac{1}{6\,000} \cdot \frac{1\,450}{6\,000} \left( 1 - \frac{1\,450}{6\,000} \right)} \right)$$

Efectuînd calculele găsim :

$$p_0 = 0,241$$

$$P(0,241 - 1,96 \cdot 0,0055 < p < 0,241 + 1,96 \cdot 0,0055) = 0,95 ;$$

$$P(0,230 < p < 0,252) = 0,95.$$

Putem afirma cu probabilitatea 0,95 că probabilitatea ca piesa să depășească dimensiunea considerată „se găsește” cuprinsă în intervalul (0,230 ; 0,252).

Cu probabilitatea 0,99 probabilitatea „se găsește” cuprinsă într-un interval mai mare. Astfel :

$$P(0,241 - 2,58 \cdot 0,0055 < p < 0,241 + 2,58 \cdot 0,0055) = P(0,227 < p < 0,255) = 0,99$$

La fel :

$$P(0,241 - 3 \cdot 0,0055 < p < 0,241 + 3 \cdot 0,0055) = 0,996 ;$$

$$P(0,224 < p < 0,268) = 0,996.$$

Sîntem practic siguri că probabilitatea căutată „se găsește” sigur în intervalul (0,224 - 0,268).

**Exemplu.** Într-o localitate s-au născut 5 180 băieți și 4 820 fete. Se poate admite ipoteza că probabilitatea de naștere a unui băiat este egală cu probabilitatea de naștere a unei fete ?

*Rezolvare.* Trebuie să verificăm dacă putem admite  $p = \frac{1}{2}$ ,  $p$  fiind probabilitatea de naștere a unui băiat și  $q$  probabilitatea de naștere a unei fete. Pornim de la relația (2), luând  $h = -2,58$  și  $k = 2,58$ . Trebuie să avem, pentru  $n = 10\ 000$

$$P\left(-2,95 < \frac{\alpha - 10\ 000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{10\ 000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} < 2,95\right) = 0,99$$

$$P(4\ 911 < \alpha < 5\ 089) = 0,99.$$

Se vede că  $\alpha$  este cuprins între 4 911 și 5 089 cu probabilitatea 0,99. Avem însă 5 180 băieți născuți, adică un număr din afara intervalului în care  $\alpha$  se găsește cu mare certitudine. Mai precis,  $\alpha$  este mai mare decât 5 089 cu o probabilitate mai mică decât 1%. Mai curînd admitem că ipoteza  $p = \frac{1}{2}$  nu este adevărată,

decît că s-a realizat un eveniment cu o probabilitate atît de mică.

În realitate, probabilitatea ca să obținem  $\alpha > 5\ 180$  este și mai mică decît 1%. Din formula (3), pentru  $\alpha = 5\ 180$ , găsim  $P = 0,9998$ . Numai în două cazuri din 10 000, ipoteza poate fi adevărată, ceea ce desigur nu se poate admite. Deci, probabilitatea de naștere a unui băiat diferă de probabilitatea de naștere a unei fete. Datele de mai sus sînt ipotetice, neputînd duce la concluzii valabile în realitate. Din demografie se știe că se nasc mai mulți băieți decît fete, 51% dintre noii născuți fiind de sex masculin.

Formulele de bază (1) și (3) se referă la cazul unei relații formate pe principiul repartiției binomiale. Sînt foarte frecvente cazurile cînd selecțiile sînt formate pe baza schemei hipergeometrice, adică atunci cînd pentru determinarea populației parțiale se alege la întîmplare din populația totală unități, care nu pot intra în alcătuirea selecției decît o singură dată. Schema probabilistică este dată de o urnă, în care sînt  $A$  bile albe și  $B$  bile negre ( $A + B = N$ ).

Din această urnă se scoț  $n < N$  bile, fără ca să se pună bila extrasă înapoi în urnă. Notînd prin  $\alpha$  numărul de bile albe care se găsesc în cele  $n$  bile extrase, am văzut că :

$$D^2(\alpha) = npq \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

unde

$$p = \frac{A}{N}$$

Dispersia  $npq$  din cazul schemei cu bile nerevenită se înmulțește pentru schema cu bila revenită cu factorul

$$1 - \frac{n-1}{N-1} \approx 1 - \frac{n}{N}$$

pentru valori mari ale lui  $n$  și  $N$ .

Formulele (1) și (3) pot fi scrise în acest caz :

$$P \left[ p_0 - 1,96 \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} < p < p_0 + 1,96 \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} \right] = 0,95 ;$$

$$P \left[ p_0 - 2,58 \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} < p < p_0 + 2,58 \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} \right] = 0,99 ;$$

$$P \left[ p_0 - 3 \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} < p < p_0 + 3 \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} \right] = 0,997.$$

Putem calcula probabilitatea corespunzătoare pentru intervalul

$$P \left[ p_0 - \theta \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} < p < p_0 + \theta \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\theta}^{\theta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4)$$

cu ajutorul tabelii I de la sfârșitul cărții.

**Exemple.** Într-o țară au fost sancționați în timpul unui an 15 300 conducători de automobile pentru abateri de la legea circulației.

O selecție de 2 000 persoane a dat următoarele rezultate

Grupă de vîrstă	Bărbați	Femei
<25 ani	550	180
25—60 ani	770	360
>60 ani	90	50

Se cere să se estimeze :

- procentul și numărul de femei sancționate,
- procentul și numărul conducătorilor sancționați în vîrstă mai mică de 25 ani,
- procentul și numărul conducătorilor în vîrstă mai mare de 60 ani.

**Rezolvare.** a) Au fost selecționate 2 000 persoane, dintre care 590 femei. Deci :

$$p_0 = \frac{590}{2\,000} = 0,295.$$

Putem aplica formula (4), unde

$$n = 2\,000, N = 15\,300$$

$$\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{0,295 \cdot 0,705}{2\,000} \left(1 - \frac{2\,000}{15\,300}\right)} = 0,0095.$$

Pentru  $\theta = 1,96$ , obținem :

$$P(0,276 < p < 0,314) = 0,95.$$

Pentru  $\theta = 2,58$  :

$$P(0,271 < p < 0,319) = 0,99.$$

Prin urmare, procentul de femei sancționate „variază“ între limitele (27,6% – 31,4%) cu probabilitatea 0,95.

Cu probabilitatea 0,99 același procent este cuprins în intervalul (27,1% – 31,9%). Al doilea interval are evident un procent mai mare decât primul.

În primul caz, numai în 5% din cazuri, procentul estimat va ieși din intervalul găsit; în al doilea caz, numai la un caz dintr-o sută se iese din intervalul corespunzător.

Un grad mai mare de precizie se obține considerând intervalul (26,7% – 32,3%), în care procentul căutat se găsește cu probabilitatea 0,997. Pentru estimarea numărului de femei avem:

$$Np_0 = 15\,300 \cdot 0,295 = 4\,513$$

$$N \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 15\,300 \cdot 0,0095 = 145,3.$$

Rezultă, notînd numărul femeilor prin  $A$ :

$$P(4\,513 - 1,96 \cdot 145,3 < A < 4\,513 + 1,96 \cdot 145,3) = 0,95;$$

$$P(4\,513 - 2,58 \cdot 145,3 < A < 4\,513 + 2,58 \cdot 145,3) = 0,99.$$

Prin urmare, cu probabilitatea 0,95, numărul de femei sancționate se află în intervalul (4 228, 4 798), iar cu probabilitatea 0,99 în intervalul (4 138, 4 888).

Pentru punctele  $b$  și  $c$  se procedează în același mod.

**Exemplu.** Într-o localitate sînt 125 372 locuințe. Dintr-o selecție de 1 200 locuințe s-a constatat că 571 dintre ele posedă spațiu excedentar. Se cere:

1) Să se estimeze numărul locuințelor care au un spațiu excedentar.

*Rezolvare.* 1) Avem:

$$n = 1\,200, N = 125\,372;$$

$$p_0 = \frac{571}{1\,200} = 0,476;$$

$$P \left[ 0,476 - 1,96 \sqrt{\frac{0,476 \cdot 0,524}{1\,200} \left(1 - \frac{1\,200}{125\,372}\right)} < p < 0,476 + \right.$$

$$\left. + 1,96 \sqrt{\frac{0,476 \cdot 0,524}{1\,200} \left(1 - \frac{1\,200}{125\,372}\right)} \right] = 0,95;$$

$$P(0,449 < p < 0,503) = 0,95;$$

$$P(56\,292 < Np < 62\,056) = 0,95.$$

Prin urmare, cu o probabilitate egală cu 0,95 numărul locuințelor cu spațiu excedentar „se găsește“ în intervalul (56 292 – 62 056).

**Exemplu. Experiența lui Weldon.** Au fost aruncate de 26 306 ori câte 12 zaruri deodată și s-a notat de câte ori au ieșit fețele 5 sau 6, obținându-se următoarele rezultate :

1 Valori luate (5 sau 6)	2 Frecvența corespunzătoare	3	
		col. 1	col. 2
0	185	0	
1	1 149	1 149	
2	3 265	6 530	
3	5 475	16 425	
4	6 114	24 456	
5	5 194	25 970	
6	3 067	18 402	
7	1 331	9 317	
8	403	3 224	
9	105	945	
10	14	140	
11	4	44	
12	0	0	
	26 306	106 602	

Se poate admite că zarurile au fost corecte ?

**Rezolvare.** Trebuie, pe baza datelor statistice de mai sus, să verificăm că se poate admite că probabilitatea de apariție a unei fețe a zarului este  $1/6$ . De fiecare dată au fost aruncate 12 zaruri. Deci în total au fost

$$12 \times 26\,306 = 315\,672$$

aruncări de zaruri. Dintre acestea au fost 185 când nu au apărut fețele 5 sau 6, 1 149 când din 12 zaruri unul singur a arătat fața 5 sau 6 și așa mai departe. Adunând numerele din coloana 3, aflăm că din cele 26 306 aruncări de zar, 106 202 au dat fața 5 sau 6. Dacă admitem că zarul este corect înseamnă că  $p = \frac{1}{6}$ , prin  $p$  însemnând probabilitatea apariției unei anumite fețe a zarului.

Prin urmare, probabilitatea ca dintr-o aruncare să iasă fața 5 sau 6 este  $1/3$ . În aceste condiții, abaterea redusă este

$$\frac{106\,602 - \frac{1}{3} \cdot 315\,672}{\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 315\,672}} = 5,20.$$

Din tabela care ne dă valorile normale, obținem

$$P(|\xi - m| > 4\sigma) = \frac{6}{10^5}$$

unde  $\xi$  este variabilă normală  $N(m, \sigma)$ .

În cazul nostru  $5,2 > 4$ , ceea ce înseamnă că s-a realizat un eveniment cu o probabilitate mai mică decât  $6/10^5$ , ceea ce nu putem admite. Deci zarurile nu sînt corecte.

**Exemplu.** În comuna A la un număr de 1 080 familii există 265 familii care au televizor, iar în comuna B la 1 820 familii au televizor 455. Se poate afirma că probabilitatea ca o familie să aibe televizor este aceeași în fiecare comună?

**Rezolvare.** Fie  $p$  probabilitatea ca o familie să aibe un televizor, presupusă aceeași în fiecare comună.

În ambele comune sînt 720 televizoare și 2 900 familii. Luăm pentru  $p$  valoarea

$$p = \frac{720}{2\,900} = \frac{72}{290}$$

Notăm:

$$n_1 = 1\,080, \alpha_1 = 265,$$

$$n_2 = 1\,820, \alpha_2 = 445,$$

$$\xi_1 = \frac{\alpha_1}{n_1}, \quad \xi_2 = \frac{\alpha_2}{n_2}.$$

Considerăm  $\xi_1$  și  $\xi_2$  ca variabile aleatoare, corespunzătoare la  $n_1$  și  $n_2$  extracții succesive dintr-o urnă cu probabilitatea  $p$ , punind de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă.

$$D^2(\xi_1 - \xi_2) = D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2) = D^2\left(\frac{\alpha_1}{n_1}\right) + D^2\left(\frac{\alpha_2}{n_2}\right) = \frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} pq.$$

Variabila redusă

$$\frac{\frac{\alpha_1}{n_1} - \frac{\alpha_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} pq}}$$

urmează la limită legea normală  $N(0,1)$  după cum rezultă din capitolul corespunzător din teoria probabilităților.

Cu datele noastre, avem:

$$\frac{\frac{265}{1\,080} - \frac{455}{1\,820}}{\frac{1\,080 + 1\,820}{1\,080 \cdot 1\,820} \cdot \frac{72}{290} \left(1 - \frac{72}{290}\right)} = 0,886.$$

Cu o probabilitate egală cu 0,95, raportul de mai sus trebuie să se găsească în intervalul  $(-1,96, 1,96)$ . Prin urmare, valorile  $\xi_1$  și  $\xi_2$  nu diferă semnificativ

**Exemplu.** Se consideră două loturi de becuri electrice.

Din primul lot se consideră o selecție de 80 becuri și se constată că durata medie de funcționare a unui bec este egală cu 1 520 ore și abaterea medie pătratică a acestei durate este 87 ore. Din al doilea lot s-a făcut o selecție de 60 becuri,

s-a obținut o durată medie de abatere egală cu 1 590 ore și abaterea medie pătratică 95 ore. Diferă semnificativ cele două loturi în privința duratei medii de ardere a becurilor ?

*Rezolvare.* Se consideră că selecțiile efectuate sînt independente între ele.

Notăm prin  $\bar{x}$  media primului lot și prin  $\bar{y}$  media lotului al doilea. Deoarece selecțiile au un volum mare, admitem că  $\bar{x}$  și  $\bar{y}$  sînt variabile aleatoare normale. Trebuie să testăm ipoteza

$$M(\bar{x}) = M(\bar{y}).$$

Avem :

$$D^2(\bar{x} - \bar{y}) = D^2(\bar{x}) + D^2(\bar{y}) = \frac{\sigma_x^2}{80} + \frac{\sigma_y^2}{60}$$

prin  $\sigma_x$  și  $\sigma_y$  însemnînd dispersiile respective pentru o unitate dintr-un lot. Prin urmare variabila

$$\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{80} + \frac{\sigma_y^2}{60}}}$$

este  $N(0, 1)$ .

Cu datele noastre, avem :

$$\frac{1\,590 - 1\,520}{\sqrt{\frac{87^2}{80} + \frac{95^2}{60}}} = 5,203.$$

Această valoare mare a abaterii reduse ne arată că rezultatele obținute diferă semnificativ.

Numeroase aplicații se referă la repartiția  $\chi^2$ . Să considerăm repartiția multinomială cu probabilitățile

$$p_1, p_2, \dots, p_m,$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1,$$

referitoare la stările  $E_1, E_2, \dots, E_m$ .

Notăm :

$$\sum_{i=1}^m \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \chi^2. \quad (*)$$

În formula de mai sus,  $n_i$  înseamnă de câte ori a apărut starea  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) în  $n$  probe independente.

Variabila (\*) urmează repartiția  $\chi^2$  cu  $m - 1$  grade de libertate.

**Exemplu.** Reluăm experiența lui Weldon. Să se verifice prin folosirea repartiției  $\chi^2$  corectitudinea zarurilor.

Rezolvare. Întocmim următorul tablou :

(1) Numărul de succese	(2) Frecvențele observate ( $n_i$ )	(3) Frecvențele teoretice ( $np_i$ )	(4) $\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	185	203	1 596
1	1 149	1 217	3,800
2	3 265	3 345	1,913
3	5 475	5 576	1,829
4	6 114	6 273	4,030
5	5 194	5 018	6,173
6	3 067	2 927	6,696
7	1 331	1 245	4,728
8	403	392	0,309
9	105	87	3,724
10	18	14	1,143
	$n=26\ 306$	$n=26\ 306$	35,941

Coloana (1) conține numărul posibil de fețe 5 sau 6 apărute în 12 aruncări de zaruri. În coloana (2) sînt așezate frecvențele corespunzătoare valorilor din coloana (1). De exemplu, din 26 306 aruncări a 12 zaruri deodată în 185 cazuri n-a ieșit fața 5 sau 6. În coloana (3) sînt trecute frecvențele teoretice corespunzătoare numerelor din coloana (1). De exemplu, din  $n = 26\ 306$  aruncări de 12 zaruri deodată, dacă admitem că probabilitatea apariției unei fețe unui zar este  $1/6$ , valoarea medie a numărului de cazuri cînd nu apare nici un 5 sau nici un 6 este 203. Valorile  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 12$ , corespunzătoare valorilor din coloana (1) rezultă din valoarea binomului

$$26\ 306 \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right)^{12}.$$

Din ultima coloană deducem :

$$\chi^2 = 35,941.$$

Din tabele găsim că, pentru 10 grade de libertate

$$P(\chi^2 > 29,588) = 0,001.$$

Cum

$$35\ 941 > 29,588$$

rezultă că trebuie să respingem ipoteza că zarurile sînt corecte.

**Exemplu.** *Incrucișind două specii de mazăre s-au obținut, referitor la culoarea și tipul mazării, următoarele rezultate :*

Sortul	1	2	3	4
Frecvențele observate $n_i$	315	101	108	32

În baza teoriei eredității a lui Mendel, probabilitățile obținerii unui bob de mazăre din cele patru sorturi sînt respectiv

$$p_1 = \frac{9}{16}, \quad p_2 = \frac{3}{16}, \quad p_3 = \frac{3}{16}, \quad p_4 = \frac{1}{16}.$$

Se cere să se verifice concordanța rezultatelor obținute cu teoria lui Mendel.

Rezolvare. Avem :

$$n = \sum_{i=1}^4 n_i = 556$$

$$np_1 = 312,75; \quad np_2 = 104,25; \quad np_3 = 104,25; \quad np_4 = 34,75$$

$$K^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 0,47.$$

Cu trei grade de libertate avem :

$$P(K^2 > 0,47) = 0,93.$$

Se confirmă justețea ipotezei.

**E x e m p l u.** În două orașe A și B, referitor la mortalitatea locuitorilor, există următoarele date :

**Orașul A**

Grupe de vîrstă	Numărul locuitorilor	Numărul anual al decedașilor
15-19	65 343	439
20-24	62 539	475
25-29	60 131	491
30-34	58 114	490
35-39	55 231	566
40-44	52 171	725
45-49	48 132	859
50-54	43 659	979
55-59	38 342	1 028

**Orașul B**

Grupe de vîrstă	Numărul locuitorilor	Numărul anual al decedașilor
15-19	97 538	605
20-24	94 548	671
25-29	89 932	755
30-34	87 031	740
35-39	82 537	834
40-44	78 048	1 108
45-49	72 032	1 239
50-54	66 072	1 454
55-59	57 031	1 551

*Diferă mortalitatea locuitorilor din cele două orașe în mod semnificativ?*

*Rezolvare.* Vom aplica criteriul  $\chi^2$ . Vom considera prima grupă de vîrstă 15–19 ani. Construim următorul tablou :

Orașul	Numărul supraviețuitorilor după un an (1)	Numărul anual al decedașilor (2)	Total (3)
B	64 904	539	65 343
A	96 933	605	97 538
	161 837	1 044	162 881

Coloana (1) a fost obținută din numărul total al locuitorilor din care a fost scăzut numărul decedașilor din timpul unui an. Populația totală pentru grupa considerată cuprinde 162 881 locuitori dintre care 161 837 au rămas în viață după un an și 1 044 au murit.

Probabilitatea ca un locuitor să trăiască peste un an, în ipoteza că mortalitatea este aceeași în ambele orașe, este

$$p = \frac{161\,387}{162\,881} = 0,993\,590.$$

Probabilitatea de deces este

$$q = \frac{1\,044}{162\,044} = 0,006\,410.$$

Calculăm acum valorile teoretice corespunzătoare frecvențelor. În orașul A. au fost 65 343 locuitori, pentru care corespund teoretic

$$65\,343\,p = 64\,924$$

supraviețuitori și

$$65\,343\,q = 419$$

decedași.

În orașul B ar fi trebuit să existe teoretic

$$97\,538\,p = 96\,913$$

supraviețuitori și

$$97\,538\,q = 625$$

decedași.

Prin urmare vom întocmi tabelul:

Orașe	Numărul teoretic al supraviețuitorilor după un an	Numărul teoretic al decedașilor în timp de un an	Total
A	64 924	419	65 343
B	96 913	625	97 538
	161 837	1 044	162 881

Valoarea lui  $K^2$ , conform definiției este

$$K^2 = \frac{(64904 - 64\ 924)^2}{64\ 924} + \frac{(96\ 933 - 96\ 913)^2}{96\ 913} + \frac{(439 - 419)^2}{419} + \frac{(605 - 625)^2}{625} = 1,535.$$

Efectuind același calcul pentru toate grupele de vîrstă, avem:

<i>Grupe de vîrstă</i>	
15-19	1,535
20-24	1,298
25-29	0,175
30-34	0,047
35-39	0,033
40-44	0,203
45-49	0,420
50-54	1,938
55-59	1,393
<i>Total</i>	<i>7,042</i>

Obținem pentru  $K^2$  o valoare egală cu 7,042 pentru nouă grade de libertate. Deoarece

$$P(K^2 > 7,042) = 0,64$$

rezultă că diferența este nesemnificativă.

### 3.6. ESTIMAȚIA PARAMETRILOR

Fie  $x$  o variabilă aleatoare care are funcția de repartiție  $F(x; \theta)$ . Forma funcțională a funcției de repartiție  $F(x; \theta)$  este specificată, însă  $\theta$  este un parametru real a cărui valoare adevărată  $\theta_0$  este necunoscută.  $\theta_0$  aparține unei mulțimi de valori reale  $\Theta$ , numită spațiul parametrilor. În vederea găsirii unei valori care să aproximeze pe  $\theta$  folosim o selecție

$$X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$$

și ne propunem să determinăm o funcție  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , care să poată fi luată ca valoare a parametrului  $\theta$ .

Această funcție o vom numi funcție de estimare sau *estimator*.

**Definiție.** *Dacă*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{P}{=} \theta \quad (1)$$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se numește *estimator corect*.

În relația (1) convergența are loc în probabilitate.

Există o infinitate de funcții care îndeplinesc condiția (1).

Dintre acestea prezintă cel mai mare interes cele pentru care convergența este cât mai puternică.

Dacă relația (1) are loc, aceasta înseamnă că pentru valorile mari ale lui  $n$ , funcția de selecție  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ia valori apropiate de  $\theta$ , cu o probabilitate foarte mare.

Aceste valori aproximează valoarea parametrului  $\theta$  și deci este natural ca funcția considerată să fie luată drept un estimator al lui  $\theta$ .

Definiția se păstrează și în cazul când există mai mulți parametri a căror valoare este necunoscută. Vom da un exemplu din teoria erorilor. Să presupunem că am măsurat o lungime de  $n$  ori și că am obținut valorile

$$(2) \quad x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Din experiențe anterioare și din teoria generală a erorilor avem motive pentru a admite că repartiția acestor erori este normală :

$$F(x; [m, \sigma]) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Prin urmare, funcția de repartiție este cunoscută dar nu cunoaștem valorile numerice ale parametrilor  $m$  și  $\sigma$ .

Dacă vom putea găsi două funcții  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  astfel încît

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{P}{=} m,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{P}{=} \sigma$$

problema este rezolvată intrucît cu o probabilitate atît de mare, cît dorim noi, pentru valorile lui  $n > N$ , unde  $N$  este un număr mare pe care îl putem determina, diferențele dintre  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  devin arbitrar de mici.

Stabilirea faptului că o funcție converge în probabilitate către o constantă poate prezenta uneori dificultăți. De aceea, este preferabil să se recurgă la condiții mai simple. Astfel, dacă

$$M(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \theta + \alpha(n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0,$$

(3)

$$D^2(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \rightarrow 0$$

rezultă imediat prin aplicarea inegalității lui Cebîșev, că  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este un estimator corect pentru  $\theta$ .

În relațiile (3),  $\alpha(n)$  este o funcție de  $n$ , care tinde către zero, cînd  $n$  crește neconținut. Dacă  $\alpha(n) = 0$ , vom spune că  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este un estimator absolut corect pentru  $\theta$ . Uneori, în acest caz, se spune că  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este un estimator nedeplasat.

Vom da un exemplu simplu. Considerăm un eveniment cu probabilitatea  $p$  de a se realiza într-o probă. Supunem evenimentul la  $n$  probe independente și cunoscînd rezultatele fiecărei probe, ne propunem să evaluăm valoarea probabilităților necunoscute  $p$ . Este o problemă de estimatie cu un singur parametru  $p$ . Notăm prin  $\alpha$  numărul de realizări a evenimentului în  $n$  probe. Avem :

$$M\left(\frac{\alpha}{n}\right) = p, \quad D^2\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{pq}{n}.$$

Condițiile (3) sînt îndeplinite și deci  $\frac{\alpha}{n}$  este un estimator corect al lui  $p$ .

Se vede că  $\frac{\alpha}{n}$  este un estimator nedeplasat.

Să considerăm funcția de selecție

$$\frac{\alpha + 1}{n + 1}$$

Un calcul simplu ne arată că

$$(4) \quad \begin{aligned} M\left(\frac{\alpha + 1}{n + 1}\right) &= p + \frac{1 - p}{n + 1} \\ D^2\left(\frac{\alpha + 1}{n + 1}\right) &= \frac{npq}{(n + 1)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Condițiile (3) sînt îndeplinite deoarece :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - p}{n + 1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{npq}{(n + 1)^2} = 0.$$

Prin urmare și funcția

$$\frac{\alpha + 1}{n + 1}$$

este un estimator, însă un estimator deplasat, în prima relație din (4) există termenul

$$\alpha(n) = \frac{1 - p}{n + 1} \neq 0.$$

Referitor la exemplul de mai sus, admitem că am împărțit grupul de  $n$  experiențe în două grupuri :  $n_1$  și  $n_2$ . Notăm prin  $\alpha_1$  numărul de realizări ale evenimentului în primele  $n_1$  probe și prin  $\alpha_2$  numărul de realizări în ultimele  $n_2$  probe ( $n_1 + n_2 = n$ ).

Alegem ca estimator pentru  $p$ , expresia

$$\frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2}{k_1n_1 + k_2n_2}$$

unde  $k_1$  și  $k_2$  sînt două numere reale, pozitive.

Efectuînd calculele obținem :

$$(5) \quad M\left(\frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2}{k_1n_1 + k_2n_2}\right) = p; \quad D^2\left(\frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2}{k_1n_1 + k_2n_2}\right) = \frac{k_1n_1^2 + k_2n_2^2}{(k_1n_1 + k_2n_2)^2}$$

Din această relație, rezultă :

$$D^2\left(\frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2}{k_1n_1 + k_2n_2}\right) = D^2\left(\frac{\alpha}{n}\right) + \frac{(k_1 - k_2)^2 n_1 n_2}{n(k_1n_1 + k_2n_2)}$$

Prin urmare :

$$D^2\left(\frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2}{k_1n_1 + k_2n_2}\right) \geq D^2\left(\frac{\alpha}{n}\right),$$

egalitatea neavînd loc decît pentru  $k_1 = k_2$  cînd estimatorul  $\frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2}{k_1n_1 + k_2n_2}$

devine egal cu  $\frac{\alpha}{n}$ .

Din (5) rezultă că toți estimatorii

$$\frac{k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2}{k_1 n_1 + k_2 n_2}, \quad k_1 \in N, k_2 \in N$$

sînt absolut corecți (nedeplasați). Printre ei se află și estimatorul  $\frac{\alpha}{n}$ , obținut pentru  $k_1 = k_2$ , care se bucură de proprietatea că are cea mai mică dispersie. Această proprietate de minim are importanță din punct de vedere statistic. Ea dă naștere la cea mai mare concentrare de masă a probabilității în jurul lui  $p$  și deci estimatorul de dispersie minimă este întotdeauna preferabil celorlalți estimatori.

Vom demonstra o teoremă generală privind minimul dispersiei estimatorilor. În acest scop vom introduce următoarea

**Definiție.** Dacă

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

este o selecție asupra unei variabile aleatoare  $X$ , avînd densitatea de probabilitate  $f(x; \theta)$ , funcția

$$P(x; \theta) = P(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta),$$

poartă numele de funcție de verosimilitate.

Este evident, conform definiției, că:

$$\iint_{R^n} \cdot \int \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) dx_1, dx_2, \dots, dx_n = 1$$

sau

$$\int_{R^n} P dv = 1$$

unde

$$dv = \prod_{i=1}^n dv_i.$$

**Teorema Rao-Cramer.**

Dacă.

1. mulțimea valorilor lui  $\theta$  formează un interval  $D$  al dreptei reale.

2.  $\frac{\partial P(x; \theta)}{\partial \theta} < \infty$ , oricare ar fi  $\theta \in D$  și  $x \in R^n$

3.  $\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{R^n} P(x; \theta) dv = \int_{R^n} \frac{\partial P(x; \theta)}{\partial \theta} d\theta$  oricare ar fi  $\theta \in D$ .

4. pentru orice estimator  $t_n$  nedeplasat

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{R^n} t_n P dv = \int_{R^n} \frac{\partial}{\partial \theta} t_n P dv$$

5.  $M \left[ \left( \frac{\partial \ln P(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] < \infty$ , pentru toți  $\theta \in D$ ,

6.  $t$  este un estimator nedeplasat al lui  $\tau(\theta)$ , atunci :

$$7. D^2(t) \geq [\tau'(\theta)]^2 / M \left( \frac{\partial \ln P(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2$$

egalitatea avind loc numai dac $\bar{a}$  exist $\bar{a}$  o constant $\bar{a}$   $A$ , astfel  $\bar{a}$ nc $\bar{a}$ t

$$A[t - \tau(\theta)] = \frac{\partial \ln P(x; \theta)}{\partial \theta}.$$

*Demonstra $\bar{c}$ ie.* Din

$$\int_{R^n} P dv = 1$$

deducem

$$\int_{R^n} \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} P dv = 0.$$

Deriv $\bar{a}$ nd mai departe in raport cu  $\theta$  :

$$\int_{R^n} \left[ \frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2} + \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} \right)^2 \right] P dv = 0.$$

Aceasta inseamn $\bar{a}$  c $\bar{a}$

$$M \left( \frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2} \right) = -M \left[ \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$t$  fiind un estimator nedeplasat pentru  $\tau(\theta)$ , avem :

$$M(t) = \int_{R^n} t P dv = \tau(\theta)$$

și prin derivare :

$$\int_{R^n} t \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} P dv = \tau'(\theta)$$

sau

$$\tau'(\theta) = \int_{R^n} (t - \tau(\theta)) \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} P dv.$$

Aplic $\bar{a}$ nd inegalitatea lui Schwartz, se ob $\bar{t}$ ine

$$\tau'^2(\theta) \leq \int_{R^n} [t - \tau(\theta)]^2 P dv \int_{R^n} \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} \right)^2 P dv$$

sau

$$\tau'^2(\theta) \leq M[t - \tau(\theta)]^2 M \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} \right)^2.$$

Îns $\bar{a}$

$$M[t - \tau(\theta)]^2 = D^2(t).$$

Prin urmare :

$$D^2(t) \geq \frac{\tau'^2(\theta)}{M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2}\right)}$$

Teorema este deci demonstrată. Mai rămâne să se examineze cazul cînd inegalitatea de mai sus se transformă în egalitate.

Pentru aceasta, trebuie ca  $t - \tau(\theta)$  să fie proporțională cu  $\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}$ , adică

$$A[t - \tau(\theta)] = \frac{\partial \ln P}{\partial \theta}$$

unde  $A$  este independentă de valorile observate de selecție, depinzînd numai de  $\theta$ . Prin ridicare la pătrat :

$$A^2(\theta)[t - \tau(\theta)]^2 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)^2,$$

$$M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)^2 = \int_{R^n} A(\theta)[t - \tau(\theta)] \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} P \, d\nu = A(\theta)\tau'(\theta),$$

$$D^2(t) = \tau'(\theta)/A(\theta),$$

dispersia în acest caz căpătînd această formă simplă.

**Definiție.** Un estimator pentru care inegalitatea (6) se transformă în egalitate se numește eficient.

**Observația I.** Teorema lui Rao-Cramer se extinde pentru mai mulți parametri. Demonstrația în linii mari rămîne aceeași. De aceea nu vom arăta decît în ce constă această generalizare.

În cazul cînd avem  $r$  parametri  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ , funcția de verosimilitate are forma:

$$P(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = P(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_1, \dots, \theta_r)$$

prin  $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$  notînd densitatea de repartiție, care în acest caz depinde de  $r$  parametri.

Fie  $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_r$ ,  $r$  estimatori nedeplasați :

$$M(\bar{\theta}_i) = \bar{\theta}_i; \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Notăm

$$M(\bar{\theta}_i - \theta_i)(\bar{\theta}_j - \theta_j) = \theta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, r)$$

$$M\left[\frac{\partial \ln P}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln P}{\partial \theta_j}\right] = n\theta_{ij}.$$

Admitem existența valorilor  $\theta_{ij}$  și  $b_{ij}$ .

Matricele  $A = (a_{ij})$  și  $B = (b_{ij})$  sînt matrici de momente și deci sînt pozitive definite. Notăm prin  $A^{-1}$  inversa matricii  $A$ .

În spațiul euclidian cu  $r$  dimensiuni, considerăm elipsoizii definiți prin ecuațiile

$$y'A^{-1}y = r + 2,$$

$$y'By = r + 2.$$

Generalizarea teoremei lui Roa-Cramer constă în faptul că primul elipsoid cuprinde în întregime elipsoidul al doilea. În cazul când cei doi elipsoizi coincid funcțiile de estimare corespunzătoare poartă numele de estimatori eficienți.

*Observația II.* Considerăm ecuațiile de verosimilitate

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \theta_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

unde  $P$  este funcția de verosimilitate.

Prin rezolvarea acestui sistem, găsim soluțiile  $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_r$ .

Se demonstrează că funcțiile de selecție  $\bar{\theta}_i, (i = 1, 2, \dots, r)$  sînt estimatori corecți.

*Observația III.* Proprietățile de mai sus au fost enunțate în cazul când repartiția populației teoretice originare admite densități de probabilitate. Această restricție nu este necesară, efectuîndu-se bineînțeles, modificările necesare.

## Exemple

### I. Schema lui Bernoulli

Considerăm urna clasică a lui Bernoulli cu două valori 1 și 0. Notăm prin  $p$  probabilitatea egalității  $X_n = 1$  și prin  $q$  probabilitatea egalității  $X_n = 0$ . Efectuînd  $n$  probe independente am obținut frecvența

$$f_n = \frac{\alpha}{n}.$$

Ne propunem să determinăm un estimator pentru  $p$ . Considerăm estimatorul

$$\bar{\theta} = \frac{\alpha}{n}.$$

Avem, după cum am arătat

$$M(\bar{\theta}) = p,$$

$$D^2(\bar{\theta}) = \frac{pq}{n}.$$

Condițiile (3) sînt îndeplinite. Prin urmare,  $\bar{\theta}$  este un estimator nedepășat. Vom arăta că este și eficient.

Conform teoremei lui Rao-Cramer, transpusă în cazul unei repartiții discontinue, avem întotdeauna:

$$D^2(\bar{\theta}) \geq \frac{1}{n \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \ln p_i}{\partial p} \right)^2 p_i(\theta)}.$$

În cazul nostru  $\theta = p$

$$p_1(p) = p,$$

$$p_2(p) = 1 - p,$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \ln p_i}{\partial p_i} \right)^2 p_i = p \cdot \frac{1}{p^2} + (1-p) \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{pq}.$$

Prin urmare :

$$D^2(\bar{\theta}) = \frac{pq}{n}.$$

Se vede că minimumul este atins pentru estimatorul

$$\bar{\theta} = \frac{\alpha}{n}$$

care este prin urmare și eficient.

Vom aplica și metoda verosimilității maxime.

Probabilitatea de a obține din  $n$  probe  $\alpha$  realizări este

$$P = C_n^\alpha p^\alpha q^{\alpha-n}.$$

Ecuția verosimilității maxime este

$$\frac{\partial \ln P}{\partial p} = 0$$

adică

$$\frac{\alpha}{p} - \frac{n-\alpha}{q} = 0.$$

De unde rezultă estimatorul

$$\bar{p} = \frac{\alpha}{n}.$$

## II. Repartiția multinomială

Dintr-o urnă în care sînt bile de  $k$  culori diferite efectuăm extracții consecutive, punînd de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. După  $n$  extracții, obținem respectiv

$$n_1, n_2, \dots, n_k$$

bile de culorile 1, 2, ...,  $k$ .

$$n_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n.$$

În baza acestei experiențe, ne propunem să estimăm probabilitățile necunoscutelor  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , de a scoate respectiv din urnă o bilă de culoarea 1, 2, ...,  $k$ .

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

Pentru găsirea unor estimări, vom pleca de la funcția de verosimilitate

$$P = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k},$$

care, după cum am văzut reprezintă probabilitatea ca din  $n$  extracții să obținem  $n_1$  bile de culoarea 1,  $n_2$  bile de culoarea 2, ...,  $n_k$  bile de culoarea  $k$ .

Vom avea de rezolvat sistemul

$$\frac{\partial \ln P}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial \ln P}{\partial p_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial \ln P}{\partial p_{k-1}} = 0.$$

Sistemul are  $(k-1)$  ecuații, deoarece există  $k-1$  parametri independenți:

$$p_1, p_2, \dots, p_{k-1},$$

$$p_k = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{k-1}.$$

Sistemul de ecuații se scrie:

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_k}{p_k} = 0, \quad \frac{n_2}{p_2} - \frac{n_k}{p_k} = 0, \dots, \quad \frac{n_{k-1}}{p_{k-1}} - \frac{n_k}{p_k} = 0.$$

Găsim soluțiile:

$$\bar{p}_1 = \frac{n_1}{n}, \quad \bar{p}_2 = \frac{n_2}{n}, \dots, \quad \bar{p}_{k-1} = \frac{n_{k-1}}{n},$$

$p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$  sînt estimatori corecți. Pentru a constata dacă acești estimatori sînt deplasați sau nu, vom calcula mediile:

$$M(\bar{p}_i) = \frac{M(n_i)}{n} = p_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k-1).$$

Prin urmare, estimatorii sînt nedepasați.

Vom calcula și dispersiile:

$$D^2(\bar{p}_i) = \frac{D^2(n_i)}{n^2} = \frac{p_i(1-p_i)}{n}, \quad (i = 1, 2, \dots, k-1).$$

Se observă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D^2(\bar{p}_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, k-1),$$

condițiile (3) fiind îndeplinite.

Se poate demonstra că estimatorii găsiți sînt eficienți. Pentru aceasta vom calcula mai întii matricea  $B$  de la observația I.

Un calcul simplu ne arată că

$$n \sum_{n=1}^k \left( \frac{\partial \ln p_n}{\partial p_i} \right) p_n = \frac{p_i + p_k}{p_i p_k} n, \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

$$n \sum \frac{\partial \ln p_n}{p_i} \frac{\partial \ln p_n}{\partial p_j} = \frac{1}{p_k} n, \quad (i, j = 1, 2, \dots, k-1, i \neq j).$$

Prin urmare elipsoidul de concentrație minimă al dispersiei este :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{p_i + p_k}{p_i} (x_i - p_i)^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k-1} (x_i - p_i)(x_j - p_j) = \frac{(k+1)p_k}{n}$$

La fel, avem :

$$D^2(\bar{p}_i) = \frac{p_i(1-p_i)}{n},$$

$$M(\bar{p}_i - p_i)(\bar{p}_j - p_j) = -\frac{p_i p_j}{n}.$$

Prin urmare :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{p_1(1-p_1)}{n} & -\frac{p_1 p_2}{n} & \dots & -\frac{p_1 p_{k-1}}{n} \\ -\frac{p_2 p_1}{n} & \frac{p_2(1-p_2)}{n} & \dots & -\frac{p_2 p_{k-1}}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{p_{k-1} p_1}{n} & -\frac{p_{k-1} p_2}{n} & \dots & \frac{p_{k-1}(1-p_{k-1})}{n} \end{pmatrix}$$

Matricea inversă se calculează lesne. Se obține :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{n(p_1 + p_k)}{p_1 p_k} & \frac{n}{p_k} & \dots & \frac{n}{p_k} \\ \frac{n}{p_k} & \frac{n(p_2 + p_k)}{p_2 p_k} & \dots & \frac{n}{p_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n}{p_k} & \frac{n}{p_k} & \dots & \frac{n(p_{k-1} + p_k)}{p_{k-1} p_k} \end{pmatrix}$$

Se vede că se ajunge la același elipsoid ca mai sus. Cei doi elipsoizi, menționați la observația I, coincid și deci estimatorii sînt eficienți.

### III. Repartiția Poisson

În cazul acestei repartiții, există probabilitățile

$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Există un singur parametru  $\lambda$ , a cărui valoare urmează să fie determinată printr-o selecție.

Funcția de verosimilitate maximă este

$$P = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum x_i}}{n! \pi x_i!}$$

Ecuția de verosimilitate maximă

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \lambda} = 0$$

ne dă :

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Se verifică ușor că  $\lambda$  este un estimator nedeplasat.

Se poate demonstra că acest estimator este și suficient. Într-adevăr, după teorema Rao-Cramer, minimul dispersiei este :

$$\frac{1}{n \sum_{x=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial \ln f(x, \lambda)}{\partial \lambda} \right]^2 f(x, \lambda)}$$

Însă

$$n \sum_{x=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial \ln f(x, \lambda)}{\partial \lambda} \right]^2 f(x, \lambda) = n \sum_{x=0}^{\infty} \left( \frac{x}{\lambda} - 1 \right)^2 \frac{\lambda^x e^{-x}}{x!} = \frac{n}{\lambda}$$

Minimul dispersiei estimatorilor corecți este  $\frac{n}{\lambda}$ . Pentru  $\bar{\lambda}$  avem :

$$D^2(\bar{\lambda}) = D^2\left(\frac{1}{n} \sum x_i\right) = \frac{1}{n^2} D^2(\sum x_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n D^2(x_i) = \frac{\lambda}{n}$$

$\bar{\lambda}$  este prin urmare un estimator eficient.

#### IV. Repartiția normală

Să considerăm familia de repartiții normale cu densitățile

$$f(x, m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Există doi parametri :  $m$  și  $\sigma$ . Vom avea mai multe cazuri de examinat, după cum unul sau amândoi parametri sînt necunoscuți.

a)  $m$  necunoscut,  $\sigma$  cunoscut

Probabilitatea obținerii selecției

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

este

$$P = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - m)^2}$$

Ecuția verosimilității maxime :

$$\frac{\partial \ln P}{\partial m} = 0$$

ne conduce la

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

Estimatorul obținut este media aritmetică a observațiilor. Este un estimator nedeplasat, deoarece

$$M(\bar{m}) = \frac{1}{n} M(\sum x_i) = m.$$

Se poate arăta că acest estimator este și eficient :

$$\frac{\partial \ln P}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - m),$$

$$M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial m}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4} M(\sum (x_i - m)^2) = \frac{n}{\sigma^2}.$$

Prin urmare, conform teoremei lui Rao-Cramer, dispersia minimă a estimatorilor este  $\frac{\sigma^2}{n}$ .

Însă

$$D^2(\bar{m}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Prin urmare, minimul e atins și deci  $m$  este un estimator eficient.

b)  $\sigma$  necunoscut,  $m$  cunoscut

Avem tot un singur parametru necunoscut :  $\sigma$ .

Pentru găsirea unui estimator, vom folosi metoda verosimilității maxime.

Din expresia funcției de verosimilitate deducem

$$\ln P = -n \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - m)^2 - \frac{n}{2} \log 2\pi.$$

Ecuatia verosimilității maxime

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \sigma} = 0$$

ne dă estimatorul

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2}.$$

Repartiția de probabilitate a lui  $\bar{\sigma}$  este o repartiție  $\gamma$  cu densitatea

$$\frac{2 \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} e^{-\frac{n}{2\sigma^2} x^2}$$

Cunoscind această densitate, putem calcula valoarea medie a lui  $\bar{\sigma}$  și obținem :

$$M(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sigma.$$

Rezultă că  $\bar{\sigma}$  nu este un estimator nedeplasat pentru  $\sigma$ .

Dacă vom considera însă estimatorul

$$\bar{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2},$$

în baza formulelor de mai sus, rezultă :

$$M(\bar{\sigma}_1) = \sigma.$$

Estimatorul  $\bar{\sigma}_1$  este nedepășat, spre deosebire de  $\sigma$  care este depășat.

Estimatorii  $\bar{\sigma}$  și  $\sigma_1$  nu sînt eficienți.

c)  $m$  și  $\sigma$  necunoscuți

Pentru a simplifica rezultatele obținute, vom nota  $\sigma^2 = \theta$  și ne propunem să estimăm pe  $m$  și  $\theta$ .

Densitatea de repartiție devine

$$f(x; m, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\theta}}$$

iar funcția de verosimilitate

$$P = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \theta^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\theta} \sum (x_i - m)^2},$$

$$\ln P = -\frac{n}{2} \ln \theta - \frac{1}{2\theta} \sum (x_i - m)^2 - \frac{n}{2} \ln(2\pi).$$

Réolvarea sistemului :

$$\frac{\partial \ln P}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} = 0$$

ne dă :

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum x_i,$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2.$$

Am examinat natura acestor estimatori la punctele precedente. Ne vom ocupa de eficiența estimatorilor.

Elipsoizii menționați la observația I devin elipse. Se poate arăta, efectuînd calculele de medii corespunzătoare că ecuațiile acestor elipse sînt

$$\frac{n}{\theta} (x - m)^2 + \frac{2n}{\theta} (y - \sqrt{\theta})^2 = 4,$$

$$\frac{n}{\theta} (x - m)^2 + \frac{n}{\theta \left[ n - 1 - 2 \left( \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right)^2 \right]} (y - \sqrt{\theta})^2 = 4.$$

Aceste două elipse concentrice nu coincid. Cînd selecția crește neconținut, adică pentru  $n \rightarrow \infty$ , elipsele coincid și deci estimatorii  $m$  și  $\theta$  devin eficienți la limită.

#### • V. Estimația medianei

Considerăm selecția

$$x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$$

formată din  $(2n + 1)$  probe independente.

Am ordonat selecția după mărimea valorilor obținute

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n+1}.$$

În acest caz, mediana acestor valori este prin definiție  $x_{n+1}$ , deoarece  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sînt  $n$  valori mai mici decît  $x_{n+1}$  și  $(x_{n+2}, \dots, x_{2n+1})$  reprezintă valori mai mari decît  $x_{n+1}$ . Ne propunem să determinăm repartiția de probabilitate a variabilei  $x_{n+1}$ , cînd valorile  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ ) variază la întîmplare.

Notăm prin  $F(x)$  funcția de repartiție a populației teoretice și admitem că există o densitate de probabilitate  $f(x)$ . De asemenea notăm prin  $g(x)dx$  probabilitatea ca  $x_{n+1}$  să se găsească în intervalul  $(x, x + dx)$ . Pentru determinarea acestei probabilități să observăm că sîntem în cazul repartiției multinomiale.

• Efectuînd  $(2n + 1)$  experiențe,  $n$  variabile trebuie să se găsească în intervalul  $(0, x)$ . Aceste variabile sînt  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Probabilitatea ca o variabilă  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) să se găsească în intervalul  $(0, x)$  este  $F(x)$ . Pe de altă parte,  $n$  variabile:  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n+1}$  trebuie să se găsească în intervalul  $(x, \infty)$ , ceea ce se realizează cu probabilitatea  $1 - F(x)$ . Variabile  $x_n$  trebuie să cadă în intervalul  $(x, x + dx)$  cu probabilitatea  $f(x) dx$ . Aplicînd formula

$$\frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_s!} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s},$$

care reprezintă probabilitatea ca  $s$  evenimente cu probabilitățile  $p_1, p_2, \dots, p_s$  să se realizeze respectiv de  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  ori, obținem :

$$g(x)dx = \frac{(2n + 1)!}{(n!)^2} [F(x)]^n [1 - F(x)]^n f(x) dx.$$

În mod analog se calculează probabilitățile valorilor extreme ale selecției

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

în care presupunem că

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

Ne interesează în numeroase aplicații ale statisticii repartiția celei mai mici și celei mai mari valori ale selecției. De asemenea, prezintă de multe ori interes repartiția variabilei  $x_n - x_1$ , care se numește amplitudine.

Aplicînd schema multinomială, observăm că probabilitatea ca cea mai mică valoare să fie cuprinsă în intervalul  $(x, x + dx)$  este  $f(x)dx$ , iar celelalte variabile  $x_2, \dots, x_n$ , fiind mai mari decît  $x$ , au fiecare probabilitatea  $1 - F(x)$ . Prin urmare, probabilitatea elementului minimal este

$$\frac{n!}{1!(n-1)!} [1 - F(x)]^{n-1} f(x) dx = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x) dx.$$

În același mod se obține densitatea de probabilitate pentru elementul maximal. Ea este

$$n[F(x)]^{n-1} f(x) dx.$$

Ca exemplu, vom da repartiția rectangulară pentru care funcția de repartiție este

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad (a \leq x \leq b),$$

iar densitatea

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

Aplicând formulele de mai sus, se obțin după calcule simple :

$$M(x_n - x_1) = b - a \frac{2(b-a)}{n+1},$$

$$D^2(x_n - x_1) = \frac{2(n+1)}{(n+1)^2(n+2)} (b-a)^2,$$

care arată că amplitudinea de selecție  $(x_n - x_1)$  este un estimator corect, deplasat pentru lungimea  $b - a$ .

## VI. Estimația mediei

Să considerăm o populație teoretică definită prin funcția de repartiție  $F(x)$ .  
Fie  $m$  media acestei populații, presupunând că există

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x).$$

Ne propunem să determinăm un estimator pentru  $m$ , pe baza unei selecții de  $m$  valori independente

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Este natural să presupunem că acest estimator este media de sondaj

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Să mai introducem momentul de ordinul al doilea al populației teoretice

$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x)$$

și dispersia

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 dF(x).$$

Pentru a arăta că  $\bar{x}$  este un estimator al lui  $m$ , vom calcula momentele de primele două ordine.

$$M(\bar{x}) = \frac{1}{n} M\left(\sum x_i\right) = \frac{1}{n} \sum M(x_i) = m,$$

$$D^2(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} D^2\left(\sum x_i^2\right) = \frac{1}{n^2} \sum D^2(x_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Formulele de mai sus ne arată că  $\bar{x}$  este un estimator corect al lui  $m$ . Să observăm că această proprietate este foarte generală.

Este suficient ca primele două momente ale populației teoretice să existe. A. Hincin a arătat că ne putem dispensa de existența momentului de ordinul al doilea. Pentru ca proprietatea să subziste este suficient să existe momentul de primul ordin.

În anumite cazuri particulare se poate determina și repartiția mediei de selecție. Vom examina câteva dintre ele.

a) *Repartiția normală.*

Dacă populația teoretică este normală  $N(m, \sigma)$  se poate demonstra că repartiția mediei de selecție este  $N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ .

Să notăm prin  $\varphi(t)$  funcția caracteristică a mediei de selecție  $\bar{x}$ :

$$\varphi(t) = M(e^{it\bar{x}}) = M\left(e^{i\frac{t}{n}\sum x_k}\right) = \prod_k M\left(e^{i\frac{t}{n}x_k}\right).$$

Însă am arătat că dacă  $\xi$  este o repartiție normală, avem:

$$\varphi(u) = M(e^{iu\xi}) = e^{m i u - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

În formula de mai sus, făcînd  $u = \frac{t}{n}$ , rezultă

$$\varphi(t) = e^{m i t - \frac{\sigma^2 t^2}{n}}$$

adică tocmai funcția caracteristică a repartiției normale  $N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ .

b) *Repartiția Poisson.*

Să admitem că repartiția teoretică este o repartiție Poisson cu parametrul  $\lambda$ . Procedînd ca mai sus, avem:

$$\varphi(t) = M(e^{it\bar{x}}) = \prod_k M\left(e^{i\frac{t}{n}x_k}\right).$$

Efectuînd substituția

$$u = \frac{t}{n}$$

$$\varphi(t) = \prod_k M(e^{i u x_k}) = \prod_k e^{\lambda(e^{i u} - 1)} = e^{n\lambda(e^{i u} - 1)}$$

Am stabilit astfel valoarea exactă a funcției caracteristice.

## VII. Estimația dispersiei

Estimația dispersiei în cazul general al unei repartiții teoretice prezintă în domeniul statisticii un interes capital. Referitor la populația teoretică notăm prin  $F(x)$  funcția de repartiție, prin  $m$  momentul de primul ordin, prin  $m_2$  momentul de ordinul al doilea și prin  $\sigma^2$  dispersia.

Fie

$$\sigma^2 = m_2 - m^2.$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

o selecție de  $n$  probe independente.

Este natural pentru estimarea lui  $\sigma^2$  să considerăm dispersia de selecție. Notăm:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i,$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2.$$

Vom calcula  $M(\bar{\sigma}^2)$ ,  $D^2(\bar{\sigma}^2)$ .

Pentru simplificarea calculelor, vom introduce variabila  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$y_i = x_i - m, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pentru aceste variabile avem :

$$M(y_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$D^2(y_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Se constată ușor că

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2$$

unde

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i.$$

Ținând seamă de această valoare obținem :

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n^2} \sum y_i^2 - \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} y_i y_j,$$

$$M(\bar{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sum M(y_i^2) - \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} M(y_i)M(y_j),$$

$$M(\bar{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}.$$

Vom calcula acum dispersia lui  $\bar{\sigma}^2$

$$D^2(\bar{\sigma}^2) = M[(\bar{\sigma}^2)^2] - [M(\bar{\sigma}^2)]^2 = M\left(\frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2\right)^2 - \frac{(n-1)^2}{n^2} \sigma^4.$$

Însă

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \left[ \sum (y_i - \bar{y})^2 \right]^2 &= \frac{1}{n^2} \left( \frac{n-1}{n} \sum y_i^2 - \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} y_i y_j \right)^2 = \\ &= \frac{1}{n^2} \left[ \frac{(n-1)^2}{n^2} \left( \sum y_i^2 \right)^2 + \frac{4}{n^4} \left( \sum_{i < j} y_i y_j \right)^2 - \frac{4(n-1)}{n^4} \sum y_i^2 \sum_{i < j} y_i y_j \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \left[ \frac{1}{n^2} \sum (y_i - \bar{y})^2 \right]^2 &= \frac{(n-1)^2}{n^4} M \left[ \sum y_i^2 \right]^2 + \frac{4}{n^4} M \left( \sum_{i < j} y_i y_j \right)^2 - \\ &- \frac{4(n-1)}{n^4} M \left[ \sum y_i^2 \sum_{i < k} y_i y_j \right] \end{aligned}$$

deoarece din cauză că

$$M(y_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

rezultă

$$M \left( \sum_{i < j} y_i y_j \right)^2 = M \left( \sum_{i < j} y_i^2 y_j^2 \right) = \sum_{i < j} M(y_i^2)M(y_j^2) = \frac{n(n-1)}{2} \sigma^4 \quad M \left[ \sum y_i^2 \sum_{i < j} y_i y_j \right] = 0$$

$$M \left[ \sum y_i^2 \right]^2 = \sum M(y_i^2) + 2 \sum_{i < j} M(y_i^2)M(y_j^2) = nm_4 + n(n-1)\sigma^4.$$

unde

$$(My_i^4) = m_4, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Să notăm prin  $0\left(\frac{1}{n}\right)$  o funcție de  $n$ , care tinde către zero odată cu  $\frac{1}{n}$ .  
În expresia lui

$$M\left[\frac{1}{n^2} \sum (y_i - \bar{y})^2\right]^2$$

termenii care o compun se pot scrie :

$$\frac{(n-1)^2}{n^4} M\left[\sum y_i^2\right]^2 = \frac{(n-1)^2}{n^4} [nm_4 + n(n-1)\sigma^4] = \sigma^4 + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{4}{n^4} M\left(\sum y_i y_j\right)^2 = \frac{4}{n^4} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \sigma^4 = 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{4(n-1)}{n^4} M\left[\sum y_i^2 - \sum_{i < j} y_i y_j\right] = 0$$

deoarece  $M(y_i) = 0$ .

Prin urmare :

$$M[(\bar{\sigma}^2)^2] = \sigma^4 + 0\left(\frac{1}{n}\right); [M(\bar{\sigma}^2)]^2 = \sigma^4 + 0\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$D^2(\bar{\sigma}^2) = M[(\bar{\sigma}^2)^2] - [M(\bar{\sigma}^2)]^2 = 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Formulele :

$$M(\bar{\sigma}^2) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}; D^2(\bar{\sigma}^2) = 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

ne arată că  $\sigma^2$  este un estimator corect, deplasat.

Putem însă construi ușor un estimator nedeplasat. Deoarece

$$M(\bar{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

rezultă că

$$M\left(\frac{n}{n-1} \bar{\sigma}^2\right) = M\left(\frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y})^2\right) = \sigma^2.$$

Prin urmare funcția de selecție :

$$\frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

este un estimator corect, nedeplasat, care trebuie deci preferat lui  $\sigma^2$ .

Se explică astfel pentru ce în teoria erorilor de observație, dacă se obțin abaterile observațiilor de la valoarea lor medie pe care le notăm prin  $\varepsilon_1,$

$\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$

pentru evaluarea erorii medii la pătrat se folosește expresia

$$\frac{1}{n-1} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2)$$

în loc de

$$\frac{1}{n} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2)$$

cum în mod fals arată intuiția.

$$t^2 = \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2$$

TABELĂ ANEXĂ I

$$g(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \right); \quad H(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(t)$$

$t$	$g(t)$	$H(t)$	$t$	$g(t)$	$H(t)$	$t$	$g(t)$	$H(t)$
.00	.39894	.00000	.45	.36053	.17364	.90	.26609	.31594
.01	.39892	.00399	.46	.35889	.17724	.91	.26369	.31859
.02	.39886	.00798	.47	.35723	.18082	.92	.26129	.32121
.03	.39876	.01197	.48	.35553	.18439	.93	.25888	.32381
.04	.39862	.01595	.49	.35381	.18793	.94	.25647	.32639
.05	.39844	.01994	.50	.35207	.19146	.95	.25406	.32894
.06	.39822	.02392	.51	.35029	.19497	.96	.25164	.33147
.07	.39797	.02790	.52	.34849	.19847	.97	.24923	.33398
.08	.39767	.03188	.53	.34667	.20194	.98	.24681	.33646
.09	.39733	.03586	.54	.34482	.20540	.99	.24439	.33891
.10	.39695	.03983	.55	.34294	.20884	1.00	.24197	.34134
.11	.39654	.04380	.56	.34105	.21226	1.01	.23955	.34375
.12	.39608	.04776	.57	.33912	.21566	1.02	.23713	.34614
.13	.39559	.05172	.58	.33718	.21904	1.03	.23471	.34850
.14	.39505	.05567	.59	.33521	.22240	1.04	.23230	.35083
.15	.39448	.05962	.60	.33322	.22575	1.05	.22988	.35314
.16	.39387	.06356	.61	.33121	.22907	1.06	.22747	.35543
.17	.39322	.06749	.62	.32918	.23237	1.07	.22506	.35769
.18	.39253	.07142	.63	.32713	.23565	1.08	.22265	.35993
.19	.39181	.07535	.64	.32506	.23891	1.09	.22025	.36214
.20	.39104	.07926	.65	.32297	.24215	1.10	.21785	.36433
.21	.39024	.08317	.66	.32086	.24537	1.11	.21546	.36650
.22	.38940	.08706	.67	.31874	.24857	1.12	.21307	.36864
.23	.38853	.09095	.68	.31659	.25175	1.13	.21069	.37076
.24	.38762	.09483	.69	.31443	.25490	1.14	.20831	.37286
.25	.38667	.09871	.70	.31225	.25804	1.15	.20594	.37493
.26	.38568	.10257	.71	.31006	.26115	1.16	.20357	.37698
.27	.38466	.10642	.72	.30785	.26424	1.17	.20121	.37900
.28	.38361	.11026	.73	.30563	.26730	1.18	.19886	.38100
.29	.38251	.11409	.74	.30339	.27035	1.19	.19652	.38298
.30	.38139	.11791	.75	.30114	.27337	1.20	.19419	.38493
.31	.38023	.12172	.76	.29887	.27637	1.21	.19186	.38686
.32	.37903	.12552	.77	.29659	.27935	1.22	.18954	.38877
.33	.37780	.12930	.78	.29431	.28230	1.23	.18724	.39065
.34	.37654	.13307	.79	.29200	.28524	1.24	.18494	.39251
.35	.37524	.13683	.80	.28969	.28814	1.25	.18265	.39435
.36	.37391	.14058	.81	.28737	.29103	1.26	.18037	.39617
.37	.37255	.14431	.82	.28504	.29389	1.27	.17810	.39796
.38	.37115	.14803	.83	.28269	.29673	1.28	.17585	.39973
.39	.36973	.15173	.84	.28034	.29955	1.29	.17360	.40147
.40	.36827	.15542	.85	.27798	.30234	1.30	.17137	.40320
.41	.36678	.15910	.86	.27562	.30511	1.31	.16915	.40490
.42	.36526	.16276	.87	.27324	.30785	1.32	.16694	.40658
.43	.36371	.16640	.88	.27086	.31057	1.33	.16474	.40824
.44	.36213	.17003	.89	.26848	.31327	1.34	.16256	.40988

(continue)

$t$	$g(t)$	$H(t)$	$t$	$g(t)$	$H(t)$	$t$	$g(t)$	$H(t)$
1.35	.16038	.41149	1.80	.07895	.46407	2.25	.03174	.48778
1.36	.15822	.41309	1.81	0.7754	.46485	2.26	.03103	.48809
1.37	.15608	.41466	1.82	.07614	.46562	2.27	.03034	.48840
1.38	.15395	.41621	1.83	.07477	.46638	2.28	.02965	.48870
1.39	.15183	.41774	1.84	.07341	.46712	2.29	.02898	.48899
1.40	.14973	.41924	1.85	.07206	.46784	2.30	.02833	.48928
1.41	.14764	.42073	1.86	.07074	.46856	2.31	.02768	.48956
1.42	.14556	.42220	1.87	.06943	.46926	2.32	.02705	.48983
1.43	.14350	.42364	1.88	.06814	.46995	2.33	.02643	.49010
1.44	.14146	.42507	1.89	.06687	.47062	2.34	.02582	.49036
1.45	.13943	.42647	1.90	.06562	.47128	2.35	.02522	.49061
1.46	.13742	.42786	1.91	.06439	.47193	2.36	.02463	.49086
1.47	.13542	.42922	1.92	.06316	.47257	2.37	.02406	.49111
1.48	.13344	.43056	1.93	.06195	.47320	2.38	.02349	.49134
1.49	.13147	.43189	1.94	.06077	.47381	2.39	.02294	.49158
1.50	.12952	.43319	1.95	.05959	.47441	2.40	.02239	.49180
1.51	.12758	.43448	1.96	.05844	.47500	2.41	.02186	.49202
1.52	.12566	.43574	1.97	.05730	.47558	2.42	.02134	.49224
1.53	.12376	.43699	1.98	.05618	.47615	2.43	.02083	.49245
1.54	.12188	.43822	1.99	.05508	.47670	2.44	.02033	.49266
1.55	.12001	.43943	2.00	.05399	.47725	2.45	.01984	.49286
1.56	.11816	.44062	2.01	.05292	.47778	2.46	.01936	.49305
1.57	.11632	.44179	2.02	.05186	.47831	2.47	.01889	.49324
1.58	.11450	.44295	2.03	.05082	.47882	2.48	.01842	.49343
1.59	.11270	.44408	2.04	.04980	.47932	2.49	.01797	.49361
1.60	.11092	.44520	2.05	.04879	.47982	2.50	.01753	.49379
1.61	.10915	.44630	2.06	.04780	.48030	2.51	.01709	.49396
1.62	.10741	.44738	2.07	.04682	.48077	2.52	.01667	.49413
1.63	.10567	.44845	2.08	.04586	.48124	2.53	.01625	.49430
1.64	.10396	.44950	2.09	.04491	.48169	2.54	.01585	.49446
1.65	.10226	.45053	2.10	.04398	.48214	2.55	.01545	.49461
1.66	.10059	.45154	2.11	.04307	.48257	2.56	.01506	.49477
1.67	.09893	.45254	2.12	.04217	.48300	2.57	.01468	.49492
1.68	.09728	.45352	2.13	.04128	.48341	2.58	.01431	.49506
1.69	.09566	.45449	2.14	.04041	.48382	2.59	.01394	.49520
1.70	.09405	.45543	2.15	.03955	.48422	2.60	.01358	.49534
1.71	.09246	.45637	2.16	.03871	.48461	2.61	.01323	.49547
1.72	.09089	.45728	2.17	.03788	.48500	2.62	.01289	.49560
1.73	.08933	.45818	2.18	.03706	.48537	2.63	.01256	.49573
1.74	.08780	.45907	2.19	.03626	.48574	2.64	.01223	.49585
1.75	.08628	.45994	2.20	.03547	.48610	2.65	.01191	.49598
1.76	.08478	.46080	2.21	.03470	.48645	2.66	.01160	.49609
1.77	.08329	.46164	2.22	.03394	.48679	2.67	.01130	.49621
1.78	.08183	.46246	2.23	.03319	.48713	2.68	.01100	.49632
1.79	.08038	.46327	2.24	.03246	.48745	2.69	.01071	.49643

(continue)

$t$	$g(t)$	$H(t)$	$t$	$g(t)$	$H(t)$	$t$	$g(t)$	$H(t)$
2.70	.01042	.49653	3.15	.00279	.49918	3.60	.00061	.49984
2.71	.01014	.49664	3.16	.00271	.49921	3.61	.00059	.49985
2.72	.00987	.49674	3.17	.00262	.49924	3.62	.00057	.49985
2.73	.00961	.49683	3.18	.00254	.49926	3.63	.00055	.49986
2.74	.00935	.49693	3.19	.00246	.49929	3.64	.00053	.49986
2.75	.00909	.49702	3.20	.00238	.49931	3.65	.00051	.49987
2.76	.00885	.49711	3.21	.00231	.49934	3.66	.00049	.49987
2.77	.00861	.49720	3.22	.00224	.49936	3.67	.00047	.49988
2.78	.00837	.49728	3.23	.00216	.49938	3.68	.00046	.49988
2.79	.00814	.49736	3.24	.00210	.49940	3.69	.00044	.49989
2.80	.00792	.49744	3.25	.00203	.49942	3.70	.00042	.49989
2.81	.00770	.49752	3.26	.00203	.49944	3.71	.00041	.49990
2.82	.00748	.49760	3.27	.00196	.49946	3.72	.00039	.49990
2.83	.00727	.49767	3.28	.00184	.49948	3.73	.00038	.49990
2.84	.00707	.49774	3.29	.00178	.49950	3.74	.00037	.49991
2.85	.00687	.49781	3.30	.00172	.49952	3.75	.00035	.49991
2.86	.00668	.49788	3.31	.00167	.49953	3.76	.00034	.49992
2.87	.00649	.49795	3.32	.00161	.49955	3.77	.00033	.49992
2.88	.00631	.49801	3.33	.00156	.49957	3.78	.00031	.49992
2.89	.00613	.49807	3.34	.00151	.49958	3.79	.00030	.49992
2.90	.00595	.49813	3.35	.00146	.49960	3.80	.00029	.49993
2.91	.00578	.49819	3.36	.00141	.49961	3.81	.00028	.49993
2.92	.00562	.49825	3.37	.00136	.49962	3.82	.00027	.49993
2.93	.00545	.49831	3.38	.00132	.49964	3.83	.00026	.49994
2.94	.00530	.49836	3.39	.00127	.49965	3.84	.00025	.49994
2.95	.00514	.49841	3.40	.00123	.49966	3.85	.00024	.49994
2.96	.00499	.49846	3.41	.00119	.49968	3.86	.00023	.49994
2.97	.00485	.49851	3.42	.00115	.49969	3.87	.00022	.49995
2.98	.00471	.49856	3.43	.00111	.49970	3.88	.00021	.49995
2.99	.00457	.49861	3.44	.00107	.49971	3.89	.00021	.49995
3.00	.00443	.49865	3.45	.00104	.49972	3.90	.00020	.49995
3.01	.00430	.49869	3.46	.00100	.49973	3.91	.00019	.49995
3.02	.00417	.49874	3.47	.00097	.49974	3.92	.00018	.49996
3.03	.00405	.49878	3.48	.00094	.49975	3.93	.00018	.49996
3.04	.00393	.49882	3.49	.00090	.49976	3.94	.00017	.49996
3.05	.00381	.49886	3.50	.00087	.49977	3.95	.00016	.49996
3.06	.00370	.49889	3.51	.00084	.49978	3.96	.00016	.49996
3.07	.00358	.49893	3.52	.00081	.49978	3.97	.00015	.49996
3.08	.00348	.49897	3.53	.00079	.49979	3.98	.00014	.49997
3.09	.00337	.49900	3.54	.00076	.49980	3.99	.00014	.49997
3.10	.00327	.49903	3.55	.00073	.49981			
3.11	.00317	.49906	3.56	.00071	.49981			
3.12	.00307	.49910	3.57	.00068	.49982			
3.13	.00298	.49913	3.58	.00066	.49983			
3.14	.00288	.49916	3.59	.00063	.49983			

TABELĂ ANEXĂ II

$$P = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx; \quad 100 P = p.$$

n	Valorile lui $K_p^2$ în funcție de n și P									
	p=99	95	90	70	50	30	10	5	1	0.1
1	0.000	0.004	0.016	0.148	0.455	1.074	2.706	3.841	6.635	10.827
2	0.020	0.103	0.211	0.713	1.386	2.408	4.605	5.991	9.210	13.815
3	0.115	0.352	0.548	1.424	2.366	3.665	6.251	7.815	11.341	16.268
4	0.297	0.711	1.064	2.195	3.357	4.878	7.779	9.488	13.277	18.465
5	0.554	1.145	1.610	3.000	4.351	6.064	9.236	11.070	15.086	20.517
6	0.872	1.635	2.204	3.828	5.348	7.231	10.645	12.592	16.812	22.457
7	1.239	2.167	2.833	4.671	6.346	8.383	12.017	14.067	8.475	24.322
8	1.646	2.733	3.490	5.527	7.344	9.524	13.362	15.507	20.090	26.125
9	2.088	3.325	4.168	6.393	8.343	10.656	14.684	16.919	21.666	27.877
10	2.558	3.940	4.865	7.267	9.342	11.781	15.987	18.307	23.209	29.588
11	3.053	4.575	5.578	8.148	10.341	12.899	17.275	19.675	24.725	31.264
12	3.571	5.226	6.304	9.034	11.340	14.011	18.549	21.026	26.217	32.909
13	4.107	5.892	7.042	9.926	12.340	15.119	19.812	22.362	27.688	34.528
14	4.660	6.571	7.790	10.821	13.339	16.222	21.064	23.685	29.141	36.1
15	5.229	7.261	8.547	11.721	14.339	17.322	22.307	24.996	30.578	37.697
16	5.812	7.962	9.312	12.624	15.338	18.418	23.542	24.296	32.000	39.252
17	6.408	8.672	10.085	13.531	16.338	19.511	24.769	27.587	33.409	40.790
18	7.015	9.390	10.865	14.440	17.338	20.601	25.989	28.869	34.805	42.312
19	7.633	10.117	11.651	15.352	18.338	21.689	27.204	30.144	36.191	43.820
20	8.260	10.851	12.443	16.266	19.337	22.775	28.412	31.410	37.566	45.315
21	8.897	11.591	13.240	17.182	20.337	23.858	29.615	32.671	38.932	46.797
22	9.542	12.338	14.041	18.101	21.337	24.939	30.813	33.924	40.289	48.268
23	10.196	13.091	14.848	19.021	22.337	26.018	32.007	35.172	41.638	49.728
24	10.856	13.848	15.659	19.943	23.337	27.096	33.196	36.415	42.980	51.179
25	11.524	14.611	16.473	20.867	24.337	28.172	34.382	37.652	44.314	52.620
26	12.198	15.379	17.292	21.792	25.336	29.246	35.563	38.885	45.642	54.052
27	12.879	16.151	18.114	22.719	26.336	30.319	36.741	40.113	46.963	55.476
28	13.565	16.928	18.939	23.647	27.336	31.391	37.916	41.337	48.278	56.893
29	14.256	17.708	19.768	24.557	28.336	32.461	39.087	42.557	49.588	58.302
30	14.953	18.493	20.599	25.508	29.336	33.530	40.256	43.773	50.892	59.703

TABELĂ ANEXĂ III

$$P = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{t_p}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx; \quad 100P = p.$$

n \ P	Valorile lui $t_p$ în funcție de $n$ și $p$							
	P=90	70	50	30	10	5	1	0.1
1	0.158	0.510	1.000	1.963	6.314	12.706	63.657	636.619
2	0.142	0.445	0.816	1.386	2.920	4.303	9.925	31.598
3	0.137	0.424	0.765	1.250	2.353	3.182	5.841	12.941
4	0.134	0.414	0.741	1.190	2.132	2.776	4.604	8.610
5	0.132	0.408	0.727	1.156	2.015	2.571	4.032	6.859
6	0.131	0.404	0.718	1.134	1.943	2.447	3.707	5.959
7	0.130	0.402	0.711	1.119	1.895	2.365	3.499	5.405
8	0.130	0.399	0.706	1.108	1.860	2.306	3.355	5.041
9	0.129	0.398	0.703	1.100	1.833	2.262	3.250	4.781
10	0.129	0.397	0.700	1.093	1.812	2.228	3.169	4.587
11	0.129	0.396	0.697	1.088	1.796	2.201	3.106	4.437
12	0.128	0.395	0.695	1.083	1.782	2.179	3.055	4.318
13	0.128	0.394	0.694	1.079	1.771	2.160	3.012	4.221
14	0.128	0.393	0.692	1.076	1.761	2.145	2.977	4.140
15	0.128	0.393	0.691	1.074	1.753	2.131	2.947	4.073
16	0.128	0.392	0.690	1.071	1.746	2.120	2.921	4.015
17	0.128	0.392	0.689	1.069	1.740	2.110	2.898	3.965
18	0.127	0.392	0.688	1.067	1.734	2.101	2.878	3.922
19	0.127	0.391	0.688	1.066	1.729	2.093	2.861	3.883
20	0.127	0.391	0.687	1.064	1.725	2.086	2.845	3.850
21	0.127	0.391	0.686	1.063	1.721	2.080	2.831	3.819
22	0.127	0.390	0.686	1.061	1.717	2.074	2.819	3.792
23	0.127	0.390	0.685	1.060	1.714	2.069	2.807	3.767
24	0.127	0.390	0.685	1.059	1.711	2.064	2.797	3.745
25	0.127	0.390	0.684	1.058	1.708	2.060	2.787	3.725
26	0.127	0.390	0.684	1.058	1.706	2.056	2.779	3.707
27	0.127	0.389	0.684	1.057	1.703	2.052	2.771	3.690
28	0.127	0.389	0.683	1.056	1.701	2.048	2.763	3.674
29	0.127	0.389	0.683	1.055	1.699	2.045	2.756	3.659
30	0.127	0.389	0.683	1.055	1.697	2.042	2.750	3.646
40	0.126	0.388	0.681	1.050	1.648	2.021	2.704	3.551
60	0.126	0.387	0.679	1.046	1.671	2.000	2.660	3.460
120	0.126	0.386	0.677	1.041	1.658	1.980	2.617	3.373
	0.126	0.385	0.674	1.036	1.645	1.960	2.576	3.291

## BIBLIOGRAFIE

1. Chung, K. L.: *A course in probability theory*, 1968.
2. Ciucu, G.: *Elemente de teoria probabilității și Statistică matematică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1963.
3. Gnedenko, B.: *The theory of probability*, Mir publishers, Moscow, 1976
4. Gnedenko, B. V., Beleaev, I. K., Soloviev, A. D.: *Metode matematice în teoria stabilității*, Editura tehnică, București, 1968.
5. Haggège, Maurice: *Éléments de calcul des probabilités et applications* O.C.D.L., Paris, 1967.
6. Iosifescu, M., Mihoc, Gh., și colectiv.: *Teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura tehnică, București, 1966.
7. Kaufmann, A.: *Metode și modele ale cercetării operaționale (Matematica întreprinderilor)*, Editura științifică, București, 1967.
8. Kolmogorov, A. N.: *Matematica: conținutul, metodele și importanța ei.* (Cap. XI, *Teoria probabilităților*), Editura științifică, București, 1960.
9. Lee, A. M.: *Teoria așteptării cu aplicații.* (Seria *Bazele matematice ale cercetării operaționale*), Editura tehnică, București, 1976.
10. Littlewood, J. E.: *Varietăți matematice* (cap. VI *Dilema teoriei probabilităților*), Editura enciclopedică Română, București, 1969.
11. Loève, M.: *Probability theory*, D. Van Nostrand Comp., 1955.
12. Mihoc, Gh., Ciucu, G., Muja, A.: *Modele matematice ale așteptării*, Editura Academiei R.S.R., București, 1973.
13. Mihoc, Gh., Ciucu, G., Craiu, V.: *Teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1970.
14. Mihoc, Gh., Muja, A., Diațcu, E.: *Bazele matematice ale teoriei stabilității*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
15. Mihoc, Gh., Micu, N.: *Elemente de teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1966.
16. Mihoc, Gh., Micu, N.: *Introducere în teoria probabilităților*, Editura tehnică, București, 1970.
17. Mihoc, Gh., Ciucu, G.: *Introducere în teoria așteptării*, Editura tehnică, București, 1967.
18. Neveu, J.: *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson et comp., Paris, 1970.

19. Onicescu, O.: *Calculul probabilităților*, Editura tehnică, București, 1956.
20. Onicescu, O., Mihoc, Gh.: *Lecții de statistică matematică*, Editura tehnică, București, 1957.
21. Onicescu, O., Mihoc, Gh., Ionescu-Tulcea, C. T.: *Calculul probabilităților și aplicații*, Editura Academiei R.S.R., 1956.
22. Polya, G.: *Matematica și raționamentele plauzibile*, Editura științifică București, 1962.
23. Sâmboan, G. și colectiv: *Teoria probabilităților*, Editura didactică și pedagogică, București, 1967.
24. Rozanov, I.: *Processus aléatoires*, Editions de Moskow, 1975.
25. Vențel, E.: *Theorie des probabilités*, Editions de Moscow, 1973.
26. Weaver, W.: *Doamna Șansă*, Editura tehnică, București, 1970.

## CUPRINS

Scurtă privire asupra teoriei probabilităților	5
<b>Capitolul 1. Introducere elementară în teoria probabilităților</b>	<b>13</b>
✱ 1.1. Evenimente. Probabilități	13
Probleme	13
✱ 1.2. Probabilitatea condiționată. Dependența și independența evenimentelor	23
1.3. Utilizarea terminologiei și notațiilor din teoria mulțimilor.	
Axiomele probabilității	33
Probleme	13
✱ 1.4. Formule și scheme probabiliste	44
Probleme	
• 1.5. Variabile aleatoare. Funcții de repartiție. Densitatea de repartiție	74
Probleme	
• 1.6. Valori medii. Dispersie. Inegalitatea lui Cebîșev. Momente	93
Probleme	
1.7. Cîteva legi de probabilitate uzuale	116
Probleme	
1.8. Aplicații ale teoriei probabilităților (în teoria așteptării și teoria fiabilității)	142
— Teoria așteptării	142
— Teoria fiabilității	155
1.9. (Anexă). Funcția caracteristică	160
 <b>Capitolul 2. Aspecte teoretice ale calculului probabilităților</b>	 <b>164</b>
2.1. Câmp de probabilitate	164
2.2. Variabile aleatoare. Funcții de repartiție	177
2.3. Valori medii	181
2.4. Șiruri de variabile aleatoare și șiruri de funcții de repartiție	190
— Convergența aproape sigură	190
— Convergența în probabilitate	192

— Convergența în medie . . . . .	194
— Convergența în repartiție . . . . .	196
2.5. Legea numerelor mari . . . . .	204
<b>Capitolul 3. Statistică matematică . . . . .</b>	<b>213</b>
3.1. Populația statistică . . . . .	213
3.2. Valori medii. Momente . . . . .	228
3.3. Repartiții teoretice și empirice. Ajustări . . . . .	<u>236</u>
3.4. Corelație, Regresie . . . . .	242
3.5. Teoria selecției . . . . .	252
3.6. Estimația parametrilor . . . . .	278

*Coli de tipar 18,250. B.T. 15.04.1980.  
Format 16/70×100. Apărut 1980.*

---

*I. P. „Oltenia“ Craiova  
Str. M. Viteazul, nr. 4  
Republica Socialistă România  
Plan 6 383/14/1980.*

