VICTOR IAVORSCHI

Matematica

clasa XII-A

TESTE PREGĂTITOARE
PENTRU EXAMENUL
DE BACALAUREAT



Prefață

Prezenta lucrare este recomndată elevilor din clasele a X-a - XII-a şi prfesorilor de matematică pentru pregătirea susținerii examenului de Bacalaureat la matematică.

Culegerea conține 75 de teste pentru profilul real, 25 de teste sunt însoțite de soluții complete, iar 50 de teste sunt însoțite de soluții. Fiecare test conține 12 itemi, în total 900 de itemi.

Culegerea de teste este elaborată în conformitate cu curriculumul modernizat la matematică în anul 2010 pentru clasele a V-a – XII-a.

Sperăm că lucrarea dată va fi un suport bun pentru pregătirea către susținerea examenului de absolvire a liceului la matematică.

SUCCES.

Autorul

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții
Iavorschi, Victor. Matematica: Teste pregătitoare pentru examenul de Bacalaureat pentru clasa XII-a / Victor Iavorschi. – Ch.: S. n., 2016 (Tipografia Orhei) – 160 p.

ISBN: 978-9975-3118-4-7.
51(079)
I-31

1000 ex.

TESTUL 1

1. Calculaţi valoarea expresiei $A=\log_6 48-\log_6 4+\log_6 3$.

2. Se consideră pătratul $ABCD$, în care $AC\cap BD=\{O\}$, $OM\perp CD$, $M\in(CD)$. Dacă $OM=3cm$, să se afle aria pătratului $ABCD$.

3. Într-o clasă cu 20 elevi, 75% din numărul elevilor se ocupă în secţii sportive. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare un elev din această clasă, el să nu fie membru a unei secţii sportive.

4. Calculaţi $\cos\alpha$, ştiind că $tg\alpha=\frac{1}{2}$ şi $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Să se afle valoarea determinantului $d=\begin{vmatrix}\log_2 5 & 4^2\\ 2^{-4} & \log_5 2\end{vmatrix}$.

6. Un buştean de nuc are formă cilindrică cu lungimea de $4m$ şi diametrul de $40cm$. Ştiind că $1m^3$ de lemn de nuc costă 800 lei, calculaţi preţul acestui buştean.

7. Să se arate că numărul $z=(1+i)^4+(1-i)^4$ este întreg.

8. Calculaţi $\int\frac{dx}{x\left(8+\ln^2 x\right)}$.

9. Măsura unghiului ascuţit al unui romb este egală cu 60°, iar aria rombului este de $18\sqrt{3}\,cm^2$. Să se afle lungimea diagonalei mai mici a rombului.

10. Să se rezolve în R inecuaţia $\left(2-|x-1|\right)\cdot\log_{\frac{1}{10}}\left(4x^2+8\right)\le 0$.

11. Să se afle cea mai mare valoare întreagă a parametrului a pentru care funcţia $f:R\to R$, $f(x)=ax^2-x^3-3ax-1$ este strict descrescătoare pe R.

12. Înălţimea unei piramide patrulatere regulate are lungimea de $4cm$, iar muchia laterală are $\sqrt{34}\,cm$. Să se afle aria sferei înscrise în piramidă.

SOLUŢII

1. $A=\log_6 48-\log_6 4+\log_6 3=\log_6\frac{48}{4}+\log_6 3=\log_6 12+\log_6 3=\log_6(12\cdot 3)=\log_6 36=2$

RĂSPUNS: $A=2$.

2. Dacă $OM\perp CD$ şi $OM=3cm$, atunci latura pătratului are lungimea $6cm$, şi aria pătratului $ABCD$ va fi $A=6^2=36cm^2$.

RĂSPUNS: $A=36cm^2$.

3. Dacă 75% din numărul elevilor clasei se ocupă în secţii sportive, rezultă că 25% nu se ocupă în secţii sportive. Numărul elevilor care nu se ocupă în secţii sportive este $\frac{25}{100}\cdot 20=5$ elevi. Aşadar, numărul cazurilor posibile este 20, numărul cazurilor favorabile este 5, deci probabilitatea este $p=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

RĂSPUNS: $p=\frac{1}{4}$.

4. Deoarece $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos\alpha>0$. Folosind relaţia $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ obţinem $1+\frac{1}{4}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\frac{5}{4}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$, de unde $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

RĂSPUNS: $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

5. $d=\begin{vmatrix}\log_2 5 & 4^2\\ 2^{-4} & \log_5 2\end{vmatrix}=\log_2 5\cdot\log_5 2-2^{-4}\cdot 4^2=1-2^{-4}\cdot 2^4=1-1=0$ (s-a folosit proprietatea $\log_a b\cdot\log_b a=1$, unde $a,b\in R_+^*\setminus\{1\}$).

RĂSPUNS: $d=0$.

6. Putem considera buşteanul ca un cilindru cu raza bazei $20cm=0,2m$ şi înălţimea de $4m$. Volumul buşteanului va fi $V=\pi R^2H=\pi\cdot(0,2)^2\cdot 4=0,16\pi\approx 0,5024\,m^3$. Preţul buşteanului va fi $0,5024\cdot 800\approx 401,92$ lei.

RĂSPUNS: 401,92 lei.

7. $z=(1+i)^4+(1-i)^4=\left[(1+i)^2\right]^2+\left[(1-i)^2\right]^2=\left(1+2i+i^2\right)^2+\left(1-2i+i^2\right)^2=\left(1+2i-1\right)^2+\left(1-2i-1\right)^2=(2i)^2+(-2i)^2=-4-4=-8$.

RĂSPUNS: $z=-8\in Z$.

8. Aplicăm metoda schimbării de variabilă: $\int\frac{dx}{x\left(8+\ln^2 x\right)}=\left[\begin{matrix}\ln x=t\\ \frac{1}{x}dx=dt\end{matrix}\right]=\int\frac{dt}{8+t^2}=\int\frac{dt}{t^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{1}{2\sqrt{2}}+c$.

RĂSPUNS: $\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{1}{2\sqrt{2}}+c$.

9. Fie rombul $ABCD$ cu $m(\angle A)=m(\angle C)=60^\circ$ și $A_{romb}=18\sqrt{3}\,cm^2$. Notăm lungimea laturii rombului cu a. Atunci aria rombului va fi $A=a^2\cdot\sin 60^\circ=a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Obținem $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}\Rightarrow a^2=36$ și $a=6$, deci latura rombului are lungimea $6\,cm$. Deoarece triunghiul ABD este echilateral, rezultă că lungimea diagonalei mai mici BD va fi egală cu $6\,cm$.

RĂSPUNS: $d=6\,cm$.

10. DVA al inecuației este mulțimea R. Se observă că $\log_{\frac{1}{10}}\left(4x^2+8\right)<0$ pentru orice $x\in R\Rightarrow 2-|x-1|\geq 0\Leftrightarrow -|x-1|\geq -2\Leftrightarrow |x-1|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq x-1\leq 2\Leftrightarrow -1\leq x\leq 3$.

RĂSPUNS: $S=[-1;3]$.

11. Pentru ca funcția să fie strict descrescătoare pe R trebuie ca derivata funcției să fie negativă pentru orice $x\in R$. $f'(x)=\left(ax^2-x^3-3ax-1\right)'=2ax-3x^2-3a$. Se impune condiția $f'(x)<0$ pentru orice $x\in R$. Deci avem $-3x^2+2ax-3a<0$, pentru orice $x\in R$. Rezultă $3x^2-2ax+3a>0$ pentru orice $x\in R$, care are loc doar dacă discriminantul este negativ $\Rightarrow 4a^2-36a<0$, de unde obținem $a\in(0;9)$. Cea mai mare valoare întreagă a parametrului a din intervalul obținut este $a=8$.

RĂSPUNS: $a=8$.

12. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vîrful V și baza pătratul $ABCD$, O fiind punctul de intersecție al diagonalelor bazei. $VO=4\,cm$, $VC=\sqrt{34}\,cm$, atunci conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOC avem $OC=\sqrt{VC^2-VO^2}=\sqrt{34-16}=3\sqrt{2}\,cm$. Atunci $AC=2\cdot OC=2\cdot 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}\,cm$. Fie latura pătratului din baza piramidei egală cu a. Atunci $a\sqrt{2}=6\sqrt{2}\Rightarrow a=6$, deci latura bazei piramidei este $6\,cm$. Fie M mijlocul laturii $[AB]$ și N mijlocul laturii $[CD]$. Sfera fiind înscrisă în piramidă, rezultă că un cerc mare al sferei este înscris în triunghiul isoscel VMN. $MN=6\,cm$. $VM=\sqrt{VO^2+OM^2}=\sqrt{16+9}=5\,cm$. $p=\frac{VM+VN+MN}{2}=\frac{5+5+6}{2}=8\,cm$. $A_{VMN}=\frac{1}{2}\cdot MN\cdot VO=12\,cm^2$. Obținem $r=\frac{A}{p}=\frac{3}{2}cm$. Aria sferei va fi $A=4\pi r^2=4\pi\cdot\frac{9}{4}=9\pi\,cm^2$.

RĂSPUNS: $A=9\pi\,cm^2$.

TESTUL 2

1. Calculați valoarea expresiei $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot 3^{-2}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$.

2. Într-un triunghi cele trei linii mijlocii au lungimile de $6\,cm$, $5\,cm$, $6{,}5\,cm$. Să se afle perimetrul triunghiului.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_8=10$ și rația $r=2$. Să se afle a_{2016}.

4. Calculați probabilitatea ca alegînd un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor 8.

5. Rezolvați în R inecuația $\log_3(x-3)>\log_3(4-x)$.

6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5\,cm$, $BC=7\,cm$, $AC=8\,cm$. Aflați măsura unghiului A al triunghiului.

7. Se consideră ecuația $x^2-x-3=0$ cu soluțiile x_1 și x_2. Fără a rezolva ecuația, să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_1+x_2$.

8. Să se afle cea mai mare valoare a funcției $f:R\to R$, $f(x)=\left(\sqrt{3}\right)^{2-x^2+4x}$.

9. Dintr-o bucată de plastilină în formă de cub cu muchia de $6\,cm$ se confecționează o piramidă patrulateră regulată cu înălțimea de $9\,cm$.

a) Calculați volumul cubului.

b) Aflați lungimea laturii bazei piramidei.

c) Aflați distanța de la un vîrf al bazei piramidei la muchia laterală opusă.

10. Să se afle soluția ecuației $\sin 2x-4\cos x=0$ care aparține intervalului $[2\pi;3\pi]$.

11. Să se afle aria figurii mărginite de liniile $y=x^2+1$, $x=1$, $x=4$, $y=0$.

12. Determinați $a\in R$ pentru care numărul $z=\frac{2+i}{a+2+i}$ este real.

SOLUȚII

1. $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot 3^{-2}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=2^3\cdot\frac{1}{3^2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{9}-\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$.

RĂSPUNS: $a=\frac{4}{9}$.

2. Lungimile laturilor triunghiului vor fi egale respectiv cu $12\,cm$, $10\,cm$ și $13\,cm$, deci perimetrul triunghiului va fi $P=12+10+13=35\,cm$.

RĂSPUNS: $P=35\,cm$.

3. Conform formulei termenului general al unei progresii aritmetice în cazul dat avem: $a_8=a_1+7r\Rightarrow 10=a_1+7\cdot 2\Rightarrow a_1=-4$. Atunci $a_{2016}=a_1+2015\cdot 2=4026$.

RĂSPUNS: $a_{2016}=4026$.

4. Numărul de cazuri posibile este 90 (numărul numerelor naturale de două cifre). Numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor 8 sunt: 17, 71, 26, 62, 35, 53, 44, 80, în total 8 numere, deci avem 8 cazuri favorabile. Obținem $p=\frac{8}{90}=\frac{4}{45}$.

RĂSPUNS: $p=\frac{4}{45}$.

5. DVA al inecuației este determinat de condițiile $\begin{cases}x-3>0\\4-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\-x>-4\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\x<4\end{cases}\Leftrightarrow x\in(3;4)$. Avem $\log_3(x-3)>\log_3(4-x)\Leftrightarrow x-3>4-x$ $\Leftrightarrow 2x>7$, de unde $x>\frac{7}{2}$ sau $x\in\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$. Ținînd cont de DVA obținem $x\in\left(\frac{7}{2};4\right)$.

RĂSPUNS: $S=\left(\frac{7}{2};4\right)$.

6. Conform teoremei cosinusurilor avem $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$ sau $2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A=AB^2+AC^2-BC^2$. Obținem $2\cdot 5\cdot 8\cdot\cos A=25+64-49$ sau $80\cos A=40$, de unde $\cos A=\frac{1}{2}$, deci $m(\angle A)=60^\circ$.

RĂSPUNS: $m(\angle A)=60^\circ$.

7. Fie ecuația $x^2-x-3=0$ cu soluțiile x_1 și x_2. Conform relațiilor lui Viete avem $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=-3\end{cases}$. Relația din enunț se scrie: $x_1^2+x_2^2+x_1+x_2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2+x_1+x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_1+x_2=1+6+1=8$.

RĂSPUNS: $x_1^2+x_2^2+x_1+x_2=8$.

8. Funcția f va obține cea mai mare valoare atunci cînd va obține cea mai mare valoare funcția $g:R\to R$, $g(x)=2-x^2+4x$ sau $g(x)=-x^2+4x+2$. $x_{max}=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{-2}=2$. $g_{max}=g(2)=6$. Atunci $f_{max}=\left(\sqrt{3}\right)^6=27$.

RĂSPUNS: $f_{max}=27$.

9. *a*) Volumul cubului este $V=6^3=216\,cm^3$.

b) Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vîrful în V, baza pătratul $ABCD$, $AC\cap BD=\{O\}$, $VO\perp(ABC)$, $VO=9\,cm$. Volumul piramidei este egal cu $216\,cm^3$. Fie a lungimea laturii bazei piramidei, atunci $A_b=a^2$. $V_{pir}=\frac{1}{3}\cdot A_b\cdot VO\to\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot 9=216$, de unde $a^2=72$ și $a=6\sqrt{2}\,cm$.

c) Fie $AM\perp VC$, deci AM este distanța de la vîrful A al bazei la muchia laterală opusă VC. AM este înălțime corespunzătoare laturii VC în triunghiul VAC. $AC=AD\sqrt{2}=6\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=12\,cm$ și $OC=6\,cm$ Atunci conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOC avem $VC=\sqrt{VO^2+OC^2}=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{81+36}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}\,cm$. $A_{VAC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot VO=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9=54\,cm^2$. Pe de altă parte, $A_{VAC}=\frac{1}{2}\cdot VC\cdot AM=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{13}\cdot AM=\frac{3}{2}\sqrt{13}\cdot AM$. Obținem $\frac{3}{2}\sqrt{13}\cdot AM=54$, de unde $AM=\frac{36\sqrt{13}}{13}cm$.

RĂSPUNS: *a*) $V_c=216\,cm^3$,

b) $a=6\sqrt{2}\,cm$, *c*) $d=\frac{36\sqrt{13}}{13}cm$.

10. DVA al ecuației este R. Avem $\sin 2x-4\cos x=0\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-4\cos x=0$ $\Leftrightarrow\sin x\cos x-2\cos x=0\Leftrightarrow\cos x(\sin x-2)=0$, de unde $\begin{bmatrix}\cos x=0\\\sin x-2=0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z \\ S=\varnothing \end{array}\right.$. Deci $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$. Pe intervalul $[2\pi;\ 3\pi]$ se află doar soluţia $x=\frac{5\pi}{2}$.

RĂSPUNS: $x=\frac{5\pi}{2}$.

11. $A=\int_1^4\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)_1^4=\frac{64}{3}+4-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}+4-1=24(u.p)$.

RĂSPUNS: $A=24(u.p)$.

12. $z=\frac{2+i}{a+2+i}\ \frac{(2+i)(a+2-i)}{[(a+2)+i]\cdot[(a+2)-i]}=\frac{2a+4-2i+ai+2i-i^2}{(a+2)^2-i^2}=\frac{2a+4+ai+1}{a^2+4a+4+1}=$

$\frac{2a+5+ai}{a^2+4a+5}=\frac{2a+5}{a^2+4a+5}+\frac{a}{a^2+4a+5}i$. Pentru ca numărul z să fie real trebuie ca $\frac{a}{a^2+4a+5}=0$, de unde $a=0$.

RĂSPUNS: $a=0$.

TESTUL 3

1. Să se scrie ca o putere cu baza a expresia $b=\left(a^{0,25}\right)^3\cdot\sqrt[8]{a}$.

2. În paralelogramul $ABCD$, triunghiul BCD este isoscel, avînd $m(\angle CBD)=92^\circ$. Să se afle măsurile unghiurilor paralelogramului.

3. Suma a trei numere naturale impare consecutive este 57. Care dintre cele trei numere nu este prim?

4. Indicaţi intervalul căruia aparţine soluţia ecuaţiei $\left(\frac{1}{8}\right)^{0,5x-1}=4$.

A) $[-3;\ -1)$; B) $[-1;\ 1)$; C) $[1;\ 3)$; D) $[3;\ 5)$.

5. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=2x-3$.

a) Calculaţi $f(1)+f(2)$.

b) Reprezentaţi graficul funcţiei f în sistemul de axe ortogonale xOy.

c) Aflaţi aria triunghiului determinat de originea sistemului de coordonate şi de punctele de intersecţie ale graficului funcţiei f cu axele de coordonate.

6. Să se rezolve în R inecuaţia $\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x-3}\geq 0$.

7. Să se afle valoarea expresiei $E=2\sin^2 2\alpha+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2\cos^2 2\alpha$ pentru $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

8. Calculaţi $\int\frac{4x-6}{x^2-3x+7}dx$.

9. Rezolvaţi în R ecuaţia $\log_7(3x+7)+\sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)}=0$.

10. Se consideră pătratul $ABCD$ cu lungimea laturii $1cm$. Punctul K se află pe latura $[CD]$, astfel încît $\frac{CK}{KD}=\frac{1}{2}$. Să se afle distanţa de la vîrful C al pătratului la dreapta AK.

11. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, D fiind domeniul maxim de definiţie.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(e^{x+1}\right)$.

b) Studiaţi monotonia funcţiei f.

12. Aflaţi lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic care are aria totală de $292cm^2$, iar suma lungimilor tuturor muchiilor de $84cm$.

SOLUȚII

1. $b=\left(a^{0,25}\right)^3\cdot\sqrt[8]{a}=\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3\cdot a^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}}=a^{\frac{7}{8}}$.

RĂSPUNS: $b=a^{\frac{7}{8}}$.

2. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $AB>BC$. Deoarece triunghiul BCD este isoscel cu $m(\angle CBD)=92^\circ$, rezultă că $BD=BC$. Atunci $m(\angle BDC)=m(\angle BCD)=\frac{180^\circ-92^\circ}{2}=44^\circ$. Aşadar, în paralelogramul $ABCD$ avem $m(\angle C)=m(\angle A)=44^\circ$, $m(\angle B)=m(\angle D)=136^\circ$.

RĂSPUNS: $m(\angle A)=m(\angle C)=44^\circ$, $m(\angle B)=m(\angle D)=136^\circ$.

3. Fie x numărul mai mic, atunci celelalte două numere vor fi $x+2$ şi $x+4$. Rezultă ecuaţia $x+x+2+x+4=57\Leftrightarrow 3x+6=57\Leftrightarrow 3x=51$, de unde $x=17$. Aşadar, cele trei numere sunt 17, 19, 21. Dintre aceste numere nu este prim numărul 21.

RĂSPUNS: Numărul 21.

4. $\left(\frac{1}{8}\right)^{0,5x-1}=4\Leftrightarrow\left(2^{-3}\right)^{0,5x-1}=2^2\Leftrightarrow 2^{-1,5x+3}=2^2\Leftrightarrow -1,5x+3=2\Leftrightarrow -1,5x=-1$, de unde $x=\frac{2}{9}$. Deoarece $-1<\frac{2}{9}<1$, rezultă răspuns corect **B**).

RĂSPUNS: Răspuns corect **B**).

5. *a)* $f(1)+f(2)=2\cdot 1-3+2\cdot 2-3=0$.

c) Graficul funcţiei $f(x)=2x-3$ intersectează axa Ox în punctul $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ şi axa Oy în punctul $B(0;-3)$. Deci avem de aflat aria triunghiului dreptunghic AOB cu catetele $OA=\frac{3}{2}$ şi $OB=3$. $A_{\Delta OB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{4}(u.p)$.

RĂSPUNS: *a)* $f(1)+f(2)=0$,

c) $A_{AOB}=\frac{9}{4}(u.p)$.

6. *DVA* al inecuaţiei $\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x-3}\geq 0$ este $(-\infty;-2)\cup(-2;3)\cup(3;+\infty)$. Inecuaţia se scrie $\frac{3(x-3)-2(x+2)}{(x+2)(x-3)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{3x-9-2x-4}{(x+2)(x-3)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{x-13}{(x+2)(x-3)}\geq 0$. Aplicînd metoda intervalelor obţinem $x\in(-2;3)\cup[13;+\infty)$.

RĂSPUNS: $S=(-2;3)\cup[13;+\infty)$.

7. $E=2\sin^2 2\alpha+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2\cos^2 2\alpha=2\left(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha\right)+2\sin\alpha=2+2\cdot\sin\frac{\pi}{6}=2+2\cdot\frac{1}{2}=2+1=3$.

RĂSPUNS: $E=3$.

8. $\int\frac{4x-6}{x^2-3x+7}dx=2\cdot\int\frac{2x-3}{x^2-3x+7}dx=\left[\begin{matrix}x^2-3x+7=t\\(2x-3)dx=dt\end{matrix}\right]=2\cdot\int\frac{dt}{t}=2\ln|t|+c=2\ln|x^2-3x+7|+c$.

RĂSPUNS: $\int\frac{4x-6}{x^2-3x+7}dx=2\ln|x^2-3x+7|+c$ sau $\int\frac{4x-6}{x^2-3x+7}dx=2\ln\left(x^2-3x+7\right)+c$, deoarece $x^2-3x+7>0$ pentru orice $x\in R$.

9. $\log_7(3x+7)+\sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)}=0$. *DVA* al ecuaţiei este determinat de condiţiile $\begin{cases}3x+7>0\\2x+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x>-7\\2x>-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\frac{7}{3}\\x>-\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\frac{7}{3};+\infty\right)$. Deci $DVA=\left(-\frac{7}{3};+\infty\right)$.

Ecuaţia se scrie $\log_7(3x+7)+|\log_7(2x+5)|=0$. Explicităm modulul.

1) $\log_7(2x+5)\geq 0\Leftrightarrow\log_7(2x+5)\geq\log_7 1\Leftrightarrow 2x+5\geq 1\Leftrightarrow x\geq -2$. Deci, dacă $x\in[-2;+\infty)$, atunci $\log_7(2x+5)\geq 0$, şi ecuaţia devine $\log_7(3x+7)+\log_7(2x+5)=0\Leftrightarrow\log_7(3x+7)(2x+5)=0$, de unde $(3x+7)(2x+5)=1\Leftrightarrow 6x^2+29x+34=0$ cu soluţiile $x_1=-\frac{17}{6}\notin DVA$ şi $x_2=-2$.

2) Dacă $x\in(-\infty;-2)$, atunci avem $\log_7(3x+7)-\log_7(2x+5)=0\Leftrightarrow\log_7(3x+7)=\log_7(2x+5)\Leftrightarrow 3x+7=2x+5$, de unde $x=-2\notin(-\infty;-2)$. Aşadar, unica soluţie a ecuaţiei este $x=-2$.

RĂSPUNS: $x=-2$.

10. Fie pătratul $ABCD$ cu latura de lungime $1cm$ şi $K\in(CD)$, astfel încît $\frac{CK}{KD}=\frac{1}{2}\Rightarrow CK=\frac{1}{3}cm$, $KD=\frac{2}{3}cm$. Fie $CM\perp AK$ (CM este distanţa de la vîrful C la dreapta AK, punctul M se află în exteriorul pătratului). Din triunghiul dreptunghic AKD, conform teoremei lui Pitagora avem $AK=\sqrt{AD^2+KD^2}=\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{13}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}cm$. $\Delta ADK\sim\Delta CMK$ (cazul I de asemănare) $\Rightarrow\frac{AD}{CM}=\frac{AK}{CK}\Rightarrow\frac{1}{CM}=\frac{\frac{\sqrt{13}}{3}}{\frac{1}{3}}\Rightarrow\frac{1}{CM}=\sqrt{13}\Rightarrow CM=\frac{1}{\sqrt{13}}$ sau $CM=\frac{\sqrt{13}}{13}cm$.

RĂSPUNS: $d=\frac{\sqrt{13}}{13}cm$.

11. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. $D=(0;+\infty)$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(e^{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{x+1}}{e^{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x+1}}=0$ (s-a aplicat regula lui *l'−Hospital*).

b) $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-x'\cdot\ln x}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$. Aflăm punctele critice rezolvînd ecuaţia $f'(x)=0$. Obţinem $\frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow 1-\ln x=0$ sau $\ln x=1$, de unde $x=e$. Tabloul de variaţie:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$+++++++++++$		0	$----------$	
$f(x)$	↗	↗	max	↘	↘

Funcţia f este crescătoare pe intervalul $(0;e)$ şi descrescătoare pe $(e;+\infty)$, $x=e$ fiind punct de maxim.

RĂSPUNS: *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(e^{x+1}\right)=0$; *b)* Funcţia f este crescătoare pe intervalul $(0;e)$ şi descrescătoare pe $(e;+\infty)$, $x=e$ fiind punct de maxim.

12. Fie a,b,c dimensiunile paralelipipedului. Aria totală este egală cu $A_t=2ab+2ac+2bc$. Mai avem $4a+4b+4c=84 \Rightarrow a+b+c=21$. Ridicînd ambele părţi ale ultimei relaţii la pătrat obţinem $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=441 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+292=441 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=149 \Rightarrow d=\sqrt{149}\ cm$ (deoarece lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a,b,c este $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$).

RĂSPUNS: $d=\sqrt{149}\,cm$.

TESTUL 4

1. Să se compare numerele $a=\log_2\cos\frac{\pi}{3}$ şi $b=\cos\pi$.

2. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în care punctele M şi N sunt mijloacele laturilor $[AB]$ şi respectiv $[BC]$. Ştiind că $MN=8cm$, să se afle lungimea diagonalei $[BD]$.

3. Determinaţi numărul submulţimilor cu patru elemente ale mulţimii: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

4. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2-x & 3\\ x & 3-x\end{pmatrix}$.
a) Calculaţi $\det[A(0)]$.
b) Să se afle $x\in R$ astfel încît $\det[A(x)]=0$.

5. Un număr de 302 cărţi au fost împărţite la 54 de copii. Fetele au primit cîte 7 cărţi fiecare, iar băieţii cîte 5 cărţi fiecare. Cîţi băieţi sunt?

6. Să se afle domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-\frac{1}{4}}$.

7. Să se afle primitiva $F(x)$ a funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=e^x+4x^3$, ştiind că $F(0)=-1$.

8. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC=6cm$ şi $M\in(BC)$. Paralela prin M la AB intersectează latura $[AC]$ în punctul N, iar paralela prin M la AC intersectează latura $[AB]$ în punctul P.
a) Demonstraţi că patrulaterul $MNAP$ este paralelogram.
b) Calculaţi perimetrul paralelogramului $MNAP$.

9. Se consideră funcţia $f(x)=\sqrt{x^2+8x+7}$.
a) Să se afle domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.
b) Comparaţi numerele $a=f\left(\frac{1}{2}\right)$ şi $b=2\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)$.
c) Aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie ale graficului funcţiei f cu dreapta de ecuaţie $y=-3x-1$.

10. Din 10 elevi (6 băieţi şi 4 fete), profesorul de educaţie fizică doreşte să formeze o echipă de atletism formată din 4 sportivi. Să se afle probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 băieţi şi 2 fete.

11. Să se rezolve în R inecuaţia $\log_{x+3}\left(9-x^2\right)-\frac{1}{16}\cdot\log^2_{x+3}(x-3)^2\geq 2$.

12. Să se afle volumul sferei înscrise într-un con circular drept cu generatoarea de $10cm$ şi raza bazei de $6cm$.

SOLUȚII

1. $a=\log_2\cos\frac{\pi}{3}=\log_2\frac{1}{2}=-1$, $b=\cos\pi=-1 \Rightarrow a=b$.

RĂSPUNS: $a=b$.

2. $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow AC=2\cdot MN=2\cdot 8=16\,cm$. Dar $BD=AC \Rightarrow BD=16\,cm$.

RĂSPUNS: $BD=16\,cm$.

3. Numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii A este $C_6^4=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=$
$=\frac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!\cdot 2}=\frac{5\cdot 6}{2}=15$.

RĂSPUNS: 15 submulțimi.

4. *a)* $\det A(0)=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6$. *b)* $\det A(x)=\begin{vmatrix}2-x & 3\\ x & 3-x\end{vmatrix}=(2-x)(3-x)-3x$
$=x^2-8x+6$. Din $\det A(x)=0$ obținem ecuația $x^2-8x+6=0$ cu soluțiile $x_1=4-\sqrt{10}$, $x_2=4+\sqrt{10}$.

RĂSPUNS: *a)* $\det A(0)=6$;

b) $S=\left\{4-\sqrt{10};\,4+\sqrt{10}\right\}$.

5. Fie x numărul băieților, atunci numărul fetelor este $54-x$. Rezultă ecuația $5x+7(54-x)=302 \Leftrightarrow 5x+378-7x=302 \Leftrightarrow -2x=-76$, de unde $x=38$.

RĂSPUNS: 38 de băieți.

6. $f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-\frac{1}{4}}$. Domeniul maxim de definiție al funcției f se determină din condiția $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-\frac{1}{4}\geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \Leftrightarrow x-3\leq 2 \Leftrightarrow x\leq 5$. Deci $D_f=(-\infty;\,5]$.

RĂSPUNS: $D_f=(-\infty;\,5]$.

7. $F(x)=\int\left(e^x+4x^3\right)dx=e^x+4\cdot\frac{x^4}{4}+c=e^x+x^4+c$. Din $F(0)=-1 \Rightarrow$
$e^0+0^4+c=-1 \Rightarrow c=-2$.

RĂSPUNS: $F(x)=e^x+x^4-2$.

8. *a)* Fie triunghiul ABC cu $AB=AC$, $M\in(BC)$. $MN\parallel AB$, $N\in(AC)$ și $MP\parallel AC$, $P\in(AB) \Rightarrow MN\parallel AP$ și $MP\parallel AN \Rightarrow MNAP$ este paralelogram.

b) Avem $AN=PM$ (proprietate a paralelogramului). Triunghiul NMC este isoscel (demonstrați) $\Rightarrow NM=NC$. Atunci $AN+NM=AN+NC=6\,cm$, deci perimetrul paralelogramului $MNAP$ este egal cu $12\,cm$.

RĂSPUNS: *b)* $P_{MNAP}=12\,cm$.

9. *a)* Domeniul maxim de definiție al funcției f se determină din condiția $x^2+8x+7\geq 0$. Zerourile trinomului x^2+8x+7 sunt $x_1=-7$ și $x_2=-1$. Folosind metoda intervalelor obținem $x\in(-\infty;\,-7]\cup[-1;\,+\infty)$.

b) $a=f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+8\cdot\frac{1}{2}+7}=\sqrt{\frac{1}{4}+4+7}=\sqrt{11\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{45}{4}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

$b=2\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+7}=2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}-4+7}=2\cdot\sqrt{3\frac{1}{4}}=$
$2\cdot\sqrt{\frac{13}{4}}=2\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}$. $a^2=\frac{45}{4}$, $b^2=13$, deci $a^2<b^2 \Rightarrow a<b$.

c) Pentru a afla abscisele punctelor de intersecție ale graficului funcției f cu dreapta y rezolvăm ecuația $f(x)=y$, adică $\sqrt{x^2+8x+7}=-3x-1$. Domeniul maxim de definiție al funcței f este $x\in(-\infty;\,-7]\cup[-1;\,+\infty)$ și se mai impune condiția $-3x-1\geq 0 \Rightarrow x\leq-\frac{1}{3}$. Atunci DVA al ecuației este $(-\infty;\,-7]\cup\left[-1;\,-\frac{1}{3}\right]$. Ridicînd ambele părți ale ecuației la puterea a doua obținem $x^2+8x+7=9x^2+6x+1 \Leftrightarrow -8x^2+2x+6=0 \Leftrightarrow$ $4x^2-x-3=0$ cu soluțiile $x_1=-\frac{3}{4}$ și $x_2=1\notin DVA$. Pentru $x=-\frac{3}{4}$ obținem $y=\frac{5}{4}$. Deci punctul de intersecție este $A\left(-\frac{3}{4};\,\frac{5}{4}\right)$.

RĂSPUNS: *a)* $D_f=(-\infty;\,-7]\cup[-1;\,+\infty)$.

b) $a<b$. *c)* $A\left(-\frac{3}{4};\,\frac{5}{4}\right)$.

10. $p=\frac{C_6^2\cdot C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}}{\frac{10!}{4!\cdot 6!}}=\frac{3}{7}$.

RĂSPUNS: $p=\frac{3}{7}$.

11. Fie inecuația $\log_{x+3}(9-x^2)-\frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2\geq 2$. *DVA* al inecuației se determină din condițiile $\begin{cases}x+3>0\\x+3\neq 1\\9-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-3\\x\neq -2\\x^2-9<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-3\\x\neq -2\\(x-3)(x+3)<0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x>-3\\x\neq -2\\x-3<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-3\\x\neq -2\\x<3\end{cases}$. Așadar, *DVA* este mulțimea $(-3;-2)\cup(-2;3)$.

Avem $-\frac{1}{16}\left(\log_{x+3}(x-3)^2\right)^2+\log_{x+3}(3-x)(3+x)-2\geq 0\Leftrightarrow-\frac{1}{16}\left(2\cdot\log_{x+3}|x-3|\right)^2+$

$+\log_{x+3}(3-x)+\log_{x+3}(x+3)-2\geq 0\Leftrightarrow-\frac{1}{16}\cdot 4\log^2_{x+3}|x-3|+\log_{x+3}(3-x)+$

$+1-2\geq 0$. Deoarece $x-3<0\Rightarrow|x-3|=3-x$ și inecuația se scrie $-\frac{1}{4}\log^2_{x+3}(3-x)+\log_{x+3}(3-x)-1\geq 0$. Notăm $\log_{x+3}(3-x)=t$ și avem inecuația $-\frac{1}{4}t^2+t-1\geq 0\Leftrightarrow t^2-4t+4\leq 0\Leftrightarrow(t-2)^2\leq 0$, de unde $t=2$. Obținem $\log_{x+3}(3-x)=2\Rightarrow(x+3)^2=3-x\Leftrightarrow x^2+6x+9+x-3=0\Leftrightarrow$ $x^2+7x+6=0$. Ultima ecuație are soluțiile $x_1=-6$, $x_2=-1$. $x=-6$ nu aparține *DVA*, deci unica soluție a inecuației este $x=-1$.

RĂSPUNS: $x=-1$.

---

12. Fie un con circular drept cu vîrful V și baza un cerc de centru O, raza $R=6cm$ și generatoarea $G=10cm$. Dacă o sferă este înscrisă în con, atunci într-o secțiune axială a conului este înscris un cerc mare al sferei. Fie triunghiul isoscel VAB cu $VA=VB$ o secțiune axială a conului, în care este înscris un cerc mare al sferei cu centrul O_1, $O_1\in(VO)$. Aflăm raza r a cercului înscris în triunghiul VAB, care va fi și raza sferei. Din triunghiul dreptunghic VOB, conform teoremei lui Pitagora, avem $VO=\sqrt{VB^2-OB^2}=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8cm$. Atunci $A_{VAB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot VO=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48cm^2$. Semiperimetrul triunghiului VAB este $p=\frac{VA+VB+AB}{2}=\frac{10+10+12}{2}=16cm$. Atunci $r=\frac{A_{VAB}}{p}=\frac{48}{16}=3cm$.

Volumul sferei va fi $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=36\pi\,cm^3$.

RĂSPUNS: $V=36\pi\,cm^3$.

TESTUL 5

1. Să se afle valoarea expresiei $A=\log_2 0{,}04+2\log_2 5$.

2. Diametrul unui cerc are lungimea de $16cm$. Să se afle 40% din aria discului mărginit de acest cerc.

3. Dacă a este număr natural prim și $a+4b=90$, $b\in N$, să se afle suma numerelor a și b.

4. Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{10-x}=4-x$.

5. Să se afle mulțimea valorilor funcției $f:R\to R$, $f(x)=2\sin x+1$.

6. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției $f(x)=\frac{1}{2^{6x-13}-32}$.

7. Un triunghi dreptunghic are o catetă de $6cm$ și raza cercului circumscris triunghiului de $5cm$. Să se afle perimetrul triunghiului.

8. Să se afle aria figurii mărginită de liniile $y=2x^2$ și $y=1$.

9. Să se afle valoarea produsului xy, unde (x,y) este soluția sistemului de ecuații $\begin{cases}x-y=2\\(x^2-y^2)(x+y)=200\end{cases}$.

10. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f:R\to R$, $f(x)=4^x-2\cdot 2^x$ în punctul ei de minim local.

11. Înălțimea unei piramide triunghiulare regulate este de $2cm$, măsura unghiului diedru de la baza piramidei este de 30°. Să se afle aria laterală a piramidei.

12. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$. Să se afle valorile parametrului real a pentru care valorile funcției în punctul $x=2$ și în punctele de extrem local într-o anumită ordine formează o progresie geometrică.

SOLUȚII

1. $A=\log_2 0{,}04+2\log_2 5=\log_2 0{,}04+\log_2 25=\log_2(0{,}04\cdot 25)=\log_2 1=0$.

RĂSPUNS: $A=0$.

2. Diametrul cercului este de $16\,cm$, rezultă că raza cercului este $R=8\,cm$. Aria discului este $A=\pi R^2=\pi\cdot 8^2=64\pi\,cm^2$. 40% din aria discului fa fi $\frac{40}{100}\cdot 64\pi=25{,}6\pi\,cm^2$.

RĂSPUNS: $25{,}6\pi\,cm^2$.

3. Deoarece $4b$ și 90 sunt numere naturale pare, rezultă că și a este număr natural par, și fiind prim $\Rightarrow a=2$. Atunci $2+4b=90\Rightarrow 4b=88$, de unde $b=22$. Obținem $a+b=24$.

RĂSPUNS: $a+b=24$.

4. Pentru aflarea DVA se impun condițiile $\begin{cases}10-x\geq 0\\4-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 10\\x\leq 4\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty;4]$.

Ridicînd ambii membri ai ecuației la pătrat obținem $10-x=16-8x+x^2\Leftrightarrow x^2-7x+6=0$ cu soluțiile $x_1=1$, $x_2=6$. $x=6\notin DVA$, deci unica soluție este $x=1$.

RĂSPUNS: $S=\{1\}$.

5. Deoarece $-1\leq\sin x\leq 1$ obținem $-2\leq 2\sin x\leq 2$ și $-1\leq 2\sin x+1\leq 3$. Rezultă că mulțimea valorilor funcției este $E=[-1;3]$.

RĂSPUNS: $E=[-1;3]$.

6. Se impune condiția $2^{6x-13}-32\neq 0\Leftrightarrow 2^{6x-13}\neq 2^5\Leftrightarrow 6x-13\neq 5\Leftrightarrow 6x\neq 18$ și $x\neq 3$. Deci $D_f=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.

RĂSPUNS: $D_f=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.

7. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ și $AC=6\,cm$. Raza cercului circumscris triunghiului este de $5\,cm$, rezultă că ipotenuza $BC=10\,cm$. Conform teoremei lui Pitagora avem $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8\,cm$. Atunci $P_{ABC}=24\,cm$.

RĂSPUNS: $P_{ABC}=24\,cm$.

8. Aflăm abscisele punctelor de intersecție ale liniilor $y=2x^2$ și $y=1$ rezolvînd ecuația $2x^2=1$. Obținem $x_1=-\frac{\sqrt2}{2}$ și $x_2=\frac{\sqrt2}{2}$. Atunci $A=\int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt2}{2}}\left(1-2x^2\right)dx=$

$\left(x-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{\sqrt2}{2}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3-\left[-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)^3\right]=\frac{\sqrt2}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt2}{8}+$

$+\frac{\sqrt2}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt2}{8}=\sqrt2-\frac{\sqrt2}{6}-\frac{\sqrt2}{6}=\sqrt2-\frac{\sqrt2}{3}=\frac{2\sqrt2}{3}(u.p)$.

RĂSPUNS: $A=\frac{2\sqrt2}{3}(u.p)$.

9. $\begin{cases}x-y=2\\(x^2-y^2)(x+y)=200\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=2\\(x-y)(x+y)(x+y)=200\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=2\\2\cdot(x+y)^2=200\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=2\\(x+y)^2=100\end{cases}$. Obținem două sisteme: 1) $\begin{cases}x-y=2\\x+y=10\end{cases}\Rightarrow 2x=12$, $x=6$, apoi $y=4$, deci soluția sistemului este $(6;4)$. 2) $\begin{cases}x-y=2\\x+y=-10\end{cases}\Rightarrow$ $2x=-8$, $x=-4$, și $y=-6$, deci soluția sistemului este $(-4;-6)$. În ambele cazuri avem $xy=24$.

RĂSPUNS: $xy=24$.

10. Fie $f:R\to R$, $f(x)=4^x-2\cdot 2^x$. Aflăm derivata funcției f. $f'(x)=$ $=\left(4^x-2\cdot 2^x\right)'=4^x\cdot\ln 4-2\cdot 2^x\cdot\ln 2=4^x\cdot\ln 2^2-2\cdot 2^x\cdot\ln 2=2\cdot 4^x\cdot\ln 2-$ $-2\cdot 2^x\cdot\ln 2$. Aflăm punctele critice ale funcției f rezolvînd ecuația $f'(x)=0$. Avem $2\cdot 4^x\cdot\ln 2-2\cdot 2^x\cdot\ln 2=0\Leftrightarrow 2\ln 2\left(4^x-2^x\right)=0\Leftrightarrow 4^x-2^x=0\Leftrightarrow$ $2^x\left(2^x-1\right)=0$. Deoarece $2^x>0$ pentru orice $x\in R\Rightarrow 2^x-1=0$, de unde $x=0$. Deoarece $f'(-1)=2\ln 2\left(\frac14-\frac12\right)<0$ și $f'(1)=2\ln 2(4-2)>0$, rezultă că $x=0$ este punct de minim local. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x=0$ este $y=f(0)+f'(0)(x-0)=-1$.

RĂSPUNS: $y=-1$.

11. Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vîrful V și baza triunghiul echilateral ABC, $VO\perp(ABC)$, $VO=2\,cm$. Fie $BM\perp AC\Rightarrow VM$ este apotema piramidei, deci $m(\angle VMB)=30^\circ$. Din triunghiul dreptunghic VOM

avem $\frac{VO}{OM}=tg30^\circ \Rightarrow \frac{2}{OM}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OM=\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}\,cm$.

Atunci $BM=3\cdot OM=3\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}\ cm$. Fie latura triunghiului echilateral ABC egală cu a. Atunci $BM=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3} \Rightarrow a=12\,cm$.

Aşadar, latura bazei piramidei are lungimea $12\,cm$. Din triunghiul dreptunghic VOM, conform teoremei lui Pitagora avem $VM=\sqrt{VO^2+OM^2}=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4\,cm$. Deci $VM=4\,cm$. Atunci $A_l=3\cdot A_{VAC}=3\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot VM=\frac{3}{2}\cdot 12\cdot 4=72\,cm^2$.

RĂSPUNS: $A_l=72\,cm^2$.

12. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$. Valoarea funcţiei în punctul $x=2$ este $f(2)=2^3-6\cdot 2^2+9\cdot 2+a=8-24+18+a=a+2$. Deci $f(2)=a+2$.

Aflăm punctele critice ale funcţiei f. $f'(x)=\left(x^3-6x^2+9x+a\right)'=3x^2-12x+9$. Aflăm punctele critice rezolvînd ecuaţia $f'(x)=0$. Avem $3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$ cu soluţiile $x_1=1$, $x_2=3$. Verificăm dacă punctele obţinute sunt puncte de extrem.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+++++++++$	0	$---------$	0	$+++++++++$		
$f(x)$	↗		↘		↗		

Deci $x=1$ este punct de maxim şi $x=3$ este punct de minim. Avem $f(1)=a+4$, $f(3)=a$. Aşadar, problema se reduce la aflarea parametrului real a pentru care numerele a, $a+2$, $a+4$ într-o anumită ordine se află în progresie geometrică. Cercetăm în care situaţii se verifică proprietatea caracteristică a progresiei geometrice. Dacă $(a+2)^2=a(a+4) \Rightarrow a^2+4a+4=a^2+4a$, egalitate falsă. Dacă $a^2=(a+2)(a+4) \Rightarrow a=-\frac{4}{3}$. Dacă $(a+4)^2=a(a+2) \Rightarrow a=-\frac{8}{3}$.

RĂSPUNS: $a\in\left\{-\frac{8}{3};-\frac{4}{3}\right\}$.

TESTUL 6

1. Să se afle valoarea expresiei $a=125^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.
2. Aria unui pătrat este egală cu $72\,cm^2$. Să se afle aria cercului înscris în acest pătrat.
3. Să se rezolve în R ecuaţia $7\cdot 5^{\log_5 x}=x+21$.
4. Ştiind că raportul dintre diferenţa şi suma a două numere naturale este egal cu $\frac{1}{7}$, aflaţi raportul celor două numere.
5. Să se determine numerele reale x şi y din egalitatea $(3-2i)x+(1-3i)y=4+9i$.
6. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_4-a_2=4$ şi $a_1+a_3+a_5+a_6=30$. Calculaţi suma primilor şapte termeni ai progresiei.
7. Dacă $2015\cdot\left(x^2-6x+9\right)+2016\cdot\sqrt{y^2+10y+25}=0$, să se afle $x-y$.
8. Se consideră două puncte distincte A şi B pe cercul de centru O şi raza de $5\,cm$, astfel încît lungimea coardei $[AB]$ să fie egală cu $6\,cm$. Să se afle distanţa de la centrul cercului la coarda $[AB]$.
9. Fie funcţiile $f:R\to R$, $f(x)=4x+5$ şi $F:R\to R$, $F(x)=ax^2+bx+c$, unde $a,b,c\in R$. Să se determine a,b şi c astfel încît funcţia F să fie o primitivă a funcţiei f şi $F(2)=5$.
10. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x-1}$, D fiind domeniul maxim de definiţie.
    a) Aflaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
    b) Determinaţi asimptota la ramura spre $+\infty$ a graficului funcţiei f.
11. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & x & 3\\ x & -1 & x\\ 1 & 2 & m\end{pmatrix}$, unde m este un parametru real. Să se afle $m\in R$ pentru care matricea A este inversabilă pentru orice $x\in R$.
12. Să se afle aria totală a unei piramide triunghiulare regulate care are latura bazei de $6\,cm$, iar unghiul diedru de la baza piramidei are măsura de 60°.

SOLUȚII

1. $a=125^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(5^3\right)^{\frac{1}{3}}+2=5+2=7$.

RĂSPUNS: $a=7$.

2. Fie a latura pătratului. Atunci $a^2=72 \Rightarrow a=6\sqrt{2}\ (cm)$. Raza cercului înscris în pătrat este $\frac{1}{2}\cdot a=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}\ cm$. Atunci $A=\pi R^2=\pi\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2=18\pi\ cm^2$.

RĂSPUNS: $A=18\pi\ cm^2$.

3. $7\cdot 5^{\log_5 x}=x+21$. DVA: $(0;+\infty)$. Obținem $7x=x+21 \Leftrightarrow 6x=21 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$.

RĂSPUNS: $x=\frac{7}{2}$.

4. Fie x și y cele două numere, $x>y$. Conform condițiilor problemei avem $\frac{x-y}{x+y}=\frac{1}{7}$. Conform proprietății fundamentale a proporției obținem $7x-7y=x+y \Leftrightarrow 6x=8y \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{4}{3}$.

RĂSPUNS: $\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$.

5. $(3-2i)x+(1-3i)y=4+9i \Leftrightarrow 3x-2xi+y-3yi=4+9i \Leftrightarrow 3x+y+(-2x-3y)i=4+9i$. Aplicînd definiția egalității a două numere complexe obținem: $\begin{cases}3x+y=4\\-2x-3y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9x+3y=12\\-2x-3y=9\end{cases}$. Folosind metoda reducerii obținem $7x=21$, de unde $x=3$, apoi $y=-5$.

RĂSPUNS: $x=3$, $y=-5$.

6. $\begin{cases}a_4-a_2=4\\a_1+a_3+a_5+a_6=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1+3r-a_1-r=4\\a_1+a_1+2r+a_1+4r+a_1+5r=30\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}2r=4\\4a_1+11r=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=2\\4a_1+22=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=2\\a_1=2\end{cases}$. $a_7=a_1+6r=2+6\cdot 2=14$.

Atunci $S_7=\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7=\frac{2+14}{2}\cdot 7=56$.

RĂSPUNS: $S_7=56$.

7. $2015\cdot\left(x^2-6x+9\right)+2016\cdot\sqrt{y^2+10y+25}=0 \Leftrightarrow 2015(x-3)^2+2016\sqrt{(y+5)^2}=0 \Rightarrow 2015(x-3)^2+2016\cdot|y+5|=0$.. Ultima egalitate va fi adevărată doar pentru $(x-3)^2=0$ și concomitent $y+5=0$, de unde $x=3$ și $y=-5$. Atunci $x-y=3-(-5)=8$.

RĂSPUNS: $x-y=8$.

8. Fie cercul $C(O;R)$ și punctele $A,B\in C(O;R)$. Atunci $OA=OB=5\,cm \Rightarrow$ triunghiul AOB este isoscel cu baza $AB=6\ cm$. Fie $OM\perp AB$, deci OM va fi distanța de la centrul cercului la coarda $[AB]$. În triunghiul isoscel AOB, OM este înălțime $\Rightarrow$ OM mediană $\Rightarrow$ $AM=3\,cm$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic AOM obținem $OM=4\,cm$.

RĂSPUNS: $d=4\,cm$.

9. $F(x)=\int f(x)dx=\int(4x+5)dx=4\cdot\frac{x^2}{2}+5x+c=2x^2+5x+c$. Din $ax^2+bx+c=2x^2+5x+c \Rightarrow a=2$, $b=5$. Atunci avem $F(x)=2x^2+5x+c$. Din $F(2)=5 \Rightarrow 8+10+c=5$, de unde $c=-13$.

RĂSPUNS: $a=2$, $b=5$, $c=-13$.

10. *a)* $D_f=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)\cdot f'(x)=\left(\frac{x^2-x-1}{x-1}\right)'=\frac{\left(x^2-x-1\right)'(x-1)-(x-1)'\left(x^2-x-1\right)}{(x-1)^2}=$

$\frac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x-1\right)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x+1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$.

Deoarece $f'(x)>0$ pentru orice $x\in R\setminus\{1\}$, rezultă că $f(x)$ este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty;1)$ și $(1;+\infty)$.

b) Funcția f nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$, verificăm dacă are asimptotă oblică. $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1}{x^2-x}=1$. Așadar, $m=1$.

$n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x-1}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1-x^2+x}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\cdot\frac{-1}{x-1}=0$. Deci $n=0$, obținem că dreapta $y=x$ este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ a graficului funcției f.

RĂSPUNS: *a)* $f(x)$ este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty;1)$ și $(1;+\infty)$.

b) Dreapta $y=x$ este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ a graficului funcției f.

11. Matricea A va fi inversabilă pentru orice $x\in R$ dacă $\det A\neq 0$ pentru orice

$x \in R$. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = -2m + x^2 + 6x + 3 - mx^2 - 4x = (1-m)x^2 + 2x + 3 - 2m$. Pentru ca $\det A \neq 0$ pentru orice $x \in R$ trebuie ca discriminantul trinomului $(1-m)x^2 + 2x + 3 - 2m$ să fie negativ. $D = 4 - 4(1-m)(3-2m) = 4 - 4(3 - 2m - 3m + 2m^2) = 4 - 12 + 8m + 12m - 8m^2 = -8m^2 + 20m - 8$. Obţinem $-8m^2 + 20m - 8 < 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 > 0$. Mulţimea soluţiilor ultimei inecuaţii este $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

RĂSPUNS: $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

12. Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vîrful V şi baza triunghiul echilateral ABC cu latura de $6cm$, $VO \perp (ABC)$. Fie M mijlocul laturii $[AC]$ a triunghiului ABC, atunci BM este înălţime în triunghiul ABC, iar VM este apotemă a piramidei, şi atunci $m(\angle VMB) = 60^\circ$. $BM = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,cm$. $MO = \frac{1}{3}BM = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}\,cm$. Din triunghiul dreptunghic VOM avem $\frac{MO}{VM} = \cos 60^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{VM} = \frac{1}{2}$, de unde $VM = 2\sqrt{3}\,cm$. Atunci $A_l = 3 \cdot A_{VAC} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot VM = \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\,cm^2$. $A_b = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\,cm^2$. $A_t = A_l + A_b = 18\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 27\sqrt{3}\,cm^2$.

RĂSPUNS: $A_t = 27\sqrt{3}\,cm^2$.

TESTUL 7

1. Se consideră expresia $a = 2\log_2 3 + \log_2 \frac{1}{3}$. Să se afle valoarea de adevăr a prpoziţiei $"a > 1"$.

2. Se consideră triunghiul echilateral ABC cu latura de $6cm$. Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, AC şi respectiv BC ale triunghiului ABC. Să se afle perimetrul patrulaterului $BMNP$.

3. Se scrie o cifră la dreapta numărului 2016. Să se afle probabilitatea ca numărul obţinut să fie divizibil cu 3.

4. Să se afle $tg\alpha$, ştiind că $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ şi $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

5. Să se afle domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x) = \sqrt{5^{2x-3} - 1}$.

6. Să se afle suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^2 \cdot \sqrt{x-1} - 4\sqrt{x-1} = 0$.

7. Să se rezolve în R inecuaţia $3\log_8(3x+2) < 2$.

8. Un triunghi dreptunghic are un unghi de 30° şi înălţimea corespunzătoare ipotenuzei de $6cm$. Să se afle lungimea ipotenuzei triunghiului.

9. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = e^{-x^2}$. Calculaţi $\int_0^1 x \cdot f(x)\,dx$.

10. Să se afle numărul soluţiilor ecuaţiei $(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sqrt{1 - x^2} = 0$.

11. O prismă triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ are $AB = AA_1 = 6cm$. Calculaţi:
a) Aria laterală, aria totală şi volumul prismei.
b) Distanţa de la B_1 la AC.

12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care ecuaţia $x^2 - (3a-1) \cdot |x| + 2a^2 - a = 0$ are patru soluţii reale distincte.

SOLUȚII

1. $a=2\log_2 3+\log_2\frac{1}{3}=\log_2 3^2+\log_2 3^{-1}=\log_2 9-\log_2 3=\log_2\frac{9}{3}=\log_2 3>1$, deci $a>1$.

RĂSPUNS: $a>1$.

2. $BM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\cdot 6=3cm$, atunci $NP=BM=3cm$. MN este linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow MN=\frac{1}{2}\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 6=3\,cm$, atunci și $BP=3cm$. $P_{BMNP}=4\cdot 3=12cm$.

RĂSPUNS: $P_{BMNP}=12cm$.

3. Cazuri posibile avem 10 (la dreapta numărului 2016 poate fi scrisă orice cifră). Dacă la dreapta numărului 2016 mai scriem o cifră x obținem numărul $n=\overline{2016x}$. Pentru ca numărul n să fie divizibil cu 3 trebuie ca suma cifrelor numărului n să fie divizibilă cu 3. Obținem $x\in\{0;3;6;9\}$. Cazuri favorabile avem 4. Așadar, $p=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

RĂSPUNS: $p=\frac{2}{5}$.

4. Dacă $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \Rightarrow \cos\alpha<0$. Din identitatea $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow$

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{5}}=-\sqrt{\frac{4}{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. Atunci $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}}=-\frac{1}{2}$.

RĂSPUNS: $tg\alpha=-\frac{1}{2}$.

5. $f(x)=\sqrt{5^{2x-3}-1}$. Pentru a afla D_f se impune condiția $5^{2x-3}-1\geq 0 \Leftrightarrow 5^{2x-3}\geq 1$

$\Leftrightarrow 5^{2x-3}\geq 5^0 \Leftrightarrow 2x-3\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 3 \Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2}$. Deci $D_f=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

RĂSPUNS: $D_f=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

6. $DVA:[1;+\infty)$. Ecuația se scrie $\sqrt{x-1}\cdot(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\cdot(x-2)(x+2)=0$, de unde $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-2$. $x_3\notin DVA$, atunci $S=1+2=3$.

RĂSPUNS: $S=3$.

7. $3\log_8(3x+2)<2$. $DVA:\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$. Avem $3\log_{2^3}(3x+2)<2 \Leftrightarrow$

$3\cdot\frac{1}{3}\log_2(3x+2)<2 \Leftrightarrow \log_2(3x+2)<\log_2 4 \Leftrightarrow 3x+2<4 \Leftrightarrow 3x<2$

$\Leftrightarrow x<\frac{2}{3}$. Ținând cont de DVA obținem $x\in\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

RĂSPUNS: $S=\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

8. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $m(\angle B)=30^\circ$, $AD\perp BC$, $D\in(BC)$, $AD=6cm$. Din triunghiul dreptunghic ADB avem $AB=2\cdot AD=2\cdot 6=12cm$. Din triunghiul dreptunghic ABC avem $\frac{AB}{BC}=\cos 30^\circ \Rightarrow \frac{12}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC=\frac{24}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC=\frac{24\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{3}$. Deci $BC=8\sqrt{3}\,cm$.

RĂSPUNS: $BC=8\sqrt{3}\,cm$.

9. $\int_0^1 x\cdot f(x)dx$, unde $f(x)=e^{-x^2}$. Aflăm integrala nedefinită $\int x\cdot f(x)dx=$

$=\int x\cdot e^{-x^2}dx=\begin{bmatrix}-x^2=t\\-2xdx=dt\\xdx=-\frac{1}{2}dt\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+c=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$.

Atunci $\int_0^1 x\cdot f'(x)dx=\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)_0^1=-\frac{1}{2}e^{-1}-\left(-\frac{1}{2}e^0\right)=-\frac{1}{2e}+\frac{1}{2}=$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}=\frac{e-1}{2e}$.

RĂSPUNS: $\frac{e-1}{2e}$.

10. $(\cos^2 x-\sin^2 x)\cdot\sqrt{1-x^2}=0$. DVA se determină din condiția $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow$

$x^2-1\leq 0$, de unde $x\in[-1;1]$. Ecuația se scrie $\cos 2x\cdot\sqrt{1-x^2}=0 \Rightarrow$

$\begin{bmatrix}\cos 2x=0\\\sqrt{1-x^2}=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z\\1-x^2=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},k\in Z\\x=\pm 1\end{bmatrix}$. Soluțiile care aparțin DVA sunt -1, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$; 1. Deci ecuația are 4 soluții.

RĂSPUNS: 4 soluții.

11. *a)* $A_l = P_b \cdot h = 3 \cdot 6 \cdot 6 = 108\,cm^2$. $A_b = \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\,cm^2$. Atunci $A_t = A_l + 2A_b = \left(108 + 18\sqrt{3}\right)cm^2 = 18\left(6 + \sqrt{3}\right)cm^2$. $V = A_b \cdot h = 9\sqrt{3} \cdot 6 = 54\sqrt{3}\,cm^3$; *b)* Fie $B_1M \perp AC \Rightarrow M$ este mijlocul lui $[AC] \Rightarrow BM$ este înălțime în triunghiul echilateral ABC, deci B_1M este distanța de la B_1 la AC. $BM = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,cm$. Din triunghiul dreptunghic B_1BM, conform teoremei lui Pitagora obținem $B_1M = \sqrt{B_1B^2 + BM^2} = \sqrt{6^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36 + 27} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}\,cm$.

RĂSPUNS: *a)* $A_t = 108\,cm^2$, $A_t = 18\left(6 + \sqrt{3}\right)cm^2$, $V = 54\sqrt{3}\,cm^3$; *b)* $d = 3\sqrt{7}\,cm$.

12. $x^2 - (3a-1)\cdot|x| + 2a^2 - a = 0$. Ecuația se mai scrie $|x|^2 - (3a-1)\cdot|x| + 2a^2 - a = 0$. Notăm $|x| = t$, atunci ecuația devine $t^2 - (3a-1)t + 2a^2 - a = 0$. Pentru ca ecuația inițială să aibă 4 soluții reale distincte trebuie ca ultima ecuație să aibă două soluții reale distincte pozitive. Deci trebuie în primul rînd ca discriminantul ecuației să fie pozitiv. $D = (3a-1)^2 - 4\left(2a^2 - a\right) = 9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 + 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$ pentru orice $a \in R$. Rezultă $a \neq 1$. Conform relațiilor lui Viete în ultima ecuație avem $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3a - 1 \\ t_1 t_2 = 2a^2 - a \end{cases}$. Pentru ca t_1 și t_2 să fie ambele pozitive trebuie ca $\begin{cases} 3a - 1 > 0 \\ 2a^2 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right) \\ a \in (-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right) + \infty \end{cases}$. În final obținem $a \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

RĂSPUNS: $a \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

TESTUL 8

1. Să se afle valoarea expresiei $a = \left(2\sqrt{5}\right)^2 - \sqrt[3]{125}$.
2. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ și perimetrul de $22\,cm$. Fie M și N mijloacele laturilor $[AB]$ și respectiv $[AC]$. Dacă $MN = 4\,cm$, să se afle lungimile laturilor $[AB]$ și $[AC]$.
3. Aflați cît la sută din pătratele perfecte de două cifre se divid cu 4.
4. Să se afle $\mathrm{Re}\,z$, unde $z = (3+i)(3-i) - (4+i)(5+3i)$.
5. Să se afle primitiva funcției $f: R \to R$, $f(x) = -3\cos x$, graficul căreia trece prin punctul $M\left(\dfrac{\pi}{2}; -12\right)$.
6. Un cilindru circular drept are volumul egal cu $12\,cm^3$. Un alt cilindru are înălțimea de trei ori mai mare decît înălțimea primului cilindru și raza bazei de două ori mai mică decît a primului cilindru. Să se afle volumul celui de-al doilea cilindru.
7. Să se afle raportul a două numere reale pozitive, știind că raportul dintre media lor geometrică și media lor aritmetică este egal cu $\dfrac{3}{5}$.
8. Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{2}\sin^2 x = \cos x$.
9. Să se afle valoarea produsului $x_0 \cdot y_0$, unde $(x_0; y_0)$ este soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} y + 3 = \sqrt{4x^2 + 20x + 25} \\ 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$.
10. Să se afle valorile parametrului real pozitiv a pentru care valoarea maximă a funcției $f: D \to R$, $f(x) = \ln x - ax$ este egală cu 2.
11. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 6\,cm$, $AC = 9\,cm$, $BC = 5\,cm$. Bisectoarea $(AD$, $D \in (BC)$ a unghiului A determină pe latura (BC) segmentele de lungimi x și y. Să se afle $|x - y|$.
12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care ecuația $4^x - (5a-3)\cdot 2^x + 4a^2 - 3a = 0$ are soluție unică.

SOLUȚII

1. $a=\left(2\sqrt{5}\right)^2-\sqrt[3]{125}=20-5=15$.

RĂSPUNS: $a=15$.

2. $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, și deoarece $MN=4cm \Rightarrow BC=2MN=8cm$. Atunci $AB+AC=22-8=14cm \Rightarrow AB=AC=7cm$.

RĂSPUNS: $AB=AC=7cm$.

3. Pătratele perfecte de două cifre sunt 16, 25, 36, 49, 64, 81. Dintre ele se divid cu 4 doar 16, 36, 64. Atunci avem $\frac{3}{6}\cdot 100\%=50\%$.

RĂSPUNS: 50%.

4. $z=(3+i)(3-i)-(4+i)(5+3i)=9-i^2-20-12i-5i-3i^2=9+1-20-17i+3=-7-17i \Rightarrow \operatorname{Re} z=-7$.

RĂSPUNS: $\operatorname{Re} z=-7$.

5. $F(x)=\int(-3\cos x)dx=-3\int\cos x dx=-3\sin x+c$. Din $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-12 \Rightarrow -3\sin\frac{\pi}{2}+c=-12 \Rightarrow -3+c=-12$, de unde $c=-9$. Deci primitiva este $F(x)=-3\sin x-9$.

RĂSPUNS: $F(x)=-3\sin x-9$.

6. Fie H și R lungimea înălțimii, respectiv a razei bazei primului cilindru. Atunci volumul primului cilindru va fi $V_1=\pi R^2H$. Înălțimea celui de-al doilea cilindru va fi $h=3H$, iar raza bazei va fi $r=\frac{R}{2}$. Volumul celui de-al doilea cilindru va fi $V_2=\pi r^2h=\pi\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2\cdot 3H=\pi\cdot\frac{R^2}{4}\cdot 3H=\frac{3}{4}\cdot\pi R^2H=\frac{3}{4}\cdot 12=9cm^3$.

RĂSPUNS: $V_2=9cm^3$.

7. Fie x și y cele două numere reale pozitive. Media lor geometrică este $m_g=\sqrt{xy}$, iar media lor aritmetică este $m_a=\frac{x+y}{2}$. Conform enunțului avem $\frac{m_g}{m_a}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{\frac{x+y}{2}}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{xy}}+\frac{y}{\sqrt{xy}}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3}$. Fie $\sqrt{\frac{x}{y}}=t$, $t>0$, atunci $\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{1}{t}$.

Obținem ecuația $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3t^2-10t+3=0$ cu soluțiile $t_1=\frac{1}{3}$, $t_2=3$.

Obținem $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{1}{3}$, de unde $\frac{x}{y}=\frac{1}{9}$ sau $\sqrt{\frac{x}{y}}=3$, de unde $\frac{x}{y}=9$.

RĂSPUNS: $\frac{x}{y}=\frac{1}{9}$ sau $\frac{x}{y}=9$.

8. $\sqrt{2}\sin^2 x=\cos x$. DVA al ecuației este R. Ecuația se scrie: $\sqrt{2}\left(1-\cos^2 x\right)=\cos x \Leftrightarrow \sqrt{2}-\sqrt{2}\cos^2 x-\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0$. Notăm $\cos x=t$, atunci ecuația devine $\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0$. Discriminantul ecuației este $D=9$. $t_1=-\sqrt{2}$, $t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ecuația $\cos x=-\sqrt{2}$ n-are soluții reale. Avem ecuația $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ cu mulțimea soluțiilor $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

RĂSPUNS: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

9. $\begin{cases}y+3=\sqrt{4x^2+20x+25}\\3x-y+7=0\end{cases}$. Se impune condiția $y+3\geq 0$, adică $y\in[-3;+\infty)$.

Sistemul se scrie: $\begin{cases}y+3=\sqrt{(2x+5)^2}\\3x-y+7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+3=|2x+5|\\-y=-3x-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+3=|2x+5|\\y=3x+7\end{cases}$.

Atunci prima ecuație a sistemului se scrie $3x+7+3=|2x+5|$ sau $3x+10=|2x+5|$.

Obținem $\begin{bmatrix}3x+10=2x+5\\3x+10=-2x-5\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x=-5\\x=-3\end{bmatrix}$. Dacă $x=-5$, atunci $y=-8$, nu convine. Dacă $x=-3$, atunci $y=-2$ și $P=x_0\cdot y_0=(-3)\cdot(-2)=6$.

RĂSPUNS: $P=6$.

10. $f:D\to R$, $f(x)=\ln x-ax$. $D=(0;+\infty)$. $f'(x)=(\ln x-ax)'=\frac{1}{x}-a$. Aflăm punctele critice rezolvînd ecuația $f'(x)=0$. Avem $\frac{1}{x}-a=0 \Leftrightarrow 1-ax=0 \Leftrightarrow ax=1$, de unde $x=\frac{1}{a}$. Cercetăm dacă $x=\frac{1}{a}$ este punct de maxim. $f'\left(\frac{1}{2a}\right)=\frac{1}{\frac{1}{2a}}-a=2a-a=a>0$. $f'\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{1}{\frac{2}{a}}=\frac{a}{2}-a=$

$-\frac{a}{2}<0$, deci $x=\frac{1}{a}$ este punct de maxim. Avem $f_{max}=f\left(\frac{1}{2}\right)$. Conform enunțului $f\left(\frac{1}{a}\right)=2$, sau $\ln\frac{1}{a}-1=2 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{a}=3$, de unde $\frac{1}{a}=e^3$ și $a=\frac{1}{e^3}$.

RĂSPUNS: $a=\frac{1}{e^3}$.

11. Fie $BD=x$ și $DC=y$. Putem scrie $y=5-x$. Conform teoremei bisectoarei în triunghiul ABC avem $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{6}{x}=\frac{9}{5-x} \Leftrightarrow 9x=30-6x \Leftrightarrow 15x=30 \Leftrightarrow x=2$, atunci $y=3$, sau, în dependență de notații, $x=3$ și $y=2$. Atunci $|x-y|=1$.

RĂSPUNS: $|x-y|=1$.

12. Fie ecuația $4^x-(5a-3)\cdot 2^x+4a^2-3a=0$. Notăm $2^x=t$, $t>0$. Atunci ecuația se scrie $t^2-(5a-3)t+4a^2-3a=0$. Discriminantul ecuației este $D=(5a-3)^2-4(4a^2-3a)=25a^2-30a+9-16a^2+12a=9a^2-18a+9=9(a^2-2a+1)=9(a-1)^2$. Deci $D\geq 0$ pentru orice $a\in R$. Pentru $a=1$, $D=0$. Așadar, pentru $a=1$ ecuația de gradul doi în t are două soluții reale egale (sau o singură soluție), și anume $t=1>0$. Deci pentru $a=1$ ecuația inițială are soluție unică. Ecuația inițială va avea soluție unică și în cazul cînd discriminantul ecuației de gradul doi va fi pozitiv, iar ecuația va avea două soluții reale distincte de semne diferite sau una pozitivă și una zero. Se impune condiția $t_1t_2\leq 0$. Din relațiile lui Viete $t_1t_2=4a^2-3a$. Obținem inecuația $4a^2-3a\leq 0$ cu mulțimea soluțiilor $a\in\left[0;\frac{3}{4}\right]$. Pentru $a=0$ ecuația de gradul doi are soluțiile $t_1=0$, $t_2=-3$, nu convine. Pentru $a=\frac{3}{4}$ ecuația de gradul doi are soluțiile $t_1=0$, $t_2=\frac{3}{4}$, deci ecuația inițială va avea soluție unică. Așadar, ecuația inițială va avea soluție unică pentru $a\in\left(0;\frac{3}{4}\right]\cup\{1\}$.

RĂSPUNS: $a\in\left(0;\frac{3}{4}\right]\cup\{1\}$.

TESTUL 9

1. Să se afle valoarea expresiei $a=\log_4 36-2\cdot\log_4 3$.

2. Aria totală a unui cub este egală cu $96cm^2$. Să se afle volumul cubului.

3. Să se afle două numere naturale care au diferența 45, știind că unul dintre ele este cu 20 mai mare decît dublul celuilalt.

4. Să se afle cea mai mică soluție a ecuației $2^{|x+4|}-8=0$.

5. Să se aducă la o formă mai simplă expresia $E=\frac{1}{1+\sin\alpha}\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

6. Fie funcția $f:R\to R$, $f(x)=-2x+5$. Să se afle:
a) Aria triunghiului determinat de graficul funcției f, de originea sistemului de coordonate și de axele de coordonate.
b) Distanța de la originea sistemului de coordonate la graficul funcției f.

7. Fie date numerele complexe $z_1=3+i$ și $z_2=2i$. Să se afle $\left(\frac{z_1+z_2}{3\cdot\overline{z_2}}\right)^8$.

8. Un trapez are linia mijlocie de $18cm$ și segmentul care unește mijloacele diagonalelor de $2cm$. Să se afle raportul lungimilor bazelor trapezului.

9. Se consideră ecuația $\sqrt[3]{\frac{x+5}{30-x}}+\sqrt[3]{\frac{30-x}{x+5}}=\frac{13}{6}$. Dacă notăm cu s suma soluțiilor ecuației, să se afle s.

10. Într-o urnă sunt 8 bile albe și 6 bile roșii. Să se afle probabilitatea că extrăgînd la întîmplare două bile, acestea să fie de culoare roșie.

11. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de $6\sqrt{3}cm$ și înălțimea de $3\sqrt{3}cm$. Calculați:
a) Aria totală și volumul piramidei.
b) Măsura unghiului diedru format de o față laterală cu planul bazei.

12. Să se afle cea mai mică valoare întreagă a parametrului a pentru care funcția $f:R\to R$, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax$ este strict crescătoare pe R.

1. $a=\log_4 36-2\cdot\log_4 3=\ \log_4 36-\log_4 3^2=\ \log_4 36-\log_4 9=\ \log_4\frac{36}{9}=$
$=\log_4 4=1$.

RĂSPUNS: $a=1$.

2. Fie a muchia cubului. Aria totală a cubului este $A=6a^2 \Rightarrow 6a^2=96 \Rightarrow$ $a^2=16$ și $a=4cm$. Volumul cubului este $V=a^3=4^3=64cm^3$.

RĂSPUNS: $V=64cm^3$.

3. Fie x numărul mai mic, atunci $x+45$ va fi numărul mai mare. Rezultă ecuația $x+45=2x+20$, de unde $x=25$, apoi $x+45=25+45=70$. Deci cele două numere sunt 70 și 25.

RĂSPUNS: 70 și 25.

4. Fie ecuația $2^{|x+4|}-8=0 \Leftrightarrow 2^{|x+4|}=2^3 \Leftrightarrow |x+4|=3$. Obținem două ecuații: $x+4=3$ cu soluția $x=-1$ și $x+4=-3$ cu soluția $x=-7$. Cea mai mică soluție a ecuației este $x=-7$.

RĂSPUNS: $x=-7$.

5. $E=\frac{1}{1+\sin\alpha}\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{1+\sin\alpha}\cdot\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=$
$\frac{1}{1+\sin\alpha}\cdot(1+\sin\alpha)=1$.

RĂSPUNS: $E=1$.

6. *a*) Aflăm coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției $f:R\to R$, $f(x)=-2x+5$ cu axele de coordonate: cu axa Ox, $f(x)=0 \Rightarrow -2x+5=0$ $\Rightarrow x=\frac{5}{2}$, deci avem punctul $A\left(\frac{5}{2};0\right)$. Cu axa Oy. $x=0 \Rightarrow y=f(0)=5$, deci avem punctul $B(0;5)$. Am obținut triunghiul dreptunghic AOB cu catetele $OA=\frac{5}{2}$ și $OB=5$. $A_{AOB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 5=\frac{25}{4}(u.p)$.

b) Aflăm ipotenuza AB a triunghiului dreptunghic AOB folosind teorema lui Pitagora: $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+5^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+25}=\sqrt{\frac{125}{4}}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Atunci distanța de la originea sistemului de coordonate la graficul funcției f va fi $d=\frac{OA\cdot OB}{AB}=\frac{\frac{5}{2}\cdot 5}{\frac{5\sqrt{5}}{2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}(u.l)$.

RĂSPUNS: *a*) $A=\frac{25}{4}(u.p)$;

b) $d=\sqrt{5}(u.l)$.

7. $\left(\frac{z_1+z_2}{3\cdot z_2}\right)^8=\left(\frac{3+i+2i}{3\cdot 2i}\right)^8=\left(\frac{3+3i}{3\cdot(-2i)}\right)^8=\left(\frac{3(1+i)}{3\cdot(-2i)}\right)^8=\left(\frac{1+i}{2i}\right)^8=\frac{(1+i)^8}{2^8 i^8}=$
$\frac{\left((1+i)^2\right)^4}{2^8\cdot 1}=\frac{\left(1+2i+i^2\right)^4}{2^8}=\frac{(1+2i-1)^4}{2^8}=\frac{(2i)^4}{2^8}=\frac{2^4\cdot i^4}{2^8}=\frac{2^4}{2^8}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$.

RĂSPUNS: $\frac{1}{16}$.

8. Fie trapezul $ABCD$ cu $BC\parallel AD$, $BC<AD$. MN este linie mijlocie, M este mijlocul laturii $[AB]$, N mijlocul laturii CD, $MN=18cm$. Segmentul $[EF]$ unește mijloacele diagonalelor, E mijlocul diagonalei $[AC]$, F mijlocul diagonalei $[BD]$, $EF=2cm$. Segmentul $[ME]$ este linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow ME=\frac{1}{2}BC$, $[NF]$ este linie mijlocie în triunghiul $DBC \Rightarrow NF=\frac{1}{2}BC$, așadar, $ME=NF$. Fie $ME=NF=x$, atunci $ME+EF+NF=18 \Rightarrow x+2+x=18$, $2x=16$ și $x=8$. Atunci $BC=2ME=16cm$. $BC+AD=36cm \Rightarrow AD=20cm$. Obținem $\frac{BC}{AD}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$.

RĂSPUNS: $\frac{BC}{AD}=\frac{4}{5}$.

9. Fie ecuația $\sqrt[3]{\frac{x+5}{30-x}}+\sqrt[3]{\frac{30-x}{x+5}}=\frac{13}{6}$. *DVA* al ecuației este $R\setminus\{-5;30\}$. Notăm $\sqrt[3]{\frac{x+5}{30-x}}=t$, atunci $\sqrt[3]{\frac{30-x}{x+5}}=\frac{1}{t}$, și atunci ecuația se scrie $t+\frac{1}{t}-\frac{13}{6}=0 \Leftrightarrow$ $6t^2-13t+6=0$. Ultima ecuație are soluțiile $t_1=\frac{2}{3}$ și $t_2=\frac{3}{2}$. Obținem două

ecuații noi: 1) $\sqrt[3]{\frac{x+5}{30-x}}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x+5}{30-x}=\frac{8}{27} \Leftrightarrow 27(x+5)=8(30-x)$ $\Leftrightarrow 27x+135=240-8x \Leftrightarrow 35x=105$, de unde $x=3$. 2) $\sqrt[3]{\frac{x+5}{30-x}}=\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{x+5}{30-x}=\frac{27}{8} \Leftrightarrow 8(x+5)=27(30-x) \Leftrightarrow 8x+40=810-27x \Leftrightarrow$ $35x=770$, de unde $x=22$. Atunci $s=3+22=25$.

RĂSPUNS: $s=25$.

10. Numărul cazurilor posibile este $C_{14}^2=\frac{14!}{2!\cdot 12!}=\frac{12!\cdot 13\cdot 14}{2\cdot 12!}=91$. Numărul cazurilor favorabile este $C_6^2=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=\frac{4!\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4!}=15$. Atunci probabilitatea va fi $P=\frac{15}{91}$.

RĂSPUNS: $P=\frac{15}{91}$.

11. *a*) Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vîrful V și baza triunghiul echilateral ABC cu latura de lungime $6\sqrt{3}\,cm$, $VO\perp(ABC)$, $VO=3\sqrt{3}\,cm$. Fie $BM\perp AC$, $M\in(AC)$, atunci $VM\perp AC$, deci $[VM]$ este apotema piramidei. BM este înălțime în triunghiul echilateral ABC $\Rightarrow BM=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=9\,cm$. Atunci $OM=\frac{1}{3}BM=\frac{1}{3}\cdot 9=3\,cm$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOM avem $VM=\sqrt{VO^2+OM^2}=\sqrt{3^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+27}=\sqrt{36}=6\,cm$. $A_l=3\cdot A_{VAC}=$ $=3\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot VM=\frac{3}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 6=54\sqrt{3}\,cm^2$. $A_b=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(6\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{36\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{4}=$ $=27\sqrt{3}\,cm^2$. $A_t=A_l+A_b=54\sqrt{3}+27\sqrt{3}=\left(81\sqrt{3}\right)cm^2$. $V=\frac{1}{3}A_b\cdot h=$ $\frac{1}{3}\cdot 27\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}=81\,cm^3$.

b) Din triunghiul dreptunghic VOM avem $\sin(\angle VMO)=\frac{VO}{VM}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow m(\angle VMO)=60^\circ$.

RĂSPUNS: *a*) $A_t=81\sqrt{3}\,cm^2$, $V=81\,cm^3$;
b) $m(\angle VMO)=60^\circ$.

12. Fie funcția $f:R\to R$, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax$. Pentru ca funcția f să fie strict crescătoare pe R trebuie ca $f'(x)>0$ pentru orice $x\in R$. Avem $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+ax\right)'=x^2-2x+a$. Pentru ca $x^2-2x+a>0$ pentru orice $x\in R$ trebuie ca discriminantul trinomului x^2-2x+a să fie negativ. $D=4-4a$. Avem $4-4a<0 \Leftrightarrow a-1>0 \Rightarrow a\in(1;+\infty)$. Cea mai mică valoare întreagă din intervalul $(1;+\infty)$ este 2.

RĂSPUNS: $a=2$.

TESTUL 10

1. Să se afle valoarea expresiei $a=\log_2 200+\log_2\frac{1}{25}$.
2. Diagonala unui pătrat are lungimea $10\sqrt{2}\,cm$. Să se afle aria pătratului.
3. Într-un magazin dimineaţa erau $200\,kg$ de zahăr. Pe parcursul zilei s-au vîndut 30% din cantitatea de zahăr. Cîte kilograme de zahăr au mai rămas la magazin?
4. Se consideră mulţimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd un element al mulţimii A, acesta să fie divizibil cu 4.
5. Să se calculeze $a=\sqrt[5]{10-2\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{10+2\sqrt{17}}$.
6. Să se scrie în formă algebrică numărul complex $z=\left[\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)\right]^6$.
7. Să se determine dacă matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ este inversabilă.
8. Să se afle abscisele punctelor comune ale graficelor funcţiilor $f:D_1\to R$, $f(x)=\log_2(4-x)$ şi $g:D_2\to R$, $g(x)=2\log_2 3-\log_2(1-2x)$.
9. Să se afle aria unui triunghi dreptunghic, ştiind că raza cercului circumscris triunghiului este de $5\,cm$ şi raza cercului înscris în triunghi este de $2\,cm$.
10. Să se afle aria figurii mărginite de graficele funcţiilor $f,g:R\to R$, $f(x)=1-x$ şi $g(x)=3-2x-x^2$.
11. Un trunchi de con circular drept are aria laterală egală cu $100\pi\,cm^2$, înălţimea de $8\,cm$ şi generatoarea de $10\,cm$. Să se afle:
    a) Volumul trunchiului de con.
    b) Volumul conului din care provine trunchiul.
12. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^3-3x^2+m}{x^2}$, unde m este un parametru real.
    a) Să se determine m astfel încît funcţia să admită un extrem local în $x=2$.
    b) Pentru m determinat la punctul *a*) să se determine asimptotele la graficul funcţiei.

SOLUŢII

1. $a=\log_2 200+\log_2\frac{1}{25}=\log_2\left(200\cdot\frac{1}{25}\right)=\log_2 8=3$.
   RĂSPUNS: $a=3$.
2. Fie a lungimea laturii pătratului, atunci diagonala pătratului are lungimea $d=a\sqrt{2}$. Obţinem $a\sqrt{2}=10\sqrt{2}$, de unde $a=10\,cm$. Atunci $A_p=a^2=10^2=100\,cm^2$.
   RĂSPUNS: $A_p=100\,cm^2$.
3. 30% din cantitatea de $200\,kg$ reprezintă $\frac{30}{100}\cdot 200=60\,kg$. Atunci la magazin au mai rămas $200-60=140\,kg$ de zahăr.
   RĂSPUNS: $140\,kg$.
4. Mulţimea A are 20 de elemente, deci avem 20 de cazuri posibile. Mulţimea A conţine 5 numere divizibile cu 4, şi anume: $4, 8, 12, 16, 20$, deci avem 5 cazuri favorabile. Atunci $p=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.
   RĂSPUNS: $p=\frac{1}{4}$.
5. $a=\sqrt[5]{10-2\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{10+2\sqrt{17}}=\sqrt[5]{\left(10-2\sqrt{17}\right)\cdot\left(10+2\sqrt{17}\right)}=\sqrt[5]{10^2-\left(2\sqrt{17}\right)^2}=\sqrt[5]{100-68}=\sqrt[5]{32}=2$, deci $a=2$.
   RĂSPUNS: $a=2$.
6. $z=\left[\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)\right]^6=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6\cdot\left(\cos 6\cdot\frac{\pi}{18}+i\sin 6\cdot\frac{\pi}{18}\right)=$
   $4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2+2\sqrt{3}i$.
   RĂSPUNS: $z=2+2\sqrt{3}i$.
7. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Efectuînd produsul celor două matrice obţinem matricea $A=\begin{pmatrix}8 & -1 & 0\\ 9 & 0 & 3\\ 1 & -2 & -5\end{pmatrix}$. $\det A=\begin{vmatrix}8 & -1 & 0\\ 9 & 0 & 3\\ 1 & -2 & -5\end{vmatrix}=0-3+$

$+0+0-45+48=0$. Deoarece $\det A=0$, rezultă că matricea A nu este inversabilă.

RĂSPUNS: Matricea A nu este inversabilă.

8. Pentru a afla abscisele punctelor comune ale graficelor funcţiilor f şi g trebuie să rezolvăm ecuaţia $f(x)=g(x)$, adică ecuaţia $\log_2(4-x)=2\log_2 3-\log_2(1-2x)$. DVA al ecuaţiei se determină din condiţiile $\begin{cases}4-x>0\\1-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x>-4\\-2x>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4\\x<\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. Aşadar, $DVA=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. Ecuaţia din enunţ se scrie $\log_2(4-x)+\log_2(1-2x)=\log_2 9$ $\Leftrightarrow\log_2(4-x)(1-2x)=\log_2 9\Leftrightarrow(4-x)(1-2x)=9\Leftrightarrow 4-8x-x+$ $+2x^2-9=0\Leftrightarrow 2x^2-9x-5=0$. Ultima ecuaţie are soluţiile $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=5$. Soluţia $x_2\notin DVA$, rezultă că unica soluţie a ecuaţiei este $x=-\frac{1}{2}$.

RĂSPUNS: $x=-\frac{1}{2}$.

9. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$. Dacă raza cercului circumscris triunghiului este $R=5\,cm$, rezultă că ipotenuza $BC=2R=2\cdot 5=10\,cm$. Raza cercului înscris în triunghi este $r=2\,cm$, atunci avem $r=\frac{AB+AC-BC}{2}$ $\Rightarrow\frac{AB+AC-10}{2}=2\Rightarrow AB+AC-10=4\Rightarrow AB+AC=14$. Fie $AB=x$, atunci $AC=14-x$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC avem $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow x^2+(14-x)^2=10^2\Leftrightarrow$ $x^2+196-28x+x^2-100=0\Leftrightarrow 2x^2-28x+96=0\Leftrightarrow x^2-14x+48=0$, cu soluţiile $x_1=6$, $x_2=8$. Deci catetele triunghiului au lungimile de $6\,cm$ şi $8\,cm$. Atunci aria triunghiului este $A=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{6\cdot 8}{2}=24\,cm^2$.

RĂSPUNS: $A=24\,cm^2$.

10. Aflăm abscisele punctelor de intersecţie ale graficelor celor două funcţii, rezolvînd ecuaţia $f(x)=g(x)$. Obţinem ecuaţia $1-x=-x^2-2x+3\Leftrightarrow$

$x^2+x-2=0$ cu soluţiile $x_1=-2$, $x_2=1$. Atunci $A=\int_{-2}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx=$ $\int_{-2}^{1}\left(-x^2-2x+3-1+x\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}=2-\frac{1}{2}-$ $-\frac{1}{3}-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+4+2-\frac{8}{3}=8-3-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}(u.p)$.

RĂSPUNS: $A=\frac{9}{2}(u.p)$.

11. *a)* Fie trunchiul de con circular drept care are ca baze cercurile $C(O,R)$ şi $C_1(O_1,r)$, $A_l=100\pi\,cm^2$, $h=8\,cm$, $G=10\,cm$. Fie $[AB]$ diametrul bazei mari, $[A_1B_1]$ diametrul bazei mici. Atunci $AO=R$, $A_1O_1=r$. Fie $A_1M\perp AB$, $B_1N\perp AB\Rightarrow[A_1M]$ şi $[B_1N]$ sunt înălţimi ale trunchiului $\Rightarrow A_1M=B_1N=8\,cm$. Din triunghiul dreptunghic A_1MA, conform teoremei lui Pitagora avem $AM=\sqrt{A_1A^2-A_1M^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6\,cm$. Aria laterală a trunchiului este $A_l=\pi G(R+r)=10\pi(R+r)$. Obţinem $10\pi(R+r)=100\pi$ $\Rightarrow R+r=10\,cm$. Avem $r+r+6=10\Rightarrow r=2\,cm$, $R=8\,cm$. Atunci $V_{tr}=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)=\frac{8\pi}{3}\cdot\left(8^2+8\cdot 2+2^2\right)=\frac{8\pi}{3}\cdot 84=224\pi\,cm^3$.

b) Prelungim generatoarele AA_1 şi BB_1 ale trunchiului de con pînă la intersecţie în punctul V. Se obţine conul din care provine trunchiul. Avem $\triangle VO_1A_1\sim\triangle VOA\Rightarrow\frac{VO_1}{VO}=\frac{A_1O_1}{AO}$. Fie $VO_1=x$, atunci $VO=x+8$. Ultima proporţie se scrie $\frac{x}{x+8}=\frac{2}{8}\Leftrightarrow\frac{x}{x+8}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4x=x+8$, de unde $x=\frac{8}{3}$. Deci $VO=8+\frac{8}{3}=\frac{32}{3}cm$. Aşadar, raza bazei conului este $R=8\,cm$, înălţimea conului este $H=\frac{32}{3}cm$. Atunci $V_c=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi\cdot 8^2\cdot\frac{32}{3}=\frac{2048}{9}\pi\,cm^3$.

RĂSPUNS: *a)* $V_{tr}=224\pi\,cm^3$;

b) $V_c=\frac{2048}{9}\pi\,cm^3$.

12. *a)* $D=R^*$. $f'(x)=\left(\frac{x^3-3x^2+m}{x^2}\right)'=\frac{\left(x^3-3x^2+m\right)'\cdot x^2-\left(x^2\right)'\left(x^3-3x^2+m\right)}{x^4}=$

$\frac{(3x^2-6x)\cdot x^2-2x\cdot(x^3-3x^2+m)}{x^4}=\frac{3x^4-6x^3-2x^4+6x^3-2mx}{x^4}=\frac{x^4-2mx}{x^4}=$

$\frac{x(x^3-2m)}{x^4}=\frac{x^3-2m}{x^3}$. Pentru ca $x=2$ să fie punct de extrem local trebuie ca

$f'(2)=0 \Rightarrow \frac{8-2m}{8}=0 \Rightarrow 8-2m=0 \Rightarrow m=4$.

b) Pentru $m=4$ avem funcţia $f:R^*\to R$, $f(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$.

$l_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$, $l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty \Rightarrow$

dreapta $x=0$ este asimptotă verticală. Funcţia nu are asimptote orizontale. Cercetăm dacă are asimptote oblice. $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3}=1$, deci

$m=1$. $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+4-x^3}{x^2}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^2+4}{x^2}=-3$. Deci, $n=-3$. Rezultă că dreapta $y=x-3$ este asimptotă oblică la $-\infty$ şi la $+\infty$.

RĂSPUNS: *a*) $m=4$;
b) Dreapta $x=0$ este asimptotă verticală, dreapta $y=x-3$ este asimptotă oblică.

TESTUL 11

1. Care dintre următoarele numere este mai mare: $a=8^5$, $b=4^8$, $c=9^8$?

2. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, $AC\cap BD=\{O\}$. Fie $OM\perp CD$, $OM=6cm$ şi $ON\perp BC$, $ON=4cm$. Să se afle perimetrul dreptunghiului $ABCD$.

3. Media aritmetică a trei numere este egală cu 7. Să se afle unul dintre aceste numere, ştiind că media aritmetică a celorlalte două numere este $5,5$.

4. Să se afle partea imaginară a numărului complex $z=(2-i)(3-i)+(2-3i)(3-4i)$.

5. Într-un an bursa unui student s-a mărit cu 32%. În primul semestru bursa s-a mărit cu 10%. Să se afle cu cîte procente s-a mărit bursa în al doilea semestru.

6. Se consideră mulţimea $A=\{x\in Z\,|\,|x-2|\le 3\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare un element al mulţimii A, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2-7x+10=0$.

7. În triunghiul ABC este dusă mediana $[AM]$, $M\in(BC)$. Să se afle aria triunghiului ABC, ştiind că $AC=3\sqrt{2}\,cm$, $BC=10\,cm$, $m(\angle MAC)=45^\circ$.

8. Să se afle domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{25}\cdot 5^x-25^{3x+2}\right)$.

9. Să se rezolve în R ecuaţia $3\sin 2x\cdot tgx+4\cos^2 x=7\sin x+1$.

10. Să se afle valorile parametrului real a pentru care funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\sqrt[9]{5x^2-(2-a)x+2-4a}$ are valoare minimă în $x_0=\frac{1}{2}$.

11. Într-o piramidă patrulateră regulată muchia laterală formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60°, iar apotema piramidei are lungimea $3\sqrt{7}\,cm$. Să se afle:
a) Aria laterală şi volumul piramidei.
b) Distanţa de la centrul bazei la una dintre feţele laterale ale piramidei.

12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care inecuaţia $(a+4)x^2-2ax+2a-6>0$ nu are soluţii nici pentru o valoare reală a lui x.

SOLUȚII

1. $a=8^5=\left(2^3\right)^5=2^{15}$, $b=4^8=\left(2^2\right)^8=2^{16}$, $c=9^8=\left(3^2\right)^8=3^{16}$. Deoarece $a<b<c$ $\Rightarrow$ c este cel mai mare număr.

RĂSPUNS: Numărul c.

2. Dacă $OM\perp CD$ și $OM=6cm \Rightarrow AD=2\cdot OM=2\cdot 6=12cm$. Dacă $ON\perp BC$ și $ON=4cm \Rightarrow AB=2\cdot ON=2\cdot 4=8cm$. Atunci $P_{ABCD}=2\cdot(AB+AD)=$ $=2\cdot(8+12)=40cm$.

RĂSPUNS: $P_{ABCD}=40cm$.

3. Dacă media aritmetică a trei numere este egală cu 7, rezultă că suma celor trei numere este egală cu 21. Media aritmetjcă a două numere este $5,5$, rezultă că suma celor două numere este egală cu 11. Atunci unul dintre cele trei numere este $21-11=10$.

RĂSPUNS: Numărul este 10.

4. $z=(2-i)(3-i)+(2-3i)(3-4i)=6-2i-3i+i^2+6-8i-9i+12i^2=6-5i-1+$ $+6-17i-12=-1-22i \Rightarrow \operatorname{Im} z=-22i$.

RĂSPUNS: $\operatorname{Im} z=-22i$.

5. Fie bursa inițială a studentului x lei. La sfîrșitul anului bursa studentului era $1,32x$. După primul semestru bursa lui era $1,1x$. Avem $\begin{matrix}1,1x & ----- & 100\%\\ 1,32x & ----- & y\%\end{matrix}$ $\Rightarrow y=\dfrac{1,32x\cdot 100\%}{1,1x}=120\%$. Deci în al doilea semestru bursa studentului s-a mărit cu 20%.

RĂSPUNS: Cu 20%.

6. Rezolvăm în mulțimea Z inecuația $|x-2|\le 3 \Leftrightarrow -3\le x-2\le 3 \Leftrightarrow$ $-1\le x\le 5 \Rightarrow x\in[-1;5]$. Numerele întregi x de pe intervalul $[-1;5]$ sunt $x\in\{-1;0;1;2;3;4;5\}$, deci avem 7 cazuri posibile. Soluțiile ecuației $x^2-7x+10=0$ sunt $x_1=2$, $x_2=5$, și deoarece ele se regăsesc printre elementele ultimei mulțimi, rezultă că avem două cazuri favorabile. Atunci $p=\dfrac{2}{7}$.

RĂSPUNS: $p=\dfrac{2}{7}$.

7. Dacă $[AM]$ este mediană în triunghiul ABC și $BC=10cm \Rightarrow$ $MC=5cm$. Aplicăm teorema cosinusurilor în triunghiul MAC. Avem $MC^2=AM^2+AC^2-2\cdot AM\cdot AC\cdot\cos 45^\circ$. Notăm $AM=x$, atunci avem $5^2=x^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\cdot x\cdot 3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 25=x^2+18-6x$. Obținem ecuația $x^2-6x-7=0$ cu soluțiile $x_1=-1$, $x_2=7$. Deoarece $x>0$, convine $x=7$, deci $AM=7cm$. $A_{AMC}=\dfrac{1}{2}\cdot AM\cdot AC\cdot\sin 45^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{21}{2}cm^2$. Atunci $A_{ABC}=2\cdot A_{AMC}=2\cdot\dfrac{21}{2}=21cm^2$.

RĂSPUNS: $A_{ABC}=21cm^2$.

8. Fie funcția $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{25}\cdot 5^x-25^{3x+2}\right)$. Condiția pentru aflarea domeniului maxim de definiție al funcției este $\dfrac{1}{25}\cdot 5^x-25^{3x+2}>0 \Leftrightarrow 5^{-2}\cdot 5^x-\left(5^2\right)^{3x+2}>0$ $\Leftrightarrow 5^{x-2}>5^{6x+4} \Leftrightarrow x-2>6x+4 \Leftrightarrow -5x>6 \Leftrightarrow x<-\dfrac{6}{5}$, deci $D_f=\left(-\infty;-\dfrac{6}{5}\right)$.

RĂSPUNS: $D_f=\left(-\infty;-\dfrac{6}{5}\right)$.

9. Fie ecuația $3\sin 2x\cdot tgx+4\cos^2 x=7\sin x+1$. DVA al ecuației este mulțimea $R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z\right\}$. Ecuația se scrie $3\cdot 2\sin x\cos x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}+4\cos^2 x=7\sin x+1$ $\Leftrightarrow 6\sin^2 x+4\cos^2 x=7\sin x+1 \Leftrightarrow 6\sin^2 x+4\left(1-\sin^2 x\right)-7\sin x-1=0$ $\Leftrightarrow 6\sin^2 x+4-4\sin^2 x-7\sin x-1=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x-7\sin x+3=0$. Notăm $\sin x=t$ și obținem ecuația $2t^2-7t+3=0$ cu soluțiile $t_1=\dfrac{1}{2}$, $t_2=3$. Obținem ecuațiile $\sin x=\dfrac{1}{2}$ cu mulțimea soluțiilor $x=(-1)^k\arcsin\dfrac{1}{2}+\pi k,k\in Z$ sau $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z$ și ecuația $\sin x=3$, care n-are soluții reale.

RĂSPUNS: $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z$.

10. Fie funcția $f:D\to R$, $f(x)=\sqrt[3]{5x^2-(2-a)x+2-4a}$. Domeniul maxim de definiție $D=R$. Funcția f va obține valoare minimă în $x_0=\dfrac{1}{2}$ atunci cînd

funcția $g(x)=5x^2-(2-a)x+2-4a$ va obține valoare minimă în $x_0=\frac{1}{2}$. Funcția g obține valoare minimă în $x=\frac{-b}{2a}=\frac{2-a}{10}$. Obținem $\frac{2-a}{10}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4-2a=10$, de unde $a=-3$.

RĂSPUNS: $a=-3$.

11. *a*) Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vîrful V și baza pătratul $ABCD$ în care $AC\cap BD=\{O\}$. $VO\perp(ABC)$. Deoarece muchia laterală a piramidei formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60°, atunci secțiunea diagonală a piramidei, de exemplu, triunghiul VAC, este echilateral. Fie latura pătratului din baza piramidei are lungimea a. Atunci $AC=a\sqrt{2}$, $VO=\frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Fie M mijlocul laturii $[CD]$, atunci $OM=\frac{1}{2}AD=\frac{a}{2}$, iar VM este apotemă a piramidei. Din triunghiul dreptunghic VOM, conform teoremei lui Pitagora, avem: $VO^2+OM^2=VM^2\Rightarrow\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(3\sqrt{7}\right)^2\Leftrightarrow\frac{6a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=63$ $\Leftrightarrow\frac{7a^2}{4}=63\Leftrightarrow\frac{a^2}{4}=9\Leftrightarrow a^2=36\Rightarrow a=6$, iar $VO=3\sqrt{6}\,cm$. Atunci $A_l=4\cdot A_{VDC}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot CD\cdot VM=2\cdot6\cdot3\sqrt{7}=36\sqrt{7}\,cm^2$. $V=\frac{1}{3}A_b\cdot VO=$ $=\frac{1}{3}\cdot6^2\cdot3\sqrt{6}=36\sqrt{6}\,cm^3$.

b) Fie $OE\perp VM$, $E\in(VM)$, atunci $[OE]$ va fi distanța de la centrul bazei la fața laterală (VDC). $OE=\frac{VO\cdot OM}{VM}=\frac{3\sqrt{6}\cdot3}{3\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{42}}{7}cm$.

RĂSPUNS: *a*) $A_l=36\sqrt{7}\,cm^2$, $V=36\sqrt{6}\,cm^3$; *b*) $d=\frac{3\sqrt{42}}{7}cm$.

12. În primul rînd trebuie ca $a+4<0\Rightarrow a<-4$, apoi discriminantul trinomului din partea stîngă a inecuației trebuie să fie negativ. $D=4a^2-4(a+4)(2a-6)=$ $4a^2-4\cdot(2a^2-6a+8a-24)=4a^2-8a^2+24a-32a+96=-4a^2-8a+96$. Avem $-4a^2-8a+96<0\Leftrightarrow a^2+2a-24>0$ cu mulțimea soluțiilor $a\in(-\infty;-6)\cup(4;+\infty)$. Ținînd cont de condiția $a<-4$ obținem $a\in(-\infty;-6)$.

RĂSPUNS: $a\in(-\infty;-6)$.

TESTUL 12

1. Să se afle valoarea expresiei $a=\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{64}}$.

2. Se consideră cercul $C(O;R)$, în care $[AB]$ este diametru, $AB=12\,cm$, punctul C aparține cercului, astfel încît $m(\angle CAB)=30^\circ$. Să se afle BC.

3. Într-o clasă sunt 18 fete, ceea ce reprezintă 60% din numărul elevilor clasei. Cîți elevi sunt în clasă?

4. Să se afle tipul de monotonie al funcției $f:(0;+\infty)\to R$, $f(x)=\log_\pi x$.

5. Să se afle numerele reale x și y din egalitatea $(2i-5)x+3iy=-5-4i$.

6. În triunghiul ABC avem $m(\angle C)=90^\circ$, $AB=5\,cm$, $\cos(\angle A)=0{,}8$. Să se afle lungimea laturii BC.

7. Să se afle probabilitatea ca alegînd un element al mulțimii $A=\{\log_2 1,\log_2 2,\log_2 3,\ldots,\log_2 100\}$, acesta să fie număr rațional.

8. Să se afle aria triunghiului determinat de axele de coordonate ale sistemului cartezian XOY și de graficul funcției $f:R\to R$, $f(x)=-2x+6$.

9. Să se afle cea mai mare valoare întreagă a parametrului a pentru care ecuația $(2a+1)x^2-3(a+1)x+a+1=0$ nu are soluții reale.

10. Să se afle aria figurii mărginite de liniile: $y=x^3-8$, $x=3$, $x=4$, $y=0$.

11. Să se rezolve în $R\times R$ sistemul de ecuații $\begin{cases}8\log_9(xy)=\log_9 x^8\\5x+2y+22=0\end{cases}$.

12. Într-un cilindru circular drept se înscrie o prismă triunghiulară regulată. Știind că volumul cilindrului este egal cu $45\pi\,cm^3$, iar aria laterală este de $30\pi\,cm^2$, să se afle volumul și aria laterală a prismei.

SOLUȚII

1. $a=\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{64}}=\sqrt[4]{\dfrac{32}{8\cdot 64}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}=\dfrac{1}{2}$.

RĂSPUNS: $a=\dfrac{1}{2}$.

2. Deoarece $[AB]$ este diametru în cercul $C(O,R)\Rightarrow$ că triunghiul ABC este dreptunghic cu $m(\angle C)=90^\circ$. $[BC]$ este catetă opusă unghiului de 30° în triunghiul dreptunghic $ABC\Rightarrow BC=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\cdot 12=6\,cm$.

RĂSPUNS: $BC=6\,cm$.

3. Fie x numărul elevilor din clasă. Atunci $\begin{matrix}x.\ldots\ldots 100\%\\ 18.\ldots\ldots 60\%\end{matrix}\Rightarrow \dfrac{x}{18}=\dfrac{100}{60}$ $\Rightarrow x=30$.

RĂSPUNS: 30 elevi.

4. Deoarece $\pi>1$, rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $(0;+\infty)$.

RĂSPUNS: Strict crescătoare pe $(0;+\infty)$.

5. $(2i-5)x+3iy=-5-4i\Rightarrow 2xi-5x+3yi=-5-4i\Rightarrow -5x+(2x+3y)i=-5-4i$.

Folosind definiția egalității a două numere complexe, obținem $\begin{cases}-5x=-5\\ 2x+3y=-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 2+3y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$.

RĂSPUNS: $x=1$, $y=-2$.

6. $\cos(\angle A)=0,8\Rightarrow \sin(\angle A)=\sqrt{1-0,8^2}=\sqrt{1-0,64}=\sqrt{0,36}=0,6$. $\dfrac{BC}{AB}=\sin(\angle A)$ $\Rightarrow \dfrac{BC}{5}=0,6$, de unde $BC=3\,cm$.

RĂSPUNS: $BC=3\,cm$.

7. Numărul cazurilor posibile este 100. În mulțimea A avem următoarele numere raționale: $\log_2 1$, $\log_2 2$, $\log_2 4$, $\log_2 8$, $\log_2 16$, $\log_2 32$, $\log_2 64$, în total 7 numere, deci avem 7 cazuri favorabile. Atunci $p=\dfrac{7}{100}$.

RĂSPUNS: $p=\dfrac{7}{100}$.

8. Fie funcția $f:R\to R$, $f(x)=-2x+6$. Aflăm coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției f cu axele de coordonate. Cu Ox: $f(x)=0$ $\Rightarrow -2x+6=0\Rightarrow x=3$, deci avem punctul $A(3;0)$. Cu Oy: $x=0$, $y=f(0)=6$, deci avem punctul $B(0;6)$. Obținem triunghiul dreptunghic AOB cu catetele $OA=3$, $OB=6$. Atunci $A_{AOB}=\dfrac{OA\cdot OB}{2}=\dfrac{3\cdot 6}{2}=9(u.p)$.

RĂSPUNS: $A=9(u.p)$.

9. Fie ecuația $(2a+1)x^2-3(a+1)x+a+1=0$. Pentru ca ecuația să nu aibă soluții reale trebuie ca discriminantul ei să fie negativ. $D=9(a+1)^2-4(2a+1)(a+1)=$ $(a+1)\cdot[9(a+1)-4(2a+1)]=(a+1)(9a+9-8a-4)=(a+1)(a+5)$. Deci obținem $(a+1)(a+5)<0$. Aplicînd metoda intervalelor obținem că mulțimea soluțiilor ultimei inecuații este $a\in(-5;-1)$. Din acest interval cea mai mare soluție întreagă este $a=-2$.

RĂSPUNS: $a=-2$.

10. $A=\int_3^4(x^3-8)dx=\left(\dfrac{x^4}{4}-8x\right)_3^4=\dfrac{4^4}{4}-32-\left(\dfrac{81}{4}-24\right)=64-32-\dfrac{81}{4}+24=$ $\dfrac{143}{4}=35,75(u.p)$.

RĂSPUNS: $A=35,75(u.p)$.

11. Fie sistemul de ecuații $\begin{cases}8\log_9(xy)=\log_9 x^8\\ 5x+2y+22=0\end{cases}$. Obținem $\begin{cases}8\log_9 xy=8\log_9|x|\\ 5x+2y+22=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=|x|\\ 5x+2y+22=0\end{cases}$. O condiție este ca $xy>0$. Avem două cazuri: 1) $x>0$, din prima ecuație avem $xy=x\Rightarrow y=1$. Atunci din a doua ecuație a sistemului avem $x=-\dfrac{24}{5}$, nu satisface condiția $xy>0$. 2) $x<0$, din prima ecuație avem $xy=-x\Rightarrow y=-1$. Înlocuind în a doua ecuație obținem $x=-4$. Așadar, soluția sistemului este $(-4;-1)$.

RĂSPUNS: $(-4;-1)$.

12. Se consideră cilindrul circular drept cu raza bazei de lungime R și înălțimea de lungime H. Atunci $V_{cil}=\pi R^2H$ și $A_{l.cil}=2\pi RH$. Obținem $\begin{cases}\pi R^2H=45\,\pi\\ 2\pi RH=30\,\pi\end{cases}$.

Împărțind prima ecuație a sistemului la a doua ecuație obținem $\frac{R}{2}=\frac{3}{2}$, de unde $R=3\,cm$, apoi $H=5\,cm$. Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ înscrisă în cilindrul dat. Atunci triunghiul echilateral ABC este înscris în cercul de rază $R=3\,cm$ din baza cilindrului. Latura triunghiului ABC va fi $a=R\sqrt{3}=3\sqrt{3}\,cm$.

Aria bazei prismei va fi $A_b=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{27\sqrt{3}}{4}cm^2$. Volumul prismei va fi $V=A_b\cdot H=\frac{27\sqrt{3}}{4}\cdot 5=\frac{135\sqrt{3}}{4}cm^3$. Aria laterală a prismei va fi $A_l=P_b\cdot H=3\cdot 3\sqrt{3}\cdot 5=45\sqrt{3}\,cm^2$.

RĂSPUNS: $V=\frac{135\sqrt{3}}{4}cm^3$, $A_l=45\sqrt{3}\,cm^2$.

TESTUL 13

1. Să se determine numărul întreg k pentru care $a=2^k$, unde $a=0,25$.
2. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB]\equiv[AC]$ și $m(\angle A)=80^\circ$. Dacă $[BE$ este bisectoarea unghiului B, $E\in(AC)$, să se afle $m(\angle EBC)$.
3. Într-o clasă sunt 30 de elevi, dintre care 40% sunt fete. Câți băieți sunt în clasă?
4. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției $f(x)=\frac{2016}{2+\log_3 x}$.
5. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+10x$. Să se rezolve în R inecuația $f'(x)>0$.
6. Să se afle primitiva $F(x)$ a funcției $f:(-\infty;0)\to R$, $f(x)=6x^2-\frac{1}{x}+1$ care verifică condiția $F(-1)=2$.
7. Se consideră rombul $ABCD$ cu unghiul ascuțit A. Înălțimea BH dusă către latura $[CD]$, $H\in(CD)$ intersectează diagonala AC în punctul M. Să se afle aria triunghiului CMH, știind că înălțimea rombului este de $8\,cm$, iar aria rombului este $80\,cm^2$.
8. Să se afle $\frac{x}{y}$, știind că $2\log_2(x-2y)=\log_2 x+\log_2 y$.
9. Într-o urnă se află 10 bile identice: 3 bile albe și 7 bile roșii. Se extrag la întîmplare două bile. Să se afle probabilitatea ca cele două bile să fie de culoare albă.
10. Lungimea înălțimii unei piramide patrulatere regulate este de trei ori mai mică decît lungimea muchiei laterale, iar lungimea apotemei este de $3\sqrt{5}\,cm$. Să se afle volumul piramidei.
11. Să se rezolve în R ecuația $6\cdot 4^{\frac{1}{x-1}}-13\cdot 6^{\frac{1}{x-1}}+6\cdot 9^{\frac{1}{x-1}}=0$.
12. Să se afle valorile reale ale lui m pentru care poate avea loc egalitatea $\cos\alpha=\frac{m^2-4m-4}{m^2+1}$, dacă $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$.

SOLUȚII

1. Avem $2^k = 0{,}25 \Leftrightarrow 2^k = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^k = 2^{-2} \Rightarrow k = -2$.

RĂSPUNS: $k = -2$.

2. Dacă triunghiul ABC este isoscel cu $[AB] \equiv [AC] \Rightarrow \angle B \equiv \angle C$. Atunci $m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \Rightarrow m(\angle B) = 50^\circ$, și deoarece $(BE$ este bisectoare, rezultă că $m(\angle EBC) = 25^\circ$.

RĂSPUNS: $m(\angle EBC) = 25^\circ$.

3. Dacă 40% din numărul elevilor clasei sunt fete, rezultă că 60% din numărul elevilor sunt băieți. Numărul băieților reprezintă $\frac{60}{100} \cdot 30 = 18$. Deci sunt 18 băieți.

RĂSPUNS: 18 băieți.

4. Se impun condițiile $\begin{cases} x > 0 \\ 2 + \log_3 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$

$x \in \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$.

RĂSPUNS: $D = \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$.

5. $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 10x\right)' = x^2 - 7x + 10$. Obținem inecuația $x^2 - 7x + 10 > 0$. Mulțimea soluțiilor inecuației este $x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

RĂSPUNS: $S = (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

6. $F(x) = \int \left(6x^2 - \frac{1}{x} + 1\right) dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} - \ln|x| + x + c = 2x^3 - \ln|x| + x + c$. Din $F(-1) = 2 \Rightarrow -2 + 0 - 1 + c = 2 \Rightarrow c = 5$. Obținem $F(x) = 2x^3 - \ln|x| + x + 5$.

RĂSPUNS: $F(x) = 2x^3 - \ln|x| + x + 5$.

7. $A_{romb} = CD \cdot BH = 8 \cdot CD \Rightarrow 8 \cdot CD = 80 \Rightarrow CD = 10\,cm \Rightarrow BC = 10\,cm$. Din triunghiul dreptunghic BHC, conform teoremei lui Pitagora avem $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\,cm$. Atunci $HD = CD - CH = 10 - 6 = 4\,cm$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic BHD avem

$BD = \sqrt{BH^2 + HD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\,cm$. Pe de altă parte $A_{romb} = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot AC}{2} = 2\sqrt{5} \cdot AC$. Obținem $2\sqrt{5} \cdot AC = 80 \Rightarrow$ $AC = \frac{80}{2\sqrt{5}} = \frac{40}{\sqrt{5}} = \frac{40\sqrt{5}}{5} = 8\sqrt{5}\,cm$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$, atunci $CO = \frac{1}{2}AC =$ $= \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{5} = 4\sqrt{5}\,cm$. $\triangle CMH \sim \triangle CDO \Rightarrow \frac{A_{CMH}}{A_{CDO}} = \left(\frac{CH}{CO}\right)^2 \Rightarrow \frac{A_{CMH}}{20} = \left(\frac{6}{4\sqrt{5}}\right)^2$ $\Rightarrow \frac{A_{CMH}}{20} = \frac{36}{80} \Rightarrow \frac{A_{CMH}}{20} = \frac{9}{20}$, de unde $A_{CMH} = 9\,cm^2$.

RĂSPUNS: $A_{CMH} = 9\,cm^2$.

8. Fie $2\log_2(x - 2y) = \log_2 x + \log_2 y$. Se impun condițiile $x > 0$, $y > 0$, $x - 2y > 0$. Aplicînd proprietăți ale logaritmilor obținem $\log_2(x - 2y)^2 = \log_2(xy) \Rightarrow$ $(x - 2y)^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$. Deoarece $y \neq 0$, prin împărțirea ambilor membri ai ultimei ecuații la y^2 obținem $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x}{y} + 4 = 0$. Notîm $\frac{x}{y} = t$ și obținem ecuația $t^2 - 5t + 4 = 0$ cu soluțiile $t_1 = 1$, $t_2 = 4$. Obținem $\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y$, nu convine, deoarece în acest caz $x - 2y < 0$. Din $t_2 = 4 \Rightarrow \frac{x}{y} = 4$.

RĂSPUNS: $\frac{x}{y} = 4$.

9. Numărul cazurilor posibile este $C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 8!} = 45$. Numărul cazurilor favorabile este $C_3^2 = 3$. Atunci $p = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$.

RĂSPUNS: $p = \frac{1}{15}$.

10. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vîrful V și baza pătratul $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$. $VO \perp (ABC) \Rightarrow VO$ este înălțime și $VO = \frac{1}{3}VC$ sau $VC = 3 \cdot VO$. Fie M mijlocul laturii $[CD] \Rightarrow [VM]$ este apotemă a piramidei și $VM = 3\sqrt{5}\,cm$. Fie $VO = a$, atunci $VC = 3a$. Din triunghiul dreptunghic VOC, conform teoremei lui Pitagora, avem $OC = \sqrt{VC^2 - VO^2} =$

$\sqrt{9a^2-a^2}=\sqrt{8a^2}=2\sqrt{2}a$. $AC=2OC=2\cdot 2\sqrt{2}a=4\sqrt{2}a$. $AC=DC\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $4\sqrt{2}a=DC\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $DC=4a$. Atunci $OM=2a$. Din triunghiul dreptunghic VOM, conform teoremei lui Pitagora avem $VO^2+OM^2=VM^2$ $\Rightarrow$ $a^2+4a^2=45$ $\Rightarrow$ $5a^2=45$ $\Rightarrow$ $a^2=9$ $\Rightarrow$ $a=3$. Obţinem $VO=3\,cm$, $DC=12\,cm$. Atunci $V=\frac{1}{3}\cdot A_b\cdot VO=\frac{1}{3}\cdot 12^2\cdot 3=144\,cm^3$.

RĂSPUNS: $V=144\,cm^3$.

11. Fie ecuaţia $6\cdot 4^{\frac{1}{x-1}}-13\cdot 6^{\frac{1}{x-1}}+6\cdot 9^{\frac{1}{x-1}}=0$. DVA al ecuaţiei este $R\setminus\{1\}$. Ecuaţia dată este o ecuaţie exponenţială omogenă reductibilă la o ecuaţie de gradul doi. Ecuaţia se mai scrie $6\cdot 2^{\frac{2}{x-1}}-13\cdot 2^{\frac{1}{x-1}}\cdot 3^{\frac{1}{x-1}}+6\cdot 3^{\frac{2}{x-1}}=0$. Notăm $2^{\frac{1}{x-1}}=a$, $3^{\frac{1}{x-1}}=b$. Obţinem ecuaţia $6a^2-13ab+6b^2=0$. Împărţim ambii membri ai ultimei ecuaţii la b^2. Obţinem $6\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\cdot\frac{a}{b}+6=0$. Notăm $\frac{a}{b}=t$ şi obţinem ecuaţia $6t^2-13t+6=0$ cu soluţiile $t_1=\frac{2}{3}$ şi $t_2=\frac{3}{2}$. Dacă $t=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{x-1}=1$, de unde $x=2$. Dacă $t=\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{x-1}=-1$, de unde $x=0$. Deci $S=\{0;2\}$.

RĂSPUNS: $S=\{0;2\}$.

12. Deoarece $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}<\cos\alpha<1$ sau $\begin{cases}\frac{m^2-4m-4}{m^2+1}>\frac{1}{2}\\ \frac{m^2-4m-4}{m^2+1}<1\end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\frac{m^2-4m-4}{m^2+1}-\frac{1}{2}>0\\ \frac{m^2-4m-4}{m^2+1}-1<0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\frac{2m^2-8m-8-m^2-1}{2(m^2+1)}>0\\ \frac{m^2-4m-4-m^2-1}{m^2+1}<0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\frac{m^2-8m-9}{m^2+1}>0\\ \frac{-4m-5}{m^2+1}<0\end{cases}$. Deoarece

$m^2+1>0$ pentru orice $m\in R$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}m^2-8m-9>0\\ -4m-5<0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}m\in(-\infty;-1)\cup(9;+\infty)\\ m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)\end{cases}$

$\Rightarrow m\in\left(-\frac{5}{4};-1\right)\cup(9;+\infty)$.

RĂSPUNS: $m\in\left(-\frac{5}{4};-1\right)\cup(9;+\infty)$.

TESTUL 14

1. Să se afle cîte numere prime sunt în mulţimea $A=\{1,2,4,7,10,11,13,14,15\}$.
2. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în care $AC\cap BD=\{O\}$. Dacă aria triunghiului COD este egală cu $12\,cm^2$, să se afle aria dreptunghiului $ABCD$.
3. Să se afle valoarea expresiei $a=3\sin^2\alpha-5\cos^2\alpha$, ştiind că $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.
4. Să se afle domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\frac{1}{3^{x+4}-\frac{1}{9}}$.
5. Să se determine o funcţie $f(x)$ de gradul al doilea care verifică condiţiile: $f(1)=3$, $f'(1)=-1$, $f''(1)=4$.
6. După ce în prima zi o persoană a cheltuit $\frac{1}{3}$ din suma pe care o avea, iar a doua zi 1500 lei, i-au mai rămas 25% din suma totală. Ce sumă a avut iniţial persoana?
7. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=x^2-3x$.
   a) Să se afle primitiva $F(x)$ a funcţiei $f(x)$, graficul căreia conţine punctul $M(6;18)$.
   b) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul primitivei $F(x)$ în punctul $x_0=0$.
8. Se consideră mulţimea $A=\left\{0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6};\pi;2\pi\right\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare un element al mulţimii A, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $\sin x=\frac{1}{2}$.
9. Să se afle matricea pătratică de ordinul doi X, care verifică relaţia $\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
10. Rezolvaţi în R inecuaţia $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x-2}{x-1}\geq\log_{\frac{1}{2}}\frac{16}{x+2}$.
11. Să se afle valorile parametrului real a pentru care ecuaţia $\sqrt{3+2x-x^2}=a$ are soluţie unică.
12. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are ariile bazelor de $100\,cm^2$ şi $36\,cm^2$, iar lungimile muchiilor laterale de cîte $10\sqrt{2}\,cm$. Să se afle aria laterală şi volumul trunchiului.

SOLUȚII

1. Numerele prime din mulțimea A sunt: $2, 7, 11, 13$, deci sunt 4 numere.

RĂSPUNS: 4 numere.

2. Aria triunghiului COD reprezintă $\frac{1}{4}$ din aria dreptunghiului $ABCD$, deci $A_{ABCD} = 4 \cdot 12 = 48\,cm^2$.

RĂSPUNS: $A_{ABCD} = 48\,cm^2$.

3. $\cos^2\alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Din identitatea $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha =$

$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Atunci $a = 3 \cdot \frac{3}{4} - 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

RĂSPUNS: $a = 1$.

4. Domeniul maxim de definiție al funcției $f(x) = \frac{1}{3^{x+4} - \frac{1}{9}}$ se determină din condiția

$3^{x+4} - \frac{1}{9} \neq 0 \Leftrightarrow 3^{x+4} \neq 3^{-2} \Leftrightarrow x + 4 \neq -2 \Leftrightarrow x \neq -6$, deci $D_f = R \setminus \{-6\}$.

RĂSPUNS: $D_f = R \setminus \{-6\}$.

5. Fie funcția $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$.

Din $\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = -1 \\ f''(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 2a + b = -1 \\ 2a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + b + c = 3 \\ 4 + b = -1 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 5 + c = 3 \\ b = -5 \\ a = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ b = -5 \\ a = 2 \end{cases}$. Așadar, avem funcția $f : R \to R$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$.

RĂSPUNS: $f : R \to R$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$.

6. Fie x suma inițială a persoanei. Rezultă ecuația $x - \frac{1}{3}x - 1500 = \frac{1}{4}x \Leftrightarrow$

$12x - 4x - 18000 = 3x \Leftrightarrow 5x = 18000 \Leftrightarrow x = 3600$. Așadar, persoana avea inițial 3600 lei.

RĂSPUNS: 3600 lei.

7. *a)* $F(x) = \int (x^2 - 3x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + c$. Din $F(6) = 18 \Rightarrow \frac{6^3}{3} - \frac{3 \cdot 6^2}{2} + c = 18$

$\Leftrightarrow 72 - 54 + c = 18$, de unde $c = 0$. Așadar, $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$.

b) $F(x_0) = F(0) = 0$. $F'(x) = f(x) = x^2 - 3x$. $F'(x_0) = F'(0) = 0$.

Ecuația tangentei este $y = 0$.

RĂSPUNS: *a)* $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$;

b) $y = 0$.

8. Numărul cazurilor posibile este 10. Soluții ale ecuației $\sin x = \frac{1}{2}$ sunt numerele $\frac{\pi}{6}$ și $\frac{5\pi}{6}$, deci avem două cazuri favorabile. Atunci $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

RĂSPUNS: $p = \frac{1}{5}$.

9. Fie matricea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Atunci $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 3x + z & 3y + t \\ 5x + 2z & 5y + 2t \end{pmatrix}$. Obținem $\begin{pmatrix} 3x + z & 3y + t \\ 5x + 2z & 5y + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obținem sistemul

$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ 3y + t = 0 \\ 5x + 2z = 0 \\ 5y + 2t = 1 \end{cases}$. Din prima și a treia ecuație obținem $x = 2$, $z = -5$. Din a doua și

a patra ecuație obținem $y = -1$, $t = 3$. Așadar, $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

RĂSPUNS: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Fie inecuația $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x-2}{x-1} \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{16}{x+2}$. DVA: $\begin{cases} \frac{3x-2}{x-1} > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty) \\ x \in (-2; +\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow x \in \left(-2; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$, deci $DVA = \left(-2; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. Din inecuația

inițială obținem $\frac{3x-2}{x-1} \leq \frac{16}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x-1} - \frac{16}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(3x-2)(x+2) - 16(x-1)}{(x-1)(x+2)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 6x - 2x - 4 - 16x + 16}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 12x + 12}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-1)(x+2)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{(x-1)(x+2)} \leq 0$. Deoarece pentru orice $x \in R$, $x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+2)<0$, de unde $x\in(-2;1)$. Ţinînd cont de DVA obţinem $S=\left(-2;\frac{2}{3}\right)\cup\{2\}$.

RĂSPUNS: $S=\left(-2;\frac{2}{3}\right)\cup\{2\}$.

11. DVA al ecuaţiei este intervalul $[-1;3]$. Se mai impune condiţia $a\geq 0$. Prin ridicarea ambilor membti ai ecuaţiei la pătrat obţinem $3+2x-x^2=a^2 \Leftrightarrow -x^2+2x+3-a^2=0 \Leftrightarrow x^2-2x+a^2-3=0$. Pentru ca ultima ecuaţie să aibă soluţie unică trebuie ca discriminantul ei să fie egal cu zero. $D=4-4\left(a^2-3\right)=4-4a^2+12=-4a^2+16$. Din $-4a^2+16=0 \Rightarrow a^2-4=0$, de unde $a_1=-2$, $a_2=2$. $a_1=-2$ nu convine, deci $a=2$.

RĂSPUNS: $a=2$.

12. Fie trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu baza mare pătratul $ABCD$ cu latura de lungime a şi baza mică pătratul $A_1B_1C_1D_1$ cu latura de lungime b. Atunci $a^2=100 \Rightarrow a=10\,cm$ şi $b^2=36 \Rightarrow b=6\,cm$. În trapezul isoscel AA_1D_1D construim înălţimile $A_1M\perp AD$ şi $D_1N\perp AD$. M, $N\in(AD)$. Atunci $MN=A_1D_1=6\,cm$, $AM+ND=4\,cm$, de unde $AM=ND=2\,cm$. Din triunghiul dreptunghic AA_1M, conform teoremei lui Pitagora avem $A_1M=\sqrt{A_1A^2-AM^2}=\sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2-2^2}=\sqrt{200-4}=\sqrt{196}=14\,cm$, deci apotema trunchiului are $14\,cm$. Atunci $A_l=4\cdot A_{AA_1D_1D}=4\cdot\frac{AD+A_1D_1}{2}\cdot A_1M=2(10+6)\cdot 14=448\,cm^2$. Aflăm înălţimea trunchiului. Fie $AC\cap BD=\{O\}$ şi $A_1C_1\cap B_1D_1=\{O_1\}$. $AC=10\sqrt{2} \Rightarrow AO=5\sqrt{2}\,cm$ şi $A_1C_1=6\sqrt{2} \Rightarrow A_1O_1=3\sqrt{2}\,cm$. Fie $A_1E\perp(ABC) \Rightarrow A_1E\perp AC$. Atunci $EO=A_1O_1=3\sqrt{2}\,cm$ şi $AE=AO-EO=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}\,cm$. Din triunghiul dreptunghic A_1AE, conform teoremei lui Pitagora avem $A_1E=\sqrt{A_1A^2-AE^2}=\sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{200-8}=\sqrt{192}=8\sqrt{3}\,cm$, aşadar, înălţimea trunchiului are lungimea $8\sqrt{3}\,cm$. Volumul trunchiului este $V=\frac{H}{3}\left(A_B+\sqrt{A_B\cdot A_b}+A_b\right)=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\left(100+\sqrt{100\cdot 36}+36\right)=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot 196=\frac{1568\sqrt{3}}{3}\,cm^3$.

TESTUL 15

1. Să se afle valoarea expresiei $A=(\cos x-\sin x)^2+\sin 2x$, $x\in R$.
2. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $m(\angle C)=60^\circ$ şi $BC=8\,cm$. Să se afle lungimea segmentului $[AC]$.
3. Să se afle numerele reale x şi y din relaţia $(5x-3y)+(x-2y)i=6+(8-x+y)i$.
4. Să se calculeze $a=\sqrt{36^{\frac{1}{\log_7 6}}-3\cdot 125^{\frac{1}{\log_5 5}}}$.
5. AC şi BC sunt două coarde reciproc perpendiculare în cercul $C(O,R)$. Ştiind că distanţa dintre mijloacele celor două coarde este de $10\,cm$, să se afle lungimea diametrului cercului.
6. Doi muncitori au confecţionat într-o săptămînă 1720 piese. Să se afle cîte piese a confecţionat fiecare, ştiind că al doilea muncitor a confecţionat cu 15% mai mult decît primul.
7. Un con circular drept are raza bazei de $8\sqrt{2}\,cm$, iar generatoarea formează cu planul bazei un unghi de 45°. Să se afle volumul şi aria totală a conului.
8. Să se rezolve în R ecuaţia $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$.
9. Să se afle aria figurii plane mărginite de graficul funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=5+4x-x^2$, de axa de simetrie a graficului funcţiei f şi de axele de coordonate.
10. Să se afle valorile parametrului real a pentru care graficele funcţiilor $f,g:R\to R$, $f(x)=2ax+1$ şi $g(x)=(a-6)x^2-2$ nu se intersectează.
11. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2+mx+n}{x-1}$. Să se determine parametrii reali m şi n pentru care funcţia f admite un extrem egal cu 1 în punctul $x=0$.
12. Să se rezolve în $R\times R$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases}4^{\frac{x}{y}}\cdot 4^{\frac{y}{x}}=32\\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y)\end{cases}$.

SOLUȚII

1. $A=(\cos x-\sin x)^2+\sin 2x=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin 2x=1-\sin 2x+$ $+\sin 2x=1$.

RĂSPUNS: $A=1$.

2. Dacă $m(\angle C)=60^\circ \Rightarrow m(\angle B)=30^\circ$. $[AC]$ fiind catetă opusă unghiului de 30° în triunghiul dreptunghic ABC, rezultă că $AC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\cdot 8=4\,cm$.

RĂSPUNS: $AC=4\,cm$.

3. Obținem sistemul $\begin{cases}5x-3y=6\\x-2y=8-x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-3y=6\\2x-3y=8\end{cases}$. Scăzînd a doua ecuație din prima obținem $3x=-2$, de unde $x=-\frac{2}{3}$. Înlocuind $x=-\frac{2}{3}$ în oricare ecuație a ultimului sistem obținem $y=-\frac{28}{9}$.

RĂSPUNS: $x=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{28}{9}$.

4. $a=\sqrt{36^{\frac{1}{\log_7 6}}-3\cdot 125^{\frac{1}{\log_2 5}}}=\sqrt{36^{\log_6 7}-3\cdot 125^{\log_5 2}}=\sqrt{\left(6^2\right)^{\log_6 7}-3\cdot\left(5^3\right)^{\log_5 2}}=$ $\sqrt{6^{\log_6 49}-3\cdot 5^{\log_5 8}}=\sqrt{49-3\cdot 8}=\sqrt{49-24}=\sqrt{25}=5$.

RĂSPUNS: $a=5$.

5. Deoarece coardele AC și BC sunt reciproc perpendiculare, rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic și este înscris în cercul $C(O,R)$, deci $[AB]$ este ipotenuză a triunghiului ABC și $[AB]$ este diametru a cercului. Fie M mijlocul lui $[BC]$, N mijlocul lui $[AC]\Rightarrow[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $AB=2\cdot MN=2\cdot 10=20\,cm$. Așadar, lungimea diametrului cercului este $D=20\,cm$.

RĂSPUNS: $D=20\,cm$.

6. Fie x numărul de piese confecționate de primul muncitor, atunci al doilea muncitor a confecționat $x+\frac{15}{100}x=x+\frac{3}{20}x=\frac{23}{20}x$. Obținem ecuația $x+\frac{23}{20}x=1720\Leftrightarrow$ $20x+23x=1720\cdot 20\Leftrightarrow 43x=1720\cdot 20\Leftrightarrow x=\frac{1720\cdot 20}{43}=40\cdot 20=800$. Deci primul muncitor a confecționat 800 piese, iar al doilea a confecționat $1720-800=920$ piese.

RĂSPUNS: I muncitor – 800 piese,
al II muncitor – 920 piese.

7. Fie un con circular drept cu vîrful V și baza cercul $C(O;R)$, unde $R=8\sqrt{2}\,cm$. Fie $[AB]$ un diametru al bazei conului. $[VO]$ este înălțime a conului. Triunghiul VAB este isoscel, și deoarece $m(\angle VAB)=45^\circ\Rightarrow$ triunghiul VAB este dreptunghic isoscel cu ipotenuza $[AB]$. Atunci $VO=\frac{1}{2}AB=8\sqrt{2}\,cm$. Din triunghiul dreptunghic VOA conform teoremei lui Pitagora obținem $VA=\sqrt{VO^2+AO^2}=\sqrt{\left(8\sqrt{2}\right)^2+\left(8\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{128+128}=\sqrt{256}=16\,cm$. Atunci $V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(8\sqrt{2}\right)^2\cdot 8\sqrt{2}=\frac{1}{3}\pi\cdot 128\cdot 8\sqrt{2}=\frac{1024\sqrt{2}}{3}\pi\,cm^3$. $A_l=\pi RG=\pi\cdot 8\sqrt{2}\cdot 16=128\sqrt{2}\pi\,cm^2$. $A_b=\pi R^2=\pi\cdot\left(8\sqrt{2}\right)^2=$ $128\pi\,cm^2$. Aria totală va fi $A_t=A_l+A_b=128\sqrt{2}\pi+128\pi=128\left(\sqrt{2}+1\right)\pi\,cm^2$.

RĂSPUNS: $V=\frac{1024\sqrt{2}}{3}\pi\,cm^3$,
$A_t=128\left(\sqrt{2}+1\right)\pi\,cm^2$.

8. Fie ecuația $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$. DVA al ecuației se determină din condițiile $\begin{cases}x\geq 0\\5-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\x\leq 5\end{cases}\Rightarrow DVA=[0;5]$. Ridicînd ambii membri ai ecuației la pătrat obținem $3+\sqrt{5-x}=x\Leftrightarrow\sqrt{5-x}=x-3$. Ridicînd încă o dată la pătrat obținem $5-x=x^2-6x+9\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$ cu soluțiile $x_1=1$, $x_2=4$. Prin verificare se observă că $x=1$ nu este soluție a ecuației inițiale. Deci $x=4$ este unica soluție a ecuației.

RĂSPUNS: $S=\{4\}$.

9. Axa de simetrie a parabolei care reprezintă graficul funcției f este dreapta de ecuație $x=-\frac{b}{2a}$, sau în cazul nostru dreapta $x=2$. Atunci $A=\int_0^2\left(5+4x-x^2\right)dx=$ $\left(5x+2x^2-\frac{x^3}{3}\right)_0^2=10+8-\frac{8}{3}=18-\frac{8}{3}=\frac{54-8}{3}=\frac{46}{3}=15\frac{1}{3}(u.p)$.

RĂSPUNS: $A=15\frac{1}{3}(u.p)$.

10. Pentru ca graficele celor două funcții să nu se intersecteze trebuie ca ecuația $g(x)=f(x)$ să nu aibă soluții reale. Avem ecuația $(a-6)x^2-2=2ax+1\Leftrightarrow$ $(a-6)x^2-2ax-3=0$. Pentru ca ultima ecuație să nu aibă soluții reale trebuie ca discriminantul ei să fie negativ. $D=4a^2+12(a-6)=4a^2+12a-72$. $D<0\Rightarrow$

$4a^2+12a-72<0 \Leftrightarrow a^2+3a-18<0$. Mulţimea soluţiilor ultimei inecuaţii este $a\in(-6;3)$.

RĂSPUNS: $a\in(-6;3)$.

11. Fie funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2+mx+n}{x-1}$. $D=R\setminus\{1\}$. $f'(x)=\left(\frac{x^2+mx+n}{x-1}\right)'=$

$\frac{(x^2+mx+n)'(x-1)-(x-1)'(x^2+mx+n)}{(x-1)^2}=$ $\frac{(2x+m)(x-1)-(x^2+mx+n)}{(x-1)^2}=$

$\frac{2x^2-2x+mx-m-x^2-mx-n}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-m-n}{(x-1)^2}$. Pentru ca funcţia f să admită un extrem egal cu 1 în punctul $x=0$ trebuie ca $f'(0)=0$ şi $f(0)=1$. Din $f'(0)=0 \Rightarrow -m-n=0$. Din $f(0)=1 \Rightarrow \frac{n}{-1}=1 \Rightarrow n=-1$. Apoi din $-m-n=0$ $\Rightarrow m=1$.

RĂSPUNS: $m=1$, $n=-1$.

12. Fie sistemul $\begin{cases}4^{\frac{x}{y}}\cdot 4^{\frac{y}{x}}=32\\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y)\end{cases}$. Se impun condiţiile $\begin{cases}x-y>0\\ x+y>0\end{cases}$. Prima ecuaţie a sistemului se scrie $4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32 \Leftrightarrow 2^{2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}=2^5 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=5 \Leftrightarrow$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}$. Notăm $\frac{x}{y}=t$, atunci $\frac{y}{x}=\frac{1}{t}$ şi ecuaţia devine $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2+2=5t$

$\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0$ cu soluţiile $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=2$. Dacă $t=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=2x$.

Înlocuind în ecuaţia a doua a sistemului obţinem $\log_3(-x)=1-\log_3 3x$, care n-are sens, deoarece x şi $-x$ sunt numere opuse, deci unul dintre ele este negativ.

Dacă $t=2 \Rightarrow \frac{x}{y}=2 \Rightarrow x=2y$. Înlocuind în ecuaţia a doua a sistemului obţinem

$\log_3 y=1-\log_3 3y \Leftrightarrow \log_3 y=1-\log_3 3-\log_3 y \Leftrightarrow \log_3 y=1-1-\log_3 y \Leftrightarrow$

$2\log_3 y=0 \Leftrightarrow \log_3 y=0$, de unde $y=1$. Atunci $x=2$. Aşadar, soluţia sistemului este $(2;1)$.

RĂSPUNS: $(2;1)$.

TESTUL 16

1. Să se compare numerele $a=\log_2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$ şi $b=\log_3 1$.

2. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în care M este mijlocul laturii $[AB]$, N mijlocul laturii $[BC]$ şi P mijlocul laturii $[AD]$. Dacă aria triunghiului MNP este egală cu $6,5\ cm^2$, să se afle aria dreptunghiului $ABCD$.

3. Să se afle $a\in R$ pentru care funcţia $f:R\to R$, $f(x)=(a-3)x+5$ este strict descrescătoare pe R.

4. Într-o clasă cu 27 elevi raportul dintre numărul băieţilor şi al fetelor este $\frac{4}{5}$. Să se afle cîte fete sunt în clasă.

5. Să se afle partea reală a numărului complex $z=(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$.

6. Să se afle mulţimea valorilor funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=\sin x-3$.

7. Diagonala unui paralelogram împarte unghiul ascuţit al paralelogramului în două unghiuri cu măsurile de 30° şi 45°. Să se afle raportul lungimilor laturilor paralelogramului.

8. Se consideră mulţimea $A=\left\{x\in N^*\,\middle|\,x\le 9\right\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare două elemente ale mulţimii A, acestea să fie numere naturale prime între ele.

9. Să se rezolve în R ecuaţia $x^2\cdot 2^x+8=2x^2+2^{x+2}$.

10. Să se afle domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\sqrt{\lg\frac{1-2x}{x+3}}$.

11. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de $12cm$ şi volumul de $384cm^3$. Să se afle lungimea înălţimii şi aria laterală a piramidei.

12. Se consideră funcţiile $f,g:R\to R$, $f(x)=x^2+4x$, $g(x)=x+4$.

a) Să se rezolve inecuaţia $f(x)\le g(x)$.

b) Să se afle aria figurii plane cuprinse între graficele funcţiilor f şi g şi dreptele de ecuaţii $x=-4$ şi $x=1$.

SOLUȚII

1. $a=\log_2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$, $b=\log_3 1=0 \Rightarrow a<b$.

RĂSPUNS: $a<b$.

2. Aria triunghiului MNP reprezintă $\frac{1}{4}$ din aria dreptunghiului $ABCD \Rightarrow$ $A_{ABCD}=4\cdot A_{MNP}=4\cdot 6,5=26\,cm^2$.

RĂSPUNS: $A_{ABCD}=26\,cm^2$.

3. Se impune condiția $a-3<0 \Leftrightarrow a<3$, deci $a\in(-\infty;3)$.

RĂSPUNS: $a\in(-\infty;3)$.

4. Fie b numărul băieților și f numărul fetelor din clasă. Atunci $b+f=27$ și $\frac{b}{f}=\frac{4}{5}$. Din relația a doua obținem $b=\frac{4}{5}f$ și înlocuind în prima relație avem $\frac{4}{5}f+f=27 \Leftrightarrow \frac{9}{5}f=27$, de unde $f=15$. Deci, în clasă sunt 15 fete.

RĂSPUNS: 15 fete.

5. $z=(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)=6-2i+3i-i^2+6+8i+9i+12i^2=12+i+1+$ $+17i-12=1+18i \Rightarrow \operatorname{Re} z=1$.

RĂSPUNS: $\operatorname{Re} z=1$.

6. Fie funcția $f:R\to R$, $f(x)=\sin x-3$. Deoarece $-1\le\sin x\le 1 \Rightarrow$ $-1-3\le\sin x-3\le 1-3 \Rightarrow -4\le\sin x-3\le -2$, deci $E_f=[-4;-2]$.

RĂSPUNS: $E_f=[-4;-2]$.

7. Fie paralelogramul $ABCD$ cu unghiurile ascuțite A și C, $AB<BC$. Diagonala AC împarte unghiul A în două unghiuri cu măsurile de 30° și 45°, și anume: $m(\angle CAD)=30^\circ$ și $m(\angle CAB)=45^\circ$. $\angle ACB\equiv\angle CAD$ ca unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele BC și AD și secanta $AC \Rightarrow$ $m(\angle ACB)=30^\circ$. În triunghiul ABC, conform teoremei sinusurilor, avem $\frac{AB}{\sin 30^\circ}=$ $=\frac{BC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Deci raportul lungimilor laturilor paralelogramului este $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sau $\sqrt{2}$.

RĂSPUNS: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sau $\sqrt{2}$.

8. Numărul cazurilor posibile este $C_9^2=\frac{9!}{2!\cdot 7!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 7!}=36$. Perechile de numere prime între ele sunt 27, (găsiți-le), deci cazuri favorabile avem 27. Atunci $p=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$.

RĂSPUNS: $p=\frac{3}{4}$.

9. Fie ecuația $x^2\cdot 2^x+8=2x^2+2^{x+2}$. $DVA=R$. Ecuația se scrie $x^2\cdot 2^x+8=$ $=2x^2+4\cdot 2^x \Leftrightarrow x^2\cdot 2^x+8-2x^2-4\cdot 2^x=0$. Grupînd convenabil termenii obținem $\left(x^2\cdot 2^x-2x^2\right)-\left(4\cdot 2^x-8\right)=0 \Leftrightarrow x^2\left(2^x-2\right)-4\left(2^x-2\right)=0 \Leftrightarrow$ $\left(2^x-2\right)\left(x^2-4\right)=0 \Leftrightarrow \left(2^x-2\right)(x-2)(x+2)=0$ cu soluțiile $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=2$. Așadar, $S=\{-2;1;2\}$.

RĂSPUNS: $S=\{-2;1;2\}$.

10. Fie funcția $f(x)=\sqrt{\lg\frac{1-2x}{x+3}}$. Domeniul maxim de definiție al funcției f se determină din condiția $\lg\frac{1-2x}{x+3}\ge 0 \Leftrightarrow \lg\frac{1-2x}{x+3}\ge\lg 1$. Nu este necesară condiția $\frac{1-2x}{x+3}>0$, deoarece din ultima inecuație avem $\frac{1-2x}{x+3}\ge 1 \Leftrightarrow$ $\frac{1-2x}{x+3}-1\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x-x-3}{x+3}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-2}{x+3}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x+3}\le 0$. Folosind metoda intervalelor obținem mulțimea soluțiilor inecuației $x\in\left(-3;-\frac{2}{3}\right]$. Deci $D_f=\left(-3;-\frac{2}{3}\right]$.

RĂSPUNS: $D_f=\left(-3;-\frac{2}{3}\right]$.

11. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vîrful V și baza pătratul $ABCD$ cu latura de $12\,cm$. Fie $AC\cap BD=\{O\} \Rightarrow VO\perp(ABC) \Rightarrow [VO]$ este înălțimea piramidei. $A_b=12^2=144\,cm^2$. $V_{pir}=\frac{1}{3}A_b h \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot 144\cdot h=384 \Rightarrow 48h=384$, de unde $h=8\,cm$. Deci $VO=8\,cm$. Aflăm lungimea apotemei piramidei. Fie M mijlocul laturii CD, atunci $OM\perp CD$ și conform teoremei celor trei perpendiculare

$VM \perp CD \Rightarrow VM$ este apotema piramidei. $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6\,cm$.

Din triunghiul dreptunghic VOM, conform teoremei lui Pitagora avem $VM = \sqrt{VO^2 + OM^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10\,cm$. Atunci $A_l = 4 \cdot A_{VCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot CD \cdot VM = 2 \cdot 12 \cdot 10 = 240\,cm^2$.

RĂSPUNS: $h = 8\,cm$, $A_l = 240\,cm^2$.

12. *a)* Avem de rezolvat inecuaţia $f(x) \le g(x)$, adică $x^2 + 4x \le x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \le 0$. Mulţimea soluţiilor ultimei inecuaţii este $x \in [-4; 1]$.

b) $A = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x)\,dx = \int_{-4}^{1} (4 - 3x - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-4}^{1} = 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \left(-16 - 24 + \frac{64}{3}\right) = 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + 24 - \frac{64}{3} = 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{264 - 130 - 9}{6} = \frac{125}{6}(u.p)$.

TESTUL 17

1. Să se afle valoarea expresiei $b = \log_3 9a$, ştiind că $\log_3 a = \frac{3}{10}$.
2. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ şi $m(\angle B) = 5 \cdot m(\angle C)$. Să se afle $m(\angle B)$ şi $m(\angle C)$.
3. Să se compare numerele $a = \sin\frac{\pi}{3}$ şi $b = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.
4. Din $100\,kg$ de grîu se obţin în medie $78\,kg$ de făină. Ce cantitate de făină se obţine prin măcinarea grîului din 200 saci, dacă fiecare sac cîntăreşte $75\,kg$ de grîu?
5. Să se afle zerourile funcţiei $f : D \to R$, $f(x) = \sqrt{5x} - \sqrt{4x^2 + 1}$.
6. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $X \in M_2(R)$ care verifică egalitatea $A \cdot X = B$.
7. Să se afle măsurile unghiurilor ascuţite ale unui triunghi dreptunghic, ştiind că mediana corespunzătoare ipotenuzei împarte unghiul drept în două unghiuri, raportul măsurilor cărora este $2:1$.
8. Să se afle domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x) = \sqrt{1 - 6^{x^2} \cdot 36^x}$.
9. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Se extrag la întîmplare două numere din mulţimea A. Să se afle probabilitatea ca produsul celor două numere extrase să fie pătrat perfect.
10. Se consideră dezvoltarea $\left(x + x^{\lg x - 3}\right)^5$. Să se afle $x \in R$ pentru care termenul al treilea al dezvoltării este egal cu 1000.
11. Fie funcţia $f : (0; +\infty) \to R$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Să se calculeze aria limitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = e$.
12. Fie o piramidă triunghiulară cu laturile bazei de $9\,cm$, $12\,cm$ şi $15\,cm$. Toate muchiile laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri cu măsura α. Să se afle volumul piramidei.

SOLUȚII

1. $b=\log_3 9a=\log_3 9+\log_3 a=2+\frac{3}{10}=\frac{23}{10}=2,3$.

RĂSPUNS: $b=2,3$.

2. Fie $m(\angle C)=x$, atunci $m(\angle B)=5x$. Obținem ecuația $x+5x=90^\circ \Leftrightarrow 6x=90^\circ \Leftrightarrow x=15^\circ$. Deci, $m(\angle C)=15^\circ$, $m(\angle B)=75^\circ$.

RĂSPUNS: $m(\angle C)=15^\circ$, $m(\angle B)=75^\circ$.

3. $a=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=b$.

RĂSPUNS: $a=b$.

4. În cei 200 de saci se află $200\cdot 75=15000\,kg$ de grîu. Dacă din $100\,kg$ de grîu se obțin $78\,kg$ de făină, atunci din $15000\,kg$ de grîu se vor obține $\frac{15000\cdot 78}{100}=11700\,kg$ de făină.

RĂSPUNS: $11700\,kg$ de făină.

5. Fie funcția $f:D\to R$, $f(x)=\sqrt{5x}-\sqrt{4x^2+1}$. $D=[0;+\infty)$. Pentru a afla zerourile funcției f rezolvăm ecuația $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{5x}-\sqrt{4x^2+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1}=\sqrt{5x} \Leftrightarrow 4x^2+1=5x \Leftrightarrow 4x^2-5x+1=0$. Ultima ecuație are soluțiile $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=1$. Așadar, zerourile funcției sunt $\frac{1}{4}$ și 1.

RĂSPUNS: $x\in\left\{\frac{1}{4};1\right\}$.

6. Fie matricea pătratică de ordinul doi $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$. Avem $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+z & y+t\\ 2z & 2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Rezultă sistemul $\begin{cases}x+z=2\\ y+t=1\\ 2z=1\\ 2t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=1\\ z=\frac{1}{2}\\ t=0\end{cases}$. Deci avem matricea $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$.

RĂSPUNS: $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$.

7. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $[AM]$ este mediană, $M\in(BC)$, astfel încît $\frac{m(\angle MAC)}{m(\angle MAB)}=\frac{2}{1}$. Fie $m(\angle MAB)=x$, atunci $m(\angle MAC)=2x$. Obținem $x+2x=90 \Leftrightarrow 3x=90$, deunde $x=30^\circ$. Deci $m(\angle MAB)=30^\circ$, $m(\angle MAC)=60^\circ$. Deoarece triunghiurile MAB și MAC sunt isoscele, rezultă că $m(\angle B)=30^\circ$, $m(\angle C)=60^\circ$.

RĂSPUNS: 30° și 60°.

8. Fie funcția $f(x)=\sqrt{1-6^{x^2}\cdot 36^x}$. Domeniul maxim de definiție se determină din condiția $1-6^{x^2}\cdot 36^x\ge 0 \Leftrightarrow -6^{x^2}\cdot 6^{2x}\ge -1 \Leftrightarrow 6^{x^2+2x}\le 1 \Leftrightarrow 6^{x^2+2x}\le 6^0 \Leftrightarrow x^2+2x\le 0$. Mulțimea soluțiilor ultimei inecuații este $x\in[-2;0]$. Deci domeniul maxim de definiție al funcției este $D=[-2;0]$.

RĂSPUNS: $D=[-2;0]$.

9. Numărul cazurilor posibile este $C_{10}^2=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 8!}=45$. Perechile de numere din mulțimea A care au produsul un număr natural pătrat perfect sunt $(1,4)$, $(1,9)$, $(2,8)$, $(4,9)$, deci avem 4 cazuri favorabile. Atunci $p=\frac{4}{45}$.

RĂSPUNS: $p=\frac{4}{45}$.

10. Fie dezvoltarea $\left(x+x^{\lg x-3}\right)^5$. Trebuie de aflat x pentru care $T_3=1000$. Se impune condiția $x\in(0;+\infty)$. $T_3=T_{2+1}=C_5^2x^3\left(x^{\lg x-3}\right)^2=10\cdot x^3\cdot x^{2\lg x-6}=10\cdot x^{3+2\lg x-6}=10\cdot x^{2\lg x-3}$. Obținem $10\cdot x^{2\lg x-3}=1000 \Rightarrow x^{2\lg x-3}=100$. Logaritmînd ambele părți ale ultimei egalități în baza 10 obținem $\lg x^{2\lg x-3}=\lg 100 \Leftrightarrow (2\lg x-3)\cdot\lg x=2 \Leftrightarrow 2\lg^2 x-3\lg x-2=0$. Notăm $\lg x=t$ și obținem ecuația $2t^2-3t-2=0$ cu soluțiile $t_1=-\frac{1}{2}$, $t_2=2$. Dacă $t=-\frac{1}{2} \Rightarrow \lg x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=10^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{10}}{10}$. Dacă $t=2 \Rightarrow \lg x=2$, de unde $x=100$.

RĂSPUNS: $x\in\left\{\frac{\sqrt{10}}{10};100\right\}$.

11. Fie funcția $f:(0;+\infty)\to R$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. Pe intervalul $(1;e)$ funcția f obține valori pozitive, deci pe acest interval graficul funcției f este situat mai sus de axa absciselor. Atunci $A=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$. Aflăm integrala nedefinită a funcției f folosind

metoda integrării prin părți. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \begin{bmatrix} u=\ln x \\ du=\frac{1}{x}dx \\ dv=\frac{1}{x^2}dx \\ v=-\frac{1}{x} \end{bmatrix} = -\frac{1}{x}\ln x - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx =$

$-\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}$. Atunci $A = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right)_1^e =$

$-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}-(0-1) = 1-\frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}(u.p)$.

RĂSPUNS: $A=\frac{e-2}{e}(u.p)$.

12. Fie piramida triunghiulară $VABC$ cu vîrful V și baza triunghiul ABC cu lungimile laturilor $AB=9cm$, $AC=12cm$, $BC=15cm$. Deoarece $BC^2=AB^2+AC^2$, atunci conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic cu ipotenuza BC. Toate muchiile laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri congruente, rezultă că piciorul înălțimii piramidei coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului din baza piramidei, care este mijlocul O al ipotenuzei $[BC]$. Așadar, $VO\perp(ABC)$ și $VO\perp BC$. Triunghiul VBC este isoscel cu baza $[BC]$, deci $m(\angle VBC)=m(\angle VCB)=\alpha$.

$OC=\frac{1}{2}BC=7,5cm$. Din triunghiul dreptunghic VOC avem $\frac{VO}{OC}=tg\alpha \Rightarrow$

$VO=OCtg\alpha=7,5tg\alpha$. Aria bazei este $A_b=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12=54cm^2$.

Atunci $V=\frac{1}{3}A_b\cdot VO=\frac{1}{3}\cdot 54\cdot 7,5tg\alpha=135tg\alpha\, cm^3$.

RĂSPUNS: $V=135tg\alpha\, cm^3$.

TESTUL 18

1. Aflați valoarea expresiei $a=16^{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$.

2. Aria unei fețe a unui cub este egală cu $16cm^2$. Să se afle aria secțiunii diagonale a cubului.

3. Fie funcția $f:R\to R$, $f(x)=2x+a$. Dacă $x=3$ este zeroul funcției, să se afle a.

4. După două creșteri consecutive de prețuri, prima de 10%, iar a doua de 15%, un produs costă 25300 lei. Care a fost prețul inițial al produsului?

5. Un cilindru echilater (are secțiunea axială un pătrat) are diagonala secțiunii axiale de $8\sqrt{2}\,cm$. Calculați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului.

6. Notăm cu A mulțimea valorilor lui x pentru care are sens expresia $C_{11x}^{x^2+10}$. Să se afle $cardA$.

7. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x-1}$.

8. Să se afle numărul complex z știind că $z^2=3+4i$.

9. Să se afle valorile întregi ale lui x pentru care expresia $\frac{\sqrt{1-\sin x}}{\lg(-3x^2+10x-3)}$ are sens.

10. Un unghi al unui trapez are măsura de 30°, iar prelungirile laturilor laterale se intersectează sub un unghi drept. Să se afle lungimea laturii laterale mai mici a trapezului, știind că lungimea liniei mijlocii a trapezului este egală cu $10cm$, iar una dintre baze are lungimea $8cm$.

11. Se dă ecuația $(x+1)\cdot 3^{x^2+5x+6}-x^2\cdot\left(3^{x^2+5x+6}-1\right)=x+1$. Notăm cu s suma modulelor soluțiilor reale ale ecuației. Să se afle s.

12. Să se determine $a\in R$, $a>0$ astfel încît $\int_0^a\left(2-4x+3x^2\right)dx=a$.

SOLUȚII

1. $a=16^{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}=\sqrt[4]{16}+7=2+7=9$.

RĂSPUNS: $a=9$.

2. Fie a lungimea muchiei cubului, atunci $a^2=16 \Rightarrow a=4cm$. Diagonala unei fețe a cubului are lungimea $d=a\sqrt{2}=4\sqrt{2}\,cm$. Atunci aria secțiunii diagonale a cubului este $A=a\cdot d=4\cdot 4\sqrt{2}=16\sqrt{2}\,cm^2$.

RĂSPUNS: $A_{sec}=16\sqrt{2}\,cm^2$.

3. Avem $f(3)=0 \Rightarrow 6+a=0 \Rightarrow a=-6$.

RĂSPUNS: $a=-6$.

4. Fie x prețul produsului înainte de a doua creștere de prețuri.

Atunci $\begin{matrix} x \ldots\ldots\ldots 100\% \\ 25300 \ldots\ldots 115\% \end{matrix} \Rightarrow x=\frac{25300\cdot 100}{115}=22000$ lei. Fie y prețul inițial al produsului.

Atunci $\begin{matrix} y \ldots\ldots\ldots 100\% \\ 22000 \ldots\ldots 110\% \end{matrix} \Rightarrow y=\frac{22000\cdot 100}{110}=20000$ lei. Deci prețul inițial al produsului este 20000 lei.

RĂSPUNS: 20000 lei.

5. Fie a lungimea laturii pătratului din secțiunea axială a cilindrului. Deoarece diagonala secțiunii axiale are $8\sqrt{2}\,cm \Rightarrow a=8cm$, deci înălțimea cilindrului este $H=8cm$ și diametrul bazei este $8cm$, atunci raza bazei cilindrului este $R=4cm$. Obținem $A_l=2\pi RH=2\pi\cdot 4\cdot 8=64\pi\,cm^2$. $A_b=\pi R^2=\pi\cdot 4^2=16\pi\,cm^2$. $A_t=A_l+2A_b=64\pi+2\cdot 16\pi=64\pi+32\pi=96\pi\,cm^2$. $V=\pi R^2H=\pi\cdot 16\cdot 8=128\pi\,cm^3$.

RĂSPUNS: $A_l=64\pi\,cm^2$, $A_t=96\pi\,cm^2$, $V=128\pi\,cm^3$.

6. Se impun condițiile $x\in N^*$ și $x^2+10\le 11x \Leftrightarrow x^2-11x+10\le 0$. Mulțimea soluțiilor reale ale ultimei inecuații este $x\in[1;10]$. Pe intervalul obținut se află 10 numere naturale, deci $cardA=10$.

RĂSPUNS: $cardA=10$.

7. Fie funcția $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x-1}$. Domeniul maxim de definiție se află din condițiile $x-1\neq 0$, deci $x\neq 1$ și $4-x^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2-4\le 0$, care are mulțimea soluțiilor $x\in[-2;2]$. Din cele două condiții obținem $D=[-2;1)\cup(1;2]$.

RĂSPUNS: $D=[-2;1)\cup(1;2]$.

8. Fie $z^2=3+4i$. Notăm $z=x+yi$, $x,y\in R$. Obținem $(x+yi)^2=3+4i \Leftrightarrow x^2+2xyi+y^2i^2=3+4i \Leftrightarrow (x^2-y^2)+2xyi=3+4i$. Folosind definiția egalității a două numere complexe obținem $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\frac{4}{x^2}=3 \\ y=\frac{2}{x} \end{cases}$. Rezolvăm prima ecuație a sistemului: $x^4-4=3x^2 \Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0$. Notăm $x^2=t$, obținem ecuația $t^2-3t-4=0$ cu soluțiile $t_1=-1$ (nu convine) și $t_2=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2$, $x_2=2$, atunci $y_1=-1$, $y_2=1$. Așadar, obținem numerele complexe $z_1=-2-i$, $z_2=2+i$.

RĂSPUNS: $z_1=-2-i$, $z_2=2+i$.

9. Fie expresia $\frac{\sqrt{1-\sin x}}{\lg(-3x^2+10x-3)}$. Deoarece $-1\le\sin x\le 1 \Rightarrow \sqrt{1-\sin x}$ are sens pentru orice $x\in R$, dar numerele întregi pentru care $\sqrt{1-\sin x}$ are sens sunt $x\in\{-1;0;1\}$. O altă condiție este $-3x^2+10x-3>0 \Leftrightarrow 3x^2-10x+3<0$. Mulțimea soluțiilor ultimei inecuații este $x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$. Intervalul obținut conține numerele întregi 1 și 2. Din condiția $-3x^2+10x-3\neq 1$ nu obținem numere întregi. Așadar, expresia din enunț are sens pentru numerele întregi $x\in\{1;2\}$.

RĂSPUNS: $x\in\{1;2\}$.

10. Fie trapezul $ABCD$ cu $BC\parallel AD$, $BC<AD$, $m(\angle A)=30^\circ$. Dacă $AB\cap CD=\{E\}$ și $m(\angle AED)=90^\circ \Rightarrow m(\angle D)=60^\circ$. Dacă linia mijlocie a trapezului are lungimea $10cm \Rightarrow BC+AD=20cm$. Fie $BC=8cm$, atunci $AD=12cm$. Construim $BP\perp AD$ și $CQ\perp AD \Rightarrow$ patrulaterul $PBCQ$ este dreptunghi $\Rightarrow PQ=BC=8cm$. Atunci $AP+QD=4cm$. Notăm $QD=x \Rightarrow AP=4-x$. Din triunghiul dreptunghic CQD avem $\frac{CQ}{QD}=tg60^\circ \Rightarrow \frac{CQ}{x}=\sqrt{3} \Rightarrow CQ=\sqrt{3}x$. Din triunghiul dreptunghic BPA avem $\frac{BP}{AP}=tg30^\circ \Rightarrow \frac{BP}{4-x}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BP=\frac{\sqrt{3}(4-x)}{3}$. Deoarece $CQ=BP \Rightarrow \sqrt{3}x=\frac{\sqrt{3}(4-x)}{3} \Leftrightarrow x=\frac{4-x}{3} \Leftrightarrow 3x=4-x \Leftrightarrow x=1$. Deci $QD=1$. Atunci $\frac{QD}{CD}=\cos 60^\circ \Rightarrow \frac{1}{CD}=\frac{1}{2} \Rightarrow CD=2cm$.

RĂSPUNS: $2cm$.

11. Fie ecuația $(x+1)\cdot 3^{x^2+5x+6}-x^2\cdot\left(3^{x^2+5x+6}-1\right)=x+1$. *DVA* al ecuației este R. Ecuația se scrie $(x+1)\cdot 3^{x^2+5x+6}-(x+1)-x^2\cdot\left(3^{x^2+5x+6}-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)\left(3^{x^2+5x+6}-1\right)-x^2\left(3^{x^2+5x+6}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(3^{x^2+5x+6}-1\right)\left(x+1-x^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3^{x^2+5x+6}-1\right)\left(x^2-x-1\right)=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3^{x^2+5x+6}-1=0 \\ x^2-x-1=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3^{x^2+5x+6}=3^0 \\ x^2-x-1=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} x^2+5x+6=0 \\ x^2-x-1=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=-2 \\ x_3=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x_4=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$. Atunci $s=|-3|+|-2|+\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right|+\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right|=$

$3+2+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=5+\sqrt{5}$.

RĂSPUNS: $s=5+\sqrt{5}$.

---

12. $\int_0^a\left(2-4x+3x^2\right)dx=\left(2x-2x^2+x^3\right)\Big|_0^a=$ $2a-2a^2+a^3$. Obținem ecuația $a^3-2a^2+2a=a \Leftrightarrow a^3-2a^2+a=0 \Leftrightarrow a\left(a^2-2a+1\right)=0 \Leftrightarrow a(a-1)^2=0$, de unde $a=0$, $a=1$. Deoarece $a>0$, rezultă că soluția problemei este $a=1$.

RĂSPUNS: $a=1$.

TESTUL 19

1. Să se afle valoarea expresiei $E=\left(2\log_{25}\dfrac{8}{5}-\log_5 8+3\right)\cdot 6^{2\log_6 3}$.

2. Se consideră triunghiul ABC în care punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ și respectiv $[AC]$. Dacă aria triunghiului MNP este egală cu $15\,cm^2$, să se afle aria triunghiului ABC.

3. Se amestecă $4\,kg$ de orez cu prețul de $19\,lei/kg$ cu $6\,kg$ de orez care are prețul de $24\,lei/kg$. Care va fi prețul mediu de vînzare pentru un kilogram de orez amestecat?

4. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+1}}$.

5. Raza bazei unui cilindru circular drept este de $7\,cm$, iar aria laterală a cilindrului este de $182\pi\,cm^2$. Să se afle volumul cilindrului.

6. Să se rezolve în R inecuația $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+3}-\sqrt{\left(\dfrac{27}{8}\right)^x}>0$.

7. Într-o urnă sunt biletele pe care sunt scrise toate numerele naturale de cinci cifre distincte care se pot forma cu cifrele 3, 4, 5, 7, 9. Să se afle probabilitatea ca extrăgind la întîmplare un bilețel, pe el să fie scris un număr par.

8. Să se afle aria figurii plane mărginite de graficele funcțiilor $f, g: R\to R$, $f(x)=4-x$ și $g(x)=4x-x^2$.

9. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care termenul dezvoltării $\left(\sqrt[3]{tgx}+ctgx\right)^6$ care are cel mai mare coeficient binomial este egal cu 60.

10. Două laturi ale unui triunghi au lungimile de $6\,cm$ și $3\,cm$, iar semisuma lungimilor înălțimilor corespunzătoare acestor laturi este egală cu lungimea celei de-a treia înălțim a triunghiului. Să se afle lungimea laturii a treia a triunghiului.

11. Să se rezolve în R ecuația $\cos 2x-13\sin x-7=0$.

12. Se consideră funcția $f: D\to R$, $f(x)=\dfrac{5-x}{x^2-5x+4}$.
   a) Să se afle coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f.
   b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele de extrem ale funcției f.

SOLUȚII

1. $E=\left(2\log_{25}\frac{8}{5}-\log_5 8+3\right)\cdot 6^{2\log_6 3}=\left(2\cdot\log_{5^2}\frac{8}{5}-\log_5 8+3\right)\cdot 6^{\log_6 3^2}=$

$\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_5\frac{8}{5}-\log_5 8+3\right)\cdot\log_6 6^9=\left(\log_5\frac{8}{5}-\log_5 8+3\right)\cdot 9=$

$(\log_5 8-\log_5 5-\log_5 8+3)\cdot 9=\quad(-1+3)\cdot 9=18.$

RĂSPUNS: $E=18$.

2. În triunghiul ABC, $[MN]$, $[MP]$, $[NP]$ sunt linii mijlocii $\Rightarrow \triangle MNP\sim\triangle ACB$ cu coeficientul de asemănare $\frac{1}{2}$. Deoarece raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul coeficientului lor de asemănare $\Rightarrow \frac{A_{MNP}}{A_{ABC}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{15}{A_{ABC}}=\frac{1}{4}\Rightarrow A_{ABC}=60cm^2$.

RĂSPUNS: $A_{ABC}=60cm^2$.

3. Prețul mediu se calculează astfel: $p_m=\frac{4\cdot 19+6\cdot 24}{4+6}=\frac{76+144}{10}=\frac{220}{10}=22lei/kg$.

RĂSPUNS: $22lei/kg$.

4. Fie funcția $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+1}}$. Domeniul maxim de definiție se determină din condiția $x^2+2x+1>0\Leftrightarrow (x+1)^2>0$, care este adevărată pentru orice $x\in R$, $x\neq -1$. Deci $D=R\setminus\{-1\}$.

RĂSPUNS: $D=R\setminus\{-1\}$.

5. Fie $R=7cm$ raza bazei, iar H înălțimea cilindrului. $A_l=2\pi RH\Rightarrow$ $2\pi\cdot 7\cdot H=182\pi\Rightarrow H=13cm$. Atunci $V_{cil}=\pi R^2H=\pi\cdot 7^2\cdot 13=637\pi cm^3$.

RĂSPUNS: $V=637\pi cm^3$.

6. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}-\sqrt{\left(\frac{27}{8}\right)^x}>0$. *DVA* al inecuației este R. Obținem $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}>\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}>\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3x}{2}}\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}>\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3x}{2}}\Leftrightarrow x+3<-\frac{3x}{2}\Leftrightarrow 2x+6<-3x$

$\Leftrightarrow 5x<-6\Leftrightarrow x<-\frac{6}{5}$.

RĂSPUNS: $S=\left(-\infty;-\frac{6}{5}\right)$.

7. Numărul cazurilor posibile este $P_5=5!=120$. Numărul cazurilor favorabile este $P_4=4!=24$. Atunci $p=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$.

RĂSPUNS: $p=\frac{1}{5}$.

8. Aflăm punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g: $4-x=4x-x^2$ $\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$, de unde $x_1=1$, $x_2=4$. Atunci $A=\int_1^4\left(-x^2+4x-4+x\right)dx=$

$\int_1^4\left(-x^2+5x-4\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right)_1^4=-\frac{64}{3}+40-16-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right)=$

$-\frac{64}{3}+24+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4=\frac{9}{2}(u.p)$.

RĂSPUNS: $A=\frac{9}{2}(u.p)$.

9. Fie dezvoltatrea $\left(\sqrt[3]{tgx}+ctgx\right)^6$. Termenul care are cel mai mare coeficient binomial este T_4. Avem $T_4=C_6^3\cdot\left(\sqrt[3]{tgx}\right)^3\cdot ctg^3x=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot tgx\cdot ctg^3x=$ $\frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{6\cdot 3!}\cdot(tgx\cdot ctgx)\cdot ctg^2x=20\cdot ctg^2x.\Rightarrow 20ctg^2x=60\Leftrightarrow ctg^2x=3\Rightarrow$

$ctgx=\pm\sqrt{3}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

RĂSPUNS: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

10. Fie triunghiul ABC în care $AB=3cm$, $BC=6cm$, $AM\perp BC$, $CN\perp AB$, $BP\perp AC$. Avem $AB\cdot CN=BC\cdot AM\Rightarrow 3CN=6AM\Rightarrow CN=2AM$. Fie $AM=x$, atunci $CN=2x$ și $BP=\frac{3x}{2}$. $\triangle AMC\sim\triangle BPC$ (cazul I de asemănare).

Rezultă $\frac{AM}{BP}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{x}{\frac{3x}{2}}=\frac{AC}{6}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{AC}{6}\Rightarrow AC=4cm$.

RĂSPUNS: $AC=4cm$.

11. Fie ecuația $\cos 2x-13\sin x-7=0$. *DVA* al ecuației este mulțimea R. Avem $1-2\sin^2 x-13\sin x-7=0\Leftrightarrow -2\sin^2 x-13\sin x-6=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x+$ $+13\sin x+6=0$. Notăm $\sin x=t$, atunci ecuația se scrie $2t^2+13t+6=0$. Ultima ecuație are soluțiile $t_1=-6$ (nu convine) și $t_2=-\frac{1}{2}$. Deci $\sin x=-\frac{1}{2}$, de unde $x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

RĂSPUNS: $x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

12. Fie funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{5-x}{x^2-5x+4}$. $D=R\setminus\{1;4\}$.

a) $f'(x)=\left(\frac{5-x}{x^2-5x+4}\right)'=\frac{(5-x)'\cdot\left(x^2-5x+4\right)-(5-x)\cdot\left(x^2-5x+4\right)'}{\left(x^2-5x+4\right)^2}=$

$\frac{-(x^2-5x+4)-(5-x)(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2}=\frac{-x^2+5x-4-10x+25+2x^2-5x}{(x^2-5x+4)^2}=$

$\frac{x^2-10x+21}{(x^2-5x+4)^2}$. $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-10x+21}{(x^2-5x+4)^2}=0 \Rightarrow x^2-10x+21=0$, de unde $x_1=3$, $x_2=7$. Analizînd semnul derivatei obţinem că $x=3$ este punct de maxim şi $x=7$ este punct de minim. $f_{max}=f(3)=-1$. $f_{min}=f(7)=-\frac{1}{9}$. Aşadar, punctele de extrem local sunt $A(3;-1)$ şi $B\left(7;-\frac{1}{9}\right)$.

b) Fie dreapta de ecuaţie $y=ax+b$. Obţinem $\begin{cases}-1=3a+b\\-\frac{1}{9}=7a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+b=-1\\7a+b=-\frac{1}{9}\end{cases}$.

Scăzînd prima ecuaţie din a doua obţinem $4a=\frac{8}{9} \Rightarrow a=\frac{2}{9}$. Înlocuind în prima ecuaţie obţinem $b=-\frac{5}{3}$. Avem ecuaţia $y=\frac{2}{9}x-\frac{5}{3} \Leftrightarrow 9y=2x-15 \Leftrightarrow 2x-9y-15=0$.

RĂSPUNS: *a*) $A(3;-1)$ este punct de maxim, $B\left(7;-\frac{1}{9}\right)$ punct de minim;

b) $2x-9y-15=0$.

TESTUL 20

1. Să se afle valoarea expresiei $a=\log_4 100+\log_4 0{,}64$.
2. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ şi $m(\angle B)=30^\circ$. Stabiliţi natura triunghiului AMC, unde M este mijlocul laturii BC.
3. Un turist îşi propune să parcurgă un traseu de $90\,km$ în trei zile. În prima zi a parcurs 30% din întregul traseu, în a doua zi a parcurs $\frac{4}{7}$ din distanţa rămasă. Cîţi kilometri i-au rămas să parcurgă în ziua a treia?
4. Să se afle $a\in R$ pentru care funcţia $f:R\to R$, $f(x)=(2a-5)x+3$ este strict crescătoare pe R.
5. Să se rezolve inecuaţia $f'(x)\geq g'(x)$, dacă $f,g:R\to R$, $f(x)=5-3x+\frac{5}{2}x^2-\frac{x^3}{3}$ şi $g(x)=3x-7$.
6. Să se afle probabilitatea ca alegînd un număr din mulţimea $\{1,2,3,\ldots,30\}$, acesta să dea restul 3 prin împărţirea la 5.
7. Să se rezolve ecuaţia $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}}=\frac{9}{16}$.
8. Să se afle aria discului mărginit de cercul înscris într-un triunghi dreptunghic, ştiind că proiecţiile catetelor pe ipotenuză au lungimile $9\,cm$ şi $16\,cm$.
9. Se consideră funcţiile $f,g:R\to R$, $f(x)=x^3+2x+3$, $g(x)=2x^2+x+3$.
   a) Să se rezolve inecuaţia $f(x)\geq g(x)$.
   b) Să se afle aria figurii plane cuprinse între graficele celor două funcţii şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.
10. Să se afle valorile parametrului real m pentru care sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+2y+z=1\\2x+my+z=2\\x-3y+2z=3\end{cases}$ admite soluţie unică.
11. Laturile bazei unei piramide triunghiulare au lungimile de $7\,cm$, $8\,cm$, $9\,cm$, iar unghiurile diedre de la baza piramidei sunt congruente. Ştiind că volumul piramidei este egal cu $40\,cm^3$, să se afle aria laterală a piramidei.
12. Determinaţi parametrul real m pntru care funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2-mx}{\sqrt{1+x^2}}$ admite un punct de extrem situat la distanţa 2 de la axa Oy.

SOLUȚII

1. $a=\log_4 100+\log_4 0{,}64=\log_4 64=3$.

RĂSPUNS: $a=3$.

2. Dacă $m(\angle B)=30^\circ \Rightarrow m(\angle C)=60^\circ$. $[AM]$ este mediană corespunzătoare ipotenuzei $\Rightarrow AM=\frac{1}{2}BC \Rightarrow$ triunghiul AMC este isoscel, și deoarece are un unghi cu măsura de 60°, triunghiul AMC este echilateral.

RĂSPUNS: $\triangle AMC$ este echilateral.

3. În prima zi a parcurs $\frac{30}{100}\cdot 90=27km$. Distanța rămasă este $90-27=63km$. În ziua a doua a parcurs $\frac{4}{7}\cdot 63=36km$. Pentru ziua a treia i-au rămas să parcurgă $63-36=27km$.

RĂSPUNS: $27km$.

4. Pentru ca funcția f să fie strict crescătoare pe R trebuie ca $2a-5>0 \Leftrightarrow 2a>5 \Leftrightarrow a>\frac{5}{2}$.

RĂSPUNS: $a\in\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

5. $f'(x)=\left(5-3x+\frac{5}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)'=-3+5x-x^2=-x^2+5x-3$. $g'(x)=(3x-7)'=3$.

Obținem inecuația $-x^2+5x-3\geq 3 \Leftrightarrow -x^2+5x-6\geq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+6\leq 0$ care are mulțimea soluțiilor $x\in[2;3]$.

RĂSPUNS: $S=[2;3]$.

6. Numărul cazurilor posibile este 30. Numerele naturale mai mici sau egale cu 30 care prin împărțirea la 5 dau restul 3 sunt 3, 8, 13, 18, 23, 28, deci avem 6 cazuri favorabile. Atunci $p=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$.

RĂSPUNS: $p=\frac{1}{5}$.

7. Fie ecuația $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}}=\frac{9}{16}$. DVA al ecuației este mulțimea $R\setminus\{0\}$. Avem

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{8}{x}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{4}{x}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{4}{x}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$

$x-1-\frac{4}{x}=2 \Leftrightarrow x-3-\frac{4}{x}=0 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$ cu soluțiile $x_1=-1$, $x_2=4$.

RĂSPUNS: $S=\{-1;4\}$.

8. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $AD\perp BC$, $D\in(BC)$, $BD=16cm$, $CD=9cm$. $BC=BD+DC=16cm+9cm=25cm$. Conform teoremei înălțimii în triunghiul dreptunghic ABC, $AD=\sqrt{BD\cdot CD}=$ $=\sqrt{16\cdot 9}=12cm$. Din triunghiul dreptunghic ADB, conform teoremei lui Pitagora, $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{12^2+16^2}=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}=20cm$. Din triunghiul dreptunghic ADC, conform teoremei lui Pitagora, $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{12^2+9^2}=$ $\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15cm$. Atunci $r=\frac{AB+AC-BC}{2}=\frac{20+15-25}{2}=5cm$. $A_{disc}=\pi R^2=25\pi cm^2$.

RĂSPUNS: $A_{disc}=25\pi cm^2$.

9. *a)* Avem inecuația $x^3+2x+3\geq 2x^2+x+3 \Leftrightarrow x^3-2x^2+x\geq 0 \Leftrightarrow$ $x(x^2-2x+1)\geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2\geq 0$. Deoarece $(x-1)^2\geq 0$ pentru orice $x\in R$ $\Rightarrow x\geq 0$ pentru orice $x\in R$. Deci $S=[0;+\infty)$.

b) Deoarece pe intervalul $[0;1]$ avem $f(x)\geq g(x) \Rightarrow$ că graficul funcției f este situat mai sus decît graficul funcției g, deaceea $A=\int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)dx=$

$\int_0^1\left(x^3+2x+3-2x^2-x-3\right)dx=\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=$

$\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{12}(u.p)$.

RĂSPUNS: *a)* $S=[0;+\infty)$;

b) $A=\frac{1}{12}(u.p)$.

10. Sistemul va avea soluție unică pentru acele valori ale parametrului m pentru care determinantul său este diferit de zero. $d=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=2m+2-6-m-8+3=$

$m-9$. $D\neq 0$ pentru $m\neq 9$. Deci, pentru $m\in R\setminus\{9\}$ sistemul are soluție unică.

RĂSPUNS: $m\in R\setminus\{9\}$.

11. Fie piramida triunghiulară $VABC$ cu vîrful V și baza triunghiul ABC cu $AB=7cm$, $BC=8cm$, $AC=9cm$ și volumul $V=40cm^3$. Deoarece toate unghiurile diedre de la baza piramidei sunt congruente $\Rightarrow$ piciorul înălțimii piramidei coincide cu centrul O al cercului înscris în triunghiul ABC. Aflăm aria triunghiului ABC folosind formula lui Heron. $p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$. $A_{ABC}=\sqrt{12(12-8)(12-7)(12-9)}=\sqrt{12\cdot 4\cdot 5\cdot 3}=$

$\sqrt{4\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 3}=4\cdot 3\cdot\sqrt{5}=12\sqrt{5}cm^2$. Atunci raza cercului înscris în triunghiul

ABC este $r=\frac{A_{ABC}}{p}=\frac{12\sqrt{5}}{12}=\sqrt{5}\,cm$. $V_{pir}=\frac{1}{3}\cdot A_b\cdot VO=\frac{1}{3}\cdot 12\sqrt{5}\cdot VO=$

$4\sqrt{5}\cdot VO \Rightarrow 4\sqrt{5}\cdot VO=40 \Rightarrow VO=\frac{40}{4\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}\,cm$. Fie $OM\perp AC \Rightarrow VM\perp AC$. Din triunghiul dreptunghic VOM, conform teoremei lui Pitagora, $VM=\sqrt{VO^2+OM^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{25}=5cm$. Atunci $A_l=p\cdot VM=12\cdot 5=60cm^2$.

RĂSPUNS: $A_l=60cm^2$.

12. Fie funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2-mx}{\sqrt{1+x^2}}$. $D=R$. Din condiţia problemei rezultă că funcţia f are două puncte de extrem: $x_1=-2$, $x_2=2$. $f'(x)=\left(\frac{x^2-mx}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=$

$$\frac{\left(x^2-mx\right)'\cdot\sqrt{1+x^2}-\left(x^2-mx\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\frac{(2x-m)\cdot\sqrt{1+x^2}-\left(x^2-mx\right)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=$$

$$\frac{(2x-m)\left(1+x^2\right)-x\left(x^2-mx\right)}{\sqrt{1+x^2}\left(1+x^2\right)}=\frac{2x+2x^3-m-mx^2-x^3+mx^2}{\sqrt{1+x^2}\left(1+x^2\right)}=\frac{x^3+2x-m}{\sqrt{1+x^2}\left(1+x^2\right)}.$$

Din $f'(-2)=0 \Rightarrow \frac{-8-4-m}{\sqrt{1+4}(1+4)}=0 \Rightarrow -12-m=0 \Rightarrow m=-12$. Din $f'(2)=0$

$\Rightarrow \frac{8+4-m}{\sqrt{1+4}(1+4)}=0 \Rightarrow 12-m=0 \Rightarrow m=12$.

RĂSPUNS: $m\in\{-12;12\}$.

TESTUL 21

1. Să se compare numerele $a=\log_{27}3$ şi $b=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$.

2. Se consideră triunghiul ABC în care $[AA_1]$ şi $[BB_1]$ sunt mediane, $A_1\in(BC)$, $B_1\in(AC)$. Dacă $A_1B_1=12,5\,cm$, să se afle AB.

3. Un automobilist a parcurs 30% dintr-un traseu şi i-a rămas să parcurgă $30\,km$ pînă a ajunge la mijlocul traseului. Să se afle lungimea întregului traseu.

4. Să se afle partea imaginară a numărului complex $z=(2-i)(3-7i)-(1-2i)(5-3i)$.

5. Să se afle $\sin 2\alpha$, ştiind că $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ şi $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

6. Să se rezolve în R ecuaţia $\left(16-x^2\right)\cdot\sqrt{3-x}=0$.

7. Să se rezolve în R inecuaţia $\left(2^x-8\right)\left(x^2-4x+3\right)\le 0$.

8. Să se afle domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\sqrt{\log_x 2-\log_2 x}$.

9. Se consideră familia de parabole $y=x^2-2(m+1)x-m+5$. Să se afle valorile parametrului real m pentru care ordonata vîrfului parabolei este maximă.

10. Un trapez isoscel circumscris unui cerc are aria de $32\sqrt{3}\,cm^2$. Să se afle lungimea laturii laterale a trapezului, ştiind că măsura unghiului ascuţit de la baza trapezului este $\frac{\pi}{3}$.

11. Baza unei piramide este un triunghi echilateral cu lungimea laturii egală cu a. Una dintre feţele laterale este perpendiculară pe planul bazei şi de asemenea reprezintă un triunghi echilateral. Să se afle aria suprafeţei laterale a piramidei.

12. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2-6x+9}{2x+m}$. Să se determine valorile parametrului real m astfel încît funcţia să admită un extrem local în punctul $x=1$ şi să se determine natura acestui extrem.

SOLUȚII

1. $a=\log_{27}3=\frac{1}{3}$. $b=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$. Deoarece $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}\Rightarrow a<b$.

RĂSPUNS: $a<b$.

2. $[AA_1]$ mediană $\Rightarrow$ A_1 este mijlocul lui $[BC]$. $[BB_1]$ mediană $\Rightarrow$ B_1 este mijlocul lui $[AC]$. Atunci $[A_1B_1]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $AB=2\cdot A_1B_1=2\cdot 12{,}5=25cm$.

RĂSPUNS: $AB=25cm$.

3. Deoarece a parcurs 30% din întregul traseu, atunci pînă la mijlocul traseului i-a rămas să parcurgă $50\%-30\%=20\%$, ceea ce reprezintă $30km$. Atunci lungimea întregului traseu este $30:\frac{20}{100}=30\cdot\frac{100}{20}=150km$.

RĂSPUNS: $150km$.

4. $z=(2-i)(3-7i)-(1-2i)(5-3i)=6-14i-3i+7i^2-5+3i+10i-6i^2=6-17i-7-5+13i+6=-4i$. $\Rightarrow$ $\operatorname{Im}z=-4i$.

RĂSPUNS: $\operatorname{Im}z=-4i$.

5. Deoarece $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]\Rightarrow\sin\alpha>0$. Avem $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$. Atunci $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$.

RĂSPUNS: $\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$.

6. Fie ecuația $(16-x^2)\cdot\sqrt{3-x}=0$. $DVA: 3-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 3$, deci $DVA=(-\infty;3]$.

Avem $\begin{bmatrix}16-x^2=0\\ \sqrt{3-x}=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x^2-16=0\\ 3-x=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=\pm 4\\ x=3\end{bmatrix}$. $x=4\notin DVA$, deci $S=\{-4;3\}$.

RĂSPUNS: $S=\{-4;3\}$.

7. Fie inecuația $(2^x-8)(x^2-4x+3)\leq 0$. DVA al inecuației este mulțimea R. Obținem o totalitate de două sisteme: $\begin{bmatrix}\begin{cases}2^x-8\geq 0\\ x^2-4x+3\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}2^x-8\leq 0\\ x^2-4x+3\geq 0\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix}\begin{cases}2^x\geq 2^3\\ x\in[1;3]\end{cases}\\ \begin{cases}2^x\leq 2^3\\ x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\begin{cases}x\geq 3\\ x\in[1;3]\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 3\\ x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty]\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=3\\ x\in(-\infty;1]\cup\{3\}\end{bmatrix}\Leftrightarrow$

$S=(-\infty;1]\cup\{3\}$.

RĂSPUNS: $S=(-\infty;1]\cup\{3\}$.

8. Fie funcția $f(x)=\sqrt{\log_x 2-\log_2 x}$. Domeniul maxim de definiție al funcției f se determină din condițiile $\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ \log_x 2-\log_2 x\geq 0\end{cases}$. Rezolvăm ultima inecuație.

Avem $\frac{1}{\log_2 x}-\log_2 x\geq 0$. Fie $\log_2 x=t$. Obținem $\frac{1}{t}-t\geq 0\Leftrightarrow\frac{1-t^2}{t}\geq 0$ $\Leftrightarrow\frac{t^2-1}{t}\leq 0$. Folosind metoda intervalelor obținem $t\in(-\infty;-1]\cup(0;1]\Rightarrow$

$\begin{bmatrix}t\leq -1\\ \begin{cases}t>0\\ t\leq 1\end{cases}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\log_2 x\leq -1\\ \begin{cases}\log_2 x>0\\ \log_2 x\leq 1\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\log_2 x\leq\log_2\frac{1}{2}\\ \begin{cases}\log_2 x>\log_2 1\\ \log_2 x\leq\log_2 2\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x\leq\frac{1}{2}\\ \begin{cases}x>1\\ x\leq 2\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\\ x\in(1;2]\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup(1;2]$. Ținînd cont că $x>0\Rightarrow D=\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(1;2]$.

RĂSPUNS: $D=\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(1;2]$.

9. Abscisa vîrfului oricărei parabole din familia dată este $x_v=-\frac{b}{2a}=\frac{2(m+1)}{2}=m+1$.

Ordonata vîrfului parabolei este $y_v=(m+1)^2-2(m+1)(m+1)-m+5=(m+1)^2-2(m+1)^2-m+5=-(m+1)^2-m+5=-m^2-2m-1-m+5=-m^2-3m+4$. Valoarea maximă a trinomului $-m^2-3m+4$ se obține pentru $m=-\frac{3}{2}$.

RĂSPUNS: $m=-\frac{3}{2}$.

10. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu $BC\parallel AD$, $BC<AD$, $AB=CD$ și $m(\angle A)=m(\angle D)=60^\circ$. Fie $BE\perp AD$, $E\in(AD)$ și $CF\perp AD$, $F\in(AD)$. Fie $AE=FD=x\Rightarrow AB=CD=2x$, deoarece $m(\angle ABE)=30^\circ$. Patrulaterul

$EBCF$ este dreptunghi $\Rightarrow$ $BC=EF$. Notăm $BC=EF=y$. În baza proprietății patrulaterului circumscris unui cerc avem $AB+CD=BC+AD$ $\Rightarrow$ $2x+2x=2x+2y$ $\Rightarrow$ $x=y$. Atunci $BC=x$, $AD=3x$. Din triunghiul dreptunghic ABE, conform teoremei lui Pitagora avem $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=$ $\sqrt{4x^2-x^2}=\sqrt{3x^2}=x\sqrt{3}$. Atunci $A_{tr}=\frac{BC+AD}{2}\cdot BE=\frac{x+3x}{2}\cdot x\sqrt{3}=2x^2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $2x^2\sqrt{3}=32\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $x^2=16$ $\Rightarrow$ $x=4$, deci $AB=CD=2x=2\cdot 4=8cm$.

RĂSPUNS: $8cm$.

11. Fie piramida triunghiulară $VABC$ cu vîrful V și baza triunghiul echilateral ABC cu latura a. Triunghiul VBC este la fel echilateral cu latura a și $(VBC)\perp(ABC)$. Fie $VO\perp BC$, $O\in(BC)$, atunci $AO\perp BC$ și $VO=AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Din triunghiul dreptunghic VOA, conform teoremei lui Pitagora obținem $VA=\sqrt{VO^2+AO^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}}=$ $\sqrt{\frac{6a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Triunghiul ABV este isoscel cu $BA=BV=a$ și $VA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Fie M mijlocul lui VA $\Rightarrow$ BM este mediană și înălțime corespunzătoare bazei în triunghiul isoscel ABV $\Rightarrow$ $VM=\frac{a\sqrt{6}}{4}$, și conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic BMV avem $BM=\sqrt{BV^2-VM^2}=\sqrt{a^2-\frac{6a^2}{16}}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Atunci $A_{ABV}=\frac{1}{2}\cdot VA\cdot BM=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{10}}{4}=\frac{a^2\sqrt{60}}{16}=\frac{a^2\sqrt{15}}{8}$. Dar $\triangle VAC\equiv\triangle VAB$ $\Rightarrow$ $A_{VAC}=\frac{a^2\sqrt{15}}{8}$. Mai avem $A_{VBC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Atunci $A_l=2\cdot\frac{a^2\sqrt{15}}{8}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=$ $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)(u.p)$.

RĂSPUNS: $A_l=\frac{a^2}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)(u.p)$.

12. Fie funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2-6x+9}{2x+m}$. $D=R\setminus\left\{-\frac{m}{2}\right\}$. $f'(x)=\left(\frac{x^2-6x+9}{2x+m}\right)'=$ $\frac{\left(x^2-6x+9\right)'\cdot(2x+m)-(2x+m)'\left(x^2-6x+9\right)}{(2x+m)^2}=\frac{(2x-6)(2x+m)-2\left(x^2-6x+9\right)}{(2x+m)^2}=$

$\frac{4x^2+2mx-12x-6m-2x^2+12x-18}{(2x+m)^2}=\frac{2x^2+2mx-6m-18}{(2x+m)^2}$. Conform enunțului, pentru ca $x=1$ să fie punct de extrem local, trebuie ca $f'(1)=0$. Obținem $\frac{2+2m-6m-18}{(2+m)^2}=0$ $\Rightarrow$ $-4m-16=0$, de unde $m=-4$. Pentru $m=-4$ avem $f'(x)=\frac{2x^2-8x+6}{(2x-4)^2}$. $f'(0)>0$, $f'(1{,}5)<0$ $\Rightarrow$ $x=1$ este punct de maxim.

RĂSPUNS: Pentru $m=-4$, $x=1$ este punct de maxim.

TESTUL 22

1. Să se afle valoarea expresiei $E=\log_2 3+\log_2\frac{1}{3}$.

2. Un dreptunghi are lungimile laturilor de $12\,cm$ şi $15\,cm$. Să se afle 40% din aria dreptunghiului.

3. Media aritmetică a trei numere naturale este egală cu 21. Dacă unul dintre numere este egal cu 35, să se afle media aritmetică a celorlalte două numere.

4. Se consideră mulţimea $A=\left\{x\in N^*\,\middle|\,2x-3\le 51\right\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd un element al mulţimii A, acesta să fie divizibil cu 3, dar să nu fie divizibil cu 2.

5. Să se afle conjugatul numărului complex $z=\left[\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)\right]^4$.

6. Să se rezolve în R ecuaţia $\sqrt[3]{27^{2-x}}=\frac{9}{\sqrt[5]{3}}$.

7. Un triunghi dreptunghic are aria $2\sqrt{3}\,cm^2$. Să se afle lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei, ştiind că ea împarte unghiul drept în două unghiuri care au raportul măsurilor 2:1.

8. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

9. Determinaţi pentru care valori reale ale lui x este adevărată egalitatea $9^{1-\cos^2 x}\cdot 2^{1-\cos 2x}=6$.

10. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care graficul funcţiei $f:D\to R$, $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-8x\right)+2$ nu este situat mai jos de axa absciselor.

11. Să se determine raportul dintre aria totală a conului circular drept şi aria bazei lui, dacă se ştie că raportul dintre lungimea generatoarei şi a razei bazei este egal cu $\frac{5}{3}$.

12. Să se rezolve în R inecuaţia $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$.

SOLUŢII

1. $E=\log_2 3+\log_2\frac{1}{3}=\log_2\left(3\cdot\frac{1}{3}\right)=\log_2 1=0$.

RĂSPUNS: $E=0$.

2. Aria dreptunghiului este $A_{dr}=12\cdot 15=180\,cm^2$. 40% din aria dreptunghiului va fi $\frac{40}{100}\cdot 180=72\,cm^2$.

RĂSPUNS: $72\,cm^2$.

3. Dacă media aritmetică a celor trei numere este egală cu 21, rezultă că suma celor trei numere este egală cu 63. Unul dintre numere este 35, rezultă că suma celorlalte două numere este $63-35=28$. Atunci media aritmetică a celorlalte două numere este 14.

RĂSPUNS: $m_a=14$.

4. Avem $2x-3\le 51\Leftrightarrow 2x\le 54\Leftrightarrow x\le 27$. Deci $A=\{1,2,3,\ldots,27\}$. Mulţimea A are 27 de elemente, deci avem 27 cazuri posibile. Numerele care sunt divizibile cu 3, dar nu sunt divizibile cu 2 din mulţimea A sunt: 3, 9, 15, 21, 27, aşadar, avem 5 cazuri favorabile. Atunci $p=\frac{5}{27}$.

RĂSPUNS: $p=\frac{5}{27}$.

5. $z=\left[\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)\right]^4=\left(\sqrt[4]{2}\right)^4\cdot\left[\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{24}\right)+i\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{24}\right)\right]=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i$. Deci $z=\sqrt{3}+i$, atunci $\overline{z}=\sqrt{3}-i$.

RĂSPUNS: $\overline{z}=\sqrt{3}-i$.

6. Fie ecuaţia $\sqrt[3]{27^{2-x}}=\frac{9}{\sqrt[5]{3}}$. DVA al ecuaţiei este mulţimea R. Avem $\sqrt[3]{3^{3(2-x)}}=\frac{3^2}{3^{\frac{1}{5}}}\Leftrightarrow 3^{2-x}=3^{\frac{9}{5}}\Leftrightarrow 2-x=\frac{9}{5}\Leftrightarrow 10-5x=9\Leftrightarrow -5x=-1$, de unde $x=\frac{1}{5}$.

RĂSPUNS: $S=\left\{\frac{1}{5}\right\}$.

7. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ şi $A_{ABC}=2\sqrt{3}\,cm^2$. $AD\perp BC$, astfel încît $m(\angle DAB):m(\angle DAC)=2:1$. Notăm $m(\angle DAC)=x$, atunci $m(\angle DAB)=2x$. Avem $x+2x=90^\circ\Rightarrow 3x=90\Rightarrow x=30$, deci $m(\angle DAC)=30^\circ$, $m(\angle DAB)=60^\circ$. Atunci $m(\angle B)=30^\circ$, $m(\angle C)=60^\circ$.

Fie $AC=x$, atunci $\frac{AB}{AC}=tg60^\circ \Rightarrow AB=AC\cdot tg60^\circ \Rightarrow AB=x\sqrt{3}$.

$A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\sqrt{3}=\frac{1}{2}x^2\sqrt{3}$. Obținem $\frac{1}{2}x^2\sqrt{3}=2\sqrt{3} \Rightarrow$ $x^2=4$ și $x=2$. Deci $AC=2\,cm$. Din triunghiul dreptunghic ADC avem $\frac{AD}{AC}=\sin 60^\circ \Rightarrow \frac{AD}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AD=\sqrt{3}\,cm$.

RĂSPUNS: $AD=\sqrt{3}\,cm$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(5-x-4)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{(2-x-1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{(1-x)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}=\frac{1}{2}$.

RĂSPUNS: $\frac{1}{2}$.

9. Fie ecuația $9^{1-\cos^2 x}\cdot 2^{1-\cos 2x}=6$. DVA al ecuației este mulțimea R. Avem $1-\cos^2 x=\sin^2 x$, $1-\cos 2x=\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x=2\sin^2 x$. Obținem ecuația $9^{\sin^2 x}\cdot 2^{2\sin^2 x}=6 \Leftrightarrow 9^{\sin^2 x}\cdot 4^{\sin^2 x}=6 \Leftrightarrow 36^{\sin^2 x}=6 \Leftrightarrow$ $6^{2\sin^2 x}=6 \Leftrightarrow 2\sin^2 x=1 \Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ cu mulțimea soluțiilor $S=\left\{\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\right\}$.

RĂSPUNS: $S=\left\{\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\right\}$.

10. Fie funcția $f:D\to R$, $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-8x\right)+2$. Domeniul maxim de definiție al funcției f este determinat de condiția $x^2-8x>0 \Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(8;+\infty)$, deci $D=(-\infty;0)\cup(8;+\infty)$. Dacă graficul funcției f nu este situat mai jos de axa absciselor, rezultă că $f(x)\geq 0$. Obținem inecuația $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-8x\right)+2\geq 0$ $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-8x\right)\geq -2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-8x\right)\geq \log_{\frac{1}{3}}9 \Leftrightarrow x^2-8x\leq 9 \Leftrightarrow$ $x^2-8x-9\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-1;9]$. Ținând cont de DVA obținem $x\in[-1;0)\cup(8;9]$.

RĂSPUNS: $x\in[-1;0)\cup(8;9]$.

11. Fie un con circular drept cu raza bazei R și generatoarea G. Avem $\frac{G}{R}=\frac{5}{3}$ $\Rightarrow G=5k$, $R=3k$. $A_t=A_l+A_b=\pi RG+\pi R^2=\pi\cdot 3k\cdot 5k+\pi\cdot(3k)^2=$

$15\pi k^2+9\pi k^2=24\pi k^2$. Așadar, $A_t=24\pi k^2$, $A_b=9\pi k^2$. Atunci $\frac{A_t}{A_b}=\frac{24\pi k^2}{9\pi k^2}=\frac{8}{3}$.

RĂSPUNS: $\frac{A_t}{A_b}=\frac{8}{3}$.

12. Fie inecuația $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$. DVA se află din condiția $4x^2-19x+12>0$, de unde DVA este $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cup(4;+\infty)$. Deoarece $\sqrt{4x^2-19x+12}>0$ pentru orice $x\in DVA \Rightarrow x-7<0 \Rightarrow x<7$. Ținând cont de DVA obținem $S=\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cup(4;7)$.

RĂSPUNS: $S=\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cup(4;7)$.

TESTUL 23

1. Să se calculeze $a=\log_5\left(\log_2\sqrt{1024}\right)$.

2. 30% din aria unui pătrat reprezintă $120\,cm^2$. Să se afle lungimea laturii pătratului.

3. Diagonala unei fețe a unui cub are lungimea $6\sqrt{2}\,cm$. Să se afle aria totală a cubului.

4. Cîte fracții subunitare pot fi formate folosind numerele 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23?

5. Să se rezolve în R inecuația $f'(x)\geq g'(x)$, dacă $f,g:R\to R$, $f(x)=10x^3-13x^2+7x$ și $g(x)=11x^3-15x^2-3$.

6. Să se afle valorile parametrului real a pentru care minimul funcției $f:R\to R$, $f(x)=ax^2+4ax+7a^2-1$ este egal cu 2.

7. Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-3x}dx$.

8. Într-un triunghi dreptunghic bisectoarea unui unghi ascuțit împarte cateta opusă în două segmente cu lungimile de $4\,cm$ și $5\,cm$. Să se afle aria triunghiului.

9. Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Calculați probabilitatea ca alegînd o submulțime cu trei elemente a mulțimii A, aceasta să conțină numărul 1.

10. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care numerele complexe $z_1=\lg\left(2x^2+x+1\right)+i\cdot 4^x$ și $z_2=\lg\left(x^2+1\right)+i\cdot\left(2^{x+1}-3\right)$ sunt conjugate.

11. Volumul unei piramide triunghiulare regulate este $\frac{2}{\sqrt{3}}cm^3$, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60°. Să se afle lungimea înălțimii piramidei.

12. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=x-\sqrt{ax^2+bx+1}$, $a,b\in R$, $a>0$, D fiind domeniul maxim de definiție. Să se determine a și b astfel încît $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$.

SOLUȚII

1. $a=\log_5\left(\log_2\sqrt{1024}\right)=\log_5\left(\log_2 32\right)=\log_5 5=1$.

RĂSPUNS: $a=1$.

2. Aria pătratului este $A=120:\frac{30}{100}=\frac{120\cdot 100}{30}=400\,cm^2$. Dacă lungimea laturii pătratului este a, atunci $a^2=400\Rightarrow a=20\,cm$.

RĂSPUNS: $a=20\,cm$.

3. Fața unui cub este un pătrat cu diagonala $d=6\sqrt{2}\,cm$. Fie lungimea laturii pătratului a, atunci $a\sqrt{2}=d\Rightarrow a\sqrt{2}=6\sqrt{2}\Rightarrow a=6\,cm$. Atunci $A_l=6a^2=6\cdot 6^2=216\,cm^2$.

RĂSPUNS: $A_l=216\,cm^2$.

4. Numărul fracțiilor subunitare va fi $7+6+5+4+3+2+1=28$.

RĂSPUNS: 28 de fracții.

5. $f'(x)=\left(10x^3-13x^2+7x\right)'=30x^2-26x+7$. $g'(x)=\left(11x^3-15x^2-3\right)'=33x^2-30x$. Obținem inecuația $30x^2-26x+7\geq 33x^2-30x\Leftrightarrow -3x^2+4x+7\geq 0\Leftrightarrow 3x^2-4x-7\leq 0$ cu mulțimea soluțiilor $S=\left[-1;\frac{7}{3}\right]$.

RĂSPUNS: $S=\left[-1;\frac{7}{3}\right]$.

6. Fie funcția $f:R\to R$, $f(x)=ax^2+4ax+7a^2-1$. Pentru ca funcția să aibă un minim trebuie ca $a>0$. $f_{min}=\frac{-\Delta}{4a}$. $\Delta=16a^2-4a\left(7a^2-1\right)=16a^2-28a^3+4a=-28a^3+16a^2+4a$. Atunci $f_{min}=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{28a^3-16a^2-4a}{4a}=\frac{4a\left(7a^2-4a-1\right)}{4a}=7a^2-4a-1$. Deoarece $f_{min}=2\Rightarrow 7a^2-4a-1=2\Rightarrow a_1=-\frac{3}{7}$, $a_2=1$. Deoarece $a>0$, rezultă că satisface condiția problemei doar $a=1$.

RĂSPUNS: $a=1$.

7. $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-3x}dx=\left(-\frac{1}{3}e^{1-3x}\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}e^0-\left(-\frac{1}{3}e\right)=\frac{1}{3}e-\frac{1}{3}=\frac{e-1}{3}$.

RĂSPUNS: $\frac{e-1}{3}$.

8. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, (BM bisectoare, $M\in(AC)$, $AM=4\,cm$, $MC=5\,cm$. Atunci $AC=AM+MC=4+5=9\,cm$. Conform

teoremei bisectoarei în triunghiul ABC avem $\frac{AB}{4}=\frac{BC}{5}=k \Rightarrow AB=4k$, $BC=5k$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC avem $BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow (5k)^2=(4k)^2+9^2 \Leftrightarrow 25k^2=16k^2+81 \Leftrightarrow 9k^2=81 \Leftrightarrow k^2=9 \Rightarrow k=3$. Atunci $AB=12cm$, $BC=15cm$. $A_{ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{12\cdot 9}{2}=54cm^2$.

RĂSPUNS: $A=54cm^2$.

9. Numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii A este $C_{10}^3=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6\cdot 7!}=120$, deci cazuri posibile avem 120. Numărul submulţimilor cu trei elemente care să conţină elementul 1 este egal cu numărul submulţimilor cu două elemente formate din elementele unei mulţimi cu 9 elemente, adică $C_9^2=\frac{9!}{2!\cdot 7!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 7!}=36$, deci cazuri favorabile avem 36. Atunci $p=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$.

RĂSPUNS: $p=\frac{3}{10}$.

10. Pentru ca numerele complexe z_1 şi z_2 să fie conjugate trebuie ca $\lg(2x^2+x+1)=\lg(x^2+1)$ şi $4^x=3-2^{x+1}$. Rezolvăm ecuaţia $\lg(2x^2+x+1)=\lg(x^2+1)$. DVA este mulţimea R. Obţinem ecuaţia $2x^2+x+1=x^2+1 \Leftrightarrow x^2+x=0$ cu soluţiile $x_1=-1$, $x_2=0$. Rezolvăm ecuaţia $4^x=3-2^{x+1} \Leftrightarrow 2^{2x}+2\cdot 2^x-3=0$. Fie $2^x=t$ şi obţinem ecuaţia $t^2+2t-3=0$ cu soluţiile $t_1=-3$ (nu convine), $t_2=1$, adică $2^x=1$, de unde $x=0$. Soluţia comună a celor două ecuaţii este $x=0$, deci numerele z_1 şi z_2 vor fi conjugate pentru $x=0$.

RĂSPUNS: $x=0$.

11. Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vîrful V şi baza triunghiul echilateral ABC. $VO\perp(ABC)$, unde O este centrul bazei. Fie a lungimea laturii bazei piramidei. $CM\perp AB$, $CM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, atunci $CO=\frac{2}{3}CM=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Din triunghiul dreptunghic VOC cu $m(\angle VCO)=60^\circ$ avem $\frac{VO}{OC}=tg60^\circ \Rightarrow VO=OC\cdot tg60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}=a$. $A_b=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. $V_{pir}=\frac{1}{3}A_b\cdot VO=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. Obţinem $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3a^3=24 \Rightarrow a^3=8$ şi $a=2$. Deci $VO=2cm$.

RĂSPUNS: $h=2cm$.

12. Domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=x-\sqrt{ax^2+bx+1}$ este $D=R$.

Avem nedeterminare de forma $\infty-\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{ax^2+bx+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{ax^2+bx+1}\right)\left(x+\sqrt{ax^2+bx+1}\right)}{x+\sqrt{ax^2+bx+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-ax^2-bx-1}{x+\sqrt{ax^2+bx+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x^2-bx-1}{x+\sqrt{ax^2+bx+1}}$.

Pentru ca limita să fie finită (dar nu neapărat $-\frac{1}{2}$), trebuie ca $a-1=0$, adică $a=1$. Obţinem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-bx-1}{x+\sqrt{x^2+bx+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-bx-1}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-bx-1}{x+x\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(-b-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-b-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{b}{2}$. Obţinem $-\frac{b}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow b=1$. Aşadar, $a=1$, $b=1$.

RĂSPUNS: $a=1$, $b=1$.

TESTUL 24

1. Să se ordoneze crescător numerele $a=-\sqrt[3]{27}$, $b=\log_2\frac{1}{16}$, $c=\sqrt[5]{-32}$.

2. Suma măsurilor a două unghiuri adiacente este egală cu 126°. Să se afle măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri.

3. Să se afle modulul numărului complex $z=(2-3i)(5+i)$.

4. Se consideră mulțimea $A=\{x\in N\,|\,10\le x\le 50\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd un element din mulțimea A, acesta să fie număr prim.

5. Într-o cisternă erau 960 litri de motorină. Din cantitatea din cisternă s-au vîndut 40%. Dacă $1l$ de combustibil costă 17 lei, să se afle cît costă combustibilul vîndut.

6. Să se rezolve ecuația $A_{x-1}^2-C_x^1=79$, $x\in N$.

7. Să se afle cel mai mare număr întreg x ce satisface inecuația $2^x+(0,5)^{3-x}<9$.

8. În triunghiul dreptunghic ABC ipotenuza AB are lungimea c, iar $m(\angle ABC)=\alpha$. Să se afle lungimile medianelor triunghiului.

9. Din două orașe, distanța dintre care este $105\,km$, au plecat în același timp unul în întîmpinarea celuilalt doi bicicliști. Peste 3 ore distanța dintre bicicliști era de $21\,km$. Să se afle viteza fiecărui biciclist, știind că viteza unuia este cu 25% mai mică decît viteza celuilalt.

10. Se consideră funcția $f:R\setminus\{1\}\to R$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. Notăm cu $A(x;y)$, $y\neq 0$, punctul situat pe graficul funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-\frac{x}{2}$. Dacă notăm $a=x+y$, să se afle a.

11. Fie o piramida patrulateră regulată cu latura bazei de $8\,cm$ și înălțimea de $4\sqrt{3}\,cm$. Calculați:
a) Aria laterală și volumul piramidei.
b) Măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei.

12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care suma pătratelor soluțiilor ecuației $2\log_a|x-1|-\log_a x=1$ este egală cu 34.

SOLUȚII

1. $a=-\sqrt[3]{27}=-3$, $b=\log_2\frac{1}{16}=-4$, $c=\sqrt[5]{-32}=-2$. Obținem $b<a<c$.

RĂSPUNS: $b<a<c$.

2. Măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri adiacente este egală cu jumătate din suma măsurilor celor două unghiuri, adică 63°.

RĂSPUNS: 63°.

3. $z=(2-3i)(5+i)=10+2i-15i-3i^2=10-13i+3=13-13i$. Atunci $|z|=\sqrt{13^2+(-13)^2}=\sqrt{2\cdot 13^2}=13\sqrt{2}$.

RĂSPUNS: $|z|=13\sqrt{2}$.

4. Cazuri posibile avem 41. Mulțimea A conține următoarele numere prime: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, deci avem 11 cazuri favorabile. Atunci $p=\frac{11}{41}$.

RĂSPUNS: $p=\frac{11}{41}$.

5. Cantitatea de motorină vîndută este $\frac{40}{100}\cdot 960=384l$. Combustibilul vîndut va costa $384\cdot 17=6528$ lei.

RĂSPUNS: 6528 lei.

6. Fie ecuația $A_{x-1}^2-C_x^1=79$, $x\in N$. Se impun condițiile $\begin{cases}x-1\ge 2\\ x\ge 1\end{cases}\Rightarrow x\ge 3$.

Avem $\frac{(x-1)!}{(x-1-2)!}-x=79\Leftrightarrow\frac{(x-3)!\cdot(x-2)(x-1)}{(x-3)!}-x=79\Leftrightarrow$
$(x-2)(x-1)-x=79\Leftrightarrow x^2-x-2x+2-x-79=0\Leftrightarrow x^2-4x-77=0$ cu soluțiile $x_1=-7$, $x_2=11$. Deoarece $x\in N$, $x\ge 3$, rezultă că soluția ecuației este $x=11$.

RĂSPUNS: $x=11$.

7. Fie inecuația $2^x+(0,5)^{3-x}<9$. *DVA* al inecuației este mulțimea R. Avem
$2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}<9\Leftrightarrow 2^x+\left(2^{-1}\right)^{3-x}<9\Leftrightarrow 2^x+2^{x-3}<9\Leftrightarrow 2^x+\frac{2^x}{8}<9\Leftrightarrow$
$8\cdot 2^x+2^x<72\Leftrightarrow 9\cdot 2^x<72\Leftrightarrow 2^x<8\Leftrightarrow x<3$, deci $x\in(-\infty;3)$. Cel mai mare număr întreg din intervalul $(-\infty;3)$ este $x=2$.

RĂSPUNS: $x=2$.

8. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle C)=90^\circ$, $AB=c$, $m(\angle ABC)=\alpha$. Fie medianele $[CM]$, $M\in(AB)$, $[AN]$, $N\in(BC)$ și $[BP]$, $P\in(AC)$.

$CM = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$. Din triunghiul dreptunghic ABC, $\frac{AC}{AB} = \sin\alpha \Rightarrow$ $AC = AB\sin\alpha \Rightarrow AC = c\sin\alpha$. La fel din triunghiul dreptunghic ABC, $\frac{BC}{AB} = \cos\alpha \Rightarrow BC = c\cos\alpha$. $CN = \frac{BC}{2} = \frac{c\cdot\cos\alpha}{2}$. Din triunghiul dreptunghic ACN, $AN = \sqrt{AC^2 + CN^2} = \sqrt{c^2\sin^2\alpha + \frac{c^2\cos^2\alpha}{4}} = \sqrt{\frac{4c^2\sin^2\alpha + c^2\cos^2\alpha}{4}} =$ $\sqrt{\frac{c^2(4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{4}} = \frac{c}{2}\sqrt{4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{c}{2}\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$. $CP = \frac{AC}{2} = \frac{c\sin\alpha}{2}$. Din triunghiul dreptunghic BCP, $BP = \sqrt{BC^2 + CP^2} = \sqrt{c^2\cos^2\alpha + \frac{c^2\sin^2\alpha}{4}} =$ $\sqrt{\frac{4c^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha}{4}} = \sqrt{\frac{c^2(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{4}} = \frac{c}{2}\sqrt{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{c}{2}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$.

RĂSPUNS: $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2}\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$, $\frac{c}{2}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$.

9. Fie x viteza unui biciclist, atunci viteza celuilalt biciclist va fi $x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$. Vom distinge două cazuri: 1) Cînd distanța dintre bicicliști era $21km$, iar bicicliștii nu s-au întîlnit. Atunci cei doi bicicliști au parcurs împreună $105 - 21 = 84km$. Obținem ecuația $3x + 3\cdot\frac{3}{4}x = 84 \Leftrightarrow 12x + 9x = 4\cdot 84 \Leftrightarrow 21x = 4\cdot 84 \Rightarrow$ $x = 16$, atunci $\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}\cdot 16 = 12$. Deci viteza unui biciclist este $16km/h$, iar viteza celuilalt este $12km/h$. 2) Cei doi bicicliști s-au întîlnit, și-au continuat mișcarea și distanța dintre ei era de $21km$. Atunci cei doi bicicliști au parcurs împreună $105 + 21 = 126km$. Rezultă ecuația $3x + \frac{3}{4}x = 126 \Leftrightarrow 12x + 9x = 126\cdot 4 \Leftrightarrow$ $21x = 126\cdot 4 \Rightarrow x = 24$, atunci $\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}\cdot 24 = 18$. Deci viteza unui biciclist este $24km/h$, iar viteza celuilalt este $18km/h$.

RĂSPUNS: $16km/h$ și $12km/h$ sau $24km/h$ și $18km/h$.

10. Fie funcția $f: R\setminus\{1\} \to R$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Fie x_0 abscisa punctului de pe graficul funcției f în care tangenta la grafic este paralelă la dreapta $y = -\frac{x}{2}$. Rezultă că $f'(x_0) = -\frac{1}{2}$. Calculăm derivata funcției $f(x)$. Avem $f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' =$ $\frac{(x+1)'\cdot(x-1) - (x+1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$. Dacă $f'(x_0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ $\frac{-2}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 4$, de unde $x_0 = 3$ sau $x_0 = -1$. Dacă $x_0 = 3$, atunci $y = f(x_0) = f(3) = 2$, deci avem punctul $A(3;2)$, rezultă $a = 2+3 = 5$. Dacă $x_0 = -1$, atunci $y = f(-1) = 0$, nu convine, deoarece avem condiția $y \neq 0$. Așadar, $a = 5$.

RĂSPUNS: $a = 5$.

11. *a*) Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vîrful V și baza pătratul $ABCD$ cu latura de lungime $8cm$. $AC \cap BD = \{O\}$, $VO \perp (ABC) \Rightarrow [VO]$ este înălțime a piramidei și $VO = 4\sqrt{3}\,cm$. Fie $OM \perp CD$, atunci conform teoremei celor trei perpendiculare $\Rightarrow VM \perp CD$, deci $[VM]$ este apotemă a piramidei. $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4cm$. Din triunghiul dreptunghic VOM, conform teoremei lui Pitagora avem $VM = \sqrt{VO^2 + OM^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{48+16} = \sqrt{64} = 8cm$, deci $VM = 8cm$. Atunci $A_l = 4\cdot A_{VCD} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot CD\cdot VM = 2\cdot 8\cdot 8 = 128cm^2$. $V = \frac{1}{3}\cdot A_b\cdot VO = \frac{1}{3}\cdot 8^2\cdot 4\sqrt{3} = \frac{256\sqrt{3}}{3}cm^3$.

b) Unghiul VMO este un unghi liniar al unghiului diedru format de planele (ABC) și (VDC). Din triunghiul dreptunghic VOM avem $\sin(\angle VMO) = \frac{VO}{VM} =$ $\frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\angle VMO) = 60^\circ$. Așadar, măsura unghiului diedru format de o față laterală a piramidei cu planul bazei este 60°.

RĂSPUNS: *a*) $A_l = 128cm^2$, $V = \frac{256\sqrt{3}}{3}cm^3$; *b*) 60°.

12. Fie ecuația $2\log_a|x-1| - \log_a x = 1$. DVA al ecuației se determină din condițiile $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;1)\cup(1;+\infty)$. Se mai impun condițiile $a > 0$ și $a \neq 1$. Ecuația din enunț se scrie $\log_a|x-1|^2 - \log_a x = 1 \Leftrightarrow \log_a(x-1)^2 = \log_a x + 1 \Leftrightarrow$ $\log_a(x-1)^2 = \log_a x + \log_a a \Leftrightarrow \log_a(x-1)^2 = \log_a(ax) \Leftrightarrow (x-1)^2 = ax$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - ax = 0 \Leftrightarrow x^2 - (a+2)x + 1 = 0$. Conform relațiilor lui Viete aplicate ultimei ecuații avem: $x_1 + x_2 = a+2$ și $x_1x_2 = 1$. Atunci $x_1^2 + x_2^2 =$ $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a+2)^2 - 2 = a^2 + 4a + 4 - 2 =$ $a^2 + 4a + 2$. Conform enunțului avem $a^2 + 4a + 2 = 34 \Leftrightarrow a^2 + 4a - 32 = 0$ cu soluțiile $a_1 = -8$ (nu convine) și $a_2 = 4$.

RĂSPUNS: $a = 4$.

TESTUL 25

1. Să se afle valoarea expresiei $a=\log_{\frac{1}{3}}54-\frac{1}{3}\cdot\log_{\frac{1}{3}}8+\log_{\frac{1}{3}}81$.

2. Pătratul $ABCD$ este înscris în cercul $C(O;R)$ cu raza $R=8cm$. Să se afle aria triunghiului BOC.

3. Să se aducă la o formă mai simplă expresia $E=3\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha-6$.

4. Se consideră funcțiile $f:(0;+\infty)$, $f(x)=\ln x$ și $g:R\to R$, $g(x)=\sin x$. Determinați care dintre valorile numerice ale funcțiilor $f(1)$ și $g(2)$ este mai mare.

5. Să se rezolve în R ecuația $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x^2}-\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-6}=0$.

6. Un călător a parcurs un drum în trei zile. În prima zi a parcurs $\frac{1}{3}$ din întregul drum, a doua zi $\frac{1}{4}$ din drumul rămas, iar în a treia zi restul de $18km$. Să se afle lungimea întregului drum.

7. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$.

8. Să se afle valorile parametrului real a pentru care suma pătratelor soluțiilor ecuației $x^2+ax+a-2=0$ este minimă.

9. Pe planul triunghiului ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ se ridică perpendiculara în B pe care se ia un punct M astfel încît $BM=8cm$. Știind că $BC=6\sqrt{17}\,cm$ și $AB=6cm$, să se afle perimetrul și aria triunghiului MAC.

10. Să rezolve în R inecuația $\log_x\left(x^2+2x\right)\geq3$.

11. Laturile laterale ale unui trapez se prelungesc pînă la intersecție. Să se afle aria trapezului, știind că raportul lungimilor bazelor trapezului este $5:3$, iar aria triunghiului format este egală cu $50cm^2$.

12. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=mx-\ln\left(x^2+1\right)$. Să se determine valorile parametrului real m pentru care funcția f este strict descrescătoare pe R.

SOLUȚII

1. $a=\log_{\frac{1}{3}}54-\frac{1}{3}\cdot\log_{\frac{1}{3}}8+\log_{\frac{1}{3}}81=\log_{\frac{1}{3}}54-\log_{\frac{1}{3}}8^{\frac{1}{3}}+\log_{\frac{1}{3}}81=\log_{\frac{1}{3}}54-\log_{\frac{1}{3}}2+\log_{\frac{1}{3}}81=$
$\log_{\frac{1}{3}}\frac{54}{2}+\log_{\frac{1}{3}}81=\log_{\frac{1}{3}}27+\log_{\frac{1}{3}}81=\log_{\frac{1}{3}}3^3\cdot3^4=\log_{\frac{1}{3}}3^7=7\cdot\log_{\frac{1}{3}}3=7\cdot(-1)=-7$.

RĂSPUNS: $a=-7$.

2. Fie pătratul $ABCD$ înscris în cercul de centru O și raza $R=8cm$. $AC\cap BD=\{O\}$. Deoarece $BD\perp AC\Rightarrow$ triunghiul BOC este dreptunghic isoscel cu $BO=OC=8cm$. Atunci $A_{BOC}=\frac{1}{2}\cdot BO\cdot OC=\frac{1}{2}\cdot8\cdot8=32cm^2$.

RĂSPUNS: $A_{BOC}=32cm^2$.

3. $E=3\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha-6=3\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)-6=3-6=-3$.

RĂSPUNS: $E=-3$.

4. $f(1)=\ln1=0$. Deoarece $2<\pi\Rightarrow\sin2>0$, deci $g(2)=\sin2>0\Rightarrow g(2)>f(1)$.

RĂSPUNS: $g(2)>f(1)$.

5. Fie ecuația $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x^2}-\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-6}=0$. DVA al ecuației este mulțimea R. Avem $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+6}\Leftrightarrow5x^2=-x^2+6\Leftrightarrow6x^2=6\Leftrightarrow x^2=1$, de unde $x_1=-1$, $x_2=1$.

RĂSPUNS: $S=\{-1;1\}$.

6. Fie $x\,km$ lungimea întregului drum. În prima zi călătorul a parcurs $\frac{1}{3}x$. Distanța rămasă este $x-\frac{1}{3}x=\frac{2}{3}x$. În a doua zi călătorul a parcurs $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{1}{6}x$. În a treia zi a parcurs $\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}x=\frac{1}{2}x$. Deci $\frac{1}{2}x$ din întregul drum reprezintă $18km$. Avem $\frac{1}{2}x=18\Rightarrow x=36$.

RĂSPUNS: $36km$.

7. $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{x+4}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=\lim\limits_{x\to5}\frac{x+4-9}{(x-5)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+3}=\dfrac{1}{6}$.

RĂSPUNS: $\dfrac{1}{6}$.

8. Fie ecuația $x^2+ax+a-2=0$ cu soluțiile x_1 și x_2. Conform relațiilor lui Viete avem $x_1+x_2=-a$ și $x_1x_2=a-2$. Atunci $x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-a)^2-2(a-2)=a^2-2a+4$. Trinomul a^2-2a+4 obține valoare minimă pentru $a=\dfrac{-(-2)}{2\cdot 1}=1$.

RĂSPUNS: $a=1$.

9. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $BC=6\sqrt{17}\,cm$, $AB=6\,cm$. Fie $BM\perp(ABC)$, $BM=8\,cm$. Din triunghiul dreptunghic ABC, conform teoremei lui Pitagora, $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{\left(6\sqrt{17}\right)^2-6^2}=\sqrt{612-36}=\sqrt{576}=24\,cm$. Deci $AC=24\,cm$. Din triunghiul dreptunghic MBC, conform teoremei lui Pitagora avem $MC=\sqrt{MB^2+BC^2}=\sqrt{8^2+\left(6\sqrt{17}\right)^2}=\sqrt{64+612}=\sqrt{676}=26$. Deci $MC=26\,cm$. Din triunghiul dreptunghic MBA, conform teoremei lui Pitagora avem $MA=\sqrt{MB^2+AB^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10\,cm$. Deci $MA=10\,cm$. Atunci $P_{MAC}=MA+AC+MC=10\,cm+24\,cm+26\,cm=60\,cm$. Deoarece $MB\perp(ABC)$ și $BA\perp AC$, atunci conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $MA\perp AC$, deci triunghiul MAC este dreptunghic cu $m(\angle MAC)=90^\circ$. Atunci $A_{MAC}=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot MA=\dfrac{1}{2}\cdot 24\cdot 10=120\,cm^2$.

RĂSPUNS: $P_{MAC}=60\,cm$, $A_{MAC}=120\,cm^2$.

10. Fie inecuația $\log_x\left(x^2+2x\right)\geq 3$. Domeniul valorilor admisibile ale inecuației se determină din condițiile $\begin{cases}x>0\\x\neq 1\\x^2+2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\neq 1\\x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)\end{cases}\Rightarrow$ $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$. Așadar, DVA al inecuației este mulțimea $(0;1)\cup(1;+\infty)$. Inecuația din enunț se scrie $\log_x\left(x^2+2x\right)\geq\log_x x^3$. Distingem două cazuri: 1) $x\in(0;1)$, atunci din $\log_x\left(x^2+2x\right)\geq\log_x x^3\Rightarrow x^2+2x\leq x^3\Leftrightarrow x^3-x^2-2x\geq 0$ $\Leftrightarrow x\left(x^2-x-2\right)\geq 0\Leftrightarrow x(x+1)(x-2)\geq 0$. Aplicînd metoda intervalelor obținem că mulțimea soluțiilor ultimei inecuații este $S=[-1;0]\cup[2;+\infty]$. Dar deoarece în acest caz avem $x\in(0;1)$, rezultă că nu avem soluții. 2) $x\in(1;+\infty)$,

atunci din $\log_x\left(x^2+2x\right)\geq\log_x x^3$ rezultă $x^2+2x\geq x^3\Leftrightarrow x^3-x^2-2x\leq 0\Leftrightarrow$ $x\left(x^2-x-2\right)\leq 0\Leftrightarrow x(x+1)(x-2)\leq 0$. Aplicînd metoda intervalelor obținem că mulțimea soluțiilor ultimei inecuații este $S=(-\infty;-1]\cup[0;2]$. Ținînd cont de DVA și de condiția $x\in(1;+\infty)$ obținem mulțimea soluțiilor inecuației $S=(1;2]$.

RĂSPUNS: $S=(1;2]$.

11. Fie trapezul $ABCD$ cu $BC\parallel AD$, $BC<AD$ și $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{5}{3}$. Se prelungesc laturile laterale ale trapezului pînă la intersecție în punctul O. Se formează triunghiul AOD cu aria de $50\,cm^2$. În triunghiul AOD avem $BC\parallel AD$, atunci conform teoremei fundamentale a asemănării avem $\triangle OAD\sim\triangle OBC$. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului lor de asemănare. Obținem $\dfrac{A_{AOD}}{A_{BOC}}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2\Rightarrow\dfrac{50}{A_{BOC}}=\dfrac{25}{9}\Rightarrow A_{BOC}=\dfrac{9\cdot 50}{25}=18\,cm^2$. Așadar, $A_{BOC}=18\,cm^2$, atunci aria trapezului $ABCD$ va fi $A_{ABCD}=A_{AOD}-A_{BOC}=50-18=32\,cm^2$.

RĂSPUNS: $A=32\,cm^2$.

12. Pentru ca funcția f să fie strict descrescătoare pe R trebuie ca $f'(x)<0$ pentru orice $x\in R$. $f'(x)=\left(mx-\ln\left(x^2+1\right)\right)'=m-\dfrac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)'=$ $m-\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{m\left(x^2+1\right)-2x}{x^2+1}=\dfrac{mx^2-2x+m}{x^2+1}$. Trebuie ca $\dfrac{mx^2-2x+m}{x^2+1}<0$ pentru orice $x\in R$. Deoarece $x^2+1>0$ pentru orice $x\in R\Rightarrow mx^2-2x+m<0$ pentru orice $x\in R$. Se impun condițiile $m<0$ și discriminantul $D<0$. Avem $D=4-4m^2$. Obținem $4-4m^2<0\Leftrightarrow 4m^2-4>0\Leftrightarrow m^2-1>0$, de unde $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Ținînd cont că $m<0$ obținem $m\in(-\infty;-1)$.

RĂSPUNS: $m\in(-\infty;-1)$.

TESTUL 26

1. Aflați valoarea expresiei $a=2^{\log_2 7+\log_3 \frac{1}{3}}$.

2. Se consideră pătratul $ABCD$ în care $AC\cap BD=\{O\}$. Dacă $OD=3\sqrt{2}\,cm$, să se afle aria pătratului $ABCD$.

3. Un bilet la o rută interurbană de autobuz costă 45 lei. Care este numărul maxim de bilete care pot fi cumpărate cu suma de 650 lei după ce prețul unui bilet s-a mărit cu 20%?

4. Să se afle numerele reale a și b pentru care $\frac{3-4i}{4+3i}=a+bi$.

5. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției $f(x)=\log_3(x+4)^2$.

6. Să se afle termenul care îl conține pe a^{10} din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{70}$.

7. Centrul cercului înscris într-un trapez dreptunghic este depărtat de extremitățile laturii laterale la distanțele de $3cm$ și $9cm$. Să se afle lungimile laturilor trapezului.

8. Să se rezolve în R ecuația $2\sin^2 x+2\cos^2 x=2{,}5\sin 2x$.

9. Să se afle aria figurii plane delimitate de graficul funcției $f:R\to R$, $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$, de axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=\frac{\pi}{4}$.

10. Să se rezolve în R inecuația $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$.

11. Să se determine $a, b\in R$ astfel încît funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ să admită spre $+\infty$ ca asimptotă dreapta de ecuație $y=2x-1$.

12. Baza unei piramide este un triunghi cu lungimile laturilor de $13cm$, $14cm$ și $15cm$, iar unghiurile diedre de la baza piramidei au măsurile de 45°. Să se afle aria laterală a piramidei.

TESTUL 27

1. Să se afle valoarea expresiei $a=8^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{4}}+9^{\frac{1}{2}}$.

2. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=7\ cm$ și $AD\perp BC$. Dacă $BD=5cm$, să se afle perimetrul triunghiului ABC.

3. Un fermier are un lot de formă dreptunghiulară cu dimensiunile de $20m$ și $30m$. Pe o suprafață de 70% din teren s-au cultivat cartofi. Care este suprafața necultivată?

4. Perimetrul unui triunghi este egal cu $24cm$. Să se afle lungimile laturilor triunghiului, știind că sunt trei numere naturale pare consecutive. Calculați apoi aria triunghiului.

5. Doi muncitori, lucrînd împreună, pot termina o lucrare în 12 zile. În cîte zile ar putea termina aceeași lucrare primul muncitor, știind că el în două zile efectuează același volum de lucru ca al doilea muncitor în trei zile.

6. Să se afle valorile parametrului real m pentru care soluțiile ecuației $3(2-x)=4(m-2x)$ sunt pozitive.

7. Să se rezolve în R ecuația $2\log_4(3x-2)+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x=0$.

8. Se consideră triunghiul ABC în care $[AB]\equiv[AC]$. Fie M și N mijloacele laturilor $[AB]$ și respectiv $[AC]$. Știind că $MN=9cm$ și $AB=15cm$, să se afle:
   a) Perimetrul și aria triunghiului ABC.
   b) Perimetrul și aria trapezului $BMNC$.

9. 10 bile numerotate cu numerele 1, 2, 3, . . . , 10 se așează într-un rînd una după alta. Care este probabilitatea ca bila cu numărul 2 să apară după bila cu numărul 1?

10. Să se aducă la o formă mai simplă expresia $E=\sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha}+\frac{2}{1-\cos\alpha}}$, dacă $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

11. Baza unei piramide este un dreptunghi cu aria de $12cm^2$. Două fețe laterale ale piramidei sunt perpendiculare pe planul bazei, iar celelalte două fețe laterale formează cu planul bazei unghiuri cu măsurile de 30° și 60°. Să se afle aria totală a piramidei.

12. Să se determine $a, b\in R$ astfel încît dreapta de ecuație $y=2x+3$ să fie asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției $f:D\to R$, $f(x)=\frac{4x^2+ax+1}{bx+1}$.

TESTUL 28

1. Calculaţi 30% din numărul $2^{\log_2 50}$.
2. Diagonala unei feţe a unui cub are lungimea $8\sqrt{2}\,cm$. Să se afle volumul cubului.
3. Calculaţi $a=\left|\sqrt{3}-2\right|+\left|\sqrt{3}-1\right|$.
4. Să se afle valoarea expresiei $E=6\cdot\log_2 125\cdot\log_5 2+2^{\lg 7}\cdot 5^{\lg 7}$.
5. Să se afle numărul complex z din egalitatea $z\cdot(1-i)=4-2i$.
6. Elevii unei clase studiază 14 discipline. În cîte moduri poate fi alcătuit orarul pentru o zi, ştiind că orarul pentru ziua respectivă trebuie să conţină 5 discipline diferite.
7. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $BC=16cm$, $AC=8cm$. Ştiind că $[BM]$ este mediana corespunzătoare laturii $[AC]$ a triunghiului ABC, $M\in(AC)$, să se afle:
   a) Aria triunghiului CBM.
   b) Tangenta unghiului CBM.
8. Să se rezolve în R inecuaţia $3\log_8(3x+2)<2$.
9. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x^2+4x-5}$.
10. Să se afle exponentul n din dezvoltarea unui binom, ştiind că coeficienţii binomiali ai termenilor al patrulea şi al şaselea ai dezvoltării sunt egali cu 120 şi respectiv 252.
11. Volumul unei piramide triunghiulare regulate este egal cu $\dfrac{2}{\sqrt{3}}cm^3$, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi cu măsura egală cu 60°. Să se afle lungimea înălţimii piramidei.
12. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}$.
    a) Să se determine parametrii reali a şi b astfel încît graficul funcţiei f să admită asimptota de ecuaţie $y=x+2$.
    b) Să se afle aria suprafeţei mărginite de graficul funcţiei f determinată la punctul *a*), asimptota oblică şi dreptele de ecuaţii $x=2$ şi $x=3$.

TESTUL 29

1. Să se afle cel mai mare element al mulţimii $M=\left\{\sqrt{3};\sqrt[3]{4};\sqrt[4]{6}\right\}$.
2. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=8cm$ şi perimetrul triunghiului de $26cm$. Dacă $AD\perp BC$, $D\in(BC)$, să se afle DC.
3. Să se afle valoarea expresiei $a=\log_{\frac{1}{4}}\sin\dfrac{\pi}{6}$.
4. Aflaţi cîte numere naturale de 3 cifre au suma ultimelor două cifre egală cu 5.
5. Să se calculeze $\sin\alpha$, ştiind că $ctg\alpha=4$ şi $\alpha\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.
6. Un turist îşi propune să parcurgă în trei ore distanţa de $60km$. În prima oră el a parcurs 25% din întreaga distanţă, în a doua oră 60% din distanţa rămasă. Cîţi khilometri a parcurs turistul în a treia oră?
7. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle C)=90^\circ$. $CD\perp AB$, $D\in(AB)$ şi $[CM]$ este mediană, $M\in(AB)$, D între A şi M. Dacă $AD=2cm$ şi $DB=18cm$, să se afle perimetrul triunghiului CDM.
8. Să se rezolve în R ecuaţia $\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2$.
9. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ suma coeficienţilor binomiali de rang impar este egală cu 128. Să se afle termenul care îl conţine pe a^3.
10. Să se afle valorile parametrului real a pentru care valoarea minimă a funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=x+e^{a-x}$ este egală cu 4.
11. Să se afle volumul maxim al unei prisme triunghiulare regulate care are diagonala feţei laterale egală cu $\sqrt{3}\,m$.
12. Fie funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{bx-2}$.
    a) Să se determine parametrii reali a şi b astfel ca funcţia dată să aibă puncte de extrem de abscise $x=-2$ şi $x=6$.
    b) Pentru valorile lui a şi b determinate la punctul *a*) să se afle aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=-6$ şi $x=0$.

TESTUL 30

1. Să se compare numerele $a=1000^{\lg 2}$ şi $b=\sqrt{64}$.

2. Aria unui pătrat înscris într-un cerc este egală cu $\frac{50}{\pi}(u.p)$. Să se afle aria discului mărginit de acest cerc.

3. Determinaţi numerele întregi a şi b pentru care $2^a \cdot 3^b = \frac{1}{144}$.

4. Un elev vrea să citească o carte în trei zile. În prima zi a citit 60% din carte, iar a doua zi a citit 50% din numărul paginilor rămase, iar pentru a treia zi i-a rămas să citească 50 de pagini. Cîte pagini are cartea?

5. Să se afle cîte permutări ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ au pe primul loc un număr par.

6. Să se afle domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[4]{3-x}$.

7. Să se rezolve ecuaţia $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=6$.

8. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu laturile $AB=6cm$, $BC=8cm$. Fie $BE\perp AC$, $E\in(AC)$ şi $\{F\}=BE\cap AD$. Să se afle lungimea segmentului $[AF]$.

9. Determinaţi toate numerele complexe z care verifică egalitatea $|z|-z=1+2i$.

10. Să se afle soluţiile ecuaţiei $5^{2+\cos 2x}-26\cdot 5^{\cos^2 x}+5=0$ de pe intervalul $(-4;\ 3)$.

11. Să se afle aria totală a unei piramide triunghiulare regulate care are latura bazei de lungime a şi unghiul diedru de la baza piramidei are măsura de 60°.

12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care funcţia $f:R\to R$, $f(x)=x^3+3(a-7)x^2+3(a^2-9)x-1$ are un punct de maxim pozitiv.

TESTUL 31

1. Să se afle valoarea expresiei $a=\sqrt{8}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{2}}$.

2. Se consideră triunghiul echilateral ABC, în care $BM\perp AC$, $M\in(AC)$. Dacă $AM=6cm$, să se afle aria triunghiului ABC.

3. După o reducere de preţuri, costul unui obiect a ajuns la 210 lei. Dacă acest preţ reprezintă 75% din preţul iniţial, să se afle cît a costat iniţial obiectul.

4. Să se calculeze $|z|$, dacă $z=-3+4i$.

5. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-6x+8}$.

6. Să se rezolve în R inecuaţia $\log_{\frac{1}{4}}(2x+3)>\log_9 27$.

7. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle C)=90^\circ$, M este punctul de tangenţă al cercului înscris în triunghi cu ipotenuza AB. Dacă $BM=3cm$, $AM=2cm$, să se afle raza cercului înscris în triunghiul ABC.

8. Determinaţi numerele reale x şi y pentru care expresia $E=x^2+y^2-4x+6y+14$ are valoare minimă şi indicaţi valoarea minimă a expresiei E.

9. Din 10 elevi (6 băieţi şi 4 fete), profesorul de educaţie fizică doreşte să formeze o echipă de atletism formată din 4 sportivi. Calculaţi probabilitatea că echipa va conţine şi fete.

10. Determinaţi $a\in R$ pentru care tangenta la graficul funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=2x^2+ax+3$ în punctul $x_0=1$ este paralelă cu a doua bisectoare.

11. Baza unei piramide este un triunghi cu lungimile laturilor de $6cm$, $5cm$, $5cm$. Toate feţele laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri diedre cu măsurile de 45°. Să se afle volumul piramidei.

12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care $\frac{1}{\sqrt{a}}\int_1^a\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}+1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx<4$.

TESTUL 32

1. Să se afle cel mai mic element al mulțimii $A=\left\{\log_{\frac{1}{2}}3;\ \log_{\frac{1}{2}}7;\ \log_{\frac{1}{2}}5\right\}$.

2. Se consideră pătratul $ABCD$ și punctul $M\in(BC)$, astfel încît $BM=MC$. Să se afle cîte procente reprezintă aria triunghiului MAD din aria pătratului $ABCD$.

3. Să se aducă la o formă mai simplă expresia $E=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+\sin 2\alpha$.

4. Să se afle cîte permutări ale mulțimii $\{2,3,4,5,6\}$ au pe primul loc o cifrră pară.

5. Să se afle numerele complexe z care verifică egalitatea $z+2\cdot\bar{z}=3-i$.

6. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$. Să se rezolve ecuația $f'(x)=0$.

7. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB]\equiv[BC]$ și $BD\perp AC$. $[AE$ este bisectoarea unghiului BAC, $E\in(BD)$. Știind că $\dfrac{BE}{ED}=\dfrac{9}{5}$ și că $AC=60cm$, să se afle perimetrul triunghiului ABC.

8. Într-o urnă sunt 11 bile identice, unele de culoare albă, altele de culoare roșie. Probabilitatea ca extrăgînd 2 bile, ambele să fie roșii este egală cu $\dfrac{6}{55}$. Să se afle cîte bile roșii sunt în urnă.

9. Să se rezolve în R inecuația $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{1+\log_2^2 x}<\left(\dfrac{5}{2}\right)^{4-2\log_2 x^3}$.

10. Să se afle $a\in R$ pentru care funcția $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}2x^2+ax-1, & x\le 1\\ 2ax+3, & x>1\end{cases}$ este continuă pe R.

11. Să se afle numerele reale a pentru care $\int_1^2\left[a^2+(4-4a)x+4x^3\right]dx\le 12$.

12. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral. În con este înscrisă o sferă care are volumul de $\dfrac{32}{3}\pi\,cm^3$. Să se afle volumul conului.

TESTUL 33

1. Să se afle valoarea expresiei $a=\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)-\log_3\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.

2. Raportul măsurilor a două unghiuri complementare este egal cu $\dfrac{5}{13}$. Să se afle măsurile celor două unghiuri.

3. O persoană depune la o bancă suma de 1000 lei cu dobîndă simplă și cu un procent anual al dobînzii de 18%. Ce sumă va avea persoana în cont după 6 luni?

4. Un fermier are un lot de pămînt de formă dreptunghiulară cu dimensiunile de $15m$ și $30m$, pe care a cultivat cartofi și roșii. Suprafețele cultivate cu cartofi și roșii sunt direct proporționale cu numerele 3 și respectiv 2. Să se afle suprafețele cultivate cu cartofi și roșii.

5. Să se calculeze $(2-i)^3-i^{20}$.

6. Calculați $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

7. Să se afle probabilitatea ca alegînd un element oarecare al mulțimii $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{100}\right\}$ acesta să fie număr rațional.

8. Se consideră triunghiul ABC în care $[BD$ este bisectoare, $D\in(AC)$. Știind că $AB=12cm$, $BC=8cm$ și $AD=10cm$, să se afle lungimea laturii $[AC]$.

9. Să se rezolve în R ecuația $\cos^2 2x-4\sin^4 x+3=0$.

10. Se consideră funcțiile derivabile $f,g:R\to R$, astfel încît $f(x)=x^3\cdot g(x)$ pentru orice $x\in R$ și $g(1)=g'(1)=1$. Să se afle $f'(1)$.

11. Să se afle primitiva $F(x)$ a funcției $f:R\to R$, $f(x)=2\sin 5x+3\cos\dfrac{x}{2}$ pentru care $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.

12. Baza unei prisme drepte este trapezul isoscel $ABCD$ cu laturile $AB=CD=13cm$, $BC=11cm$, $AD=21cm$. Aria secțiunii diagonale a prismei este egală cu $180cm^2$. Să se afle aria totală a prismei.

TESTUL 34

1. Determinați inversul numărului $\sqrt{4+\sqrt{15}}$.

2. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=12cm$ și perimetrul de $38cm$. Dacă $AD\perp BC$, $D\in(BC)$, să se afle BD.

3. O persoană depune într-un cont suma de 12000 lei. Dacă banca îi acordă o dobîndă simplă cu procentul anual de 15%, să se afle ce sumă va avea persoana în cont după 9 luni.

4. Să se afle valoarea expresiei $a=\sqrt{25^{\frac{1}{\log_8 5}}+49^{\frac{1}{\log_6 7}}}$.

5. Determinați numerele reale x și y din egalitatea $x-1+(y+1)i=2y+1+(x-1)i$.

6. Să se afle probabilitatea ca alegînd un element al mulțimii $A=\left\{\sqrt[3]{1};\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{3};\ldots;\sqrt[3]{100}\right\}$ acesta să fie număr rațional.

7. În paralelogramul $ABCD$ avem $m(\angle A)=30^\circ$, $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{7}$, iar perimetrul paralelogramului este egal cu $420cm$. Să se afle aria paralelogramului.

8. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $f:D\to R$, $f(x)=\sqrt{x+1}$ în punctul $x_0=3$.

9. Să se rezolve în R inecuația $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_3(1-x)\right]>-1$.

10. Să se afle valorile parametrului real $a<0$ pentru care $\int_a^0\left(3^{-2x}-2\cdot 3^{-x}\right)dx\geq 0$.

11. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălțimea de $3cm$ și volumul de $38cm^3$. Știind că raportul ariilor bazelor este $\frac{4}{9}$, să se afle aria laterală a trunchiului.

12. Determinați $m\in R$ pentru care $m\cdot 4^x+4(m-1)\cdot 2^x+m>1$ pentru orice $x\in R$.

TESTUL 35

1. Să se afle valoarea expresiei $a=\sqrt{\log_3 81}$.

2. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AD=10cm$. Punctele M și N sunt mijloacele laturii $[BC]$ și respectiv a diagonalei $[AC]$. Dacă $MN=3cm$, să se afle perimetrul dreptunghiului $ABCD$.

3. După ce a parcurs 35% dintr-un drum, un automobilist constată că i-au mai rămas să parcurgă $18km$ pînă a ajunge la mijlocul drumului. Care este lungimea întregului drum?

4. Să se afle probabilitatea ca alegînd un element oarecare al mulțimii $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$, acesta să fie număr prim.

5. Scrieți în formă algebrică numărul complex $z=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{36}+i\sin\frac{\pi}{36}\right)\right]^{24}$.

6. Se consideră expresia $E(x)=6x^2-x^4$, $x\in R$ și numărul $a=1+\sqrt{2}$. Să se afle $E(a)$.

7. Fie funcția $f:R\to R$, $f(x)=3e^{x^2}$ și expresia $E(x)=f'(x)-2xf(x)-\frac{1}{3}f(0)-f'(0)$. Să se afle $E(1)$.

8. Înălțimea rombului dusă din vîrful unghiului obtuz împarte latura lui în segmentele de lungimi $2cm$ și $3cm$. Să se afle lungimile diagonalelor rombului.

9. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{40}$.
   a) Determinați termenul care îl conține pe x^{16}.
   b) Dacă $x=y=2$, să se afle cîți termeni raționali are dezvoltarea.
   c) Stabiliți dacă există termeni ai dezvoltării date în care x și y au puteri egale.

10. Să se rezolve în R ecuația $3\log_6\left(3-\frac{3}{2x+3}\right)=4\log_6\left(2+\frac{1}{x+1}\right)+3$.

11. Să se afle aria figurii plane mărginite de graficul funcției $f:R\to R$, $f(x)=x^2+3$, de axele de coordonate și de tangenta la graficul funcției f dusă în punctul $x_0=2$.

12. Aria bazei unei prisme triunghiulare drepte este egală cu $4cm^2$, iar ariile fețelor laterale sunt egale cu $9cm^2$, $10cm^2$ și respectiv $17cm^2$. Să se afle volumul prismei.

TESTUL 36

1. Să se afle valoarea expresiei $a=\dfrac{3\log_7 4+\log_7 0{,}5}{1-\log_7 14}$.

2. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A)=60^\circ$, $m(\angle C)=30^\circ$ şi $AC=16cm$. Dacă M este mijlocul laturii $[AC]$, să se afle BM.

3. Dan şi Andrei au primit de sărbători de la părinţi 400 lei, respectiv 500 lei. Fiecare îşi depune banii la cîte o bancă care acordă dobîndă simplă. Dan depune la o bancă cu procent anual al dobînzii de 18%, iar Andrei la o bancă cu procent anual de 14%. Care dintre ei va avea mai mulţi bani în cont după 6 luni?

4. Să se afle partea reală a numărului complex $z=\left(\sqrt{2}+i\right)(3+4i)\left(\sqrt{2}-i\right)$.

5. La secţia de chirurgie a unui spital sunt de gardă 3 medici şi 4 asistenţi. În cîte moduri se poate forma o echipă de intervenţie formată din 3 cadre medicale, dintre care cel puţin unul să fie medic?

6. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=x^3\cdot e^x$. Să se rezolve ecuaţia $f'(x)=0$.

7. Să se determine asimptotele la graficul funcţie $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

8. Într-un trapez dreptunghic bisectoarea unghiului ascuţit este diagonală a trapezului. Înălţimea trapezului are lungimea h, iar baza mică are lungimea a $(a\geq h)$. Să se afle perimetrul trapezului.

9. Să se rezolve în R ecuaţia $\sqrt{5-2\sin x}=6\sin x-1$.

10. Să se afle probabilitatea ca alegînd un termen al dezvoltării $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{40}$ acesta să fie număr raţional.

11. Baza unui paralelipiped drept este un paralelogram cu un unghi de 30° şi aria de $4cm^2$. Ariile feţelor laterale ale paralelipipedului sunt egale cu $6cm^2$ şi $12cm^2$. Să se afle volumul paralelipipedului.

12. Să se afle $a\in R$ pentru care $\log_{\frac{a-1}{a+1}}\left(x^2+3\right)\geq 1$ pentru orice $x\in R$.

TESTUL 37

1. Dacă $\log_3 x=5$ şi $\log_3 y=2$, să se afle $\log_y x$.

2. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AC\cap BD=\{O\}$. Fie $OM\perp BC$. Să se afle cîte procente reprezintă aria triunghiului BOM din aria dreptunghiului $ABCD$.

3. Suma a două numere naturale este egală cu 77, iar primul număr reprezintă $\dfrac{5}{6}$ din al doilea. Să se afle cele două numere.

4. Să se afle numerele întregi a şi b pentru care $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$.

5. Se aruncă simultan două zaruri. Să se afle probabilitatea ca suma numerelor obţinute pe cele două zaruri să fie egală cu 5.

6. În dezvoltoarea $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{x}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ suma coeficienţilor binomiali este egală cu 128. Să se afle termenul care îl conţine pe x^4.

7. Să se determine funcţia $f:D\to R$, ştiind că este satisfăcută condiţia $f''(x)=12x-38$, iar graficul funcţiei intersectează axa Ox în punctele cu abscisele $x=\dfrac{3}{2}$ şi $x=4$.

8. Se consideră triunghiul ABC cu $[AB]\equiv[BC]$, $BD\perp AC$, $D\in(BC)$. $(AE$ este bisectoarea unghiului A, $E\in(BD)$. Ştiind că $BE:ED=13:12$ şi perimetrul triunghiului ABC este egal cu $350cm$, să se afle lungimile laturilor triunghiului.

9. Să se rezolve în R ecuaţia $x^2-2x+24=11\cdot\sqrt{x^2-2x}$.

10. Aria laterală a unui con circular drept este de două ori mai mare decît aria bazei, iar aria secţiunii axiale este egală cu Q. Să se afle volumul conului.

11. Determinaţi valorile parametrului real m pentru care funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{m-x}{x^2-5x+4}$ nu are puncte de extrem.

12. Fie funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{ax|x-2|}{2-x}+b\sqrt{x-3}$, unde $a,b\in R$, D fiind domeniul maxim de definiţie al funcţiei. Determinaţi valorile parametrilor a şi b, ştiind că $f'(4)=\dfrac{1}{2}$ şi $\int_4^5(2a+b)dx=2$.

TESTUL 38

1. Să se afle valoarea expresiei $a=\log_2\frac{8}{n^3}$, știind că $\log_2 n=6$.

2. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB]\equiv[AC]$ în care $AM\perp BC$, $M\in(BC)$ și $[BN]$ este mediană corespunzătoare laturii $[AC]$, $N\in(AC)$. Dacă $MN=6cm$, să se afle lungimea laturii $[AC]$ a triunghiului ABC.

3. O persoană pleacă la piață și cheltuiește 30% din suma pe care o avea. Știind că i-au mai rămas 392 lei, să se afle ce sumă avea inițial persoana.

4. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=(2a-3)x+5$. Să se afle $a\in R$ pentru care funcția f este strict descrescătoare pe R.

5. Să se afle probabilitatea ca alegînd un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să dea restul 10 prin împărțirea la 11.

6. Determinați numerele reale x și y pentru care expresia $E=\sqrt{x^2+6x+13}+\sqrt{y^2+4}$ are valoare minimă și indicați valoarea minimă a expresiei E.

7. Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases}2^x+3^y=7\\4^x+9^y=25\end{cases}$.

8. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic are lungimea $4cm$, iar măsurile unghiurilor triunghiului formează o progresie aritmetică. Să se afle lungimile catetelor triunghiului.

9. Determinați $a\in R$ pentru care funcția $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}2x+a,\ x\le 1\\ \dfrac{a\sin(x-1)}{x^2+x-2},\ x>1\end{cases}$ este continuă pe R.

10. Să se rezolve ecuația $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$.

11. Determinați asimptotele la graficul funcției $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$.

12. Baza unei piramide este un paralelogram cu laturile de $10cm$ și $18cm$ și aria de $90cm^2$. Piciorul înălțimii piramidei coincide cu punctul de intrsecție al diagonalelor bazei și are înălțimea lungimea de $6cm$. Să se afle aria laterală a piramidei.

TESTUL 39

1. Să se afle x, știind că $\log_x\frac{1}{25}=-\frac{2}{3}$.

2. Muchia unui cub are lungimea $6cm$. Să se afle aria secțiunii diagonale a cubului.

3. Într-o clasă, numărul băieților reprezintă $\frac{5}{7}$ din numărul fetelor. Să se afle cîte fete și cîți băieți sunt în clasă, știind că sunt cu 4 fete mai multe decît băieți.

4. Să se calculeze $a=\sqrt[3]{16}+\left|2\sqrt[3]{2}-3\right|$.

5. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=e^{2x^2+3x-1}$. Calculați $f'(0)$.

6. Rezolvați în R ecuația $(0,25)^{2-x}=\frac{1}{2^{x+3}}$.

7. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

8. Înălțimea unui trapez are lungimea de $12cm$, iar diagonalele au lungimile de $20cm$ și $15cm$. Să se afle aria trapezului.

9. Determinați $a\in R$ astfel încît numărul $z=\dfrac{1+i}{2a+(a-1)i}$ să fie real.

10. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care numerele $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$, $\lg(2^x+3)$ în această ordine sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

11. Raza bazei unui cilindru circular drept are lungimea $26cm$, iar generatoarea cilindrului are $48cm$. Să se afle la ce distanță da la axa cilindrului trebuie făcută o secțiune paralelă cu axa cilindrului care să aibă forma de pătrat.

12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care ecuația $9^x-2(3a-2)\cdot 3^x+5a^2-4a=0$ are două soluții reale distincte.

TESTUL 40

1. Calculați valoarea expresiei $E=\log_2 16^{\frac{1}{2}}-\log_3\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$.
2. Punctele A și B se află pe cercul de centru O astfel încît $AB=5cm$ și $m(\angle AOB)=60^\circ$. Să se afle lungimea diametrului cercului.
3. Un teren de formă dreptunghiulară are aria de $480m^2$. Știind că lățimea lotului reprezintă $\frac{5}{6}$ din lungime, să se afle perimetrul terenului.
4. Se consideră expresia $E_k=\left(\sqrt{a}\right)^{18-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^k$, unde $a>0$. Să se afle $k\in N$ pentru care $E_k=a^4$.
5. Să se rezolve ecuația $f'(x)=g'(x)$ unde $f,g:R\to R$, $f(x)=3+x^2$ și $g(x)=3x^2-(5x-3)(2-x)$.
6. Să se rezolve în R inecuația $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}>3^{-x}$.
7. Se consideră triunghiul ABC în care $[AE]$ și $[BD]$ sunt mediane, $E\in(BC)$, $D\in(AC)$, $AE\cap BD=\{O\}$. Dacă $AE=18cm$, $BD=12cm$ și $AB=12cm$, să se afle perimetrul triunghiului OED.
8. Să se rezolve în R ecuația $\sin 4x+3\sin 2x=0$.
9. Să se studieze paritatea funcției $f:R\to R$, $f(x)=2^{1+\sin x}-2^{1-\sin x}$.
10. Fie funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{(x+a)^2}{bx-1}$, $a,b\in R$.
    a) Să se determine parametrii reali a și b pentru care graficul funției f admite ca asimptotă dreapta de ecuație $y=x+3$.
    b) Pentru a și b determinați la punctul *a*) să se afle punctele de extrem ale funcției f.
11. Volumul unei sfere de rază $\sqrt[3]{2}\,cm$ este egal cu volumul unui con circular drept care are aria laterală de trei ori mai mare decît aria bazei. Să se afle lungimea înălțimii conului.
12. Să se afle valoarea determinantului $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ f(x) & f'(x) & f''(x)\\ g(x) & g'(x) & g''(x)\end{vmatrix}$, unde $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{\cos x}$, $g(x)=\frac{1-\cos 2x}{\sin x}$.

TESTUL 41

1. Să se afle valoarea expresiei $a=3^{\log_9 5-1}$.
2. Un cerc este circumscris unui triunghi dreptunghic care are ipotenuza de $10cm$. Să se afle aria discului mărginit de cerc.
3. Un turist a parcurs 40% dintr-un drum și mai are de parcurs $6km$ pînă a ajunge la mijlocul drumului. Să se afle lungimea drumului.
4. Să se afle funcția de gradul întîi, graficul căreia trece prin punctele $A(1;3)$ și $B(2;-1)$.
5. Să se rezolve în R inecuația $x^2-5|x|+4<0$.
6. Să se afle valorile parametrului real m pentru care numărul $z=3i^5-2mi^2+(1-m)i+5$ este real.
7. În triunghiul ascuțitunghic ABC este dusă înălțimea BD, $D\in(AC)$. Să se afle lungimea laturii $[AB]$, știind că $AC=3cm$, $BD=\sqrt{3}\,cm$, $AD=BC$.
8. Să se rezolve în R ecuația $\log_3\sqrt{x+1}+\log_{\sqrt{x+1}}27+\log_{\frac{1}{3}}81=0$.
9. Determinați intervalele de monotonie șe extremele funcției $f:D\to R$, $f(x)=x^2\cdot\ln x$.
10. Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x tdt}{xtg(x+\pi)}$.
11. Să se afle volumul unui trunchi de piramidă patrulateră regulată care are diagonala de $18cm$ și laturile bazelor de $14cm$ și $10cm$.
12. Să se afle valorile parametrului real m pentru care $\det A\in R$, dacă $A=\begin{pmatrix}2+i & 1-i & i\\ m+i & 2-i & i\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

TESTUL 42

1. Aflați valoarea expresiei numerice $A=\log_{12}3+\log_{12}4+12^{\log_{144}4}+\log_{\frac{1}{2}}8$.

2. Într-un cerc de rază $8cm$ este înscris un pătrat. Să se afle lungimea laturii pătratului.

3. Un tractorist a arat 35% dintr-un teren agricol, ceea ce reprezintă $21ha$. Care este aria întregului teren?

4. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $AC=\sqrt{2}\,cm$ și $\sin(\angle C)=\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Să se afle BC.

5. Se consideră expresia $E_k=\left(\sqrt{a}\right)^{14-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{k}$, unde $a>0$. Să se afle $k\in N$ pentru care $E_k=a$.

6. Să se determine $x\in R$, dacă al treilea termen al dezvoltării $(x+2)^8$ este egal cu al patrulea termen al dezvoltării $(x+2)^6$.

7. Să se rezolve în R inecuația $\log_{\frac{1}{3}}\frac{2x-1}{x+2}>1$.

8. Lungimile bazelor unui trapez sunt egale cu $5cm$ și $15cm$, iar lungimile diagonalelor trapezului sunt $12cm$ și $16cm$. Să se afle aria trapezului.

9. Să se determine funcția polinomială f de gradul al treilea pentru care sunt adevărate egalitățile: $f(1)=5$, $f(-1)=1$, $f'(1)=6$, $f''(0)=2$.

10. Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=81\\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 3\end{cases}$.

11. Baza unui paralelipiped drept este un paralelogram cu un unghi de 120° și laturile de $3cm$ și $4cm$. Diagonala mai mică a paralelipipedului este egală cu diagonala mare a bazei. Să se afle volumul paralelipipedului.

12. Să se afle aria figurii mărginite de graficul funcției $f:R\to R$, $f(x)=x^2-2x+2$, de tangenta la graficul funcției în punctul de intersecție al graficului cu axa ordonatelor și de dreapta de ecuație $x=1$.

TESTUL 43

1. Să se afle valoarea expresiei $a=\sqrt{12\cdot\log_2 8}$.

2. Fie pătratul $ABCD$ în care punctul M este mijlocul laturii $[BC]$. Dacă aria triunghiului ABM este egală cu $9cm^2$, să se afle aria pătratului.

3. Suma a două numere naturale este egală cu 60. Să se afle cele două numere, știind că $\frac{3}{4}$ dintr-un număr este egal cu $\frac{1}{2}$ din celălalt număr.

4. Să se afle cîte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele $4, 5, 6, 7, 8$.

5. Să se afle $\sin\alpha$, știind că $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{7}{5}$.

6. Să se rezolve în R ecuația $2^x\cdot 4^{x-1}=8^{x+1}\cdot 16^x$.

7. Într-un triunghi lungimea unei laturi este cu $4cm$ mai mică decît lungimea înălțimii corespunzătoare acestei laturi, iar aria triunghiului este $96cm^2$. Să se afle lungimea laturii respective și a înălțimii corespuzătoare ei.

8. Într-o urnă sunt 10 bile albe, 8 bile roșii și 6 bile galbene. Să se afle probabilitatea ca extrăgînd la întîmplare două bile din urnă, acestea să fie ambele de culoare roșie.

9. Să se rezolve în R inecuația $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x-2}{x+1}>1$.

10. Determinați valorile parametrului real m pentru care funcția $f:R\to R$, $f(x)=\ln(1+x^2)-mx$ este crescătoare pe R.

11. Latura bazei unei prisme triunghiulare regulate $ABCA_1B_1C_1$ este de $2cm$, iar diagonala feței laterale are $\sqrt{5}\,cm$. Să se afle măsura unghiului format de planul (A_1BC) și planul bazei prismei.

12. Arătați că dacă numerele $a=\lg x$, $b=\lg y$, $c=\lg z$ $(x,y,z>0)$ sunt, în această ordine, în progresie aritmetică, atunci numerele x,y,z sunt, în această ordine, în progresie geometrică.

TESTUL 44

1. Să se compare numerele $a=\log_2\sqrt{16}$ şi $b=\sqrt{\log_3 81}$.
2. Se consideră cercul C cu centrul în punctul O. Punctele A, B, C aparţin cercului, astfel încît $m(\angle ABC)=42^\circ$. Să se afle măsura unghiului AOC.
3. Un fermier a adus la piaţă o cantitate de fructe din care a vîndut 35% şi i-au mai rămas $299\,kg$. Ce cantitate de fructe a adus la piaţă fermierul?
4. Să se determine funcţia de gradul I, graficul căreia conţine punctele $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ şi $B(0;-3)$.
5. Să se rezolve în R ecuaţia $3^{2x+1}\cdot 4^{2x}=36$.
6. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ suma coeficienţilor binomiali de rang impar este egală cu 128. Să se afle termenul care îl conţine pe a^3.
7. Într-un triunghi dreptunghic medianele corespunzătoare catetelor au lungimile $\sqrt{156}\,cm$ şi $\sqrt{89}\,cm$. Să se afle lungimea ipotenuzei triunghiului.
8. Se consideră funcţiile derivabile $f,g:R\to R$ astfel încît $f(x)=(x^2-1)\cdot g(x)$ pentru orice $x\in R$ şi $g(1)=1$. Calculaţi $f'(1)$.
9. Să se rezolve în R inecuaţia $\log_{\frac{1}{2}}\left(2-\frac{1}{2}x\right)\geq -1$.
10. Determinaţi $a,b\in R$, ştiind că $z=1+i$ este o soluţie a ecuaţiei $z^3+z^2+az+b=0$.
11. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle C)=90^\circ$. Înălţimea corespunzătoare ipotenuzei are lungimea $9{,}6\,cm$. Din vîrful unghiului drept C se ridică pe planul triunghiului perpendiculara CM, astfel încît $CM=28\,cm$. Să se afle distanţa de la punctul M la ipotenuza $[AB]$ a triunghiului.
12. Determinaţi valorile parametrului real m pentru care funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\ln(4+x^2)+mx$ este descrescătoare pe R.

TESTUL 45

1. Să se afle valoarea expresiei $a=8^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{2}}$.
2. Se consideră pătratul $ABCD$ cu latura de $9\,cm$ şi $AC\cap BD=\{O\}$. Să se afle aria triunghiului BOC.
3. O persoană a cheltuit 45% din suma de 3000 lei. Cîţi lei ia-u mai rămas persoanei?
4. Să se afle valoarea expresiei $a=(\sin x-\cos x)^2+\sin 2x$.
5. Se consideră numerele naturale impare de două cifre mai mici decît 20. Să se afle probabilitatea ca alegînd un număr din această mulţime, acesta va fi număr compus.
6. Să se rezolve în R ecuaţia $\log_2(2^x-7)=3-x$.
7. Un triunghi are lungimile laturilor de $11\,cm$, $13\,cm$ şi $12\,cm$. Să se afle lungimea medianei corespunzătoare laturii mai mari a triunghiului.
8. Să se determine $a,b\in(0;+\infty)$ pentru care expresia $E(a;b)=\sqrt{a^2-4a+8}+\sqrt{b^2-6b+10}$ are valoare minimă şi indicaţi valoarea respectivă.
9. Să se afle valorile pozitive ale parametrului a pentru care $\int_0^a(3x^2+4x-5)dx=a^3-2$.
10. Să se rezolve în R inecuaţia $3\cdot 2^{\sqrt{x-1}}+2^{3-\sqrt{x-1}}>25$.
11. Se consideră numerele complexe $u=\frac{3+7i}{5+2i}$, $v=\frac{9-i}{5+4i}$. Fie $z=u^{10}+v^{10}$. Să se afle z.
12. Baza unei piramide este un paralelogram cu laturile de $10\,cm$ şi $8\,cm$, iar una dintre diagonalele lui are $6\,cm$. Înălţimea piramidei are lungimea $4\,cm$ şi piciorul înălţimii piramidei coincide cu punctul de intersecţie al diagonalelor bazei. Să se afle aria totală a piramdei.

TESTUL 46

1. Să se afle valoarea expresiei $a=\log_2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+1\right)$, unde $\alpha\in R$.

2. Se consideră triunghiul ABC cu perimetrul de $21cm$. Fie $M\in(AB)$, astfel încît $AM=MB$ şi $N\in(BC)$, astfel încît $BN=NC$ şi $MN=4,5cm$. Dacă latura BC are lumgimea cu $2cm$ mai mare decît latura AB, să se afle lungimile laturilor triunghiului.

3. Un automobilist are de parcurs o distanţă de $120km$. Dacă el a parcurs $72km$ din întreaga distanţă, să se afle cîte procente din întreaga distanţă mai are de parcurs.

4. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=ax+b$. Dacă dreapta care reprezintă graficul funcţiei are panta 2 şi trece prin punctul $A(1;5)$, să se afle $f(-2)$.

5. Aflaţi cîte submulţimi cu cel puţin 3 elemente are mulţimea $\{1,3,5,7,9\}$.

6. Bisectoarea unghiului A al triunghiului ABC împarte latura BC în două segmente de lungimi $28cm$ şi $12cm$. Să se afle perimetrul triunghiului, ştiind că $AB-AC=18cm$.

7. Să se rezolve în R ecuaţia $2^{\sin^2 x}+4\cdot 2^{\cos^2 x}=6$.

8. Determinaţi $x\in R$ astfel încît numerele $a=2^x$, $b=4^x$, $c=3\cdot 2^x$ să fie, în această ordine, termini consecutivi ai unei progresii aritmetice.

9. Să se afle cea mai mare valoare a funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=2\cos x+\sqrt{3}\cdot x-\dfrac{\sqrt{3}\cdot\pi}{3}$ pe intervalul $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

10. Laturile bazei unui paralelipiped drept au lungimile a şi b, iar măsura unghiului dintre ele este de 30°. Aria laterală a paralelipipedului este egală cu S. Să se afle volumul paralelipipedului.

11. Să se rezolve în R inecuaţia $\log_3 x+\log_{3x} x+\log_3 x\cdot\log_{\frac{3}{x}} x>0$.

12. Determinaţi valorile parametrilor reali a şi b pentru care valorile extreme ale funcţiei $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{ax}{x^2+3x+b^2}$ sunt egale cu -1 şi -2.

TESTUL 47

1. Să se compare numerele $a=3^{4\log_9\sin\frac{8\pi}{3}}$ şi $b=5^{3\log_{\sqrt{5}}tg\frac{5\pi}{4}}$.

2. Pătratul $ABCD$ este înscris în cercul $C(O;R)$. Dacă $AB=10cm$, să se afle aria discului mărginit de cerc.

3. O persoană avea 500 lei. Într-o zi a cheltuit $\dfrac{3}{5}$ din întreaga sumă, iar a doua zi a cheltuit 75% din suma rămasă. Ce sumă i-a rămas persoanei?

4. Să se afle numerele reale a şi b pentru care ecuaţia $x^2+ax+b=0$ are soluţia $x=1+2i$.

5. Rezolvaţi ecuaţia $3\cdot C_n^2-4\cdot C_n^1=10$.

6. Determinaţi $m,n\in N$ dacă suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării $\left(x^m+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$ este egală cu 256, iar al cincilea termen al dezvoltării nu îl conţine pe x.

7. Să se rezolve în R ecuaţia $6\cdot 9^{0,5x-2}+2\cdot 3^{x-6}=56$.

8. Aria unui romb este egală cu $1,5cm^2$, iar lungimea diagonalei mai mici a rombului este egală cu $\sqrt[4]{3}\,cm$. Să se afle măsura unghiului obtuz al rombului.

9. Să se afle în cîte moduri se poate forma o echipă de cercetare formată din 3 specialişti, avînd la dispoziţie 2 fizicieni şi 5 matematicieni.

10. Să se afle valorile parametrului real a pentru care ecuaţia $\sin^2 x-\cos^2 x=a^2-1$ are soluţii reale.

11. Să se afle parametrul real a astfel încît funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{x+1}$ să admită spre $+\infty$ ca asimptotă dreapta de ecuaţie $y=x+1$.

12. Baza unei piramide patrulatere este un dreptunghi care are aria S. Muchiile laterale ale piramidei sunt congruente şi formează cu plannul bazei unghiuri cu măsurirle de 45°. Diagonalele dreptunghiului din baza piramidei formează un unghi cu măsura de 60°. Să se afle volumul piramidei.

TESTUL 48

1. Calculaţi $\dfrac{\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{12}}{\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^{6}}$.

2. Dacă $x=4$ este soluţie a ecuaţiei $2x+3a=11$, să se afle a.

3. Se consideră mulţimea $M=\left\{\log_5\frac{1}{2};\ \log_{\frac{1}{2}}5;\ \log_3 2;\ \log_2 1\right\}$. Să se determine mulţimea A, ştiind că $A\subset M$ şi $A\subset R_+^*$.

4. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\log_3(5x-2)$, D fiind domeniul maxim de definiţie. Să se rezolve ecuaţia $f(x)=f(3x-1)$.

5. Lungimile laturilor unui triunghi sunt direct proporţionale cu numerele $5,12,13$. Lungimea laturii mai mari a triunghiului este cu $1,6\,cm$ mai mare decît lungimea laturii mai mici. Să se afle perimetrul şi aria triunghiului.

6. Să se rezolve în R inecuaţia $4^{\sqrt{x}}-9\cdot 2^{\sqrt{x}}+8<0$.

7. Să se determine $a\in R$, ştiind că al şaptelea termen al dezvoltării $\left(2^a+2^{\sqrt{a-1}}\right)^8$ este egal cu 112.

8. Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Se extrag la întâmplare două elemente ale mulţimii A. Să se afle probabilitatea ca cele două numere extrase să fie prime între ele.

9. Să se afle numerele reale a şi b din egalitatea $\dfrac{2-3i}{3+4i}=a+bi$.

10. Să se rezolve în R inecuaţia $\log_x 2+\log_4 x\le\dfrac{3}{2}$.

11. Un trunchi de con circular drept are înălţimea de $4\,cm$, generatoarea de $4\sqrt{2}\,cm$, iar media aritmetică a lungimilor razelor bazelor de $10\,cm$. Să se afle:
   a) Aria laterală şi volumul trunchiului de con.
   b) Înălţimea conului din care provine trunchiul.

12. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=e^{4x-3}$, care este paralelă la dreapta $y=4x+5$.

TESTUL 49

1. Determinaţi valoarea numerică a expresiei $a=\log_{3-2\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}+3\right)^5$.

2. Volumul unui cub este egal cu $3\sqrt{3}\,cm^3$. Să se afle aria totală a cubului.

3. Să se afle valorile parametrului real m pentru care funcţia $f:R\to R$, $f(x)=(5m+2)x+7$ este strict descrescătoare pe R.

4. O persoană a plecat la cumpărături cu o sumă de 450 lei. Dacă persoana a cheltuit 40% din sumă, să se afle cîţi lei i-au rămas.

5. Să se afle valoarea expresiei $E=\sin 15^\circ\left(\cos 50^\circ\cdot\cos 65^\circ+\sin 50^\circ\cdot\sin 65^\circ\right)$.

6. Să se rezolve în R inecuaţia $\log_3\dfrac{1-2x}{x}\le 0$.

7. Dintr-un punct de pe un cerc sunt duse două coarde reciproc perpendiculare situate la distanţele $6\,cm$ şi $12\,cm$ faţă de centrul cercului. Să se afle lungimile celor două coarde.

8. Să se calculeze $\int_1^e\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

9. Rezolvaţi în R ecuaţia $\begin{vmatrix}2 & x & 0\\ x & -1 & x\\ 2 & -5 & 4\end{vmatrix}=0$.

10. În piramida triunghiulară regulată $VABC$ latura bazei are lungimea $6\sqrt{3}\,cm$, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi, tangenta căruia este egală cu $\dfrac{4}{3}$. Să se afle aria triunghiului MVC, unde M este mijlocul segmentului $[AB]$.

11. Să se afle suma numerelor naturale din domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f:D\to R$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{3+2x-x^2}{x-1}}$.

12. Fie funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{mx-5}{x^2-1}$, D fiind domeniul maxim de definiţie al funcţiei. Să se determine $m\in R$ astfel încît funcţia să admită un punct de extrem în $x=2$ şi să se precizeze natura acestui extrem.

TESTUL 50

1. Dacă $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$, să se afle a^{-4}.

2. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB]\equiv[AC]$ și $m(\angle BAC)=30^\circ$. Dacă $BD\perp AC$ și $BD=6cm$, să se afle $AB+AC$.

3. Să se aducă la o formă mai simplă expresia $a=(2-\log_3 45)\cdot(1-\log_5 45)$.

4. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției $f(x)=\sqrt[6]{125-5^{x^2}\cdot 25^x}$.

5. Să se afle matricea X din egalitatea $2\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}+3\cdot X=4\cdot\begin{pmatrix}2&-1&4\\-3&2&5\end{pmatrix}$.

6. Determinați valoarea maximă și valoarea minimă ale funcției $f:[0;3]\to R$, $f(x)=\frac{x^2+8}{x+1}$.

7. Raportul lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egal cu $3:2$, iar înălțimea dusă din vîrful unghiului drept împarte ipotenuza în două segmente, unul dintre ele avînd lungimea cu $2cm$ mai mare decît celălalt. Să se afle lungimea ipotenuzei.

8. Să se rezolve ecuația $1+8\cdot 2^x-9\cdot 2^{\frac{x}{2}}=0$.

9. Într-o progresie geometrică (b_n) avem $b_1+b_3=20$ și $b_2+b_4=40$. Să se afle suma primilor opt termeni ai progresiei.

10. Fie funcția $f:R\to R$, $f(x)=x^3+ax^2+3x+1$.
    a) Să se afle parametrul real a astfel încît $f'(1)-12=0$.
    b) Pentru a determinat la punctul *a*) să se calculeze integrala $I=\int_2^5\frac{f(x)}{f'(x)}dx$.

11. Un con circular drept cu generatoarea de $10cm$ și diametrul bazei de $12cm$ este înscris într-o sferă. Să se afle volumul sferei.

12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care ecuația $(\log_3 a)\cdot x^2-(2\log_3 a-1)\cdot x+\log_3 a-2=0$ are soluție unică.

TESTUL 51

1. Să se compare numerele $a=\log_2\sin 30^\circ$ și $b=\log_{\frac{1}{3}}9$.

2. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $AC=3cm$, $[AM]$ este mediană, $M\in(BC)$, $AM=3cm$. Să se afle $m(\angle C)$ al triunghiului ABC.

3. Un produs costa 240 lei. După o scumpire de prețuri produsul costa 300 lei. Cu cîte procente s-a scumpit produsul?

4. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=(a-3)x+2a+5$. Dacă panta dreptei care reprezintă graficul funcției f este egală cu -2, să se afle $f(3)$.

5. Să se rezolve în N ecuația $A_x^3=56x$.

6. Determinați $m\in R$ pentru care numărul $z=(m-1)i^{12}+(2-m)i^{23}$ este real.

7. Un triunghi dreptunghic are lungimea ipotenuzei de $25cm$, iar lungimile catetelor sunt direct proporționale cu numerele 3 și 4. Să se afle lungimea razei cercului înscris în triunghi.

8. Să se afle cea mai mare soluție a ecuației $\left(3^{2,5-2x^2}-\sqrt{3}\right)\cdot\log_3(3x-10)=0$.

9. Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+y=7\\|x-y|=2\end{cases}$.

10. Baza unei piramide este un triunghi cu laturile de lungimi $13cm$, $12cm$, $5cm$. Toate muchiile laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri cu măsurile de 45°. Să se afle volumul piramidei.

11. Să se afle valorile reale ale lui a pentru care poate avea loc egalitatea $tg\beta=\frac{2a^2+2a}{a^2-6a+9}$, dacă $\beta\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

12. Se consideră funcția $f:R\setminus\{1\}\to R$, $f(x)=\frac{ax^2+bx+2}{x-1}$, $a,b\in R$.
    a) Să se determine parametrii reali a și b, astfel încît graficul funcției să admită asimptota $y=x+2$.
    b) Pentru a și b determinați la punctul *a*), să se calculeze aria suprafeței mărginite de graficul funcției f, de asimptota oblică și dreptele de ecuații $x=2$ și $x=3$.

TESTUL 52

1. Știind că $a=\log_3 5$, să se exprime în funcție de a numărul $x=\log_3 15$.

2. Un triunghi isoscel are un unghi cu măsura de 108°. Să se afle măsurile celorlalte unghiuri ale triunghiului.

3. La un magazin erau $360\,kg$ de zahăr. În prima zi s-au vîndut $\frac{3}{8}$ din cantitatea de zahăr, iar a doua zi $\frac{4}{9}$ din cantitatea rămasă. Cîte kilograme de zahăr au mai rămas la magazin?

4. Să se afle panta tangentei la graficul funcției $f:R\to R$, $f(x)=5x^2-3x+2$ dusă în punctul $x_0=2$.

5. Într-o cutie sunt 20 bile albe și 15 bile roșii. Se scot la întîmplare două bile. Să se afle probabilitatea ca cele două bile scoase să fie de culoare roșie.

6. Să se rezolve în R ecuația $(x^2-4)\cdot\sqrt{x+1}=0$.

7. Într-un triunghi isoscel lungimea bazei este $24\,cm$, iar a laturii laterale $15\,cm$. Să se afle lungimile razelor cercurilor înscris și circumscris triunghiului.

8. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt[30]{a^{-1}}+\sqrt[5]{a}\right)^n$, $a>0$. Să se afle n, știind că al șaselea termen al dezvoltării nu depinde de a.

9. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x+y+z=0 \\ mx+2y+3z=0 \\ m^2x+4y+9z=0 \end{cases}$. Să se afle valorile parametrului real m pentru care sistemul admite soluție unică.

10. Să se afle abscisele punctelor de extrem ale funcției $f:R\to R$, $f(x)=2x^3+3x^2$ și să se precizeze natura punctelor de extrem.

11. Într-un con circular drept cu raza bazei de $5\,cm$ și înălțimea de $12\,cm$, se face o secțiune paralelă cu baza, avînd aria de $9\pi\,cm^2$. Să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului de con format.

12. Să se afle valorile parametrului real m pentru care inecuația $\frac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>-1$ este verificată pentru orice $x\in R$.

TESTUL 53

1. Să se arate că există $m\in N$ astfel încît $A=\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}+\sqrt{48}=m\sqrt{3}$ și comparați numerele A și $B=3\sqrt{5}$.

2. Se consideră pătratul $ABCD$, în care $AC\cap BD=\{O\}$. Dacă $OC=5\sqrt{2}\ cm$, să se afle perimetrul pătratului $ABCD$.

3. Un elev a citit 100 pagini dintr –o carte, ceea ce reprezintă 40% din numărul de pagini al cărții. Să se afle cîte pagini mai are de citit elevul.

4. Stabiliți dacă este adevărată egalitatea $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8=3$.

5. Se consideră mulțimile $A=\{x\in Z\,|\,|x|\le 2\}$ și $B=\{y\in Z\,|-2<y\le 3\}$. Să se determine mulțimile $A\cup B$ și $A\cap B$.

6. Să se afle cea mai mică valoare a expresiei $E=\sqrt[3]{\sin 2x\cdot\cos x+\cos 2x\cdot\sin x-7}$.

7. Un triunghi dreptunghic are perimetrul $36\,cm$. În triunghi este înscris un cerc, astfel încît punctul de tangență împarte ipotenuza în două segmente, raportul lungimilor cărora este $2:3$. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

8. Să se afle coordonatele punctului de pe graficul funcției $f:R\to R$, $f(x)=x^2-7x+3$ în care tangenta la graficul funcției este paralelă la dreapta de ecuație $5x+y-3=0$.

9. Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} 3^x-2^{y^2}=77 \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y^2}{2}}=7 \end{cases}$.

10. Să se rezolve în R ecuația $8\sin^2 x+\sin 2x=5$.

11. Muchia laterală și înălțimea unei piramide triunghiulare regulate au lungimile respectiv $11\,cm$ și $7\,cm$. Să se arle aria secțiunii ce trece prin muchia laterală și înălțimea piramidei.

12. Să se afle valorile pozitive ale parametrului a pentru care inecuația $x^2-(x-1)\cdot\log_{\frac{1}{2}} a<0$ nu este verificată nici pentru o valoare reală a lui x.

TESTUL 54

1. Comparați numerele $a=\cos\frac{\pi}{8}$ și $b=\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$.

2. Perimetrul unui triunghi este egal cu $45\,cm$, iar două dintre liniile mijlocii ale triunghiului au lungimile de $6\,cm$ și $8\,cm$. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

3. După o ieftenire cu 10%, un televizor costă 4500 lei. Care era prețul inițial al televizorului?

4. Să se afle valoarea expresiei $a=36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$.

5. Să se afle valoarea determinantului $D=\begin{vmatrix} tgx & -2 \\ 3 & ctgx \end{vmatrix}$.

6. Să se rezolve în R ecuația $\lg\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\lg(2x+15)=1$.

7. Într-un triunghi dreptunghic este înscris un cerc. Punctul de tangență al cercului cu una dintre catete împarte cateta dată în două segmente cu lungimile de $6\,cm$ și $10\,cm$ socotind de la vîrful unghiului drept. Să se afle aria triunghiului.

8. Într-o urnă sunt 4 bile galbene și 6 bile violet. Se extrag succesiv două bile, fără a pune înapoi prima bilă. Să se afle probabilitatea ca a doua bilă scoasă să fie violet.

9. Se consideră funcția $f(x)=\log_3(x^2-6x+8)$.
   a) Aflați domeniul maxim de definiție al funcției.
   b) Calculați $f(1,5)-f(-0,5)$.
   c) Să se rezolve ecuația $2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{f(x)}+\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}=1$.

10. Să se afle aria figurii mărginite de graficele funcțiilor $f:R\to R$, $f(x)=x^2$, $g:R^*\to R$, $g(x)=\frac{1}{x}$ și de dreapta $x=\frac{1}{2}$.

11. Fie o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de $10\,cm$ și înălțimea de $12\,cm$. Să se afle distanța de la centrul bazei piramidei la o muchie laterală.

12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care trinomul $x^2-2^{a+2}x-2^{a+3}+12$ obține valori pozitive pentru orice $x\in R$.

TESTUL 55

1. Să se calculeze $a=\sqrt[4]{16}\cdot 2^{-3}-\sqrt{\frac{1}{16}}$.

2. Un fermier a adus la piață o cantitate de $9600\,kg$ de mere. După ce a vîndut 65% din întreaga cantitate, să se afle ce cantitate de mere i-a mai rămas fermierului.

3. Măsura unui unghi este de trei ori mai mare decît măsura suplementului său. Să se afle măsura unghiului.

4. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, suma cifrelor acestuia să fie egală cu 2.

5. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $B=\frac{1}{2}\cdot(3I_2-A)$, unde I_2 este matricea unitate de ordinul doi.

6. Într-un paralelipiped dreptunghic laturile bazei au lungimile de $7\,cm$ și $24\,cm$, iar înălțimea paralelipipedului este de $8\,cm$. Să se afle aria secțiunii diagonale a paralelipipedului.

7. Să se afle valorile întregi ale lui x pentru care expresia $\frac{\sqrt{1-\sin x}}{\lg(-3x^2+10x-3)}$ are sens.

8. Să se afle $\frac{\cos^4\alpha+\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2 2\alpha}$, dacă $tg\alpha=3$.

9. Diferența dintre coeficientul binomial al celui de al treilea termen și coeficientul binomial al celui de al doilea termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}+x^{\lg x}\right)^n$ este egală cu 27. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care al doilea termen al dezvoltării este egal cu 900.

10. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției $f(x)=\log_x\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$.

11. Lungimea liniei mijlocii a unui trapez este egală cu $5\,cm$, iar lungimea segmentului determinat de mijloacele bazelor trapezului este de $3\,cm$. Măsurile unghiurilor de la baza mare a trapezului sunt de 60° și 30°. Să se afle aria trapezului.

12. Să se afle parametrii reali a și b pentru care funcția $f:R\to R$, $f(x)=a\cdot 2^x+b$ verifică relațiile $f'(1)=2$ și $\int_0^3 f(x)\,dx=7$.

TESTUL 56

1. Să se afle valoarea expresiei $a=-12\cdot 81^{\frac{1}{4}}+\log_2 16$.

2. Fie triunghiul ABC cu $[AB]\equiv[AC]$, $m(\angle ABC)+m(\angle ACB)=140^\circ$ și $AD\perp BC$, $D\in(BC)$. Să se afle $m(\angle BAD)$.

3. Aria unui pătrat este egală cu $81\,cm^2$. Să se afle 60% din perimetrul pătratului.

4. Să se afle valoarea expresiei $E=5\cos^2 x-7+5\sin^2 x$.

5. Fie D_{48} mulțimea divizorilor naturali ai numărului 48. Să se afle probabilitatea ca alegînd un element al mulțimii D_{48}, acesta să fie pătrat perfect.

6. Să se rezolve în R ecuația $8\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{5-\frac{x}{2}}}=2^{\sqrt{x-1}}$.

7. Să se rezolve în R inecuația $\frac{f'(x)}{g'(x)}\geq 0$, dacă $f,g:R\to R$, $f(x)=x^3-3x$ și $g(x)=x^2+6x$.

8. Baza unui paralelipiped drept este un romb cu diagonalele de $6\,cm$ și $8\,cm$. Diagonala feței laterale a paralelipipedului are lungimea de $13\,cm$. Să se afle aria suprafeței totale a paralelipipedului.

9. Să se rezolve în R inecuația $4^{3x^2+x}-8<2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$.

10. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care termenul al patrulea al dezvoltării binomului $\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\lg x+1}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ este egal cu 200.

11. Înălțimea unui con circular drept este $5\sqrt{3}\,cm$. Știind că secțiunea axială a conului este un triunghi echilateral, să se afle aria laterală și volumul conului.

12. Fie funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2+ax+1}{x-1}$. Să se determine valorile parametrului real a pentru care dreapta $y=x+2$ este asimptotă la graficul funcției f.

TESTUL 57

1. Comparați numerele $a=\log_3\frac{1}{9}$ și $b=2\cos\pi$.

2. Fie cercul $C(O,R)$ în care punctele A și B sunt diametral opuse, iar punctul C se află pe cerc, astfel încît $m(\angle CAB)=40^\circ$. Să se afle $m(\angle CBA)$.

3. O persoană a plecat la piață cu o sumă de bani, din care a cheltuit 60% și i-au mai rămas 256 lei. Cu ce sumă a plecat persoana la piață?

4. Să se afle rația r a unei progresii aritmetice (a_n), cu $a_1=1$ și $a_4=7$.

5. Fie $\cos x=\frac{3}{5}$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Să se afle $\sin x$.

6. Să se determine numerele reale x și y pentru care $3x^2-2\sqrt{3}x+y^2+6y+10=0$.

7. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $f:R\to R$, $f(x)=x^2+e^x$ în punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa ordonatelor.

8. Să se rezolve în R ecuația $\log_3\left(3^x-8\right)=2-x$.

9. Dintr-un punct al cercului de centru O sunt construite două coarde cu lungimile de $10\,cm$ și $12\,cm$. Aflați lungimea razei cercului, știind că distanța de la mijlocul coardei mai mici la coarda mai mare este de $4\,cm$.

10. Fie $E(x)=\left|\frac{x^2-1}{x^2-3}\right|$. Dacă notăm $A=\{x\in R\,|\,E(x)<1\}$, să se afle mulțimea A.

11. Fie piramida triunghiulară regulată cu raza cercului circumscris bazei de $4\,cm$ și măsura unghiului format de planul bazei și fețele laterale de 60°. Să se afle volumul piramidei.

12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care ecuația $x^2-\left(2^a-1\right)x-3\left(4^{a-1}-2^{a-2}\right)=0$ are două soluții reale egale.

TESTUL 58

1. Calculaţi $a=\log_6 144-\log_6 4$.
2. Să se afle media aritmetică a divizorilor naturali ai numărului 12.
3. Volumul unui cub este egal cu $64\,cm^3$. Să se afle aria unei feţe a cubului.
4. Fie mulţimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd un element din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 6 şi cu 8.
5. Un automobilist a parcurs un drum de $720\,km$ în trei etape. În prima etapă a parcurs 30% din drum, în a doua etapă 75% din rest, iar în a treia etapă restul. Cîţi kilometri a parcurs în a treia etapă?
6. Să se rezolve în mulţimea C ecuaţia $z^4+3z^2-4=0$.
7. Să se afle aria unui trapez dreptunghic care are bazele de $7\,cm$ şi $3\,cm$ şi unghiul ascuţit de 60°.
8. Să se determine soluţiile ecuaţiei $2^{|\cos x-2|}=8$, care aparţin intervalului $[0;\,10]$.
9. Să se afle valorile reale nenegative ale lui x care verifică inecuaţia $\sqrt[15]{32^{3x^2-8x}}<\left[0,1(3)\right]^{\log_{7,5}0,5}$.
10. Laturile bazei unui paralelipiped drept au lungimile de $10\,cm$ şi $17\,cm$, iar una dintre diagonalele bazei are $21\,cm$. Diagonala mai mare a paralelipipedului are lungimea $29\,cm$. Să se afle aria totală a paralelipipedului.
11. Să se rezolve în mulţimea $R\times R$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases} y\cdot\log_3 x=24 \\ y-\log_3 x=10 \end{cases}$.
12. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$.

   a) Să se determine parametrii reali a, b, c, d astfel încît funcţia f să admită extreme în punctele de abscise $x=-1$ şi $x=3$, iar dreapta $y=x+3$ să fie asimptotă la graficul funcţiei.

   b) Pentru parametrii determinaţi să se afle aria suprafeţei determinate de graficul funcţiei f, asimptota oblică şi dreptele $x=2$ şi $x=e+1$.

TESTUL 59

1. Determinaţi numerele reale x pentru care este adevărată egalitatea $\log_{2x} 64=2$.
2. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $m(\angle C)=60^\circ$, $[AM]$ este mediană, $AM=8\,cm$. Să se afle perimetrul triunghiului AMC.
3. Să se afle 40% din suma divizorilor naturali ai numărului 12.
4. Determinaţi matricea X din egalitatea $3X+\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Să se rezolve în mulţimea R ecuaţia $x-1=\sqrt{3-x}$.
6. Determinaţi domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\log_\pi x+\dfrac{1}{x-\pi}$.
7. Lungimea unei catete a unui triunghi dreptunghic este cu $5\,cm$ mai mare decît lungimea celeilalte catete şi cu $5\,cm$ mai mică decît lungimea ipotenuzei. Să se afle lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei.
8. Într-o urnă sunt 5 bile albe şi 4 bile negre. Se extrag la întîmplare 3 bile. Să se afle probabilitatea ca printre bilele extrase să fie exact una neagră.
9. Determinaţi valorile reale ale lui x, $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\,\pi\right)$, pentru care $3\sin x=2\cos^2 x$.
10. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x^2}$. Să se afle primitiva funcţiei f pe $(0;+\infty)$, graficul căreia trece prin punctul $A(1;-6)$.
11. Lungimea înălţimii unei piramide patrulatere regulate este egală cu H. Să se afle volumul piramidei, ştiind că muchia laterală a ei are lungimea l.
12. Să se afle valorile parametrului real m pentru care soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $2x^2-5x+m=0$ verifică relaţia $\dfrac{x_2^2}{x_1}+\dfrac{x_1^2}{x_2}=\dfrac{65}{8}$.

TESTUL 60

1. Să se compare numerele $a=\sqrt{\log_4 2}$ şi $b=\sin\frac{\pi}{4}$.
2. Perimetrul unui pătrat este egal cu $40\,cm$. Să se afle aria pătratului.
3. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=ax-5$, unde $a\in R$. Dacă $f(1)=-2$, să se stabilească monotonia funcţiei f.
4. Un fermier a adus la piaţă $420\,kg$ de roşii, din care a vîndut 60%. Ştiind că un kilogram de roşii a fost vîndut cu 7 lei kilogramul, să se afle ce sumă a încasat fermierul pentru marfa vîndută.
5. Să se afle valoarea determinantului $d=\begin{vmatrix} 3i & -2i \\ -i & i \end{vmatrix}$.
6. Să se calculeze $\sin(\pi+2x)$, ştiind că $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
7. Să se afle aria unui trapez isoscel care are bazele de lungimi $10\,cm$ şi $26\,cm$, iar diagonala trapezului este perpendiculară pe latura laterală.
8. Să se rezolve ecuaţia $\frac{1}{2}\log_2(x-3)^2-\log_2(2-x)=1$.
9. Să se afle termenul care nu depinde de a din dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$.
10. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\cos^2 x$. Să se afle primitiva $F(x)$ a funcţiei f, graficul căreia trece prin punctul $A\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right)$.
11. Se consideră funcţia $f:R^*\to R$, $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x}$.
    a) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f în cazul în care $a=0$, $b=1$.
    b) Determinaţi $a,b\in R$ astfel încît graficul funcţiei f să fie tangent dreptei de ecuaţie $y=-2$ în punctul $x=1$.
12. Într-o piramidă triunghiulară regulată aria bazei este de două ori mai mare decît aria secţiunii duse printr-o muchie laterală şi înălţimea piramidei. Să se afle măsura unghiului format de o faţă laterală cu planul bazei piramidei.

TESTUL 61

1. Determinaţi partea întreagă a numărului $a=\log_3 100$.
2. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB]\equiv[AC]$, în care $D\in(BC)$, astfel încît $[BD]\equiv[DC]$ şi $m(\angle ABC)=42^\circ$. Să se afle $m(\angle CAD)$.
3. Fie D_{18} mulţimea divizorilor naturali ai numărului 18 şi D_{24} mulţimea divizorilor naturali ai numărului 24. Să se afle suma elementelor mulţimii $D_{18}\cap D_{24}$.
4. Un teren dreptunghiular are dimensiunile de $6\,m$ şi $15\,m$. Pe 30% din suprafaţa terenului au fost cultivate căpşuni. De pe fiecare metru pătrat s-au recoltat cîte $3\,kg$ de căpşuni. Să se afle cantitatea recoltată de căpşuni.
5. Să se afle numerele reale a şi b pentru care $\frac{1+i}{1-i}=a+bi$.
6. Să se afle valorile întregi ale lui x pentru care numerele $x+6$, $x-2$, $x-6$, în această ordine, formează o progresie geometrică.
7. Să se afle coordonatele punctelor de intersecţie ale graficelor funcţiilor $f:D\to R$, $f(x)=\sqrt{x^2+8x+7}$ şi $g:R\to R$, $g(x)=-3x-1$.
8. Să se afle domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\log_2\left(\log_{\frac{1}{5}}(1+x)\right)$.
9. Laturile bazei unui paralelipiped drept au lungimile de $3\,cm$ şi $8\,cm$, iar măsura unghiului dintre ele este de 60°. Aria laterală a paralelipipedului este egală cu $220\,cm^2$. Să se afle aria totală şi aria secţiunii diagonale mai mici a paralelipipedului.
10. Într-o urnă sunt 6 bile albe şi 4 bile negre. Extragem succesiv 3 bile, fără întoarcerea bilei extrase în urnă. Care este probabilitatea să obţinem, în această ordine: bilă albă, bilă neagră, bilă albă.
11. Lungimea liniei mijlocii a unui trapez isoscel este de $5\,cm$. În trapez poate fi înscris un cerc. Linia mijlocie împarte trapezul în două părţi, raportul ariilor cărora este $7:13$. Să se afle lungimea înălţimii trapezului.
12. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\frac{mx-2}{x^2-nx+2}$, unde $m,n\in R$.
    a) Să se afle valorile parametrilor reali m şi n, astfel încît $x=0$ şi $x=2$ să fie puncte de extrem local pentru funcţia f.
    b) Pentru m şi n aflaţi anterior, să se afle aria figurii plane mărginite de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$.

TESTUL 62

1. Să se afle valoarea expresiei $a = \lg tg\frac{\pi}{4} - \lg\cos 0$.

2. Fie dreptunghiul $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă M este mijlocul laturii $[AB]$ şi aria triunghiului MBC este egală cu $15\,cm^2$, să se afle aria triunghiului AOD.

3. Într-un schimb un muncitor a confecţionat 81 piese, norma fiind de 45 piese. Cu cîte procente a depăşit muncitorul norma?

4. Să se afle modulul numărului complex $z = \frac{8+i}{7-4i}$.

5. Să se aducă la o formă mai simplă expresia $E = \frac{\sin^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x}$.

6. Să se afle $x \in R$ astfel încît $5^{x+9} = 0,04$.

7. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = x + 2$. Să se rezolve ecuaţia $f(f(x)) = f^2(x)$.

8. Să se afle lungimea diagonalei unei prisme patrulatere regulate, ştiind că diagonala bazei este de $8\,cm$, iar diagonala unei feţe laterale este de $7\,cm$.

9. Într-un triunghi isoscel sinusul unghiului de la baza triungiului este de 3 ori mai mare decît cosinusul unghiului de la vîrf. Să se afle sinusul unghiului de la baza triunghiului.

10. Să se rezolve în R inecuaţia $0,5^{\frac{5-5x}{2x-1}} > 1$.

11. Se consideră funcţia $f : D \to R$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.
    a) Să se afle intervalele de monotonie şi punctele de extrem ale funcţiei f.
    b) Să se afle aria figurii plane mărginite de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 2$ şi $x = 3$.

12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care ecuaţia $25^x - 4 \cdot 5^x - 3m + m^2 = 0$ are soluţie unică.

TESTUL 63

1. Să se afle valoarea de adevăr a propoziţiei „$\log_{\frac{1}{3}} 27 > -\pi$”.

2. Diagonala unui dreptunghi are lungimea $6\sqrt{7}\ cm$. Să se afle lungimea cercului circumscris dreptunghiului.

3. Să se arate că numărul $n = \left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 2\sqrt{3}$ este natural.

4. Într-o şcoală învaţă 250 elevi, dintre care 120 nu sunt băieţi. Cîte procente reprezintă numărul băieţilor din numărul total al elevilor şcolii?

5. Să se afle mulţimea valorilor funcţiei $f : R \to R$, $f(x) = \sin x + 3$.

6. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Să se determine numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii A, care conţin elementul 5.

7. Să se afle elementele mulţimii $A = \left\{x \in Z \middle| x^2 - 2x - 8 < 0\right\}$.

8. Se consideră pătratul $ABCD$ de latură a. Punctul M este mijlocul laturii $[BC]$, iar punctul N se află pe latura $[CD]$, astfel încît $CN : ND = 3 : 1$. Să se afle distanţa de la mijlocul segmentului $[AM]$ la punctul N.

9. Se consideră mulţimile $A = \left\{x \in R \middle| 3 \cdot 4^x - 2^{x+2} = 4\right\}$ şi $B = \left\{x \in (0;1) \cup (1;4) \middle| \log_x (4-x) = 1\right\}$. Să se afle suma elemntelor mulţimilor A şi B.

10. Să se afle probabilitatea ca alegînd un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre identice.

11. Se consideră funcţia $f : D \to R$, $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right) - mx$, $m \in R$. Să se afle valorile parmetruluui real m pentru care funcţia f este strict descrescătoare pe D.

12. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară înălţimea are $10\,cm$, iar lungimile laturilor unei baze sunt de $27\,cm$, $29\,cm$, $52\,cm$. Ştiind că perimetrul celeilalte baze este de $72\,cm$, să se afle volumul trunchiului.

TESTUL 64

1. Să se compare numerele $a=\log_{\pi}3$ și $b=\sin\frac{\pi}{2}$.

2. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în care $AC\cap BD=\{O\}$. Dacă $BO=8cm$, să se afle $AC+BD$.

3. Media aritmetică a numerelor 15, 17 și x este egală cu 14. Să se afle media aritmetică a numerelor 17 și x.

4. Să se afle câte submulțimi nevide cu un număr par de elemente are mulțimea $A=\{1;2;3;\ldots;10\}$.

5. Un turist are de parcurs un traseu de $120km$. Știind că în prima oră turistul a parcurs $36km$, să se afle câte procente din întreaga distanță mai are de parcurs turistul.

6. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=ax^2-5x+7$. Dacă $f'(2)=7$, să se afle $f(1)$.

7. Să se afle primitiva $F(x)$ a funcției $f:D\to R$, $f(x)=\frac{2}{x-1}$, graficul căreia trece prin punctul $M(2;\ln 3)$.

8. Un triunghi dreptunghic are catetele de $12cm$ și $5cm$. Să se afle distanța dintre centrele cercurilor înscris și circumscris triunghiului.

9. Să se rezolve în R inecuația $\left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)}\cdot\left(\frac{49}{4}\right)^{2x+5}\geq 1$.

10. Să se determine $m\in R$ pentru care ecuația $6\sin x\cdot\cos x=m-3$ are soluții reale.

11. Raza bazei unui con circular drept este R, iar generatoarea formează cu planul bazei conului un unghi cu măsura de 60°. Să se afle volumul conului.

12. Să se determine $a,b\in R$, astfel încît $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x+1}-ax-b\right)=2\sqrt{2}$.

TESTUL 65

1. Să se calculeze $a=\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[4]{8}$.

2. Să se afle abscisa punctului în care graficul funcției $f:R\to R$, $f(x)=2x-3$ intersectează axa Ox.

3. Știind că $a=\log_2 6$, să se exprime în funcție de a numărul $x=\log_4 12$.

4. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $AB=4cm$, $AC=3cm$. Să se afle $\sin(\angle ABC)$.

5. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x-1}-2}$.

6. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

7. Să se afle tgx, știind că $\sin x-4\cos x=0$.

8. Baza unei piramide este un dreptunghi cu lungimile laturilor de $6cm$ și $8cm$, iar toate muchiile laterale au lungimile de $13cm$. Să se afle lungimea înălțimii piramidei.

9. Să se rezolve în R inecuația $\frac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{2x-x^2+8}}\geq 0$.

10. Să se calculeze $\int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}dx$.

11. Laturile laterale ale unui trapez au lungimile $6cm$ și $10cm$. În trapez poate fi înscris un cerc. Linia mijlocie împarte trapezul în două părți, raportul ariilor cărora este $5:11$. Să se afle lungimile bazelor trapezului.

12. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=-5x\sqrt{3-2x}$. Să se determine parametrii reali a, b, c astfel încît funcția $F(x)=(ax^2+bx+c)\cdot\sqrt{3-2x}$ să fie o primitivă a funcției f.

TESTUL 66

1. Calculaţi $\log_4(64m)$, ştiind că $\log_4 m = -3{,}5$.

2. În triunghiul ABC avem $m(\angle A)=90^\circ$, $m(\angle C)=2\cdot m(\angle B)$. Dacă $BC=12\,cm$, să se afle AC.

3. Un obiect costa 1500 lei. Preţul obiectului a fost micşorat cu 10%, apoi cu 15%. Cît va costa obiectul după cele două ieftiniri?

4. Fie numărul complex $z=(1-i)^3$. Să se calculeze $|z|$.

5. Determinaţi măsura x în grade a unui unghi ascuţit, ştiind că $\dfrac{\sin x+4\cos x}{\cos x}=5$.

6. Să se rezolve ecuaţia $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2x+3}=1$.

7. Fie $F(x)$ primitiva funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=x^2+2x$, care se anulează pentru $x=1$. Să se calculeze $F(2)$.

8. Un trapez isoscel are unghiul ascuţit de 60° şi aria de $24\sqrt{3}\,cm^2$. În trapez este înscris un cerc. Să se afle raza cercului.

9. Să se determine valorile parametrului real a pentru care $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3-i \\ 0 & 3+i & 17 \\ a+2 & a & 18 \end{vmatrix}=-50$.

10. Într-o cutie sunt 100 bilete de loterie, dintre care 6 sunt cîştigătoare. O persoană cumpără 6 bilete. Care este probabilitatea ca un singur bilet să fie cîştigător.

11. Într-un con circular drept cu raza bazei egală cu $5\,cm$ şi înălţimea egală cu $12\,cm$ se înscrie o sferă. Să se afle raza sferei.

12. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$. Să se determine $a,b,c,d\in R$, astfel încît graficul funcţiei să admită asimptotele $x=3$ şi $y=x+2$, iar punctul $A(1;1)$ să se afle pe graficul funcţiei.

TESTUL 67

1. Să se calculeze $b=\left|\log_2\dfrac{1}{8}-\log_3\dfrac{1}{9}-\log_4 2\right|$.

2. Se consideră triunghiul echilateral ABC în care M este mijlocul laturii $[BC]$ şi N este mijlocul laturii $[AC]$. Ştiind că $MN=3\,cm$, să se afle perimetrul triunghiului ABC.

3. Un teren dreptunghiular are dimensiunile de $8\,m$ şi $15\,m$. 30% din suprafaţa lotului a fost cultivată cu roşii, iar restul a fost cultivată cu cartofi. Să se afle suprafaţa cultivată cu cartofi.

4. Se consideră funcţiile $f,g:R\to R$, $f(x)=ax+3$, $g(x)=3x+5$. Să se afle $a\in R$ pentru care graficele celor două funcţii se intersectează într-un punct cu abscisa $x=-2$.

5. Să se afle valoarea determinantului $d=\begin{vmatrix} ctgx & 5^{-x} \\ 5^x & tgx \end{vmatrix}$.

6. Se consideră mulţimea $A=\left\{x\in N\,\middle|\,2^{2x-3}\le 4^7\right\}$. Să se afle probabilitatea ca alegînd la întîmplare două elemente a şi b din mulţimea A, să avem $a+b=5$.

7. Să se rezolve ecuaţia $\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)\cdot\log_2\left(1-x^2\right)=0$.

8. Secţiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala de $4\,cm$. Să se afle aria laterală a cilindrului.

9. Să se rezolve în R inecuaţia $\left|3^x-1\right|\le 1$.

10. În paralelogramul $ABCD$ se cunosc: $AB=5\,cm$, $AD=3\,cm$ şi $m(\angle ADC)=30^\circ$. Să se afle:
   a) Aria paralelogramului.
   b) Distanţa dintre dreptele AB şi CD.
   c) Lungimile diagonalelor paralelogramului.

11. Să se scrie numărul 28 ca o sumă de doi termeni pozitivi, astfel încît suma dintre cubul unui termen şi pătratul celuilalt termen să fie minimă.

12. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=x+\dfrac{ax}{x^2-1}$.
   a) Să se afle valorile parametrului real a, astfel încît funcţia f să admită un punct de extrem în $x=0$.
   b) Pentru a determinat la punctul *a*) să se calculeze aria figurii cuprinse între graficul funcţiei f, asimptota oblică şi dreptele de ecuaţii $x=2$ şi $x=4$.

TESTUL 68

1. Dacă $a=\frac{3}{5}$, să se afle a^{-2}.

2. În triunghiul ABC avem $m(\angle A)=90^\circ$, $m(\angle C)=60^\circ$, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei are lungimea $8cm$. Să se afle lungimea catetei $[AC]$.

3. La o bancă a fost depusă într-un depozit suma de 900 lei cu o dobîndă de $p\%$ pe an. Calculaţi p, ştiind că după un an, în depozit suma este de 1008 lei.

4. Se ştie că $\log_3 2=a$. Să se exprime în funcţie de a numărul $b=\log_3 6$.

5. Să se determine funcţia $f:R\to R$, $f(x)=x^2+ax+b$, ştiind că $f(0)=1$ şi $f(1)=0$.

6. Să se rezolve ecuaţia $C_n^2+3\cdot C_n^1=18$.

7. Un număr natural este cu 7 mai mic decît alt număr natural. Să se afle cele două numere, ştiind că produsul lor este egal cu 330.

8. Să se determine măsura unghiului C al triunghiului ABC, ştiind că $BC=2cm$, $AB=\sqrt{2}\,cm$ şi măsura unghiului BAC este egală cu 45°.

9. Să se afle coordonatele punctelor de pe graficul funcţiei $f:D\to R$, $f(x)=\ln(4x-1)$ în care tangenta la grafic este paralelă la dreapta $y=x$.

10. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei de $2cm$ şi înălţimea de $\sqrt{2}\,cm$. Să se afle distanţa dintre muchia laterală VA şi diagonala BD a bazei piramidei.

11. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.

a) Să se arate că funcţia $F:R\to R$, $F(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, $x\in R$, este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze aria suprafeţei delimitate de dreptele $x=0$, $x=1$, $y=0$ şi graficul funcţiei $g:R\to R$, $g(x)=(2x+1)\cdot f(x)$.

12. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Să se determine coeficienţii a, b, c, d, ştiind că graficul funcţiei trece prin punctele $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(-1;-6)$, iar tangenta la grafic în punctul A are panta egală cu -5.

TESTUL 69

1. Să se calculeze $a=\left(\sqrt[3]{64}\right)^{-1}+\sqrt{\frac{25}{16}}$.

2. Dacă $\frac{3}{5}$ dintr-o cantitate de mere reprezintă $270kg$, să se afle cît reprezintă $\frac{4}{9}$ din cantitatea de mere.

3. Într-un triunghi dreptunghic măsura unui unghi ascuţit este de patru ori mai mare decît măsura celuilalt unghi ascuţit. Să se afle măsurile celor două unghiuri ascuţite ale triunghiului.

4. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 3i\\ 2i & 5\end{pmatrix}$. Să se calculeze $\det A$.

5. Să se afle $tg\alpha$, ştiind că $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ şi $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

6. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-2}$. Să se afle $f(\log_5 3)$.

7. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $AB=AC+6cm$ şi $BC=30cm$. Să se afle lungimea segmentului $[CD]$, unde $[CD$ este bisectoarea unghiului ACB şi $D\in(AB)$.

8. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f:R\to R$, $f(x)=x^2+ax+b$, ştiind că parabola care este reprezentarea grafică a funcţiei are vîrful $V(3;1)$.

9. Să se calculeze $\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx$.

10. Să se determine $a\in R$, astfel încît numerele 2^{a-1}, 2^{-a+2}, $2^{a+1}-1$ în această ordine să fie în progresie aritmetică.

11. Să se afle valorile parametrului real a pentru care funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x$ este strict crescătoare pe R.

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este o prismă patrulateră regulată ($ABCD$ şi $A_1B_1C_1D_1$ sunt bazele prismei). Se ştie că aria dreptunghiului AD_1C_1B este egală cu $4\sqrt{3}\,cm^2$. Să se afle lungimea laturii bazei prismei pentru care volumul ei va fi maxim.

TESTUL 70

1. Să se afle cel mai mare element al mulțimii $A=\left\{\log_{\frac{1}{2}}5;\ \log_{\frac{1}{2}}3;\ \log_{\frac{1}{2}}7\right\}$.

2. Fie triunghiul ABC cu $[AB]\equiv[AC]$ și $AD\perp BC$, $D\in(BC)$. Dacă $m(\angle ABC)+m(\angle ACB)=120^\circ$, să se afle $m(\angle CAD)$.

3. Fie D_{24} mulțimea divizorilor naturali ai numărului 24. Să se afle probabilitatea ca alegînd un număr din mulțimea D_{24}, acesta să fie număr impar.

4. Un turist a parcurs în prima oră $12\,km$, ceea ce reprezintă 30% din întregul traseu. Cîți kilometri mai are de parcurs turistul?

5. Să se calculeze determinantul $d=\begin{vmatrix}1 & i\\ 2i-1 & 3\end{vmatrix}$.

6. Fie numărul complex $z=\dfrac{3+2i}{1+3i}$. Să se afle $z\cdot\bar{z}$.

7. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt egale cu $15\,cm$, $50\,cm$ și $36\,cm$. Să se afle muchia cubului care are volumul egal cu volumul paralelipipedului.

8. Să se rezolve în R inecuația $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3}<0{,}81^{-2x}$.

9. Să se afle coordonatele punctelor de pe graficul funcției $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ în care tangentele la graficul funcției formează cu semiaxa pozitivă a axei absciselor un unghi cu măsura de 135°.

10. Catetele unui triunghi dreptunghic au lungimile de $12\,cm$ și $6\,cm$. Să se afle lungimea razei cercului care este tangent la catete și are centrul pe ipotenuza triunghiului.

11. Să se afle numerele reale $a>1$ pentru care $\int_1^a(a-4x)\,dx\geq 6-5a$.

12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care ecuația $(a-2)x^2-2ax+a+3=0$ are soluții pozitive.

TESTUL 71

1. Să se aflè valoarea de adevăr a propoziției "$\log_2\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$".

2. Se consideră triunghiul ABC în care $[AA_1]$ și $[BB_1]$ sunt mediane, $A_1\in(BC)$, $B_1\in(AC)$. Dacă $A_1B_1=8\,cm$, să se afle AB.

3. În clasa a XII-a a unei școli sunt 25 elevi. $\dfrac{3}{5}$ din numărul elevilor clasei sunt fete. Să se afle raportul dintre numărul băieților și numărul fetelor acestei clase.

4. Să se calculeze $\sin 2x$, știind că $\sin x=0{,}8$ și $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

5. Să se rezolve în $R\times R$ sistemul de ecuații $\begin{cases}8^x=10y\\ 2^x=5y\end{cases}$.

6. Să se rezolve în R ecuația $2^{\frac{3}{\log_3 x}}=\dfrac{1}{64}$.

7. Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,3,\ldots,9\}$. Să se afle numărul submulțimilor mulțimii A care au 5 elemente, dintre care exact două sunt numere naturale pare.

8. Fie funcția $f:(0;+\infty)$, $f(x)=(x+1)\cdot\ln x-2(x-1)$.

   a) Să se rezolve ecuația $f''(x)=0$.

   b) Să se calculeze $I=\int_1^2 f(x)\,dx$.

9. Dintr-un punct de pe un cerc sunt duse două coarde de lungimi $9\,cm$ și $17\,cm$. Distanța dintre mijloacele celor două coarde este egală cu $5\,cm$. Să se afle lungimea razei cercului.

10. Se consideră ecuația de gradul întîi în necunoscuta x, $mx-1=m+x$. Să se afle probabilitatea ca ecuația să aibă o soluție întreagă atunci cînd m ia o valoare oarecare întreagă din intervalul $[-4;5]$.

11. Fie o progresie aritmetică cu 20 de termeni, în care al nouălea și al unsprezecelea termen sunt respectiv cea mai mare și cea mai mică soluție a ecuației $\dfrac{1}{2}\cdot\lg 2+\lg\sqrt{x^2+4x+5}=\dfrac{1}{2}\cdot\left[\lg(x^2-4x+5)+1\right]$. Să se calculeze suma termenilor progresiei.

12. Într-o piramidă patrulateră regulată este înscrisă o sferă de rază $1\,cm$. Să se afle lungimea înălțimii piramidei, astfel încît volumul ei să fie minim.

TESTUL 72

1. Să se calculeze $a=4^{2016m}\cdot 4^{-2012m}$ pentru $m=\frac{3}{4}$.

2. Diagonala unei feţe a unui cub are lungimea $2\sqrt{3}\,cm$. Să se afle aria totală a cubului.

3. Un costum costa 1200 lei. După o mărire de preţuri costumul costă 1380 lei. Cu cîte procente s-a mărit preţul costumului?

4. Să se rezolve în R ecuaţia $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}=0$.

5. Să se calculeze valoarea expresiei $E=\frac{2+\sin x\cdot\cos x}{1+5\cos^2 x}$, ştiind că $tgx=2$.

6. Să se rezolve în R inecuaţia $81^x\le\frac{1}{3}\cdot 27^{2x+1}$.

7. Într-un paralelogram o latură are lungimea de $2\sqrt{3}\,cm$, iar una dintre diagonale are $8cm$. Să se afle sinusul unghiului dintre diagonalele paralelogramului, ştiind că cealaltă diagonală formează cu latura dată un unghi cu măsura de 60°.

8. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=x^2-7x+3$ care este paralelă la dreapta $5x+y-3=0$.

9. Să se rezolve în R ecuaţia $\sqrt{13+\frac{4}{\log_x 3}}=2\log_3\left(3\sqrt{x}\right)$.

10. Să se afle raportul dintre volumul unui cub şi volumul tetraedrului regulat, lungimea muchiei căruia este egală cu lungimea diagonalei unei feţe a cubului.

11. Să se rezolve în R ecuaţia $\int_{-1}^{x}\left(8t^2+\frac{28}{3}t+4\right)dt=\frac{1,5x+1}{\log_{x+1}\sqrt{x+1}}$.

12. Să se afle valorile parametrului real a pentru care suma numerelor x şi y este maximă, unde numerele x şi y reprezintă soluţia $(x;\,y)$ a sistemului de ecuaţii $\begin{cases} x-2y=a^2 \\ 2x-y=1-a \end{cases}$.

TESTUL 73

1. Să se afle opusul numărului $a=\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)^{-2}$.

2. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în care $AC\cap BD=\{O\}$, punctul M este mijlocul laturii $[BC]$, iar punctul N este mijlocul laturii $[CD]$. Dacă $AC=12\,cm$, să se afle MN.

3. Un elev a citit 100 pagini dintr-o carte, ceea ce reprezintă 40% din numărul total de pagini a cărţii. Să se afle cîte pagini are cartea.

4. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=x^2-5x$. Să se rezolve în R ecuaţia $f'(x)=7$.

5. Fie A mulţimea numerelor naturale mai mici decît 30, care prin împărţirea la 3 dau restul 2. Să se afle probabilitatea ca alegînd un element al mulţimii A, acesta să fie număr prim.

6. Un punct material se mişcă după legea $s(t)=t^3-\frac{9}{t}$. Să se afle viteza punctului în momentul $t=3$ secunde (în m/s).

7. Să se afle aria unui triunghi dreptunghic care are o catetă de $13cm$ şi înălţimea corespunzătoare ipotenuzei de $12\,cm$.

8. Să se rezolve în R inecuaţia $x^2-|x|-12<0$.

9. Să se afle valorile parametrilor reali a şi b pentru care polinomul $P(X)=2X^4+3X^3-aX^2+bX-3$ se divide cu $X-3$, iar prin împărţirea la $X-2$ dă un rest egal cu 5.

10. Să se calculeze integrala $I=\int_0^{\sqrt{5}}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

11. Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu baza de $12\,cm$ şi latura laterală de $10\,cm$. Toate feţele laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri cu măsura de 45°. Să se afle lungimea înălţimii piramidei.

12. Se consideră ecuaţia $x^2-2(m+1)x+3m-1=0$. Să se calculeze $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right)^m$, unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei date.

TESTUL 74

1. Să se afle valoarea expresiei $E=\log_2 8+\sqrt[3]{27}-\cos\pi$.

2. Fie triunghiul ABC în care A_1 este mijlocul laturii $[BC]$ şi B_1 este mijlocul laturii $[AC]$. Dacă $AB=17cm$, să se afle lungimea segmentului $[A_1B_1]$.

3. Distanţa dintre localităţile A şi B este de $270km$. Dacă un automobilist a parcurs 30% din întreaga distanţă, să se afle cîţi kilometri mai are de parcurs automomobilistul pînă la destinaţie.

4. Să se aducă la o formă mai simplă expresia $E=\dfrac{\cos^4 x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin^2 x}$.

5. Să se afle cite submulţimi cu cel mult 3 elemente are mulţimea $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

6. Să se rezolve în R ecuaţia $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$.

7. Un punct situat pe ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egal depărtat de catetele triunghiului şi împarte ipotenuza în două segmente, lungimile cărora sunt de $30cm$ şi $40cm$. Să se afle lungimile catetelor triunghiului.

8. Să se afle toate soluţiile ecuaţiei $4^x-3\cdot 2^x+2=0$ care aparţin domeniului maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

9. Se consideră funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$.

   a) Să se afle punctele de pe graficul funcţiei f în care tangenta la grafic formează cu semiaxa pozitivă a axei absciselor un unghi cu măsura de 135°.
   b) Să se scrie ecuaţiile tangentelor la graficul funcţiei în aceste puncte.

10. Să se determine $a\in R$ pentru care $\int_a^{a+1}(3x^2+1)dx=8$.

11. Raza bazei unui con circular drept este egală cu R, iar aria laterală este egală cu suma ariilor bazei şi a secţiunii axiale a conului. Să se afle volumul conului.

12. Să se determine valorile parametrului $m\in R$, astfel încît inegalitatea $m\cdot 4^x+$ $+4\cdot(m-1)\cdot 2^x+m>1$ este adevărată pentru orice $x\in R$.

TESTUL 75

1. Să se afle semnul expresiei $E=|\sin x|-\log_2 3$.

2. Punctele A şi C sunt diametral opuse în cercul $C(O;R)$. Dacă punctul B se află pe cerc şi $BO=7,5cm$, să se afle AC.

3. De la o bancă s-a împrumutat suma de 15000 lei pentru un an. La sfîrşitul anului băncii i s-au restituit 16125 lei. Care a fost procentul dobînzii?

4. Fie numărul $a=\dfrac{2}{2\sqrt{5}+4}+\dfrac{2}{2\sqrt{5}-4}$. Să se afle a^{-2}.

5. Să se calculeze determinantul $d=\begin{vmatrix}3+i\sqrt{5} & 2+\sqrt{3}\\ 2-\sqrt{3} & 3-i\sqrt{5}\end{vmatrix}$.

6. Să se afle cea mai mică soluţie a ecuaţiei $\log_3(x+1)^2+\log_3|x+1|=6$.

7. Să se rezolve în R ecuaţia $\dfrac{2x-8}{\sqrt{6-x}}+\sqrt{6-x}=3$.

8. Lungimea muchiei laterale a unei prisme patrulatere regulate este de două ori mai mare decît lungimea laturii bazei. Să se afle volumul prismei, ştiind că aria laterală a ei este egală cu $128cm^2$.

9. Pe un raft sunt 10 cărţi, dintre care cîteva sunt de matematică. Probabilitatea ca două cărţi luate la întîmplare de pe raft să fie de matematică este egală cu $\dfrac{1}{3}$. Să se afle cîte cărţi de matematică sunt pe raft.

10. În triunghiul ABC este înscris un cerc care este tangent la latura AB în punctul D şi la latura BC în punctul E, astfel încît $BD:AD=1:2$ şi $BE:CE=\dfrac{1}{3}$. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului.

11. Să se afle aria figurii mărginite de axa absciselor şi de graficul funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=|x|\cdot(x-1)$.

12. Fie funcţia $f:R\setminus\{-1\}\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2+kx+m}{x+1}$, unde $k,m\in R$. Pentru care valori ale parametrilor k şi m dreapta de ecuaţie $y=x+1$ este asimptotă pentru graficul acestei funcţii, iar punctul de abscisă $x_0=1$ este punct de extrem local?

SOLUȚII

TESTUL 26

1. $a=3,5$. **2.** $A=36cm^2$. **3.** 12 bilete. **4.** $a=0$, $b=-1$. **5.** $D_f=R\setminus\{-4\}$. **6.** $T_{17}=C_{70}^{16}a^{10}$. **7.** $\frac{36}{\sqrt{10}}cm$, $\frac{12}{\sqrt{10}}cm$, $\frac{18}{\sqrt{10}}cm$, $3\sqrt{10}\,cm$. **8.** $x=\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{4}{5}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. **9.** $A=\frac{2}{3}(u.p)$. **10.** $S=(-3;1)$. **11.** $a=2$, $b=-3$. **12.** $A_l=84\sqrt{2}\,cm^2$.

TESTUL 27

1. $a=5$. **2.** $P=24cm$. **3.** $180m^2$. **4.** Laturile au lungimile $6cm$, $8cm$, $10cm$. $A=24cm^2$. **5.** 20 de zile. **6.** $m\in\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **7.** $S=\{1;2\}$. **8.** *a)* $P=48cm$, $A=108cm^2$; *b)* $P=42cm$, $A=81cm^2$. **9.** $p=\frac{9\cdot 8!}{10!}=\frac{1}{10}$. **10.** $E=-\frac{2}{\sin\alpha}$. **11.** $A_l=12\left(2+\sqrt{3}\right)cm^2$. **12.** $a=8$, $b=2$.

TESTUL 28

1. 15. **2.** $V=512cm^3$. **3.** $a=1$. **4.** $E=25$. **5.** $z=3+i$. **6.** $A_{14}^5=240240$ moduri. **7.** *a)* $A=16\sqrt{3}\,cm^2$; *b)* $tg(\angle CBM)=\frac{\sqrt{3}}{7}$. **8.** $S=\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **9.** $\frac{1}{24}$. **10.** $n=10$. **11.** $h=2cm$. **12.** *a)* $a=b=1$; *b)* $A=4\ln 2(u.p)$.

TESTUL 29

1. $\sqrt{3}$. **2.** $DC=5cm$. **3.** $a=\frac{1}{2}$. **4.** 54 de numere. **5.** $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$. **6.** $18km$. **7.** $P=24cm$. **8.** $S=\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,k\in Z\right\}$. **9.** $T_5=C_8^4a^3$. **10.** $a=3$. **11.** $V=\frac{\sqrt{3}}{2}m^3$. **12.** *a)* $a=6$, $b=1$; *b)* $a=(30-32\ln 2)(u.p)$.

TESTUL 30

1. $a=b$. **2.** $A=25(u.p)$. **3.** $a=-4$, $b=-2$. **4.** 250 de pagini. **5.** 48 de permutări. **6.** $D=[1;3]$. **7.** $S=\{27\}$. **8.** $AF=4,5cm$. **9.** $z=\frac{3}{2}-2i$. **10.** $x_1=-\pi$, $x_2=0$. **11.** $A_l=\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$. **12.** $a\in(-\infty;-3)\cup\left(3;\frac{29}{7}\right)$.

TESTUL 31

1. $a=8$. **2.** $A=36\sqrt{3}\,cm^2$. **3.** 280 lei. **4.** $|z|=5$. **5.** $-\frac{1}{8}$. **6.** $S=\left(-\frac{3}{2};-\frac{23}{16}\right)$. **7.** $r=1cm$. **8.** $E_{min}=1$ pentru $x=2$ și $y=-3$. **9.** Fie A - evenimentul că echipa este formată numai din băieți, iar B - evenimentul că echipa va conține și fete. Atunci $p(B)=1-p(A)=\frac{13}{14}$. **10.** $a=-5$. **11.** $V=6cm^3$. **12.** $a\in(1;4)$.

TESTUL 32

1. $\log_{\frac{1}{2}}7$. **2.** 50%. **3.** $E=1$. **4.** 72 permutări. **5.** $z=1+i$. **6.** $x=e$. **7.** $P=168cm$. **8.** 4 bile roșii. **9.** $S=(0;2)\cup(32;+\infty)$. **10.** $a=-2$. **11.** $a=3$. **12.** $24\pi\,cm^3$.

TESTUL 33

1. $a=1$. **2.** 25° și 65°. **3.** 1090 lei. **4.** Cu cartofi - $270m^2$, cu roșii - $180m^2$. **5.** $1-11i$. **6.** $-\frac{1}{56}$. **7.** $P=\frac{1}{10}$. **8.** $AC=16\frac{2}{3}cm$. **9.** $S=\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z\right\}$. **10.** $f'(1)=4$. **11.** $F(x)=6\sin\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\cos 5x-\frac{14}{5}$. **12.** $A_t=906cm^2$.

TESTUL 34

1. $\sqrt{4-\sqrt{15}}$. **2.** $BD=7cm$. **3.** 13350 lei. **4.** $a=10$. **5.** $x=2$, $y=0$. **6.** $P=\frac{1}{25}$. **7.** $A=4630,5cm^2$. **8.** $4y=x+5$. **9.** $S=(-8;0)$. **10.** $a\in(-\infty;-1]$. **11.** $A_l=10\sqrt{19}\,cm^2$. **12.** $m\in\left(1;\frac{4}{3}\right)$.

TESTUL 35

1. $a=2$. **2.** $P=32cm$. **3.** $120km$. **4.** $P=\frac{2}{5}$. **5.** $z=-2048+2048\sqrt{3}i$. **6.** $E(a)=1$. **7.** $E(1)=-1$. **8.** $2\sqrt{5}\,cm$ și $4\sqrt{5}\,cm$. **9.** *a)* $T_5=C_{40}^4\frac{x^{16}}{y^2}$; *b)* 7 termeni; *c)* Nu există. **10.** $x=-2$. **11.** $A=\frac{8}{3}(u.p)$. **12.** $V=12cm^3$.

TESTUL 36

1. $a=-5$. **2.** $BM=8cm$. **3.** Dan va avea 436 lei, Andrei va avea 535 lei. **4.** $\mathrm{Re}\,z=9$. **5.** În 31 de moduri. **6.** $S=\{-3;0\}$. **7.** Dreapta $y=x+1$ este asimptotă oblică, dreapta $x=1$ este asimptotă verticală. **8.** $P=3a+h+\sqrt{a^2-h^2}$. **9.** $S=\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z\right\}$. **10.** $P=\frac{7}{41}$. **11.** $V=12cm^3$. **12.** $a\in(-\infty;-2)$.

TESTUL 37

1. $\log_y x=\frac{5}{2}$. **2.** 12,5%. **3.** I număr – 35, al II-lea număr – 42. **4.** $a=2$, $b=-1$. **5.** $P=\frac{1}{9}$. **6.** $T_5=C_7^4\cdot\frac{x^4}{16}$. **7.** $f:R\to R$, $f(x)=2x^3-19x^2+56x-48$. **8.** $AB=BC=91cm$, $AC=168cm$. **9.** $S=\left\{1\pm\sqrt{10};1\pm\sqrt{65}\right\}$. **10.** $\frac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$. **11.** $m\in(1;4)$. **12.** $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{2}$.

TESTUL 38

1. $a=-15$. **2.** $AC=12cm$. **3.** 560 lei. **4.** $a\in\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **5.** $P=\frac{1}{10}$. **6.** $E_{min}=4$ pentru $x=-3$, $y=0$. **7.** $S=\{(\log_2 3;\log_3 4);(2;1)\}$. **8.** $2cm$, $2\sqrt{3}\,cm$. **9.** $a=-3$. **10.** $S=\left\{3;3+\sqrt{2}\right\}$. **11.** Dreapta $x=2$ este asimptotă verticală, dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$, dreapta $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$. **12.** $192cm^2$.

TESTUL 39

1. $x=125$. **2.** $36\sqrt{2}\,cm^2$. **3.** 14 fete și 10 băieți. **4.** $a=3$. **5.** $f'(0)=\frac{3}{e}$. **6.** $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **7.** $\frac{1}{4}$. **8.** $A=150cm^2$. **9.** $a=-1$. **10.** $x=\log_2 5$. **11.** $d=10cm$. **12.** $a\in\left(\frac{4}{5};1\right)\cup(1;+\infty)$.

TESTUL 40

1. $E=3$. **2.** $D=10cm$. **3.** $P=88m$. **4.** $k=6$. **5.** $x=\frac{13}{14}$. **6.** $S=(2;+\infty)$. **7.** $P=16cm$. **8.** $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$. **9.** Funcția este impară. **10.** *a)* $a=b=1$; *b)* $x=-1$ este punct de maxim, $x=3$ este punct de minim. **11.** $h=4cm$. **12.** $D=8$.

TESTUL 41

1. $a=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **2.** $A=25\pi\,cm^2$. **3.** $60\,km$. **4.** $f:R\to R$, $f(x)=-4x+7$. **5.** $S=(-4;-1)\cup(1;4)$. **6.** $m=4$. **7.** $AB=\sqrt{7}\,cm$. **8.** $S=\{8;728\}$. **9.** f este strict descrescătoare pe $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ și strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right)$. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ este punct de minim. **10.** $\frac{1}{2}$. **11.** $872\,cm^3$. **12.** $m=2$.

TESTUL 42

1. $A_3=0$. **2.** $8\sqrt{2}\,cm$. **3.** $60\,ha$. **4.** $BC=5\sqrt{2}\,cm$. **5.** $k=6$. **6.** $x=\sqrt[3]{\frac{10}{7}}$. **7.** $S=\left(\frac{1}{2};1\right)$. **8.** $A=96\,cm^2$. **9.** $f:R\to R$, $f(x)=x^3+x^2+x+2$. **10.** $\{25;36\}$. **11.** $36\sqrt{2}\,cm^3$. **12.** $A=\frac{1}{3}(u.p)$.

TESTUL 43

1. $a=6$. **2.** $36\,cm^2$. **3.** 24 și 36. **4.** 60 de numere. **5.** $\sin\alpha=\frac{24}{25}$. **6.** $x=-\frac{5}{4}$. **7.** Lungimea laturii este de $12\,cm$, lungimea înălțimii este de $16\,cm$. **8.** $p=\frac{7}{69}$. **9.** $S=\left(\frac{2}{3};1\right)$. **10.** $m\in(-\infty;-1]$. **11.** 30°.

TESTUL 44

1. $a=b$. **2.** $m(\angle AOC)=84^\circ$. **3.** $460\,kg$. **4.** $f:R\to R$, $f(x)=2x-3$. **5.** $x=\frac{1}{2}$. **6.** $T_5=70a^3$. **7.** $14\,cm$. **8.** $f'(1)=2$. **9.** $S=[0;4)$. **10.** $a=-4$, $b=6$. **11.** $d=29{,}6\,cm$. **12.** $m\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

TESTUL 45

1. $a=8$. **2.** $A=\frac{81}{4}cm^2$. **3.** 1650 lei. **4.** $a=1$. **5.** $P=\frac{1}{5}$. **6.** $x=3$. **7.** $9{,}5\,cm$. **8.** $E_{min}(a;b)=3$ pentru $a=2$, $b=3$. **9.** $a\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}$. **10.** $S=(10;+\infty)$. **11.** $z=0$. **12.** $A=8\left(11+\sqrt{34}\right)cm^2$.

TESTUL 46

1. $a=1$. **2.** $AB=5\,cm$, $BC=7\,cm$, $AC=9\,cm$. **3.** 40%. **4.** $f(-2)=-1$. **5.** 16 submulțimi. **6.** $P=85\,cm$. **7.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **8.** $x=1$. **9.** $f_{max}=1$. **10.** $V=\frac{abS}{4(a+b)}$. **11.** $S=\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup(1;3)$. **12.** $a=-4$, $b=-\frac{1}{2}$ și $a=-4$, $b=\frac{1}{2}$.

TESTUL 47

1. $a<b$. **2.** $A=50\pi\,cm^2$. **3.** 50 lei. **4.** $a=-2$, $b=5$. **5.** $n=5$. **6.** $m=2$, $n=8$. **7.** $S=\{6\}$. **8.** 120°. **9.** 35 de moduri. **10.** $a\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. **11.** $a=2$. **12.** $V=\frac{1}{9}\cdot S\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{27}\,(u.c)$.

TESTUL 48

1. 162. **2.** $a=1$. **3.** $A=\{\log_3 2\}$. **4.** $x=\frac{1}{2}$. **5.** $P=6\,cm$, $A=1{,}2\,cm^2$. **6.** $S=(0;9)$. **7.** $a=1$. **8.** $p=\frac{17}{21}$. **9.** $a=-\frac{6}{25}$, $b=-\frac{17}{25}$. **10.** $S=(0;1)\cup[2;4]$. **11.** *a)* $A_l=80\sqrt{2}\,\pi\,cm^2$, $V=\frac{1216\pi}{3}cm^3$; *b)* $H=12\,cm$. **12.** $y=4x-2$.

TESTUL 49

1. $a=-5$. **2.** $A_t=18\,cm^2$. **3.** $m\in\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right)$. **4.** 270 lei. **5.** $E=\frac{1}{4}$. **6.** $S=\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$. **7.** $12\,cm$ și $24\,cm$. **8.** $1-\cos 1$. **9.** $S=\{1;4\}$. **10.** $A=36\,cm^2$. **11.** $S=5$. **12.** $m=4$. $x=2$ este punct de maxim.

TESTUL 50

1. $a^{-4}=25$. **2.** $AB+AC=24\,cm$. **3.** $a=2$. **4.** $D=[-3;1]$. **5.** $X=\begin{pmatrix}2 & -\frac{8}{3} & \frac{10}{3}\\ -\frac{20}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3}\end{pmatrix}$. **6.** $f_{max}=f(0)=8$, $f_{min}=f(2)=4$. **7.** $5{,}2\,cm$. **8.** $S=\{-6;0\}$. **9.** $S_8=1020$. **10.** *a)* $a=3$; *b)* $I=\frac{9}{2}$. **11.** $V=\frac{15625\pi}{48}cm^3$. **12.** $a\in\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{3}};1\right\}$.

TESTUL 51

1. $a>b$. **2.** $m(\angle C)=60^\circ$. **3.** Cu 25%. **4.** $f(3)=1$. **5.** $x=9$. **6.** $m=2$. **7.** $r=5\,cm$. **8.** $x=\frac{11}{3}$. **9.** $S=\left\{(3;1);\left(\frac{5}{3};\frac{11}{3}\right)\right\}$. **10.** $V=65\,cm^3$. **11.** $a\in[-9;-1]\cup[0;1]$. **12.** *a)* $a=b=1$; *b)* $A=4\ln 2\,(u.p)$.

TESTUL 52

1. $x=a+1$. **2.** 36° și 36°. **3.** $125\,kg$. **4.** $a=17$. **5.** $p=\frac{3}{17}$. **6.** $S=\{-1;2\}$. **7.** $4\,cm$ și $12{,}5\,cm$. **8.** $n=35$. **9.** $m\in R\setminus\{2;3\}$. **10.** $x=-1$ este punct de maxim, $x=0$ este punct de minim. **11.** $A_l=41{,}6\pi\,cm^2$, $V=78{,}4\pi\,cm^3$. **12.** $m\in(-7;1)$.

TESTUL 53

1. $m=4$, $A>B$. **2.** $P=40\,cm$. **3.** 150 de pagini. **4.** Adevărată. **5.** $A\cup B=\{-2;-1;0;1;2;3\}$, $A\cap B=\{-1;0;1;2\}$. **6.** $E_{min}=-2$. **7.** $9\,cm$, $12\,cm$, $15\,cm$. **8.** $A(1;-3)$. **9.** $S=\left\{\left(4;-\sqrt{2}\right),\left(4;\sqrt{2}\right)\right\}$. **10.** $S=\left\{-arctg\frac{5}{3}+\pi k,\frac{\pi}{4}+\pi k,k\in Z\right\}$. **11.** $\frac{63\sqrt{2}}{2}cm^2$. **12.** $a\in\left[\frac{1}{16};1\right]$.

TESTUL 54

1. $a=b$. **2.** $12\,cm$, $16\,cm$, $17\,cm$. **3.** 5000 lei. **4.** $a=24$. **5.** $D=7$. **6.** $x=5$. **7.** $A=240\,cm^2$. **8.** $p=\frac{3}{5}$. **9.** *a)* $D_f=(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$; *b)* -2; *c)* $S=\{1;5\}$. **10.** $A=\left(\ln 2-\frac{7}{24}\right)(u.p)$. **11.** $d=\frac{60\sqrt{97}}{97}cm$. **12.** $a\in(-\infty;0)$.

TESTUL 55

1. $a=0$. **2.** $3360\,kg$ de mere. **3.** 135°. **4.** $p=\frac{1}{300}$. **5.** $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$. **6.** $A_s=200\,cm^2$. **7.** $x\in\{1;2\}$. **8.** $\frac{7}{9}$. **9.** $x\in\left\{\frac{1}{10};100\right\}$. **10.** $D_f=(0;1)$. **11.** $A=\frac{15\sqrt{3}}{2}cm^2$. **12.** $a=\frac{1}{\ln 2}$, $b=\frac{7\cdot(\ln^2 2-1)}{3\ln^2 2}$.

TESTUL 56

1. $a=-32$. **2.** $m(\angle BAD)=20^\circ$. **3.** $21{,}6\,cm$. **4.** $E=-2$. **5.** $p=\frac{3}{10}$. **6.** $S=\{10\}$. **7.** $S=(-3;-1]\cup[1;+\infty)$. **8.** $A_t=288\,cm^2$. **9.** $S=\left(-1;\frac{2}{3}\right)$. **10.** $x\in\left\{\frac{1}{10^4};10\right\}$. **11.** $A_l=50\pi\,cm^2$, $V=\frac{125\sqrt{3}\,\pi}{3}cm^3$. **12.** $a=1$.

TESTUL 57

1. $a=b$. **2.** $m(\angle CBA)=50^\circ$. **3.** 640 lei. **4.** $r=2$. **5.** $\sin x=\frac{4}{5}$. **6.** $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y=-3$. **7.** $y=x+1$. **8.** $S=\{2\}$. **9.** $R=6{,}25cm$. **10.** $A=\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. **11.** $V=24cm^3$. **12.** $a\in\{0;-2\}$.

TESTUL 58

1. $a=2$. **2.** $m_a=4\frac{2}{3}$. **3.** $A=16cm^2$. **4.** $p=\frac{1}{25}$. **5.** $126km$. **6.** $S=\{-1;1;-2i;2i\}$. **7.** $A=20\sqrt{3}cm^2$. **8.** $x\in\{\pi;3\pi\}$. **9.** $x\in[0;3)$. **10.** $A_t=1416cm^2$. **11.** $\left(\frac{1}{3^{12}};-2\right)$, $(9;12)$. **12.** *a)* $a=1$, $b=2$, $c=1$, $d=-1$; *b)* $A=4(u.p)$.

TESTUL 59

1. $x=4$. **2.** $P_{AMC}=24cm$. **3.** 11,2. **4.** $X=\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\end{pmatrix}$. **5.** $S=\{2\}$. **6.** $D_f=(0;\pi)\cup(\pi;+\infty)$. **7.** $12{,}5cm$. **8.** $p=\frac{10}{21}$. **9.** $x=\frac{5\pi}{6}$. **10.** $F(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{8}{x}+\frac{11}{6}$; **11.** $V=\frac{2H\left(l^2-H^2\right)}{3}$. **12.** $m=2$.

TESTUL 60

1. $a=b$. **2.** $A=100cm^2$. **3.** Funcţia f este strict crescătoare pe R. **4.** 1764 lei. **5.** $d=-1$. **6.** 1 sau -1. **7.** $A=216cm^2$. **8.** $S=\{1\}$. **9.** $T_9=C_{17}^8$. **10.** $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$. **11.** *a)* $x_1=-1$, $x_2=1$; *b)* $a=-4$, $b=1$. **12.** 60°.

TESTUL 61

1. $[a]=4$. **2.** $m(\angle CAD)=48^\circ$. **3.** $S=12$. **4.** $81kg$. **5.** $a=0$, $b=1$. **6.** $x=10$. **7.** $A\left(-\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$. **8.** $D=(-1;0)$. **9.** $A_t=\left(220+24\sqrt{3}\right)cm^2$, $A_s=70cm^2$. **10.** Fie evenimentele: A - prima bilă este albă, B - a doua bilă este neagră, C - a treia bilă este albă. Avem $p(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $p(B)=\frac{4}{9}$, $p(C)=\frac{5}{8}$. Atunci $p=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{1}{6}$. Deci, $p=\frac{1}{6}$. **11.** $H=4cm$. **12.** *a)* $m=2$, $n=2$; *b)* $A=\ln 2(u.p)$.

TESTUL 62

1. $a=0$. **2.** $A_{AOD}=15cm^2$. **3.** Cu 80%. **4.** $|z|=1$. **5.** $E=tg^2x$. **6.** $x=-11$. **7.** $S=\{-3;0\}$. **8.** $d=9cm$. **9.** $\sin\alpha=\frac{1+\sqrt{73}}{12}$. **10.** $S=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$. **11.** *a)* f este crescătoare pe $(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, f este descrescătoare pe $\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;+\infty)$. $x=-\frac{1}{2}$ este punct de maxim, $f_{\max}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$; *b)* $A=\ln\frac{9}{8}(u.p)$. **12.** $m\in\{-1;4\}\cup[0;3]$.

TESTUL 63

1. Adevărată. **2.** $L=6\sqrt{7}\,\pi\,cm$. **3.** $n=4\in N$. **4.** 52%. **5.** $E=[2;4]$. **6.** 36 submulţimi. **7.** $A=\{-1,0,1,2,3\}$. **8.** $d=\frac{a\sqrt{10}}{4}$. **9.** $S=3$. **10.** $p=\frac{27}{100}$. **11.** $m\in(1;+\infty)$. **12.** $V=1900cm^3$.

TESTUL 64

1. $a<b$. **2.** $AC+BD=32cm$. **3.** $m_a=13{,}5$. **4.** 511 submulţimi. **5.** 70%. **6.** $f(1)=5$. **7.** $F(x)=2\ln|x-1|+\ln 3$. **8.** $\frac{\sqrt{65}}{2}cm$. **9.** $S=\left(-\infty;\frac{31}{2}\right]$. **10.** $m\in[0;6]$. **11.** $V=\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. **12.** $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$.

TESTUL 65

1. $a=4$. **2.** $x=\frac{3}{2}$. **3.** $x=\frac{a+1}{2}$. **4.** $\sin(\angle ABC)=0{,}6$. **5.** $D_f=[1;5)\cup(5;+\infty)$. **6.** 9900 moduri. **7.** $tgx=4$. **8.** $h=12cm$. **9.** $S=(1;2]$. **10.** $\frac{1}{3}\ln 2$. **11.** $2cm$ şi $14cm$. **12.** $a=-2$, $b=1$, $c=3$.

TESTUL 66

1. $-0{,}5$. **2.** $AC=6cm$. **3.** 1147,5 lei. **4.** $|z|=2\sqrt{2}$. **5.** $x=45^\circ$. **6.** $S=\{-3\}$. **7.** $F(2)=5\frac{1}{3}$. **8.** $r=3cm$. **9.** $a=3$. **10.** $\frac{C_6^1\cdot C_{94}^5}{C_{100}^6}$. **11.** $r=\frac{10}{3}cm$. **12.** $a=1$, $b=-1$, $c=-2$, $d=-3$.

TESTUL 67

1. $b=\frac{3}{2}$. **2.** $P=18cm$. **3.** $84m^2$. **4.** $a=2$. **5.** $d=0$. **6.** $p=\frac{1}{6}$. **7.** $S=\left\{-\frac{\pi}{4};0;\frac{\pi}{4}\right\}$. **8.** $A_l=8\pi cm^2$. **9.** $S=(-\infty;\log_3 2]$. **10.** *a)* $A=7{,}5cm^2$; *b)* $d=1{,}5cm$; *c)* $AC=\sqrt{34-15\sqrt{3}}\,cm$, $BD=\sqrt{34+15\sqrt{3}}\,cm$. **11.** $28=4+24$. **12.** *a)* $a=1$; *b)* $A=\ln\sqrt{5}(u.p)$.

TESTUL 68

1. $a^{-2}=\frac{25}{9}$. **2.** $AC=8cm$. **3.** $p=12\%$. **4.** $b=1+a$. **5.** $f:R\to R$, $f(x)=x^2-2x+1$. **6.** $n=4$. **7.** 15 şi 22. **8.** $m(\angle C)=30^\circ$. **9.** $A\left(1\frac{1}{4};\ln 4\right)$. **10.** $d=1cm$. **11.** Se arată că $F'(x)=f(x)$ pentru orice $x\in R$; *b)* $A=\ln 3(u.p)$. **12.** $a=-1$, $b=-3$, $c=4$, $d=0$.

TESTUL 69

1. $a=\frac{3}{2}$. **2.** $200kg$. **3.** 18° şi 72°. **4.** $\det A=16$. **5.** $tg\alpha=-2$. **6.** $f(\log_5 3)=\frac{3}{7}$. **7.** $CD=9\sqrt{5}\,cm$. **8.** $f:R\to R$, $f(x)=x^2-6x+10$. **9.** $\frac{3}{2}$. **10.** $a=1$. **11.** $a\in(-1;1)$. **12.** $2cm$.

TESTUL 70

1. $\log_{\frac{1}{2}}3$. **2.** $m(\angle CAD)=30^\circ$. **3.** $p=\frac{1}{4}$. **4.** $28km$. **5.** $d=5+i$. **6.** $z\cdot\bar{z}=1{,}3$. **7.** $30cm$. **8.** $S=\left(-\frac{1}{3};3\right)$. **9.** $A(4;3)$, $B(0;-1)$. **10.** $R=4cm$. **11.** $a=2$. **12.** $a\in(-\infty;-3)\cup[2;6]$.

TESTUL 71

1. Adevărată. **2.** $AB=16cm$. **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** $\sin 2x=-0{,}96$. **5.** $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$. **6.** $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$. **7.** $C_5^2\cdot C_5^3=100$ submulţimi. **8.** *a)* $x=1$; *b)* $I=4\ln 2-\frac{11}{4}$. **9.** $R=\frac{85}{8}cm$. **10.** $p=\frac{2}{5}$. **11.** $S_{20}=40$. **12.** $h=4cm$.

Cazacliu Cristian.

TESTUL 72

1. $a=64$. **2.** $A=36cm^2$. **3.** Cu 15%. **4.** $S=\{-4;-1\}$. **5.** $E=1,2$. **6.** $S=[-1;+\infty)$. **7.** $\sin\alpha=\frac{3}{4}$.

8. $y=-5x+2$. **9.** $S=\{27\}$. **10.** Raportul este egal cu 3. **11.** $S=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$. **12.** $a=-\frac{1}{2}$.

TESTUL 73

1. $-a=-4$. **2.** $MN=6cm$. **3.** 250 de pagini. **4.** $x=6$. **5.** $p=\frac{3}{5}$. **6.** $v=28m/s$. **7.** $A=202,8cm^2$.

8. $S=(-4;4)$. **9.** $a=56$, $b=88$. **10.** $I=2$. **11.** $h=3cm$. **12.** $e^{\frac{4}{3}}$.

TESTUL 74

1. $E=7$. **2.** $A_1B_1=8,5cm$. **3.** $189km$. **4.** $E=ctg^2x$. **5.** 26 submulțimi. **6.** $S=\{4\}$. **7.** $42cm$, $56cm$.

8. $x=1$. **9.** *a)* $A(0;-1)$, $B(4;3)$; *b)* $y=-x-1$, $y=-x+7$. **10.** $a\in\{-2;1\}$. **11.** $V=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^2R^3}{\pi^2-1}(u.c)$.

12. $m\in\left(1;\frac{4}{3}\right)$.

TESTUL 75

1. $E<0$. **2.** $AC=15cm$. **3.** 7,5%. **4.** $a^{-2}=\frac{1}{20}$. **5.** $d=13$. **6.** $x=-10$. **7.** S = $\{5\}$. **8.** $V=128cm^3$.

9. 6 cărți de matematică. **10.** 90°, $\arcsin\frac{3}{5}$, $\arcsin\frac{4}{5}$. **11.** $A=\frac{1}{3}(u.p)$. **12.** $k=2$, $m=5$.

