

I. STAMATE

I. STOIAN

Culegere

de probleme

de algebră

I. STAMATE

I. STOIAN

CULEGERE DE PROBLEME DE ALGEBRĂ

PENTRU ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDIU

EDITURA DIDACTICĂ
ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI — 1965

P R E F A Ț Ă

Lucrarea pe care o prezentăm conține probleme de algebră axate pe programa școlii medii. Materialul este împărțit în 13 capitole, dar nu este ordonat pe clase pentru a nu dăuna unității capitolelor respective. În cadrul fiecărui capitol, problemele sînt grupate după teoria care stă la baza lor și gradate după dificultățile pe care le prezintă rezolvările lor.

Pentru răspunsurile la probleme am ținut seama de gradul lor de dificultate și în funcție de aceasta am dat, fie soluții complete, fie schițe de soluții, indicații sau numai rezultatul, toate acestea fiind cuprinse la sfîrșitul lucrării. Am dat numai soluții algebrice problemelor, chiar și acelor care puteau fi rezolvate cu ajutorul derivatelor.

Unele probleme conțin funcții trigonometrice, precum și geometrie analitică; acestea însă se încadrează perfect în culegere. În felul acesta rezolvatorul se va obișnui a privi problemele în ansamblul lor.

La analiza combinatorie sînt și probleme bazate pe combinaări cu repetiție. Le-am socotit absolut necesare, deoarece sînt frecvente în multe discipline practice.

Culegerea se adresează elevilor școlilor medii, candidaților la examenele de admitere în facultăți și profesorilor de matematică. În același timp, culegerea oferă un material util pentru cercurile de elevi.

Ținînd seama de ordonarea materialului din culegere, recomandăm profesorilor să indice elevilor problemele pe care le vor socoti mai potrivite pentru rezolvare în vederea realizării scopului propus.

Bună parte din probleme au fost date la examene de admitere. Noi nu am specificat acest lucru pentru a nu obișnui pe elevi să prefere numai anumite probleme.

Credem că lucrarea pe care o prezentăm va constitui un material auxiliar util pentru cei care studiază algebra.

Rugăm cititorii să ne comunice sugestiile și observațiile lor.

A u t o r i i

ENUNȚURI

ÎMPĂRȚIREA POLINOAMELOR

Să se efectueze împărțirile

1. $(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4) : (2a^2 - 3ab + 4b^2)$
2. $(6a^2 - 9ab + 8ax + 6bx - 8x^2) : (2a - 3b + 4x)$
3. $(1 + a^8 + a^4) : (a^2 + 1 - a)$
4. $(a^6b^6 - 64) : (ab - 2)$

* * *

Să se afle restul, fără a efectua împărțirile

5. $(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1) : (x - 1)$
6. $(3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 1) : (x + 2)$
7. $(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$
8. $(2x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x - 8) : (2x - 3)$

* * *

9. Pentru ce valoare a lui m polinomul

$$P(x) = x^5 + mx^3 + 3x^2 - 2x + 8$$

se împarte exact cu $x + 2$. Să se determine cîtul.

10. Să se determine m astfel ca polinomul

$$P(x) = 9(x - m)^2 (5x - 16) - (x - 12) (7x - 19)^2$$

să se împartă cu $x - 3$.

11. Pentru ce valori ale lui n polinomul

$$P(x) = x^3 - 3nx^2 + 4(n^2 + 1)x - (n^3 + 5)$$

este divizibil cu $x - 1$.

12. Să se determine a și b astfel ca polinomul

$$P(x) = ax^3 - bx^2 - 5x + 4$$

împărțit cu $x + 1$ să dea rest 6 și împărțit cu $x - 1$ să dea rest 2.

13. Să se determine a, b, c astfel ca polinomul

$$P(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$$

împărțit succesiv prin $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ să dea respectiv resturile 1, 2, 3.

14. Să se determine m așa fel ca polinomul $mx^3 + 11x^2 + 7x + m$ să fie divizibil cu $2x + 3$.

15. Se dea polinomul $P(x) = x^4 - (2 - \sin^2 a)x^3 + 2x^2 \cos a + (2 - 5 \sin^2 a)x + 1$. Să se determine valorile lui a pentru care polinomul se divide cu $x - 1$.

16. Pentru ce valori ale lui m expresia $a^3 + b^3 + c^3 - mabc$ se divide cu $a + b + c$. Ca o consecință, să se arate că dacă $a + b + c = 0$, atunci $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

17. Să se arate că restul împărțirii unui polinom $P(x)$ prin $(x - a)(x - b)$ este

$$r(x) = \frac{(x - a)P(b) - (x - b)P(a)}{b - a}, \quad b \neq a.$$

18. Un polinom $P(x)$ împărțit cu $x - 1$ dă restul 15, împărțit cu $x + 1$ dă restul 7 și împărțit cu $x + 4$ dă restul -80 . Să se afle restul împărțirii prin $(x - 1)(x + 1)(x + 4)$.

19. Un polinom împărțit cu $x - a$ dă cîtul $x^2 - 3x + 4$, iar împărțit cu $x - b$ dă cîtul $x^2 - 4x + 2$. Să se găsească polinomul și numerele a și b știind că termenul său independent de x este egal cu 1.

20. Un polinom $P(x)$ împărțit cu $x - a$ și $x - b$ dă respectiv cîturile $C_1(x)$ și $C_2(x)$. Să se arate că $C_1(b) = C_2(a)$. Aplicație: $P(x) = x^n$.

21. Un polinom $P(x)$ împărțit cu $x - a$, $x - b$, $x - c$ dă respectiv cîturile $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$. Să se arate că

$$(b - a)P_1(b) + (c - b)P_2(c) + (a - c)P_3(a) = 0,$$

$$(c - a)P_1(c) + (a - b)P_2(a) + (b - c)P_3(b) = 0.$$

* * *

Să se arate că expresiile

22. $(x + y)(y + z)^2(z + x)^3 - x^2y^3z$

23. $(x + y)(y + z)(z + x) + (2x + y + z)(x + 2y + z) \cdot (x + y + 2z)$

24. $(4x + y + z)(x + 4y + z)(x + y + 4z) - 5(x + y)(y + z)(z + x) - 32xyz$

se divid cu $x + y + z$.

* * *

Să se arate că polinoamele următoare se împart exact, iar pentru ex. 25, 26, 29 să se dea și cîturile. Ex. 28, și 29 să se generalizeze.

25. $(2x + 3y - z)^3 + (3x + 7y + z)^3, \quad x + 2y$

26. $(x - y)(x^2 + y^2) + z^2(x + y) - 2x^2z, \quad x - y - z$
 27. $(x^2 + y^2 - zx)^2 - y^2(x - y)^2 - y^2(x + y - z)^2, \quad (x - y)(x + y - z)$
 28. $(x + a)(y + b)(z + c)(u + d) - (y + z + u - a) \cdot (z + u +$
 $+ x - b)(u + x + y - c)(x + y + z - d), \quad x + y + z + u$
 29. $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3(bcd + cda + dab + abc), \quad a + b + c + d$
 30. $x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 - 3x^2y^2z^2, \quad xy + yz + zx.$

* * *

31. Să se arate că polinomul

$$P(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1) + \\ + (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

se împarte cu $x^2 + 1$. Se cere citul. Generalizare.

32. Polinomul $P(x) = 3(x + 1)^3 - x(x + 2)^2$ se împarte cu $x^2 + x + 1$.
Se cere citul.

* * *

Să se determine parametrii m și n astfel ca polinoamele următoare să se dividă

- | | |
|--|--|
| 33. $2x^4 + 5x^3 - 17x^2 + mx + n$ | cu $2x^2 - x - 6$ |
| 34. $6x^5 + mx^4 + 27x^3 + nx^2 - 5x + 6$ | cu $3x^2 - 5x + 6$ |
| 35. $x^4 - 3x^2 - 4$ | cu $x^2 + mx + n$ |
| 36. $x^3 + mx^2 + nx - 3$ | cu $x^2 - x + 1$ |
| 37. $x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + m$ | cu $x^2 - x + n$ |
| 38. $x^4 + mx^2 + n$ | cu $x^2 + x\sqrt{3} + 1$ |
| 39. $8x^4 - 4x^3 - 2(3 + 4m^2)x^2 +$
$+ (4m^2 - 3m + 5)x + n$ | cu $4x^2 + 4mx - 1$ |
| 40. $x^4 + mx^2 + n$ | cu $x^2 + mx + n$ |
| 41. $x^4 + mx^2 + nx + b^2(b - 1)$ | cu $x^2 + ax + b$ |
| 42. $x^3 + mabx + n(a^3 + b^3)$ | cu $x^2 - (a + b)x +$
$+ a^2 - ab + b^2.$ |

43. Se dau polinoamele $P(x) = x^2 - 3x + 2$, $Q(x) = x^2 + 3x + 2$. Să se arate că polinomul $P[Q(x)]$ se divide cu $x^2 + 3x + 1$. Se cere citul.

44. Să se determine m , n și p astfel ca polinomul $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 8$ să fie divizibil cu $(x - 1)(x^2 + 6x + 8)$.

45. Pentru ce valori ale lui a , b și c polinomul $x^4 + ax^2 + bx + c$ se divide cu $(x - 1)^3$.

46. Să se determine m , n și p astfel ca polinomul $x^5 + mx^4 + 2x^3 + nx^2 - 3x + p$ să se dividă cu $x^3 + 1$.

47. Se dă $P(x, y) = x + a \sqrt[3]{xy} + by$, $Q(x, y) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$. Să se determine a și b astfel ca $P(x, y)$ să se dividă cu $Q(x, y)$. Se cere cîtul.

48. Să se determine două polinoame de gradul al treilea al căror produs să fie

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} - 2(x^2 + 1).$$

49. Să se determine m, n, p și q astfel ca polinomul $P(x) = x^6 + x^4 + mx^2 + nx + p$ împărțit cu $x^3 + q$ să dea restul $(x + 1)^2$ și împărțit cu $x^3 - q$ să dea restul $(x - 1)^2$.

50. Să se arate că $(x^2 + x + 1)^{2n+1} + (x^2 - x + 1)^{2n+1}$ se divide cu $x^2 + 1$.

51. Să se arate că $(x^2 + 3x + 1)^{2n+1} + (x^2 - x + 1)^{2n+1}$ se divide cu $x^2 + x + 1$.

52. Să se arate că polinomul $x^{4n+3} + x^{4n+2} + x + 1$ se împarte cu $x^3 + x^2 + x + 1$.

53. Să se arate că polinomul $P(x, y) = a^{m-1}(a^2 - 1)x^m - (a^{2m} - 1)xy^{m-1} + a(a^{2m-2} - 1)y^m$ este divizibil cu $ax^2 - (a^2 + 1)xy + ay^2$. Se cere cîtul.

54. În ce caz $x^n - a^n$ se divide cu $x^p - a^p$.

55. Polinomul $x^3 \sin a - r^2 x \sin 3a + r^3 \sin 2a$ este divizibil cu $x^2 - 2rx \cos a + r^2$. Se cere cîtul. Generalizare, cînd deîmpărțitul este $x^p \sin a - r^{p-1} x \sin pa + r^p \sin (p - 1)a$.

56. Să se efectueze împărțirea

$$(3 + x + 4x^{-1} + 2x^{-2} - x^{-3} - x^{-4}) : (1 + 2x^{-1} + x^{-2}).$$

57. Să se împartă după puterile crescătoare ale lui x $(2 - 3x + 4x^2 - 5x^3) : (1 - x + 2x^2 - 4x^3 + 5x^4)$ pînă la un rest începînd cu x^4 .

58. Să se efectueze împărțirile

$$1 : (1 - x), \quad 1 : (1 + x)$$

pînă la un rest începînd cu x^{n+1} . Să se scrie identitatea împărțirii. Consecințe pentru $1 : (1 - x^2)$ și $1 : (1 + x^2)$.

59. Să se împartă 1 prin $(1 - x)^2$ după puterile crescătoare ale lui x oprind la un rest care începe cu x^n . Să se scrie identitatea împărțirii. Generalizare.

60. Să se împartă $1 - abx^2$ cu $1 - (a + b)x + abx^2$ după puterile crescătoare ale lui x , dînd un cît de gradul n .

61. Să se găsească cîtul și restul împărțirii

$$(1 - x \cos a) : (1 - 2x \cos a + x^2)$$

dând un cît ordonat după puterile crescătoare ale lui x pînă la termenul care cuprinde x^p . Din rezultat să se deducă identitatea

$$\frac{1}{2} + \cos a + \cos 2a + \dots + \cos pa = \frac{\sin (2p+1) \frac{a}{2}}{2 \sin \frac{a}{2}}.$$

62. Să se dea cîtul de gradul n pentru

$$[\cos a - x \cos (a - b)] : (1 - 2x \cos b + x^2)$$

63. Să se dividă $\sin \alpha$ cu $1 - 2x \cos \alpha + x^2$ după puterile crescătoare ale lui x și să se deducă identitatea

$$\sin b + \sin 2b + \dots + \sin nb = \frac{\sin n \frac{b}{2} \sin (n+1) \frac{b}{2}}{\sin \frac{b}{2}}.$$

* * *

Un polinom $P(x, y)$ se zice că este *simetric* în x și y dacă *

$$P(x, y) \equiv P(y, x),$$

adică dacă rămîne neschimbat cînd permutăm cele două variabile de care depinde. Analog, polinomul $P(x, y, z)$ este simetric în x, y, z , dacă

$$P(x, y, z) \equiv P(x, z, y) \equiv P(y, x, z) \equiv P(y, z, x) \equiv P(z, x, y) \equiv P(z, y, x),$$

adică polinomul rămîne invariabil pentru orice permutare a variabilelor lui.

Un polinom pentru care

$$P(x, y) \equiv -P(y, x)$$

se numește *antisimetric* (simetric stîng).

64. Să se dovedească următoarele propoziții :

- 1° Suma a două polinoame simetrice este un polinom simetric.
- 2° Diferența a două polinoame simetrice este un polinom simetric.
- 3° Produsul a două polinoame simetrice este un polinom simetric.
- 4° Cîtul a două polinoame simetrice divizibile unul cu altul este un polinom simetric.
- 5° Cîtul a două polinoame antisimetrice care se divid este un polinom simetric.

* Bibliografie : T. R. L a l e s c u, *Calcul algebric*, p. 39; M. G h e r m ă n e s c u, „*Bull. de la Soc. roumaine de math.*“, tome 40 (1938), p. 141 și „*Bull. de la Soc. math. de France*“, tome 68 (1940), p. 109—128; M. M ă n e s c u, *Pozitiva*, vol. 2 (1941), p. 143—146; P. B o l d e s c u, *Pitagora*, vol. I. (1935), nr. 1; S. I. N o v o s e l o v, *Curs special de algebră elementară*, p. 58.

- 6° Dacă un polinom simetric în x și y se divide cu $x - y$, atunci el se divide și cu $(x - y)^2$.
- 7° Dacă un polinom simetric în x și y se divide cu $(x - y)^{2n-1}$, atunci el se divide și cu $(x - y)^{2n}$.
- 8° Un polinom antisimetric în x și y se divide totdeauna cu $x - y$.
- 9° Dacă un polinom antisimetric se divide cu $(x - y)^{2n}$, atunci el se divide și cu $(x - y)^{2n+1}$.
- 10° Dacă un polinom simetric în x, y, z se divide cu $x - y$, el se divide și cu $y - z$ și cu $z - x$, deci și cu produsul $(x - y)(y - z)(z - x)$.
65. Să se arate că restul împărțirii polinomului

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

prin $x^2 + 1$ este

$$a_0 - a_2 + a_4 + (-a_1 + a_3)x.$$

În general, ce relații trebuie să existe între coeficienții polinomului $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ pentru ca el să se dividă cu $x^2 + 1$.

66. Se dau polinoamele $P(x) = x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2}$, $Q(x) = x^2 + x + 1$. Să se arate că $P(x)$ se divide cu $Q(x)$, oricare ar fi numerele naturale a, b, c .

* * *

Polinoamele

67. $(x + 1)^{2n+1} + x^{n+2}$ 68. $(x + 1)^{6n+1} + x^{3n+2}$

69. $(x + 1)^{6n+1} - (x + 1)^{6m+2} - 1$

70. $x^{6n-1} + x + 1$, unde m și n sînt numere naturale, se divid cu $x^2 + x + 1$.

* * *

Polinoamele

71. $(x - 1)^{n+2} + x^{2n+1}$

72. $(x - 1)^{2n+1} + (-1)^{n+1}x^{n+2}$ se divid cu $x^2 - x + 1$.

Se cer cîturile.

* * *

Polinoamele

73. $(x + 1)^{3n+2} + x + 2$

74. $(x + 1)^{2n-1} + (-1)^n(x + 2)^{n+1}$

se divid cu $x^2 + 3x + 3$.

Polinoamele

75. $x^{n+1} - (n+1)x + n$

76. $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$

77. $(p-q)x^p - px^{p-q} + q$,

în care n , p și q sînt numere naturale, se divid cu $(x-1)^2$. Se cere cîtul pentru ex. 75 și 76*.

78. Polinomul $(2n-1)x^{2n} + 2nx^{2n-1} + 1$ se divide cu $(x+1)^2$. Se cere cîtul.

79. Polinomul $(n-1)x^{n+1} - (n+1)x^n + (n+1)x - n + 1$ se împarte cu $(x-1)^3$.

80. Polinomul $x^{2n} - n^2x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n^2x^{n-1} + 1$ se divide cu $(x-1)^4$. Să se afle cîtul.

81. Polinomul $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ se împarte cu $x(x+1)(2x+1)$.

82. Polinomul $(1+a+a^2+\dots+a^n)^2 - a^n$ se împarte cu $1+a+a^2+\dots+a^{n-1}$. Se cere cîtul.

83. Să se determine a și b astfel ca polinomul

$$ax^5 + bx^4 + x \cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha$$

să fie divizibil cu $x^2 - 2x \cos \beta + 1$.

84. Să se arate că

$$P(x, y, z) = (x + y + z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1}$$

se divide cu

$$Q(x, y, z) = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3.$$

Să se deducă cîtul pentru $n = 2$ (n număr natural).

85. Dacă $x + y + z = 0$, atunci $x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1}$ se divide cu $x^3 + y^3 + z^3$.

86. Dacă $x + y + z = 0$, în ce caz $x^m + y^m + z^m$ se divide cu xyz ?

87. Să se arate că expresia $a(b-c)^{6n+1} + b(c-a)^{6n+1} + c(a-b)^{6n+1}$ se împarte cu $(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$. Să se dea cîtul pentru $n = 1$.

Să se afle cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al polinoamelor

88. $x^3 - 2x + 56,$

$$x^2 + 56x + 208$$

89. $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2,$

$$x^4 - 2x^3 - x + 2$$

90. $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4,$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

91. $4x^4 + 5x^2 + 1,$

$$3x^3 + x^2 + 3x + 1$$

* Expresiile pot fi omogenizate introducînd pe y , și atunci împărțitorul este $(x-y)^2$, iar ex. 75, de exemplu, ar fi $x^{n+1} + (n+1)xy^n + ny^{n+1}$.

92. $6x^4 - 31x^3 + 40x^2 - x - 6$,
 $6x^4 - 49x^3 + 97x^2 - 7x - 15$
 93. $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4$,
 $x^6 - 4x^5 + 5x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
 94. $2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 3$,
 $3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2$
 95. $x^8 + x^7 - 2x^6 - 3x^5 + 3x^3 + 2x^2 - x - 1$,
 $8x^7 + 7x^6 - 12x^5 - 15x^4 + 9x^2 + 4x - 1$.

* * *

Să se afle c.m.m.d.c. al polinoamelor

96. $x^6 - 1$, $x^8 - 1$, $x^{10} - 1$
 97. $(x^2 + x + 1)^3 + (x^2 - x + 1)^3$, $(x + 1)^6 + (x - 1)^6$
 98. $x^3 - x^2 - x + 1$, $x^2 - 2x + 1$, $x^3 - 3x + 2$
 99. $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$, $3x^3 - 7x^2 + 4$, $5x^4 - 16x^3 + 14x^2 - 5x + 2$
 100. $1 - 4x^2 + 2x^3 + 3x^4 - 2x^5$, $1 - 2x + 2x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 2x^5$,
 $1 + 2x - 8x^2 + 2x^3 + 7x^4 - 4x^5$.

* * *

Să se arate că polinoamele următoare sînt prime între ele

101. $x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2$, $2x^3 + x^2 - 2x - 1$
 102. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
 103. Să se afle rădăcinile comune ecuațiilor

$$2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0, \quad 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 8x - 3 = 0$$

și apoi rădăcinile fiecărei ecuații.

104. 1° Să se determine relația dintre p și q pentru ca polinoamele $x^3 + 3px + 2q$, $x^2 + 2px + q$ să admită un divizor comun de gradul I. 2° Din ecuația în q obținută să se ia pentru p cel mai mic număr întreg, pozitiv și par care dă pentru q un număr rațional. 3° Să se rezolve pentru aceste valori ecuațiile obținute egalînd polinoamele cu zero.

105. Să se găsească condiția ca polinoamele $ax^7 + bx^3 + c$, $cx^7 + bx^4 + a$ să aibă un factor comun de gradul II.

Aplicație: pentru $8x^7 - 377x^3 + 21$ și $21x^7 - 377x^4 + 8$.

106. Se dau polinoamele

$$P_1(x) = x^4 - (2a - 1)x^2 + x + a^2 - 2a - m,$$

$$P_2(x) = x^6 + x^5 + (1 - 3a)x^4 + (1 - 2a)x^3 + (3a^2 - 3a + 1)x^2 + (a - 1)^2x - a(a - 1)^2 + 1,$$

Se cere să se determine m astfel ca c.m.m.d.c. să fie un polinom de gradul al treilea.

* * *

Să se afle c.m.m.d.c. al polinoamelor

107. $x^n - a^n, x^p - a^p$

108. $(a - b)^5 + (b - c)^5 + (c - a)^5,$
 $(a^2 - b^2)^5 + (b^2 - c^2)^5 + (c^2 - a^2)^5$

109. $nx^{n+1} - (n + 1)x + 1, x^n - nx + n - 1$

110. $x^{n+1} - (n + 1)x + n, (x - 1)^3, (1 - x^n)(1 + x) +$
 $+ 2nx^n(x - 1) - n^2x^n(1 - x)^2.$

DESCOMPUNEREA ÎN FACTORI. SIMPLIFICAREA FRACȚIILOR

Să se descompună în factori

111. $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$ 112. $a^2 - b^2 + 2b - 1$
 113. $(x - a)(y - b) - (x - b)(y - a)$
 114. $(a - b)(a^2 - c^2) - (a - c)(a^2 - b^2)$
 115. $px^2 + (1 + pq)xy + qy^2$
 116. $(a^2b^2 + 1)^2 - (a^2 + b^2)^2$
 117. $a(b - 1)(bc - 1) - b(a - 1)(ac - 1)$
 118. $(a - b)^2 + a(b - 1)^2 - b(a - 1)^2$
 119. $(x + 1)(x^3 + 1) - 2x(x^2 + 1)$
 120. $(ac + pbd)^2 + p(ad - bc)^2$
 121. $(a + x)(bz - cy) + (b + y)(cx - az)$.

* * *

Să se descompună în factori de gradul II cu coeficienți reali

122. $x^4 + x^2y^2 + y^4$ 123. $x^4 + y^4$ 124. $x^6 + y^6$
 125. $x^8 + y^8$ 126. $x^{12} - x^8 + x^4 - 1$.

* * *

Să se descompună în factori

127. $4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$
 128. $abc(a + b + c) - ab - ac - bc - a^2b^2c^2 + 1$
 129. $a^2b^2(a^2 + b^2) + a^2 + b^2 + 4a^2b^2 \pm 2ab(a^2 + 1)(b^2 + 1)$
 130. $(x + y + z + xyz)^2 - (xy + yz + zx + 1)^2$
 131. $x^4 - y^4 - 4ax^2y + 2a^2y^2 - a^4$
 132. $(x^2 - y^2)^2 + 2(x^2 + y^2) + 1$
 133. $z^2 - 2(u^2 + v^2)z + (u^2 - v^2)^2$
 134. $2ab(a^2 - 1) + 2a^2(b^2 - 1) - (a^2 + 1)(a^2b^2 - 1)$
 135. $a(b - c)^3 - c(b - a)^3 - b^3(a - c)$
 136. $[(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) + 4abxy]^2 - 4[xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + y^2)]^2$

137. $2u^2v^2 + 2v^2z^2 + 2z^2u^2 - u^4 - v^4 - z^4$
 138. $(x + y)^4 + x^4 + y^4$
 139. $(cx + by)(ax + cy)(bx + ay) - (bx + cy)(cx + ay)(ax + by)$
 140. $x^3 + (m + n + 1)ax^2 + (m + n + mn)a^2x + a^3mn$
 141. $(b^2 - ac)^2 + (c^2 - ab)^2 + (a^2 - bc)^2$
 142. $a(1 - a^2 + b^2) + b(1 + a^2 - b^2) - (a + b)(1 - a^2 + b^2)(1 + a^2 - b^2)$
 143. $(a - b)^2(a + b - 2c) + (b - c)^2(b + c - 2a) + (c - a)^2(c + a - 2b)$
 144. $(a - b)(a + b - 2c)^2 + (b - c)(b + c - 2a)^2 + (c - a)(c + a - 2b)^2$
 145. $x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1)$
 146. $(abc + abd + acd + bcd)^2 - abcd(a + b + c + d)^2$
 147. $a^2x^2 + ax^2 - 2x^2 + 2a^2x + ax + 3x + a^2 - 1$
 148. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2$
 149. $a(a^3 + 3a^2 + 3a + 2)(a^2 + 3a + 3) - 3a(a + 1)^2(a + 2)$
 150. $a^6 + a^5 + a^4 + 2a^3 + a^2 + a + 1$
 151. $(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$
 152. $4(x^2 + xy + y^2)^3 - 27(x^2y + xy^2)^2$
 153. $x^4 - 7x^3y + 5x^2y^2 + 31xy^3 - 30y^4$
 154. $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$
 155. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$
 156. $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$
 157. $x(x + 1)^2(x^2 + 1) + 1$
 158. $(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) - 1$
 159. $x^4 - y^4 - 4ax^2y + 2a^2y^2 - a^4$
 160. $[x^2 + (a + 3)x + 3]^2 + 3a^2(x + 1)$
 161. $a(b + c)^2 + b(c + a)^2 + c(a + b)^2 - 4abc$
 162. $ab(c - k)^3(a - b) + bc(a - k)^3(b - c) + ca(b - k)^3(c - a)$
 163. $(x - a)^3(b - c) + (x - b)^3(c - a) + (x - c)^3(a - b) + 3x(b - c)(c - a)(a - b)$
 164. $(x^2 + yz)^3 + (y^2 + xt)^3 - (x^2 + yt)^3 - (y^2 + xz)^3$.

Din descompunerea ce rezultă să se arate că există o infinitate de numere întregi a, b, c, d care verifică relația $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.

165. 1° Să se afle relația pe care trebuie să o satisfacă coeficienții polinomului

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

pentru ca să se poată scrie ca produs de doi factori liniari, adică de forma $\alpha x + \beta y + \gamma$.

Aplicație. $2x^2 - xy - y^2 - 7x + y + 6$.

2° În ce caz polinomul este un pătrat perfect.

166. Să se determine α astfel încît polinomul $2x^2 + \alpha xy - 2y^2 - x + 7y - 3$ să se descompună în factori liniari.

167. Să se determine k în funcție de a și b așa fel ca polinoamele

$$1^\circ ax^2 + kxy + aby^2 + x + ay = 0$$

$$2^\circ x^2 + 2axy + a^2y^2 + (2b + 1)x + ky + b(b + 1)$$

să se descompună în produse de cîte doi factori liniari. Să se dea descompunerile.

168. Să se descompună expresia $E = 2(x^4 + y^4) + 7xy(xy - x^2 - y^2)$ în factori de forma $m(x^2 + y^2) + nxy$.

* * *

Să se arate că expresiile următoare sînt pătrate perfecte

$$169. x^2 + px + \frac{p^2}{4} \quad 170. 36x^6 + 12x^3 + 1$$

$$171. a^{2m} - 2a^m b^n + b^{2n} \quad 172. 4(x + b)(x + b - a) + a^2$$

$$173. x^3y(xy + 2z^2) + y^3z(yz + 2x^2) + z^3x(zx + 2y^2)$$

$$174. (x + 1)^2(x^2 + 1) + x^2$$

$$175. 9\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - 24\left(a + \frac{1}{a}\right) + 34$$

$$176. (x^2 + y^2)(x^4 + y^4) - x^2y^2(x + y)^2$$

$$177. x^8y^8 + 2x^6y^6 - 3x^4y^4 - 4x^2y^2 + 4$$

$$178. a^2 + (a + 1)^2 + (a^2 + a)^2$$

$$179. (x - 1)x(x + 1)(x + 2) + 1$$

$$180. (x^2 + 3x + 1)(x^2 + x - 1) + 2(x + 1)^2 - 2x^2(x + 1)$$

$$181. (x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$$

$$182. (a^3 + 1)^2 - (a^2 - 1)^2(a^2 + 1)$$

$$183. (a - b)^2(a - c)^2 + (b - c)^2(b - a)^2 + (c - a)^2(c - b)^2$$

$$184. (a - b)^2(c - d)^2 - (ad + bc - 2bd)(ad + bc - 2ac)$$

$$185. (x^2 + y^2 + z^2)^3 + 2(xy + yz + zx)^3 - 3(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)^2.$$

* * *

186. Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt numere oarecare, să se arate că expresia $E = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n)^2 + (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ este un pătrat perfect.

187. Ce condiții trebuie să îndeplinească coeficienții a, b, c pentru ca trinomul $ax^2 + bx + c$ să fie un pătrat perfect?

188. Să se determine a și b astfel ca expresia $(x + 1)^2 (x^2 + ax + b) + x^2$ să fie pătratul expresiei $x^2 + x + 1$.

189. Ce condiții trebuie să îndeplinească coeficienții polinomului $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ pentru a fi pătratul polinomului de forma $x^2 + mx + n$?

190. Să se afle condiția necesară și suficientă pentru ca expresia $ax^4 + 2bx^2y^2 + cy^4$ să fie un pătrat perfect.

191. Să se determine m și n așa fel ca polinomul $x(x + 1)(x + 2)(x + m) + n$ să fie pătratul unui polinom.

* * *

192. Se cere condiția ca expresia

$$E = a(y - z)^2 + b(z - x)^2 + c(x - y)^2$$

să fie un pătrat perfect.

* * *

*Folosind proprietăți ale funcțiilor omogene și simetrice *, să se descompună în factori expresiile*

193. $a^2b + b^2c + ac^2 - ab^2 - bc^2 - a^2c$

194. $(a + b)(b + c)(c + a) + abc$

195. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

196. $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

197. $x(y^2 + z^2 - x^2) + y(x^2 + z^2 - y^2) + z(x^2 + y^2 - z^2) - 2xyz$

198. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

199. $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$

200. $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$

201. $(a + b + c)^3 + (a + b - c)(-a + b + c)(a - b + c) + 8abc$

202. $x^4(2y^4 - x^4) + y^4(2z^4 - y^4) + z^4(2x^4 - z^4)$

203. $\Sigma x(y + z)(y - z)^3$

204. $\Sigma x(y^2 - z^2)(x + y - z)(x - y + z)$

205. $(x + y)^5 - x^5 - y^5$ 206. $(x + y)^7 - x^7 - y^7$

207. $xy(x^2 + y^2) - x^4 - y^4$ 208. $x^2y^2(x + y) - x^5 - y^5$

209. $(b - c)(b + c)^4 + (c - a)(c + a)^4 + (a - b)(a + b)^4$.

* * *

* v. ex. 64.

Să se descompună în factori

210. $a^{\varepsilon n} + a^n + 1$
 211. $6a^{4n+4}b^{k-1}c - 18a^{5n+5}b^{3k-3}c - 15a^{2n+2}b^{2k-2} + 45a^{3n+3}b^{4k-4}$
 212. $5a^{2n+11}x^{4m+6} - 20a^{n+8}x^{2m+4}y + 20a^5x^2y^2$
 213. $a^{2k}b^{2n+2}c^{2m-2} - a^{2k}b^2c^{4m-4} + a^{2k+2}b^{2n}c^{2m-2} - a^{2k+2}c^{4m-4}$
 214. $x^{n+12} - 2x^{n+6}y^6 + x^ny^{12}$
 215. $2a^{2+n} - a^{2+n}n + (n-2)(an - a)^2a^n$
 216. $a^{2r} - a^{4r} - 2a^{7r} - a^{10r}$
 217. $a^n x^{m+n} - 4a^{2n}x^{m+n-1} - 27a^{3n}x^{n+n-2} + 42a^{4n}x^{m+n-3}$
 218. $a^{4n+3} + a^{3n+2} - a^{2n+1} - a^n$
 219. $a^{2n+1}(a+1)^{2p} + a^n(a+1)^{p+1} + 1$
 220. $a^{2m-1}b^{-2n+1} + a^{-1}b - ab^{-1} - a^{-2m+1}b^{2n-1}$
 221. $a^{m+1}b^{n+p} - 2a^{2p+1}b^{m+p} - 3a^{2m}b^{n+p} + 6a^{m+2p}b^{m+p}.$

* * *

Să se simplifice fracțiile

222. $\frac{(b-1)^2 a - (a-1)^2 b}{a^2 b^2 - 1}$ 223. $\frac{a(x^2-1) - x(a^2-1)}{a(x-1)^2 - x(a-1)^2}$
 224. $\frac{x(y+z)^2 - y(x+z)^2}{x(z^2-y^2) + y(z^2-x^2)}$ 225. $\frac{(a^2+b^2-c^2)^2 - (a^2-b^2+c^2)^2}{4ab^2 + 4abc}$
 226. $\frac{(a^2+ab)^2 - (ab+b^2)^2}{(a^2-ab)^2 - (ab-b^2)^2}$ 227. $\frac{(a^2+a+1)^2 - (a-1)^2}{(a^2-a+1)^2 - (a+1)^2}$
 228. $\frac{x^4 + xy(x^2+y^2) + y^4}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$ 229. $\frac{x^3y^3 - x^5y^3}{x^3y^3(1-xy)^2 - x^3y^3(x-y)^2}$
 230. $\frac{(mx+ny)^2 - (nx+my)^2}{(ax+by)^2 - (bx+ay)^2}$ 231. $\frac{b(x^2-a^2) + (a^2-b^2)x + a(b^2-x^2)}{c(x^2-a^2) + (a^2-c^2)x + a(c^2-x^2)}$
 232. $\frac{a^3+b^3+ab^3-3a^2b}{a^2-2ab-b^2}$ 233. $\frac{(a+b)^4 + 2(a^4+b^4)}{a^2+b^2}$
 234. $\frac{x^4 - (a^2+b^2)x^2 + a^2b^2}{x^2 + (a+b)x + ab}$ 235. $\frac{(m+1)x^2 - 2(m-1)x - 8}{2x^2 + (m-4)x - 2m}$
 236. $\frac{x^2 - (a+b+2)x + ab + a + b + 1}{x^2 - (a+c+2)x + ac + a + c + 1}$
 237. $\frac{a^2+b^2-c^2-d^2 + 2(ab-cd)}{a^2-b^2+c^2-d^2 + 2(ac-bd)}$

$$\begin{aligned}
238. & \frac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2 + 2(ab + bc + ac)}{a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - 2(bd + bc + cd)} \\
239. & \frac{2x^2 - (y + z)(y + z - x)}{2y^2 - (z + x)(z + x - y)} \quad 240. \frac{x^3 + ax^2 + ax + a - 1}{x^3 + bx^2 + bx + b - 1} \\
241. & \frac{x^2y^2z^2 - (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + x^2 + y^2 + z^2 - 1}{xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1} \\
242. & \frac{a^3 + b^3 + a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2)}{a^3 - b^3 + a(b^2 + c^2) - b(a^2 + c^2)} \\
243. & \frac{a^3 + b^3 + a^2(b + c) + b^2(a + c)}{a^3 - b^3 + a^2(b + c) - b^2(a + c)} \\
244. & \frac{(a + b)^3 + (a + b)^2 + (a + b) + 1}{(a + b)^3 - (a + b)^2 + (a + b) - 1} \\
245. & \frac{a(a + b)^2(a^3 + ab^2 + 2b^3) + b(a - b)^2(b^3 + a^2b - 2a^3)}{a^4 + 6a^2b^2 + b^4} \\
246. & \frac{(1 - ab)(1 - ab - ax - bx) + (a + b)(a + b + x - abx)}{(1 - ab - ax - bx)^2 + (a + b + x - abx)^2} \\
247. & \frac{(ab - cd)(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + (ac - bd)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 4(ab - cd)(ac - bd)} \\
248. & \frac{(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(a^4 + 1)}{(a^2 - a\sqrt{2} + 1)(x^4 + 1)} \quad 249. \frac{x^{-2}y^{-8} + x^{-8}y^{-2}}{x^{-6}y^{-8} + x^{-8}y^{-6}} \\
250. & \frac{x^2 + xy - 6y^2}{5x^4 - 13x^3y + 6x^2y^2 + 12xy^3 - 24y^4} \\
251. & \frac{ab(a^2 + b^2)x^2y^2 + ab(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)^2 + a^2b^2xy(x^2 + y^2) + xy(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)^2}{ab(a^2 - b^2)x^2y^2 + ab(a^2 + b^2)(x^4 - y^4) + a^2b^2xy(x^2 - y^2) + xy(x^2 + y^2)(a^4 - b^4)} \\
252. & \frac{x^6 - (a^2 + b^2 + c^2)x^4 + (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)x^2 - a^2b^2c^2}{x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc} \\
253. & \frac{a^3(b - c)^3 + b^3(c - a)^3 + c^3(a - b)^3}{(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3} \\
254. & \frac{(a - b)(a + b)^3 + (b - c)(b + c)^3 + (c - a)(c + a)^3}{(a - b)(a + b)^2 + (b - c)(b + c)^2 + (c - a)(c + a)^2} \\
255. & \frac{a^4 - 2a^2b + 2a^2c - 2bd^2 + 2cd^2 - d^4}{a^4 - 4c^2 + 4cd^2 - 4a^2b + 4b^2 - d^4}
\end{aligned}$$

256. $\frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^2 + 3x - 2}$
257. $\frac{2x^6 + x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1}{2x^6 - x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 1}$
258. $\frac{ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)}{c^3(a-b) + a^3(b-c) + b^3(c-a)}$
259. $\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^3 - (a^2 - b^2 + c^2)^3}{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}$
260. $\frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 - 2(a-b)(b-c)(c-a)}{(c-a)^3 + (b-c)^3 - 2(a-b)(b-c)(c-a)}$
261. $\frac{(bz - cy)^3x^3 + (cx - az)^3y^3 + (ay - bx)^3z^3}{bc(bz - cy)x^2 + ca(cx - az)y^2 + ab(ay - bx)z^2}$
262. $\frac{xy(x-1)(y-1) + (xy-1)(x^2y^2-1)}{xy(x+1)(y-1) + (xy-1)(x^2y^2+1)}$
263. $\frac{(a+b+c)^4 - 5(a+b+c)^2 + 4}{(a+b+c)^2 + 3(a+b+c) + 2}$
264. $\frac{(b^2 + 3ab - 4a^2)^4 - (b^2 - 3ab - 4a^2)^4}{(b^2 + 2a^2)^4 - (b^2 - 4a^2)^4 - (6a^2)^4}$
265. $\frac{(x-2)^2(x-1)(x+3) - x(x-4)(x+1)^2}{(x-2)^2(x+1)(x-3) - x(x-4)(x-1)^2}$
266. $\frac{(x^2 + x + 1)^2 - x(x+2)(2x+1)}{(x^2 - x + 1)^2 - x(x-2)(x^2+2)}$
267. $\frac{[4bc - (b^2 + 1)(c^2 + 1)]^2 - (b^2 - 1)^2(c^2 - 1)^2}{[b(c^2 + 1) - c(b^2 + 1)]^2}$
268. $\frac{(a+b-2c)^3 + (b+c-2a)^3 - 2(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)}{(c+a-2b)^3 + (b+c-2a)^3 - 2(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)}$
269. $\frac{4a^4 - a^2(4a^2 + 2ax - x^2) + a(2ax - x^2)}{a^n x^2 - 4a^{n+2}}$
270. $\frac{a^{m+n}b^{m-n} - a^{m-n}b^{m+n}}{a^{p+n}b^{p-n} - a^{p-n}b^{p+n}}$
271. $\frac{x^{a^2+4} + x^{5a}}{x^{a(a-1)} + x^{4a-4}}$
272. $\frac{x^{a^2} + x^{3a}}{x^{2a} + x^{a(a-1)}}$
273. $\frac{x^{n+2} - 2x^n + x^{n-2}}{x^{n+3} - x^{n+1} + x^{n-1} - x^{n-3}}$
274. $\frac{a^{m+x} - a^x b^m + a^m b^y - b^{m+y}}{a^{m+x} + a^x b^m + a^m b^y + b^{m+y}}$
275. $\frac{x^n + 2x^{n-1} - x^{n-3} - 2x^{n-4}}{x^{n+3} + x^{n+2} - x^n + x^{n-2} + x^{n-3}}.$

276. Să se determine toate valorile posibile ale parametrului m astfel încît fracția

$$E = \frac{x^4 + m^2x^3 + (m+1)x^2 + (4m+1)x - 3}{x^2 - 1}$$

să se simplifice. Să se facă simplificarea corespunzătoare fiecăreia din valorile obținute pentru m .

277. Să se determine l, m, n, p astfel ca fracția

$$\frac{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}{x^3 + 3x^2 + x - 5} \text{ prin simplificare să devină } \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}.$$

278. Să se determine α și β așa fel ca fracția

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + \alpha x + 3}{x^3 - 3x^2 + \beta x + 3}$$

să se simplifice printr-un polinom de gradul II.

CALCULE CU EXPRESII RAȚIONALE ȘI IRAȚIONALE

§ 1. Calcule cu polinoame, fracții raționale și identități

279. Să se calculeze $E = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ pentru $x = -a + b + c$, $y = a - b + c$, $z = a + b - c$.

280. Se dau polinoamele

$$P_1 = 4a^3 - 3a^2 + 2a - 1, \quad P_2 = a^3 - 2a^2 + 3a - 1,$$

$$P_3 = 4a^3 + 3a^2 + 2a + 1, \quad P_4 = a^3 + 2a^2 + 3a + 1.$$

Să se calculeze polinoamele :

$$1^\circ Q_1 = P_1 P_3 - P_2 P_4, \quad 2^\circ Q_2 = P_1 P_2 P_3 P_4.$$

* * *

Să se verifice identitățile

$$\begin{aligned} 281. & 4[(aC - Ac)^2 - (bC - cB)(aB - bA)] = \\ & = (2aC + 2cA - bB)^2 - (b^2 - 4ac)(B^2 - 4Ac) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 282. & 2[(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) - (aa_1 + bb_1)^2 + 1] = \\ & = (ab_1 - a_1b - 1)^2 + (ab_1 - a_1b + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 283. & (x + y + z)(x' + y' + z') + (x + y - z)(x' + y' - \\ & - z') + (x - y + z)(x' - y' + z') + (-x + \\ & + y + z)(-x' + y' + z') = 4(xx' + yy' + zz') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 284. & a(b + c)(b + c - a) + b(a + c)(a + c - b) + \\ & + c(a + b)(a + b - c) = 6abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 285. & (bcx + acy + abz - xyz)^2 + (abc - ayz - bzx - cxy)^2 = \\ & = (a^2 + x^2)(b^2 + y^2)(c^2 + z^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 286. & [4ab - (a^2 + 1)(b^2 + 1)]^2 - (a^2 - 1)^2(b^2 - 1)^2 = \\ & = 4(a - b)^2(1 - ab)^2 \end{aligned}$$

287. $4[(a^2 - b^2)\alpha\beta + (\alpha^2 - \beta^2)ab]^2 + [(a^2 - b^2)(\alpha^2 - \beta^2) - 4ab\alpha\beta]^2 =$
 $= (a^2 + b^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2)^2$
288. $(a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2) - bc(y - z)^2 -$
 $- ca(z - x)^2 - ab(x - y)^2 = (ax + by + cz)^2$
289. $(x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2)^3 + (y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2)^3 =$
 $= 27xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^3$
290. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 =$
 $= (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$
- 291 *. $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1b_1 +$
 $+ a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 = \Sigma(a_ib_k - a_kb_i)^2; i, k = 1, 2, \dots, n$
292. $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + u^2) =$
 $= (ax + by + cz + du)^2 + (ay - bx + cw - dz)^2 +$
 $+ (az - cx + dy - bu)^2 + (au - dx + bz - cy)^2$
293. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) =$
 $= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$
294. $(a + b + c)^3 - (-a + b + c)^3 - (a - b + c)^3 - (a + b - c)^3 =$
 $= 24abc$
295. $(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 -$
 $- (a + b - c)(b + c - a) - (b + c - a)(c + a - b) -$
 $- (c + a - b)(a + b - c) = 2[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$
296. Dacă $s = a_1 + a_2 + a_3$, avem
 $(a_1s + a_2a_3)(a_2s + a_3a_1)(a_3s + a_1a_2) = (a_1 + a_2)^2(a_2 + a_3)^2(a_3 +$
 $+ a_1)^2$
297. Dacă $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, atunci
 $(a_3s + a_4s + \dots + a_ns + a_1a_2)(a_1s + a_4s + \dots + a_2a_3)$
 $\dots (a_2s + a_3s + \dots + a_{n-1}s + a_na_1) =$
 $= (a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2(a_1 + a_3 + \dots + a_n)^2 \dots (a_1 +$
 $+ a_2 + \dots + a_{n-1})^2.$
298. Să se verifice identitatea:
 $[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]^2 = 2[(x - y)^4 + (y - z)^4 + (z - x)^4]$
299. Dacă $x = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$, atunci
 $2x = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2,$
 $2x^2 = (b - c)^4 + (c - a)^4 + (a - b)^4.$

* Identitatea lui Lagrange.

300. Să se arate că expresiile

$$\begin{aligned} & -ax + (b + c)(y + z), \quad -by + (c + a)(z + x), \\ & -cz + (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

devin identice dacă

$$x = 2(b + c) - a, \quad y = 2(c + a) - b, \quad z = 2(a + b) - c.$$

* * *

Să se calculeze expresiile

$$301. \frac{a}{2-a} \left(1 - a - \frac{1}{1-a} \right) + \frac{a^2}{1-a}$$

$$302. \frac{a}{1-\frac{1}{a}} + \frac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{1-a}} + \frac{1}{\frac{1-a}{a}}$$

$$303. \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2}{(a+b)^2 - (a-b)^2} \cdot \frac{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2}$$

$$304. a^2 b^2 \left[\frac{1}{(a+b)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{2}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]$$

$$305. (a - c) \left(a + \frac{bc - ad}{a - b - c + d} \right) - (b - d) \left(b + \frac{bc - ad}{a - b - c + d} \right)$$

Să se scrie rezultatul sub formă de produs.

* * *

$$306. \frac{a^2 - bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 - ac}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2 - ab}{(c+a)(c+b)}$$

$$307. \frac{b(b-a)}{(b-c)(b^2+d^2)} + \frac{c(c-a)}{(c-b)(c^2+d^2)} + \frac{d^2(a-b-c) - abc}{(b^2+d^2)(c^2+d^2)}$$

$$308. \frac{x-a}{(x-y)(x-z)} + \frac{y-a}{(y-x)(y-z)} + \frac{z-a}{(z-x)(z-y)}$$

$$309. \frac{1-x^4}{1-x} + \frac{(1-x^4)(x-x^4)}{x-x^3} + \frac{(1-x^4)(x-x^4)(x^2-x^4)}{x^3-x^6} +$$

$$+ \frac{(1-x^4)(x-x^4)(x^2-x^4)(x^3-x^4)}{x^6-x^{10}}$$

$$310. \frac{2a-b}{4a^2-3ab-b^2} - \frac{a+b}{16a^2-b^2} + \frac{a^2+b^2}{4a^3+a^2b-4ab^2-b^3}$$

$$311. \frac{x^2 z^2}{b^2 c^2} + \frac{(x^2 - b^2)(b^2 - z^2)y^2}{(y^2 - b^2)(c^2 - b^2)b^2} + \frac{(x^2 - c^2)(c^2 - z^2)y^2}{(y^2 - c^2)(b^2 - c^2)c^2}$$

$$312. \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

* * *

Să se verifice identitățile

$$313. \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} - \frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1} - \frac{1}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} -$$

$$- \frac{1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{(x^4 - 1)(x - 1)^2}$$

$$314. \frac{1}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a}{(a^2-1)(a^3-1)} +$$

$$+ \frac{a^2}{(a^3-1)(a^4-1)} = \frac{a^2 + a + 1}{(a-1)(a^4-1)}$$

$$315. \frac{1}{1+a+2a^2+a^3+a^4} + \frac{1}{1-a+2a^2-a^3+a^4} = \frac{2}{1+a^2+a^4}$$

$$316. \frac{\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2+1)}}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2} = 2 \left[\frac{\frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-1}{x^2+1}}{3 + \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2} \right]^2$$

$$317. \left(\frac{\frac{a-c}{a+c} + \frac{b-c}{b+c}}{\frac{a+c}{a-c} + \frac{b+c}{b-c}} \right)^n = \frac{\left(\frac{a-c}{a+c} \right)^n + \left(\frac{b-c}{b+c} \right)^n}{\left(\frac{a+c}{a-c} \right)^n + \left(\frac{b+c}{b-c} \right)^n}$$

Să se aducă la o formă mai simplă expresiile

$$318. \frac{3 \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^3 - 3 \left(\frac{a-b}{a+b} \right) + 1}{3 \left(\frac{a+b}{a-b} \right) - 3 \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 + \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^3 - 1}$$

$$319. \left(\frac{a+b}{1-ab} - \frac{a-b}{1+ab} \right) : \left(1 + \frac{a^2-b^2}{1-a^2b^2} \right)$$

$$320. \left(\frac{a+b}{1-ab} - \frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ca} \right) : \left[1 + \frac{(a+b)(a+b+c-abc)}{(1+ab)(1-ab-bc-ca)} \right]$$

$$321. \frac{\frac{1}{a}(b-c) + \frac{1}{b}(c-a) + \frac{1}{c}(a-b)}{\frac{1}{a} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{c} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)}$$

$$322. \frac{a^2b - \frac{1}{a^2b} + ab^2 - \frac{1}{ab^2}}{a^3 - \frac{1}{a^3} + 3\left(a^2b - \frac{1}{a^2b}\right) + 3\left(ab^2 - \frac{1}{ab^2}\right) + b^3 - \frac{1}{b^3}}$$

$$323. \frac{2a\left(\frac{a+b}{1-ab} + \frac{a-b}{1+ab}\right) - (1-a^2)\left(1 - \frac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}\right)}{(a^3+2a-1)\left(1 + \frac{a+b}{1-ab} + \frac{a-b}{1+ab} - \frac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}\right)}$$

$$324. \frac{\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}}{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} - \frac{3}{a+b+c}}$$

$$325. \frac{3 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}}{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}}$$

$$326. \frac{a \frac{b-c}{b+c} + b \frac{c-a}{c+a} + c \frac{a-b}{a+b}}{\frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{a-b}{a+b}}$$

$$327. \frac{2\left(\frac{a}{-a+b+c} + \frac{b}{a-b+c} + \frac{c}{a+b-c}\right) + 3}{\frac{1}{-a+b+c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{a+b-c}}.$$

328. Să se afle valoarea expresiei

$$E = 2(x + y + z + xyz) + (1-x)(1-y)(1-z) + (1+x)(1+y)(1+z)$$

pentru

$$x = \frac{a-1}{a+1}, \quad y = \frac{b-1}{b+1}, \quad z = \frac{c-1}{c+1}.$$

329. Dacă notăm

$$x = \frac{a-b}{1+ab}, \quad y = \frac{b-c}{1+bc}, \quad z = \frac{c-a}{1+ca},$$

atunci

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) = (1-xy-yz-zx)^2$$

330. Dacă

$$x = \frac{a-b}{a+b}, \quad y = \frac{b-c}{b+c}, \quad z = \frac{c-a}{c+a},$$

atunci

$$(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z).$$

331. Să se afle valoarea expresiei

$$E = \frac{a-x}{b-x} + \frac{b-x}{a-x} - \frac{a^2+b^2}{x^2-(a+b)x+ab} \text{ pentru } x = \frac{ab}{a+b}.$$

332. Dacă $x = ab - c^2$, $y = bc - a^2$, $z = ca - b^2$, să se arate că valoarea citului $Q = \frac{a^3x^3 + b^3y^3 + c^3z^3}{xyz}$ este întreagă în raport cu a, b, c .

333. Dacă $P(x) = 2x + 3$, $Q(x) = 4x + 9$, atunci $P[Q(x)] = Q[P(x)]$.

334. Se dă $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Să se calculeze $f[f(x)]$.

335. Se pune

$$P(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad Q(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

Să se arate că $P[Q(x)]Q[P(x)] + 1 = 0$.

336. Dacă $P(x) = x^2 + ax + b$, să se calculeze

$$P[-P(x)] - P[P(-x)].$$

* * *

Să se verifice identitățile

$$\textbf{337. } \frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}.$$

$$\textbf{338. } a \frac{b-c}{1+a^2bc} + b \frac{c-a}{1+ab^2c} + c \frac{a-b}{1+abc^2} = \frac{abc(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+a^2bc)(1+ab^2c)(1+abc^2)}.$$

$$\begin{aligned} \textbf{339. } & \frac{a-b}{1+a+b+2ab} + \frac{b-c}{1+b+c+2bc} + \frac{c-a}{1+c+a+2ca} = \\ & = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+a+b+2ab)(1+b+c+2bc)(1+c+a+2ca)}. \end{aligned}$$

340*. Notăm

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)} = s_k.$$

* Generalizări, v. G.M., XLVIII, p. 98–104; 145–150 și G.M., XLIX, p. 481–490.

Să se arate că

$$s_0 = s_1 = 0, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = a + b + c,$$

$$s_4 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca,$$

$$s_5 = a^3 + b^3 + c^3 + a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + abc.$$

* * *

Folosind ex. 340 să se arate că

$$341. \frac{a + b - c}{(b - c)(c - a)} + \frac{b + c - a}{(c - a)(a - b)} + \frac{c + a - b}{(a - b)(b - c)} = 0$$

$$342. \frac{ma + n}{(a - b)(a - c)} + \frac{mb + n}{(b - a)(b - c)} + \frac{mc + n}{(c - a)(c - b)} = 0$$

$$343. \frac{la^2 + ma + n}{(a - b)(a - c)} + \frac{lb^2 + mb + n}{(b - a)(b - c)} + \frac{lc^2 + mc + n}{(c - a)(c - b)} = l$$

$$344. \frac{(m + b)(m + c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{(m + c)(m + a)}{(b - c)(b - a)} + \frac{(m + a)(m + b)}{(c - a)(c - b)} = 1$$

$$345. \sum \frac{1}{a^2(a - b)(a - c)} = \frac{ab + bc + ca}{a^2b^2c^2}$$

$$346. \sum \frac{(b + c)bc}{(a - b)(a - c)} = a + b + c.$$

$$347. \sum \frac{a(x - b - c)}{(a - b)(a - c)} = 1$$

$$348. \sum \frac{a^2b^2}{(b - c)(a - c)} = ab + bc + ca$$

$$349. \sum \frac{(1 + a + a^2)bc}{(a - b)(a - c)} = 1$$

$$350. \sum \frac{a^4 - b^2c^2}{(a - b)(a - c)} = a^2 + b^2 + c^2$$

$$351. \sum \frac{a^4 + b^2c^2}{(a - b)(a - c)} = (a + b + c)^2$$

$$352. \sum \frac{a^2(x - b - c)}{(a - b)(a - c)} = x$$

$$353. \sum a^2 \cdot \frac{(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} = x^2$$

$$354. \frac{(a - m)(a - p)(a - q)}{(a - b)(a - c)} + \frac{(b - m)(b - p)(b - q)}{(b - a)(b - c)} + \\ + \frac{(c - m)(c - p)(c - q)}{(c - a)(c - b)} = a + b + c - (m + p + q).$$

355. Notăm

$$a^m \cdot \frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + b^m \cdot \frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + c^m \cdot \frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} = \sigma_m.$$

Să se calculeze σ_1 , σ_2 și σ_3 .

* * *

Să se arate că

$$356. \sum \frac{1}{a(a-b)(a-c)} = \frac{1}{abc}$$

$$357. \sum a \cdot \frac{\frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}}{\frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}} = 0$$

$$358. \sum a \cdot \frac{\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a}}{\frac{a}{b+c} - \frac{b}{c+a}} = 1$$

$$359. \sum a \cdot \frac{\frac{c}{b(a-c)} - \frac{b}{c(a-b)}}{\frac{b(a-c)}{c} - \frac{c(a-b)}{b}} = 0.$$

* * *

360. Să se verifice

$$ab \frac{(c-m)(c-n)(c-p)}{(c-a)(c-b)} + bc \frac{(a-m)(a-n)(a-p)}{(a-b)(a-c)} +$$

$$+ ca \frac{(b-m)(b-n)(b-p)}{(b-a)(b-c)} = abc - mnp.$$

361. Notăm

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-d)} +$$

$$+ \frac{c^k}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^k}{(d-a)(d-b)(d-c)} = s_k.$$

Să se arate că

$$s_0 = s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = a + b + c + d.$$

362. Să se verifice

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 b^2 c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)} + \frac{a^2 b^2 d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)} + \\ & + \frac{a^2 c^2 d^2}{(a-b)(c-b)(d-b)} + \frac{b^2 c^2 d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)} = \\ & = abc + abd + acd + bcd. \end{aligned}$$

363. Să se calculeze

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

pentru $k = 1$ și $k = 2$

* * *

Să se verifice identitățile

$$\begin{aligned} \text{364. } & \frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)} + \frac{c+d+a}{(c-b)(d-b)(a-b)(x-b)} + \\ & + \frac{d+a+b}{(d-c)(a-c)(b-c)(x-c)} + \frac{a+b+c}{(a-d)(b-d)(c-d)(x-d)} = \\ & = \frac{x-a-b-c-d}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{365. } & \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + 2\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \dots + (n-1)\left(x + \frac{1}{x}\right) + n = \\ & = \frac{1}{x^{n-1}} \left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)^2 \end{aligned}$$

* * *

366. Să se afle coeficientul termenului în x^p din dezvoltarea

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})^2.$$

367. Să se arate că produsele

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1}\right) \left(x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}\right) \\ P_2 &= \left(x^{2^n} + x^{2^{n-1}} + \dots + x + 1 + \frac{2}{x-1}\right) \left(x^{2^n} - x^{2^{n-1}} + \dots - x + 1 - \frac{2}{x+1}\right) \end{aligned}$$

nu se schimbă, dacă se suprimă cele două fracții.

368. Să se determine două polinoame $P(x)$ și $Q(x)$ de gradul întâi astfel încît să avem identitatea $(x^2 + 2x + 2) \cdot P(x) + (x^2 + 3x + 3) \cdot Q(x) = 1$.

369. Să se determine un polinom $P(x)$ de gradul al doilea și altul $Q(x)$ de gradul întâi care să satisfacă identitatea

$$(2x - 1) P(x) + (2x^2 - 3x + 5) Q(x) = 4x^2 - 6x + 10$$

370. Să se găsească polinoamele de gradul al doilea care satisfac relația $P^2(x + 1) - P(x) \cdot P(x + 2) = 2P(x + 1)$.

371. Să se pună polinomul $2x^3 - 15x^2 + 78x - 92$ sub forma $A(x + a)^3 + B(x - b)^3$.

372. Să se pună expresia $6x^2 - 25x + 23$ sub forma $a(x - 1)(x - 2) + b(x - 2)(x - 3) + c(x - 3)(x - 1)$.

373. Ce valori întregi trebuie să dăm lui x pentru ca $x^2 - 14x - 256$ să fie un pătrat perfect.

374. Să se verifice că dacă $x + y = u$ și $xy = v$, atunci

$$1^\circ x^2 + y^2 = u^2 - 2v, \quad 2^\circ x^3 + y^3 = u^3 - 3uv,$$

$$3^\circ x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2,$$

$$4^\circ x^5 + y^5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2.$$

375. Se dau relațiile

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}.$$

Să se calculeze în funcție de a, b, c suma $x^3 + y^3 + z^3$.

376. Se dă sistemul

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b, \quad x^3 + y^3 + z^3 = c.$$

Ce relație trebuie să existe între a, b, c pentru ca xyz să fie nul?

377. Să se arate că pătratul sumei $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ se poate pune sub forma $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw$, unde u, v, w sînt de forma $p^2 - qr$.

378. Să se determine un polinom întreg $P(x)$ astfel ca

$$P(x + 2) - 2P(x + 1) + P(x) \equiv x.$$

379. Frația $\frac{ax + b}{Ax + B}$ este independentă de x dacă $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$, și reciproc.

A p l i c a ț i e : Frația $\frac{1 - \cos 2a + x \operatorname{tg}^2 a}{x + 1 + \cos 2a}$ este independentă de x .

380. Să se arate că condiția necesară și suficientă ca

$$\frac{ax^2 + bx + c}{Ax^2 + Bx + C}$$

să fie independentă de x este ca

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

381. Să se afle condiția ca proporția
 $(a^2 + mb^2) : (b^2 + mc^2) = a : c$ să nu depindă de m .

382. Pentru ce valori ale lui m expresia

$$\frac{(x + y + mz)^2 + (x + my + z)^2 + (mx + y + z)^2}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$$

este constantă?

383. Pentru ce valori ale lui m fracția

$$\frac{x^3 - mx^2 - 3(3 - m)x - 1}{(m - 8)x^3 + 3(10 - m)x^2 - 18x + 8 - m}$$

este constantă?

* * *

Să se arate că dacă $a + b + c = 0$, avem

$$\begin{aligned} \mathbf{384.} \quad a^2 - bc &= b^2 - ac = c^2 - ab = a^2 + ab + b^2 = \\ &= b^2 + bc + c^2 = c^2 + ac + c^2 = \frac{1}{2} [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = \\ &= -(ab + bc + ca) = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$\mathbf{385.} \quad a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\mathbf{386.} \quad a^3b + b^3c + c^3a = a^3c + b^3a + c^3b$$

$$\begin{aligned} \mathbf{387.} \quad 3a^2 + (b - c)^2 &= 3b^2 + (c - a)^2 = 3c^2 + (a - b)^2 = \\ &= \frac{5}{3} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{2}{3} (ab + bc + ca) \end{aligned}$$

$$\mathbf{388.} \quad ab(a^2 + bc) + bc(b^2 + ca) + ca(c^2 + ab) = -a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$$

$$\mathbf{389.} \quad (ax + b)^4 + (bx + c)^4 + (cx + a)^4 = (bx + a)^4 + (cx + b)^4 + (ax + c)^4$$

$$\mathbf{390.} \quad (2a - b)^3 + (2b - c)^3 + (2c - a)^3 = 3(2a - b)(2b - c)(2c - a)$$

$$\mathbf{391.} \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

$$392. 5abc(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a^5 + b^5 + c^5)$$

$$393. 5(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) = 6(a^5 + b^5 + c^5)$$

$$394. 2(a^5 + b^5 + c^5)^2 = 25a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4)$$

$$395. 4(a^7 + b^7 + c^7) = 7abc(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$396. 12(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^2 + b^2 + c^2)^2(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$397. \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + 2 \right) = 3$$

$$398. \sum \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) \left(\frac{b-c}{c-a} - \frac{c-a}{b-c} \right) = 9$$

$$399. \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = 9.$$

$$400. \frac{1}{7a^3 + b^3 + c^3} + \frac{1}{a^3 + 7b^3 + c^3} + \frac{1}{a^3 + b^3 + 7c^3} = \frac{7}{a^3 + b^3 + c^3}$$

$$401. \frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{2b^2 + ca} + \frac{1}{2c^2 + ab} = 0$$

$$402. \frac{a}{2a^2 + bc} + \frac{b}{2b^2 + ca} + \frac{c}{2c^2 + ab} = 0$$

$$403. \frac{a^2}{a^2 - (b-c)^2} + \frac{b^2}{b^2 - (a-c)^2} + \frac{c^2}{c^2 - (a-b)^2} = \frac{3}{4}$$

$$404. \frac{a^2(a^2 - 2bc)}{a^4 - (b-c)^4} + \frac{b^2(b^2 - 2ac)}{b^4 - (a-c)^4} + \frac{c^2(c^2 - 2ab)}{c^4 - (a-b)^4} = \frac{3}{8}$$

$$405. (a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) = 8a^2b^2c^2 + (ab + bc + ca)^3$$

406. Utilizând identitatea nr. 385 să se arate că

$$\begin{aligned} & (a + 2b - 3c)^3 + (b + 2c - 3a)^3 + (c + 2a - 3b)^3 = \\ & = 3(a + 2b - 3c)(b + 2c - 3a)(c + 2a - 3b) \end{aligned}$$

$$407. a^3(b^3 - c^3)^3(a^2 + bc)^3 + b^3(c^3 - a^3)^3(b^2 + ac)^3 + c^3(a^3 - b^3)^3(c^2 + ab)^3 = \\ = 3abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab)$$

408. Dacă trei numere distincte x, y, z satisfac relațiile

$$x^3 + px + q = 0, \quad y^3 + py + q = 0, \quad z^3 + pz + q = 0,$$

atunci trebuie ca $x + y + z = 0$

409. Dacă

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b},$$

atunci avem și

$$1^\circ AB - ab = (A - a)(B + b) = (A + a)(B - b)$$

$$2^\circ AB^2 - ab^2 = (A - a)(B^2 + Bb + b^2)$$

$$3^\circ AB^2 + ab^2 = (A + a)(B^2 - Bb + b^2).$$

* * *

Dacă $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, atunci

$$410. (a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3) = (ax^2 + by^2 + cz^2)(a^2x + b^2y + c^2z)$$

$$411. (ax + by + cz)(a^3 + b^3 + c^3) = (a^2 + b^2 + c^2)(a^2x + b^2y + c^2z)$$

$$412. \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{by} + \sqrt[3]{cz} = \sqrt[3]{(a + b + c)(x + y + z)}$$

$$413. \text{ Dacă } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = q, \text{ atunci } q = \sqrt[n]{\frac{f(x, y, z)}{f(a, b, c)}}, \text{ în care } f(x, y, z)$$

este o funcție omogenă în x, y, z și de gradul n , de omogenitate.

* * *

Să se arate că dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci

$$414. \frac{(a - b)^4}{(c - d)^4} = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4} \quad 415. \frac{ab}{cd} = \frac{(a + b)^2}{(c + d)^2}$$

$$416. \sqrt[4]{\frac{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - d^2)}} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - d^2}}$$

417. $\frac{f(a, b)}{g(a, b)} = \frac{f(c, d)}{g(c, d)}$; $f(x, y), g(x, y)$ fiind funcții omogene în x și y de același grad de omogenitate.

$$418. a^3d^3 + ab^2d^3 + a^3c^2d + ab^2c^2d = b^3c^3 + a^2bc^3 + b^3cd^2 + a^2bcd^2$$

$$419. \sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + d^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} = (a - d)(b - c).$$

* * *

420. Dacă

$$\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c},$$

atunci

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

421. Dacă

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c} \text{ și } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{\gamma},$$

atunci

$$\frac{ac + bc + ab}{\alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta} = \frac{ac + bc - ab}{\alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta}.$$

* * *

Dacă $x + y + z = xyz$, atunci

$$422. (1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) = (1 - xy - yz - zx)^2$$

$$423. \frac{x}{1 - x^2} + \frac{y}{1 - y^2} + \frac{z}{1 - z^2} = \frac{4xyz}{(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)}$$

$$424. \frac{x(3 - x^2)}{1 - 3x^2} + \frac{y(3 - y^2)}{1 - 3y^2} + \frac{z(3 - z^2)}{1 - 3z^2} = \frac{xyz(3 - x^2)(3 - y^2)(3 - z^2)}{(1 - 3x^2)(1 - 3y^2)(1 - 3z^2)}.$$

425. Să se arate că dacă

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{m}, \text{ atunci } \frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{(a - m)(b - m)(c - m)} = \frac{abc}{m^3}.$$

* * *

426. Dacă $a + b + c = ab + ac + ca$, atunci

$$b^3c^3(a + b)(a + c) + c^3a^3(b + c)(b + a) + a^3b^3(c + a)(c + b) = 0$$

427. Dacă $a^2b^2 - abc^2 = b^2c^2 - a^2bc = c^2a^2 - ab^2c$ atunci $a = b = c$
sau $ab + bc + ca = 0$; ($a, b, c \neq 0$).

428. Dacă

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{\frac{m}{c} + ab} = \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}{\frac{m}{a} + bc} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}{\frac{m}{b} + ca}$$

atunci $a = b = c$.

429. Să se arate că dacă $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, avem
 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

* * *

Dacă $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, atunci

$$430. \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} + \frac{a + b}{c} = -3$$

$$431. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = -\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$$

$$432. \left(\frac{a^2 - bc}{b+c} + \frac{b^2 - ac}{a+c} + \frac{c^2 - ab}{a+b} \right) \left(\frac{b+c}{a^2 - bc} + \frac{c+a}{b^2 - ac} + \frac{a+b}{c^2 - ab} \right) = \\ = \frac{3}{abc} (a^3 + b^3 + c^3).$$

* * *

433. Dacă n este un număr întreg și impar și

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

atunci

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

434. Dacă

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad a + b + c = 0, \quad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0,$$

avem

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0.$$

435. Să se arate că dacă $(a+b)(c+d) = 2(ab+cd)$, atunci

$$1^\circ \left(\frac{a}{x+a} + \frac{b}{x+b} \right) \left(\frac{c}{x+c} + \frac{d}{x+d} \right) = 2 \left[\frac{ab}{(x+a)(x+b)} + \frac{cd}{(x+c)(x+d)} \right] \\ 2^\circ \left(\frac{x+a}{y+a} + \frac{x+b}{y+b} \right) \left(\frac{x+c}{y+c} + \frac{x+d}{y+d} \right) = 2 \left[\frac{(x+a)(x+b)}{(y+a)(y+b)} + \frac{(x+c)(x+d)}{(y+c)(y+d)} \right]$$

436. Dacă

$$\frac{x - \frac{1}{x}}{a} = \frac{x^3 - \frac{1}{x^3}}{b} = \frac{x^5 - \frac{1}{x^5}}{c},$$

atunci

$$a(b+c) + a^2 - b^2 = 0.$$

437. Dacă

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

avem

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

438. Să se arate că dacă

$$\frac{a^2b^2c^2 + u^2}{abc} + \frac{a^2u^2 + 1}{a} + \frac{b^2u^2 + 1}{b} + \frac{c^2u^2 + 1}{c} = 0,$$

atunci

$$\frac{1 + u^2}{1 - u^2} = \frac{1 - ab}{1 + ab} \cdot \frac{1 - bc}{1 + bc} \cdot \frac{1 - ca}{1 + ca}.$$

439. Din relațiile

$$\frac{a_1}{1 + b_1} + \frac{a_2}{1 + b_2} + \dots + \frac{a_n}{1 + b_n} = \frac{A}{1 + B},$$

$$\frac{a_1(B - b_1)}{1 + b_1} + \frac{a_2(B - b_2)}{1 + b_2} + \dots + \frac{a_n(B - b_n)}{1 + b_n} = 0$$

rezultă că

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = A.$$

* * *

Să se descompună în fracții simple

$$440. \frac{x^5 - x^3 - x^2}{x^2 - 1} \quad 441. \frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x} \quad 442. \frac{x - 1}{x^2(x - 2)(x + 1)^2} \quad 443. \frac{x^5 + 1}{x^4(x^2 + 1)}$$

$$444. \frac{3x^4 + 4}{x^3(x^2 + 1)^2} \quad 445. \frac{x}{x^3 + 1} \quad 446. \frac{1}{x^4 + 1} \quad 447. \frac{12x^3 - 7x^2 + 2}{4x^6 + 21x^4 + 21x^2 + 4}.$$

§ 2. Calcule cu puteri și radicali

Să se efectueze calculele

$$448. a^{n+p} \cdot b^{p+m} \cdot c^{m+n} \cdot \frac{a^m b^n c^p}{a^n b^p c^m} \cdot \frac{a^m b^n c^p}{a^p b^m c^n}$$

$$449. \left[\frac{(2a^{-1}x^{-n})^2}{by^{-1}} \right]^{-3} \cdot \left[\frac{a^2x^n}{4(b^{-1}y^2)^3} \right]^{-2}$$

$$450. (a^p b^q)^{pq-r^2} \cdot (a^q b^r)^{qr-p^2} \cdot (a^r b^p)^{pr-q^2}$$

$$451. \left[(m^a)^{\frac{1}{b}} \cdot (m^c)^{\frac{1}{d}} \right]^{bd} : \left(n^{\frac{d}{c}} n^{\frac{b}{a}} \right)^{ac}$$

$$452. x^4(x^a)^a \cdot \left(\frac{x^a}{x} \right)^a - (x^5)^a \cdot \frac{(x^4)^a}{x^4} - x^{-a}(x^{a^2+4} - x^{5a})(x^{a^2} + x^{5a-4})$$

$$453. \left(\frac{a^2}{b} + \frac{x^{-1}}{y^{-2}} \right)^{-3} \cdot \left(\frac{a^2}{b} - \frac{x^{-1}}{y^{-2}} \right)^{-3}$$

$$454. \frac{\left[(a^m)^{\frac{1}{r}} (a^q)^{\frac{1}{n}} \right]^{nr}}{\left(\sqrt[q]{b^n} \sqrt[n]{b^r} \right)^{mq}} : \left[\left(\frac{a}{b} \right)^q \right]^r.$$

* * *

Să se arate că

$$455. \frac{a^{(x+y)(x+z)}}{a^{x^2}} = \frac{a^{(y+x)(y+z)}}{a^{y^2}} = \frac{a^{(z+x)(z+y)}}{a^{z^2}}.$$

456. Se dau expresiile

$$E_1 = \frac{x^8(x^a)^a(x^5)^a}{x^{a(a-1)}x^{4a}}, \quad E_2 = \left[\frac{x^4(x^a)^a + (x^5)^a}{\left(\frac{x^a}{x}\right)^a + \frac{(x^4)^a}{x^4}} \right]^2.$$

Să se calculeze cîtul dintre ele.

* * *

Să se calculeze

$$457. \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}; \quad 458. \sqrt[x]{a^{x-y}} \cdot \sqrt[y]{a^{y-z}} \cdot \sqrt{a^{z-x}}.$$

$$459. \sqrt[5]{\sqrt[4]{\frac{a^5}{\sqrt[3]{a^2}}}} \sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{a}{\sqrt{a}}}} \sqrt[30]{\frac{a^5}{\sqrt{a}}} \sqrt[5]{a^3} \quad 460. \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}}^3 \sqrt{\frac{a^2 \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^3}}}^4 \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{a \sqrt[3]{a^2}}}^8 \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^{11}}}{\sqrt{a}}}.$$

* * *

Să se simplifice fracțiunile

$$461. \frac{a^2 + a\sqrt{b} - \sqrt{ab} - a}{a + \sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad 462. \frac{a(x-y) + b\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{a\sqrt{x} + b\sqrt{xy} + a\sqrt{y}}.$$

$$463. \frac{x^2 + 2x + 2x\sqrt{y} + y + 2\sqrt{y}}{x^2 - x + x\sqrt{y} - \sqrt{y}} \quad 464. \frac{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} + x^3 - 3x - 2}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} + x^3 - 3x + 2}$$

$$465. \frac{a^3 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 2b^{\frac{13}{12}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}}$$

$$466. \frac{2a + 5\sqrt[4]{a^3b} - 5\sqrt[4]{ab^3} - 2b}{2\sqrt{a} + 5\sqrt[4]{ab} + 2\sqrt{b}}$$

$$467. \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$$

$$468. \frac{x^2 + y + \sqrt[3]{z^2} - 2x\sqrt{y} + 2x\sqrt[3]{z} - 2\sqrt[6]{y^3z^2}}{x^2 - y - \sqrt[3]{z^2} + 2\sqrt[6]{y^3z^2}}.$$

* * *

Să se efectueze operațiile

$$469. \left(x^{\frac{1}{8}} - 1\right)\left(x^{\frac{1}{8}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)(x + 1)$$

$$470. \left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y - y^{\frac{3}{2}}\right) : \left|x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$471. (a + b + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$$

$$472. (\sqrt[3]{x^2y^2} + \sqrt[3]{xy} + 1)(\sqrt[3]{xy} - 1)$$

$$473. (\sqrt{a^7} - a^3 + \sqrt{a^5} - a^2 + a\sqrt{a} - a + \sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)$$

$$474. (x - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$475. (ad - b^2c\sqrt{d} - bd\sqrt{c} - b\sqrt{cd} - d + a^2\sqrt{d} - a\sqrt{d}) : (a + b\sqrt{c} + \sqrt{d})$$

$$476. (x - \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2} - y) : (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}).$$

* * *

Să se raționalizeze numitorii fracțiilor

$$477. \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}} + \sqrt{a + \sqrt{b}}}$$

$$478. \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$479. \frac{1 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

$$480. \frac{1 + a + \sqrt{1 - a^2}}{1 + a - \sqrt{1 - a^2}}$$

$$481. \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$482. \frac{1}{\sqrt[3]{x - y}}$$

$$483. \frac{c}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \quad 484. \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$$

$$485. \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \quad 486. \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$$

$$487. \frac{1}{\sqrt[3]{a^2 - b^2} + \sqrt[3]{(a-b)^2} + \sqrt[3]{(a+b)^2}}$$

$$488. \frac{7}{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}} \quad 489. \frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}}$$

490. Să se calculeze sumele

$$1^\circ \quad 1 + \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n-1} + \sqrt[3]{n}}$$

$$2^\circ \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt[3]{n+1} + (n+1)\sqrt[3]{n}}$$

* * *

Să se scrie sub formă rațională ecuațiile

$$491. \sqrt{ax} + \sqrt{by} = \sqrt{cz} \quad 492. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$$

$$493. \left(xy\right)^{\frac{2}{3}} \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = a^2 \quad 494. \left(ax\right)^{\frac{2}{3}} + \left(by\right)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

$$495. \left(xy\right)^{\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2 = a^2 \quad 496. ax^{\frac{1}{3}} + by^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2.$$

* * *

Să se verifice egalitățile

$$497. \sqrt{2 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt{2 - \sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{6}$$

$$498. \sqrt{13 + \sqrt[3]{133}} - \sqrt{13 - \sqrt[3]{133}} = \sqrt[3]{14}$$

$$499. \sqrt{\frac{2 + \sqrt[3]{3}}{2 - \sqrt[3]{3}}} + \sqrt{\frac{2 - \sqrt[3]{3}}{2 + \sqrt[3]{3}}} = 4$$

$$500. \frac{2}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - 1} = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{6} - 2}{2}$$

$$501. \frac{\sqrt[3]{3+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{4+\sqrt{7}}}{\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{5} + 2} = \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{\sqrt[3]{5-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{3+\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{\sqrt[3]{5+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$502. \sqrt[3]{8\sqrt{2} + \sqrt[3]{111}} + \sqrt[3]{8\sqrt{2} - \sqrt[3]{111}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{32 + 2\sqrt[3]{34}}$$

$$503. \sqrt[3]{10 + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{60}} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$$

$$504. (\sqrt[3]{3} + 3) \sqrt[3]{54 - 30\sqrt[3]{3}} = 6.$$

$$505. \sqrt[3]{7+5\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt[3]{2}} = 2$$

$$506. \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt[3]{\frac{847}{27}}} = 3$$

* * *

Să se scrie sub formă simplă expresiile

$$507. (\sqrt{x^2 + xy} + x - \sqrt{xy}) (\sqrt{xy + y^2} - \sqrt{xy} + y)$$

$$508. \left(\sqrt[3]{1-a} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+a}} \right) : \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{1-a^2}} \right)$$

$$509. \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}} : \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}}}$$

$$510. \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$511. \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}} \right) \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}} + \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} \right).$$

* * *

Să se verifice identitățile

$$512. \left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} - a \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) \left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} - b \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) = \frac{ab}{a+b}$$

$$513. (x\sqrt[3]{1-y^2} + y\sqrt[3]{1-x^2}) (xy + \sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)}) =$$

$$= x\sqrt[3]{1-x^2} + y\sqrt[3]{1-y^2}$$

$$514. 2^{\frac{1}{2}} \left[2a + (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \right] \left[a - (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = (a + b)^{\frac{3}{2}} - (a - b)^{\frac{3}{2}}$$

$$515. \left[\frac{x + (x^2 - y)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x - (x^2 - y)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(x + y^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$516. \frac{1 + ab - \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}}{a + b} = \frac{a \sqrt{1 - b^2} + b \sqrt{1 - a^2}}{\sqrt{1 - b^2} + \sqrt{1 - a^2}}$$

$$517. [ab + \sqrt{(a^2 b^2 - 2)(1 - 2ab)}]^2 - [ab \sqrt{1 - 2ab} + \sqrt{a^2 b^2 - 2}]^2 = 4ab$$

$$518. [ab + \sqrt{(a^2 - 2b^2)(b^2 - 2a^2)}]^2 - [a \sqrt{b^2 - 2a^2} + b \sqrt{a^2 - 2b^2}]^2 = 4a^2 b^2$$

$$519. \frac{x + (2\sqrt{2} - 3)(1 - x)}{1 + 2\sqrt{2x(1 - x)}} = \frac{1 - 2\sqrt{2x(1 - x)}}{x - (2\sqrt{2} + 3)(1 - x)}$$

$$520. \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = \sqrt{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^3}$$

$$521. \frac{a^2 \sqrt{1 + b^2} - b^2 \sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{1 + b^2}} = 1 + \sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}$$

$$522. \frac{x - a + a \sqrt{1 - x^2} - x \sqrt{1 - a^2}}{x - a + a \sqrt{1 - x^2} + x \sqrt{1 - a^2}} \cdot \frac{1 - ax + \sqrt{1 - a^2} \sqrt{1 - x^2}}{x - a} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - a} - \sqrt{1 + a}}{\sqrt{1 - a} + \sqrt{1 + a}}$$

$$523. \frac{\sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}} + \sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}}{\sqrt[n]{\frac{x+b}{x+a}} + \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}} + \frac{\sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}} - \sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}}{\sqrt[n]{\frac{x+b}{x+a}} - \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}} = 0$$

$$524. \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1, \quad a \geq \frac{1}{8}.$$

$$525. \text{ Se dă } x = a^{-\frac{5}{6}} - a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{5}{6}},$$

$$y = a^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}, \quad z = a^{-\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}.$$

Să se calculeze valoarea expresiei :

$$E = \frac{xz - y}{(z - 1)(x + y)}.$$

526. Să se scrie sub formă de sumă sau diferență de doi radicali

$$\begin{aligned} 1^\circ & \sqrt{a + \sqrt{b}}; \quad 2^\circ \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}; \quad 3^\circ \sqrt{5 \pm \sqrt{21}}; \quad 4^\circ \sqrt{1 + \sqrt{2}}; \\ 5^\circ & \sqrt{3\sqrt{5} + \sqrt{40}}; \quad 6^\circ \sqrt{3 + 2x} \sqrt{3 - x^2}; \quad 7^\circ \sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}}; \\ 8^\circ & \sqrt{3x + \sqrt{12x^3y^2 - 4x^4y^4}}; \quad 9^\circ \sqrt{6a - 2\sqrt{9a^2 - 4x^2}}; \\ 10^\circ & \sqrt{2x - 2\sqrt{x^2 - y^2}}; \quad 11^\circ \sqrt{2x - y + 2\sqrt{x^2 - xy}}; \\ 12^\circ & \sqrt{\frac{a^2b - ab^2}{c}} \pm \sqrt{-\frac{4a^3b^3}{c^2}}. \end{aligned}$$

527. Să se transforme expresia

$$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}}$$

într-o sumă de radicali (a , b și c fiind numere raționale).

528. Să se transforme expresia

$$\sqrt{3 + \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}$$

într-o sumă de două expresii iraționale de forma

$$\sqrt{x + \sqrt{z}} + \sqrt{y - \sqrt{z}}.$$

529. Să se determine numerele naturale x și y pentru a avea

$$\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} = x + y\sqrt{2}.$$

530. Dându-se expresia

$$E = \sqrt{a^2x - \sqrt{a^3x - a}},$$

se cere valoarea lui a pentru care expresia se poate pune sub forma unei diferențe de doi radicali și să se dea forma ei în acest caz.

531. Să se transforme expresia

$$\sqrt{x^2 + x + 1 - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x}}$$

în diferență de doi radicali simpli.

532. Se demonstrează în geometrie că, notînd cu c latura poligonului înscris în cercul de rază R și cu x latura poligonului regulat înscris cu un număr dublu de laturi, avem formula

$$x = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - c^2}}.$$

Să se scrie expresia lui x ca diferență a doi radicali simpli.

533. Se cere condiția necesară și suficientă ca rădăcinile ecuației bipătrate $x^4 + px^2 + q = 0$ să se exprime printr-o sumă de doi radicali simpli.

534. Să se determine x și y încît să avem transformarea

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = x + \sqrt{y}.$$

535. Expresia

$$\sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}}$$

se poate pune sub forma $\alpha + \beta\sqrt{2}$, unde α și β sînt numere raționale. Să se afle α și β .

536. Presupunînd că $\sqrt{b}$ este un număr irațional, să se dea condiția ca expresia $z = \sqrt[4]{a + \sqrt{b}}$ să poată fi scrisă sub forma $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, unde x și y sînt numere raționale ce urmează a se determina.

Aplicații: 1° $\sqrt[4]{6 + \sqrt{20}}$; 2° $\sqrt[4]{3 + \sqrt{48}}$; 3° $\sqrt[4]{2\alpha^2 - 1 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}}$.

* * *

Să se verifice egalitățile

$$537. \frac{\sqrt[4]{\sqrt{8} + \sqrt{\sqrt{2} - 1}} - \sqrt[4]{\sqrt{8} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}}{\sqrt[4]{\sqrt{8} - \sqrt{\sqrt{2} + 1}}} = \sqrt{2}$$

$$538. \sqrt[3]{\sqrt{x^2 + \frac{(2x-1)^3}{27}} + x} - \sqrt[3]{\sqrt{x^2 + \frac{(2x-1)^3}{27}} - x} = 1$$

* * *

Să se calculeze expresiile

$$539. \sqrt[3]{\frac{3}{2}[11 - \sqrt{21} + \sqrt{6(5 - \sqrt{21})}]} - \sqrt{6 - \sqrt{6} - \sqrt{15 - 6\sqrt{6}}}$$

$$540. \sqrt[3]{3 + \sqrt{\frac{242}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{\frac{242}{27}}} \quad 541. \frac{\sqrt[3]{\sqrt{4} + \sqrt[3]{2} + 1} - \sqrt[3]{3\sqrt[3]{2} - 3}}{\sqrt[3]{4} - 1}$$

$$542. 9\left(\sqrt[3]{2\sqrt{54}} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^{-4} - \\ - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}\sqrt[3]{40\sqrt{2}} + 56} : \sqrt[3]{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2}.$$

* * *

Să se scrie sub forma cea mai simplă expresiile

$$543. \sqrt{a^2(a^2 + 1) - b^2(b^2 - 1) + 2(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 - b^2}} - \\ - \sqrt{a^2(a^2 + 1) - b^2(b^2 - 1) - 2(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$544. \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} + x - 1} \right) \left(\sqrt{x^{-2} - 1} - \frac{1}{x} \right)$$

$$545. \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right) : \left(\sqrt[3]{\frac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[3]{a^3}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{a}}{a\sqrt[3]{b^3}}} \right), a > 0, b > 0$$

$$546. \frac{ab\sqrt{ab} - (a-b) \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)}{ab \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{ab} \right) - (a-b) \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{ab} \right)}$$

$$547. \frac{\frac{1+ab+\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{a+b} \pm \frac{1-ab+\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{a-b}}{1 \pm \frac{[1+ab+\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}][1-ab+\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}]}{a^2-b^2}}$$

$$548. \frac{a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - 2\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right) - a^{\frac{2}{3}}$$

$$549. \left[\frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right]^{-2} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}}$$

$$550. \frac{\sqrt[4]{1+a+2\sqrt{a}} - \sqrt[4]{1+a-2\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{1+a+2\sqrt{a}} + \sqrt[4]{1+a-2\sqrt{a}}}$$

$$551. \left(\frac{\sqrt[4]{ab^3} + \sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1 - \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}} \right) : \left(\frac{a - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} - 1} - \frac{a + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} + 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
552. & \frac{x - \sqrt[3]{y^2} - \sqrt{z} + 2 \sqrt[12]{y^4 z^3}}{x + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt{z} - 2 \sqrt[6]{x^3 y^2} + 2 \sqrt[4]{x^2 z} - 2 \sqrt[12]{y^4 z^3}} : \\
& \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z}}. \\
553. & \left(\frac{a - 2b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{4b^2}} + \frac{\sqrt[3]{2a^2 b} + \sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{4b^2} + \sqrt[3]{16ab}} \right) : \\
& \cdot \frac{a \sqrt[3]{a} + b \sqrt[3]{2b} + b \sqrt[3]{a} + a \sqrt[3]{2b}}{a + b}. \\
554. & \frac{\sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} - \frac{\sqrt[3]{a^2 b} - \sqrt[3]{ab^2}}{a + b} - \\
& - \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \right) (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{(a + b) (\sqrt[3]{a^{-1}} - \sqrt[3]{b^{-1}})} \\
555. & \frac{1 - \sqrt{a}}{1 - \sqrt[4]{a^3}} - \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt[4]{a^{-1}} + \sqrt[4]{a^2}}{1 + \sqrt[4]{a^{-1}}} - \sqrt{a}} \\
556. & \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt[4]{b x^3} + \sqrt[4]{a^2 b x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \sqrt[4]{b x} \right)^2 + b x + 3}{x(\sqrt{b} + \sqrt[3]{3x^{-1}})^2} \\
557. & \sqrt[3]{a} - \left(\frac{1 + a \sqrt[3]{a} + a + \sqrt[3]{a}}{1 - \sqrt[3]{a^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}} \right) \cdot \frac{\frac{1 + a}{1 + \sqrt[3]{a}} - \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} + a^{-\frac{1}{3}}} \\
558. & \left(x + \frac{a \sqrt{a}}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{5}} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \right)^{-\frac{1}{5}} \sqrt[10]{(x - a)^3} \\
559. & \left[\frac{\frac{b}{\sqrt{b} + \frac{b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}}}{\frac{a}{\sqrt{a} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{2} \sqrt[4]{\left(\frac{b}{a} \right)^{-2}} \right] : \left(1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{ab} + b}{a - b} \right) \\
560. & \left(\frac{x^{-\frac{1}{6}} - \frac{5}{\sqrt[6]{y}}}{x^{-\frac{1}{3}} - y^{-\frac{1}{3}}} - 5 \frac{x^{-\frac{1}{6}} - y^{-\frac{1}{6}}}{x^{-\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{y^{-1}}} \right)^{-1} \frac{6 \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} \\
561. & x^3 \sqrt[3]{\frac{x}{x^{-1}}} \cdot \frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})^2 + (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})^2}{x + \sqrt{xy}}
\end{aligned}$$

$$562. \left(\frac{\sqrt[3]{a^2 b^2} + a \sqrt[3]{a}}{a \sqrt[3]{b} + b \sqrt[3]{a}} - 1 \right) \cdot \left[1 + \sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^{-3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \right], \quad a > 0, \quad b > 0$$

$$563. \left[\frac{\sqrt[4]{1-x}}{2 \sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{\sqrt[4]{1+x(1-x)^{\frac{3}{4}}}}{2} \right] (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$564. \left[\sqrt[3]{\frac{(1-a) \sqrt[3]{1+a}}{a}} \sqrt[3]{\frac{3a^2}{4-8a+4a^2}} \right]^{-1} : \sqrt[3]{\frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{1-a^2}}{a \sqrt[3]{a}}}$$

$$565. \left[x(1-x)^{-\frac{2}{3}} + x^2(1-x)^{-\frac{5}{3}} \right] : \left[(1-x)^{\frac{1}{3}} (1-2x+x^2)^{-1} \right].$$

* * *

566. Dacă

$$\left(\frac{x}{a} \right)^n + \left(\frac{y}{b} \right)^n = 1$$

avem

$$\left[\left(\frac{x}{a} \right)^n + \left(\frac{y}{b} \right)^n \right]^2 + 4 \left(\frac{xy}{ab} \right)^n = 1.$$

567. Să se arate că expresiile

$$a = y + z - x [1 + 2 \sqrt{1 - (y - x + z)^2}],$$

$$b = x - z - y [1 - 2 \sqrt{1 - (y - x + z)^2}],$$

$$c = -x + y + z [1 + 2 \sqrt{1 - (y - x + z)^2}]$$

verifică relațiile

$$\frac{y+z}{bc} + \frac{x+z}{ac} + \frac{x-y}{ab} = 0, \quad \frac{b+c}{yz} + \frac{a-c}{xz} + \frac{a+b}{xy} = 0.$$

568. Să se arate că dacă $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$,

atunci

$$\begin{aligned} (a+b) \sqrt[3]{a+b} + (b+c) \sqrt[3]{b+c} + (c+a) \sqrt[3]{c+a} = \\ = 3 \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

569. Să se calculeze valoarea expresiei

$$E = \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{1+x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{1-x}}$$

pentru $x = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

570. Să se calculeze valoarea expresiei

$$E = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

pentru

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - (b+c)^2}}{b+c}, \quad y = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - (c+a)^2}}{c+a}, \quad z = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - (a+b)^2}}{a+b}.$$

571. Să se afle valoarea expresiei

$$E = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \quad \text{pentru } x = \frac{2ab}{b^2+1}.$$

572. Ce devine expresia $E = x^4 - 2ax^2 + b$ pentru

$$x = \sqrt{\frac{a+\sqrt{b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{b}}{2}}.$$

573. Să se afle valoarea expresiei

$$E = \frac{1-ax}{1+ax} \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} + 1$$

pentru

$$x = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a}{b}-1} \quad \text{și} \quad x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a}{b}-1}.$$

* * *

Să se afle valorile expresiilor

$$574. E = \left(x^{\frac{1}{m}} + x^{\frac{1}{n}}\right)^2 - 4a^2 x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \quad \text{pentru } x = (a + \sqrt{a^2-1})^{\frac{2mn}{m-n}}$$

$$575. E = (x^{-1} + a^{-1})(x+a)^{\frac{1}{n}} - b^{-1} x^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{pentru } x = ab^{\frac{n}{n+1}} \left(a^{\frac{n}{n+1}} - b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{-1}$$

$$576. E = \frac{1}{2} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \left(x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}\right) \quad \text{pentru } x = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}}$$

$$577. \left[\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}} \right]^{-2} \quad \text{pentru } x = a \left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$a > 0, \quad 0 < m < n$$

$$578. E = \left(x^{-2} + a^{-\frac{2}{3}} x^{-\frac{4}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a^{-2} + a^{-\frac{4}{3}} x^{-\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{pentru } x = \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$579. E = \left[(x+a)^{\frac{1}{3}}(x-a)^{-\frac{1}{3}} + (x+a)^{-\frac{1}{3}}(x-a)^{\frac{1}{3}} - 2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{pentru } x = a^{\frac{m^3+n^3}{m^3-n^3}}, 0 < n < m$$

$$580. \left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}{2} \right]^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{pentru } x = 2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}, k > 1.$$

581. Ce devine expresia

$$E = \left[\frac{(a+x)^{-\frac{1}{2}}(x+b)^{-\frac{1}{2}} + (a-x)^{-\frac{1}{2}}(x-b)^{-\frac{1}{2}}}{(a+x)^{-\frac{1}{2}}(x+b)^{-\frac{1}{2}} - (a-x)^{-\frac{1}{2}}(x-b)^{-\frac{1}{2}}} \right]^{-2}$$

$$\text{pentru } x = \sqrt{ab} \text{ și } a > 0, b > 0.$$

582. Să se înlocuiască x în expresia $x^3 + 12x$ cu

$$\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)} - \sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}.$$

583. Să se arate că $x = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}$ verifică ecuația

$$x^3 - 3ax - \sqrt[3]{a}(1+a) = 0.$$

584. Să se verifice că expresia $x^3 + 3x + 2\sqrt[3]{3}$ se anulează pentru

$$x = (2 - \sqrt[3]{3})^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{(2 + \sqrt[3]{3})^{-\frac{1}{3}}}.$$

585. Să se afle valoarea expresiei

$$E = \frac{(a-x)\sqrt[3]{x-b} + (x-b)\sqrt[3]{a-x}}{\sqrt[3]{a-x} - \sqrt[3]{x-b}} \quad \text{pentru } x = ab \frac{a^3+b^3}{a^3+b^3}.$$

§ 3. Nedeterminări

Să se afle valorile fracțiilor

$$586. \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4}$$

pentru $x = -2$

$$587. \frac{(1 + 3x)^2 - (1 - x)^2}{(1 + 2x)^3 - (1 - x)^3}$$

pentru $x = 0$

$$588. \frac{4x^3 + 8x^2 - 3x - 9}{10x^3 + 9x^2 - 5x + 6}$$

pentru $x = -\frac{3}{2}$

$$589. \frac{\frac{4x+1}{x^2-1} - \frac{7x-8}{x+5}}{\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{4x-5}}$$

pentru $x = 3$

$$590. \frac{\frac{3x-2}{8x^3+4x^2-10x+3}}{\frac{4x^2-3x+1}{16x^3-28x^2+16x-3}}$$

pentru $x = \frac{1}{2}$

$$591. \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$$

pentru $x = 0$.

* * *

Să se afle valorile expresiilor

$$592. \frac{1}{x-a} + \frac{x-3a}{x^2-a^2}$$

pentru $x = a$

$$593. \left[\frac{8}{5(x+2)} - \frac{4}{x} + \frac{17x+6}{5(x^2+1)} \right] \frac{x+3}{x^2+3x-10}$$

pentru $x = 2$

$$594. \frac{(x+a)^3 - a^3}{(x+a)^5 - a^5}$$

pentru $x = 0$

$$595. \frac{(x-a)^3 - (b-a)^3}{(x-a)^4 - (b-a)^4}$$

pentru $x = b$

$$596. \frac{(x-1)^3 a - (a-1)^3 x}{(x-1)^2 a - (a-1)^2 x}$$

pentru $x = a$

$$597. \frac{6^x - 4^x}{3^x - 2^x}$$

pentru $x = 0$

$$598. \frac{b(x^2 - a^2) + (a^2 - b^2) x + a(b^2 - x^2)}{c(x^2 - a^2) + (a^2 - c^2) x + a(c^2 - x^2)}$$

pentru $x = a$

$$599. \frac{(a+b)^2 x^2 + (a+b)(a-b-c)x - c(a-b)}{(a+b)^2 x^2 + (a+b)(a-b+c)x + c(a-b)}$$

$$\text{pentru } x = -\frac{a-b}{a+b}$$

$$600. \frac{\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} - 3}{\frac{a(x-a)}{b+c} + \frac{b(x-b)}{c+a} + \frac{c(x-c)}{a+b} - x}$$

$$\text{pentru } x = a + b + c$$

$$601. \frac{a^6 - 2a^5b + a^4b^2 + a^2b^4 - 2ab^5 + b^6}{a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4} \quad \text{pentru } a = b = 1.$$

602. Cum trebuie să fie numerele naturale m, n, p, q pentru ca valoarea fracției

$$\frac{(x-a)^m - (x-a)^n}{(x-a)^p - (x-a)^q},$$

pentru $x = a$, să fie : 1° determinată și finită, 2° infinită, 3° zero

* * *

Se cer valorile expresiilor următoare, în care m și n se presupun numere naturale.

$$603. \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 5} - 5}{x + 2} \quad \text{pentru } x = -2$$

$$604. \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}} \quad \text{pentru } x = 3$$

$$605. \frac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{pentru } x = 1$$

$$606. \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad \text{pentru } x = 1$$

$$607. \frac{x + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}} \quad \text{pentru } x = 1$$

$$608. \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{2x - 4}}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \quad \text{pentru } x = 3$$

$$609. x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

pentru $a \neq 0$. Consecințe pentru ecuația $ax^2 + bx + c = 0$.

610. $\frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{a^4}}$ pentru $x = a$
611. $\frac{\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[6]{x} \sqrt[12]{a} - 3\sqrt[12]{x} \sqrt[6]{a} - \sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{a}}$ pentru $x = a$
612. $\frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$ pentru $x = 0$
613. $\frac{\sqrt{x^2+3x+6} - \sqrt{x^3+8}}{\sqrt{5x+6} - \sqrt{x^2+5x+2}}$ pentru $x = 2$
614. $\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5} - 5}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x^2+5x+23} - 9}$ pentru $x = 2$
615. $\frac{\sqrt{x^2+ax+a^2} - \sqrt{x^2-ax+a^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$ pentru $x = 0$
616. $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^4+1}}$ pentru $x = 1$
617. $\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1-2x}}$ pentru $x = 0$
618. $\frac{\sqrt[3]{x^2+4} - 2}{x-2}$ pentru $x = 2$
619. $\frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x^2 - \sqrt{2-x^2}}$ pentru $x = 1$
620. $\frac{\sqrt[3]{x^2-ax} + \sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2} + x^3 - ax^2}$ pentru $x = a$
621. $\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{x} - 1}$ pentru $x = 1$
622. $\frac{\sqrt[3]{3x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}{x-1}$ pentru $x = 1$
623. $\frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} - 3}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x} - 3}$ pentru $x = 1$
624. $\frac{\sqrt{3x^3-10x^2+13} - \sqrt[3]{5x^2-16x+11}}{\sqrt[4]{27x-65} + \sqrt[3]{8x^2-25x+4} - 3}$ pentru $x = 3$

$$625. \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} \quad \text{pentru } x = 0$$

$$626. (1 - \sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}}) : \left(1 - \sqrt{2 - \sqrt{\frac{1}{3 - 2x}}}\right) \quad \text{pentru } x = 1$$

$$627. \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}} \quad \text{pentru } x = a$$

$$628. \frac{x}{\sqrt[n]{x+a} - \sqrt[n]{2x+a}} \quad \text{pentru } x = 0$$

$$629. \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} \quad \text{pentru } x = 1$$

$$630. \frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \quad \text{pentru } x = 1$$

$$631. \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \dots + \sqrt[n]{x} - n}{\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{x}} - n} \quad \text{pentru } x = 1$$

$$632. \left(\frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y}\right) : \left(\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}\right) \quad \text{pentru } x = y = a.$$

* * *

Să se determine relațiile de condiție ca expresiile următoare să ia o valoare determinată când $x = 1$

$$633. \frac{a(x^2 - 1) + b(x^3 - 1)}{(x - 1)^2} \quad 634. \frac{a(x^m - 1) + b(x^n - 1)}{(x - 1)^2}$$

$$635. \frac{a(\sqrt{x} - 1) + b(\sqrt[3]{x} - 1) + c(\sqrt[n]{x} - 1)}{(x - 1)^3}$$

636. Dacă p și q sînt numere naturale, să se găsească valoarea expresiei $\frac{px^{p+q} - (p+q)x^p + q}{(x-1)^2}$ pentru $x = 1$.

* * *

Să se afle valorile expresiilor, m, n și p fiind numere naturale

$$637. \frac{1 + x - (n+1)^2 x^n + (2n^2 + 2n - 1) x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3} \quad \text{pentru } x = 1$$

$$638. \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x^{p+1} - x^p - x + 1} \quad \text{pentru } x = 1$$

$$639. \frac{(x^m - 1)(x^n - 1) - mn(x - 1)^2}{(x - 1)^3}$$

pentru $x = 1$.

* * *

Să se afle valorile fracțiilor

$$640. \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

pentru $x = 0$

$$641. \frac{2 \sin x - 1}{\cos 3x}$$

pentru $x = \frac{\pi}{6}$

$$642. \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

pentru $x = 0$

$$643. \frac{\operatorname{tg} x - 1}{2 \sin x - \sqrt{2}}$$

pentru $x = \frac{\pi}{4}$

$$644. \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$$

pentru $x = \frac{\pi}{6}$

$$645. \frac{1 - \cos^3 x}{\sin^2 x}$$

pentru $x = 0$

$$646. \frac{\cos^3 2x - \cos^3 2a}{\sin^2 x - \sin^2 a}$$

pentru $x = a$

$$647. \frac{\cos x + \cos 2x}{\sin x + 2 \sin 2x + \sin 3x}$$

pentru $x = \pi$

$$648. \frac{1 + 2 \sin 2x - \cos 4x}{\sin 4x}$$

pentru $x = 0$ și $x = \pi$

$$649. \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{\sin 2x - \sin 2a}$$

pentru $x = a$

$$650. \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2 \cos x}$$

pentru $x = \frac{\pi}{3}$

$$651. \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$$

pentru $x = 0$.

ECUAȚII DE GRADUL I ȘI II

Să se rezolve ecuațiile de gradul I

$$652. \frac{x}{2} - \frac{2(x-1)}{3} + \frac{3(x-2)}{4} - \frac{4(x-3)}{6} = \frac{x-5}{2} + \frac{1}{6}$$

$$653. \frac{x}{6} - \frac{x - \frac{1}{2}}{3} - \frac{5}{3} \left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$654. \frac{\frac{1}{2}(4-x)}{3} - \frac{\frac{3}{5}(2x-1)}{2} = 0$$

$$655. \frac{x-1}{4} - \left[\frac{x+2}{3} - \left(\frac{5-x}{12} + 1 \right) - 3 \right] = 1$$

$$656. 3 \left\{ x - \frac{3x-1}{4} - \left[1 - 2 \left(x - \frac{3+x}{5} \right) \right] \right\} = 5x - 2$$

$$657. 3 \left(\frac{2x}{5} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\frac{4}{3} \left(x - \frac{3x-1}{6} \right)}{3} = \frac{5(x+3)}{18}$$

$$658. \frac{x+6}{2} - \frac{\frac{12-3x}{6} - \frac{4-x}{3} + 5}{3} + \frac{12-3x}{9} = \frac{10-3x}{4} - 2$$

$$659. \frac{x+2}{10} + \frac{x - \frac{x-8}{2} + 2}{5} - \frac{20 + \frac{30 - \frac{x-2}{4}}{2} - 1}{8} = \frac{x - \frac{x-10}{2}}{2} - 6$$

$$660. \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{x} \right) + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{3}{x} \right) = 1$$

$$661. \frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$$

$$662. \frac{x^2}{x-2a} = \frac{4a(x-a)}{x-2a}$$

$$663. \frac{1-2x}{1+2x} + \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 0 \qquad 664. \frac{x-5}{x-1} + \frac{x-1}{x-4} = 2$$

$$665. \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x-4} + \frac{2}{x-3} = 0$$

$$666. \frac{x}{x-2} - \frac{x-3}{x-5} = \frac{x-1}{x-3} - \frac{x-4}{x-6}$$

$$667. \frac{3-x}{8-x} + \frac{8-x}{6-x} + \frac{2-x}{4-x} = \frac{10-x}{8-x} - \frac{x+2}{6-x} + \frac{5-x}{4-x}$$

$$668. \frac{3x-3}{2x^2-2} - \frac{2x+2}{3x^2+6x+3} = \frac{5(x-1)}{12x^2-24x+12}$$

$$669. \frac{x}{1-\frac{1}{2-\frac{1}{3-x}}} = 2x-4$$

$$670. \frac{x}{4} - \frac{1-\frac{1-\frac{x+1}{2}}{2-\frac{2}{2-\frac{2}{2+\frac{x}{2}}}}}{2-\frac{2}{2-\frac{2}{2+\frac{x}{2}}}} = \frac{3}{4} \qquad 671. \frac{1-\frac{1-\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}}{x-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2x}$$

$$672. 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 2 \frac{1-\frac{x}{2}}{x}$$

673. Să se determine valoarea lui m astfel încît ecuația

$$\frac{m-1}{x-2} + \frac{m-5}{x-3} + \frac{m-6}{x-4} = 0$$

să fie de gradul I. Să se rezolve apoi ecuația.

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$674. \frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} + \frac{x+3}{x-3} = 3 \frac{x^3-2x^2+6}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$675. \frac{3+2x}{1+2x} - \frac{5+2x}{7+2x} = 1 - 2 \frac{2x^2-1}{7+16x+4x^2}$$

$$676. x \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{c} = x \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{b}$$

$$677. \frac{x-a}{x-2a-b} = \frac{x+b}{x+a+2b}$$

$$678. \frac{x+a+b}{x+a} = \frac{x+a-b}{x-a} - \frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}$$

$$679. \frac{ax}{b} + \frac{bx}{a} + \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 x}{ab}$$

$$680. \frac{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a+x} \right) \left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{x} \right)}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a+x} \right) \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x} \right)} \cdot \frac{2x-a}{x-a} = 1$$

$$681. \frac{a - \frac{1}{x}}{a + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \frac{1}{a}}{x + \frac{1}{a}} - \frac{1}{a}$$

$$682. \frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} = 3$$

$$683. \frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} = \frac{3x}{a+b+c}$$

$$684. \frac{a^2 b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2}{a(a+b)^2} x = \frac{bx}{a} + 3cx - \frac{3abc}{a+b}$$

$$685. \frac{x+2ab}{a+b-c} + \frac{x-2ab}{a-b+c} = \frac{x+2ab}{a+b+c} + \frac{2ab-x}{b+c-a}$$

$$686. \frac{ab(3-x)}{(a+b)^2} + \frac{ab(3x-1)}{(a-b)^2} - \frac{ab(x+1)}{a^2+b^2} = 1-x$$

$$687. \frac{a^2-ac}{c^2+x} - \frac{c-a}{c} = \frac{ax}{c^3+cx}$$

$$688. \frac{x}{a+1} + \frac{x}{a^2-1} - \frac{x}{a^3-a^2+a-1} = \frac{1}{a^3+a^2+a+1}$$

$$689. \frac{\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}-a} + \frac{\frac{b}{x}}{\frac{1}{x}-b} + 2 = 0$$

$$690. a(b-c) \frac{x+a}{x-a} + b(c-a) \frac{x+b}{x-b} + c(a-b) \frac{x+c}{x-c} = 0$$

$$691. a - \frac{2}{a} \left(\frac{a+b}{x} - \frac{a-b}{b} \right) + (2-a) \left(1 + \frac{a+b}{ax} - \frac{a-b}{ab} \right) = 0$$

$$692. (a+b) \left(a + \frac{x}{a-b} \right) - (a-b) \left(a - \frac{x}{a+b} \right) = 2ax \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} \right)$$

$$693. \frac{a \frac{b-c}{x-a} + b \frac{c-a}{x-b} + c \frac{a-b}{x-c}}{\frac{b-c}{x-a} + \frac{c-a}{x-b} + \frac{a-b}{x-c}} = x$$

$$694. \frac{2 \left(\frac{a}{x-2a} + \frac{b}{x-2b} + \frac{c}{x-2c} \right) + 3}{\frac{1}{x-2a} + \frac{1}{x-2b} + \frac{1}{x-2c}} = a + b + c$$

$$695. \text{ Să se rezolve ecuația } P[P(x)] = 1, \text{ unde } P(x) = \frac{a+bx}{b+ax}.$$

$$696. \text{ Să se rezolve ecuația}$$

$$x \left[\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{(b-x)^2} \right] = 2 \left(\frac{1}{b-x} - \frac{1}{a-x} \right)$$

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$697. 1^\circ \frac{|x| - 1}{2} = |x| - 3; \quad 2^\circ |x| = \frac{2}{3} \left(|x| - \frac{1}{2} \right)$$

$$698. 1^\circ |x| = x + 1; \quad 2^\circ \frac{|x|}{x} = -1$$

$$699. 1^\circ |x - 1| = 2; \quad 2^\circ x - \frac{|3x - 2|}{5} = 3 - \frac{2x - 5}{3}$$

$$700. 1^\circ \frac{7x+4}{5} - x = \frac{|3x-5|}{2};$$

$$2^\circ 4 \frac{\frac{1}{2}|x-4|}{3} = \frac{\frac{3}{5}(2x-1)}{2}$$

$$701. 1^\circ 2 + |x - 6| = |x - 4|;$$

$$2^\circ |x - 2| + |x + 1| = |x + 2|$$

$$702. 1^\circ |x - 2| + |x - 3| + 2|x - 4| = 9;$$

$$2^\circ |x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = x + 2.$$

* * *

Să se rezolve ecuațiile de gradul II

$$703. \frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0$$

$$704. \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6}$$

$$705. \frac{1}{4x+8} = \frac{20x+1}{4x^2-16} - \frac{7-5x}{x^2-4x+4}$$

$$706. 1 + \frac{4x^2}{2x^2+8x} + \frac{27}{2x^2+7x-4} = \frac{6}{2x-1}$$

$$707. \frac{14x-4}{2x+1} - 3 \frac{x-1}{2x^2-x-1} - 30 \frac{2x-3}{3x-2} + \\ + 26 \frac{2x^2-3x-2}{4x^2-1} = 39 \frac{1}{(2x+1)(6x^2-7x+2)}$$

$$708. x^2 - 2(a-2)x + a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$709. (a+1)x^2 - (5a+4)x + 4a + 3 = 0$$

$$710. (a+b)x^2 - a(a+3b)x + 2a^2b = 0$$

$$711. (a+b)^2(a-x)(b-x) + ab(a-b)^2 = 0$$

$$712. \frac{a-x}{a+x} + \frac{ax-1}{ax+1} = 2 \frac{a-1}{a+1}$$

$$713. \frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$$

$$714. \frac{a+b}{2a-ax+2-x} + \frac{1}{a+1} = \frac{b+1}{2x-x^2}$$

$$715. \frac{1}{ax-cx^2} - \frac{1}{a-c} = \frac{d(x-1)}{a^2-acx-ac+c^2x}$$

$$716. \frac{a+x^3}{a-x} + \frac{x^3-x}{a+x} = 1 - 2ax$$

$$717. a(a-2)x^2 + 4(a^2-b)x + 4b(2a-b) = 0$$

$$718. (a^2+a-2)x^2 + (2a^2+a+3)x + a^2-1 = 0$$

$$719. (c+a-2b)x^2 + (a+b-2c)x + b+c-2a = 0$$

$$720. (a^2+ab-2b^2)x^2 + 3b^2x - (a^2-ab-2b^2) = 0$$

$$721. a(x-2a) + b(x-2b) + c(x-2c) = \\ = (x-2c)(x-2b) + (x-2a)(x-2c) + (x-2b)(x-2a)$$

$$722. \frac{(b-c)(1+a+a^2)}{x-a} + \frac{(c-a)(1+b+b^2)}{x-b} + \frac{(a-b)(1+c+c^2)}{x-c} = 0$$

$$723. x^2 - 2x \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha = 0$$

$$724. x^2 \cos^2 \alpha - x + \sin^2 \alpha = 0$$

$$725. 2x^2 \cos^2 \frac{a}{2} - (1 + \cos^2 a)x + 2 \cos a \sin^2 \frac{a}{2} = 0$$

$$726. (1 + \sin a)x^2 - (1 + \sin^2 a)x + \sin a(1 - \sin a) = 0$$

$$727. x^2 - (2 - \cos a - \sin a)x + 1 + \sin a \cos a - \sin a - \cos a = 0$$

$$728. (1 - \cos a)x^2 - (1 - \cos a + \cos^2 a)x + \sin^2 a + \cos a - 1 = 0$$

729. Să se rezolve ecuația $x^2 + px + q = 0$ exprimând rădăcinile prin funcții trigonometrice calculabile prin logaritmi.

* * *

Aplicând rezultatele de la ex. 729, să se rezolve ecuațiile

$$730. 1\,292x^2 - 3\,359x + 214 = 0$$

$$731. x^2 - 0,42331x - 8,53972 = 0$$

$$732. x^2 - 10,83945x + 26,991104 = 0$$

$$733. x^2 - 6,2831853x + 10,87312 = 0$$

$$734. x^2 \cos \alpha + x \operatorname{tg} \beta - \sin \gamma = 0$$

pentru $\alpha = 24^\circ 58' 49''$, $\beta = 13^\circ 42' 59''$ și $\gamma = 53^\circ 3' 32''$.

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$735. |2x + 3| = x^2$$

$$736. |x^2 - 1| = 2$$

$$737. |x^2 - 4| - 2|x^2 - 9| = 14 - x^2.$$

* * *

Să se determine parametrul m așa fel încât între rădăcinile ecuațiilor următoare să existe relația dată în dreptul fiecăreia

$$738. x^2 - 3x + m = 0 \quad x_1 - x_2 = 1$$

$$739. mx^2 - (m + 1)x + m - 1 = 0$$

$$x_1 = 2x_2$$

$$740. (2m - 3)x^2 - 2(3m - 1)x + 4(m + 2) = 0$$

$$x_1 = x_2$$

$$741. 2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$$

$$3x_1 - 4x_2 = 11$$

$$742. (m - 1)x^2 - (3m + 4)x + 12m + 3 = 0$$

$$4x_1 - 5x_2 = 13$$

$$743. (m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$$

$$x_1 = 3x_2$$

$$744. 2(m-1)x^2 + (5m+2)x + 3m + 2 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 = 0$$

$$745. x^2 - 3mx + m^2 = 0 \quad x_1^2 + x_2^2 = 1,75$$

$$746. (m-1)x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0,$$

$$x_1 = x_2^2$$

$$747. x^2 - (m+4)x + 2m + 6 = 0$$

$$x_1^3 + x_2^3 = -9$$

$$748. (14m-1)x^2 - 2mx + 1 = 0$$

$$3x_1x_2 = 2x_1 - x_2$$

$$749. 6x^2 - 19x + m = 0$$

$$9(x_1^2 + x_2^2) + 54(x_1^3 + x_2^3) = 920$$

$$750. x^2 + mx + m - 1 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1^3 + x_2^3 = 0.$$

751. Se dă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$. Să se calculeze în funcție de a, b, c cantitățile următoare

$$1^\circ x_1^2 + x_2^2; \quad 2^\circ x_1 - x_2; \quad 3^\circ x_1^2 - x_2^2; \quad 4^\circ x_1^3 + x_2^3;$$

$$5^\circ x_1^3 - x_2^3; \quad 6^\circ x_1^4 + x_2^4; \quad 7^\circ x_1^5 + x_2^5; \quad 8^\circ x_1^{-1} + x_2^{-1};$$

$$9^\circ x_1^2 + x_2^2; \quad 10^\circ x_1^3 + x_2^3;$$

$$11^\circ 4x_1x_2^2 - x_1^3 + 2x_1x_2 + 4x_1^2x_2 - x_2^3;$$

$$12^\circ \frac{(3x_1+1)(3x_2+1)}{(2x_1-9)(2x_2-9)}; \quad 13^\circ \frac{1}{(ax_1+b)^2} + \frac{1}{(ax_2+b)^2};$$

$$14^\circ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}; \quad 15^\circ \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}.$$

752. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - 2x + m = 0$ și y_1, y_2 valorile pe care le ia trinomul $y = x^2 + mx + m^2$ când dăm lui x valorile x_1 și x_2 . Să se calculeze în funcție de m expresia

$$E = \frac{y_1}{x_1^3} + \frac{y_2}{x_2^3} + 2\left(\frac{y_1}{x_2^2} + \frac{y_2}{x_1^2}\right) + 4\left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2}\right).$$

753. Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $(p^2 - a^2)x^2 - 2pqx + q^2 - b^2 = 0$, să se calculeze expresia $E = (a^2x_1^2 + b^2)(a^2x_2^2 + b^2)$ în funcție de coeficienții ecuației date, arătînd că E este un pătrat perfect.

754. Se dau ecuațiile $x^2 + px + 1 = 0$ și $x^2 - x + p = 0$. Să se determine p astfel ca suma pătratelor rădăcinilor unei ecuații să fie egală cu suma pătratelor rădăcinilor celeilalte ecuații.

755. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - px + q = 0$. Să se rezolve ecuația

$$(x - x_1)^3 = (x - x_2)^3.$$

756. Ce relație este între a, b, c pentru ca rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ să satisfacă relația $mx_1 + nx_2 = p$.

757. Să se rezolve ecuația :

$$(b^2 - 1)^2 x^2 + 2[4bc + (b^2 + 1)(c^2 + 1)]x + (c^2 - 1)^2 = 0$$

și să se calculeze valoarea expresiei

$$E = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}$$

758. Se dă ecuația $mx^2 - 2(m - 3)x + m + 3 = 0$.

1° Să se arate că există între rădăcini o relație independentă de m ; 2° Să se afle rădăcina dublă a ecuației.

759. Să se determine relația dintre coeficienții ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ pentru ca rădăcinile ei să satisfacă relația

$$\frac{\sqrt{1+x_1}}{\sqrt{1+x_2}} + \frac{\sqrt{1+x_2}}{\sqrt{1+x_1}} = 1.$$

760. 1° Să se formeze ecuația de gradul II ale cărei rădăcini x_1, x_2 satisfac relațiile

$$4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 4 = 0, \quad (x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{1}{1+a},$$

a însemnând un număr dat.

2° Să se determine a astfel ca $x_1^2 + x_2^2 = 11$

3° Să se verifice, calculînd rădăcinile.

761. Fie $\operatorname{tg} \alpha$ și $\operatorname{tg} \beta$ rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$.

Să se scrie în funcție de p și q expresia

$$E = \sin^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) + q \cos^2(\alpha + \beta).$$

762. Se dă ecuația $x^2 + px + q = 0$, ale cărei rădăcini sînt x_1 și x_2 . Să se formeze ecuațiile de gradul II în y cu rădăcinile

$$1^\circ y_1 = x_1 + 2x_2, \quad y_2 = x_2 + 2x_1; \quad 2^\circ y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2^2;$$

$$3^\circ y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}, \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}; \quad 4^\circ y_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1};$$

$$5^\circ y_1 = \frac{x_1}{1+x_2}, \quad y_2 = \frac{x_2}{1+x_1};$$

$$6^\circ y_1 = \frac{x_1}{x_2} - 1, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1} - 1;$$

$$7^\circ y_1 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_1 + x_2};$$

$$8^\circ y_1 = x_1^3 + \frac{1}{x_2}, \quad y_2 = x_2^3 + \frac{1}{x_1}.$$

763. Se dă ecuația $(m - 1)x^2 + (3m - 1)x - 2(2m - 1) = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2 . Să se formeze ecuația de gradul II ale cărei rădăcini y_1 și y_2 satisfac relațiile

$$\frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_1} + \frac{y_1 - x_2}{y_2 - x_2} = 0, \quad \frac{y_1 - 1}{y_2 - 1} + \frac{y_1 - 2}{y_2 - 2} = 0.$$

764. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$. Să se formeze ecuațiile de gradul II care au ca rădăcini

$$1^\circ X_1 = \frac{x_1^2}{x_2}, \quad X_2 = \frac{x_2^2}{x_1}; \quad 2^\circ y_1 = \frac{x_1}{x_2^2}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1^2}.$$

Să se arate că discriminanții ecuațiilor obținute sînt divizibili cu discriminantul ecuației date.

765. Care este relația dintre a , b , c pentru ca rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ să reprezinte latura și înălțimea unui triunghi echilateral.

766. Fie x_1 , y_1 și x_2 , y_2 respectiv rădăcinile ecuațiilor

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0.$$

Să se formeze ecuația de gradul II în z care are ca rădăcini

$$x_1x_2 + y_1y_2 \quad \text{și} \quad x_1y_2 + x_2y_1.$$

767. Fie x_1 , x_2 și x' , x'' respectiv rădăcinile ecuațiilor

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + qx + p = 0.$$

1° Să se formeze ecuația în y care are rădăcinile $y_1 = x_1^2x' + x_2^2x''$, $y_2 = x_1^2x'' + x_2^2x'$; 2° Presupunînd $p = 1$, pentru ce valori ale lui q ecuația în y obținută are rădăcinile reale.

768. Fie $\operatorname{tg} a$ și $\operatorname{tg} b$ rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$. Se cere: 1° Relația dintre p și q astfel încît $a + b = \frac{\pi}{3}$; 2° Să se formeze ecuația de gradul II care are ca rădăcini pe $\operatorname{tg} 2a$ și $\operatorname{tg} 2b$.

769. Să se arate că ecuația care are ca rădăcini pe $x_1 = a \operatorname{ctg} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$ și $x_2 = a \operatorname{ctg} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$ este $x^2 + 2a(\operatorname{tg} 2\alpha)x - a^2 = 0$.

770. În ecuația $x^2 - 2ax + b = 0$ se face transformarea $x = (ay - b) : (y - a)$ și se obține o ecuație în y . Să se cerceteze relația dintre rădăcinile celor două ecuații.

771. Fără a rezolva ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ cu rădăcinile x_1 și x_2 , să se elimine x_1 și x_2 din relația $x_1^2 + \alpha = \beta(x_2^2 + \alpha)$.

772. Pentru ce valori ale lui α ecuația $x^2 \sin \alpha + x \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 0$ are o rădăcină dublă.

773. 1° Să se determine un polinom de gradul II, $P(x)$, astfel ca $P(a) = a(b+c)$, $P(b) = b(a+c)$, $P(c) = c(a+b)$. 2° Pentru ce valori ale lui α ecuația $P(x) + \alpha = 0$ are o rădăcină dublă.

774. Să se arate că oricare ar fi k real, rădăcinile ecuației $x^2 - kx - k = 0$ satisfac relația $x_1^3 + x_2^3 + x_1^3 x_2^3 \geq 0$.

775. 1° Pentru ce valori ale lui m ecuația

$$(m-2)x^2 - 4(m-1)x + (m-1)^2(m-2) = 0$$

are rădăcinile reale. 2° Fie $P = x_1 + x_2$, $S = x_1 x_2$. Să se afle o relație între P și S independentă de m .

776. Să se arate că ecuațiile

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0, & qx^2 + p(q+2)x + (q+2)^2 &= 0, \\ x^2 + (2q-p^2)x + q^2 &= 0, & x^2 + (p^3-3pq)x + q^3 &= 0, \\ x^2 + (4p^2q-2q^2-p^4)x + q^4 &= 0 \end{aligned}$$

au rădăcinile de aceeași natură. Se cere relația dintre rădăcinile primelor două ecuații.

777. Se dă ecuația $(m+6)x^2 - 4mx + m+1 = 0$. Pentru ce valori ale lui m ecuația admite: 1° rădăcini opuse; 2° $x_1 x_2 = -2$; 3° o rădăcină nulă; 4° o rădăcină egală cu -1 ; 5° o rădăcină egală cu $-\frac{1}{2}(-2 + \sqrt{5})$; 6° $x_1^2 + x_2^2 = \frac{52}{3}$; 7° o rădăcină infinită.

788. Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației

$$(5m+1)x^2 + (7m+3)x + 3m = 0,$$

m fiind un parametru variabil real.

* * *

Presupunând parametrul m real, să se discute ecuațiile

779. $2x^2 - 24x + 7m - 5 = 0$

780. $(m-2)x^2 - 2mx + 3m - m^2 = 0$

781. $3x^2 + (2-3m)x - 1 - 3m = 0$

782. $mx^2 - 2(m+1)x + m+2 = 0$

783. $mx^2 - 2(2m+1)x + 2m+1 = 0$

784. $m^2x^2 + 2(m^2-3)x + 4 = 0$

$$785. (1 + m)x^2 - 3mx + 4m = 0$$

$$786. x^2 - 2(m + 1)x + 5 - m = 0$$

$$787. mx^2 + (m - 1)x + m - 2 = 0$$

$$788. mx^2 - (2m + 1)x + 3m - 1 = 0.$$

789. Fiind date numerele reale a, b, c , să se demonstreze că rădăcinile ecuației

$$\frac{1}{x + a} + \frac{1}{x + b} + \frac{1}{x + c} = \frac{3}{x}$$

sînt totdeauna reale.

790. Să se arate că ecuația $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ nu poate avea ambele rădăcini negative.

791. Se dă ecuația

$$mx^2 - 2(m - 2)x - 10 - m = 0.$$

1° Pentru ce valori ale lui m ecuația are rădăcinile de semn contrar.

2° Să se arate că există o relație între rădăcinile ecuației independentă de m .

3° Să se găsească cu ajutorul acestei relații valorile rădăcinilor egale.

792. Să se afle ecuația de gradul II cunoscînd suma rădăcinilor $S = 2(m + 1)$ și discriminantul $\Delta = 4(m^2 + m - 6)$. Să se discute ecuația astfel formată după valorile lui m .

793. Se dă ecuația de gradul II în t

$$(x + y - 1)t^2 + 2(y + 1)t - x + y - 1 = 0,$$

în care x și y sînt parametri variabili. Se cere :

1° Să se discute această ecuație, x și y fiind coordonatele unui punct din plan; să se separe planul în regiuni după natura rădăcinilor.

2° Să se determine parametrii x și y știind că între rădăcinile ecuației date avem relațiile

$$2t_1 + t_2 = 5, \quad t_1 + 2t_2 = 7.$$

794. Să se discute rădăcinile ecuației $(m + 1)x^2 - 2mx + (m - 3) = 0$ în raport cu valorile parametrului m . Să se studieze cazurile : 1° $m \rightarrow -1$; 2° $m \rightarrow -\infty$; 3° $m \rightarrow +\infty$.

795. Se dă ecuația $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. Să se studieze natura rădăcinilor acestei ecuații știind că $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$ unde a_1, a_2, a_3 sînt trei numere în progresie geometrică.

* * *

796. Să se discute ecuațiile $x = \pm \sqrt[3]{3mx + 4(m^2 - 25)} = 0$, unde m este un parametru variabil.

797. Se dă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$. Să se determine condițiile ca rădăcinile ecuației să fie :

- 1° ambele mai mici decât un număr dat m ;
- 2° ambele mai mari decât un număr dat m ;
- 3° una mai mică și cealaltă mai mare decât un număr dat m ;
- 4° ambele rădăcini cuprinse între două numere date $m < n$;
- 5° una din rădăcini mai mică decât un număr m dat și cealaltă mai mare decât un număr n dat, presupunând $m < n$.

* * *

Să se determine valorile parametrului m astfel ca rădăcinile ecuațiilor următoare să îndeplinească condițiile scrise după ele.

798. $(m^2 - 1)x^2 - (2m + 1)x + 1 = 0$,
 x_1 și x_2 mai mici decât 1

799. $(m - 3)x^2 - 2(m - 1)x + m = 0$,
 x_1 și x_2 mai mici decât 2

800. $(m + 6)x^2 - 4mx + m + 1 = 0$,
 x_1 și x_2 mai mari decât -1

801. $(m - 2)x^2 - (m - 4)x + m - 3 = 0$,
 x_1 și x_2 mai mari decât 1

802. $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m - 4 = 0$,
 $x_1 < 2 < x_2$

803. $(m + 1)x^2 - mx + 2 = 0$,
 x_1 și x_2 între -2 și 1

804. $x^2 - 5x + m = 0$,
 x_1 și x_2 între 1 și 4

805. $(m + 1)x^2 - 2mx - 3m + 4 = 0$,
 x_1 și x_2 între -1 și 1.

806. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\sin 2x + \cos 3x = m \cos x$$

după valorile parametrului m .

* * *

Să se discute următoarele ecuații, în care m este un parametru variabil

807. $2 \sin^2 x - 3 \sin x + m = 0$

808. $(5m + 6) \cos 2x - 4m \sin x - (7m + 2) = 0$

809. $\sin 3x = m \sin^2 x$

810. $2 \sin^2 2x + 5 \sin^2 4x + m = 0$

811. $(m - 1) \sin^2 x - 2(m + 1) \sin x + 2m - 1 = 0$.

812. În ce regiune a planului trebuie să se găsească punctul de coordonate (α, β) ca ecuația $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$ să aibă cele două rădăcini ale sale cuprinse între 1 și 2.

* * *

Să se determine parametrul m astfel ca rădăcinile x_1 și x_2 ale următoarelor ecuații să îndeplinească condițiile scrise în dreptul fiecăreia

813. $(2 - m)x^2 - 2mx + m^2 - 3m = 0$,

$x_1 < 1$ și $x_2 > 2$

814. $mx^2 + (2m - 1)x + m + 1 = 0$.

$x_1 < -3$ și $x_2 > -1$

815. $(m - 1)x^2 + (m - 2)x + m - 3 = 0$,

$x_1 < 1 < x_2 < 2$.

816. Pentru ce valori ale lui a ecuația $(a - 3)x^2 - 2(a - 1)x + 4a - 3 = 0$ admite o rădăcină și numai una singură cuprinsă între 2 și 3.

817. Se dă ecuația $mx^2 - (m - 4)x + 3m - 11 = 0$, în care m este un număr întreg. Să se determine m și să se rezolve ecuația, știind că ea are o rădăcină și numai una singură cuprinsă între 0 și 1.

818. Între ce limite trebuie să fie cuprins m pentru ca fiecare din ecuațiile

$$x^2 - (m^2 - 1)x + m^2 - 1 = 0, \quad (m^2 - 3)x^2 - 6x - m^2 + 1 = 0$$

să aibă o singură rădăcină cuprinsă între rădăcinile celeilalte ecuații.

* * *

Să se determine a și b astfel încât următoarele ecuații să aibă aceleași rădăcini.

819. $(5a - 52)x^2 + (4 - a)x + 4 = 0$,

$(2b + 1)x^2 - 5bx + 20 = 0$

820. $(2a + 1)x^2 - (3a - 1)x + 2 = 0$,

$(b + 2)x^2 - (2b + 1)x - 1 = 0$

821. Se dau ecuațiile

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0.$$

1° Să se determine relația dintre coeficienții acestor ecuații astfel ca ele să aibă o rădăcină comună.

2° Să se afle expresia rădăcinii comune.

3° Să se formeze ecuația de gradul II care este satisfăcută de către celelalte rădăcini ale ecuațiilor (nu cea comună).

* * *

Să se arate că ecuațiile

$$\begin{aligned} 822. \quad & x^2 - (a + b)x + ab = 0, \\ & bx^2 - (1 + ab)x + a = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 823. \quad & (2a^2 - 3a - 2)x^2 + (a^2 + 7a + 2)x - a^2 - 2a = 0, \\ & (4a^2 + 4a + 1)x^2 - (4a^2 + 2a)x + a^2 = 0 \end{aligned}$$

au o rădăcină comună. Să se găsească apoi rădăcinile lor.

* * *

Să se determine parametrul m astfel ca următoarele ecuații să aibă o rădăcină comună. Să se rezolve apoi ecuațiile.

$$824. \quad x^2 + mx + 1 = 0, \quad x^2 + x + m = 0$$

$$\begin{aligned} 825. \quad & 3x^2 - (m + 2)x + 2 = 0, \\ & 2x^2 - (m + 1)x + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 826. \quad & (m - 1)x^2 - m(m - 2)x - 2m^2 - m + 1 = 0, \\ & (m + 1)x^2 - m(m + 2)x - m - 1 = 0. \end{aligned}$$

827. Dacă a, b, c, a_1, b_1, c_1 sînt numere raționale, să se dea condiția ca ecuația

$$ax^2 + bx + c + \lambda(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 0$$

să aibă rădăcinile raționale, oricare ar fi parametrul λ .

828. Să se arate că condiția necesară și suficientă ca ecuațiile

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb' = 0$$

să aibă o rădăcină comună este ca una sau alta din ecuații să aibă rădăcinile sale egale.

829. Se dau ecuațiile $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + p_1x + q_1 = 0$. Prima admite ca rădăcini pe $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$. Care este condiția ca a doua ecuație să admită ca rădăcini $\sin \alpha$ și $\sin \beta$.

830. Se dă ecuația $x^2 - nx + m - 1 = 0$ și se cere: 1° pentru ce valori ale lui m o rădăcină este dubla celeilalte; 2° pentru ce valori ale lui m rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației satisfac neegalitatea

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1 x_2.$$

831. Pentru ce valori ale lui m rădăcinile ecuației

$$x^2 - mx + 2 = 0$$

satisfac inegalitatea $x_1^3 + x_2^3 > m^2$.

832. Fie a și b rădăcinile ecuației $x^2 + mx + 2m = 0$, iar A și B rădăcinile ecuației $-X^2 + 2mX + m^2 + 3 = 0$, în care m este un parametru. Pentru ce valori ale lui m avem

$$(a + b)AB < (A + B)ab.$$

833. ¹ Fie ecuațiile (1) $ax^2 + bx + c = 0$, (2) $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$. Pe o axă notăm prin A_1 și A_2 punctele corespunzătoare absciselor rădăcinilor ecuației (1), iar prin A_3, A_4 punctele corespunzătoare, în același mod, ecuației (2). Să se determine condiția necesară și suficientă pentru ca punctele A_3, A_4 să dividă armonic segmentul A_1A_2 .

834. Se dau ecuațiile

$$\begin{aligned} x^2 - 2(m-1)x + m(m-2) &= 0, \\ (m-1)x^2 - (m+1)x + m-1 &= 0. \end{aligned}$$

Să se determine m așa fel ca rădăcinile uneia din ecuații să separe armonic rădăcinile celeilalte.

835. Să se calculeze valoarea maximă sau minimă a trinoamelor următoare, precum și valoarea corespunzătoare a lui x

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad x^2 - 8x + 12; \quad 2^\circ \quad 4x^2 - 5x + 3; \quad 3^\circ \quad -x^2 + 6x - 9; \\ 4^\circ \quad 9x^2 - 6x + 1; \quad 5^\circ \quad -x^2 + 2x + 3; \quad 6^\circ \quad -5x^2 + 12x - 9. \end{aligned}$$

836. Să se înscrie într-un pătrat dat un pătrat de arie minimă.

837. Distanța dintre două localități A și B este de 200 km. O cale ferată, în linie dreaptă, trece prin localitatea A la o distanță egală cu 87 km de

¹ Expresia $(A_1A_2A_3A_4) = \frac{\overline{A_3A_1}}{A_3A_2} : \frac{\overline{A_4A_1}}{A_4A_2} = K$ se numește raportul anarmonic sau

biraportul punctelor coliniare A_1, A_2, A_3, A_4 . Punctele A_3 și A_4 sînt conjugate armonice în raport cu A_1 și A_2 , dacă $K = -1$. Raportul anarmonic a patru puncte este egal cu raportul anarmonic al absciselor lor.

localitatea B . Se propune să se construiască o șosea, în linie dreaptă, care să unească localitatea B cu calea ferată astfel încît costul transportului mărfurilor între A și B să fie minim, cunoscînd că cheltuielile de transport pe calea ferată sînt de două ori mai mici decît pe șosea.

838. O fereastră are forma unui dreptunghi, iar partea superioară în formă de semicerc cu diametrul egal cu lungimea dreptunghiului. Perimetrul ferestrei fiind constant, să se determine dimensiunile dreptunghiului astfel ca aria ferestrei să fie maximă.

839. Să se arate că parabola $y = mx^2 - 2(m + 1)x + m + 2$ taie axa Ox , oricare ar fi m real. Pentru ce valori ale lui m punctele de intersecție sînt simetrice față de origine.

840. Se cer valorile lui m pentru care parabolele

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad \text{și} \quad y = 2x^2 - 2(m + 3)x + m^2$$

sînt tangente. Să se construiască cele două parabole.

841. Se consideră parabolele

$$y = mx^2 + 6(m + 1)x + 9(m + 5),$$

$$y = mx^2 + 6(m + 1)x + 9(m + 4).$$

Să se arate că dacă prima taie axa Ox , atunci și a doua o taie, iar dacă a doua nu taie axa Ox , atunci nici prima nu o taie.

842. Să se reprezinte grafic parabolele și să se afle punctele lor comune.

$$1^\circ y = x^2 + 2x - 1, \quad x = y^2 + 2y - 1;$$

$$2^\circ y = x^2 - 4x + 3, \quad x = y^2 - 4y + 3.$$

843. Să se determine p așa fel ca parabola $y = x^2 - px + 3$ să aibă abscisa vîrfului egală cu 1.

844. Să se determine m așa fel ca parabola $y = 2x^2 - 3x + m$ să aibă minimul $y = 7/8$.

845. Să se determine p și q așa fel ca parabola $y = x^2 + px + q$ să aibă minimul în punctul $(3, -1)$.

846. Să se determine m astfel ca vîrful parabolei $y = x^2 - 2mx + m^2 + m$ să fie pe parabola $y = 2x^2 - (2m + 1)x + m - 1$. Pentru m astfel determinat să se reprezinte grafic.

847. Să se determine m astfel ca suma pătratelor rădăcinilor ecuației $x^2 + (2 - m)x - m - 3 = 0$ să fie minimă.

848. Să se determine coeficienții trinomului $ax^2 + bx + c$ pentru ca el să se anuleze pentru $x = 8$ și să aibă valoarea minimă -12 pentru $x = 6$.

849. Fiind date numerele a, a_1, b, b_1 , să se determine x astfel ca expresia

$$(ax + b)^2 + (a_1x + b_1)^2$$

să fie minimă. Se cere valoarea minimă a expresiei în acest caz.

850. Să se găsească valoarea maximă și minimă, precum și valorile corespunzătoare ale lui x în cazul expresiilor

$$\begin{aligned} 1^\circ \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1}; \quad 2^\circ \frac{5x^2 + 8x - 1}{x^2 + 1}; \quad 3^\circ \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}; \\ 4^\circ \frac{3x}{x^2 + x + 1}; \quad 5^\circ \frac{x^2 - 1}{5x^2 + 4x}; \quad 6^\circ \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 3x + 2}; \\ 7^\circ \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 6x + 5}. \end{aligned}$$

851. Se cer valorile parametrului m pentru care trinomul

$$(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6$$

este pozitiv oricare ar fi x .

852. Se dă trinomul $(m^2 - m - 6)x^2 - 2(m^2 - 1)x + m^2 + m$

1° Pentru ce valori ale lui m trinomul va fi totdeauna negativ, oricare ar fi valoarea lui x ?

2° Egalînd trinomul cu zero, să se studieze locul rădăcinilor în raport cu -1 și $+1$ pentru valorile lui m cuprinse între $-\infty$ și $+\infty$.

3° Să se reprezinte grafic variația discriminantului $\Delta = f(m)$ și să se deducă grafic natura rădăcinilor.

853. Să se determine m astfel ca parabola de ecuație

$$y = 4x^2 - 4(m^2 - m - 1)x - 4m^3 - 3m^2$$

să fie tangentă axei Ox . Să se construiască curba în acest caz.

854. Considerăm parabola $y = (p - 1)x^2 + 2px + 4$. 1° Pentru ce valoare a lui p parabola este tangentă axei Ox ; fie A acel punct. 2° Pentru ce valoare a lui p vârful parabolei este pe axa Oy ; fie B acel punct. 3° Să se arate că cele două parabole date de 1° și 2° sînt simetrice în raport cu mijlocul segmentului AB . 4° Există vreun punct prin care să treacă toate curbele cînd p variază?

ECUAȚII DE GRAD SUPERIOR

Să se rezolve ecuațiile

$$855. (a^2 - b^2)^2 x^4 - 2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4) x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$$

$$856. x^4 - a(a + b) x^2 + a^3b = 0$$

$$857. x^4 - 2 \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} x^2 + 1 = 0$$

$$858. x^4 - 2(a^2 + b^2) x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$$

$$859. \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 + \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 = \frac{10}{9}$$

$$860. 8x^4 - 8x^2 + 1 - \cos a = 0$$

$$861. x^4 - 10x^2 + 169 = 0$$

$$862. (x^2 - 3x + 2)^4 - 3(x^2 - 3x + 2)^2 + 2 = 0$$

$$863. (x + \sqrt{x})^4 - (x + \sqrt{x})^2 = 1 \ 260$$

$$864. (x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$$

$$865. \text{ Să se arate că ecuația}$$

$$\frac{x^2}{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{x^2 - b^2} = 4$$

are rădăcinile reale oricare ar fi a și b reali.

* * *

Să se discute ecuațiile

$$866. x^4 - 2(m - 1) x^2 + 2m + 1 = 0$$

$$867. (m - 2) x^4 - 2mx^2 + 2m - 3 = 0$$

$$868. x^4 - 2mx^2 + m - 3 = 0$$

$$869. (m - 1) x^4 - 4x^2 + m + 2 = 0$$

$$870. (3m - 2) x^4 + (2m + 1) x^2 - m = 0$$

$$871. (m - 3) x^4 - 2(3m - 4) x^2 + 7m - 6 = 0$$

$$872. (m - 2) x^4 - (m - 1) x^2 + m - 1 = 0$$

$$873. mx^4 + 2x^2 + m - 1 = 0$$

874. Să se formeze ecuația bipătrată care are ca rădăcini cele patru numere $\pm (\sqrt[3]{3} \pm \sqrt[3]{2})$. Să se rezolve ecuația astfel obținută.

875. Care este relația dintre p și q pentru ca ecuația $x^4 + px^2 + q = 0$ să aibă cele patru rădăcini în progresie aritmetică.

876. Să se determine q așa fel ca ecuația $2x^4 - 5x^2 + 2q = 0$ să aibă rădăcinile în progresie aritmetică.

877. Să se găsească condiția ca rădăcinile ecuației $ax^4 + bx^2 + c = 0$ să fie în progresie geometrică.

Să se rezolve și discute ecuațiile

$$878. (x + a)^4 + (x - a)^4 = 2b^4$$

$$879. (x + a)^5 - (x - a)^5 = 2b^5$$

$$880. \frac{(x + 1)^5 + (x - 1)^5}{(x + 1)^3 + (x - 1)^3} = \lambda$$

$$881. \frac{(x + a)^5 + (x - a)^5}{(x + b)^5 + (x - b)^5} = \lambda$$

882. Să se arate că orice ecuație bipătrată în care termenul liber este pătrat perfect poate fi rezolvată cu radicali simpli.

Aplicație :

$$4x^4 - (20a^2 - 9b^2) x^2 + 16a^4 = 0.$$

883. Pentru ce valori ale lui m ecuația

$$mx^4 - (m - 3) x^2 + 3m = 0$$

are o rădăcină mai mică decât -2 și trei rădăcini mai mari ca -1 .

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$884. 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$$

$$885. 2x^3 - (1 + i) x^2 - (1 + i) x + 2 = 0, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$886. abx^3 - (a^2 + b^2 - ab) x^2 - (a^2 + b^2 - ab) x + ab = 0$$

$$887. (a^2 - b^2) x^3 - (3a^2 + b^2) x^2 + (3a^2 + b^2) x - a^2 + b^2 = 0$$

$$888. (1 + a^8) x^3 - (a^{10} + a^8 + a^6 + a^2 + a^{-2} + 1) x^2 + \\ + (a^{10} + a^8 + a^6 + a^2 + a^{-2} + 1) x - (1 + a^8) = 0.$$

* * *

Să se discute natura rădăcinilor ecuațiilor

$$889. 2mx^3 + (2 - 7m) x^2 - (2 - 7m) x - 2m = 0$$

$$890. 2(m - 1) x^3 - (m^2 + 3) x^2 + (m^2 + 3) x - 2(m - 1) = 0.$$

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$891. x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 1 = 0$$

$$892. x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$893. abx^4 - (a^2 + b^2 - ab) x^3 - (a - b)^2 x^2 - (a^2 + b^2 - ab) x + ab = 0$$

$$894. \frac{(x+1)(x^5-1)}{(x-1)(x^5+1)} = a$$

$$895. \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 = m \frac{ax-1}{ax+1} \frac{x-a}{x+a}$$

$$896. x^4 - 4x^3 \cos a \cos b + 2x^2(1 + \cos 2a + \cos 2b) - \\ - 4x \cos a \cos b + 1 = 0$$

$$897. \cos a(1 - \cos a) x^4 - (\cos a + \sin^2 a) x^3 + \\ + (\cos^4 a - 2 \cos^3 a + \cos^2 a + 2) x^2 - \\ - (\cos a + \sin^2 a) x + \cos a(1 - \cos a) = 0.$$

* * *

Să se discute ecuațiile

$$898. 2mx^4 - (3m - 8) x^3 + 2(m + 2) x^2 - (3m - 8) x + 2m = 0$$

$$899. (a - 1) x^4 + 2ax^3 + 2ax^2 + 2ax + a - 1 = 0$$

$$900. x^4 + 4px^3 + 3(p + 1) x^2 + 4px + 1 = 0$$

$$901. x^4 - (2a + 1) x^3 + (a^2 + a - 4) x^2 - (2a + 1) x + 1 = 0$$

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$902. 20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20 = 0$$

$$903. x^6 + ax^4 + ax^2 + 1 = 0$$

904. Să se arate că pătratul oricărei rădăcini a ecuației

$$x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 0$$

este de asemenea o rădăcină a ecuației.

905. Să se rezolve ecuația

$$x^{10} - 5x^9 + 9x^8 - 16x^7 + 17x^6 - 21x^5 + 17x^4 - 16x^3 + 9x^2 - 5x + 1 = 0.$$

* * *

Să se rezolve ecuațiile

906. $x^6 - 17x^3 + 16 = 0$

907. $(a^2 - 4)x^6 + 12ax^3 - 9a^2 = 0.$

* * *

Să se rezolve ecuațiile

908. $(x + 2)^3 + 8(x - 1)^3 = 0$

909. $27(x - 1)^3 + 8(x + 1)^3 = 0$

910. $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{17}{4}$

911. $\frac{x^2}{(x-1)^2} - \frac{(x-1)^2}{x^2} = \frac{15}{4}$

912. $[(x-5)^2 - x]^2 + 6 = 7(x-5)^2 - 7x$

913. $x^2 + x + 1 = \frac{42}{x^2 + x}$

914. $x^2 + 2x - 5 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 7$

915. $12x^3 - 13ax^2 - 13a^2x + 12a^3 = 0$

916. $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$

917. $x^4 + 2ax^3 + 4a^2x^2 + 2a^3x + a^4 = 0$

918. $a^2x^4 - a(a+b)x^3 - abx^2 + b(a+b)x + b^2 = 0$

919. $x^4 + ax^3 + bx^2 + adx + d^2 = 0$

920. $(x + a + b)^5 = x^5 + a^5 + b^5$

921. $(x^2 + x + 1)^2 + 1 = 0$

922. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 840 = 0$

923. $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = m, \quad a+b=c+d$

$$924. x(x+a)(3x+a)(3x-2a) = b^4$$

$$925. (x+a)(x^3+a^3) = b^2x^2$$

$$926. (x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 = 3(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$927. \frac{a-x}{(x-b)^2} + \frac{x-b}{(a-x)^2} = \frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2}$$

$$928. \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

$$929. \frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} = -3$$

$$930. \frac{b+c}{x-a} + \frac{c+a}{x-b} + \frac{a+b}{x-c} = 3$$

$$931. \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^6 - 4\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + 4\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 = 0$$

$$932. \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0$$

$$933. \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+a+b} = 0$$

$$934. \frac{1}{x(x-a)(x-b)} + \frac{1}{a(a-x)(a-b)} + \frac{1}{b(b-x)(b-a)} + \frac{1}{ax^2 - abx - a^3} = 0$$

$$935. (x+1)^4 + (x+2)^4 + (x+3)^4 + (x+4)^4 = 4(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 18$$

$$936. m \frac{ax^2 + bx + 1}{px^2 + qx + 1} + n \frac{px^2 + qx + 1}{ax^2 + bx + 1} = m + n$$

$$937. \frac{ax-1}{ax+1} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$938. (x+p)(x+p+1)(x+p+2)(x+p+3) - (x+q)(x+q+1)(x+q+2)(x+q+3) = 0.$$

939. Pentru ce valori ale lui x avem

$$\left(\frac{a+b+cx}{a-b} + \frac{ax+b+c}{b-c} + \frac{a+bx+c}{c-a} \right) \left(\frac{a-b}{a+b+cx} + \frac{b-c}{ax+b+c} + \frac{c-a}{a+bx+c} \right) = 9$$

940. Să se dea condițiile necesare și suficiente pentru ca rădăcinile ecuației $x(x+1)(x+2)(x+3)+m=0$ să fie toate reale și diferite.

941. Să se găsească patru numere întregi consecutive așa fel încît cubul celui mai mare să fie egal cu suma cuburilor celorlalte trei.

942. Să se rezolve ecuația $4x^3 - 12x^2 + 9x + m = 0$ știind că admite o rădăcină dublă.

943. Să se rezolve ecuația $4x^3 - 12x^2 + mx - 2 = 0$ știind că admite rădăcini inverse.

944. Să se rezolve ecuația $x^3 - 3x^2 + ax + 8 = 0$ știind că produsul a două rădăcini este egal cu 2.

945. Să se rezolve ecuația $x^3 + ax^2 - 16x + 48 = 0$, știind că are două rădăcini opuse.

946. Să se determine m și să se rezolve ecuația $2x^3 - 8x^2 + mx - 3 = 0$ știind că între rădăcini avem relația $x_1 = 3(x_2 + x_3)$.

947. Pentru ce valoare a lui a o rădăcină a ecuației $x^3 - 3ax^2 + 6x - 4 = 0$ este media aritmetică a celorlalte două.

948. Să se determine a , b și c astfel ca ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ să admită ca rădăcini pe a , b și c .

949. Să se rezolve ecuația $x^3 - 6ax^2 + bx - 64a = 0$ știind că rădăcinile ei sînt proporționale cu numerele 2, 3 și 4.

950. Să se rezolve ecuația $x^3 - 2x^2 + \lambda x + 2 = 0$ știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$.

951. Să se rezolve ecuația $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x + a = 0$ știind că are două rădăcini opuse.

952. Să se rezolve ecuația $4x^4 - 20x^3 + 35x^2 - ax + 6 = 0$ știind că între rădăcini există relația $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

953. Să se rezolve ecuația $3x^4 + ax^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ în ipoteza că admite două rădăcini opuse.

954. Să se rezolve ecuația $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + a = 0$ știind că admite o rădăcină dublă.

955. Să se rezolve ecuația $x^4 - 8x^3 + ax^2 - 23x + 6 = 0$ știind că admite două rădăcini inverse.

956. Să se rezolve ecuația $x^3 - 9x^2 + mx - 15 = 0$ presupunînd că rădăcinile sînt în progresie aritmetică.

957. Ce relație trebuie să existe între coeficienții ecuației $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pentru ca rădăcinile ei să fie: 1° în progresie aritmetică; 2° în progresie geometrică. Aplicații:

$$1^\circ x^3 + ax^2 - m^2x - a^3 = 0; \quad 2^\circ x^3 + ax^2 + ax + c = 0.$$

958. Să se rezolve ecuația $a^3x^3 - a^2(1 + b + b^2)x^2 + ab(1 + b + b^2)x - b^3 = 0$ știind că rădăcinile sînt în progresie geometrică.

959. Se cere condiția ca rădăcinile ecuației $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ să satisfacă relația $\frac{2}{x_1} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$. Aplicație:

să se rezolve ecuația

$$x^3 - \frac{3n^2 - 1}{n^3 - n}x^2 + \frac{3n}{n^3 - n}x + c = 0.$$

960. Să se rezolve ecuația $x^3 + (1 - 2a)x^2 - 3ax - a = 0$ știind că o rădăcină este media armonică a celorlalte două.

961. Să se rezolve ecuația $x^4 - 10x^3 + ax^2 - 50x + 24 = 0$ știind că rădăcinile sînt în progresie aritmetică.

962. Dacă rădăcinile ecuației $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ sînt în progresie aritmetică:

$$1^\circ \text{ rația } r \text{ este dată de formula } r = \pm \frac{1}{10} \sqrt[3]{15a^2 - 40b};$$

2° cei doi termeni extremi sînt rădăcinile ecuației

$$40x^2 + 20ax - 11a^2 + 36b = 0;$$

3° cei doi termeni de la mijloc sînt rădăcinile ecuației

$$40x^2 + 20ax + a^2 + 4b = 0.$$

963. Să se determine polinoamele $P(x) = ax^2 + bx + c$ așa fel ca ecuația $[P(x)]^2 - 1 = 0$ să aibă rădăcinile în progresie aritmetică. Discuție.

* * *

Să se rezolve ecuațiile, știind că au rădăcinile în progresie geometrică

964. $x^4 + 15x^3 + 70x^2 + 120x + 64 = 0$

965. $8x^4 - 30x^3 + 35x^2 + mx + 2 = 0.$

* * *

966. Să se rezolve ecuația $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + m = 0$ știind că produsul a două rădăcini este egal cu produsul celorlalte rădăcini.

967. Să se rezolve ecuația $x^4 - 3x^3 + ax^2 - 4(a-1)x + 4a = 0$ știind că $x_1 = x_2$.

968. Să se rezolve ecuația $x^4 + 4x^3 + mx^2 + nx + mn = 0$ știind că $x_1 + x_2 = 1$, $x_3 - x_4 = 1$.

969. Să se determine a și b astfel ca ecuația $x^4 - 2x^3 - 3ax^2 + bx + b = 0$ să admită două cîte două rădăcini confundate.

970. Să se rezolve ecuația $x^4 - x^3 - 2x^2 + \lambda x + \lambda + 2 = 0$ astfel ca $x_1 + x_2 = x_3 x_4$.

971. Să se rezolve ecuația $x^4 + px^3 + 12x^2 + qx + 9 = 0$ astfel ca între rădăcinile sale să existe relația $x_1 = x_2 + x_3 + x_4 = x_2 x_3 x_4$.

972. Să se determine a , b , c și să se rezolve ecuația $x^5 - 20x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ știind că are rădăcinile în progresie aritmetică.

973. Să se rezolve ecuația $x^5 + 4x^4 - 12x^3 - 54x^2 + \alpha x + \beta = 0$ știind că are o rădăcină triplă.

974. Să se rezolve ecuația $x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0$ în ipoteza că admite o rădăcină triplă și una dublă.

975. Să se determine a , b și c așa fel ca ecuația

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} = 1$$

să admită rădăcină dublă $x = -2$ și rădăcină simplă $x = -1$.

976. Se dă ecuația $x^3 - 7x \cos^2 \alpha + 6 \cos 2\alpha = 0$. Pentru ce valori ale lui α o rădăcină este dublul alteia? Să se rezolve ecuația.

977. Să se determine a și să se rezolve ecuația

$$x^3 - (a+3)x^2 + (2a+3)x - (a+1) = 0$$

știind că $x_2 = ax_1 + 1$.

978. Se dă ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. 1° Să se afle relația dintre coeficienți astfel ca : a) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$; b) $x_1 x_2 = x_3 x_4$. 2° Să se arate că în cazul a) ecuația se reduce la una bipătrată dacă substituim $x = y + \alpha$, unde α rămîne să fie determinat. 3° În cazul b) ecuația se reduce la una de gradul II prin substituția $x + \frac{c}{ax} = y$, $a \neq 0$.

979. Să se rezolve ecuația $x^3 - 3x + \lambda = 0$ știind că rădăcinile ei satisfac relația

$$nx_1 + (n+1)x_2 + (n+2)x_3 = 0.$$

980. Să se rezolve ecuația $x^3 - 6x^2 + 18x - \lambda = 0$ în ipoteza că rădăcinile satisfac relația

$$nx_1^2 + (n+1)x_2^2 + (n+2)x_3^2 = 0.$$

981. Să se determine λ și să se rezolve ecuația $x^3 + \lambda x^2 + 31x + 3\lambda = 0$ știind că rădăcinile ei satisfac relația $x_1 + x_3 = x_2^3$.

982. Să se rezolve ecuația $x^3 - ax^2 + bx + a = 0$ știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = a^3$.

983. Să se rezolve ecuația $x^3 + px - 2 = 0$ știind că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 18$.

* * *

Să se găsească rădăcinile raționale ale ecuațiilor

984. $2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0$

985. $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

986. $2x^3 - 12x^2 + 13x + 15 = 0$

987. $3x^3 + 7x^2 - 15x - 35 = 0$

988. $3x^3 - 4x^2 + x + 88 = 0$

989. $9x^4 + 11x^2 - 16x + 4 = 0$

990. $x^4 - x^3 - 18x^2 + 52x - 40 = 0$

991. $15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0$

992. $2x^5 - 15x^4 + 17x^3 + 57x^2 - 91x + 30 = 0$

993. $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 25x^2 + 21x + 270 = 0$.

* * *

994. Să se rezolve ecuația $x^4 + mx^3 + (m+1)x^2 + mx + m = 0$ știind că admite rădăcini independente de m . Să se rezolve și în cazul rădăcinilor duble.

995. Să se determine λ rațional și să se rezolve ecuația $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 2x + \lambda = 0$ știind că admite ca rădăcină $1 - \sqrt[3]{3}$.

996. Să se rezolve ecuația $x^4 - 10x^3 + 31x^2 - 34x + 12 = 0$ știind că admite ca rădăcină $3 + \sqrt[3]{5}$.

997. Să se determine parametrii a și b raționali astfel ca ecuația $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$ să admită ca rădăcină $-2 + \sqrt[3]{3}$.

998. Să se rezolve ecuația $x^6 + 3x^5 - 12x^4 - 30x^3 + 24x^2 + 3x - 2 = 0$ în ipoteza că admite rădăcina $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$.

999. Să se rezolve ecuația $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$ știind că admite rădăcina $x_1 = i$.

1 000. Să se rezolve ecuația $x^4 + x^3 - 25x^2 + 41x + 66 = 0$ știind că admite rădăcina $3 - i\sqrt{2}$.

1 001. Să se determine α și β reali astfel ca ecuația $x^4 + 3x^3 + \alpha x^2 + 21x + \beta = 0$ să admită rădăcina $1 + 2i$. Să se rezolve ecuația.

1 002. Să se determine α și β reali astfel ca ecuația $x^4 + \alpha x^3 + 49x^2 + \beta x + 78 = 0$ să admită rădăcina $3 + 2i$.

1 003. Să se determine m și n reali și raționali astfel ca ecuația $x^6 - 2x^5 - 2x^4 + mx^3 + 17x^2 + nx - 100 = 0$ să admită rădăcina $\sqrt[3]{2} + i\sqrt[3]{3}$. Să se rezolve.

1 004. Să se determine a și b reali și raționali astfel ca ecuația

$$x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 + ax^2 - 20x + b = 0$$

să admită rădăcina $\sqrt[3]{2} + i$ și să se rezolve.

1 005. Pentru ce valori ale lui m ecuațiile

$$x^3 - mx^2 - (9 - 3m)x - 1 = 0,$$

$$(m - 8)x^3 + (30 - 3m)x^2 - 18x + 8 - m = 0$$

admit aceleași rădăcini.

* * *

Să se rezolve ecuațiile în ipoteza că admit rădăcini multiple

1 006. $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0$

1 007. $8x^5 + 4x^4 - 10x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$

1 008. $x^4 + 4x^3 - 26x^2 - 60x + 225 = 0$.

* * *

1 009. Să se rezolve ecuațiile

$$x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0, \quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$$

știind că au rădăcini comune.

* * *

Să se cerceteze dacă ecuațiile următoare au rădăcini comune și să se rezolve

1 010. $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0, \quad 2x^3 - 4x + 2 = 0$

1 011. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0, \quad x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

1 012. $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0, \quad x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0$

1 013. $x^5 - 6x^5 - x^4 - x^2 + 6x + 1 = 0,$

$$2x^5 - 18x^4 + 39x^3 - 25x^2 + x + 1 = 0.$$

1 014. Să se afle rădăcinile comune ale ecuațiilor

$$x^2 - 2ax \cos \alpha + a^2 = 0,$$

$$x^3 \sin \alpha - a^2 x \sin 3\alpha + a^3 \sin 2\alpha = 0.$$

1 015. Să se rezolve ecuațiile $x^3 - 6x^2 + 11x + a = 0, \quad x^3 + 4x^2 + x + a = 0$ știind că admit o rădăcină comună.

1 016. Să se rezolve ecuațiile $x^3 + \alpha x^2 + (1 - 3\alpha)x + 3\alpha = 0, \quad x^3 + x + \alpha = 0$ știind că admit o rădăcină comună.

1 017. Să se rezolve ecuațiile $x^3 + x + \alpha = 0, \quad x^5 - (1 - 3\alpha)x - 3\alpha = 0$ știind că admit o rădăcină comună.

1 018. Să se găsească condiția ca ecuațiile $x^2 + px + q = 0, \quad x^3 + px + q = 0$ să aibă o rădăcină comună și să se găsească rădăcina comună.

1 019. Să se rezolve ecuațiile $x^3 + ax + b = 0, \quad x^4 + (2b + 1)x + 2a = 0$ știind că admit două rădăcini comune.

1 020. Să se determine p și q astfel ca ecuațiile $x^3 - 7x + q = 0, \quad x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x + p = 0$ să aibă două rădăcini comune.

1 021. Să se determine α și β pentru ca ecuațiile

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + \alpha = 0,$$

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + \beta = 0$$

să aibă două rădăcini comune.

1 022. Să se arate că între rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $x^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$ există relația

$$\frac{1 + \operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 + \operatorname{arctg} x_3}{1 - (\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 + \operatorname{arctg} x_3)} = \frac{4 + \pi}{4 - \pi}.$$

1 023. În ecuația $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ să se facă o transformare de forma $y = mx + n$ astfel ca să devină de forma $y^3 + py + q = 0$.

1 024. Se de ecuația $x^3 - x + 1 = 0$. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ și $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

1 025. Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$, să se arate că

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{3} [(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2].$$

1 026. Fie a, b, c rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$; notăm $s_n = a^n + b^n + c^n$; să se calculeze $s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_{-1}, s_{-2}, s_{-3}, s_{-4}, s_{-5}, s_{-6}$ în funcție de p și q .

1 027. Dacă a, b, c sînt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$, să se arate că

$$1^\circ 12s_4s_5 = 5s_2^3s_3; \quad 2^\circ s_2^2s_3 = 3(s_2s_5 - s_3s_4),$$

în care $s_n = a^n + b^n + c^n$.

1 028. Dacă a, b, c sînt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$, să se calculeze $E = ab^3 + ac^3 + ba^3 + bc^3 + ca^3 + cb^3$.

1 029. Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $2x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$, să se găsească și rezolve ecuația care are ca rădăcini pe

$$y_1 = \frac{x_2 + x_3}{x_1}, \quad y_2 = \frac{x_3 + x_1}{x_2}, \quad y_3 = \frac{x_1 + x_2}{x_3}.$$

Să se deducă rădăcinile ecuației date.

1 030. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 + ax^2 + b = 0$. Să se determine b astfel ca între rădăcinile ei să existe relația

$$\sum [(x_1^2 + x_2^2)^2 - x_3^4] = a^3 + \frac{b}{a^2}.$$

1 031. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Să se formeze ecuația de gradul III ale cărei rădăcini sînt $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1$. Să se rezolve ecuația astfel obținută. Să se determine a astfel ca ecuația să aibă rădăcini reale.

1 032. Fie a, b, c rădăcinile ecuației $x^3 + mx^2 + px + q + 1 = 0$. Să se construiască ecuația în X de gradul III ale cărei rădăcini să fie

$$X_1 = \frac{abc + 1}{ab}, \quad X_2 = \frac{abc + 1}{bc}, \quad X_3 = \frac{abc + 1}{ca}$$

și să se rezolve ambele ecuații pentru $m = 2$ și $p = q = 1$.

1 033. Fiind dată ecuația $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 , să se formeze ecuația de gradul III care are ca rădăcini

$$X_1 = \frac{x_2x_3}{x_1}, \quad X_2 = \frac{x_3x_1}{x_2}, \quad X_3 = \frac{x_1x_2}{x_3}.$$

1 034. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - px^2 + qx + r = 0$. Să se calculeze

$$E = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2}.$$

1 035. Se dă ecuația $x^3 + x + 4 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Să se formeze ecuația de gradul III care are ca rădăcini

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}, \quad y_3 = x_3 + \frac{1}{x_3}.$$

1 036. Se dă ecuația $x^3 + x^2 + px + q = 0$. Să se formeze ecuația de gradul trei care are ca rădăcini

$$y_1 = 1 - \frac{1}{x_1^3}, \quad y_2 = 1 - \frac{1}{x_2^3}, \quad y_3 = 1 - \frac{1}{x_3^3}.$$

* * *

Să se elimine x între ecuațiile

1 037. $2x^2 - x + 3 - u = 0, \quad 3x^2 + x - 2 - v = 0$

1 038. $x^3 - 1 = 0, \quad ax^2 + bx + c = 0$

1 039. $x^3 + mx^2 - 4 = 0, \quad x^3 + mx + 2 = 0$

1 040. $x^3 + 4mx^2 - 3x + 12 = 0, \quad 2x^3 + (m + 2)x^2 - 5x + 1 = 0.$

ECUAȚII IRAȚIONALE

(ECUAȚII CU RADICALI)

Să se rezolve ecuațiile

1 041. $7(2\sqrt{x} + 3) - 2\sqrt{x} + 3 = 24\sqrt{x}$

1 042. $2x + \sqrt{x-1} = 8$ **1 043.** $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1$

1 044. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$

1 045. $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x-10}$

1 046. Să se rezolve ecuația $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} - \sqrt{2x+19} = 0$, precum și ecuația $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+6} - \sqrt{2x+19} = 0$ și să se confrunte rezultatele.

* * *

Să se rezolve ecuațiile

1 047. $\sqrt{x^2-11} - \sqrt{x^2-20} = 1$

1 048. $\sqrt{x^2+3x-7} - \sqrt{x^2-3x-15} = 4$

1 049. $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b-2x}$

1 050. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-9} = \sqrt{x-18} - \sqrt{x-25}$

1 051. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x-1$

1 052. $\sqrt{10x+32 + \sqrt{x^4-14x^2+5x-1}} = x+5$

1 053. $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$

1 054. $\sqrt{x - \sqrt{1+x}} - \sqrt{x} + 1 = 0$

1 055. $\sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2-1}} \pm \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2-1}} = 2$

- 1 056. $\sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} \pm \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{x^2 - 1}$
- 1 057. $x^2 - 4x + 1 = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$
- 1 058. $\sqrt{3x^2 - x + 2} + 2x - 6x^2 + 2 = 0$
- 1 059. $2\sqrt{8x^2 - 26x + 16} - 1 = \frac{5 - 4\sqrt{8x^2 - 26x + 16}}{\sqrt{8x^2 - 26x + 16}}$
- 1 060. $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}(x + 1)$
- 1 061. $\sqrt{a + x} + \sqrt{b + x} + \sqrt{c + x} + \sqrt{a + b + c + x} = 0$
- 1 062. $\sqrt{(a - x)(b - x)} + \sqrt{(a - x)(c - x)} + \sqrt{(b - x)(c - x)} = x$
- 1 063. $\sqrt{a^3 + x^3 + 2a^2x\sqrt{x}} + \sqrt{a^3 + x^3 - 2a^2x\sqrt{x}} = 1$
- 1 064. $\sqrt{1 + \sqrt{x(2 - x)}} + \sqrt{1 - \sqrt{x(2 - x)}} = \sqrt{2(2 - x)}$
- 1 065. $\sqrt{x + \sqrt{(2x + a - 2)(2 - a)}} +$
 $+ \sqrt{x - \sqrt{(2x + a - 2)(2 - a)}} = \sqrt{2a}, a \geq 1$
- 1 066. $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$
- 1 067. $\frac{(x - 1)(x - 2) - (x - 3)(x - 4)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 7x + 12}} = \sqrt{2}$
- 1 068. $\frac{1 - ax}{1 + ax} \sqrt{\frac{1 + bx}{1 - bx}} = 1$
- 1 069. $\frac{1 + x - \sqrt{2x + x^2}}{2 + x + \sqrt{2x + x^2}} = a^3 \frac{\sqrt{2 + x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}}$
- 1 070. $\frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}} = \frac{a}{x}$
- 1 071. $\frac{1}{2} - \frac{3}{x} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{x} \sqrt{9 - \frac{36}{x}}}$
- 1 072. $\frac{\sqrt{1 - x}}{2 - \sqrt{1 + x}} = \frac{\sqrt{1 + x}}{2 + \sqrt{1 - x}}$
- 1 073. $\frac{1}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}} + \frac{1}{\sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x}} = 1$

$$1\ 074. \frac{\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{2x+1}} = \frac{2}{5}$$

$$1\ 075. \frac{\sqrt{x+4a}}{3b + \sqrt{x}} = \frac{2a + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + b}$$

$$1\ 076. \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \sqrt{b}$$

$$1\ 077. \frac{\sqrt{x^2+x+6} + \sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6} - \sqrt{x^2-x-4}} = 5$$

$$1\ 078. \frac{1}{1 - \sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1$$

$$1\ 079. \frac{x-1 - \sqrt{2x+x^2}}{\sqrt{2x+x^2}} = \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$1\ 080. \frac{\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax}}{1 + \sqrt{ax+b}} = \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{ax}}{1 - \sqrt{ax+b}}$$

$$1\ 081. \frac{a}{x + \sqrt{a+x^2}} + \frac{b}{x - \sqrt{b+x^2}} = cx$$

Caz particular $a = 1$, $b = 8$, $c = 1$

$$1\ 082. \frac{(a-x)\sqrt{a-x} - (b-x)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}} = a - b$$

$$1\ 083. \frac{2}{\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} + \frac{3}{\sqrt{x-1}} = 0$$

$$1\ 084. \frac{\sqrt{a-bx} + \sqrt{a-cx}}{\sqrt{a-bx} + \sqrt{ax-b}} = \frac{\sqrt{a-bx} - \sqrt{a-cx}}{\sqrt{a-bx} - \sqrt{ax-b}}$$

1 085. Să se rezolve ecuațiile

$$1^\circ \frac{\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1}} = 2x - 1;$$

$$2^\circ \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1}} = 2x - 1$$

verificându-se soluțiile aflate.

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$1\ 086. \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$1\ 087. \frac{\sqrt{\sqrt{2} + x} - \sqrt{\sqrt{2} - x}}{\sqrt{\sqrt{2} + x} + \sqrt{\sqrt{2} - x}} = \sqrt{2} - x.$$

1 088. Să se rezolve ecuația

$$(3x + 10)^{-\frac{1}{2}} + 6(x + 2)^{-\frac{1}{2}} (3x + 10)^{-\frac{1}{2}} = (x + 2)^{-\frac{1}{2}}$$

1 089. Să se rezolve și să se discute după valorile parametrului a ecuația

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}$$

1 090. Să se rezolve și discute după valorile lui m ecuația

$$\sqrt{2x^2 - (15 + m)x + 7 - 3m + m^2} = -x + 2m - 3$$

1 091. Să se discute ecuația

$$(\lambda - 1)x + \lambda\sqrt{1 - x^2} = \lambda + 1,$$

λ fiind un parametru variabil.

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$1\ 092. \sqrt[3]{x-1} - x = -1 \qquad 1\ 093. \sqrt[3]{x} - x = -6$$

$$1\ 094. \sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1+x} = 0$$

$$1\ 095. \sqrt[3]{x} + \sqrt{x-11} = 7$$

$$1\ 096. \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x+343} = 7$$

$$1\ 097. \sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x+b} = \sqrt[3]{a-b}$$

$$1\ 098. \sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$$

$$1\ 099. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$$

$$1\ 100. \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{15}{8} \sqrt[3]{\frac{x}{15}}$$

$$1\ 101. \sqrt[3]{\frac{5+x}{30-x}} + \sqrt[3]{\frac{30-x}{5+x}} = 2 \frac{1}{6}$$

$$1\ 102. \sqrt[3]{(x+a)^2} + \sqrt[3]{(x-a)^2} + \sqrt[3]{x^2 - a^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$1\ 103. \sqrt[3]{a+x} - \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[6]{a^2-x^2}$$

$$1\ 104. (a+x)^{\frac{2}{3}} + 4(a-x)^{\frac{2}{3}} - 5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$1\ 105. \sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x-15} = 4$$

$$1\ 106. \sqrt[4]{x+15} - \sqrt[4]{x-1} = 2.$$

$$1\ 107. \text{ Să se rezolve ecuația } \sqrt{x^2+17} - \sqrt[4]{x^2+17} = 6.$$

Să se tragă concluzia pentru ecuația $\sqrt{x^2+17} + \sqrt[4]{x^2+17} = 6$.

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$1\ 108. \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \sqrt[4]{\frac{a-x}{a+x}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \sqrt[4]{\frac{a+x}{a-x}} = 2$$

$$1\ 109. \sqrt{1-a} \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{1+a} \sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} = 2\sqrt[4]{1-a^2}$$

$$1\ 110. \sqrt[5]{(7x-3)^3} + 8\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}} = 7$$

$$1\ 111. \sqrt[5]{37-x} + \sqrt[5]{x-4} = 3.$$

SISTEME DE ECUAȚII

Să se rezolve sistemele

$$\begin{aligned} 1112. \quad & a(a + 3b)x + b(b + 3a)y = (a + b)^3, \\ & a(a - 3b)x - b(b - 3a)y = (a - b)^3 \end{aligned}$$

$$1113. \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = b^5, \quad \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = a^2b^2$$

$$1114. \quad \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad bx + ay = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

$$1115. \quad \frac{x}{a + b} + \frac{y}{a - b} = 2a, \quad \frac{x - y}{2ab} = \frac{x + y}{a^2 + b^2}$$

$$1116. \quad x + y = 2a^3, \quad \frac{x}{y} = \frac{a + b - \frac{ab}{a + b}}{a - b + \frac{ab}{a - b}}$$

$$1117. \quad (a^2 - b^2)(ax + by) = ab(a^2 + b^2),$$

$$a^2y - \frac{ab^2c}{a + b} + (a + b + c)bx = b^2y + ab(a + 2b)$$

$$1118. \quad \frac{a^2 + 1}{x} + (a^2 - 1)y = a^2 + 1,$$

$$\frac{a^2 - 1}{x} - (a^2 + 1)y = a^2 - 1$$

$$1119. \quad (a^2 + a - 1)\frac{1}{x} - (a^2 - a - 1)\frac{1}{y} = a,$$

$$\frac{a^2 - a + 1}{x} + \frac{a^2 + a - 1}{y} = a^2$$

$$1120. \quad ax^2 - b^2y + b^5 = 0, \quad bx^2 - a^2y + a^5 = 0$$

1 121. $(a^2 - b^2)x + (a^2 + b^2)y = a^2,$

$$(a^3 - b^3)x + (a^3 + b^3)y = a^3$$

1 122. $(ap^3 + bq^3)x + (ap^4 + bq^4)y = ap^5 + bq^5,$

$$(ap^4 + bq^4)x + (ap^5 + bq^5)y = ap^6 + bq^6$$

1 123. $x \sin a + y \sin 2a = \sin 3a, \quad x \sin 2a + y \sin 3a = \sin 4a$

1 124. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a \cos 3\alpha, \quad x \sin \alpha - y \cos \alpha = a \sin 3\alpha$

1 125. Să se rezolve sistemul

$$x + my - \sqrt{a^2 + b^2 m^2} = 0, \quad mx - y + \sqrt{b^2 + a^2 m^2} = 0$$

și să se arate că $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

1 126. Să se arate că sistemul

$$ax + by = a^2 + b^2, \quad amx + bny = a^2 m + b^2 n,$$

$$apx + bqy = a^2 p + b^2 q$$

este compatibil.

1 127. Să se arate că sistemul

$$ax + by = (a + b)^2, \quad (a - b)^2 x + 4aby = (a + b)^3,$$

$$(a^2 - ab + b^2)x + 3aby = (a + b)^3$$

este compatibil.

1 128. Să se rezolve și să se discute sistemul

$$(m + 1)x + y = m, \quad 3x + (m - 1)y = 2,$$

m fiind un parametru.

1 129. Să se arate că sistemul

$$x \cos b - y \sin b = \cos 2b, \quad x \sin a + y \cos a = \sin(a + b),$$

$$x \cos a + y \sin a = \cos(a - b)$$

este compatibil și să se rezolve.

1 130. Se dă sistemul

$$kx + (k + 1)y = 2k - 1, \quad (3 - k)x + 2(3 - k)y = k + 1.$$

1° Să se discute, k fiind un parametru; 2° să se calculeze rădăcinile cu o eroare de 0,001 când $k = \pi = 3,14159265...$

1 131. Să se rezolve și discute sistemul

$$x \cos a + y \sin a = \cos b, \quad x \cos 2a + y \sin 2a = \cos(a + b),$$

a și b fiind doi parametri. Să se elimine apoi a și b dintre aceste ecuații.

1 132. Să se discute sistemul

$$(4t^2 + t + 4)x + (5t + 1)y = 4t^2 - t - 3, \quad (t + 2)x + 2y = t,$$

dând și semnul rădăcinilor lui, unde t este un parametru real.

1 133. Să se găsească condiția ca ecuațiile

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad a' \sin x + b' \cos x = c'$$

să fie satisfăcute pentru aceleași valori ale lui x .

1 134. Să se determine m și n așa fel ca sistemul

$$mx + ny = 3, \quad nx + 4my = 2(m + n)$$

să fie nedeterminat.

1 135. Să se determine a așa fel ca rădăcinile sistemului

$$(a + 1)x - ay = 1, \quad (2a + 1)x - y = a + 2$$

să fie proporționale cu 2 și 3.

1 136. Să se discute sistemul

$$x + 3y = 1, \quad 2x - my = 10, \quad 3x + my = 5m,$$

m fiind un parametru.

1 137. Să se determine p așa fel ca sistemul

$$2x + py = 8, \quad px - 2y = -1, \quad x + 2y = p + 2$$

să fie compatibil.

1 138. Să se dea cazurile când sistemul

$$x + aby = c^2, \quad x + bcy = a^2, \quad x + cay = b^2$$

este compatibil. Să se rezolve în aceste cazuri.

1 139. Să se determine a și b astfel ca sistemul

$$ax + by = 1, \quad (b - 1)x + y = 2, \quad 2x + 3y = 3,$$

$$ax + (b - 3)y = 4$$

să fie compatibil.

1 140. Pentru ce valori ale lui a, b, c sistemul

$$x + y = 1, \quad ax + by = 2, \quad cx + ay = 3, \quad 4bx + cy = 4,$$

$$(2a + b)x + cy = 5$$

este compatibil,

Să se rezolve sistemele

$$1\ 141. \ x + y + z = 2a, \quad ax - by - (a + b)z = 0,$$

$$(a + b)x - (a - b)y - (a - b)z = 2ab$$

$$1\ 142. \ x + ay + a^2z = -1, \quad ax + a^2y + z = 1 + a^2,$$

$$a^2x + y + az = 1 + a$$

$$1\ 143. \ x + a(b - c)y + a^2(b - c)z = 1,$$

$$x + b(c - a)y + b^2(c - a)z = 1,$$

$$x + c(a - b)y + c^2(a - b)z = 1$$

$$1\ 144. \ x \sin A + z \sin C = a, \quad y \sin B + x \sin A = b,$$

$$z \sin C + y \sin B = c.$$

1 145. Să se rezolve sistemul

$$ax + by + cz = 2(a + b + c),$$

$$a^2x + b^2y + c^2z = 2(ab + bc + ca)$$

$$a(b - c)x + b(c - a)y + c(a - b)z = 0.$$

Să se găsească o relație între rădăcinile sistemului independentă de a, b, c .

Se cer rădăcinile când $a + b + c = 0$.

1 146. Să se rezolve sistemul de două ecuații omogene cu trei necunoscute.

$$ax + by + cz = 0, \quad a'x + b'y + c'z = 0.$$

* * *

Ca aplicații ale ex. 1 146 să se rezolve sistemele

$$1\ 147. \ 2x + 5y - 4z = 0, \quad 3x - 2y - z = 0, \quad x + 3y - 2z = 15$$

$$1\ 148. \ x + y + z = 0, \quad ax + by + cz = 0,$$

$$a^2x + b^2y + c^2z + xyz = 0.$$

1 149. Se cere condiția ca sistemul liniar și omogen

$$ax + by + cz = 0, \quad a'x + b'y + c'z = 0, \quad a''x + b''y + c''z = 0$$

să admită și soluții diferite de zero.

* * *

Pentru ce valori ale lui m sistemele următoare admit și soluții diferite de zero (ex. 1 149). Să se afle soluțiile în cazul lui m determinat.

$$1\ 150. \ mx + y + z = 0, \quad x + my + z = 0, \quad x + y + mz = 0$$

$$1 \text{ 151. } (m-1)x - 3y - z = 0, \quad x + my + 31z = 0, \\ (m-2)x - y + 3z = 0$$

$$1 \text{ 152. } (2m+3)x - 4y - z = 0, \quad x + my + z = 0, \\ 3x - 12y + (2m-9)z = 0.$$

* * *

Să se arate că sistemele următoare admit și soluții diferite de zero și să se rezolve

$$1 \text{ 153. } x + y + z = 0, \quad ax + by + cz = 0, \\ (a^2 - bc)x + (b^2 - ca)y + (c^2 - ab)z = 0$$

$$1 \text{ 154. } (d-a)x + (d-b)y + (d-c)z = 0, \\ (na + b + c)x + (a + nb + c)y + (a + b + nc)z = 0 \\ (a^2 - bc)x + (b^2 - ca)y + (c^2 - ab)z = 0$$

$$1 \text{ 155. } x \sin a + y \cos a + z = 0, \\ x \sin b + y \cos b + z \cos(a-b) = 0, \\ x \sin c + y \cos c + z \cos(a-c) = 0.$$

1 156. Să se determine a astfel ca sistemul

$$2ax + 3y - 7z = 0, \quad (a-1)x - y = 0, \quad (a+2)x + 2y - 6z = 0$$

să fie nedeterminat.

* * *

Să se rezolve sistemele de ecuații simetrice

$$1 \text{ 157. } x + y + z = d, \quad y + z + t = a, \quad z + t + x = b, \\ t + x + y = c$$

$$1 \text{ 158. } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = c, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{2}{x} = a, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = b$$

$$1 \text{ 159. } yz = a(y+z), \quad zx = b(z+x), \quad xy = c(x+y)$$

$$1 \text{ 160. } xyz = a(yz - zx - xy) = b(zx - xy - yz) = c(xy - yz - zx)$$

$$1 \text{ 161. } x + y + z = 0, \quad (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0, \\ bcx + cay + abz = 1$$

$$1 \text{ 162. } x + ay + a^2z = a^3, \quad x + by + b^2z = b^3, \quad x + cy + c^2z = c^3$$

$$1 \text{ 163. } ay + bx = c, \quad cx + az = b, \quad bz + cy = a$$

$$\begin{aligned} 1 \ 164. \quad & a \sin (-x + y + z) + b \sin (x - y + z) = c, \\ & b \sin (x + y - z) + c \sin (-x + y + z) = b, \\ & c \sin (x - y + z) + a \sin (x + y - z) = a, \end{aligned}$$

a, b, c fiind laturile unui triunghi oarecare dat.

$$1 \ 165. \quad cy + bz = 2dyz, \quad az + cx = 2d'zx, \quad bx + ay = 2d''xy.$$

$$\begin{aligned} 1 \ 166. \quad & y \sin c + z \sin b - yz \sin a = 0, \\ & z \sin a + x \sin c - zx \sin b = 0, \\ & x \sin b + y \sin a - xy \sin c = 0, \end{aligned}$$

cînd $a + b + c = 0$.

$$\begin{aligned} 1 \ 167. \quad & (b + c) (y + z) - ax = b - c, \\ & (c + a) (x + z) - by = c - a, \\ & (a + b) (x + y) - cz = a - b. \end{aligned}$$

* * *

Să se rezolve prin artificii de calcul sistemele

$$1 \ 168. \quad mx = ny = pz, \quad az + by + cz = d.$$

$$1 \ 169. \quad ax^3 = by^3 = cz^3, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{d}.$$

$$1 \ 170. \quad ax = by = cz, \quad mx - y - nz = d.$$

$$1 \ 171. \quad ax = by = cz = du, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} = p.$$

$$1 \ 172. \quad \frac{xyz}{x+z} = \frac{mp}{m+p}, \quad \frac{xyz}{y+z} = \frac{np}{n+p}, \quad \frac{xyz}{x+y} = \frac{mn}{m+n}.$$

$$1 \ 173. \quad \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5}, \quad \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{7}, \quad \frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6}.$$

$$1 \ 174. \quad x + y + z = \frac{a^2}{x} = \frac{b^2}{y} = \frac{c^2}{z}.$$

$$1 \ 175. \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \quad xy + yz + zx = m^2.$$

$$1 \ 176. \quad ax = by = cz, \quad mx^2 + ny^2 + pz^2 = r.$$

$$1 \ 177. \quad \frac{x+y}{c} = \frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b}, \quad ax + by - cz = \frac{1}{a+b-c}.$$

$$1 \ 178. \quad \frac{2-x}{3} = \frac{4-y}{5}, \quad (2-x)^2 + (4-y)^2 = 34.$$

$$1\ 179. \frac{2x + y - 1}{5a - 1} = \frac{x - y + 1}{a + 1},$$

$$(2x + y - 1)^2 - (x - y + 1)^2 = 12a(2a - 1).$$

$$1\ 180. \frac{bx - cy}{a} = \frac{cx - ay}{b} = \frac{ay - bx}{c}, \quad mx + ny + pz = d.$$

$$1\ 181. \frac{bx - cy}{a + x} = \frac{cx - az}{b + y} = \frac{ay - bx}{c + z}, \quad mx + ny + pz = d.$$

$$1\ 182. x(y + z) = a, \quad y(z + x) = b, \quad z(x + y) = c.$$

$$1\ 183. \frac{xy}{xz + yz} = \frac{c}{b}, \quad \frac{yz}{xy + xz} = \frac{a}{c}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a + b + c.$$

* * *

1 184. Să se rezolve sistemul

$$a^2x + ay + z = (a - b)(a - c),$$

$$b^2x + by + z = (b - c)(b - a),$$

$$c^2x + cy + z = (c - a)(c - b).$$

Care este natura rădăcinilor ecuației în t

$$xt^2 + yt + z = 0,$$

în care x, y, z sînt rădăcinile sistemului: a, b, c se presupun constante date.

1 185. Să se rezolve și discute sistemul

$$mx + y - z = 0, \quad x + (m + 1)y + z = 2 + m - m^2,$$

$$x - 2y - mz = -2 + 3m - m^2,$$

m fiind un parametru.

1 186. Să se discute sistemul

$$x + a^2y - 2az = 1, \quad a^2x - 2ay + z = -2a, \quad -2ax + y + a^2z = a^2,$$

în care a este real.

* * *

Să se rezolve și discute sistemele

$$1\ 187. 2x - y + z + t = 1, \quad 1\ 188. ax + by + cz + dt = 0,$$

$$x + 2y - z + 4t = 2, \quad bx - ay - dz + ct = 0,$$

$$x + 7y - 4z + 11t = a. \quad cx + dy - az - bt = 0,$$

$$dx - cy + bz - at = 0.$$

Să se rezolve sistemele:

$$\begin{aligned} 1189. \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0, \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1190. \quad & 8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ & 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ & 12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1191. \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ & x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0, \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1192. \quad & 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ & 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ & 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 - 11x_4 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1193. \quad & x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1194. \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ & 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ & 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_5 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1195. \quad & ax + m(y + z + t) = \alpha, & by + n(z + t + x) = \beta \\ & cz + p(t + x + y) = \gamma, & dt + q(x + y + z) = \delta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1196. \quad & a_i x_i + m_i(x_1 + \dots + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + \dots + x_n) = \alpha_i, \\ & \text{unde } i = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

$$1197. \quad \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n}, \quad x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = b^p.$$

$$1198. \quad \frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{b}.$$

- 1 199.** $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n$
 $x_1 + 2x_2 + x_3 + \dots + x_n = n + 1$
 $x_1 + x_2 + 3x_3 + \dots + x_n = n + 2$
 $\dots \dots$
 $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + nx_n = 2n - 1$
- 1 200.** $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1$
 $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 2$
 $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 2x_n = 3$
 $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + \dots + 2x_n = 4$
 $\dots \dots$
 $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{n-1} + nx_n = n$
- 1 201.** $x_2 + x_3 + \dots + x_n = a_1$
 $x_3 + x_4 + \dots + x_1 = a_2$
 $x_4 + x_5 + \dots + x_2 = a_3$
 $\dots \dots$
 $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = a_n$
- 1 202.** $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = a_1$
 $x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \dots + nx_1 = a_2$
 $\dots \dots$
 $x_n + 2x_1 + 3x_2 + \dots + nx_{n-1} = a_n$
- 1 203.** $x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_n = 2a$
 $-x_1 + 3x_2 - x_3 - \dots - x_n = 4a$
 $-x_1 - x_2 + 7x_3 - \dots - x_n = 8a$
 $\dots$
 $-x_1 - x_2 - x_3 - \dots + (2^n - 1)x_n = 2^n a$
- 1 204.** $ax_1 + ax_2 + \dots + ax_{n-1} + bx_n = c_n$
 $ax_1 + ax_2 + \dots + bx_{n-1} + ax_n = c_{n-1}$
 $\dots \dots$
 $bx_1 + ax_2 + \dots + ax_{n-1} + ax_n = c_1$
 $(a \neq b)$
- 1 205.** $ax_1 + bx_2 + \dots + bx_n = c_1$
 $bx_1 + ax_2 + \dots + bx_n = c_2$
 $\dots \dots$
 $bx_1 + bx_2 + \dots + ax_n = c_n$

unde

$$(a - b) [a + (n - 1)b] \neq 0.$$

$$1 \text{ 206. } x_1 = a_1 - a_0,$$

$$x_2 + 2x_1 = a_2 - a_0,$$

$$x_3 + 3x_2 + 3x_1 = a_3 - a_0,$$

...

$$x_n + C_n^1 x_{n-1} + \dots + C_n^{n-3} x_3 + C_n^{n-2} x_2 + C_n^{n-1} x_1 = a_n - a_0.$$

1 207. Să se rezolve sistemul

$$x^2 - y - 3x + 2 = 0, \quad (m - 1)x - (m + 1)y = 3.$$

Pentru ce valori ale lui m rădăcinile sînt reale.

* * *

Să se rezolve sistemele neliniare de 2 ecuații cu 2 necunoscute.

$$1 \text{ 208. } x^2 + xy = 10,$$

$$1 \text{ 209. } 2x^2 - xy = 6,$$

$$y^2 + xy = 15.$$

$$2y^2 + 3xy = 8.$$

$$1 \text{ 210. } x^2 + y^2 - x - y = 78,$$

$$xy + x + y = 39.$$

$$1 \text{ 211. } \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}, \quad x^2 + y^2 = 90.$$

$$1 \text{ 212. } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}.$$

$$1 \text{ 213. } x^2 + y^2 = 10a^2 - 18, \quad xy = 9 - 3a^2. \quad \text{Discuție.}$$

$$1 \text{ 214. } m \frac{x}{y} + n \frac{y}{x} = m + n, \quad x - y = a - b.$$

$$1 \text{ 215. } x^2 + y^2 = m^2 (x^2 - a^2) (y^2 - b^2) = a^2 b^2.$$

$$1 \text{ 216. } x + y = xy - 3, \quad x^2 + y^2 = 3xy - 1.$$

$$1 \text{ 217. } x = y^2 + 3y, \quad y = x^2 + 3x.$$

$$1 \text{ 218. } x^2 y - xy^2 = 324, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{36}.$$

$$1 \text{ 219. } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \quad \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} = 12.$$

$$1 \text{ 220. } x + 2xy + y = 7, \quad x^2 y + xy^2 = 5.$$

- 1 221.** $x^2 + y^2 + 6xy = 68, \quad 2x^2 + 2y^2 - 3xy = 16$
1 222. $5x^2 + 3xy + x = 3, \quad 5y^2 + 3xy - y = 3$
1 223. $x^2 - 2xy + 3y^2 = 9, \quad x^2 - 4xy + 5y^2 = 5$
1 224. $x^2y + xy + x = 27, \quad xy^2 + xy + y = 5$
1 225. $x + y = 13, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$
1 226. $x + y + \sqrt{xy} = a^2, \quad x^2 + y^2 + xy = b$
1 227. $x^2 + y^2 = 10, \quad x + y + \sqrt{x + y} = 6$
1 228. $x + y + \sqrt{x + y - 2} = 14, \quad \frac{x^2y^2}{3} - \frac{3xy}{2} = 255$
1 229. $\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \quad x - y = 6$
1 230. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 19$
1 231. $ax + by = ap + bq, \quad x^2 + y^2 + xy = p^2 + q^2 + pq$
1 232. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2, \quad \frac{1}{xy} - xy = \frac{9}{20}$
1 233. $x^2 + y = x + y^2 = axy$
1 234. $x(x + y) = 12, \quad y^2 - x^2 + x + y = 18$
1 235. $x^3 + y^3 = 28, \quad x^2 - xy + y^2 = 7$
1 236. $x(x + 1) = a(x + y + 1), \quad y(y + 1) = b(x + y + 1)$
1 237. $x^2 + y^2 + 2(x + y) = 23, \quad x^2 + y^2 + xy = 19$
1 238. $x + \frac{1}{y} = \frac{2}{m}, \quad \frac{1}{x} + y = 2m$
1 239. $x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0,$
 $2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0$
1 240. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6}\sqrt{xy}, \quad x + y = 13$
1 241. $x + y^2 = ax, \quad y + x^2 = by$
1 242. $\sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}} = 5, \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$
1 243. $\frac{x-1}{x+1} + \frac{y-1}{y+1} = a + b, \quad \frac{xy-1}{xy+1} = \frac{a+b}{1+ab}$
1 244. $x(y^2 - 1) = y(x^2 - 1), \quad x^2y^2 + a^2 = a(x^2 + y^2)$

- 1 245. $x^2 + y^2 = 4$, $x^3 + y^3 = 8$
- 1 246. $x^3 + y^3 = 9$, $x^2y + xy^2 = 6$
- 1 247. $x^3 + y^3 = \alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}$, $xy(x + y) = \frac{1}{\alpha} - \alpha$
- 1 248. $x^3 + xy^2 = a^3$, $x^2y + y^3 = b^3$
- 1 249. $x^3 - axy^2 = b$, $y^3 - ax^2y = b$
Aplicație : $a = -3$, $b = 32$
- 1 250. $x^3 = 7x + 3y$, $y^3 = 7y + 3x$
Generalizare : $x^3 = ax + by$, $y^3 = ay + bx$
- 1 251. $x + xy + y = 5$, $x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17$
- 1 252. $(x - y)(x^2 - y^2) = 3$, $(x + y)(x^2 + y^2) = 15$
- 1 253. $x^2 + xy + ax = -a^3$, $xy^2 + xy + ay = a^3 - 2a^2$
- 1 254. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = 4\left(y - \frac{1}{y}\right)$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 4\left(y + \frac{1}{y}\right)$
- 1 255. $x^3 + x^2y + xy^2 = a$, $x^2y + xy^2 + y^3 = b$
- 1 256. $(x + y - xy)(x^2 + y^2 + 2xy - x^2y^2) = 5$,
 $(x + y + xy)(x^2 + y^2 + 2xy + x^2y^2) = 65$
- 1 257. $(x + 2y)^4 + (x - 2y)^4 = 256$, $x^3y + 4xy^3 = 16$
- 1 258. $x + y = a$, $x^4 + y^4 = b^4$
- 1 259. $x + y = a$, $x^5 + y^5 = b^5$
- 1 260. $x^2 + y^2 = 81$, $\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 6$
- 1 261. $\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - y} = \sqrt{1 + y} - \sqrt{1 - x} = 1$
- 1 262. $\sqrt{\frac{6x}{x + y}} + \sqrt{\frac{x + y}{6x}} = \frac{5}{2}$, $xy = x + y$
- 1 263. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$, $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2}$
- 1 264. $\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{y^3} = 35$, $\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{y} = 5$
- 1 265. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{81}{\sqrt{xy}} + 1$, $\sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78$
- 1 266. $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = a$, $y + x = b$

$$1\ 267. \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3, \quad \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}} = 3,5$$

$$1\ 268. \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7, \quad \frac{1}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x}}{y} = 0,375$$

* * *

Să se rezolve sistemele neliniare de 3 ecuații cu 3 necunoscute

$$1\ 269. xy = 20, yz = 30, x^2 + z^2 = 52$$

$$1\ 270. x + y = -1, xy + yz + zx = -10, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29$$

$$1\ 271. xy = 12, x + y + z = 12, x^2 + y^2 = z^2$$

$$1\ 272. x + y - z = 14, yz = 9, y^2 + z^2 - x^2 = 46$$

$$1\ 273. x + y + z = 19, y^2 = xz, x^2 + y^2 + z^2 = 133$$

$$1\ 274. 7x - 3y + z + 6 = 0, 5x - y - z - 2 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 4xz - 2yz + 3x - 4y - 13 = 0$$

$$1\ 275. x + y + z = 4, x + 2y + 3z = 5, x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

$$1\ 276. x(x + y + z) = a, y(x + y + z) = b, \\ z(x + y + z) = c$$

$$1\ 277. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = ax, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = by, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = cz$$

$$1\ 278. x^2 = ay, y^2 = bz, z^2 = cx$$

$$1\ 279. xy = az, xz = by, yz = cx$$

$$1\ 280. x^m y^n z^p = a, x^n y^p z^m = b, x^p y^m z^n = c$$

$$1\ 281. x_1 x_2^2 x_3^3 \dots x_{n-1}^{n-1} x_n^n = a_1, \quad x_2 x_3^2 x_4^3 \dots x_n^{n-1} x_1 = a_2, \\ x_n x_1^2 x_2^3 \dots x_{n-2}^{n-2} x_{n-1}^n = a_n$$

$$1\ 282. \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4}$$

$$1\ 283. x + y + z = 9, xy + yz + zx = 26, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{12}$$

- 1 284. $(x + y + z) \quad (ax + y + z) = k^2,$
 $(x + y + z) \quad (x + ay + z) = l^2,$
 $(x + y + z) \quad (x + y + az) = m^2$
- 1 285. $x(y^2 + z^2 - x^2) = 2ayz, \quad y(z^2 + x^2 - y^2) = 2bzx,$
 $z(x^2 + y^2 - z^2) = 2cxy$
- 1 286. $x + y + z = 2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^3 + y^3 + z^3 = 8$
- 1 287. $xy + yz + zx = 11, \quad x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 49,$
 $x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 = 251$
- 1 288. $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9}, \quad \sqrt[4]{2x} - 2\sqrt[4]{5y} + 4\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{x + y + z}$

* * *

Să se rezolve sistemele neliniare

- 1 289. $x + y = 14, \quad u + v = 10, \quad xy = uv,$
 $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 200$
- 1 290. $x + y + z + t = 22, \quad xyzt = 648,$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12}, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{5}{18}$
- 1 291. $x + yz + u = 5, \quad y + zu + x = 8,$
 $z = ux + y = 11, \quad u + xy + z = 17.$

Să se elimine t din ecuațiile parametrice

- 1 292. $x = 1 - t, \quad y = 1 - t^2$
- 1 293. $x = 2t^2 - t + 3, \quad y = 3t^2 + t - 2$
- 1 294. $x = t + \frac{1}{t}, \quad x = t^2 + \frac{1}{t^2}$
- 1 295. $x = t + \frac{1}{t}, \quad y = t^3 + \frac{1}{t^3}$
- 1 296. $x = t^y, \quad y = x^t. \quad 1 297. \quad x = \sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{t}}, \quad y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{t}}$
- 1 298. $x = \frac{3at}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}$
- 1 299. $x = \frac{2at^2}{t^3 + 1}, \quad y = at \frac{t^2 - 1}{t^3 + 1}$

$$1 \ 300. \frac{a_1 t + b_1}{c_1 t + d_1} = \frac{a_2 t + b_2}{c_2 t + d_2} = \frac{a_3 t + b_3}{c_3 t + d_3}$$

* * *

Să se elimine x și y între relațiile

$$1 \ 301. \ x + y = a, \quad xy = b, \quad x^2 + y^2 = c$$

$$1 \ 302. \ x + y = a, \quad x^2 + y^2 = b, \quad x^3 + y^3 = c$$

1 303. Să se elimine x, y, z între

$$\frac{(x+y)(x+z)}{y-z} = a, \quad \frac{(y+z)(y+x)}{z-x} = b, \quad \frac{(z+x)(z+y)}{x-y} = c$$

* * *

Să se elimine x și y între

$$1 \ 304. \ \frac{x+y}{x-y} = a, \quad \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} = b$$

$$1 \ 305. \ \frac{x-y}{x+y} = a, \quad \frac{x^4 + y^4 - xy(x^2 - xy + y^2)}{x^4 + y^4 + xy(x^2 + xy + y^2)} = b$$

Să se elimine x, y, z dintre

$$1 \ 306. \ \frac{\sqrt{x-y}}{x-y} + \frac{\sqrt{x-z}}{x-z} = a, \quad \frac{\sqrt{y-z}}{y-z} + \frac{\sqrt{y-x}}{y-x} = b,$$

$$\frac{\sqrt{z-x}}{z-x} + \frac{\sqrt{z-y}}{z-y} = c$$

$$1 \ 307. \ \frac{(x^2-1)(xy-z^2)}{(x^2+1)(xy+z^2)} = a, \quad \frac{(y^2-1)(yz-x^2)}{(y^2+1)(yz+x^2)} = b,$$

$$\frac{(z^2-1)(zx-y^2)}{(z^2+1)(zx+y^2)} = c$$

* * *

Să se elimine x între ecuațiile

$$1 \ 308. \ \sin x + \cos x = a, \quad \sec x + \operatorname{cosec} x = b$$

$$1 \ 309. \ m \cos x \cos 2x = a, \quad n \sin x \sin 2x = b$$

I N E G A L I T Ă Ţ I

Să se rezolve inegalităţile

$$\text{1 310. } \frac{\frac{3x-5}{2}}{4} + \frac{9-\frac{2x}{3}}{5} > \frac{2x-\frac{x+3}{3}}{3} - 1$$

$$\text{1 311. } (2x-1)(x+3) - (x+7)(x-1) - 4x < 0$$

$$\text{1 312. } \frac{x-1}{2x+3} < 0$$

$$\text{1 313. } \frac{3x}{x-1} + \frac{1}{2} < 2 - \frac{2}{x-1}$$

$$\text{1 314. } \frac{\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3}}{\frac{x-3}{4} + \frac{x-5}{6}} > 7$$

$$\text{1 315. } \frac{x^2-8x+7}{x-3} \geq 0. \quad \text{1 316. } 1 - \frac{x-5}{x+1} > \frac{x}{x-1}$$

$$\text{1 317. } 1 > \frac{4-x}{x^2+x+1}. \quad \text{1 318. } \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4} > 1$$

$$\text{1 319. } \frac{(x^2-5x+6)(\sqrt{x}-2)}{x^2+4x+3} > 0$$

$$\text{1 320. } \frac{3x+2}{x-5} \leq \frac{6}{x+2} + \frac{39}{(x+2)(x-5)}$$

$$\text{1 321. } \frac{6}{x-2} + \frac{4}{x+2} > \frac{1}{x-1}$$

$$\text{1 322. } \frac{x^2-3x+2}{x+1} > \frac{2x^2-3x-2}{x-1}$$

$$\text{1 323. } \frac{(2-x)(x^2-4x+3)}{(2x-7)(-x^2+9x-23)} < 0$$

$$\mathbf{1\ 324.} \quad (x-1)(x^2-3x+10)(x^2-4)(2x^2-2x+60) > 0$$

$$\mathbf{1\ 325.} \quad (x^2+5x+4)^2 - (x-3)^2 < 0$$

$$\mathbf{1\ 326.} \quad x^4 - 9x^2 + 8 < 0. \quad \mathbf{1\ 327.} \quad \frac{x^4 + 24x^2 - 217}{x^4 - 5x^2 + 4} > 2$$

$$\mathbf{1\ 328.} \quad 4x^8 - 17x^4 + 4 > 0$$

$$\mathbf{1\ 329.} \quad 27x + \frac{25}{2x+1} > \frac{72x^2 - 49x - 13}{x^2 - 1}$$

$$\mathbf{1\ 330.} \quad 2 < \frac{x-1}{x+1} < 3. \quad \mathbf{1\ 331.} \quad -1 < \frac{2x-3}{x-2} < 3$$

$$\mathbf{1\ 332.} \quad -1 \leq \frac{2x^2-1}{x^2-1} < 1$$

1 333. Să se arate că avem

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \leq \frac{1}{4},$$

oricare ar fi x real : 1° algebric ; 2° trigonometric.

1 334. Pentru ce valori ale lui m inegalitățile

$$-3 < \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$$

sint verificate, oricare ar fi x .

* * *

Să se rezolve inegalitățile

$$\mathbf{1\ 335.} \quad \frac{2bx}{a(x-a) - b(x-b) + a^2} < -1$$

$$\mathbf{1\ 336.} \quad \frac{1-x}{1+x} < \frac{1-kx}{1+kx} < \frac{1-k^2x}{1+k^2x}$$

1 337. Să se rezolve și să se discute inegalitatea

$$\frac{2ax+3}{5x-4a} < 4.$$

* * *

Să se rezolve inegalitățile

$$\mathbf{1\ 338.} \quad \sqrt{x-4} < 2-x. \quad \mathbf{1\ 339.} \quad x-a > \sqrt{x-b}$$

$$\mathbf{1\ 340.} \quad \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-8} > 3$$

- 1 341. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1} < 1$
 1 342. $\sqrt{x-a} - \sqrt{x+1} < 2$
 1 343. $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$
 1 344. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3x-2} > \sqrt[3]{x+10}$
 1 345. $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$
 1 346. $2x-1 > \sqrt{x^2-3x+2}$
 1 347. $4(x-1) < \sqrt{(x+5)(3x+4)}$
 1 348. $2(2x+1) + 3\sqrt{-x^2-x+6} > 0$
 1 349. $\sqrt{2x+1} < \frac{2(x+1)}{2-x}$
 1 350. $\frac{2}{x} - \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}}$
 1 351. $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \geq \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
 1 352. $x + \sqrt{x^2-10x+9} \geq \sqrt{x+2} \sqrt{x^2-10x+9}$

* * *

Să se rezolve inegalitățile

- 1 353. $|12-x| > 15-|x+3|$
 1 354. $|x+3| - |x+1| < 2$
 1 355. $\left| -\frac{5}{x+2} \right| < \left| \frac{10}{x-1} \right|$. 1 356. $\frac{|5x-3|}{|4x+7|} \leq 3$.

* * *

Să se determine valorile lui m pentru care următoarele inegalități sînt verificate, oricare ar fi valorile reale ale lui x

- 1 357. $(m^2-5m+4)x^2-2(m+2)x+2 > 0$,
 1 358. $(m-4)x^2-(m-6)x+m-5 < 0$.

* * *

1 359. Să se rezolve inegalitatea

$$mx^4 + 4(m+1)x^2 + m - 2 > 0.$$

* * *

Să se rezolve inegalitățile

1 360. $3x - 2y + 3 > 0$ **1 361.** $x - y - 1 < 0$

1 362. $|x| + |y| < 1.$

* * *

Să se rezolve sistemele

1 363. $y - x + 1 > 0,$ $2x - y - 3 > 0$

1 364. $x + y - 1 > 0,$ $x - 2y - 1 < 0$

1 365. $2x - y + 1 < 0,$ $9x - 3y - 2 < 0$

1 366. $x + ky = 3,$ $kx + 4y = 6.$ Pentru ce valori ale lui k avem $x > 1, y > 0.$

1 367. $x + 2y - m = 0,$ $3x + 4y - 11 = 0$ și fie x_1, y_1 soluțiile găsite. Pentru ce valori ale lui m avem

$$(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 < 9.$$

* * *

Să se rezolve sistemele

1 368. $x - 2y + 1 < 0,$ $2x - y - 1 < 0,$ $x - y + 1 > 0.$

1 369. $3x + 2y - 6 > 0,$ $y - x + 1 > 0,$ $y - \frac{x}{5} - 1 < 0.$

* * *

Să se rezolve sistemele mixte

1 370. $2x - y + 1 = 0,$ $x + y + 2 > 0$

1 371. $x - y + 1 = 0,$ $2x - y + 2 > 0,$ $x - y + 4 > 0.$

1 372. Să se rezolve inegalitatea

$$\frac{(x - y + 1)(2x - y - 2)}{(x - 2y)(3x - y + 3)} > 0$$

1 373. Să se rezolve inegalitatea

$$(x^2 + y^2)^2 < a^2(x^2 - y^2)^2, \quad a > 0.$$

* * *

1 374. Pentru ce valori ale lui m avem $x^2 + y^2 - 2x - 2y + m > 0$, oricare ar fi x și y reali.

1 375. Să se rezolve și discute inegalitatea

$$\frac{x^2 + x - 6}{2a + 1} > x + 6(2a - 1), \quad \left(a \neq -\frac{1}{2} \right).$$

Să se rezolve sistemele

1 376. $y - x > 0, \quad y - x^3 < 0$

1 377. $y^2 - 2ax < 0, \quad x^2 + y^2 - 2ax > 0$

1 378. $x - 5y - 5 < 0, \quad 2y + x^2 - 2x - 15 \leq 0,$

$$\frac{(x^3 - 3x^2 - 4x)(2x - 1 - x^2)^3}{(4 - x^2)^3(x^3 - 5x^2 + 4x + 10)} \geq 0.$$

Să se figureze în planul de coordonate rectangulare xoy punctele ale căror coordonate satisfac sistemul de neegalități.

1 379. Să se arate că pentru orice a real avem

$$3(1 + a^2 + a^4) > (1 + a + a^2)^2$$

1 380. Să se arate că expresia $a^2 + b^2 - ab$ este pozitivă, oricare ar fi numerele reale a și b .

1 381. Să se arate că $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$, oricare ar fi a, b, c .

1 382. Să se determine h , astfel încît să avem $x^2 + 8y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz - 2yz - 6x + 9y - 9z + h > 0$, oricare ar fi x, y, z .

* * *

Să se arate că

1 383. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a > 0, \quad b > 0)$

1 384. $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0)$

1 385. $\frac{1}{8} \cdot \frac{(a-b)^2}{2} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{(a-b)^2}{b} \quad (a \geq b)$

1 386. $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \quad (a > 0, \quad b > 0)$

$$1387. \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d}} \quad (a, b, c, d, > 0)$$

$$1388. \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \quad (a > 0, \quad b > 0)$$

$$1389. \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_3} + \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad (a_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n).$$

* * *

Să se arate că inegalitățile următoare sînt satisfăcute pentru orice valori reale ale numerelor a, b, c .

$$1390. (2a - 3b + c)^2 - (a + 2b - 3c)(-3a + b + 2c) > 0$$

$$1391. a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 + abc(a + b + c) \geq 0$$

1392. Să se arate că

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2,$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ fiind numere reale.

1393. Să se demonstreze inegalitatea lui Buniakovski

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

oricare ar fi numerele a_i și b_i . Egalitatea există dacă numerele a_i sînt proporționale cu numerele b_i , pentru $i = 1, 2, \dots, n$.

$$1394. [(a+b)^4 + (c+d)^4]^{\frac{1}{4}} < (a^4 + c^4)^{\frac{1}{4}} + (b^4 + d^4)^{\frac{1}{4}}$$

$$1395. \sqrt{(a+a')^2 + (b+b')^2} < \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}.$$

1396. Dacă a_i și b_i sînt numere reale oarecare, atunci

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2} \leq \\ & \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \end{aligned}$$

$$1397. \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6 \quad a, b, c > 0$$

$$1398. \frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < 1.$$

* * *

Dacă a, b, c sînt numere pozitive, avem

$$1\ 399. (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

$$1\ 400. (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$$

$$1\ 401. 1^\circ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}; \quad 2^\circ \frac{a^2+b^2+6ab}{4(a+b)} \geq \\ \geq \frac{4ab(a+b)}{a^2+b^2+6ab}$$

1 402. Să se arate că oricare ar fi m real și a, b, c laturile unui triunghi oarecare, avem

$$am(m-2) + b + c > 0$$

1 403. Dacă numerele a, b, c sînt pozitive, avem

$$(a+b+c)^3 < 9(a^3+b^3+c^3)$$

1 404. Să se arate că dacă $ab+bc+ca=1$, atunci $a^2+b^2+c^2 > 1$

1 405. Să se arate că dacă avem $a+b+c=0$, atunci
 $(-a+b+c)^2 - 4(a-b+c)(a+b-c) > 0$

1 406. Dacă $a > b > c > 0$, atunci $a^3 > abc > c^3$

1 407. Să se arate că $-\frac{1}{2} \leq ab+bc+ca \leq 1$, dacă $a^2+b^2+c^2=1$

1 408. Dacă $x > 0, y > 0, z > 0$, și $x+y+z=a$, avem

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 > (a-2x)(a-2y)(a-2z)$$

1 409. Dacă x, y, z sînt pozitivi și $x+y+z=1$, atunci

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 3$$

1 410. Dacă $a > 0$ și $b > 0$, avem

$$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

1 411. Dacă $a_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) și $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, avem

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$$

1 412. Să se verifice inegalitatea

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{n}$$

Să se demonstreze inegalitățile

$$1413. \quad \frac{x_1}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} + \dots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1},$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n > 0$$

$$1414. \quad (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \dots + \frac{1}{y_n} \right) \geq n^2,$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n > 0$$

$$1415. \text{ Dacă } a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \text{ atunci}$$

$$-1 \leq a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \leq 1$$

1416. Laturile a, b, c ale unui triunghi ABC sînt date în funcție de un parametru prin expresiile următoare: $a = t^2 + t + 1$, $b = 2t + 1$, $c = t^2 - 1$. 1° Pentru ce valori ale lui t poate exista triunghiul? 2° Să se arate că a reprezintă latura cea mai mare. 3° Să se afle $\cos A$ și apoi $\sin A$. 4° Să se calculeze expresia ariei triunghiului și a razei cercului circumscris triunghiului.

1417. Se dau expresiile

$$E_1 = (\sqrt[y]{x^y})^y, \quad E_2 = (\sqrt[x]{y^x})^x;$$

știind că $x < y$, care dintre ele este mai mare?

1418. Să se arate că în relația

$$y = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}$$

la orice valoare a lui x din intervalul $a \leq x \leq b$ corespunde o valoare pentru y în intervalul $c \leq y \leq d$ și reciproc.

1419. Dacă a și b sînt două numere pozitive, m un număr natural și $a > b$, avem

$$ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1} \quad (\text{Teorema lui Cauchy}).$$

1420. Utilizînd inegalitatea din ex. 1419 să se deducă din aproape în aproape

$$1^\circ \quad \sqrt[m]{m} > \sqrt[m]{m+1} \quad 2^\circ \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m > \sqrt[m]{m!}$$

$$3^\circ \quad \sqrt[m+1]{1} \cdot \sqrt[m+2]{2} \dots \sqrt[m]{m} > \sqrt[m]{m!}$$

1 421. Utilizând inegalitatea din ex. 1 419 să se deducă succesiv

$$1^\circ \frac{1}{\sqrt{x+1}} < 2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$2^\circ 2 < \frac{1}{\sqrt{\alpha^2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha+1}} < 2\alpha + 1$$

1 422. 1° Folosind teorema lui Cauchy (ex. 1 419), să se arate că media geometrică a mai multor numere pozitive este cuprinsă între media lor armonică și cea aritmetică, adică

$$\frac{m}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_m}} < \sqrt[m]{x_1 x_2 \dots x_m} < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}$$

2° Căutînd mediile aritmetică și armonică A' și A a două numere a, b ; mediile aritmetică și armonică ale lui A' și A ; cele ale ultimelor două și așa mai departe, toate aceste medii tind spre limita $\sqrt{ab}$.

1 423. Folosind teorema lui Cauchy (ex. 1 419), să se demonstreze că avem

$$\sqrt[m]{(a+1)(a+2)\dots(a+m)} > \frac{1}{1 - \sqrt[m]{\frac{a}{a+m}}},$$

în care $a > 0$ și nu este un număr natural.

PROGRESII ARITMETICE ȘI GEOMETRICE

1 424. Să se afle cinci numere în progresie aritmetică știind că suma acestor numere este 5, iar produsul lor 280.

1 425. Într-o progresie aritmetică cu patru termeni produsul termenilor de rang par este 55, iar al celor de rang impar este 16. Să se determine progresia.

1 426. Să se determine patru numere în progresie aritmetică cu rația 4, a căror produs este 3 465.

1 427. Câte bătăi face o pendulă în 24 de ore, dacă bate orele și jumătățile de oră (jumătățile o dată).

1 428. Într-o progresie aritmetică suma termenilor fără primul termen este 180, iar suma fără ultimul termen este 156. Rația fiind de 13 ori mai mică decât ultimul termen, să se afle progresia.

1 429. Se cere progresia aritmetică cu un număr impar de termeni știind că suma termenilor de rang par este 295, aceea a termenilor de rang impar este 354 și că produsul termenilor extremi este 981.

1 430. Să se determine o progresie aritmetică cu un număr impar de termeni avînd suma 289, cîtul dintre termenii extremi 33, iar termenul de la mijloc 17.

1 431. Să se insereze între 3 și 768 un număr de termeni, medii aritmetice, așa fel ca 192 să fie unul din ei.

1 432. Să se găsească trei numere în progresie aritmetică de sumă 63 și în care raportul primului către al treilea termen să fie $\frac{5}{9}$.

1 433. Să se calculeze termenii comuni progresiilor

$$4, 9, 14, \dots, \qquad 93, 86, 79, \dots$$

1 434. Se dau progresiile aritmetice

$$1, 5, 9, 13, \dots, \qquad 4, 15, 26, 37, \dots$$

Să se afle termenii lor comuni și să se arate că acești termeni formează o nouă progresie aritmetică.

1 435. Să se arate că dacă între termenii consecutivi ai unui șir avem relația $a_n + a_{n-2} = 2a_{n-1}$, șirul formează o progresie aritmetică.

1 436. Să se afle x știind că numerele $2\sqrt{x-1}$, $3 + \sqrt{2x-6}$ și $2\sqrt{x+4}$ sînt în progresie aritmetică.

1 437. Dacă numerele $x^2 - yx$, $y^2 - zx$, $z^2 - xy$ sînt în progresie aritmetică, atunci și numerele x , y , z sînt în progresie aritmetică, sau $x + y + z = 0$, și reciproc.

1 438. Să se verifice că dacă x , y , z sînt în progresie aritmetică, atunci

$$x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + xz + z^2, \quad y^2 + yz + z^2$$

sînt tot în progresie aritmetică. Să se afle raportul rațiilor.

1 439. Dacă $a^2 + 2bc$, $b^2 + 2ca$, $c^2 + 2ab$ sînt în progresie aritmetică, atunci numerele $b - c$, $c - a$, $a - b$ formează o medie armonică.

1 440. Să se arate că dacă numerele

$$a\sqrt[3]{\frac{a}{bcd}}, \quad b\sqrt[3]{\frac{b}{acd}}, \quad c\sqrt[3]{\frac{c}{abd}}, \quad d\sqrt[3]{\frac{d}{abc}}$$

sînt în progresie aritmetică, atunci numerele a^2 , b^2 , c^2 , d^2 sînt în progresie aritmetică.

1 441. Dacă x , y , z sînt în progresie aritmetică, avem

$$(x + 2y)(x + 2z)(y - z) + (y + 2x)(y + 2z)(x - z) = 0.$$

În ce caz este adevărată reciproca?

1 442. Se dă ecuația $x^2 - px + q = 0$, ale cărei rădăcini sînt a și b . Să se determine p și q așa fel ca numerele a , b , p , q să fie în progresie aritmetică.

1 443. x , y , z fiind trei numere în progresie aritmetică, este posibil a avea $2y^3 = x^3 + z^3$. Să se extindă la mai multe numere.

1 444. Să se găsească progresiile aritmetice ale căror termeni sînt numere întregi și au un număr impar de termeni, știind că primul termen este 6, iar triplul numărului termenilor întrece cu trei suma termenilor egal depărtați de extremi.

1 445. Într-o progresie aritmetică termenii de rang m , n , p sînt respectiv a , b , c . Să se arate că $a(n - p) + b(p - m) + c(m - n) = 0$.

1 446. Să se afle al n -lea termen din progresia

$$\frac{n-1}{n}, \quad \frac{n-2}{n}, \quad \frac{n-3}{n}, \dots$$

Care este expresia sumei primilor n termeni

1 447. Termenul al n -lea al unei progresii aritmetice este $\frac{3n-1}{6}$. Să se afle primul termen, rația și suma primilor n termeni.

1 448. Pentru ce valori ale lui x și a numerele

$$ax - \frac{1}{ax}, \quad x - \frac{1}{x}, \quad \frac{x}{a} - \frac{a}{x}$$

sînt în progresie aritmetică. Să se determine rația în fiecare caz.

1 449. Să se rezolve sistemul

$$\frac{x+a}{y} = a, \quad \frac{y+2}{z} = 2, \quad \frac{z+3}{x} = 3$$

și să se determine a astfel ca x, y, z să fie în progresie aritmetică.

1 450. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt termenii unei progresii aritmetice de rație r , să se calculeze suma

$$S = a_1 + a_2(a_1 + a_2) + a_3(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + \\ + a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

1 451. Dacă $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt termenii unei progresii aritmetice cu rația r , să se calculeze sumele

$$s_1 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n, \quad s_2 = a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \dots + \\ + a_{n-2} a_{n-1} a_n, \quad s_p = a_1 a_2 \dots a_p + \dots + a_{n-p+1} a_{n-p+2} \dots a_n$$

Aplicații: $s'_1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n$; $s''_1 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2n-1)(2n+1)$; $s'_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (n-2)(n-1)n$.

1 452. Notațiile fiind ca cele de mai sus, să se calculeze sumele

$$s_1 = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}, \quad s_2 = \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \frac{1}{a_{n-2} a_{n-1} a_n}.$$

1 453. Notațiile fiind ca cele de mai sus, să se calculeze suma

$$s = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_p} + \frac{1}{a_2 a_3 \dots a_{p+1}} + \dots + \frac{1}{a_{n-p+1} a_{n-p+2} \dots a_n}$$

1 454. Cele trei unghiuri ale unui triunghi dreptunghic sînt în progresie aritmetică. Să se afle unghiurile.

1 455. Să se arate că dacă pătratele laturilor unui triunghi formează o progresie aritmetică, atunci și pătratele medianelor formează o progresie aritmetică.

1 456. Dacă $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$ sînt numere în progresie aritmetică, A , B , C fiind unghiurile unui triunghi oarecare, avem relația

$$\cos B = 2 \cos A \cos C.$$

1 457. Să se arate că nu există trei arce în progresie aritmetică ale căror sinusuri sau cosinusuri să fie în progresie aritmetică. Adică dacă

$$2 \sin x = \sin(x + r) + \sin(x - r) \text{ sau } 2 \cos x = \cos(x + r) + \cos(x - r), \text{ atunci } r = 0.$$

1 458. Ce relație există între x , y , z , dacă $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} y$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} z$ sînt în progresie aritmetică.

1 459. Dacă numerele $\sin(\beta + \gamma - \alpha)$, $\sin(\gamma + \alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \beta - \gamma)$ sînt în progresie aritmetică, să se arate că și numerele $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{tg} \gamma$ formează de asemenea o progresie aritmetică.

1 460. Se consideră progresia aritmetică $a_1, a_2, \dots, a_n$, în care rația este r ; se cere să se calculeze suma

$$s = \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1}} - a_2 \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-2}} \right)$$

1 461. Dacă $s_1, s_2, \dots, s_n$ sînt sumele primilor n termeni din n progresii aritmetice în care primul termen este 1 și a căror rații sînt respectiv 1, 2, ..., n , aceste sume formează la fel o progresie aritmetică și suma lor este $\frac{n^2}{4}(n^2 + 3)$.

1 462. Într-o progresie aritmetică se notează cu s_n, s_{2n}, s_{3n} , respectiv sumele primilor $n, 2n, 3n$ termeni. Să se calculeze expresia

$$E = 3s_n - 3s_{2n} + s_{3n}.$$

Generalizare. Să se determine trei numere α, β, γ așa fel ca să avem $\alpha s_p + \beta s_q + \gamma s_r = 0$.

1 463. Dacă s_1, s_2, s_3 sînt: suma termenilor unei progresii aritmetice oarecare, suma pătratelor și suma cuburilor termenilor, avem

$$9s_2^2 > 8s_1s_3$$

1 464. Să se determine λ astfel ca rădăcinile ecuației

$$x^4 - (3\lambda + 5)x^2 + (\lambda + 1)^2 = 0$$

să fie în progresie aritmetică.

1 465. Să se arate că sînt o infinitate de progresii aritmetice în care există un raport constant între suma primilor x termeni și suma a kx termeni următori, k fiind dat și x putînd lua orice valori întregi.

1 466. Antena unui post de radioemisiune este întinsă între doi piloni. Unul dintre piloni este așezat în colțul O al curții dreptunghiulare $OABC$. Trei dintre cablurile care susțin pilonul sînt legate de inelul M al pilonului, fixate de colțurile dreptunghiului și se cunoaște $MA = 17$ m, $MB = 25$ m, $MC = 20$ m. Să se afle :

1° Înălțimea pilonului, știind că depărtarea de la pămînt a inelului M (de care sînt legate cablurile) reprezintă $4/15$ din înălțimea totală a pilonului.

2° Pilonul este construit din tuburi de oțel în greutate totală de 120 kg. Greutatea tuburilor merge crescînd în progresie aritmetică de la vîrf spre bază. Știind că primul tub are greutatea de 3 kg, că diferența de greutate de la un tub la altul este de 2 kg, să se afle din cîte tuburi este construit pilonul și care este greutatea tubului de bază.

1 467. Să se calculeze suma tuturor numerelor

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & \dots, & n \\ 2, & 3, & 4, & \dots, & n+1 \\ & \dots & & \dots & \\ n, & n+1, & n+2, & \dots, & 2n-1 \end{array}$$

1 468. Să se determine progresia geometrică cu 6 termeni în care pătratul termenului al treilea este egal cu termenul ultim, iar suma primilor doi termeni este egală cu $3/4$ din termenul al treilea.

1 469. Se dă progresia geometrică $\div a_1, a_2, a_3, a_4$. Știind că suma termenilor este 360 iar $a_4 = 9a_2$ să se determine progresia.

1 470. Într-o progresie geometrică se cunoaște $a_5 = 64$, $a_{11} = 1\ 647$. Să se afle a_7 .

1 471. Să se găsească o progresie geometrică știind că

$$a_1 - a_2 = 8, \quad a_2 + a_3 = 12.$$

1 472. Într-o progresie geometrică de patru termeni suma termenilor de rang par este 60, iar a celor de rang impar 20. Să se determine progresia.

1 473. Să se afle o progresie geometrică de cinci termeni știind că suma termenilor este 31, iar suma termenilor de rang impar 21.

1 474. Produsul a trei termeni în progresie geometrică este egal cu 7^{87} , iar diferența extremilor este $48 \cdot 7^{23}$. Să se afle cele trei numere.

1 475. Numerele x, y, z formează o progresie geometrică de sumă 124. Adăugând termenului mijlociu 32, progresia devine aritmetică. Se cere progresia.

1 476. O progresie geometrică are zece termeni, primul fiind 3, iar ultimul 1 536. Se cere rația și suma termenilor.

1 477. Suma a trei termeni ai unei progresii geometrice este 52. Dacă scădem primului ei termen pe 1, celui de-al treilea pe 9, iar celui de-al doilea îi adăugăm pe 3, progresia devine aritmetică. Să se determine progresia.

1 478. Se dau numerele 1, 2, 5. Să se determine cu cât trebuie mărite acele numere pentru a obține o progresie geometrică. Se cere rația progresiei.

1 479. Trei numere formează o progresie geometrică. Dacă mărim al doilea număr cu 8, progresia se transformă în una aritmetică; dacă în progresia aritmetică obținută mărim ultimul termen cu 64, rezultă o progresie geometrică. Să se determine cele trei numere.

1 480. Să se găsească două progresii, una aritmetică și una geometrică, fiecare din câte patru termeni, așa încît adunînd termenii de același rang din cele două progresii să obținem numerele 18, 18, 26, 58.

1 481. Să se determine o progresie geometrică cu trei termeni de sumă s , știind că dacă din termenii acesteia se scad respectiv trei numere care sînt în progresie aritmetică, se obține o progresie aritmetică.

1 482. Se dau numerele a și b ; se cere să se determine alte două numere x și y , știind că numerele a, x, y sînt în progresie aritmetică, iar x, y, b în progresie geometrică.

1 483. Să se insereze trei medii geometrice între numerele 4 și 64.

1 484. Între t_4 și t_5 , care sînt termenii unei progresii geometrice cu rația 64, se înșiră cinci mezi geometrice. Suma termenilor acestei noi progresii este 33 292 288. Să se formeze cele două progresii.

1 485. Să se insereze între 3 și 768 un număr de medii geometrice așa ca 192 să fie una din ele.

1 486. Să se ducă într-o sferă de rază r trei plane paralele între ele, așa fel ca suprafețele celor patru zone astfel obținute să fie termenii unei progresii geometrice de rație q .

1 487. Dacă numerele a, b, c sînt în progresie geometrică, avem

$$(a^2 - bc)^3 (b - c)^3 + (b^2 - ca)^3 (c - a)^3 + (c^2 - ab)^3 (a - b)^3 = 0.$$

1 488. Dacă x, y, z sînt în progresie geometrică, atunci și

$$\begin{array}{ccc} x^3 + 2xy^2 + y^2z, & x^2y + y^3 + xyz + yz^2, \\ & xy^2 + 2y^2z + z^3 \end{array}$$

sînt în progresie geometrică.

1 489. Să se arate că dacă

$$(xy + yz + zx)^3 = xyz(x + y + z)^3,$$

numerele x, y, z sînt în progresie geometrică.

1 490. Să se arate că

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{ab}{a+b}} - a \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad y = \sqrt{\frac{ab}{a+b}}, \\ z &= \sqrt{\frac{ab}{a+b}} - b \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \end{aligned}$$

sînt în progresie geometrică.

1 491. Să se arate că dacă $\cos(x - r), \cos x, \cos(x + r)$ sînt în progresie geometrică, atunci $r = n\pi$ unde $n = 0, 1, 2, \dots$

1 492. Dacă a, b, c sînt în progresie geometrică, avem

$$1^\circ a^3(b + c)(b^2 + c^2) = b^3(a + b)(a^2 + b^2);$$

$$2^\circ (a + c)(b^3 + c^3) = (b^2 + c^2)(ab + c^2).$$

1 493. Se dă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$. Să se arate că dacă numerele a, b, c sînt în progresie geometrică, atunci ecuația are rădăcini imaginare.

1 494. Într-o progresie geometrică termenul de rang $p + q$ este m , termenul de rangul $p - q$ este n . Să se arate că termenul de rang p este $\sqrt[p]{mn}$ și termenul de rang q este $m \sqrt[q]{\left(\frac{n}{m}\right)^p}$.

1 495. Se dă un trinom de gradul al doilea $P(x)$. Să se determine trei valori x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică, astfel ca $P(x_1), P(x_2), P(x_3)$ să formeze termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

1 496. Pot fi laturile unui triunghi dreptunghic în progresie geometrică?

1 497. Să se arate că într-o progresie geometrică avem

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n a_{i+1}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1}\right)^2$$

și reciproc: dacă există această relație, numerele $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ formează o progresie geometrică.

1 498. Să se arate că dacă numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt n numere în progresie geometrică, avem relația

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n = \left(\frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \dots + \frac{1}{a_n^n} \right) a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2.$$

1 499. Să se arate că

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right)^{-1} + \dots + \left(\frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{a^n}\right)^{-1} = \frac{a(a^n - 1)}{a^2 - 1}.$$

1 500. Dacă a, b, c sînt termenii de rang p, q, r ai unei progresii geometrice, avem

$$a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1.$$

1 501. Se dă progresia geometrică în care $a_1 = \sin x$, rația $q = 2 \cos x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Pentru ce valori ale lui x progresia este crescătoare sau descrescătoare. În cazul cînd progresia este descrescătoare infinită, să se afle x astfel ca suma termenilor să fie egală cu $2\sqrt{2}$.

1 502. Dacă a, b, c, d sînt patru numere în progresie geometrică să se arate că $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$.

1 503. Să se arate că dacă tangentele a trei arce în progresie aritmetică sînt în progresie aritmetică, atunci cosinusurile aceluiași arce sînt în progresie geometrică și reciproc.

1 504. Să se arate că

$$\frac{1 - \frac{1}{x} + x^n - x^{n+1}}{1 + x + x^2 + \dots + x^n} = 2 - \left(x + \frac{1}{x}\right).$$

1 505. Să se rezolve ecuația

$$a^x a^{3x} a^{5x} \dots a^{(2n-1)x} = a^{n^2}.$$

1 506. Să se verifice identitatea

$$\left\{ \left(1 + \frac{4}{a-2}\right) (a - 4 + 4a^{-1}) - \sqrt{3} \left[1 + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \dots \right] : \frac{a^{-\frac{1}{2}} - 2a^{-1}}{(\sqrt{a} + 2)^{-1}} = a + 1 \right.$$

1 507. Să se calculeze expresia

$$\left\{ a^{\frac{3}{2}} (1 - \sqrt{a})^{-1} + \left[a + \frac{a}{1 + \sqrt{a}} + \frac{a}{(1 + \sqrt{a})^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a}{(1 + \sqrt{a})^3} + \dots \right] \right\} : \left(\frac{a + 3}{a^2 + 2a - 3} - 1 + \frac{2 - 2a}{a^2 - 2a + 1} \right)$$

1 508. Numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ fiind în progresie geometrică, se cere să se calculeze suma

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt[n]{a_i}}{\sqrt[n]{a_i} - \sqrt[n]{a_{i-1}}}.$$

* * *

Să se calculeze sumele

$$1 \text{ 509. } 1^\circ \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[p]{b}} + \frac{\sqrt[m]{a^{1-m}}}{\sqrt[p]{b^{1-n}}} + \frac{\sqrt[m]{a^{1-2m}}}{\sqrt[p]{b^{1-2n}}} + \dots + \frac{\sqrt[m]{a^{1-pm}}}{\sqrt[p]{b^{1-pn}}};$$

$$2^\circ \frac{1 - a^n}{1 - a} + \frac{(1 - a^n)(a - a^n)}{a - a^3} + \dots + \\ + \frac{(1 - a^n)(a - a^n) \dots (a^{n-1} - a^n)}{a^{\frac{n(n-1)}{2}} - a^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$1 \text{ 510. } \frac{a}{b} + \frac{a+r}{bq} + \frac{a+2r}{bq^2} + \frac{a+3r}{bq^3} + \dots + \frac{a+nr}{bq^n}$$

$$1 \text{ 511. } 1^\circ \frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^n} + \frac{1}{(a-b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{n-1}} + \\ + \frac{1}{(a-b)^2(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{n-2}} + \dots + \frac{1}{(a-b)^n} \\ 2^\circ (1 - a^2)^n + (1 - a^2)^{n-1}(1 + a) + \\ + (1 - a^2)^{n-2}(1 + a)^2 + \dots + (1 - a^2)(1 + a)^{n-1} + (1 + a)^n.$$

1 512. Să se calculeze suma

$$1 + (1 + a)r + (1 + a + a^2)r^2 + (1 + a + a^2 + a^3)r^3 + \dots \text{ unde } |r| \text{ și } |a| < 1.$$

1 513. Să se calculeze suma

$$s = 3 + \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + \dots + \sin^{2n} \alpha + \cos^{2n} \alpha + \dots$$

1 514. Să se găsească fracția ordinară din care provine fracția zecimală simplu periodică $x = 1,52323\dots$

1 515. Suma termenilor unei progresii geometrice descrescătoare cu un număr nesfârșit de termeni este 16, iar diferența termenilor de rangul doi și trei este 2. Să se determine progresia.

1 516. Fiind date limitele a două progresii geometrice infinite descrescătoare

$$s = 1 + q + q^2 + \dots, \quad S = 1 + Q + Q^2 + \dots, \\ |q| < 1, \quad |Q| < 1$$

formăm o nouă progresie

$$E = 1 + qQ + q^2Q^2 + \dots + q^n Q^n + \dots$$

Să se găsească suma E în funcție de s și S .

1 517. Se consideră progresia geometrică nelimitată și apoi sumele

$$s_2 = s_1 + s_1^2 + \dots, \quad s_3 = s_2 + s_2^2 + \dots, \\ s_p = s_{p-1} + s_{p-1}^2 + \dots$$

Pentru ce valori ale lui a sumele $s_1, s_2, \dots, s_p$ au valori finite.

**CALCUL LOGARITMIC, ECUAȚII ȘI SISTEME
EXPONENȚIALE ȘI LOGARITMICE**

1 518. Care este baza unui sistem de logaritmi în care logaritmul lui 5 este 3?

1 519. Care este baza unui sistem de logaritmi în care un număr este egal cu logaritmul său?

1 520. Care este baza sistemului de logaritmi în care avem

$$\log_x a + \log_x \log_x a = 1$$

1 521. Avem $1^\circ \log_b a \cdot \log_a b = 1$; $2^\circ \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

1 522. Să se afle E cînd $\log_a E = (m + p) \log_a m - p (\log_a mn - 1) + (n + p) \log_a n$

1 523. Să se arate că dacă $\log x, \log y, \log z$ sînt trei numere în progresie aritmetică, atunci numerele x, y, z sînt în progresie geometrică și reciproc.

* * *

Să se verifice egalitățile

1 524. $a^{\log \frac{b}{c}} \cdot b^{\log \frac{c}{a}} \cdot c^{\log \frac{a}{b}} = 1$

1 525. $\log_{12} 5 \cdot \log_{11} 7 = \log_{11} 5 \cdot \log_{12} 7$

1 526. $\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \log_{a_3} a_4 \dots \log_{a_n} a_1 = 1, \quad a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

1 527. Dacă a, b, c sînt trei numere pozitive și în progresie geometrică, iar n un număr pozitiv, atunci

$$\frac{2}{\log_b n} = \frac{1}{\log_a n} + \frac{1}{\log_c n},$$

adică $\log_a n, \log_b n, \log_c n$ formează o medie armonică.

1 528. Progresiile

$$\div 1; \quad 1,01; \quad (1,01)^2; \quad (1,01)^3; \dots$$

$$\div 0; \quad 0,01; \quad 0,02; \quad 0,03; \dots$$

definesc un sistem de logaritmi. Să se găsească baza acestui sistem.

1 529. Să se arate că dacă

$$u_n = \log \frac{(n+a)(n+b)}{(n+a+1)(n+b+1)},$$

atunci suma $s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \log(n+a+1)(n+b+1)$ este independentă de n .

1 530. Durata T a oscilației unui pendul de lungime l este dată de relația $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ în care $g = 9,8062 \text{ m/s}^2$; $\pi = 3,14159$; $l = 1,37$. Să se calculeze T .

* * *

Să se calculeze expresiile

$$\mathbf{1\ 531.} \quad 0,1^{0,1} \quad \mathbf{1\ 532.} \quad \sqrt[4]{\frac{942}{877} \pi} \quad \mathbf{1\ 533.} \quad \sqrt{\frac{0,26758 \sqrt[4]{0,4}}{0,006422}}$$

$$\mathbf{1\ 534.} \quad \frac{\sqrt[3]{a \sqrt[4]{b}}}{\sqrt[5]{c \cdot d^3}}, \text{ în care } a = 234,75; \quad b = 34,228; \quad c = 78,543; \\ d = 0,28314$$

$$\mathbf{1\ 535.} \quad \frac{1}{(0,03029 \sqrt[4]{4 \cdot 835})^{\frac{3}{5}}}$$

$$\mathbf{1\ 536.} \quad \sqrt[5]{\frac{329^3 \cdot 0,84546}{15,0837}}$$

$$\mathbf{1\ 537.} \quad \frac{\sqrt[9]{32,5} \cdot \sqrt[1]{5,23^7}}{\sqrt[3]{32,5} \cdot \sqrt[5]{169,975} \cdot \sqrt[4]{5,23}}$$

$$\mathbf{1\ 538.} \quad \sqrt{1 - \frac{3 \sqrt[3]{3}}{4\pi}}$$

$$\mathbf{1\ 539.} \quad \frac{(a\pi + b)^2}{\sqrt[2]{3 + c}}, \text{ în care } a = 0,11702; \quad b = 1,43115; \quad c = 5,01264$$

$$\mathbf{1\ 540.} \quad \frac{82,3971,5 - \sqrt[5]{557,18}}{3,8472 \cdot 384,72} \quad \mathbf{1\ 541.} \quad \sqrt{\frac{6 \sqrt[6]{66} + 7 \sqrt[7]{27}}{3 \sqrt[2]{219} - 18 \sqrt[7]{0,273}}}$$

$$\mathbf{1\ 542.} \quad \sqrt[3]{\frac{4,357^2 + 0,38712}{\sqrt[7]{11} - \sqrt[3]{3}}}$$

$$1\ 543. \frac{4\sqrt[5]{573,892} - 3\sqrt[3]{678,92}}{45\sqrt[4]{63455} - 3\sqrt[3]{6,789}}$$

$$1\ 544. \sqrt[15]{-0,00035276^{\log 0,9004325}}$$

$$1\ 545. E = \frac{\log_8(\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[5]{16}) + \log_{81}\left(3^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[4]{27^{-2}} \cdot 9^{-5}\right)}{\log_{0,01}\left(10^{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt[4]{0,1^3} \cdot \sqrt[5]{10^5 \cdot 0,0001}\right) - \log_{49}\sqrt[3]{343}}$$

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$1\ 546. 16 = 2^{2(x-1)} \quad 1\ 547. (2^x)^x = 16 \quad 1\ 548. 8^{-x} = 16$$

$$1\ 549. 2^{x-1} = 0,25 \quad 1\ 550. 2^{3x} = 512$$

$$1\ 551. 2^x = \sqrt[4]{512} \quad 1\ 552. \sqrt[4]{2^x} \cdot \sqrt[3]{3^x} = 216$$

$$1\ 553. 2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16\sqrt{2} \quad 1\ 554. \sqrt[3]{a^x} = a^3$$

$$1\ 555. \sqrt[4]{a^x} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} \quad 1\ 556. \left(\frac{a^x}{a}\right)^x = a^2$$

$$1\ 557. \left(\frac{a}{a^x}\right)^x = \frac{a^x}{a} \quad 1\ 558. (a^{(1-x)})^{x-2} = 1$$

$$1\ 559. x^{-1}\sqrt[4]{a^{x-2}} = x^{+4}\sqrt[4]{a^{x+2}} \quad 1\ 560. 5^{2x^2+x-1} = 1$$

$$1\ 561. 32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}} \quad 1\ 562. \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1\ 563. \sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}} \quad 1\ 564. \sqrt[1+\frac{1}{x}]{a^{\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{x}\right)}} - \sqrt[1-\frac{1}{x+2}]{a^{\frac{1}{1+\frac{1}{x+2}}}} = 0$$

$$1\ 565. \sqrt[4]{a^{x+2}} \cdot x^{+2}\sqrt[4]{a^x} - \sqrt[4]{a^{13}} = (\sqrt[4]{a^{x+2}} - a^4)(x^{+2}\sqrt[4]{a^x} + a^{\frac{5}{2}})$$

$$1\ 566. \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{3^{x+\frac{1}{x}}}}}{3^x} = \frac{1}{3} \quad 1\ 567. \sqrt[4]{a^x \sqrt[3]{a^{x-1} \sqrt[4]{a^{x-2}}}} = a^4$$

$$1\ 568. \frac{\sqrt[3]{a^x}}{\sqrt[2]{a^{x-1}}} \cdot \frac{\frac{4}{3}\sqrt[4]{a^{x-2}}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt[5]{a^{x-3}}}{\sqrt[4]{a}}$$

$$1\ 569. \sqrt[7]{2^{x-1}} - \sqrt[7]{0,5^{j-4x}} = 0$$

$$1\ 570. (2^{2\sqrt{x+3}})^7 = 256^{3\sqrt{x}} \cdot 2^{2\sqrt{x-3}};$$

$$1\ 571. \sqrt[4]{a^{16 \cdot \sqrt{x}}} : \sqrt[3]{a^{10 \cdot \sqrt{x}}} = a^{\sqrt{x}}$$

$$1572. 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} + 3^{x-5} + 3^{x-6} = 364$$

$$1573. 2^{4x} + 2^{4x-1} + 4^{2x-1} + 2^{4x-3} + 16^{x-1} = 31$$

$$1574. 10^x - 2 = 0$$

$$1575. 9^x + 5 \cdot 3^{2x} = 7 \cdot 3^{2x-1}$$

$$1576. (1,71)^t = \pi \quad 1577. (0,171)^u = \frac{1}{\pi}$$

$$1578. x^{x+1} = 1 \quad 1579. 10^x = x^{10} \text{ (Rezolvare grafică)}$$

$$1580. \text{ Să se calculeze : } 1^\circ \log_7 5; 2^\circ 15^{\log_{15} 40}; 3^\circ 7^{\log_{49} 5^{-1}}; 4^\circ 125^{\log_{25} 16}.$$

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$1581. 3^{2^x} = 2^{3^x}. \quad 1582. 3 \cdot 2^x = 4 \cdot \sqrt[3]{9}$$

$$1583. a^{mx} b^{nx} = c \quad 1584. 7^{\log x} = 5,79695$$

$$1585. (ax)^{bx} = (bx)^{ax} \quad 1586. \sqrt[x]{a} - ab \cdot \sqrt[x]{b} = 0$$

$$1587. \sqrt[7x]{7^{5x+7}} = 5\sqrt[5x]{5^{7x+5}}$$

$$1588. 0,5^{x-1} - 2,4^{2x} = 2,4^{2x-1} - 0,5^x$$

$$1589. 15^{2x-3} = 3^x \cdot 5^{3x-6}$$

$$1590. 3^{x+3} - 9^{x+1} = 18$$

$$1591. 4^{x+1} + 16^{x-1} = 1536$$

$$1592. x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$$

$$1593. 4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}} \quad 1594. 0,25^{2-\sqrt{5x+1}} = 4 \cdot 2^{\sqrt{5x+1}}$$

$$1595. \frac{3\sqrt[3]{10}}{50 + \frac{2x}{\sqrt[2]{10}}} = 5 \quad 1596. a^{2x} - b^{2x} - 2(ab)^x = 0$$

$$1597. 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x = 2^{x+3} + 3^{x-2}$$

$$1598. 6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$$

$$1599. 3^{x^2(x^2-1)} = 729 \cdot 7^{x^4-x^2-6}$$

$$1600. 4^x - 3^{x-\frac{1}{x}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

$$1601. 4^x + 6^x = 9^x$$

$$1602. (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}$$

$$1\ 603. \ 2(x+1)(2x+1)^x - (x-1)^x = (2x+1)^{x+1}$$

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$1\ 604. \ x^{\frac{1}{8}} + x^{-\frac{1}{8}} = x^8 + x^{-8}$$

$$1\ 605. \ 2^{\sin x + \sin 2x} = 32^{\frac{\sin 3x}{a}}$$

$$1\ 606. \ 3^{\cos x - \frac{1}{2}} + 3^{\cos x + \frac{1}{2}} + 3^{\cos x + \frac{5}{2}} = 31$$

$$1\ 607. \ 2^{\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}} + 2^{\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}} + 2^{\operatorname{tg} x + \frac{5}{2}} = 11\sqrt{2}$$

$$1\ 608. \ 8 \cdot 16^{\cos^2 x - 1} + 5(4^{\sin^2 x} - 2^{\cos^2 x}) - 16^{\sin^2 x} = 2$$

$$1\ 609. \ (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4.$$

* * *

Să se rezolve ecuațiile

$$1\ 610. \ \log_2 [2 + \log_3 (3 + x)] = 0$$

$$1\ 611. \ \log 1838 - \log (31^x - 42) = \log 2$$

$$1\ 612. \ \log_2 \sqrt{x} - 1 = 0$$

$$1\ 613. \ 1 + \log x = \log (1 + x)$$

$$1\ 614. \ \log (x+1) - 2 \log (x-1) = 1$$

$$1\ 615. \ \frac{2 + \log (x+2)}{3 + \log (2x^2 + 31x + 624)} = \frac{1}{2} \qquad 1\ 616. \ \frac{\log (7 - x^3)}{\log (3 - x)} = 3$$

$$1\ 617. \ \frac{\log x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \log 5 - 1}{\frac{1}{4} \log (x-1)} = \log 0,01$$

$$1\ 618. \ \frac{\log 2x}{\log 3x} = \frac{\log 4x}{\log 5x}$$

$$1\ 619. \ \log_8 (x-1) + \log_8 (x+27) = \frac{7}{3}$$

$$1\ 620. \ \log (3x-4)^2 + 2 \log (4x-8) = 4$$

$$1\ 621. \ x^{\log x} = 100x$$

$$1\ 622. \ \log \sqrt{x+3} + \log \sqrt{x-3} = 0,47712$$

- 1 623. $\log (x-5)^2 + \log (2x-4)^2 = 3,11261$
- 1 624. $2(\log x - \log 6) = \log x - 2 \log (\sqrt{x} - 1)$
- 1 625. $\log \sqrt{1+x} + 3 \log \sqrt[3]{1-x} = \log \sqrt[3]{1-x^2} + 2$
- 1 626. $\log (3^x - 6) + 0,10914 = x \log 3$
- 1 627. $\sqrt{(2x)^{\log \sqrt{2x}}} = 10$
- 1 628. $\log 10x^2 - \log \sqrt[3]{x} = 11$
- 1 629. $\log_x 10 + 2 \log_{10x} 10 + 3 \log_{100x} 10 = 0$
- 1 630. $\log \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 = \log \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{m} \right) + \log \frac{m+10}{\frac{1}{m} + \frac{1}{10}}; \text{ (discuție).}$
- 1 631. $5 \log_2 3 + 2 \log_2 \sqrt{(x-2)\sqrt[3]{8}} - 1 \frac{2}{3} \log_2 27 = 1,5$
- 1 632. $\log_x 5 \sqrt[5]{5} - \frac{5}{4} = (\log_x \sqrt[5]{5})^3$
- 1 633. $\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1$
- 1 634. $0,4^{\log^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \log x^3}$
- 1 635. $\sqrt{\log_x 5 \sqrt[5]{5} + \log_{\sqrt[5]{5}} 5 \sqrt[5]{5}} \cdot \log_{\sqrt[5]{5}} x = -\sqrt[5]{6}$
- 1 636. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$
- 1 637. $20 \log_{ax} \sqrt{x} + 7 \log_{a^2x} x^3 = 3 \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x^2$
- 1 638. $\left(\frac{1}{9} \right)^{\log_3 \sqrt{x+1} - \frac{1}{2} \log_3 (x^2-1)} = \sqrt[3]{2(x-1)}$
- 1 639. $\log_2 (x+1)^2 + \log_2 |x+1| = 6$
- 1 640. $x^{\log \sqrt{x} (x-2)} = 9$
- 1 641. $x^{\log x^2 (x^2-1)} = 5$
- 1 642. $10^{\log_4 (x^2-3x+5)} = 3^{\log_4 10}$
- 1 643. $x^{2(\log_{10} x)^3 - \frac{3}{2} \log_{10} x} = \sqrt[3]{10}$
- 1 644. $\log_{10} 2 + \log_{10} (4^{x-2} + 9) = 1 + \log_{10} 2^{x-2} + 1$
- 1 645. $2^{\log_8 (x^2-6x+9)} = 3^{2 \log_x \sqrt{x-1}}$

$$1\ 646. \log_a \sqrt[3]{1+x} + 3 \log_{a^2}(1-x) = \log_{a^4}(1-x^2)^2 + 2$$

$$1\ 647. x^{\log_a x} = a^{(\log_a x)^3}$$

$$1\ 648. a^{\log_{a^2} 4} = x^{\log_x (x^2-x)}$$

$$1\ 649. (\log_5 x)^2 + \log_5 7 \cdot \log_7 x = 2$$

$$1\ 650. \log x - \log \sqrt[3]{2 \sqrt{x^2-2} + 1 - \sqrt[3]{2} \sqrt[4]{x^2-2} + 1} + \log \sqrt{x^2-1} = \log \sqrt[3]{2} + \log \sqrt[3]{2 \sqrt{x^2-2} + \sqrt[4]{4x^2-8} + 1}$$

1 651. Să se determine valorile parametrului α pentru ca ecuația

$$\frac{1 + \log(x-1)(x-27)}{1 + \frac{1}{\alpha} \log(x-25)} = 2\alpha$$

să aibă rădăcinile reale, logaritmul fiind luat în baza 3.

1 652. Să se rezolve și discute ecuația

$$\frac{\log a + \log x}{\log(m+x)} = 2$$

în care m este un parametru, iar a o constantă pozitivă și diferită de zero.

* * *

Să se rezolve sistemele

$$1\ 653. 2^x + 3^y = 3, \quad 4^x + 9^y = 5$$

$$1\ 654. 2^{x+y} = 32, \quad xy = 6$$

$$1\ 655. \sqrt[3]{a^x} \sqrt[4]{a^y} = a^6, \quad a^{5x} : a^{4y} = a^{-3},$$

$$1\ 656. 2^x + 3^y = 11, \quad 2^x + 3^{y+1} = 29$$

$$1\ 657. 5^x \cdot 7^y = 175, \quad x + y = 3$$

$$1\ 658. 2^x \cdot 3^y = 12, \quad 2^y \cdot 3^x = 18$$

$$1\ 659. y^{x^2+7x+12} = 1, \quad x + y = 6$$

$$1\ 660. 8^x = 10y, \quad 2^x = 5y$$

$$1\ 661. 3 \cdot 2^{x+y} - 5 \cdot 2^{x-y} = 172, \quad 5 \cdot 2^{x+y} - 4 \cdot 2^{x-y} = 304$$

$$1\ 662. \sqrt[4]{a^{\frac{7}{4} - \frac{2x}{3} - \frac{5y}{12}}} = a^2 \sqrt[2]{a^{\frac{23}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{y}{3}}}, \quad \sqrt[3]{a^x} \sqrt[4]{a^{x-y}} = \sqrt[5]{a^2}$$

$$\text{I 663. } 3y = 7 \sqrt[9]{19\,683}, \quad 3y^x = 16\,807 \cdot 7\,203$$

$$\text{I 664. } 8^{2x} + 27^{\frac{y}{3}} = 5, \quad 2^{12x} - 3^{2y} = -5$$

$$\text{I 665. } \sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[5]{3^y} = 36, \quad \sqrt[7]{4^{-x}} \cdot \sqrt[10]{256^y} = 4$$

$$\text{I 666. } a^x b^y = m, \quad x + y = n (a, b > 0)$$

$$\text{I 667. } x^y = y^x, \quad y = ax (a, x, y > 0)$$

$$\text{I 668. } x^y = y^x, \quad a^x = b^y$$

$$\text{I 669. } x^{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = x^2, \quad x^{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = y^4$$

$$\text{I 670. } x^y = y^x, \quad x^p = y^q, \quad (x, y > 0)$$

$$\text{I 671. } a^x = b^y = c^z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = d^2$$

$$\text{I 672. } a^{x^2} = b^{y^2}, \quad x^a = y^b$$

$$\text{I 673. } a^{\frac{x}{y}} = b^{\frac{y}{x}}, \quad x^a = y^b$$

$$\text{I 674. } x^{x^2} = y, \quad x^{4x-1} = y^4$$

$$\text{I 675. } x^{x+y} = y^{12}, \quad y^{x+y} = x^3$$

$$\text{I 676. } \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36}, \quad xy - x + y = 118$$

$$\text{I 677. } x^{x+y} = y^{x-y}, \quad x^2 y = 1$$

$$\text{I 678. } 11^{xz} - 2 \cdot 5^y = 71, \quad 11^z + 2 \cdot 5^{\frac{y}{2}} = 21, \quad 11^{(x-1)z} + 5^{\frac{y}{2}} = 16$$

$$\text{I 679. } (1+y)^x = 100, \quad (y^4 - 2y^2 + 1)^{x-1} = \frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^3}, \quad (y > -1)$$

$$\text{I 680. } 3^x x^y = y^x, \quad 9x^3 = y^2.$$

* * *

Să se rezolve sistemele

$$\text{I 681. } x - y = 15, \quad \log x + \log y = 2$$

$$\text{I 682. } x^2 + y^3 = 101, \quad 2 \log x + 3 \log y = 2$$

$$\text{I 683. } \log \sqrt[4]{x} + 2 \log \sqrt[12]{y} = 0,25 + \log \sqrt[6]{5},$$

$$3(\log x - 1) - 2(\log y - \log 5) = 0$$

$$\text{I 684. } x^{\log y} = 100, \quad xy = 1\,000$$

$$\text{I 685. } (ax)^{\log a} = (by)^{\log b}, \quad b^{\log x} = a^{\log y}$$

$$1686. \log_x 10 + \log_y 10 = 5, \quad \log_{10} x + \log_{10} y = \frac{5}{4}$$

$$1687. \frac{\log x^2 + 5 \log y}{2 \log x - \log y^5} = 3, \quad \frac{2}{\log x} + \frac{5}{\log y^4} = 1,65$$

$$1688. y + \log_{10} x = 1, \quad x^y = \frac{1}{100}$$

$$1689. \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}, \quad xy = 16$$

$$1690. 2^{\log x} \cdot 3^{\log y} = \sqrt{54}, \quad \log x + \log y = 2$$

$$1691. \log_{0.5}(y-x) + \log_2 \frac{1}{y} = -2, \quad x^2 + y^2 = 25$$

$$1692. xy = a^2, \quad (\log x)^2 + (\log y)^2 = \frac{5}{2} (\log a^2)^2$$

$$1693. p \log_x a + q \log_y a = 0, \quad x^q - 4y^p = 0.$$

$$1694. x^a = y^b, \quad \log_c \frac{x}{y} = \frac{\log_c x}{\log_c y}$$

$$1695. 36x + y = 100, \quad \log \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}} + \log \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x}} = \log \frac{1}{2}$$

$$1696. \log \sqrt[n]{x^n y^m} = mn + 1, \quad \frac{\log x \log x}{\log y \log y} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

$$1697. (\log x)^2 + (\log y)^2 = 2m,$$

$$x^{\log x} + y^{\log y} = 2 \cdot \frac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2} \cdot a^m$$

$$1698. \sqrt[n]{x+y} = 2\sqrt{3}, \quad (x+y)2^{y-x} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{8}}(2^{-1})}.$$

PROBLEME APLICATIVE

§ 1. Probleme de gradul I, II și III

1 699. Un strungar a lucrat în prima zi un număr de piese, în a doua zi a lucrat cu o treime mai mult ca în prima zi, iar în a treia zi, cu 10 piese mai mult ca în ziua a doua. Știind că în cele trei zile a executat 87 de piese, câte piese a făcut în prima zi?

1 700. Un automobil pleacă din localitatea A spre localitatea B la ora 5, distanța de parcurs fiind 220 km. La ora 6 din cauza drumului i se reduce viteza cu $1/4$. La ora 7 trebuie să urce o pantă și i se reduce viteza cu o treime din precedentă și ajunge în B la ora 9. Să se afle lungimile celor trei distanțe pe care automobilul le-a parcurs cu viteze constante.

1 701. Două trenuri pleacă în același timp din localitățile A și B și se îndreaptă unul către celălalt. Să se calculeze distanța dintre localități și vitezele, știind că : 1° trenurile se întâlnesc după două ore de la plecarea lor la o distanță situată la 15 km de mijlocul distanței dintre localități; 2° dacă trenul care are viteza mai mare ar merge de două ori mai încet, întâlnirea ar avea loc după $2^b 48^m$ de la plecare.

1 702. O vulpe urmărită de un ogar are 50 de sărituri înaintea ogarului; ea face 4 sărituri în timpul în care ogarul face 3, dar 2 sărituri de-ale ogarului fac cât 3 ale vulpii. Câte sărituri va trebui să mai facă ogarul pînă să ajungă vulpea?

1 703. Baia unei uzine este alimentată cu câte o conductă de apă caldă și rece. Dacă amestecăm 3 l apă rece cu 7 l apă caldă, se obține temperatura de 39°C ; luînd însă 7 l de apă rece și 3 l apă caldă, temperatura amestecului va fi de 31°C . Se întreabă :

1° Care este temperatura apei reci? 2° Care este temperatura apei calde? De cîți litri de apă caldă și cîți de apă rece avem nevoie pentru a pregăti o baie de 700 l apă la temperatura de 35°C ?

1 704. Membrii unei cooperative agricole de producție au strîns de pe două loturi 360 t de trifoi. În anul următor, recolta de trifoi de pe primul lot s-a mărit cu 10%, iar de pe al doilea lot cu 15% și astfel de pe cele două loturi s-au strîns 404 t trifoi. Cît s-a strîns în anul al doilea de pe fiecare lot?

1 705. Un tractor poate să termine aratul unui teren în 48 ore. În timpul aratului el a fost înlocuit cu un alt tractor care ar fi terminat singur aratul întregului teren în 40 ore. Aratul terenului a durat în total 42 ore. Cîte ore a lucrat fiecare tractor?

1 706. Un ceasornic arată ora 12. La ce oră acul care arată minutele va mai întîlni pe cel care arată orele? Cînd se va face întîlnirea celor două ace între orele 2 și 3?

1 707. În două eprubete sînt două feluri de lichide. Dacă am lua 10,8 g din primul lichid și 4,8 g din al doilea, densitatea amestecului ar fi 1,56. Dacă am lua lichidele în greutăți egale, densitatea ar fi 1,44. Care e densitatea fiecărui lichid?

1 708. Prășind cîte 10 ari pe oră, o brigadă poate termina la orele 6 seara lotul care i-a fost dat. După ce a prășit astfel jumătate din lot, brigada a început să prășească cîte 12 ari pe oră și a terminat lucrul la orele 5 seara. Să se afle mărimea acestui lot și la ce oră a început brigada lucrul.

1 709. Dacă într-o clădire se instalează cîte un bec de iluminat în fiecare cameră, rămîn n becuri disponibile, iar dacă în fiecare cameră se instalează n becuri, rămîn n camere fără becuri.

Se cere să se afle numărul camerelor și numărul becurilor.

1 710. Trei robinete A , B , C , cu debite constante, pot umple un bazin în a ore. După ce curg împreună b ore, se închide robinetul C și ar mai trebui încă c ore să se umple bazinul; după d ore însă de la închiderea robinetului C se închide și robinetul B rămînînd ca robinetul A să mai curgă e ore pentru a umple bazinul. Să se afle în cît timp s-ar umple bazinul dacă ar curge cîte un robinet.

1 711. Cu 20 lei se cumpără 20 obiecte de trei feluri, un obiect din primul fel costînd 3 lei, din al doilea fel 50 de bani și din al treilea fel 1 leu. Cîte obiecte se pot lua din fiecare fel?

1 712. Să se afle prețul unui kilogram de marfă, știind că dacă s-ar micșora prețul a k kg de marfă cu 5 lei, am obține prețul a n kg de marfă mărit cu 2 lei.

1 713. O roată dințată A cu a dinți învîrtește o altă roată B cu b dinți. La început, primul dinte al roții A apasă ultimul dinte al celei de-a doua roți. Cîte învîrtituri trebuie să facă prima roată pentru ca să apese cu primul dinte pe dintele k al roții a doua. Aplicație: $a = 84$, $b = 222$ și $k = 18$.

1 714. Să se aleagă două cercuri ale discului capului divizor de la mașina de frezat, pentru a se putea tăia n dinți la o roată dințată. Caz particular $n = 175^1$.

1 715. Un tren personal pornește din gara A spre gara B cu o viteză de v_1 km/oră. Mai tîrziu pornește din A un tren accelerat cu o viteză v_2 km/oră

¹ „Revista matematică și fizică“, nr. 9/1950, p. 13.

care ajunge în B o dată cu personalul. Dacă trenul personal, după ce a parcurs $\frac{2}{3}$ din drum ar merge cu viteza $v_1/2$ km/oră, atunci acceleratul ar ajunge înainte în B cu d km. Care este distanța AB ?

1 716. Într-un vas având volumul de v_1 litri se găsește la începutul observației o cantitate de a_1 litri de apă, iar într-un alt vas de volum v_2 se găsesc a_2 litri. În fiecare minut, în primul vas curg m_1 litri, iar în al doilea, m_2 litri de apă. După câte minute vor conține ambele vase aceeași cantitate de apă?

1 717. Într-un vas sînt 80 cm^3 lichid cu greutatea specifică $1,2 \text{ g/cm}^3$; într-un alt vas sînt 100 cm^3 cu greutatea specifică $0,8 \text{ g/cm}^3$. Din primul vas turnăm $x \text{ cm}^3$ lichid în al doilea și, după ce amestecăm bine, luăm din acesta din urmă $x \text{ cm}^3$ și punem înapoi. Se cere x , dacă în momentul acesta în fiecare vas sînt lichide egale în greutate.

1 718. Se amestecă trei feluri de vin, avînd prețurile respective a , b , c , luîndu-se dintr-al treilea fel o cantitate egală cu celelalte două cantități, obținîndu-se n litri amestec cu prețul d lei. Cît trebuie să luăm din fiecare fel și care sînt posibilitățile de soluționare a problemei?

1 719. O probă a unui aliaj compus din două metale are greutatea specifică d . Greutatea specifică a primului metal este d_1 , iar a celui de-al doilea d_2 . Cîte grame trebuie luate din fiecare metal pentru ca proba să cîntărească $a \text{ kg}$?

1 720. O cantitate de $a \text{ m}^3$ de gaz trece succesiv prin n filtre și fiecare din acestea absoarbe $p\%$ din impuritățile conținute de gaz. Apoi gazul intră într-un rezervor, în care se găsesc $b \text{ m}^3$ de gaz, cu $q\%$ impurități. Ce procent de impurități este admisibil în gaz înainte de purificare, dacă procentul impurităților conținut în gaz în rezervor nu trebuie să depășească $r\%$?

1 721. Pentru strîngerea recoltei într-un termen fixat de plan, o cooperativă agricolă de producție lucrează cu două brigăzi. Prima brigadă, care a lucrat pe un lot de 400 ha , a terminat strîngerea recoltei cu două zile înainte de termen, iar brigada a doua, care a lucrat pe un lot de 900 ha , a terminat cu două zile după termenul fixat. Dacă prima brigadă ar fi lucrat tot atîtea zile cîte a lucrat cea de-a doua brigadă și cea de-a doua cît a lucrat prima brigadă, fiecare brigadă ar fi strîns aceeași cantitate. Să se afle termenul fixat pentru strîngerea recoltei după plan și de pe cîte hectare a strîns zilnic recolta fiecare brigadă în parte.

1 722. O brigadă de tăietori de lemne trebuie să taie 216 m^3 lemne într-un anumit număr de zile. În primele 3 zile brigada a îndeplinit zilnic norma stabilită, iar după aceea depășea planul în fiecare zi cu 8 m^3 ; astfel,

cu o zi înainte de termenul prevăzut, au fost tăiați 232 m³ lemne. Ce cantitate de lemne trebuia să taie brigada pe zi, după plan?

1 723. Mai multe persoane trebuiau să plătească în mod egal suma de lei 240. La efectuarea plății, lipsind două persoane, celelalte au trebuit să plătească în plus câte 4 lei. Câte persoane au achitat suma?

1 724. Pentru transportul a 15 t de legume sînt necesare mai multe camioane cu o anumită capacitate de încărcare. Deoarece s-au trimis camioane cu o capacitate de încărcare mai mică cu o jumătate de tonă, numărul camioanelor a fost cu unul în plus. Cîte tone de legume a transportat fiecare din camioanele trimise?

1 725. Pentru transportul a p tone de marfă erau necesare mai multe camioane. Deoarece numărul camioanelor s-a mărit cu a , în fiecare camion s-a încărcat cu b tone mai puțin. Cîte tone de marfă trebuia să încarce inițial fiecare camion?

1 726. Doi motocicliști pleacă în același moment, unul de la București spre Sinaia, altul de la Sinaia spre București. Ei se întîlnesc prima dată la 45 km de la Sinaia, apoi, continuîndu-și drumul, ajung la Sinaia, respectiv București, și se întorc fără oprire, întîlnindu-se a doua oară la 15 km de București. Știind că a doua întîlnire a avut loc la 3 ore după prima, se cere să se calculeze vitezele cu care au mers cei doi motocicliști, precum și distanța București-Sinaia.

1 727. Doi curieri I și II au plecat în același timp din orașele A și B (respectiv), îndreptîndu-se unul spre celălalt; cînd s-au întîlnit, s-a văzut că I a parcurs k kilometri mai mult decît II . Continuînd drumul, I a ajuns în B după a ore, iar II în A după b ore de la întîlnire. Să se găsească distanța dintre orașe.

1 728. O barcă coboară pe cursul unui rîu pe o distanță egală cu s_1 kilometri și după aceea merge împotriva curentului pe o distanță egală cu s_2 kilometri. Viteza curgerii rîului este egală cu v m/oră. Care trebuie să fie viteza proprie a bărcii, pentru ca această călătorie să nu dureze mai mult de t ore?

1 729. Două tractoare, lucrînd împreună, pot ara un ogor în 6 zile. Unul din tractoare lucrînd singur poate ara acest ogor cu 5 zile mai repede decît celălalt. În cît timp poate ara acel ogor fiecare tractor dacă ar lucra singur?

1 730. Să considerăm 32 de vase de două mărimi diferite, volumul unuia fiind cu doi litri mai mare decît volumul celuilalt (mai mic). Volumul total al vaselor mari și al vaselor mici este unul și același, și anume 60 de litri. Să se găsească numărul de vase mari și mici.

1 731. Prețul de cost inițial al unei piese este 60 lei. După două reduceri succesive cu același procent, prețul a scăzut la 48,60 lei. Cu cât la sută s-a făcut reducerea?

1 732. O fabrică de cherestea dispune de trei gateri cu capacități diferite de producție. Sosind un transport de bușteni, gaterul al doilea, dacă ar lucra singur, ar tăia buștenii într-un timp cu 10 zile mai lung decât primul gater lucrând singur, dar cu 15 zile mai scurt decât al treilea gater lucrând singur. Dacă ar lucra împreună primul cu al doilea, s-ar termina lucrarea cu 6 zile mai curând decât dacă ar lucra împreună al doilea cu al treilea gater.

Să se afle în câte zile ar termina lucrarea fiecare gater, dacă ar lucra singur.

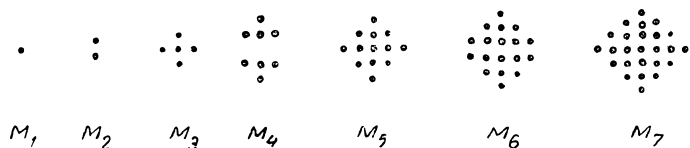
1 733. Trei roți dințate se angrenează una în alta și se rotesc cu iuțeli diferite, fiecare în jurul axei sale. Cât timp prima roată face trei rotații, a doua face numai una; în timp ce a treia roată face două rotații, prima roată face 27 de rotații întregi. Dacă se scade din pătratul numărului dinților roții a treia produsul dintre numărul dinților celorlalte două roți, obținem numărul 103 248. Câți dinți are fiecare roată?

1 734. Un obiect mic se găsește la distanța d de un ecran. La ce distanță x de obiect trebuie așezată o lentilă convexă pentru a obține pe ecran o imagine clară?

1 735. Într-o eprubetă se găsesc în momentul inițial N bacterii. La sfârșitul fiecărei ore, cantitatea de bacterii se mărește cu p procente în comparație cu cantitatea care era la începutul orei respective; afară de aceasta, la sfârșitul fiecărei ore se ia din eprubetă o porțiune care conține n ($n < N$) bacterii. Peste câte ore cantitatea de bacterii din eprubetă va fi de două ori mai mare (după ce s-a scos porțiunea respectivă), decât cantitatea inițială?

1 736. Un vas este umplut cu un lichid (L) de densitate d . Se înlocuiește $1/p$ din lichidul (L) cu un alt lichid (L') având densitatea d' . Apoi se înlocuiește $1/p$ din amestecul obținut cu lichidul (L') și așa mai departe. 1° Care este densitatea amestecului după n operații. 2° Să se considere cazul când $n \rightarrow a$. 3° Caz particular $d = 1$; $d' = 0,9$; $p = 2$; $n = 3$.

1 737. Într-o serie de hidrocarburi, atomii de carbon se grupează în moleculele $M_1, M_2, M_3, \dots$ în felul următor



Să se calculeze : 1° numărul atomilor de carbon în molecula M_n ; 2° numărul atomilor de carbon în primele n molecule.

1 738. Două puncte mobile A și B se mișcă pe un cerc care are lungimea l . Unul (A) se mișcă cu viteza v , iar al doilea (B) cu viteza v' . La pornire între ele este un arc de lungime d . Să se calculeze timpul de întâlnire dacă : 1° fiecare punct se mișcă în același sens ; 2° al doilea în sens invers ; 3° al doilea pornește cu T secunde mai târziu ca primul.

§ 2. Probleme de geometrie rezolvate algebric

1 739. Una din bazele unui trapez este egală cu 10 m, înălțimea 4 m, iar aria 32 m². La o distanță de 1 m de la baza dată se duce o paralelă cu ea. Se cere lungimea acestei paralele.

1 740. Într-un triunghi ABC în care $BC = 32$ cm, $AC = 24$ cm, $AB = 18$ cm se ia un punct M pe latura BC și se duc din acest punct paralelele ME și MF la laturile AB și AC . La ce distanță de B trebuie luat punctul M ca să avem $ME + MF = 21$ cm. Generalizare pentru $ME + MF = l$. Discuție.

1 741. Un teren în formă de trapez dreptunghic are baza mare 25 m, baza mică 15 m și înălțimea 250 m. Să se împartă în două părți echivalente printr-o paralelă dusă la baze.

1 742. Să se ducă o paralelă la una din laturile unui triunghi care să împartă aria sa în două părți echivalente.

Generalizare : ariile să fie într-un raport m/n .

1 743. În triunghiul de laturi a, b, c să se ducă o paralelă la latura b astfel ca trapezul format să aibă perimetrul $2p$. Discuție.

1 744. Printr-un punct M de pe perimetrul unui triunghi să se ducă o dreaptă care să împartă aria triunghiului în două părți care să fie între ele în raportul dat m/n .

1 745. Se dă un cerc de centru O și rază R , situat la distanța $OB = d$ de o dreaptă MN exterioară cercului, și un punct A pe această dreaptă. Să se găsească raza cercului tangent în A la dreaptă și tangent la cercul dat, cunoscând $AB = a$.

1 746. Într-un triunghi cu latura $AB = 18$ cm și înălțimea corespunzătoare de 12 cm să se înscrie un dreptunghi al cărui perimetru să fie de 28 cm. Generalizare și discuție.

1 747. Se dau baza b și înălțimea h ale unui triunghi. Să se calculeze laturile pătratelor înscrise în acest triunghi și având o latură așezată succesiv

pe laturile triunghiului. Să se demonstreze că cel mai mare dintre pătrate are latura așezată pe cea mai mică latură a triunghiului.

1 748. Într-un triunghi isoscel BAC ($AB = AC$) să se ducă o paralelă DE la baza BC astfel ca segmentele determinate pe celelalte două laturi și adiacente bazei să aibă o lungime egală cu DE .

1 749. Se consideră un triunghi ABC de laturi $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Să se determine în raport de a , b , c distanțele de la vîrfurile triunghiului la punctele de tangență ale laturilor cu cercul înscris și cercurile exînscrise, fiind vorba numai de acele distanțe care se măsoară pe laturi sau pe prelungirile lor.

1 750. Se consideră un trapez $ABCD$. Să se ducă o paralelă cu bazele MN astfel ca suma segmentelor $DM = x$, $MN = y$, $NC = z$ să fie egală cu k , bazele trapezului fiind DC și AB .

1 751. Se dă un triunghi ABC ale cărui laturi sînt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, a fiind latura cea mai mare. Se duce o paralelă la BC , care taie laturile AB și AC în M și N . Se duce dreapta NP paralelă cu AB și apoi dreapta MQ paralelă cu AC . Să se calculeze laturile $NP = z$ și $MQ = y$ astfel ca trapezul $MNPQ$ să fie convex, interior triunghiului ABC și de perimetru dat k .

1 752. Să se înscrie într-un cerc de rază R un triunghi isoscel astfel ca baza lui să fie a n -a parte din suma laturilor egale.

1 753. Se dă un cerc O de rază R și un punct A la distanța a de centru. Să se ducă prin A o secantă la cerc astfel ca cercul să intercepteze pe ea o coardă a cărei lungime să fie a/n .

1 754. Se consideră un pătrat $ABCD$. Pe latura CD se ia punctul P astfel ca $3PC = PD$. Pe laturile AB și AD se iau punctele M și N astfel ca $AM = DN = x$. Să se determine x astfel ca triunghiul PMN să fie isoscel cu vîrf în P .

1 755. Să se împartă un segment de dreaptă de lungime a în medie și extremă rație.

1 756. Să se afle mărimea segmentului care trebuie adăugat fiecărei laturi a unui triunghi ABC pentru ca triunghiul nou format să fie dreptunghic. Problema este totdeauna posibilă.

1 757. Să se intersecteze un triunghi oarecare cu o dreaptă care împarte perimetrul și aria triunghiului în părți egale.

1 758. Să se găsească laturile unui trapez isoscel circumscris unui cerc de rază R , astfel ca : 1° perimetrul său să fie egal cu $2p$; 2° aria sa să fie S .

1 759. Să se rezolve un triunghi cunoscând aria s , perimetrul $2p$ și o latură a .

1 760. Să se afle laturile unui triunghi cunoscând lungimile medianelor acelui triunghi.

1 761. Să se determine laturile unui triunghi dreptunghic cunoscând ipotenuza și raza cercului înscris. Între ce limite poate varia raza când ipotenuza rămâne constantă?

1 762. Într-un semicerc dat de diametru $AB = 2R$ să se înscrie un dreptunghi $MNPQ$ (MN pe AB) care să aibă perimetrul $2p$.

1 763. Să se înscrie într-un sector circular OAB , a cărui rază este egală cu R , iar unghiul la centru $AOB = 45^\circ$, un dreptunghi $MNPQ$ de arie dată a^2 , latura PQ fiind pe raza OA , vârful M pe OB , iar N pe arcul AB .

1 764. Se dă un semicerc limitat de diametrul AB și se duce tangenta la acest semicerc în punctul A . Prin punctul B se duce o semidreaptă ce întâlnește tangenta precedentă în E . Punctul C , de intersecție a semidreptei cu semicercul, se proiectează ortogonal pe AB în D . Cum trebuie dusă semidreapta pentru ca să avem egalitatea $CD = CE$?

1 765. Să se determine dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic care are aceste dimensiuni proporționale cu 21, 14, 7, știind că volumul său este 6 dm^3 .

1 766. O piramidă dreaptă are baza un romb, suprafața rombului fiind egală cu 36 dm^2 . Una din diagonalele rombului este dubla celeilalte, iar înălțimea piramidei este egală cu diagonala cea mare a rombului. Să se afle muchiile laterale și volumul piramidei.

1 767. Un triunghi se rotește succesiv în jurul laturilor sale a , b , c , obținându-se volumele V_a , V_b , V_c . Se cere :

1° Să se determine relația dintre laturile triunghiului astfel ca $\frac{2}{V_a} = \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c}$.

2° Să se calculeze laturile a , b , c cunoscând aria sa S , că triunghiul este dreptunghic și că $V_a + V_b + V_c = \frac{\pi a^3}{3}$.

3° Dacă triunghiul este dreptunghic (a este ipotenuză), să se afle relația dintre laturi astfel ca $V_a = V_b + V_c$.

1 768. Un triunghi oarecare ABC se rotește succesiv în jurul laturilor a , b , c date. 1° Să se calculeze ariile laterale S_1 , S_2 , S_3 ale corpurilor născute prin cele trei rotații. 2° Să se calculeze V_1 , V_2 , V_3 ale acelorasi corpuri. 3° Pre-

supunem B și C fixe. Care este locul geometric al punctului A , dacă raportul V_1/S^2 este egal cu o valoare constantă dată?

1 769. Un con avînd raza cercului de bază R și înălțimea $3R$ are planul bazei tangent sferei de rază R . Să se determine aria cercului mic de secțiune dintre sferă și con.

1 770. Se consideră un con de rotație de înălțime h și raza bazei r . Să se înscrie în acest con un cilindru astfel ca aria lui laterală să fie egală cu aria coroanei determinată pe cercul de bază al conului.

1 771. Să se înscrie într-un con circular drept un cilindru a cărui suprafață totală să fie echivalentă cu aria bazei conului.

1 772. Într-o sferă de rază $R = 6$ cm să se facă o secțiune astfel ca raportul ariilor celor două calote formate să fie egal cu $2/3$.

1 773. O sferă de rază R este tăiată de un plan situat la distanța x față de centrul sferei și fie S aria cercului de secțiune, S_1 și S_2 ariile calotelor determinate pe sferă ($S_2 > S_1$). 1° Să se determine x astfel încît $S = S_2 - S_1$. 2° Să se afle două relații independente de x între cele trei mărimi S , S_1 și S_2 , precum și relația independentă de x și R între aceleași mărimi. 3° Să se determine x așa fel încît să avem $S_2 = S + mS_1$, m fiind un parametru pozitiv sau negativ. Să se discute ecuația obținută, după valorile lui m . Ce se poate spune despre raportul $(S_2 - S)/S_1$, cînd x variază de la O la R ?

1 774. O sferă de rază R este tăiată de un plan AB (fig. 1). Să se calculeze distanța de la acest plan la centrul sferei, știind că volumul segmentului sferic ACB este egal : 1° cu dublul volumului conului ADB ; 2° cu volumul cilindrului de rază OI și înălțime CI .

1 775. Să se secționeze o sferă cu un plan așa fel ca raportul volumelor celor două segmente sferice să fie egal cu $5/27$.

1 776. Se dă o sferă și în ea un plan diametral. Se duce un plan paralel cu planul diametral așa fel ca volumul segmentului sferic cuprins între cele două plane paralele să fie față de volumul trunchiului de con înscris în segment într-un raport dat, m .

1 777. O sferă de centru O este tăiată de două plane paralele P și Q situate la distanța d unul de altul. Să se găsească distanța de la centrul sferei la planul P așa fel ca suprafața zonei sferice determinată de cele două plane să fie egală cu suma suprafețelor secțiunilor plane. Între ce limite poate varia distanța d ?

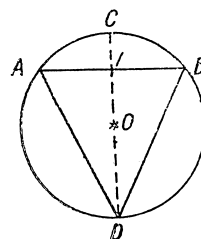


Fig. 1

1 778. Se dă o sferă de rază R și un diametru AA' al acestei sfere. Un plan perpendicular pe AA' este situat la distanța x de punctul A și taie sfera după un cerc (C). Fie V și V' volumele conurilor avînd ca bază cercul (C) și vîrfuri respectiv A și A' . Să se calculeze raportul y dintre suma $V + V'$ și volumul sferei. Să se studieze variația lui y în funcție de x și să se construiască curba reprezentativă. Să se determine x astfel ca y să aibă o valoare dată λ .

1 779. Într-un cub dat se înscrie o sferă în care apoi se înscrie un cub și în acesta o sferă ș.a.m.d. Se cere: 1° limita sumei volumelor cuburilor; 2° limita sumei volumelor sferelor.

1 780. Se consideră volumul V cuprins între două sfere concentrice de raze x și $x + 1$. 1° Să se calculeze V în funcție de x ; fie $V(x)$ această funcție. 2° Să se determine raza x astfel încît $V(x)$ să fie egal cu un volum dat $\frac{4}{3}\pi k$, în care k este o constantă pozitivă. Să se discute în raport de k .

1 781. Se consideră volumul cuprins între două sfere concentrice. 1° Care trebuie să fie raportul razelor pentru ca acest volum să fie egal cu $7/3$ din volumul unui cilindru avînd ca bază un cerc cu raza egală cu raza sferei mari și drept înălțime raza sferei mici?

2° Care trebuie să fie densitatea materiei din care este făcut acest corp pentru ca introdus în apă să se scufunde pînă la $3/4$ din diametru? (cavitatea internă se consideră vidă)

1 782. Se dă un con echilateral înscris într-o sferă de rază R . Să se secționeze aceste două corpuri cu un plan paralel cu baza conului astfel încît diferența dintre aria secțiunii prin sferă și aria secțiunii prin con să fie egală cu πa^2 .

1 783. Se dă un pătrat $ABCD$ de latură a . Să se determine pe latura AB un punct M așa fel ca raportul volumelor obținute prin rotația trapezului $MBCD$ respectiv în jurul dreptelor AB și AD să fie m .

Discuție.

1 784. Se dă un dreptunghi $ABCD$ în care $AB = CD = 2a$, $AD = BC = a$. Să se determine pe AD un punct M așa fel încît rotind figura în jurul dreptei AB , volumul născut prin rotația triunghiului MDC să fie egal cu volumul născut prin rotația trapezului $MABC$ înmulțit cu un număr pozitiv m .

1 785. Se dă un paralelipiped dreptunghic avînd ca baze $ABCD$, $A'B'C'D'$, înălțimea $DD' = h$, dimensiunile bazelor $AD = a$ și $AB = b$.

1° Să se ducă prin DD' două plane care să taie fețele laterale ale paralelipipedului după două drepte MM' și MN' astfel ca solidul să se împartă în trei părți echivalente.

2° Să se calculeze raportul volumelor solidelor $MBNM'B'N'$ și $MDNM'D'N'$.

3° Să se afle relația ce trebuie să existe între a și b astfel ca unghiul diedru care are ca muchie NN' și ale cărui fețe trec prin MM' și DD' să fie drept.

4° Considerînd această ultimă condiție îndeplinită, să se calculeze în funcție de a și h volumul corpului născut prin rotația dreptunghiului $MM'NN'$ în jurul axei DD' . Aplicație: $a = 3$ m, $h = 0,30$ m.

1 786. Să se taie o prismă triunghiulară dreaptă printr-un plan așa fel ca secțiunea să fie un triunghi echilateral.

1 787. Se dă un tetraedru regulat $ABCD$ de muchie a și fie AO înălțimea din A . Un plan dus prin AO taie pe BC și BD respectiv în M și N . Se notează: $BM = x$, $BN = y$.

1° Să se arate că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{a}$.

2° Să se determine x și y prin condiția ca suma ariilor triunghiurilor AMN , ABN , ABM să fie în raport constant k cu suprafața totală a tetraedrului.

3° Discuție.

1 788. Să se determine lungimea l a unui nit cu cap semirotond (fig. 2), necesar îmbinării unor piese metalice de grosime totală q , cunoscînd diametrul D al capului, înălțimea h a capului, diametrul d al corpului nitului și q .

1 789. Două cercuri de raze x și y care se taie ortogonal se rotesc în jurul liniei centrelor OO' . Volumul comun al celor două sfere descrise este $1/6$ din sfera cu diametrul OO' . Se cere să se calculeze x și y în funcție de distanța centrelor $OO' = a$ (se poate lua $x + y$ ca necunoscută auxiliară).

1 790. Se dă un semicerc C de diametru AB și rază $OA = OB = R$. Pe raza OA se ia un punct M la distanța $OM = x$. Se descriu semicercurile C și C'' de diametre respectiv MA și MB , de aceeași parte cu C față de AB . 1° Se consideră aria (A) cuprinsă între C , C' și C'' . Să se calculeze perimetrul

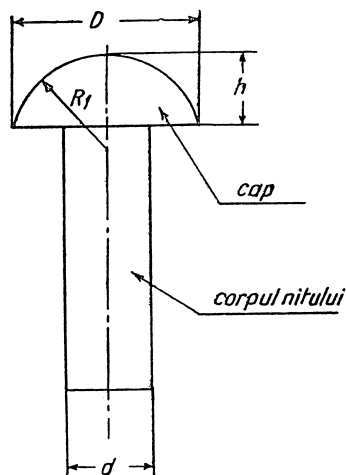


Fig. 2

și aria sa. Să se calculeze suprafața și volumul solidului (S) născut prin rotația ariei (A) în jurul lui AB . Să se studieze variația fiecăreia din aceste patru cantități când x crește de la 0 la R . 2° Ducem prin O dreapta D perpendiculară pe AB , care împarte aria (A) în două părți. Fie (A_1) acea parte care se află de aceeași parte cu M . Prin rotația în jurul lui AB , (A_1) dă naștere solidului (S_1). Să se calculeze suprafața și volumul acestui solid, precum și variația lor când x crește de la 0 la R . 3° Presupunem $R = 1$. Se cere să se calculeze x cu o aproximație de $1/100\ 000$ astfel încît volumul (S_1) să fie egal cu 1.

1 791. O sferă de rază r și de densitate d plutește pe un lichid de densitate d_1 . Să se determine înălțimea calotei situate în lichid. Discuție.

1 792. Să se determine dimensiunile unui con de rotație căruia i se cunosc volumul și generatoarea. Discuție.

1 793. Un cazan este format dintr-un cilindru de rotație terminat cu două emisfere cu aceeași rază ca cilindrul. Să se determine dimensiunile lui cunoscînd volumul și aria totală. Discuție.

NUMERE COMPLEXE

1 794. Dacă a și b sînt numere reale, să se arate că produsul $(a + bi)(ai + b)$ este pur imaginär.

* * *

Să se efectueze calculele

1 795. $(1 + ai)(a - i) - (1 - ai)(a - i).$

1 796. $i^{21} + i^{32} + i^{55} + i^{77} + i^{101} + i^{123}$

1 797. a) $\{[(1 + i)^2 - i]^4 + i\}^4;$

b) $(1 - i)(2 - i)^2(3 - i)^3.$

1 798. Pentru ce valori reale ale lui x și y avem

1° $(x + y)^2 + xi + 6 = 5x + y(5 + i) + i;$

2° $\frac{x - 2 + (y - 3)i}{i + y} = 1 - 3i.$

* * *

1 799. Dacă a și b sînt numere reale, expresia

$$\frac{(a + bi)^2}{a - bi} + \frac{(a - bi)^2}{a + bi}$$

este reală.

1 800. Să se calculeze expresia

$$\frac{1 - ai}{a + i} - \frac{1 + bi}{i - b}.$$

1 801. Să se scrie sub forma $a + bi$

$$\frac{(1 - i)(1 - 2i)(1 - 3i)(1 - 4i)(1 - 5i)}{(1 + i)(2 + i)(3 + i)(4 + i)(5 + i)}.$$

1 802. Avem

$$\frac{1}{i-2} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{10}{3i+2} + \frac{10}{3i-2} = 0.$$

1 803. Dacă α și $\bar{\alpha}$ sînt cele două rădăcini cubice complexe ale unității, adică $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ și $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$, să se arate că

$$\begin{aligned} 1^\circ \alpha + \bar{\alpha} &= -1; & 2^\circ 1 + \alpha + \alpha^2 &= 0; & 3^\circ 1 + \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 &= 0, \\ 4^\circ \alpha\bar{\alpha} &= -1; & 5^\circ \alpha^2 &= \bar{\alpha} \text{ și } \bar{\alpha}^2 = \alpha; & 6^\circ \alpha^3 &= \bar{\alpha}^3 = 1; & 7^\circ \alpha^2\bar{\alpha} &= \\ &= \bar{\alpha}^2\alpha = 1; & 8^\circ 4\alpha^4 - \alpha^3 + 3\alpha^2 + \alpha + 4 &= 0. \end{aligned}$$

* * *

1 804. Dacă notăm $x = a + b$, $y = a\alpha + b\alpha^2$,
 $z = a\alpha^2 + b\alpha$, α ca în problema 1 803, atunci
 $1^\circ xyz = a^3 + b^3$; $2^\circ x^2 + y^2 + z^2 = 6ab$;
 $3^\circ x^3 + y^3 + z^3 = 3(a^3 + b^3)$.

1 805. Dacă α este una din rădăcinile cubice complexe ale unității, atunci :

$$\begin{aligned} 1^\circ (a + \alpha b + \alpha^2 c)^3 + (a + \alpha^2 b + \alpha c)^3 &= \\ &= (2a - b - c)(2b - c - a)(2c - a - b); \\ 2^\circ (a + \alpha b + \alpha^2 c)^3 - (a + \alpha^2 b + \alpha c)^3 &= \\ &= -3\sqrt[3]{3}(b - c)(c - a)(a - b). \end{aligned}$$

* * *

Dacă α este una din rădăcinile cubice complexe ale unității, să se dea dezvoltarea produselor

$$\begin{aligned} 1 \text{ 806. } 1^\circ (x\alpha + y\alpha^2)(x\alpha^2 + y\alpha); \\ 2^\circ (x - y)(x\alpha - y\alpha^2)(x\alpha^2 - y\alpha); \\ 3^\circ (x + y + z)(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z). \end{aligned}$$

* * *

1 807. Dacă α este o rădăcină cubică complexă a unității, atunci :

$$\begin{aligned} 1^\circ (1 - \alpha)(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)(1 - \alpha^5) &= 9; \\ 2^\circ (2 + 5\alpha + 2\alpha^2)^6 &= (2 + 2\alpha + 5\alpha^2)^6 = 729. \end{aligned}$$

1 808. Să se afle valoarea fracției

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 + x^3 - x - 1}$$

pentru $x = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ și pentru $x = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$.

1 809. Fie $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Să se determine $z = x + yi$ astfel ca $\alpha^2 - \alpha = z^2 - 1$, x și y fiind reali.

1 810. Dacă notăm cu $z = x + yi$ și conjugatul lui z cu $\bar{z} = x - yi$, să se determine z știind că: $1^\circ z^2 = \bar{z}$; $2^\circ \bar{z} = z^3 - 2z + 2$.

1 811. Să se pună sub forma $a + bi$ expresiile

$$E_1 = i^{43}, \quad E_2 = i(1 + i)^5, \quad E_3 = (2 + i)^7 + (2 - i)^7,$$

$$E_4 = (1 + i)(1 - i)^{-1},$$

$$E_5 = \frac{1 + i}{2 - i} - \frac{(3 + i)(i - 4)}{(1 - i)(2 + i)}, \quad E_6 = \frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2},$$

$$E_7 = \frac{i\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - i\sqrt{1-a}}, \quad E_8 = \frac{(ai - b)\sqrt{1+a} + (a + bi)\sqrt{1-a}}{(a + bi)\sqrt{1+a} - (ai - b)\sqrt{1-a}},$$

$$E_9 = \frac{\sqrt{1-a} + \sqrt{1+a} + i(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a})}{\sqrt{1-a} - \sqrt{1+a} + i(\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a})}.$$

1 812. Să se calculeze expresiile funcțiilor

$$f_1(z) = z^3, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = \frac{z}{z-1}, \quad f_4(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad f_5(z) = \frac{iz^2 - z + i}{2z - i}$$

pentru $z = x + yi$, punind rezultatul sub forma $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$.

1 813. Să se arate că ecuația $x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$ admite ca rădăcină pe $1 + i$. Să se afle celelalte trei rădăcini.

1 814. Să se arate că:

$$1^\circ \sqrt{\frac{1}{2}(1 + i)} + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - i)} = \sqrt{1 + \sqrt{2}};$$

$$2^\circ \frac{(a - i)^3(-1 + ai)^2}{(1 - i)^2} - \frac{(a + i)^2(1 + ai)^3}{a(1 + i)^2} + \frac{(a^2 + 1)^3 i}{2a} = 0;$$

$$3^\circ \left[x \sqrt{\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})} + y \sqrt{\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})} \right] \left[x \sqrt{\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})} + y \sqrt{\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})} \right] = x^2 + y^2 + xy;$$

$$4^\circ \sqrt[3]{\frac{1}{2}[x - 1 + i(x + 1)]^2(x + i)^4} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}[x - 1 - i(x + 1)]^2(x - i)^4} = 4x.$$

1 815. Să se determine x și y reali așa fel ca $(x + yi)^5 = 1 + i$.

1 816. Pentru ce α real expresia $(1 + \alpha i)^3$ este reală. La fel pentru $(\alpha + i)^5$.

1 817. Să se arate că polinomul în x

$P(x) = (\cos \alpha + x \sin \alpha) (\cos \beta + x \sin \beta) - x \sin (\alpha + \beta) - \cos (\alpha + \beta)$ se împarte cu $x^2 + 1$.

1 818. Să se arate că polinoamele

$$\begin{aligned} &[(x + 1)^{6n+2} + 1]^2 - x, \quad (x^2 + 1)^{6n+2} + x + 1, \\ &(x + 1)^{6n+1} - x^{6n+1} - 1 \text{ se împart cu } x^2 + x + 1, \\ &(m, n, p \text{ fiind numere naturale}). \end{aligned}$$

1 819. Să se calculeze suma $s_n = 1 + i + i^2 + \dots + i^n$.

1 820. Să se calculeze

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{1+i}{2}\right)^{100}, \quad E_2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n, \\ E_3 &= \frac{(1-i)^{2n}}{(1+i)^{2m}}, \text{ unde } m \text{ și } n \text{ sînt numere naturale.} \end{aligned}$$

1 821. Să se arate că

$$(i + a_1)(i + a_2) \dots (i + a_k) = i^k(1 - a_1 i)(1 - a_2 i) \dots (1 - a_k i).$$

1 822. Să se calculeze

$$\begin{aligned} &1^\circ \sqrt{1+2i}; \quad 2^\circ \sqrt{-5-12i}; \quad 3^\circ \sqrt{3-3\sqrt{3}i}; \quad 4^\circ \sqrt{3n-ni\sqrt{7}}; \\ &5^\circ \sqrt{2x-1+2x(x-1)i}; \quad 6^\circ \sqrt{4ab+2(a^2-b^2)i}; \\ &7^\circ \sqrt[3]{1+i}; \quad 8^\circ \sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}. \end{aligned}$$

1 823. Să se rezolve ecuațiile

$$\begin{aligned} &1^\circ x^2 - ix - 1 - i = 0; \quad 2^\circ x^2 + x + 1 - i = 0; \\ &3^\circ x^2 + (5 - 2i)x + 5(1 - i) = 0; \quad 4^\circ x^2 - (5 + 2i)x + \\ &\quad + 24 + i = 0; \quad 5^\circ (3 - i)x^2 - (8 - i)x + 4 + 7i = 0; \\ &6^\circ \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2}\right)^2 + 1 = 0; \quad 7^\circ \left[\frac{x^2 + 1}{(x-1)^2}\right]^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

1 824. Să se determine numărul complex $x + yi$ așa ca $y + xi$ să fie una din rădăcinile lui pătrate.

1 825. Dacă $\sqrt{a + bi} = \pm (\alpha + \beta i)$, cu cine este egal $\sqrt{-a - bi}$?

1 826. Să se arate că imaginile numerelor complexe $z_1 = -2 - 5i$, $z_2 = -1 - 2i$, $z_3 = i$, $z_4 = 1 + 4i$, $z_5 = 2 + 7i$ sînt coliniare. Se cere ecuația dreptei suport.

1 827. Imaginile numerelor complexe $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 4 + 4i$, $z_3 = 6 + 9i$, $z_4 = 8 + 16i$, $z_5 = 10 + 25i$ sînt situate pe o parabolă.

1 828. Se dă $z_1 = 1 + \sqrt[3]{3}i$, $z_2 = 1 - \sqrt[3]{3}i$; să se calculeze $|z_1|$, $\arg z_1$, $\arg z_2$, $\arg \frac{z_1}{z_2}$, $\arg \sqrt{\frac{z_1}{z_2}}$.

1 829. Din înmulțirea numerelor $a + bi$, $x + yi$ să se deducă relația

$$\arctg \frac{b}{a} + \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{ay + bx}{ax - by}$$

1 830. Să se afle modulele numerelor

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{a} + \left(\frac{a}{2} - 1\right)i, \quad z_2 = ac - bd + (ad + bc)i, \\ z_3 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{3}\right)(3 + 2i), \quad z_4 = \frac{a + bi}{a - bi}, \quad z_5 = \frac{5 + 12i}{8 - 6i}, \\ z_6 &= \frac{n + i\sqrt{an}}{\sqrt{an} - ai}. \end{aligned}$$

1 831. Să se scrie sub formă trigonometrică numerele

$$\begin{aligned} z_1 &= -1, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ z_5 &= -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad z_6 = -\sqrt{3} + i, \quad z_7 = 2 + 3i, \quad z_8 = (1 + i)^2, \\ z_9 &= \left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2, \quad z_{10} = \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^2. \end{aligned}$$

1 832 Să se scrie sub forma $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ următoarele numere complexe

$$\begin{aligned} z_1 &= -\sin \alpha + i \cos \alpha, \quad z_2 = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha, \\ z_3 &= 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad z_4 = 1 + i \operatorname{tg} \alpha, \\ z_5 &= \frac{1 - i \operatorname{tg} \alpha}{1 + i \operatorname{tg} \alpha}; \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

1 833. Să se scrie sub forma algebrică

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), \quad z_2 = \sqrt[4]{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right), \\ z_3 &= 4 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right), \quad z_4 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \end{aligned}$$

1 834. Să se calculeze $z_1 = (-\sqrt[3]{3} + i)^{16}$, $z_2 = \frac{\sqrt[3]{3} + i}{(\sqrt[3]{3} - i)^5}$,

$$z_3 = \frac{(1 + i\sqrt[3]{3})(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{2(1 + i)(\cos \alpha - i \sin \alpha)}, \quad z_4 = \frac{(1 + i\sqrt[3]{3})^{10}}{(-1 - i)^{11}},$$

$$z_5 = \frac{(1 + i)^7 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right)^{13}}{(1 - i)^{10}}$$

$$z_6 = \sqrt[4]{i}, \quad z_7 = \sqrt[3]{-i}, \quad z_8 = \sqrt[4]{1 + i\sqrt[3]{3}}, \quad z_9 = \sqrt[4]{\frac{1 + i}{1 - i}},$$

$$z_{10} = \sqrt[5]{1 + i}, \quad z_{11} = \sqrt[5]{5 + 3i}, \quad z_{12} = \sqrt[6]{\frac{1 - i}{1 + i\sqrt[3]{3}}}.$$

1 835. Să se calculeze $E = (1 + i)^n + (1 - i)^n$, n fiind un număr natural.

1 836. Să se rezolve ecuațiile

$$1^\circ x^3 + i = 0; \quad 2^\circ x^4 + 1 = 0; \quad 3^\circ x^5 = 2 + 3i;$$

$$4^\circ |x| - x = 1 + 2i; \quad 5^\circ |x| + x = 2 + i;$$

$$6^\circ x^4 + 4(1 - i)x^2 + 3 - 4i = 0;$$

$$7^\circ x^8 + 2x^4 + 4 = 0.$$

1 837. Se dă $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 5 - 12i$, $z_3 = -6 - 8i$. Să se arate că

$$|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1| + |z_2| + |z_3|.$$

1 838. Să se arate că:

$$1^\circ \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{\sin \alpha - i \cos \alpha} = \sin 2\alpha + i \cos 2\alpha; \quad 2^\circ \frac{1 + i \operatorname{tg} n\alpha}{1 - i \operatorname{tg} n\alpha} = \left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha} \right)^n.$$

1 839. Fie $z_1 = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$,

$$z_2 = r[\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]$$

$$z_3 = r[\cos(\alpha + 2\beta) + i \sin(\alpha + 2\beta)].$$

Să se găsească condiția ca $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

1 840. Se dau cantitățile:

$$z_1 = r_1[\cos(\alpha_2 - \alpha_3) + i \sin(\alpha_2 - \alpha_3)],$$

$$z_2 = r_2[\cos(\alpha_3 - \alpha_1) + i \sin(\alpha_3 - \alpha_1)],$$

$$z_3 = r_3[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)].$$

Să se calculeze produsul $z_1 z_2 z_3$.

1 841. Dacă x este real, în ce caz produsul $(x + \alpha_1 i)(x + \alpha_2 i) \dots (x + \alpha_n i)$ este real. În ce caz este de forma ai , a fiind real.

* * *

Să se rezolve ecuațiile

1 842. $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^4 = \frac{1+ia}{1-ia}$. 1 843. $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = a + bi$. Se cer condițiile de posibilitate (x real).

1 844. Să se afle arcul x care satisface ecuația

$$(\cos x + i \sin x)(\cos 2x + i \sin 2x) \dots (\cos nx + i \sin nx) = 1.$$

1 845. Să se demonstreze că

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2[|z_1|^2 + |z_2|^2]; \\ 2^\circ \quad & |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \end{aligned}$$

1 846. Dacă $z_1, z_2, \dots, z_n$ sînt numere complexe de același modul, atunci expresia

$$E = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \dots (z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \dots z_{n-1} z_n}$$

este un număr real.

1 847. Să se determine unghiul α pentru care expresia

$$E = (\cos \alpha - i \sin \alpha)(\cos 5\alpha + i \sin 5\alpha)$$

are o valoare reală.

1 848. Să se determine valorile reale sau imaginare ale lui z pentru care expresia $(1 - i)z^2 = 2iz + 1 + i$ este reală și în acest caz să se afle semnul ei.

1 849. Se pune $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$. Să se arate că $x^m + \frac{1}{x^m} = 2 \cos m\alpha$ și $x^m - \frac{1}{x^m} = \pm 2i \sin \alpha$ și mai general, dacă $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$ și $y + \frac{1}{y} = 2 \cos \beta$, atunci $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2 \cos (m\alpha + n\beta)$ și $x^m y^n - \frac{1}{x^m y^n} = \pm 2i \sin (m\alpha + n\beta)$

1 850. Să se arate că dacă a este un număr complex de modul egal cu unitatea, atunci ecuația $(1 + ix)^m - a(1 - ix)^m = 0$ are toate rădăcinile reale și distincte.

1 851. Să se dea o metodă de rezolvare a ecuațiilor de forma

$$[P(x)]^n \pm [Q(x)]^n = 0,$$

în care $P(x)$ și $Q(x)$ sînt funcții de x . Să se aplice la următoarele ecuații

$$1^\circ (x+1)^n - (x-1)^n = 0; \quad 2^\circ (x+i)^n + (x-i)^n = 0;$$

$$3^\circ (x+i)^n - (x-i)^n = 0; \quad 4^\circ 2x^n - (x+a)^n = 0;$$

$$5^\circ (1 + \sqrt{1-x^2})^n + (1 - \sqrt{1-x^2})^n = 0; \quad 6^\circ \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{ix}{n}\right)^n = 0;$$

$$7^\circ \left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}; \quad 8^\circ (1+m\sqrt{x})^n + (1-m\sqrt{x})^n = 0, \quad m \text{ real};$$

$$9^\circ (x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n = 0.$$

Să se tragă concluzii asupra naturii rădăcinilor ecuațiilor.

* * *

1 852. Să se rezolve ecuația

$$(1+ai)^m (1-xi)^n = (1-ai)^m (1+xi)^n.$$

1 853. Să se determine numărul de valori distincte ce poate lua expresia

$$E = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^p : \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^q,$$

p și q fiind două numere întregi.

1 854. Să se demonstreze identitățile

$$1^\circ \cos x + \cos(x+h) + \dots + \cos[x+(n-1)h] =$$

$$= \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \cos \left[x + \frac{(n-1)h}{2} \right];$$

$$2^\circ \sin x + \sin(x+h) + \dots + \sin[x+(n-1)h] =$$

$$= \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \sin \left[x + \frac{(n-1)h}{2} \right].$$

1 855. Să se arate că

$$1^\circ \cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{2 \sin x};$$

$$2^\circ \sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{2 \sin x}.$$

1 856. Să se calculeze sumele

$$\begin{aligned}s_1 &= 1 + r \cos a + r^2 \cos 2a + \dots + r^n \cos na, \\s_2 &= r \sin a + r^2 \sin 2a + \dots + r^n \sin na, \\s_3 &= \sin a + r \sin(a+h) + \dots + r^n \sin(a+nh).\end{aligned}$$

1 857. Să se calculeze sumele

$$\begin{aligned}s_1 &= 1 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + \dots + C_n^n \cos nx, \\s_2 &= C_n^1 \sin x + C_n^2 \sin 2x + \dots + C_n^n \sin nx,\end{aligned}$$

dând rezultatele prin expresii calculabile prin logaritmi.

1 858. Să se rezolve ecuația $x^{2n} - 2x^n \cos n\alpha + 1 = 0$. Să se descompună primul membru într-un produs de factori reali.

1 859. Numărul complex $a + bi$ se reprezintă prin punctul de coordonate carteziane (a, b) . Să se reprezinte $\sqrt[n]{i}$ și $\sqrt[n]{-i}$.

1 860. Să se afle punctele planului pentru care avem

$$\begin{aligned}1^\circ |z| &= 2; \quad 2^\circ 1 < |z| < 2; \quad 3^\circ |z - 3i| \leq 2; \quad 4^\circ |z - 2| < 4; \\5^\circ \arg z &= \frac{\pi}{3}; \quad 6^\circ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2}; \quad 7^\circ \arg z > \frac{\pi}{6}, |z| < 1 \\&\text{și } \arg z < \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

1 861. Parametrul t variază de la $-\infty$ la $+\infty$. Să se figureze geometric locul punctului $(a + a_1 i)t + (b + b_1 i)$.

1 862. Ce descriu imaginile numerelor complexe

$$\begin{aligned}1^\circ z_1 &= 1 + t + (2t - 1)i, \quad z_2 = 2 + t + (2 + 3t)i, \\z_3 &= \frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} i \text{ cînd } t \text{ variază de la } -\infty \text{ la } +\infty.\end{aligned}$$

Aceași problemă pentru numerele imaginar conjugate lor. Să se interpreteze rezultatul.

1 863. Să se reprezinte locul geometric al imaginii numărului complex $\frac{k+i}{k-i}$ cînd k variază.

1 864. Să se afle locul punctului M , imaginea geometrică a numărului complex z , cu condiția ca imaginile numerelor i , z și iz să fie coliniare.

1 865. Ce curbă descrie $\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, $\bar{z}$ fiind conjugatul lui $z = x + yi$, iar a o constantă reală.

1 866. Să se găsească condiția pentru ca rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$ să aibă același modul. Să se verifice condiția găsită: 1° cind p și q sînt reali; 2° pentru ecuația $x^2 - 2ix - 2 = 0$. Să se deducă condițiile ca rădăcinile ecuației date să aibă modulul 1.

1 867. Ce descrie imaginea geometrică a numărului complex $z = x + yi$ pentru a avea 1° $z^2 + 1 = 1$; 2° $\frac{z-i}{z+i} = a$, a fiind o constantă reală pozitivă.

1 868. Ce curbă va descrie imaginea numărului complex $z = x + yi$, dacă inversul său are partea reală constantă.

1 869. În ce domeniu al planului complex trebuie să se afle punctul $M(x, y)$ pentru ca modulul numărului complex $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}i$ să fie subunitar (a și b fiind constante reale).

1 870. Se cere locul punctului $M(z)$ așa fel ca

$$1^\circ z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 7;$$

$$2^\circ z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i.$$

1 871. Să se determine locul punctului M de afix z așa fel ca produsul $(z-1)(z-2)$ să fie pur imaginar.

1 872. Ce descrie imaginea citului $\frac{z}{\bar{z}}$ unde $z = x + yi$ și $\bar{z} = x - yi$, cind x și y variază.

1 873. Se cere locul imaginii numărului complex $z = x + yi$ dat de relația $z^2 = t(1 - i) + 1$, t fiind un parametru variabil real.

1 874. Să se găsească locul descris de imaginea numărului complex $z = x + yi$ care satisface relația $az^3 + bz^2 + cz = a\bar{z}^3 + b\bar{z}^2 + c\bar{z}$, în care $\bar{z} = x - yi$, iar a, b și c constante reale.

1 875. Se consideră numărul complex $z = \frac{\alpha + \beta\lambda + i(\alpha' + \beta'\lambda)}{\gamma + \delta\lambda + i(\gamma' + \delta'\lambda)}$, în care λ este un parametru variabil real, iar $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \delta, \delta'$, constante reale. Să se arate că z descrie un cerc (teorema lui Laguerre).

1 876. Se dă ecuația $x^4 + 2(ax + b\beta)x^2 + (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) = 0$, în care a, b, α, β sînt cantități reale. 1° Să se arate că oricare ar fi a, b, α, β , punctele reprezentative formează un dreptunghi. 2° Să se calculeze efectiv rădăcinile și să se reprezinte grafic în cazul particular $a = \cos \varphi, b = \sin \varphi, \alpha = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \beta = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$. 3° Se consideră punctele

$M(a + bi)$, $M'(\alpha + \beta i)$; să se găsească relația de condiție dintre a , b , α , β așa fel ca dreptunghiul de la 1° să fie pătrat.

1 877. Dacă un punct M de afix $z = x + yi$ descrie un cerc cu centrul în origine, de rază 1, atunci punctul M_1 de afix $z_1 = \frac{az + b}{z - c}$ descrie și el un cerc, afară de cazul cînd $c = 1$, cînd descrie o dreaptă.

1 878. Să se demonstreze cu ajutorul numerelor complexe că, dacă z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor A, B și C ale unui triunghi echilateral, iar M de afix z este un punct oarecare din plan, atunci cu distanțele MA, MB și MC se poate construi un triunghi (teorema lui D. Pompeiu).

1 879. Să se arate că două triunghiuri ale căror vîrfuri au afixele Z_1, Z_2, Z_3 , respectiv z_1, z_2, z_3 sînt asemenea, dacă $\frac{Z_2 - Z_1}{Z_3 - Z_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$. Aplicație : $Z_1 = -2, Z_2 = -1 + 3i, Z_3 = 2i, z_1 = -i, z_2 = 2 - 3i, z_3 = \frac{1}{5}(4 - 17i)$.

1 880. Un triunghi echilateral are două vîrfuri în punctele de afixe $z_0 = 1$ și $z_1 = 2 + i$. Să se afle al treilea vîrf.

1 881. Trei vîrfuri succesive ale unui paralelogram se află în punctele Z_1, Z_2, Z_3 . Să se afle poziția celui de-al patrulea vîrf.

1 882. Dacă $\operatorname{tg} a = \pm i$, atunci avem de asemenea $\operatorname{tg}(a+b) = \pm i$ oricare ar fi valoarea reală sau imaginară a lui b .

ANALIZA COMBINATORIE

1 883. În câte moduri s-ar putea așeza cinci studenți într-o bancă stînd câte trei.

1 884. Cîte numere de 4 cifre se pot forma cu cifrele 0,1,2,3,4,5,6.

1 885. În jurul unei mese rotunde se așază 6 persoane, 3 bărbați și 3 femei. În câte moduri se pot așeza astfel încît să nu fie alături doi bărbați sau două femei.

1 886. Avînd desenate 5 puncte astfel încît trei puncte să nu fie în linie dreaptă, cîte triunghiuri putem forma cu aceste puncte? Dar dacă avem n puncte dintre care m și numai m sînt coliniare?

1 887. Să se afle numărul diagonalelor ce se pot duce într-un poligon convex cu n laturi. Să se afle numărul punctelor de intersecție situate în interiorul poligonului.

1 888. Într-un plan sînt date n puncte astfel încît să nu fie trei în linie dreaptă. Unind aceste puncte două cîte două, cîte puncte de intersecție se obțin?

1 889. În combinațiile de n obiecte luate câte k

1° cîte conțin p obiecte date;

2° cîte nu conțin nici unul din q obiecte date;

3° cîte conțin un obiect dat aparținînd la p obiecte date;

4° cîte conțin un obiect dat, dar nu conțin altul tot dat;

5° cîte conțin cel puțin un obiect dat din p obiecte date.

1 890. Din C_n^k combinații, cîte conțin r litere date luate din p litere date, dar nu conțin alte q litere date?

1 891. În aranjamentele de n litere luate câte k : 1° cîte încep cu o literă dată; 2° cîte conțin o literă dată; 3° cîte încep cu două litere date; 4° cîte conțin două litere date; 5° cîte încep cu p litere date.

1 892. Să se afle numărul patrulaterelor în care se descompune un poligon cu n laturi.

1 893. Cîte puncte de intersecție rezultă din întretăierea a n drepte din același plan, dintre care p trec prin același punct și q sînt paralele.

1 894. Avem $A_n^p = mA_n^{p-2}$; să se afle n . Pentru ce valori ale lui m problema este posibilă.

* * *

Să se verifice egalitățile

$$1\ 895. C_k^s C_{i+s}^{k-1} - C_{i+s}^{s-1} C_i^{k-s} = C_{i+s+1}^s C_i^{k-s-1}$$

$$1\ 896. C_m^n = C_{m-2}^{n-2} + 2C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^n$$

$$1\ 897. C_n^p C_{2(n-p)}^n = 2C_{n-1}^p C_{2(n-p)-1}^{n-1} + 2C_{n-1}^p C_{2(n-p)-1}^{n-2}$$

$$1\ 898. (C_m^n)^2 = \frac{m+n}{m-n} (C_{m-1}^n)^2 + (C_{m-1}^{n-1})^2$$

$$1\ 899. mnC_{m-1}^n + (m-n+1) C_{m-1}^{n-1} = n(n+2)C_m^n$$

$$1\ 900. (m+1)^2 C_m^n C_{m+1}^{n+1} - (n+1)(m-n)(C_{m+1}^{n+1})^2 = 0, (n < m).$$

$$1\ 901. (m-n) C_{m+1}^{n+1} - (n+1) C_m^n = (m-2n+1) C_{m+1}^{n+1}.$$

1 902. Se dă numărul 34 965. Să se afle: 1° cîte numere putem forma permutînd cifrele numărului dat; 2° care este suma acestor numere; 3° aranjînd în ordinea crescătoare acele numere, al cîtelea în șir este numărul dat?

1 903. Cîte numere de trei cifre se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5?

1 904. Avem cinci cifre 1, trei cifre 2, patru cifre 3. Cîte numere de douăsprezece cifre putem forma cu ele?

1 905. Cîți termeni conține un polinom omogen de gradul n cu m variabile?

1 906. Cîți termeni conține un polinom neomogen de gradul n cu m variabile?

* * *

Să se verifice următoarele egalități, în care K are semnificația de combinații cu repetiție

$$1\ 907. 1^\circ K_m^p = K_{p+1}^{m-1}; 2^\circ K_m^p = K_1^{p-1} + K_2^{p-1} + \dots + K_m^{p-1}$$

1 908. Avem n cărți diferite, fiecare în p exemplare; în cîte moduri se poate face o alegere a cărților din cele date?

1 909. Se dau $p + q + r$ obiecte; în cîte moduri se pot împărți aceste obiecte în trei grupe astfel ca prima grupă să conțină p obiecte, a doua q obiecte, iar a treia r obiecte?

1 910. Avem n obiecte identice; în câte moduri se pot împărți aceste obiecte la p persoane?

1 911. Să se arate că numerele

$$P = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}, \quad Q = \frac{(3n)!}{3! (n!)^3}, \quad R = \frac{(kn)!}{k! (n!)^k}$$

sînt întregi.

* * *

Pentru ce valori ale lui x avem

1 912. $C_x^4 : C_x^2 = 1$ **1913.** $C_x^3 = 2C_x^2$ **1914.** $A_x^y = x + y$

1 915. $A_x^6 - 24 x C_x^4 + A_x^4 = 0$ **1916.** $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$

1 917. $\frac{1}{P_{x-1}} - \frac{1}{P_x} = \frac{(x-1)^3}{P_{x+1}}$ **1918.** $C_{m-1}^5 C_{m-2}^7 = x C_{m-1}^2 C_{m-2}^4 C_{m-3}^6$

1 919. $x! + 1 = (x+1)^2$, x numărul natural.

1 920. Să se determine n în funcție de p , astfel ca

$$3C_n^p + 2C_n^{p+1} = C_n^{p+2}$$

1 921. Să se determine a și b așa fel ca să existe

$$x(x^2 + axy + by^2)^2 + y(bx^2 + axy + y^2)^2 \equiv (x+y)^5.$$

* * *

1 922. Să se verifice că

$$(x+a)^5 - 5a(x+a)^4 + 10a^2(x+a)^3 - 10a^3(x+a)^2 + 5a^4(x+a) - a^5 = x^5.$$

1 923. Se cere coeficientul lui x^{10} din dezvoltarea

$$(x^2 + 2)^8 - (x^2 - 2)^8.$$

1 924. Se cere al nouălea termen din dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{12}$.

1 925. Se cere coeficientul lui x^m din dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{2^n}$.

1 926. Se cere termenul care nu conține pe x din dezvoltarea

$$\left(3x - \frac{2}{x}\right)^{10}.$$

1 927. Să se calculeze termenul de gradul zero în raport cu x, y, z în dezvoltarea

$$\left(\frac{a}{x^2 y^3 z^4} - b x y z^5\right)^{112}.$$

1 928. Să se calculeze m așa fel ca al zecelea termen al dezvoltării $(3 + m)^m$ să fie cel mai mare.

1 929. Se cere coeficientul lui x^k din dezvoltarea $\left(x^4 + \frac{1}{x^5}\right)^{3n}$.

1 930. Se dezvoltă $(x + y)^n$ după binomul lui Newton și termenul al doilea este egal cu 240, al treilea cu 720 și al patrulea cu 1080. Să se găsească x , y și n .

1 931. Să se ordoneze polinomul $2x^4 - 7x^3 + x - 1$ după puterile lui $x + 3$.

1 932. Să se calculeze coeficientul lui x^6 din dezvoltarea

$$(1 - x + 2x^2)^5.$$

1 933. Se cere coeficientul lui x^4 din dezvoltarea $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$.

1 934. Se cere coeficientul lui x^{14} din dezvoltarea $(x^4 - 3x + 1)^8$.

1 935. Se cere coeficientul lui x^6 din dezvoltarea $(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3)^4$.

1 936. Se cere coeficientul lui x^5 din dezvoltarea

$$(1 + x + x^2 - x^3)(1 - x)^9.$$

1 937. Se cere coeficientul lui x^{50} din dezvoltările

$$(1 + x)^{1000} + x(1 + x)^{999} + x^2(1 + x)^{998} + \dots + x^{1000}.$$

1 938. Se cere coeficientul lui x^p din dezvoltarea

$$[(p - 2)x^2 + nx - p](x + 1)^p.$$

1 939. Să se arate că în dezvoltarea $[(n - p + 1)x - p](x + 1)^p$ lipsește termenul în x^p .

1 940. Să se calculeze coeficienții lui x^{n-2} și x^{n-3} din produsul

$$(x + 1)(x + 2) \dots (x + n).$$

1 941. Se cere coeficientul lui x^{n-2} din polinomul

$$(x + a)(x + a^2) \dots (x + a^n).$$

1 942. Se cer coeficienții consecutivi din dezvoltările :

$$1^\circ (1 + x + x^2 + \dots)^2; \quad 2^\circ (1 + 2x + 3x^2 + \dots)^2.$$

1 943. Să se determine polinomul $P(x)$ de gradul al șaselea așa fel ca să avem

$$P(x + 1) - P(x) \equiv (2x + 1)^5.$$

1 944. Să se găsească trei coeficienți binomiali consecutivi care să fie în progresie aritmetică.

1 945. Să se cerceteze dacă trei coeficienți binomiali consecutivi pot fi în proporție armonică, adică să avem

$$\frac{2}{C_n^x} = \frac{1}{C_n^{x-1}} + \frac{1}{C_n^{x+1}}.$$

1 946. Dacă c_1, c_2, c_3, c_4 sînt patru coeficienți consecutivi din dezvoltarea lui $(x+1)^n$, avem

$$\frac{c_1}{c_1 + c_2} + \frac{c_3}{c_3 + c_4} = \frac{2c_2}{c_2 + c_3}.$$

1 947. Să se arate că numerele

$$C_{n^2-2}^{C_n^2-2}, \quad C_{n^2-2}^{C_n^2-1}, \quad C_{n^2-2}^{C_n^2}$$

sînt în progresie aritmetică.

1 948. Să se arate că dacă numerele $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ sînt în progresie aritmetică, avem

$$\begin{aligned} a_1 - 2a_2 + a_3 &= 0, \quad a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4 = 0, \\ a_1 - 4a_2 + 6a_3 - 4a_4 + a_5 &= 0 \text{ și dacă } n \geq 2, \\ a_1 - C_n^1 a_2 + C_n^2 a_3 - \dots + (-1)^p C_n^p a_{p+1} + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a_n + (-1)^n C_n^n a_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

1 949. Pentru ce valori ale numerelor m și n avem

$$C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^m : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3.$$

1 950. Să se arate că

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} &= 2^n - 2; \\ 2^\circ \quad 2^n - C_n^1 \cdot 2^{n-1} + C_n^2 \cdot 2^{n-2} - \dots + (-1)^n C_n^n &= 1. \end{aligned}$$

1 951. Avem identitățile

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad 1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots &= C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}; \\ 2^\circ \quad C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} &= 2^{2n-2} \quad (n \text{ par}); \\ 3^\circ \quad 1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n-1} &= 2^{2n-2} \quad (n \text{ impar}); \end{aligned}$$

$$4^{\circ} C_n^0 + 2C_n^1 + C_n^2 + \dots + (n+1) C_n^n = (n+2) 2^{n-1};$$

$$5^{\circ} C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} n C_n^n = 0;$$

$$6^{\circ} \frac{1}{2} C_n^1 - \frac{1}{3} C_n^2 + \frac{1}{4} C_n^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} C_n^n = \frac{n}{n+1}.$$

1 952. Să se calculeze sumele

$$1^{\circ} s_1 = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+\dots+n);$$

$$2^{\circ} s_2 = 1 + 2(1+2) + 3(1+2+3) + \dots + n(1+2+\dots+n);$$

$$3^{\circ} s = a_1 + a_2(a_1 + a_2) + \dots + a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

1 953. Să se arate că

$$1^{\circ} 1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + \dots + (n-1)! (n-1) = n!$$

$$2^{\circ} k! \cdot 1 + k! \cdot k + (k+1)! (k+1) + \dots + \\ + (k+n-1)! (k+n-1) = (k+n)!$$

1 954. Să se calculeze suma cuburilor primelor n numere impare.

1 955. Să se arate că

$$1^{\circ} \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3;$$

$$2^{\circ} \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n n = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(n+3).$$

1 956. Să se simplifice fracțiile

$$1^{\circ} \frac{1+2+\dots+n}{1^2+2^2+\dots+n^2}; \quad 2^{\circ} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{1^4+2^4+\dots+n^4}.$$

* * *

Să se calculeze sumele

$$\mathbf{1\ 957.} \quad s = 1^3 + 5^3 + 9^3 + \dots + (4n-3)^3$$

$$\mathbf{1\ 958.} \quad s = 1 \cdot 1,5 \cdot 2 + \dots + n \left(n + \frac{1}{2} \right) (n+1)$$

$$\mathbf{1\ 959.} \quad s = 1 \cdot 2 \dots p + 2 \cdot 3 \dots p(p+1) + \dots + n(n+1) \dots (n+p-1)$$

1 960. Să se stabilească identitatea

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x(x-1) + \dots + C_n^n x(x-1)^{n-1}.$$

1 961. Folosind binomul lui Newton, să se stabilească egalitățile

$$1^{\circ} C_{n+p}^q = C_p^0 C_n^q + C_p^1 C_n^{q-1} + C_p^2 C_n^{q-2} + \dots + C_p^q C_n^0;$$

$$2^{\circ} C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2.$$

1 962. Să se calculeze sumele

$$s_1 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots,$$

$$s_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$$

1 963. Să se arate că

$$kC_n^0 + \frac{k^2 C_n^1}{2} + \frac{k^3 C_n^2}{3} + \dots + \frac{k^{n+1} C_n^n}{n+1} = \frac{(k+1)^{n+1} - 1}{n+1}.$$

SOLUȚII,
INDICAȚII
ȘI
RĂSPUNSURI

ÎMPĂRȚIREA POLINOAMELOR

1. $a^2 - 5ab + 6b^2$. 2. $3a - 2x$. 3. $a^6 + a^5 - a^3 + a + 1$. 4. $a^5b^5 + 2a^4b^4 + 4a^3b^3 + 8a^2b^2 + 16ab + 32$. 5. $P(1) = 1$. 6. $P(-2) = 255$. 7. $-2\frac{7}{16}$. 8. $-20\frac{15}{8}$. 9. Metoda I: $P(-2) = 0$; $m = -1$; citul este $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4$. Metoda II-a: împărțind, obținem citul $x^4 - 2x^3 + (m+4)x^2 - (2m+5)x + 4m+8$ și restul $-8m-8$; egalînd restul cu zero, $m = -1$. Metoda III-a: identificăm polinomul dat cu $(x+2)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c)$; din egalarea coeficienților obținem un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute. 10. $P(3) = 0$; $m_1 = 5$, $m_2 = 1$. 11. $P(1) = -n^3 + 4n^2 - 3n = 0$; $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 3$. 12. $P(-1) = 6$, $P(1) = 2$, adică $-a - b + 9 = 6$, $a - b - 1 = 2$; $a = 3$, $b = 0$. 13. $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$; $a = -31$, $b = 72$, $c = -42$. 14. $P(-\frac{3}{2}) = 0$, $m = 6$. 15. $P(1) = 0$, $-4\sin^2a + 2\cos a + 2 = 0$; cu $\sin^2a = 1 - \cos^2a$ avem $2\cos^2a + \cos a - 1 = 0$; $\cos a = -1$, $\cos a = \frac{1}{2}$, deci $a_1 = (2n+1)\pi$, $a_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. 16. Înlocuim a prin $-(b+c)$, rezultă $m = 3$; avem $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$; dacă $a+b+c = 0$, atunci $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. 17. Rezultă¹: $P(x) = (x-a)(x-b)Q(x) + r(x)$, restul putînd fi cel mult de gradul I, adică $r(x) = Ax + B$. Avem $P(a) = Aa + B$, $P(b) = Ab + B$ sistem care dă

$$A = \frac{P(a) - P(b)}{a - b}, \quad B = \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}; \quad b \neq a.$$

¹ Extinderi: Tr. Lalescu, R.M.T. (*Revista Matematică din Timișoara*) VI, p. 4 și G. M. (*Gazeta Matematică*) XXVIII, p. 105; P. Sergescu, G. M. XIX, p. 47; V. Alaci, R.M.T. V., p. 115 și 163; Th. Anghelută, G. M. XXVIII, p. 201 și XLV, p. 459; G. G. Constantinescu, *Revista Pitagora*, vol. I (1936), nr. 8-9.

În cazul a trei factori se ia $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)Q(x) + r(x)$, unde $r(x) = Ax^2 + Bx + C$. Avem $P(a) = r(a)$ etc.;

$$r(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}P(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}P(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}P(c).$$

18. Ex. precedent. Fie $r(x) = ax^2 + bx + c$; din identitatea împărțirii rezultă că $r(1) = a + b + c = 15$, $r(-1) = a - b + c = 7$, $r(-4) = 16$ $a - 4b + c = -80$, din care $a = -5$, $b = 4$, $c = 16$, deci $r(x) = -5x^2 + 4x + 16$.

19. $P(x) = (x-a)(x^2 - 3x + 4) + r_1 = (x-b)(x^2 - 4x + 2) + r_2$; prin identificare și cu $P(0) = 1$, rezultă $a + 3 = b + 4$, $3a + 4 = 4b + 2$, $-4a + r_1 = 1$, $-2b + r_2 = 1$, din care $a = 6$, $b = 5$, $P(x) = x^3 - 9x^2 + 22x + 1$, $r_1 = 25$, $r_2 = 11$.

20. Resturile împărțirii lui $P(x)$ prin $x-a$ și $x-b$ sînt respectiv $P(a)$ și $P(b)$; rezultă că $P(x) = (x-a)C_1(x) + P(a)$, $P(x) = (x-b)C_2(x) + P(b)$, din care $P(b) = (b-a)C_1(b) + P(a)$, $P(a) = (a-b)C_2(a) + P(b)$, pe care le adunăm.

Aplicație: $C_1(b) = C_2(a) = (a^n - b^n) : (a-b) = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}$.

21. Restul împărțirii lui $P(x)$ prin $x-a$ este $P(a)$ etc. Avem $P(x) = (x-a)P_1(x) + P(a)$, $P(x) = (x-b)P_2(x) + P(b)$, $P(x) = (x-c)P_3(x) + P(c)$. Înlocuim în prima pe $x=b$, în a doua pe $x=c$ și în a treia pe $x=a$ și adunăm. Pentru a doua, punem în prima $x=c$ etc.

22—24. Înlocuind $x+y = -z$ etc., obținem zero.

25. Se aplică $u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2)$.

26. Pentru $x = y + z$ polinomul se anulează.

27. Polinomul se anulează pentru $x = y$ și $z = x + y$.

28. Dacă notăm $x + y + z + u = s$, $x + a = s_1$, $y + b = s_2$, $z + c = s_3$, $u + d = s_4$, $E(s) = s_1s_2s_3s_4 - (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)$ și $E(0) = 0$. Generalizare: Expresia $E(s) = s_1s_2 \dots s_n + (-1)^{n+1}(s-s_1)(s-s_2) \dots (s-s_n)$ se divide cu s , căci $E(0) = 0$. 29. Expresia dată devine nulă pentru $a + b + c + d = 0$, căci ridicînd la cub $a + b = -(c + d)$ avem $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -[c^3 + d^3 + 3cd(c + d)]$, din care $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ab(a + b) - 3cd(c + d) = 3ab(c + d) + 3cd(a + b) = \dots$ Citul este $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad - bc - bd - cd$. Mai general avem $\Sigma a^3 - 3 \Sigma abc = \Sigma a(\Sigma a^2 - \Sigma ab)$.

30. Notăm $a = xy$, $b = yz$, $c = zx$ și v. ex. 16.

31. $P(x) = (x^2 + x + 1) [x(x^2 + 1) - (x^2 + 1)] + (x^2 - x + 1) [x(x^2 + 1) + (x^2 + 1)] = (x^2 + x + 1) (x^2 + 1) (x - 1) + (x^2 - x + 1) (x + 1) (x^2 + 1) = 2x^3 (x^2 + 1)$. Generalizare :

$P(x) = (x^{2^n} + x^{2^n-1} + \dots + x + 1) (x^{2^{n+1}} - x^{2^n} + x^{2^n-1} - \dots + x - 1) + (x^{2^n} - x^{2^n-1} + \dots + x^2 - x + 1) (x^{2^{n+1}} + x^{2^n} + \dots + x + 1) = (x^{2^n} + x^{2^n-1} + \dots + x + 1) [x(x^{2^n} + x^{2^n-2} + \dots + 1) - (x^{2^n} + x^{2^n-2} + \dots + 1)] + (x^{2^n} - x^{2^n-1} + \dots + x^2 - x + 1) [x(x^{2^n} + x^{2^n-2} + \dots + 1) + (x^{2^n} + x^{2^n-2} + \dots + 1)] = (x - 1) (x^{2^n} + x^{2^n-1} + \dots + x + 1) (x^{2^n} + x^{2^n-2} + \dots + 1) + (x + 1) (x^{2^n} - x^{2^n-1} + \dots + x^2 - x + 1) (x^{2^n} + x^{2^n-2} + \dots + 1) = (x^{2^{n+1}} - 1) (x^{2^n} + x^{2^n-2} + \dots + 1) + (x^{2^{n+1}} + 1) (x^{2^n} + x^{2^n-2} + \dots + x^2 + 1) = 2x^{2^{n+1}} (x^{2^n} + x^{2^n-2} + \dots + x^2 + 1)$.

32. $P(x) = 3(x + 1) [(x^2 + x + 1) + x] - x[(x^2 + x + 1) + 3(x + 1)] = (x^2 + x + 1) (2x + 3)$.

33. Metoda I: $2x^2 - x - 6 = 0$, $x = 2$ și $x = -\frac{3}{2}$; trebuie ca

$P(2) = 0$ și $P\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$, deci $2m + n + 4 = 0$, $-45 - \frac{3m}{2} + n = 0$,

din care $m = -14$, $n = 24$. Metoda II-a: împărțim, citul este $x^2 + 3x - 4$, iar restul $(m + 14)x + n - 24 \equiv 0$, $m + 14 = 0$, $n - 24 = 0$.

Metoda III-a: citul este un polinom de gradul II; rezultă $2x^4 + 5x^3 - 17x^2 + mx + n \equiv (2x^2 - x - 6)(ax^2 + bx + c)$. Din identificare avem sistemul $2 = 2a$, $5 = 2b - a$, $-17 = -6a - b + 2c$, $m = -6b - c$, $n = -6c$, din care $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$, $m = -14$, $n = 24$. **34.** $m = -19$, $n = -15$. **35.** $1^\circ m = 0$, $n = 1$; $2^\circ m = 0$, $n = -4$. **36.** $m = -4$, $n = 4$. **37.** $m = 7$, $n = 1$. **38.** $m = -1$, $n = 1$. **39.** $m = 4$; $n = -3$. **40.** Metoda I: împărțind, obținem citul $x^2 - mx + m^2 + m - n$ și restul $(-m^3 - m^2 + 2mn)x - n(m^2 + m - n - 1)$. Restul este

identic nul, dacă $-m^3 - m^2 + 2mn = 0$, $-n(m^2 + m - n - 1) = 0$; se deduc posibilitățile $1^\circ m = 0$, $n = 0$; $2^\circ m = 0$, $m^2 + m - n - 1 = 0$; $3^\circ n = 0$, $m^2 + m - 2n = 0$; $4^\circ m^2 + m - 2n = 0$, $m^2 + m - n - 1 = 0$ cu soluțiile: 1) $m = 0$, $n = 0$; 2) $m = 0$; $n = -1$; $m = 0$, $n = 0$; 3) $m = 0$, $n = 0$; $m = -1$, $n = 0$; 4) $m = 1$, $n = 1$; $m = -2$, $n = 1$; în total sînt 5 soluții distincte. Metoda II-a: fie citul $Ax^2 + Bx + C$; trebuie ca $x^4 + mx^2 + n \equiv (x^2 + mx + n)(Ax^2 + Bx + C) \equiv Ax^4 + (mA + B)x^3 + (nA^2 + mB + C)x^2 + (mC + nB)x + nC$, deci sistemul $A = 1$, $mA + B = 0$, $nA^2 + mB + C = m$, $mC + nB = 0$, $n = mB$, din care $A = 1$, $m + B = 0$, $n + mB + C = m$, $mC + nB = 0$, $n(1 - C) = 0$; din ultima ecuație $n = 0$, sau $C = 1$; $1^\circ n = 0$, $A = 1$ etc.; $2^\circ C = 1$ etc. Altă metodă v. ex. 41, soluția a III-a. **41.** Soluția I:

restul $(2ab - a^3 - am + n)x + b^3 - a^2b - bm \equiv 0$, deci $2ab - a^3 - am + n = 0$, $b^3 - a^2b - bm = 0$, deducem $1^\circ b = 0$, $n = a^3 + am$; $2^\circ m = b^2 - a^2$, $n = ab(b - 2)$. Cîtul este în cazul al doilea $x^2 - ax + b^2 - b$. **Soluția a II-a:** fie $x^2 + Ax + B$ cîtul împărțirii; avem $x^4 + mx^2 + nx + b^2(b - 1) \equiv (x^2 + ax + b)(x^2 + Ax + B)$, iar din egalarea coeficienților obținem $A + a = 0$, $b + aA + B = m$, $bA + aB = n$, $bB = b^2(b - 1)$, sistem din care deducem $A = -a$, $B = b(b - 1)$, $m = b^2 - a^2$, $n = ab(b - 2)$, evident și cazul $b = 0$. **Soluția a III-a:** fie x_1 și x_2 rădăcinile împărțitorului, deci $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = b$. Dacă împărțirea celor două polinoame se face exact, rădăcinile x_1 și x_2 anulează polinomul, adică $x_1^4 + mx_1^2 + nx_1 + b^2(b - 1) = 0$, $x_2^4 + mx_2^2 + nx_2 + b^2(b - 1) = 0$. Scăzînd și adunînd aceste două relații, deducem

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) + m(x_1 + x_2) + n = 0$$

$$x_1^4 + x_2^4 + m(x_1^2 + x_2^2) + n(x_1 + x_2) + 2b^2(b - 1) = 0.$$

Din relațiile dintre rădăcinile și coeficienții de mai sus avem $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2b$, $x_1^4 + x_2^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$, care înlocuite mai sus dau $-a(a^2 - 2b) - am + n = 0$, $a^4 - 4a^2b + m(a^2 - 2b) - na + 2b^3 = 0$, din care deducem $m = b^2 - a^2$, $n = ab(b - 2)$, $b \neq 0$ și $b = 0$. **42.** $m = -3$, $n = 1$. **43.** $P[Q(x)] = (x^2 + 3x + 2)^2 - 3(x^2 + 3x + 2) + 2 = [(x^2 + 3x + 1) + 1]^2 - 3(x^2 + 3x + 1) - 1 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x)$.

44. $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$; trebuie ca $P(1) = 0$, $P(-2) = 0$, $P(-4) = 0$, adică $m + n + p + 9 = 0$, $-8m + 4n - 2p + 24 = 0$, $-64m + 16n - 4p + 264 = 0$, din care $m = 4$, $n = -3$, $p = -10$. Alte metode v. ex. 33, 40 și 41. **45.** Se identifică cu $(x - 1)^3(mx + n)$, ($m = 1$); $a = -6$, $b = 8$, $c = -3$, $n = 3$. Alte metode v. ex. 33, 40 și 41. **46.** $m = -3$, $n = 1$, $p = 2$. **47.** Se pune $x = u^6$, $y = v^6$, $a = 0$, $b = -1$; cîtul este $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$. **48.** Expresia dată este $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = PQ$, unde $P = x^3 + ax^2 + bx - 1$, $Q = x^3 + cx^2 + dx + 1$; identificînd, se obține $P = x^3 + x - 1$, $Q = x^3 + x^2 + 1$. **49.** Împărțind $P(x)$ cu $x^3 + q$, obținem restul $mx^2 + (n - q)x + p + q^2$, iar cînd împărțim cu $x^3 - q$, găsim restul $mx^2 + (n + q)x + p + q^2$; identificînd aceste resturi respectiv cu $x^2 + 2x + 1$ și $x^2 - 2x + 1$, găsim $m = 1$, $n = 0$, $p = -3$, $q = -2$. **50—51.** $u^{2n+1} + v^{2n+1}$ se divide cu $u + v$. **52.** $P(x) = x^{4n+2}(x + 1) + x + 1 = (x + 1)[(x^2)^{2n+1} + 1]$ și $(x + 1)(x^2 + 1)$, dar $(x^2)^{2n+1} + 1$ se divide cu $x^2 + 1$, v. ex. 50. **53.** Avem $ax^2 - (a^2 + 1)xy + ay^2 = (x - ay)(ax - y)$; pentru $x = ay$ și $x = y/a$ polinomul $P(x, y)$ se anulează. Făcînd împărțirea și avînd în vedere identitatea

$$(a^{2n-2} - 1)(a^2 + 1) - a^2(a^{2m-4} - 1) = a^{2n} - 1,$$

se obține citul

$$a^{m-2}(a^2 - 1) x^{m-2} + a^{m-3}(a^4 - 1) x^{m-3} y + \dots + (a^{2m-2} - 1) y^{m-2}.$$

54. Fie $n = pq + r$, unde r este restul împărțirii lui n cu p . Citul este $x^{n-p} + a^p x^{n-2p} + \dots + a^{p(q-p)} x^{n-pq}$, iar restul $a^{n-r}(x^r - a^r)$. Împărțirea se face exact când n se divide cu p . **55.** Folosim identitatea $2 \sin(p-1)a \cos a - \sin(p-2)a = \sin pa$ și obținem citul $x^{p-2} \sin a + rx^{p-3} \sin 2a + \dots + r^{i-1} x^{p-i-1} \sin ia + \dots + r^{p-2} \sin(p-1)a$; pentru $p=3$ avem cazul particular dat.

56. Citul este $1 + x + x^{-1} - x^{-2}$.

57. Citul este $2 - x - x^2 + 4x^3$, iar restul $-8x^4 - 7x^5 + 21x^6 - 20x^7$.

58. Avem $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$. Rezultatul al doilea se poate deduce și din primul, schimbând x în $-x$. Se poate transforma și x în x^2 , de exemplu, avem

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}.$$

59. Citul $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1}$, restul $(n+1)x^n - nx^{n+1}$. Acest rezultat se poate deduce și dezvoltând prima identitate de la ex. 58. Citul împărțirii lui 1 prin $(1-x)^p$ are forma

$$1 + C_p^1 x + C_{p+1}^2 x^2 + C_{p+2}^3 x^3 + \dots$$

60. Citul: $1 + (a+b)x + (a^2 + b^2)x^2 + \dots + (a^n + b^n)x^n$, restul: $(a^{n+1} + b^{n+1})x^{n+1} - ab(a^n + b^n)x^{n+2}$.

61. Se utilizează repetat identitatea $2 \cos ma \cos a - \cos(m-1)a = \cos(m+1)a$. Se găsește

$$\frac{1 - x \cos a}{1 - 2x \cos a + x^2} = 1 + x \cos a + x^2 \cos 2a + \dots + x^p \cos pa + \\ + \frac{x^{p+1} \cos(p+1)a - x^{p+2} \cos pa}{1 - 2x \cos a + x^2}.$$

În această identitate facem $x = 1$ și apoi se are în vedere $1 - \cos a - 2 \sin^2 \frac{a}{2}$, $\cos(p+1)a - \cos pa = -2 \sin \frac{a}{2} \sin(2p+1) \frac{a}{2}$.

62. Citul este $\cos a + x \cos(a+b) + x^2 \cos(a+2b) + \dots + x^n \cos(a+nb)$.

63. Citul este $\sin \alpha + x \sin 2\alpha + x^2 \sin 3\alpha + \dots + x^{n-1} \sin n\alpha$ și restul: $x^n \sin(n+1)\alpha - x^{n-1} \sin n\alpha$. Identitatea trigonometrică se deduce din identitatea împărțirii, făcând $x = 1$ și $\alpha = b$. **64.** 1°, 2° Fie

$P(x, y)$ și $Q(x, y)$ două polinoame simetrice, deci $P(x, y) = P(y, x)$ și $Q(x, y) = Q(y, x)$. Dacă punem $P(x, y) + Q(x, y) \equiv S(x, y)$, atunci $P(y, x) + Q(y, x) = S(y, x) = P(x, y) + Q(x, y) = S(x, y)$; 3°. Fie $P(x, y) - Q(x, y) \equiv R(x, y)$, cum $P(x, y) = P(y, x)$, $Q(x, y) = Q(y, x)$, atunci $P(y, x) - Q(y, x) \equiv R(y, x) = R(x, y)$. 4° Fie $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = C(x, y)$.

Permutând x cu y , avem $\frac{P(y, x)}{Q(y, x)} = C(y, x)$; dar $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \equiv \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}$, deci $C(x, y) \equiv C(y, x)$; 5° Fie $P(x, y) = -P(y, x)$, $Q(x, y) = -Q(y, x)$ și punem $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \equiv C(x, y)$. Schimbând aici x cu y , $\frac{P(y, x)}{Q(y, x)} \equiv C(y, x)$ sau

$C(y, x) \equiv \frac{-P(x, y)}{-Q(x, y)} \equiv \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \equiv C(x, y)$, $C(x, y) \equiv C(y, x)$; 6°—9° Fie

$C(x, y)$ cîtuș dintre $P(x, y)$ și $x - y$; avem $P(x, y) = (x - y) \cdot C(x, y)$. Permutînd variabilele, $P(y, x) = (y - x) \cdot C(y, x)$, cum $P(x, y) \equiv P(y, x)$, rezultă că $C(x, y) \equiv -C(y, x)$ (polinom antisimetric). Punînd aici $x = y$, obținem $C(x, x) \equiv -C(x, x)$, $2C(x, x) \equiv 0$, deci $C(x, y)$ se divide cu $x - y$. Analog cazurile 7° și 9°.

65. Soluția I: se face împărțirea. Soluția a II-a: se înlocuiește x^2 cu -1 , în cazul al doilea $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$, trebuie ca $P(i) = 0$, deci $P(i) = a_0 - a_2 + a_4 - \dots + i(a_1 - a_3 + a_5 - \dots) = 0$, de unde $a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots = 0$, $a_1 - a_3 + a_5 - \dots = 0$.

66. Soluția I: pentru $a = b = c$ propoziția este evidentă. Fie α și β rădăcinile lui $Q(x)$, deci $\alpha^2 + \alpha + 1 = \beta^2 + \beta + 1 = 0$ și $\alpha^3 = \beta^3 = 1$.

Apoi $P(\alpha) = \alpha^{3a} + \alpha^{3b+1} + \alpha^{3c+2} = \alpha^{3a} + \alpha \cdot \alpha^{3b} + \alpha^2 \alpha^{3c} = (\alpha^3)^a + \alpha(\alpha^3)^b + \alpha^2(\alpha^3)^c = 1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, $P(\beta) = \beta^{3b} + \beta^{3b+1} + \beta^{3b+2} = 1 + \beta + \beta^2 = 0$. Soluția a II-a: să înmulțim $P(x)$ și $Q(x)$ cu $x - 1$; atunci $(x - 1)P(x) = x^{3a+1} + x^{3b+2} + x^{3c+3} - x^{3a} - x^{3b+1} - x^{3c+2}$, $(x - 1)Q(x) = x^3 - 1$. Vom arăta că $(x - 1)P(x)$ se divide cu $x^3 - 1$, căci $(x - 1)P(x) = x(x^3)^a + x^2(x^3)^b + x^3(x^3)^c - (x^3)^a - x(x^3)^b - x^2(x^3)^c$. 67—70. Vom scrie $(x + 1)^{2n}(x + 1) + x^{n+2} = [(x + 1)^2]^n(x + 1) + x^{n+2} = (x^2 + 2x + 1)^n(x + 1) + x^{n+2}$ și înlocuind $x^2 + x + 1 = 0$, avem $x^n(x + 1) + x^{n+2} = x^n(x^2 + x + 1)$.

71. Înlocuind $x^2 = x - 1$ în expresia dată,

$$\begin{aligned}(x^2)^{n+2} + x^{2n+1} &= x^{2n+4} + x^{2n+1} = x^{2n+1}(x^3 + 1) = \\ &= x^{2n+1}(x + 1)(x^2 - x + 1).\end{aligned}$$

Se obține citul dezvoltând calculele la deîmpărțit și ordonând rezultatul după puterile descrescătoare ale lui x și împărțind. Altfel, punem $x - 1 = y$ și atunci

$$(y^{n+2} + x^{2n+1}) : (y^2 + x) = y^n - xy^{n-2} + x^2y^{n-4} - \dots - x^3y^{n-6} + \dots - x^{2n-1}y^2 + x^{2n}.$$

72. Avem $x^2 - x + 1 = (x - 1)^2 + x$; înlocuim $(x - 1)^2$ cu $-x$ și avem

$$\begin{aligned} (x - 1)(-1)^n x^n + (-1)^{n+1} x^n x^2 &= \\ = (-1)^n x^n (x - 1 - x^2) &= -(-1)^n x^n (x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Citul ca mai sus.

73. Avem $(x + 1)^3 = x(x^2 + 3x + 3) + 1$, din care $(x + 1)^3 - 1 = x(x^2 + 3x + 3)$; putem înlocui $(x + 1)^3$ cu 1, obținem $(x + 1)^2 + x + 2 = x^2 + 3x + 3$.

74. Ca mai sus sau

$$\frac{(x + 1)^{2n}}{x + 1} + (-x - 2)^2 (x + 2) = \frac{(x^2 + 2x + 1)^n + (-x - 2)^n (x^2 + 3x + 2)}{x + 1},$$

înlocuind x^2 prin $-3(x + 1)$, obținem zero.

75. Pentru $x = 1$, expresia se anulează, citul este $x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - n$, care devine zero pentru $x = 1$; împărțind din nou cu $x - 1$, găsim

$$x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + \dots + (n - 2)x^2 + (n - 1)x + n.$$

76. Ca mai sus, citul este $nx^{n-1} + (n - 1)x^{n-2} + (n - 2)x^{n-3} + \dots + 2x + 1$.

78. Ca mai sus, citul este $(2n - 1)x^{2n-2} - (2n - 2)x^{2n-3} + \dots + 3x^2 - 2x - 1$.

81. Se face $x = 0$, $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$ și deîmpărțitul se anulează.

82. $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, astfel polinomul dat se scrie

$$\begin{aligned} \frac{(a^{n+1} - 1)^2 - (a - 1)^2 a^n}{(a - 1)^2} &= \frac{a^{n+2}(a^n - 1) - (a^n - 1)}{(a - 1)^2} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1} = \\ &= (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)(a^{n+1} + a^n + \dots + a + 1). \end{aligned}$$

83. $x^2 - 2x \cos \beta + 1 = 0$ pentru $x = \cos \beta \pm i \sin \beta$; se obțin valori care trebuie să anuleze deîmpărțitul. Utilizând formula lui Moivre, ajungem la o expresie de forma $A + Bi$ și facem $A = 0$, $B = 0$; obținem sistemul $a \cos 5\beta + b \cos 4\beta + \cos \beta \cos (\alpha + \beta) - \cos \alpha = 0$, $a \sin 5\beta + b \sin 4\beta + \sin \beta \cos (\alpha + \beta) = 0$, $a = -\cos (\alpha - 3\beta)$, $b = \cos (\alpha - 4\beta)$.

84. Avem $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$. Polinomul $P(x, y, z)$ se anulează pentru $y = -x$, deci se divide cu $x + y$ etc. Pentru $n = 2$, P și Q sînt polinoame omogene și simetrice de grade respectiv V și III, citul tot un polinom simetric și omogen de gradul II, deci de forma $a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + yz + zx)$. Valorile lui a și b se determină făcînd în identitatea împărțirii de exemplu o dată $x = y = z$ și apoi $x = 0, y = z$, obținîndu-se $3a + 3b = 10$, $2a + b = 5$; $a = b = 5/3$.

85. Dacă $x + y + z = 0$, atunci $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ (ex. 16), cum $z = -(x + y)$, deîmpărțitul devine $x^{2n+1} + y^{2n+1} - (x + y)^{2n+1}$, care se divide cu $xy(x + y)$, deoarece devine zero pentru $x = 0$, $y = 0$, și $y = -x$.

86. m impar, deci de forma $2n + 1$ (ex. prec.) 87. Expresia dată devine zero, pentru $a = b$, deci se divide cu $a - b$, analog cu $b - c$ și $c - a$. Pentru divizibilitatea cu factorul al 4-lea scriem expresia astfel

$$a(b - c)[(b - c)^{6^n} - (a - b)^{6^n}] + b(c - a)[(c - a)^{6^n} - (a - b)^{6^n}]$$

și

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = (a - b)^2 + (a - b)(b - c) + (b - c)^2,$$

de aici divizibilitatea cerută rezultă imediat. Cînd $n = 1$, citul este $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) - 18abc$.

88. Se folosește algoritmul lui Euclid; găsim c.m.m.d.c. $x + 4$ și c.m.m.m.c. $(x + 4)(x^2 - 4x + 14)(x + 52)$.

89. c.m.m.d.c. $x^2 - 3x + 2$; c.m.m.m.c. $(x^2 - 3x + 2)(4x^2 - 1)(x^2 + x + 1)$. 90. c.m.m.d.c. $x^2 + x - 2$ și c.m.m.m.c. $(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 3)(x - 3)$.

91. $x^2 + 1$ și $(x^2 + 1)(4x^2 + 1)(3x + 1)$.

92. $6x^3 - 19x^2 + 2x + 3$ și $(x - 2)(x - 5)(6x^3 - 19x^2 + 2x + 3)$.

93. $x^2 - 3x + 2$ și $x^9 - 5x^8 + 8x^7 - 4x^6 - x^3 + 5x^2 - 8x + 4$.

94. $x^3 - x - 1$ și $(x^3 - x - 1)(2x^2 - 3x - 3)(3x + 2)$.

95. $(x - 1)^2(x + 1)^2$ și $(x - 1)^3(x + 1)^3(x^2 + x + 1)(8x^3 + 7x^2 + 4x - 1)$.

96. $x^2 - 1$. 97. $x^2 + 1$. 98. $(x - 1)^2$. 99. $x^2 - 3x + 2$. 100. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. 101 - 102. Se aplică algoritmul lui Euclid, obținîndu-se un rest independent de x . 103. Se află c.m.m.d.c. al polinoamelor din partea întîi, găsiindu-se $2x^2 - 5x - 3$. Se împarte apoi fiecare polinom cu $2x^2 - 5x - 3$. Rădăcinile sînt respectiv $-\frac{1}{2}, 3, -1$ și $-\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$.

104. 1° Împărțind, restul este $(4p^2 + 3p - q)x + 2pq + 2q$. Dacă $4p^2 + 3p - q = 0$, $2pq + 2q = 0$, polinoamele se divid, divizorul este de gradul II; dacă $4p^2 + 3p - q = 0$, $2pq + 2q \neq 0$, polinoamele sînt prime între ele. Rămîne ca $4p^2 + 3p - q \neq 0$, se scoate x și expresia lui trebuie să anuleze polinomul de gradul II; condiția este $q^2 + 2(2 + 3p)q - 4p^3 - 3p^2 = 0$; 2° Rezolvînd în q , găsim $q = -(2 + 3p) \pm 2\sqrt{(p + 1)^3}$; q este rațional, dacă $\sqrt{(p + 1)^3}$ este rațional, prin urmare $p + 1$ să fie un pătrat. p va fi întreg, par și cel mai mic posibil, dacă $p + 1$ este cel mai mic pătrat impar posibil, rezultă 3^2 apoi $p = 9 - 1 = 8$, $q = -26 \pm 2 \cdot 27$, $q_1 = -80$, $q_2 = 28$. Pentru $q = -80$, rădăcina comună este $x = 4$; cînd $q = 28$, rădăcina comună este $x = -2$ etc.

105. Factorul comun este de forma $x^2 - mx + 1$. Se deduce $m = bc : (ab - a^2 + c^2)$. Condiția este $b^2c^2(a^2 - c^2) = (ab + a^2 - c^2)(ab - a^2 + c^2)$. Pentru aplicație se obține divizorul comun $x^2 - 3x + 1$. **106.** $P_2(x) = P_1(x)(x^2 + x - a) - R(x)$, $R(x) = x^3 - mx^2 - (m + a + 1)x + am + a - 1$, $P_1(x) = xR(x) + R_1(x)$, $R_1(x) = mx^3 + (m - a + 2)x^2 - (am + a - 2)x + a^2 - 2a - m$. Coeficienții lui R și R_1 trebuie să fie proporționali; se găsește $m^2 + m + 2 - a = 0$.

107. $x^d - a^d$, unde d este c.m.m.d.c. al numerelor n și p .

108. $(a - b)(b - c)(c - a)$. **109.** $P(x) = nxQ(x) + n^2x^2 - (n^2 + 1)x + 1$ și $n^2x^2 - (n^2 + 1)x + 1 = n^2(x - 1)(x - 1/n^2)$. Factorul $x - 1/n^2$ nu poate divide pe $Q(x)$ decît pentru $n = 1$, căci $Q(x)$ nu are rădăcini fracționare. Rămîne că c.m.m.d.c. este $x - 1$. **110.** $(x - 1)^2$.

DESCOMPUNEREA ÎN FACTORI. SIMPLIFICAREA FRACȚIILOR

111. $(a + b)^2 (a - b)$. **112.** $(a + b - 1) (a - b + 1)$.

113. $(a - b) (x - y)$. **114.** $(a - b) (a - c) (c - b)$.

115. $(px + y) (x + qy)$.

116. $(a - 1) (a + 1) (b - 1) (b + 1) (a^2 + 1) (b^2 + 1)$.

117. $(b - a) (abc - 1)$.

118. $(a - b)^2 + ab^2 + a - a^2b - b = (a - b)^2 - ab(a - b) + (a - b) =$
 $= (a + 1) (a - b) (1 - b)$.

119. $x^4 - x^3 - x + 1 = (x - 1)^2 (x^2 + x + 1)$.

120. $(a^2 + pb^2) (c^2 + pd^2)$. **121.** $(z + c) (bx - ay)$.

122. $(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 - xy + y^2) (x^2 + xy + y^2)$.

123. $(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (x^2 - \sqrt{2}xy + y^2) (x^2 + \sqrt{2}xy + y^2)$.

124. $(x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2) (x^4 - x^2y^2 + y^4) = (x^2 + y^2) [(x^2 + y^2)^2 -$
 $- 3x^2y^2] = (x^2 + y^2) (x^2 - \sqrt{3}xy + y^2) (x^2 + \sqrt{3}xy + y^2)$.

125. $(x^2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}xy + y^2) (x^2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}xy + y^2) (x^2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}xy +$
 $+ y^2) (x^2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}xy + y^2)$.

126. $(x - 1) (x + 1) (x^2 + 1) (x^8 + 1)$ etc.

127. $(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)$.

128. $(1 - ab) (a - bc) (1 - ca)$.

129. Aducem la forma $b^2(a^4 + 2a^2 + 1) + a^2(b^4 + 2b^2 + 1) \pm$
 $\pm 2ab(a^2 + 1)(b^2 + 1) = [b(a^2 + 1) \pm a(b^2 + 1)]^2 = (a \pm b)^2 (ab \pm 1)^2$,
 semnele se corespund.

130. Descompunem diferența pătratelor, grupăm termenii și scoatem din prima paranteză $x + 1$, în factor, pe $x - 1$ din a doua și obținem $(x + 1)(x - 1)(yz + z + y + 1)(yz - z - y + 1) = (x + 1)(x - 1)[y(z + 1) + (z + 1)][y(z - 1) - (z - 1)] = (x + 1)(x - 1)(y + 1)(y - 1)(z + 1)(z - 1)$.

131. $(x^2 - 2ay)^2 - (a^2 + y^2)^2 = (x^2 + y^2 - 2ay + a^2)(x + y + a)(x - y - a)$.

132. $(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2) + 1 - 4x^2y^2 = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + y^2 + 1 - 2xy)(x^2 + y^2 + 1 + 2xy)$.

133. Ex. prec., $(z - u^2 - v^2 - 2uv)(z - u^2 - v^2 + 2uv)$.

134. $2a(a^2b - b + ab^2 - a) - (a^2 + 1)(a^2b^2 - 1) = 2a(a + b)(ab - 1) - (a^2 + 1)(ab - 1)(ab + 1) = (ab - 1)(a^2 + ab - a^3b - 1) = (ab - 1)^2(1 - a)(1 + a)$. **135.** $ac(c - a)(3b - a - c)$.

136. $(a - b)^2(x - y)^2(a + b)^2(x + y)^2$.

137. $(z + u + v)(u + v - z)(z + u - v)(z + v - u)$.

138. $(x + y)^4 + x^4 + y^4 = (x + y)^4 + (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (x + y)^4 + [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = 2(x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 2x^2y^2 = 2[(x + y)^2 - xy]^2 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.

139. $x^2y(ab^2 + bc^2 + a^2c - ac^2 - a^2b - b^2c) - xy^2(ab^2 + bc^2 + a^2c - ac^2 - a^2b - b^2c) = xy(x - y)[c(a^2 - b^2) - ab(a - b) - c^2(a - b)] = xy(x - y)(a - b)(a - c)(c - b)$.

140. $(x + a)(x + ma)(x + na)$.

141. $(a^2 + b^2 + c^2)^2 - (ab + bc + ca)^2 = (\Sigma a^2 + \Sigma ab)(\Sigma a^2 - \Sigma ab)$.

142. Avem $a + b + ab(a + b) - (a^3 + b^3) - (a + b)(1 - a^2 + b^2)(1 + a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)^2(a + b + 1)(a + b - 1)$.

143. $(2a - b - c)(2b - c - a)(2c - a - b)$.

144. $-9(a - b)(b - c)(c - a)$. **145.** $(x^2 - y)(y^2 - z)(z^2 - x)$.

146. $[ab(c + d) + cd(a + b)]^2 - abcd[(a + b)^2 + 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2] = a^2b^2(c + d)^2 + c^2d^2(a + b)^2 - abcd(a + b)^2 - abcd(c + d)^2 = ab(c + d)^2(ab - cd) - cd(a + b)^2(ab - cd) = (ab - cd)(bc - ad)(ac - bd)$.

147. Se ordonează și rezolvă în raport cu x , apoi $\alpha(x - x_1)(x - x_2); [(a + 2)x + a - 1][(a - 1)x + a + 1]$.

148. $(x + a + b)(x + a - b)(x - a + b)(x - a - b)$.

$$149. [(a+1)^3 + 1] (a^3 + 3a^2 + 3a) - 3(a+1)^2(a^2 + 2a) = [(a+1)^3 + 1] [(a+1)^3 - 1] - 3(a+1)^2 [(a+1)^2 - 1] = [(a+1)^6 - 1 - 3(a+1)^4 + 3(a+1)^2] = [(a+1)^2 - 1]^3 = a^3(a+2)^3.$$

$$150. (a^3 + 1) (a^2 + 1) (a + 1).$$

$$151. -3(x^2 + y^2) (z^2 - x^2) (y^2 + z^2). \text{ Ex. } 16.$$

$$152. (x - y)^2(2x + y)^2(x + 2y)^2. \quad 153. x = ty; E = y^4 (t^4 - 7t^3 + 5t^2 + 31t - 30) = y^4(t - 1) (t - 3) (t - 5) (t + 2), \text{ se înlocuiește } t = \frac{x}{y} \text{ și } E = (x - y) (x - 3y) (x - 5y) (x + 2y).$$

$$154. \text{ Punem } x^2 + 4x + 8 = t, \text{ se rezolvă în } t \text{ și } (t - t_1) (t - t_2);$$

$$E = (x + 2) (x + 4) (x^2 + 5x + 8).$$

$$155. x^2 + x + 1 = y; y_1 = 3, y_2 = 4, E = (x - 1) (x + 2) (x^2 + x + 5)$$

$$156. E = (x^2 + 8x + 7) (x^2 + 8x + 15) + 15, x^2 + 8x + 7 = y.$$

$$y_1 = -5, y_2 = -3, \text{ ex. } 153; E = (x + 2) (x + 6) (x^2 + 8x + 10).$$

$$157. (x^2 + x + 1) (x^3 + x^2 + 1).$$

$$158. [(x^2 + 1) + x][x^3 + (x^2 + 1)] - 1 = x^3(x^2 + 1) + x^4 + (x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1) - 1 = (x^2 + 1) (x^3 + 2x^2 + x) = x(x + 1)^2(x^2 + 1).$$

$$159. \text{ Ordonăm în raport cu } x; \text{ avem } x^4 - 4axyx^2 - y^4 + 2a^2y^2 - a^4; x^2 = (y + a)^2 \text{ și } x^2 = -(y - a)^2; (x - y - a)(x + y + a)[x^2 + (y - a)^2].$$

$$160. \text{ Scriem } [(x^2 + 3x + 3) + ax]^2 + 3a^2(x + 1) = (x^2 + 3x + 3)^2 + 2ax(x^2 + 3x + 3) + a^2x^2 + 3a^2(x + 1) = (x^2 + 3x + 3) [x^2 + (2a + 3)x + a^2 + 3]. \quad 161. (a + b) (b + c) (c + a).$$

162. Soluția I. Dezvoltăm după k ; $abc[a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)] - k^3[a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)] = (a - b)(b - c)(a - c)(abc - k^3)$. Soluția a II-a. Expresia dată se anulează pentru $a = b, b = c$ și $a = c$, deci ea se divide cu $(a - b)(b - c)(a - c)$, cîtul fiind un polinom P în a, b, c, k , deci $E(a, b, c, k) = (a - b)(b - c)(a - c)P(a, b, c, k)$; $E(k, b, c, k) = P(k, b, c, k) = k^3 - kbc$; analog $P(a, k, c, k) = k^3 - akc$, $P(a, b, k, k) = k^3 - abk$, deci $P(a, b, c, k) = k^3 - abc$.

163. Polinomul se anulează pentru $a = b, b = c, c = a$, este deci divizibil cu $(a - b)(b - c)(c - a)$. Procedînd ca în ex. 162 avem $E = (a - b)(b - c)(c - a)P(a, b, c, x)$; obținem $P = a + b + c$,

164. Utilizăm $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$, grupînd primul termen cu al treilea și al doilea cu al patrulea, obținem $E = (x^3 - y^3)(z - t)(3xy - z^2 - zt - t^2)$; E se anulează pentru $x = y$, $z = t$ și $xy = \frac{1}{3}(t^2 + tz + z^2)$.

Notînd $x^2 + yz = a$, $y^2 + xt = b$, $x^2 + yt = c$, $y^2 + xz = d$, avem $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$. Pentru aceasta luăm $t^2 + tz + z^2$ multiplu de 3 etc.

165. 1° Ordonăm în raport cu una din variabile, fie x și discriminantul trinomului obținut $\Delta = (B^2 - AC)y^2 + 2(BD - AE)y + D^2 - CF$ trebuie să fie pătrat perfect, deci $\delta = (BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - CF) = 0$. Altă metodă: identificăm polinomul dat cu produsul $(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1)$ și din egalitățile obținute eliminăm a, b, c, a_1, b_1, c_1 . Aplicație $(2x + y - 3)(x - y - 2)$; 2° Pătrat perfect, dacă $B^2 = AC$, $D^2 = AF$, $E^2 = CF$.

166. Ex. precedent; $\alpha = -3$ și $\alpha = 16/3$; pentru $\alpha = -3$ rezultă $(x - 2y + 1)(2x + y - 3)$.

167. După ex. 165; $\delta = 0$ 1° $k = -a^2 - b$, $(x + ay)(ax + by + 1)$; 2° $\kappa = a \cdot (2b + 1)$, $(x + ay + 2b)(x + ay - 2b + 2)$.

168. Scriem $E = 2(x^2 + y^2)^2 - 7xy(x^2 + y^2) + 3x^2y^2 \equiv [m_1(x^2 + y^2) + n_1xy][m_2(x^2 + y^2) + n_2xy] \equiv m_1m_2(x^2 + y^2)^2 + (m_2n_1 + m_1n_2)xy(x^2 + y^2) + n_1n_2x^2y^2$ și prin identificare, $m_1m_2 = 2$, $m_2n_1 + m_1n_2 = 7$, $n_1n_2 = 3$ etc.

169. $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$. **170.** $(6x^3 + 1)^2$. **171.** $(a^m - b^n)^2$.

172. $[4(x + b) - a]^2$. **173.** $(x^2y + y^2z + z^2x)^2$. **174.** $(x^2 + 1)^2 + 2x(x^2 + 1) + x^2 = (x^2 + x + 1)^2$.

175. $a + \frac{1}{a} = z$, $a^2 + \frac{1}{a^2} = z^2 - 2$; $(3z - 4)^2$, $[3\left(a + \frac{1}{a}\right) - 4]^2$.

176. $(x^3 - y^3)$. **177.** $(x^4y^4 + x^2y^2 - 2)^2$.

178. $(x^2 + x + 1)^2$. **179.** $x(x + 1)(x - 1)(x + 2) + 1 = (x^2 + x)(x^2 + x - 2) + 1 = (x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) + 1 = (x^2 + x - 1)^2$. **180.** 1° Soluția I. $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + x - 1) + 2(x + 1)^2 - 2x - 2x(x^2 + x - 1) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 + x - 1) + 2(x^2 + 3x + 1) - 2x(x^2 + x + 1) - 4x = [(x^2 + 3x + 1) - 2x][(x^2 + x - 1) + 2] = (x^2 + x + 1)^2$.

Soluția a II-a. Efectuăm calculele: $(x^2 + x + 1)^2$.

181. Notăm $x + a = y$; $y(y + 3a)(y + a)(y + 2a) + a^4 = (y^2 + 3ay)^2 + 2a^2(y^2 + 3ay) + a^4 = (y^2 + 3ay + a^2)^2$; $(x^2 + 5ax + 5a^2)^2$.

182. $a^2(a + 1)^2$. **183.** $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)^2$. **184.** $(ac - bd)^2$.

185. Notăm $a = x^2 + y^2 + z^2$, $b = xy + yz + zx$; $E = (a - b)^2 (a + 2b)$, $E = (x + y + z)^2 (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)^2$.

186. Notăm $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = N$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n = M$. Însă $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = N + 2M$. Expresia poate fi scrisă $E = M^2 + (N + 2M)N = (N + M)^2$. 187. $a \neq 0$ și $b^2 - 4ac = 0$. 188. $a = 0, b = 1$; v. ex. 174. 189. $a + b + c + d = (m + n)(m + n + 2)$, $c^2 = a^2d$, $a^3 + 8c = 4ab$. 190. $ac \neq 0$, $b^2 - ac = 0$. 191. Trebuie ca $x(x + 1)(x + 2)(x + m) + n \equiv (x^2 + ax + b)^2$; rezultă sistemul: $m + 3 = 2a$, $3m + 2 = a^2 + 2b$, $2m = 2ab$, $n = b^2$. Din primele trei, eliminând pe m , obținem $a^2 - 6a + 2b + 7 = 0$, $2a - ab - 3 = 0$. Scoatem acum pe b din penultima ecuație și înlocuind în ultima, obținem $a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = 0$. Se deduc respectiv posibilitățile pentru a, b, m, n : 1, -1, -1, 1; 2, 1/2, 1, 1/4; 3, 1, 3, 1. 192. $ab + bc + ca = 0$.

193. Expresia este un polinom întreg, omogen și simetric în a, b, c ; se anulează pentru $a = b$, $b = c$, $c = a$, deci se divide cu $a - b$, $b - c$, $c - a$ și prin urmare și cu $(a - b)(b - c)(c - a)$. Avem $a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2 = k(a - b)(b - c)(c - a)$. Determinăm pe k , dând lui a, b, c , valori neegale, fie $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$; $k = -1$.

194. Expresia se anulează pentru $a = -(b + c)$, deci se divide cu $a + b + c$. Trebuie ca $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (a + b + c)[k(a^2 + b^2 + c^2) + k_1(ab + bc + ca)]$. Facem $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$ și $k = 0$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ și $k_1 = 1$; $(a + b + c)(ab + bc + ca)$.

195. $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

196. v. ex. 193 sau punem $a - b = x$, $b - c = y$, $c - a = z$; avem $x + y + z = 0$ și apoi ca în ex. 16; $3(a - b)(b - c)(c - a)$.

197. Căutăm factori de forma $x + y + \varepsilon z$, unde $\varepsilon = 1$ sau -1 . Pentru $x = -(y + z)$ expresia obținută se anulează, dacă $\varepsilon = -1$, deci se împarte cu $x + y - z$ și din cauza simetriei și cu $y + z - x$ și $z + x - y$; apoi ca în ex. 193 $k = 1$; $(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$.

198. $3(x + y)(y + z)(z + x)$.

199. $-(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)$.

200. $-(a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ca)$.

201. $4(a + b + c)(ab + bc + ca)$.

202. Soluția I. Expresia este omogenă și simetrică în x^4, y^4, z^4 și se anulează pentru $x^2 = -(y^2 + z^2)$ și $x^2 = y^2 + z^2$; $E = (x^2 - y^2 + z^2) \cdot (x^2 + y^2 - z^2) \cdot (-x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$. Soluția a II-a. Punem $x^4 = a, y^4 = b, z^4 = c$; $E = -a^2 + 2 \cdot (b + c)a - (b - c)^2$, trinom care are rădăcinile $b + c \pm 2\sqrt{bc}$, deci $E = -(a - b - c - 2\sqrt{bc})(a - b - c + 2\sqrt{bc})$ etc.

203. $(x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$.

205. $5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

206. Polinomul se anulează pentru $x = 0, y = 0$ și $y = -x$ citul de forma $\alpha(x^4 + y^4) + \beta(x^3y + xy^3) + \gamma x^2y^2$; $\alpha = 7, \beta = 14, \gamma = 21$;

$$E = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2.$$

207. $-(x - y)^2(x^2 + xy + y^2)$.

208. $-(x - y)^2(x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

209. $-(a - b)(b - c)(c - a)[3(a^2 + b^2 + c^2) + 5(ab + bc + ca)]$,
ca în ex. **194**.

210. $E = a^{2n}(a^{3n} - 1) + a^{2n} + a^n + 1 = a^{2n}(a^n - 1)(a^{2n} + a^n + 1) + a^{2n} + a^n + 1 = (a^{2n} + a^n + 1)(a^{3n} - a^{2n} + 1)$.

211. $3a^{2n+2}b^{k-1}(1 - 3a^{n+1}b^{2k-2})(2a^{2n+2}c - 5b^{k-1})$.

212. $5a^5x^2(a^{n+3}x^{n+2} - 2x)^2$.

213. $a^{2k}c^{2m-2}(a^2 + b^2)(b^n - c^{m-1})(b^n + c^{m-1})$.

214. $x^n(x^{12} - 2x^6y^6 + y^{12}) = x^n(x - y)^2(x + y)^2(x^2 - xy + y^2)^2(x^2 + xy + y^2)^2$.

215. $4na^n(n - 2)(n - a)$.

216. $a^{2r}(1 + a^r + a^{4r}) \cdot (1 - a^r - a^{4r})$.

217. $a^n x^{m+n-3}(x - 7a^n)(x^2 + 3a^n x - 6a^{2n})$.

218. $a^n(a^{n+1} - 1)(a^{n+1} + 1)^2$.

219. $a^{2n+1}(a + 1)^{2p} + (a + 1)a^n(a + 1)^p + 1 = a^{2n+1}(a + 1)^{2p} + a^{n+1}(a + 1)^p + a^n(a + 1)^p + 1 = a^n(a + 1)^p[a^{n+1}(a + 1)^p + 1] + a^{n+1}(a + 1)^p + 1 = [a^{n+1}(a + 1)^p + 1][a^n(a + 1)^p + 1]$.

220. $(a^m b^{-n} + a^{-m} b^n)(a^{n-1} b^{n+1} - a^{-m+1} b^{n-1})$.

221. $(a^m b^n - 2a^{2p} b^m)(ab^p - 3a^n b^p)$.

222. $(b - a) : (ab + 1)$. **223.** $(ax + 1) : (ax - 1)$.

224. $(x - y) : (x + y)$.

$$225. \frac{a(b-c)}{b}. \quad 226. (a+b)^2 : (a-b)^2. \quad 227. (a+2) : (a-2).$$

$$228. (x+y)^2 : (x^2 + xy + y^2). \quad 229. 1 : (1-y^2).$$

$$230. (m^2 - n^2) : (a^2 - b^2). \quad 231. (a-b)(b-x)(a-c)(c-x).$$

$$232. a-b. \quad 233. 3(a^2 + b^2) + 4ab. \quad 234. (x-a)(x-b).$$

$$235. [(m+1)x+4] : (2x+m).$$

$$236. (x-b-1) : (x-c-1).$$

$$237. (a+b-c-d) : (a-b+c-d).$$

$$238. (a+b+c-d) : (a-b-c-d).$$

$$239. (2x-y-z) : (2y-x-z).$$

$$240. (x-1+a) : (x-1+b).$$

$$241. (x+1)(y+1)(z+1). \quad 242. (a+b) : (a-b).$$

$$243. (a^2 + b^2) : (a^2 - b^2). \quad 244. (a+b+1) : (a+b-1).$$

$$245. a^2 + b^2. \quad 246. 1 : (1+x^2). \quad 247. \frac{(a+d)(b+c)}{(a+d)^2 + (b+c)^2}.$$

$$248. (a^2 + a\sqrt{2} + 1) : (x^2 + x\sqrt{2} + 1). \quad 249. x^4 - x^2y^2 + y^4.$$

$$250. (x+3y) : (5x^3 - 3x^2y + 12y^3).$$

$$251. (ax+by) : (ax-by). \quad 252. (x+a)(x+b)(x+c).$$

$$253.v. \text{ ex. } 16 \text{ și ex. } 195. abc. \quad 254. 2(a+b+c).$$

$$255. (a^2 + d^2) : (a^2 + d^2 - 2b - 2c).$$

$$256. \text{ Algoritmul lui Euclid } (x^3 - x^2 - 1) : (x^2 + x - 2).$$

$$257. (x^4 + x^2 + x + 1) : (x^4 - x^3 + x + 1).$$

$$258. 1 : (a+b+c). \quad 259. (3a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2) : 2a^2.$$

260. Se utilizează formula $u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2)$, se dă factor comun $a-c$ etc.; $(a-c) : (b-a)$.

$$261. v. \text{ ex. } 16; \text{ găsim } -3xyz.$$

$$262. (x^2y-1) : (x^2y+1). \quad 263. a+b+c=x; \quad (x-2)(x-1).$$

264. $b^2 - 4a^2 = u$, $6a^2 = v$, $3ab = w$; numărătorul este $8uw(u^2 + w^2)$, iar numitorul $2uv(2u^2 + 3uv + 2v^2)$; găsim $b : a$. 265. $3(2x-1) : (2x-3)$.

266. $(x - 1)^3$. 267. 4. 268. v. ex. 259; $(a + c - 2b) : (a + b - 2c)$.

269. $\frac{(a - 1)x}{a^{n-1}(x + 2a)}$. 270. $(ab)^{m-p}$.

271. Se dă factor x^{a+4} ; x^{a+4} . 272. x^a .

273. $(x^2 - 1) : (x^2 - x + 1)$.

274. $(a^m - b^m) : (a^m + b^m)$. 275. $\frac{(x - 1)(x + 2)}{x(x^3 - x^2 + 1)}$.

276. $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$; notăm numărătorul cu $P(x)$, care se divide cu $x - 1$, dacă $P(1) = m^2 + 5m = 0$, adică $m = 0$. Pentru factorul al doilea trebuie ca $P(-1) = -m^2 - 3m - 2 = 0$, adică $m = -1$ sau $m = -2$. Simplificarea cu $x^2 - 1$ nu este posibilă, căci nu pot fi satisfăcute ambele condiții în același timp. 277. $l = 0$, $m = -6$, $n = 0$, $p = 25$.

278. Diferența dintre numărător și numitor este $x^3 - 4x^2 + (\alpha - \beta)x = x[x^2 - 4x + (\alpha + \beta)]$. Anulăm restul împărțirii dintre numitor și $x^2 - 4x + \alpha - \beta$; $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

CALCULE CU EXPRESII ALGEBRICE RAȚIONALE ȘI IRAȚIONALE

279. $4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$

280. $1^\circ Q_1 = a^2(15a^4 + 5a^2 - 7); \quad 2^\circ Q_2 = 16a^{12} + 39a^{10} + 92a^8 + 14a^6 - 19a^4 - 3a^2 + 1.$

289. Se folosește $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$

298. Se pornește de la $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$, de unde $\Sigma(x - y)^2 + 2\Sigma(x - y)(y - z) = 0$ sau $\Sigma(x - y)^2 = -2\Sigma(x - y)(y - z)$. O nouă ridicare la pătrat dă $\Sigma(x - y)^4 + 2\Sigma(x - y)^2(y - z)^2 = 4\Sigma(x - y)^2(y - z)^2 + 8\Sigma(y - z)^2(z - x)(x - y)$. Însă, cum $\Sigma(y - z)^2(z - x)(x - y) = (x - y)(y - z)(z - x)(x - y - z + y + z - x) = 0$, rămîne $\Sigma(x - y)^4 + 2\Sigma(x - y)^2(y - z)^2$. Sau în ex. **391** se face $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$.

299. Înmulțim prima relație cu 2 și formăm pătrate.

301. 0. **302.** 3. **303.** a^2b^2 . **304.** 1. **305.** $(a - b)(a + b - c - d).$

306. 0. **307.** 0. **308.** 0. **309.** 4. **310.** $\frac{11a^3 + b^3}{(a^2 - b^2)(16a^2 - b^2)}.$

311. $\frac{(y^2 - x^2)(y^2 - z^2)}{(y^2 - b^2)(y^2 - c^2)}.$ **312.** $\frac{1}{a^3b^3}.$ **317.** Punem $\frac{a - c}{a + c} = x$, $\frac{b - c}{b + c} = y$.

318. Notăm $(a - b) : (a + b) = x$, $E = [(a - b) : (a + b)]^3$ **319.** $2b : (1 - b^2).$

320. Notăm $a + b = x$, $1 - ab = y$; $E = -c$. **321.** abc . **322.** $ab : (a + b)^2.$

323. 1. **324 — 327.** Rezultatul : $a + b + c$. Avem

$$\begin{aligned} \sum \frac{a}{b + c} &= \sum \left(\frac{a}{b + c} + 1 \right) - 3 = \sum \frac{a + b + c}{b + c} - 3 \frac{a + b + c}{a + b + c} = \\ &= (a + b + c) \left(\sum \frac{1}{b + c} - \frac{3}{a + b + c} \right) = \sum a \frac{b - c}{b + c} = \sum (a + \\ &\quad + b + c) \frac{b - c}{b + c} - \sum (b + c) \frac{b - c}{b + c} \text{ etc.} \end{aligned}$$

328. $16\ abc: [(1+a)(1+b)(1+c)]$. **331.** $-\frac{2}{ab}(a^2+b^2+ab)$. **334.** x .

336. $2a(2x-1)(x^2+b)$.

337—339. Identitățile sînt de forma $A+B+C=ABC$ sau $A+B+C=-ABC$ sau $A+B-C=ABC$. Din prima expresie deducem $(A+B):(AB-1)=C$. Dacă înlocuim în această ultimă egalitate pe A și B cu expresiile lor scoase din exercițiile corespunzătoare, obținem pe C . Analog în cazul al doilea și al treilea. Ca aplicație fie ex. **337**.

$$\begin{aligned}\frac{A+B}{AB-1} &= \frac{\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc}}{\frac{a-b}{1+ab} \frac{b-c}{1+bc} - 1} = \frac{(a-b)(1+bc) + (b-c)(1+ab)}{(a-b)(b-c) - (1+ab)(1+bc)} = \\ &= \frac{a-b^2c-c+ab^2}{-b^2-ac-1-ab^2c} = \frac{c-a}{1+ac}.\end{aligned}$$

340. Numitorul comun este $(a-b)(a-c)(b-c)$ și atunci rămîne $s_k(a-b)(a-c)(b-c) = a^k(b-c) - b^k(a-c) + c^k(a-b)$.

Să calculăm sumele din partea dreaptă

$$k=0, (b-c) - (a-c) + (a-b) = 0 \quad \text{deci} \quad s_0 = 0$$

$$k=1, a(b-c) - b(a-c) + c(a-b) = 0, \quad \text{deci} \quad s_1 = 0$$

$$k=2, a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b) = ab(a-b) - c(a^2-b^2) +$$

$$+ c^2(a-b) = (a-b)(ab-ac-bc+c^2) = (a-b)(a-c)$$

$$+ (b-c), \quad \text{deci} \quad s_2 = 1 \text{ etc.}$$

Altfel, observăm că membrul al 2-lea $a^k(b-c) + b^k(c-a) + c^k(a-b)$ este un polinom de gradul $k+1$ și simetric în a, b, c , care se anulează pentru $a=b$, $a=c$ și $b=c$, deci el se divide cu $(a-b)(a-c)(b-c)$. Cazurile $k=0$ și $k=1$ conduc la $s_0=s_1=0$, împărțitorul avînd grad mai mare ca deîmpărțitul. Cînd $k=2$, avem același grad, cîtul este constanta 1. Cazul $k=3$: cîtul s_3 trebuie să fie un polinom omogen și simetric în a, b, c de gradul I, deci de forma $\lambda(a+b+c)$, constanta λ se determină prin identificare, dînd lui a, b, c trei valori particulare, de exemplu, $a=0$, $b=1$, $c=-1$; $\lambda=1$. Cazul $k=4$ conduce la un cît polinom omogen și simetric de gradul II de forma $A(a^2+b^2+c^2) + B(ab+bc+ca)$, astfel

ca $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b) = (a-b)(a-c)(b-c)[A(a^2 + b^2 + c^2) + B(ab + bc + ca)]$, A și B rămânând să se determine ca mai sus. Pentru $a = 0, b = 1, c = -1$ și apoi $a = 0, b = 2, c = -1$ obținem sistemul $2A - B = 1, 5A - 2B = 3$, deci $A = 1, B = 1$, și astfel este determinat s_4 etc.

$$\mathbf{341.} \quad a + b - c = (a + b + c) - 2c; \sum \frac{a + b - c}{(b - c)(c - a)} = -(a + b + c);$$

$$\sum \frac{1}{(c - b)(c - a)} + 2 \sum \frac{c}{(c - b)(c - a)} = -(a + b + c)s_0 + 2s_1 = 0.$$

342. Descompunând fiecare termen în alți doi, se poate scrie $ms_1 + ns_0$, care este zero. **343.** Descompunem fiecare termen în alți trei: avem $ls_2 + ms_1 + ns_0 = l$. **344.** Avem

$$\begin{aligned} \frac{(m+b)(m+c)}{(a-b)(a-c)} &= m^2 \frac{1}{(a-b)(a-c)} + m \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \\ &+ \frac{bc}{(a-b)(a-c)} = m^2 \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \\ &+ m(a+b+c) \frac{1}{(a-b)(a-c)} - \frac{ma}{(a-b)(a-c)} + abc \frac{1}{a(a-b)(a-c)}. \end{aligned}$$

Fracția din ultimul termen se poate scrie

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a} \frac{\frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{ac}}{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{1}{abc} \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)}.$$

Scriind și ceilalți termeni ai sumei și adunând membru cu membru, obținem

$$m^2s_0 + m(a+b+c)s_0 - s_1 + \sum \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)}.$$

Ultima sumă este 1, căci se obține din s_1 , schimbând pe a în $1/a$ etc.

345. Avem :

$$\sum \frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} = \frac{1}{abc} \sum \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^3}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)} = \frac{1}{abc} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

căci ultima sumă se obține din s_3 , înlocuind pe a, b, c respectiv cu inversele lor. **346.** Avem

$$\begin{aligned} \frac{(b+c)bc}{(a-b)(a-c)} &= \frac{(a+b+c-a)bc}{(a-b)(a-c)} = (a+b+c) \frac{bc}{(a-b)(a-c)} - \\ - abc \frac{1}{(a-b)(a-c)} &= (a+b+c) abc \frac{1}{a(a-b)(a-c)} - abc \frac{1}{(a-b)(a-c)}, \\ \text{restul ca în ex. 344. 347. Avem } \sum \frac{a(x-b-c)}{(a-b)(a-c)} &= x \sum \frac{a}{(a-b)(a-c)} - \\ - \sum \frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)} &= x \sum \frac{a}{(a-b)(a-c)} - (a+b+c) \sum \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \\ + \sum \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} &= xs_1 - (a+b+c)s_1 + s_2 = 1; \end{aligned}$$

pentru s_1 și s_2 v. ex. **344.**

$$\mathbf{348.} \sum \frac{a^2b^2}{(b-c)(a-c)} = abc \sum \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^3}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)} = abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

căci ultima sumă se obține din s_3 , înlocuind pe a, b, c cu inversele lor.

$$\begin{aligned} \mathbf{349.} \sum \frac{(1+a+a^2)bc}{(a-b)(a-c)} &= \sum \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + abc \sum \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \\ + abc \sum \frac{a}{(a-b)(a-c)}. \end{aligned}$$

Prima sumă este calculată la ex. **344** și este 1, iar celelalte sînt s_0 și s_1 .

$$\begin{aligned} \mathbf{350.} \sum \frac{a^4 - b^2c^2}{(a-b)(a-c)} &= \sum \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} - \sum \frac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)} = \\ = \sum \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} - \sum \frac{a^2b^2c^2}{a^2(a-b)(a-c)} &= s_4 - a^2b^2c^2 \sum \frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} = \\ = s_4 - abc \sum \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^3}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)} &= s_4 - abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = a^2 + b^2 + \\ + c^2 + ab + bc + ca - (bc + ac + ab) &= a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

351. V. ex. precedent. **352—353.** Se descompune fiecare termen în sume și se au în vedere expresiile pentru s_i . **354.** Avem $(a-m)(a-p)(a-q) =$

$= a^3 - (m + p + q)a^2 + (mp + mq + pq)a - mpq$. Primul membru din suma dată se descompune în $s_3 - (m + p + q)s_2 + (mp + mq + pq)s_1 - mpqs_0 = a + b + c - (m + p + q)$.

$$\mathbf{355.} \text{ Avem } a^n \frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} = \frac{(a+b+c)a^{n+1} + a^{n-1}abc}{(a-b)(a-c)}.$$

În acest mod sumele σ_m se leagă de sumele s_k , calculate la ex. **340**, astfel

$$\sigma_m = (a + b + c)s_{m+1} + abcs_{m-1}.$$

Aplicație

$$\sigma_1 = (a + b + c)s_2 + abcs_0 = a + b + c, \text{ căci } s_2 = 1, s_0 = 0$$

$$\sigma_2 = (a + b + c)s_3 + abcs_1 = (a + b + c)^2$$

$$\sigma_3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) + abc.$$

$$\mathbf{360.} \text{ Se scrie } ab \frac{(c-m)(c-n)(c-p)}{(c-a)(c-b)} = abc \frac{(c-m)(c-n)(c-p)}{c(c-a)(c-b)};$$

se desfac parantezele la numărător, apoi ca la ex. **354**.

361. $a^k(b-c)(b-d)(c-d) - b^k(a-c)(a-d)(c-d) + c^k(a-b)(a-d)(b-d) - d^k(a-b)(a-c)(b-c) =$
 $= s_k(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$. Înlocuind în partea întâi succesiv $k = 0, k = 1, k = 2$, se deduce că trebuie ca $s_0 = s_1 = s_2 = 0$; pentru $k = 3$ obținem $s_3 = 1$.

$$\mathbf{363.} \frac{x^k}{(x-a)(x-b)(x-c)}, \quad k = 1, 2.$$

365. Primul membru se poate scrie $[x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + \dots + (n-1)x] + n + \left[\frac{1}{x^{n-1}} + 2 \frac{1}{x^{n-2}} + 3 \frac{1}{x^{n-3}} + \dots + (n-1) \frac{1}{x} \right]$. Notăm cu s și s_1 sumele din prima, respectiv a doua paranteză. s_1 se deduce din s , schimbând pe x în $\frac{1}{x}$. Să calculăm pe s . Avem $xs - s = (x^n + x^{n-1} + \dots + x) - nx$, $s(x-1) = \frac{x^{n+1} - x}{x-1} - nx$;

$$s = \frac{x^{n+1} - nx^2 + (n-1)x}{(x-1)^2}, \quad s_1 = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{x^{n+1}(x-1)^2}.$$

366. Pentru $p < n-1$ coeficientul este $p+1$; dacă $n-1 < p < 2(n-1)$, avem $2n - (p+1)$.

367. $(x^{2^n} + x^{2^{n-1}} + \dots + x + 1)(x-1) = x^{2^{n+1}} - 1$;
 $(x^{2^n} - x^{2^{n-1}} + \dots + x + 1)(x+1) = x^{2^{n+1}} + 1$ etc.

368. $P(x) = x + 2$, $Q(x) = -x - 1$. **369.** Se ia $Q(x) = ax + b$, $P(x) = Ax^2 + Bx + C$; $a = 2$, $b = 1$, $A = -2$, $B = 3$, $C = -5$. **370.** $P(x) = ax^2 + bx + c$; găsim $P(x) = x^2 + bx + \frac{b^2 - 1}{4}$. **371.** $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$, $a = 2$, $b = 4$; $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $a = -4$, $b = -2$. **372.** $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. **373.** $x^2 - 14x - 256 = (x - a)^2$, $x = \frac{a^2 + 256}{2(a - 7)}$; trebuie ca $a^2 + 256$ să fie divizibil cu $2(a - 7)$; $a = 2b$; $x = -146$, $x = -26$, $x = 40$, $x = 160$. **374.** $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$; $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ etc.

375—6. Se folosește identitatea (1) $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x(y^2 + z^2) + 3y(x^2 + z^2) + 3z(x^2 + y^2) + 6xyz$. Pentru ex. **375.** $(x + y + z)^2 = a^2$, cum $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, rezultă $xy + yz + zx = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$; cu aceasta, din ultima egalitate dată $xyz = \frac{1}{2}c(a^2 - b^2)$, apoi din (1) $x^3 + y^3 + z^3 = \frac{1}{2}(-a^3 + 3ab^2 + 3a^2c - 3b^2c)$.

În ex. **376.** trebuie $a^3 = 3ab - 2c$. **377.** $u = x^2 - yz$, $v = y^2 - zx$, $w = z^2 - xy$. **378.** Să determinăm gradul lui $P(x)$, fie n . În prima parte, după efectuarea calculelor rămân termeni începînd cu gradul $n - 2$, cum membrul al doilea este 1, rezultă $n = 3$. Fie $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ înlocuind și efectuînd calculele, se deduce $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{2}$, iar c și d arbitrari.

379. Fie C valoarea fracției, oricare ar fi x ; $ax + b \equiv C(Ax + B)$, de aici $a - CA = 0$, $b - CB = 0$, și din egalarea valorilor lui C rezultă condiția dată. Reciproca se dovedește presupunînd $a = CA$, $b = CB$, valori care se introduc în fracția inițială. Aplicație: $1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$, $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$; fracția are valoarea $\operatorname{tg}^2 a$.

380. v. ex. **379.** **381.** $ac - b^2 = 0$. **382.** Dezvoltînd calculele și ordonînd după $(x^2 + y^2 + z^2)$ și $(xy + yz + zx)$, după ex. **379**, avem $m = -2$. **383.** $m_1 = 5$, $m_2 = 6$.

384. De exemplu, în $a^2 - bc = b^2 - ac$ înlocuim c prin $-(a + b)$ sau din $a + b + c = 0$ deducem $a = -b - c$, $a^2 = -ab - ac$, deci $a^2 - bc = -(ab + bc + ca)$, apoi $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$; $a^2 - bc = b^2 + c^2 + bc$; $a^2 - bc = \frac{1}{3}(a^2 - bc + b^2 - ca + c^2 - ab) = \frac{1}{6}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$ etc. **385.** Ca în exemplul 16. **386.** Înmulțim $a + b + c = 0$ cu a^2b și avem $a^3b = -a^2b^2 - a^2bc$ etc.

387. Primele trei expresii din ex. 384 se înmulțesc cu 2 și se adună la fiecare $a^2 + b^2 + c^2$.

389. Se ajunge la $(a^3b + b^3c + c^3a)x^3 + (ab^3 + bc^3 + ca^3)x = (ab^3 + bc^3 + ca^3)x^3 + (a^3b + b^3c + c^3a)x$, după ex. 386 identitate.

Reciproca :

$$(a^3b + b^3c + c^3a - ab^3 - bc^3 - ca^3)x(x-1)(x+1) = 0$$

$$(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)x(x-1)(x+1) = 0$$

Posibilități : 1° $a=b$, 2° $b=c$, 3° $c=a$, 4° $a+b+c=0$, 5° $x=0$, 6° $x=-1$, 7° $x=1$.

390. Se observă că $(2a-b) + (2b-c) + (2c-a) = a+b+c=0$ etc.

391. Dezvoltând prima parte, se deduce $a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$, ceea ce se verifică pornind de la $c=-(b+a)$, apoi $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, $c^2 - a^2 - b^2 = 2ab$, care se ridică la pătrat etc.

392. Utilizăm identitatea din ex. 385. și avem $(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) = 3abc(a^2 + b^2 + c^2)$, care dezvoltată dă $a^5 + b^5 + c^5 + a^2b^2(a+b) + b^2c^2(b+c) + c^2a^2(a+c) = 3abc(a^2 + b^2 + c^2)$, $a+b+c=0$; $a^5 + b^5 + c^5 - abc(ab+bc+ca) = 3abc(a^2 + b^2 + c^2)$, dar $-2(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2$ etc. **395—396.** Înmulțind $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$ și $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, apoi ca în ex. precedente. **397.** $b+c=-a$, $c+a=-b$ etc.

398. Se fac calculele, utilizăm identitatea $\Sigma a^3(b-c)^3 = 3abc(b-c)(c-a)(a-b)$, ex. 385 cu $b+a=-c$.

399. Avem $\left(\sum \frac{a-b}{c}\right) \frac{c}{a-b} = 1 + \frac{c}{a-b} \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) = 1 + \frac{c}{a-b} \frac{(a-b)[c-(a+b)]}{ab} = 1 + \frac{c}{ab} [c-(a+b)]$, dar $-(a+b)=c$, deci egal cu $1 + \frac{2c^2}{ab}$; prin urmare, $E = 1 + \frac{2c^2}{ab} + 1 + \frac{2a^2}{bc} + 1 + \frac{2b^2}{ca} = 3 + 2 \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = 3 + 2 \frac{3abc}{abc} = 9$; v. ex. 385. **400.** Notăm $a^3 + b^3 + c^3 = s$, deducem $\Sigma s(s+6b^3)(s+6c^3) = (s+6a^3)(s+6b^3)(s+6c^3)$, deoarece $s^3 = 3^3 a^3 b^3 c^3$, ex. 385. **408.** Se scad egalitățile : a doua din prima, a treia din a doua, prima din a treia. Se scoate factor comun respectiv $x-y$, $y-z$, $z-x$, și cum $x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x$, rămâne că $x^2 + xy + y^2 + p = 0$, $y^2 + yx + z^2 + p = 0$, $z^2 + zx + x^2 + p = 0$. Scădem acum din nou și rămâne că $x+y+z=0$, căci $x \neq y \neq z$.

$$410-411. \text{ Avem } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{a^2x}{a^3} = \frac{b^2y}{b^3} = \frac{c^2z}{c^3} = \frac{a^2x + b^2y + c^2z}{a^3 + b^3 + c^3} = \\ = \frac{x^3}{ax^2} = \frac{y^3}{by^2} = \frac{z^3}{cz^2} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{ax^2 + by^2 + cz^2} \text{ etc.}$$

413. Funcția $f(x, y, z)$ se zice că este omogenă și de grad n de omogenitate cînd avem $f(kx, ky, kz) = k^n f(x, y, z)$, oricare ar fi x, y, z și k . După enunț, $x = qa, y = qb, z = qc$, deci $f(x, y, z) = f(qa, qb, qc) = q^n f(a, b, c)$; scoatem pe q .

$$414. \text{ Avem } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}, \frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}, \quad \frac{(a-b)^4}{(c-d)^4} = \frac{b^4}{d^4}; \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{a^4}{c^4} = \frac{b^4}{d^4} = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4}; \quad \text{reciproc avem } \left(\frac{a-b}{ab} \right)^2 = \frac{(c-d)^2}{3cd - 2c^2 - 2d^2}, \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{și} \quad \frac{a}{b} = \frac{d}{c}.$$

$$415. \text{ Avem } \frac{ab}{b^2} = \frac{cd}{d^2}, \quad \frac{ab}{cd} = \frac{b^2}{d^2};$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1, \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \left(\frac{a+b}{c+d} \right)^2 = \frac{b^2}{d^2} \text{ etc.}$$

417. v. ex. 413. 420. Egalăm cu k șirul dat; avem $bz - cy = ka, cx - az = bk, ay - bx = kc$. Înmulțim fiecare din aceste egalități respectiv cu a, b, c și adunăm; găsim $k = 0$. **422.** Efectuînd calculele și reducerile, avem $x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2 = -2xy - 2yz - 2zx + 2xyz(x + y + z)$, înlocuind $x + y + z$ cu xyz , rămîne $(x + y + z)^2 - x^2y^2z^2 = 0$. **423.** Aducînd la numitor comun și avînd în vedere condiția, avem $x + y + z - xy(x + y) - yz(y + z) - zx(z + x) + xyz(yz + zx + xy) = xyz - xy(xyz - z) - yz(xyz - x) - zx(xyz - y) + xyz(yz + zx + xy) = xyz - xyz(xy + yz + zx) + 3xyz + xyz(yz + zx + xy) = 4xyz$. **424.** Ca în ex. 423. Sau punem $x = \operatorname{tga}, y = \operatorname{tgb}, z = \operatorname{tgc}$. Relația de condiție este $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tga} \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$, deci condiția $a + b + c = \pi$. Cum $\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a} = \frac{x(3 - x^2)}{1 - 3x^2}$; $3a + 3b + 3c = 3\pi$, $\operatorname{tg} 3a + \operatorname{tg} 3b + \operatorname{tg} 3c = \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 3b \operatorname{tg} 3c$.

428. Se aplică suma numărătorilor pe suma numitorilor. **429.** Ridicînd prima relație la pătrat și avînd în vedere relația a doua, rezultă $xy + yz + zx = 0$, apoi utilizăm ex. 16 cu $m = 3$.

$$430. \text{ Avem } \sum \frac{b+c}{a} = \left(\frac{a+b+c}{a} - 1 \right) + \left(\frac{a+b+c}{b} - 1 \right) + \left(\frac{a+b+c}{c} - 1 \right) = \\ = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 3 = -3.$$

431. Din relația de condiție rezultă $ab + bc + ca = 0$, $a(b + c) = -bc$;
 $b + c = -\frac{bc}{a}$, analog $c + a = -\frac{ac}{b}$, $a + b = -\frac{ab}{c}$, avem $\sum \frac{a}{b + c} =$
 $= -\frac{a^2}{bc} - \frac{b^2}{ac} - \frac{c^2}{ab} = -\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$. **432.** v. ex. 431, $a^2 - bc = a^2 +$
 $+ a(b + c) = a(a + b + c)$ etc. Expresia dată devine $(a + b + c) \left(\frac{a}{b + c} + \right.$
 $\left. + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \right) \frac{1}{a + b + c} \left(\frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} + \frac{a + b}{c} \right)$, apoi ex. 430 și 431.

433. Egalitatea de condiție se poate scrie $(ab + bc + ca)(a + b + c) - abc = 0$,
 apoi $(ab + bc + ca)(a + b + c) - abc = [c(a + b) + ab][(a + b) + c] - abc =$
 $= c(a + b)^2 + ab(a + b) + c^2(a + b) = (a + b)[c(a + b) + ab + c^2] =$
 $= (a + b)(b + c)(c + a) = 0$. Rezultă $a = -b$, sau $a = -c$ sau $b = -c$.
 Cu oricare din acestea, egalitatea se verifică direct. **434.** Cum $a + b + c = 0$,
 avem $(a + b + c)(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0$; dezvoltând calculele, obținem $a^2\alpha +$
 $+ b^2\beta + c^2\gamma + ab(\alpha + \beta) + bc(\beta + \gamma) + ca(\gamma + \alpha) = 0$; înlocuind aici $\alpha +$
 $+ \beta = -\gamma$, $\alpha + \gamma = -\beta$, $\beta + \gamma = -\alpha$, avem $a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma - ab\gamma -$
 $- bca - ca\beta = a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma - abc \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} \right) = 0$. Având în vedere
 relația a treia din condiția dată, rezultă egalitatea dată. **436.** Se egalează
 rapoartele date cu $\frac{1}{k}$ și se observă că relația dată se poate scrie $a(a + b +$

$+ c) = b^2$. **437.** Avem $\frac{m^2}{x^2} = \frac{n^2}{y^2} = \frac{p^2}{z^2} = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{x^2 + y^2 + z^2}$;

$$\frac{\frac{m^2}{a^2}}{\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\frac{n^2}{b^2}}{\frac{y^2}{b^2}} = \frac{\frac{p^2}{c^2}}{\frac{z^2}{c^2}} = \frac{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Numitorul penultimului raport este 1.

438. Din relația dată se scoate u^2 , se calculează apoi $1 + u^2$ și $1 - u^2$.
439. Punem $\frac{a_i}{1 + b_i} = k_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ și relațiile date devin $k_1(1 + B) +$
 $+ \dots + k_n(1 + B) = A$, $k_1(B - b_1) + \dots + k_n(B - b_n) = 0$, din care, prin
 scădere

$$k_1(1 + b_1) + k_2(1 + b_2) + \dots + k_n(1 + b_n) = A.$$

Ori avem

$$k_1(1 + b_1) = a_1, \quad k_2(1 + b_2) = a_2, \dots; \text{ deci } a_1 + a_2 + \dots + a_n = A,$$

440. Gradul numărătorului fiind mai mare decât cel al numitorului, împărțim și atunci $\frac{x^5 - x^3 - x^2}{x^2 - 1} = x^3 - 1 - \frac{1}{x^2 - 1} = x^3 - 1 - \left(\frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} \right) =$
 $= x^3 - 1 - \frac{(a + b)x + a - b}{x^2 - 1}$. Prin identificare, rezultă $a + b = 0$,
 $a - b = 1$, din care $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$; $E = x^3 - 1 - \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{x + 1}$.

441. Descompunerea va fi de forma

$$E = \frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}; \quad (1)$$

$E = \frac{a(x - 1)(x + 1) + bx(x + 1) + cx(x - 1)}{x(x - 1)(x + 1)}$; deci $x^2 + x + 2 = (a + b + c)x^2 + (b - c)x - a$; $a + b + c = 1$, $b - c = 1$, $-a = 2$; $a = -2$, $b = 2$, $c = 1$. **Altă metodă.** Pentru a determina pe a , se înmulțesc ambii membri din (1) cu x și apoi se face $x = 0$. Înmulțind cu x , avem $\frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)(x + 1)} = a + \frac{bx}{x - 1} + \frac{cx}{x + 1}$ și pentru $x = 0$, $a = -2$. Pentru a determina pe b , înmulțim în (1) ambii membri cu $x - 1$ și apoi facem pe $x = 1$. Pentru a determina pe c , înmulțim în (1) cu $x + 1$ și facem $x = -1$.

442. Descompunerea va fi de forma

$$\frac{x - 1}{x^2(x - 2)(x + 1)^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x - 2} + \frac{d}{(x + 1)^2} + \frac{e}{x + 1}.$$

Metoda identificării. Efectuăm calculele din partea a doua și identificăm numărătorii. Trebuie ca $x - 1 \equiv (b + c + e)x^4 + (a + 2c + d - e)x^3 + (-3b + c - 2d - 2e)x^2 + (-3a - 2b)x - 2a$, din care $b + c + e = 0$, $a + 2c + d - e = 0$, $-3b + c - 2d - 2e = 0$, $-3a - 2b = 1$, $-2a = -1$, sistem care dă $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{5}{9}$, $c = \frac{1}{36}$, $d = \frac{2}{3}$, $e = \frac{11}{9}$. **Altă metodă.** Coeficienții a , c și d se pot determina direct,

înmulțind întâi cu x^2 , apoi cu $x - 2$ respectiv $(x + 1)^2$ și facem apoi $x = 0$, respectiv $x = 2$, $x = -1$. Termenii cu coeficienții determinați îi vom trece în prima parte și efectuând calculele, trebuie (regulă) ca fracția astfel obținută să se simplifice cu $x(x - 2)(x + 1)$. Pentru determinarea lui b și e se procedează apoi ca mai sus.

$$443. \frac{x^5 + 1}{x^4(x^2 + 1)} = \frac{a}{x^4} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x} + \frac{ex + f}{x^2 + 1}; \quad a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1, \\ d = 0, \quad e = 1, \quad f = 1. \quad 444. \frac{3x^4 + 4}{x^3(x^2 + 1)^2} = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} + \frac{dx + e}{(x^2 + 1)^2} + \frac{fx + g}{x^2 + 1}; \\ a = 4, \quad b = 0, \quad c = -8, \quad d = 7, \quad e = 0, \quad f = 8, \quad g = 0. \quad 445. \frac{x}{x^3 + 1} = \\ = \frac{x}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}, \quad a = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{3}.$$

$$446. \text{ Avem } x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1), \\ \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{ax + b}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}, \quad a = -c = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad b = d = \frac{1}{2}.$$

$$447. \text{ Numitorul se descompune în factori, punînd } x^2 = y, \quad 4y^3 + 21y^2 + \\ + 21y + 4 = 4(y^3 + 1) + 21y(y + 1) = (y + 1)(y + 4)(4y + 1), \text{ astfel } \\ 4x^6 + 21x^4 + 21x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)(4x^2 + 1); \text{ considerăm astfel } \\ \frac{12x^3 - 7x^2 + 2}{4x^6 + 21x^4 + 21x^2 + 4} = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 4} + \frac{ex + f}{4x^2 + 1}, \quad a = \frac{4}{3}, \quad b = -4, \quad c = \\ = -\frac{16}{15}, \quad d = \frac{2}{3}, \quad e = \frac{16}{15}, \quad f = \frac{4}{3}.$$

$$448. a^{2m}b^{2n}c^{2p}. \quad 449. a^2x^{4n}y^9/4b^3. \quad 450. 1. \quad 451. \left(\frac{m}{n}\right)^{ad+bc}.$$

$$452. 0. \quad 453. b^6x^6 : (a^4x^2 - b^2y^4)^3. \quad 454. \left(\frac{a}{b}\right)^{mn}.$$

$$456. E_1 = E_2 = (x^{a+4})^2. \quad 457. |a - b|. \quad 458. 1. \quad 459. a. \quad 460. 1. \quad 461. a - \sqrt{a}. \\ 462. \sqrt{x} - \sqrt{y}. \quad 463. (2 + x + \sqrt{y}) : (x - 1). \quad 464. \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x + 2}, \\ x - 2 = \sqrt{x - 2} \sqrt{x - 2}; \text{ pentru } x \geq 2 \text{ avem } (x + 1) \sqrt{x - 2} : (x - 1) \sqrt{x + 2}. \\ \text{Dacă } x \leq 2, \quad \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{-x + 2} \cdot \sqrt{-x - 2}, \quad x + 2 = \\ = -\sqrt{-x - 2} \cdot \sqrt{-x - 2}, \quad -(x + 1) \sqrt{-x + 2} : (x - 1) \sqrt{-x - 2}. \text{ Rezul-} \\ \text{tatul concentrat : } (x + 1) \sqrt{x^2 - 4} : (x - 1)(x + 4), \text{ pentru } |x| \geq 2.$$

$$465. a^{\frac{1}{2}} = x, \quad b^{\frac{1}{12}} = y; \quad a^{\frac{5}{2}} - 2b^{\frac{3}{4}}. \quad 466. \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

$$467. \sqrt[6]{x} = y, \quad \sqrt[6]{a} = b; \quad (y - b)^2 : (y + b). \quad 468. \sqrt[6]{y} = u \text{ și } \sqrt[3]{z} = v; \\ (x - \sqrt[6]{y} + \sqrt[3]{z}) : (x + \sqrt[6]{y} - \sqrt[3]{z}). \quad 469. x^2 - 1. \quad 470. x + y. \quad 471. a \sqrt[3]{a} - \\ - b \sqrt[3]{b}. \quad 472. xy - 1. \quad 473. a^4 - 1. \quad 474. \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy}. \quad 475. a \sqrt{d} - \\ - b \sqrt{cd} - \sqrt{d}.$$

$$476. \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y}. \quad 477. \sqrt{b}(\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}}) : 2b.$$

$$478. \sqrt{xy}. \quad 479. \sqrt{3} - \sqrt{2}. \quad 480. (1 + \sqrt{1 - a^2}) : a.$$

481. — $(a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}) : b^2$. 482. Se amplifică cu $\sqrt[3]{x^2} + y \sqrt[3]{x} + y^2$.
 483. Se utilizează identitatea $\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$ în care se pune $\alpha = \sqrt[n]{a}$ și $\beta = \sqrt[n]{b}$ și se amplifică cu $\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}$. 484. Se amplifică întâi cu $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}$ etc.
 485. Se scrie numitorul $\sqrt[9]{a^3} - \sqrt[9]{b^2}$; v. ex. 483. Numărătorul este $\sqrt[9]{a^{15}} + \sqrt[9]{a^{12}b^2} + \sqrt[9]{a^9b^4} + \sqrt[9]{a^6b^6} + \sqrt[9]{a^3b^8} + \sqrt[9]{b^{10}} = a^2\sqrt[9]{a} + a^2\sqrt[9]{b} + a\sqrt[9]{a}\sqrt[9]{b^2} + ab + b\sqrt[9]{a}\sqrt[9]{b} + b\sqrt[9]{b^2}$. Numitorul este $a^3 - b^2$. 486. Se folosește identitatea $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ în care se pune $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$. Se amplifică întâi cu $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ac}$, obținându-se la numitor $a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}$, apoi ca la ex. 482. 487. Se pune $\sqrt[3]{a - b} = x$, $\sqrt[3]{a + b} = y$ și se amplifică cu $x - y$; obținem $\frac{1}{2b}(\sqrt[3]{a + b} - \sqrt[3]{a - b})$. 488. $1 + 3\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt[4]{8}$
 490. 1° Se amplifică fiecare fracție cu expresia conjugată numitorului. 2° Ca mai sus, avem $\frac{2\sqrt{1} - \sqrt{2}}{4 - 2} + \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{9 \cdot 2 - 4 \cdot 3} + \dots + \frac{n\sqrt{n-1} - (n-1)\sqrt{n}}{n(n-1)} + \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)n} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \dots + \left(\frac{\sqrt{n-1}}{n-1} - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) + \left(\frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right) \equiv 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$.

491. Se ridică la pătrat; rămîne un radical care se izolează și se ridică din nou la pătrat; obținem $4abxy = (cx - ax - by)^2$.

$$492. \text{ ex. 16 consecință; } x + y + z = 3\sqrt[3]{xyz}; (x + y + z)^3 = 27xyz.$$

493. Avem $x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} = a^2$, ridicăm la cub, utilizînd identitatea $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$; obținem $x^4y^2 + x^2y^4 + 3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right) = a^6$; $x^4y^2 + x^2y^4 + 3a^2x^2y^2 = a^6$. 494. Ca mai sus, ridicăm la cub $a^2x^2 + b^2y^2 + 3(axy)^{\frac{2}{3}}\left[(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}}\right] = c^4$ înlocuim aici paranteza cu $c^{\frac{4}{3}}$ și izolăm acest termen, ridicăm din nou la cub, obținem $(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0$.

495. Efectuind calculele, avem $x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{3}} = a^2 - 2xy$; ridicând la cub această egalitate, se deduce $x^5y + xy^5 + 3x^2y^2(a^2 - 2xy) = (a^2 - 2xy)^3$. 496. Se deduce $(a - x)x^{\frac{1}{3}} + (b - y)y^{\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$; se ridică la cub și se găsește $(a - x)^3x + b(a - x)(b - y)xy + (b - y)^3y = 8x^2y^2$.

507. Se scoate factor $\sqrt{x}$ respectiv $\sqrt{y}$; găsim $2xy$.

508. $\sqrt{1-a}$. 509. 1. 510. $4x\sqrt{x^2-1}$.

511. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. 512. Notăm $x = a + b$, $y = a - b$ și atunci $2a = x + y$; $a^2 - b^2 = xy$.

$$520. \sqrt[3]{x^4(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})} + \sqrt[3]{x^4(\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{x^2})} = \sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{y^2}(\sqrt[6]{x^4} + \sqrt[6]{y^4})} = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^3}.$$

522. Amplificăm prima fracție cu $(x - a) - (a\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-a^2})$; numitorul devine $-2ax(1 - ax + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2})$; la numărător iese factor $x - a$. Ambele părți sînt egale cu $(\sqrt{1-a^2} - 1) : a$ (G.M., XLIII, p. 325).

523. Se notează $\sqrt{(x+a):(x+b)} = u$, $\sqrt{(x-a):(x-b)} = v$.

524. Aplicăm $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

525. Avem $yz = x$, deci $E = (xz - y)(xz - y) = 1$.

526. 1° Punem $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, deducem $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, unde $c = \sqrt{a^2 - b}$; trebuie ca $a^2 - b$ să fie pătrat perfect;

2° $2 + \sqrt{3}$; 3° $\frac{1}{2}(\sqrt{14} \pm \sqrt{6})$; 4° $\sqrt{\frac{1}{2}(1+i)} + \sqrt{\frac{1}{2}(1+i)}$, unde $i^2 = -1$; 5° $\sqrt[4]{5}(\sqrt{2} + 1)$; 6° $x + \sqrt{3-x^2}$; 7° $\sqrt{a-1} + 1$; 8° $xy + \sqrt{3x-x^2y^2}$; 9° $\sqrt{3a+2x} - \sqrt{3a-2x}$; 10° $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$; 11° $\sqrt{x} + \sqrt{x-y}$; 12° $a\sqrt{\frac{b}{c}} \pm b\sqrt{-\frac{a}{c}}$.

527. Deosebim două moduri de transformare: 1° $\sqrt{x + \sqrt{z}} + \sqrt{x - \sqrt{z}}$; 2° $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. În cazul al doilea trebuie îndeplinite condițiile: 1) $b^2 - c = m^2$; 2) $b + m = 2n^2$; 3) $a^2 + 2an + m = p^2$, unde m, n, p sînt numere raționale, și în acest caz $x = \frac{1}{2}(a + n + p)$; $y = \frac{1}{2}(a + n - p)$ (v. G.M.F., seria B, nr. 1/1961, p. 16).

$$528. x = 1, y = 2, z = \frac{7}{4}. \quad 529. x = 3, y = 2.$$

$$530. a = 4; \sqrt[3]{16x-1} - 1; \quad 531. \frac{1}{2} (\sqrt[3]{4x^2+2x+4} - \sqrt[3]{2x}).$$

$$532. \sqrt[3]{R\left(R + \frac{c}{2}\right)} - \sqrt[3]{R\left(R - \frac{c}{2}\right)}.$$

533. Rezolvînd, $x = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$, după ex. 526. 1° $a = -\frac{p}{2}$, $b = \frac{p^2}{4} - q$; $a^2 - b = q$, trebuie ca q să fie pătrat perfect. 534. Ridicînd la cub, $a = x^3 + 3xy$, $\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{y(3x^2 + y)}$. Ridicăm acestea la pătrat și scădem $a^2 - b = (x^2 - y)^3$; $x^2 - y = \sqrt[3]{a^2 - b}$. Condiția necesară este ca $a^2 - b$ să fie un cub perfect. Notăm $c = \sqrt[3]{a^2 - b}$ și atunci $y = x^2 - c$. Înlocuim această valoare a lui y în prima ecuație de mai sus, — obținem $4x^3 - 3cx - a = 0$. Dacă transformarea este posibilă, această ecuație va avea o rădăcină rațională.

535. v. ex. 534; $\alpha = 3, \beta = -2$. 536. Ridicînd la puterea a patra, din identificare rezultă $(x + y)^2 + 4xy = a$, $16(x + y)^2xy = b$. Se vede că $(x + y)^2$ și $4xy$ sînt rădăcinile ecuației $t^2 - at + \frac{b}{4} = 0$. Cum $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 > 0$, iar x și y fiind presupuși reali, putem lua $(x + y)^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})$, $4xy = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b})$, din care $(x - y)^2 = \sqrt{a^2 - b}$. Trebuie ca $a^2 - b = k^2$, k fiind număr rațional, și atunci $(x + y)^2 = \frac{1}{2}(a + k) \cdot (x - y)^2 = k$, și în acest caz x și y se prezintă în general sub forma unei sume de doi radicali simpli. Dacă unul din numerele $\frac{1}{2}(a + k)$ sau k este un pătrat perfect, atunci expresiile lui x și y sînt de forma $\alpha + \sqrt{\beta}$. Dacă fiecare din aceste numere este pătrat perfect, x și y sînt numere raționale.

$$\text{Aplicații 1°: } \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 2)} + \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 2)}; \quad 2^\circ \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}};$$

3° $\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha + 1)} + \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha - 1)}$. 537. Se scrie sub forma întreagă, înmulțind cu numitorul primului membru și se ridică apoi la pătrat. 538. Se ridică la cub, ținînd seama de $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$, unde $a - b = 1$.

539. $\sqrt{6(5 - \sqrt{21})} = \sqrt{21} - 3$; $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = 3 - \sqrt{6}$; $E = \sqrt{3}$. 540. Fie x egal cu expresia dată. Se ridică la cub, avînd în vedere $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, $a + b = x$, $x = 2$.

541. Se amplifică fracția cu $\sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$, obținîndu-se

$$E = \frac{1 - \sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2^2} - 2\sqrt[3]{2} + 1)}}{\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2^2} - 1)^3(\sqrt[3]{2} - 1)}} = \frac{1 - \sqrt[3]{(\sqrt[3]{2^2} - 1)^3}}{\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2} - 1)^3}} = \frac{2 - \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2} - 1)}} = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

542. 3. 543. Expresia de sub primul radical se poate scrie succesiv $a^4 - b^4 + a^2 + b^2 + 2(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 - b^2} = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2 + 1 + 2\sqrt{a^2 - b^2}) = (a^2 + b^2)(\sqrt{a^2 - b^2} + 1)^2$; analog sub radicalul al doilea $(a^2 + b^2)(\sqrt{a^2 + b^2} - 1)^2$; $E = 2\sqrt{a^2 + b^2}$. 544. — 1. 545. ab .

546. 1. 547. a . 548. $a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}b = a^{\frac{1}{3}}(a - 8b) = a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 4b^{\frac{2}{3}}\right)$; $E = 0$.

549. $(x + y)^2/4xy$. 550. $1 + a \pm 2\sqrt{a} = (1 \pm \sqrt{a})^2$; $E = (1 - \sqrt{1 - a}) : \sqrt{a}$. 551. Expresia se poate scrie $\left(\sqrt[4]{ab} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1 - \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right) : \left(\sqrt[3]{a} \frac{\sqrt[3]{a^2} - 1}{\sqrt[3]{a} + 1} - \sqrt[3]{a^2} \frac{\sqrt[3]{a} + 1}{\sqrt[3]{a} + 1}\right)$, $\sqrt[3]{a^2} - 1 = (\sqrt[3]{a} - 1)(\sqrt[3]{a} + 1)$; $E = \frac{1}{\sqrt[12]{a^7b^3}}$.

552. $\sqrt{x} = u$, $\sqrt[3]{y} = v$, $\sqrt[4]{z} = w$; $(u + v - w) : (u + v + w)$.

553. $a - 2b = (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{2b})^3 = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{2ab} + \sqrt[3]{4b^2})$; $E = 1$.

554. — $\frac{a}{a + b}$. 555. $1 - \sqrt[4]{a^3} = (1 - \sqrt[4]{a})(1 + \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a^2})$; $E = 1$. 556. 1.

557. 0. 558. $\sqrt{x - a}$.

559. $(a + b) : (2\sqrt{ab})$. 560. $3 : (2\sqrt[3]{y})$. 561. $2x^3$.

562. $(a - b) : b$. 563. $1 : (1 - x^2)$. 564. $\sqrt[3]{\frac{2a}{1 + a}}$.

565. x . 566. Primul membru din egalitatea a doua se poate scrie $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n\right]^2$.

567. Eliminînd numitorii, ultimele două relații sînt identice $(b + c)x + (a - c)y + (a + b)z = 0$. Notăm $2\sqrt{1 - (y - x + z)^2} = m$; avem $b + c = m(y + z)$, $a - c = -m(x + z)$, $a + b = m(y - x)$. Înmulțind aceste relații respectiv cu x , y și z și adunînd, obținem zero.

568. Din condiție deducem (1) $ab + bc + ca = 0$; dacă (1) este satisfăcută, atunci $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} = 0$ și aplicăm ex. 16.

$$569. \sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1); \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1); E=1.$$

570. Avem :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+1} &= \frac{a-b-c \pm \sqrt{(a-b-c)(a+b+c)}}{a+b+c \pm \sqrt{(a-b-c)(a+b+c)}} = \\ &= \frac{\sqrt{a-b-c}(\sqrt{a-b-c} \pm \sqrt{a+b+c})}{\sqrt{a+b+c}(\sqrt{a+b+c} \pm \sqrt{a-b-c})} = \pm \frac{\sqrt{a-b-c}}{\sqrt{a+b+c}}; \end{aligned}$$

$$E = -1. \quad 571. E = b. \quad 572. \text{ Se scrie } x^2(x^2 - 2a) + b; E = 0. \quad 573. 0. \quad 574. 0.$$

$$575. 0. \quad 576. \text{ Se scoate factor } x^{\frac{1}{p}}; E = \left(\frac{a'+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}. \quad 577. E = m^2 : n^2. \quad 578.$$

$$E = (ab)^{\frac{1}{3}} \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad 579. E = \sqrt{mn} : (m-n). \quad 580. \sqrt{k-1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

$$581. E = b : a. \quad 582. 8. \quad 586. -\frac{4}{5}. \quad 587. \frac{8}{9}. \quad 588. \text{ Termenii fracției se anulează pentru } x = -\frac{3}{2}, \text{ sînt deci divizibili cu } 2x+3; E=0. \quad 589. -\frac{4361}{128}.$$

$$590. \frac{1}{4}. \quad 591. 10. \quad 592. \frac{1}{a}. \quad 593. \frac{3}{14}. \quad 594. \frac{3}{5a^2}. \quad 595. \frac{3}{4(b-a)}. \quad 596. \frac{2a^2 - a - 1}{a+1}.$$

$$597. 1. \quad 598. \left(\frac{a-b}{a-c}\right)^2. \quad 599. \frac{a-b+c}{a-b-c}. \quad 600. \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) : \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - 1\right).$$

$$601. 1. \quad 602. 1^\circ \text{ Dacă } n < m, p < q, \text{ valoarea este finită; } 2^\circ n = q, \text{ valoarea este } 1, n > q \text{ valoarea este zero; } 3^\circ n < q, \text{ valoarea este } \infty. \quad 603. -\frac{6}{5}. \quad 604. -16. \quad 605. \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$606. \sqrt{2}. \quad 607. 0. \quad 608. \text{ Se amplifică cu conjugata numărătorului; } 0. \quad 609. \text{ Dacă } b > 0, x_1 = \infty, x_2 = \frac{0}{0} \text{ și amplificînd cu expresia conjugată numărătorului,}$$

$$x_2 = -\frac{c}{b}; \text{ cînd } b < 0, x_1 = -\frac{c}{b}, x_2 = \infty.$$

$$610. \sqrt[6]{x} = u, \sqrt[6]{a} = b; \frac{9\sqrt[6]{a}}{8}. \quad 611. \sqrt[12]{x} = u, \sqrt[12]{a} = b; 3\sqrt[12]{a}. \quad 612. \frac{0}{0}.$$

Apoi se amplifică cu expresia conjugată numărătorului;

$$E = 2x^{m-n} \frac{1}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}}.$$

Dacă $m > n$, $E(0) = 0$; dacă $m = n$, $E(0) = 1$; dacă $m < n$ și $n - m$ este par, $E(0) = \infty$, când $n - m$ este impar, $x \rightarrow 0$, la stînga $E(0-) = -\infty$ și la dreapta $E(0+) = \infty$.

613. Soluția I. Se amplifică fracția cu expresiile conjugate numitorului și numărătorului. La numărător un factor este $x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x^2 + x - 1)$, iar la numitor $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$; se amplifică și se face apoi $x = 2$, obținîndu-se $\frac{5}{4}$. **Soluția a II-a.** Se scrie

$$\left(\frac{\sqrt{x^2 + 3x + 6} - 4}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^3 + 8} - 4}{x - 2} \right) : \left(\frac{\sqrt{5x + 6} - 4}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 2} - 4}{x - 2} \right).$$

Pentru $n = 2$, ambii termeni care compun numărătorul precum și numitorul iau forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Se înmulțește fiecare termen cu expresiile conjugate numărătorilor și se simplifică apoi cu $x - 2$.

614. Împărțim ambii termeni ai fracției cu $x - 2$; avem

$$\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} + \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} + \frac{\sqrt{4x^2+5x+2}-7}{x-2} \right), \text{ aflăm valoarea fiecărei fracții separat; } 11:27.$$

615. $\sqrt{a}$. **616.** Notăm cu A numărătorul și cu B numitorul. Fie factorii conjugăți

$$A' = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^3+1},$$

$$B' = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4+1}.$$

Avem

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{\sqrt{x-1} [2(x+1) + \sqrt{x-1}(1-x^2)]}{\sqrt{x-1} [2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x-1}(1-x^2-x^3)]}.$$

Simplificînd cu $\sqrt{x-1}$ și făcînd pe $x = 2$, se obține $AA'/BB' = \sqrt{2}$; $\frac{A}{B} = \frac{B'}{A'} \sqrt{2}$; $\frac{A}{B} = \sqrt{2}$, căci A' și B' pentru $x = 1$ dau $2\sqrt{2}$.

617. $5/8$. **618.** Se ține seama de identitatea $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Se amplifică cu $\sqrt[3]{(x^2+4)^2} + 2\sqrt{x^2+4} + 4$. $E(2) = \frac{1}{3}$. **619.** $\frac{1}{36}$.

620. Aducem radicalii la același indice și simplificăm fracția cu $\sqrt[3]{x-a}$;
 ∞ . 621. Împărțim termenii fracției cu $x-1$ și amplificăm fiecare fracție, utilizând identitatea $u^3 - v^3 = (u-v)(u^2 + uv + v^2)$. 622. $\frac{2\sqrt[3]{2}}{9}$.

623. Avem
$$\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} + \frac{\sqrt[5]{x}-1}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} + \frac{\sqrt[5]{x}-1}{x-1} + \frac{\sqrt[7]{x}-1}{x-1} \right)$$

și utilizăm identitatea $x-1 = (\sqrt[7]{x}-1)(\sqrt[7]{x^{n-1}} + \sqrt[7]{x^{n-2}} + \dots + 1)$; $217 : 142$.

624. Scriem

$$\left(\frac{\sqrt{3x^3 - 10x^2 + 13} - 2}{x-3} - \frac{\sqrt[3]{5x^2 - 16x + 11} - 2}{x-3} \right) : \left(\frac{\sqrt[4]{27x - 65} - 2}{x-3} + \frac{\sqrt[3]{8x^2 - 25x + 4} - 1}{x-3} \right)$$

și calculăm valoarea fiecărei fracții; $\left(\frac{21}{4} - \frac{7}{6}\right) : \left(\frac{27}{32} + \frac{23}{3}\right) = \frac{392}{817}$. 625. $\frac{3}{2}$.

626. $-\frac{3}{2}$.

627. Pentru $x = a$ obținem nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Avem identitatea

$$(\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a})(\sqrt[p]{x^{p-1}} + \sqrt[p]{x^{p-2}a} + \dots + \sqrt[p]{a^{p-1}}) = x - a.$$

Amplificînd fracția dată cu expresia de forma factorului al doilea din membrul întîi, după simplificarea cu $x - a$ rămîne

$$(\sqrt[p]{x^{p-1}} + \sqrt[p]{ax^{p-2}} + \dots + \sqrt[p]{a^{p-1}}) : (\sqrt[p]{x^{m-1}} + \sqrt[p]{ax^{m-2}} + \dots + \sqrt[p]{a^{m-1}})$$

care pentru $x = a$ dă

$$\frac{p}{m} \cdot a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{p}}.$$

628. $x + a = u$, $2x + a = v$ și utilizăm $u - v = (\sqrt[p]{u} - \sqrt[p]{v})(\sqrt[p]{u^{p-1}} + \sqrt[p]{u^{p-2}v} + \dots + \sqrt[p]{v^{p-1}})$; $n\sqrt[p]{a^{n-1}}$.

629. Numărătorul se scrie $x-1 + x^2-1 + x^3-1 + \dots + x^n-1$ și $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$; $\frac{1}{2}n(n+1)$. 630. $\frac{1}{2}(m-n)$.

631. Pentru $x = 1$ ia forma $\frac{0}{0}$. Scriem (v. ex. 16).

$$E = \frac{x-1 + (\sqrt{x}-1) + \dots + (\sqrt[7]{x}-1)}{\frac{1}{x}-1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt[7]{x}}-1\right)}$$

și împărțim cu $x - 1$, dacă avem în vedere că $(\sqrt[3]{x} - 1) : (x - 1)$ pentru $x = 1$ rezultă $E(1) = -1$.

632. Pentru $x = y = a$ obținem $\frac{0}{0}$. Expresia se poate scrie

$$\frac{(x + y - 2\sqrt{xy})(x + y + 2\sqrt{xy})}{(x + y)(x + y - 2\sqrt{xy})} = \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{x + y}; \quad a < 0, \quad E(a, a) = 0 \quad \text{și}$$

$$a > 0, \quad E(a, a) = 2$$

633. Punem $x - 1 = t$, după simplificarea cu t , rămâne

$$\frac{1}{t}[bt^2 + (a + 3b)t + 2a + 3b].$$

Când $x = 1$, atunci $t = 0$, valoarea este finită dacă $2a + 3b = 0$.

634. $ma + nb = 0$.

635. Se pune $\sqrt[12]{x} = y$ și apoi $y = 1 + t$; $6a + 4b + 3c = 0$, $5a + 2b + c = 0$, sistem omogen în a, b și c . Se deduce $a = -2k$, $b = 9k$, $c = -8k$, k arbitrar (ex. 1146).

636. Împărțim numărătorul cu $x - 1$ iar citul din nou cu $x - 1$; obținem $px^{p+q-2} + 2px^{p+q-3} + 3px^{p+q-4} + \dots + (q-1)px^p + qpx^{p-1} + q(p-1)x^{p-2} + \dots + q \cdot 2x + q \cdot 1$. Pentru $x = 1$ obținem valoarea cerută

$$p(1 + 2 + \dots + q) + q(1 + 2 + \dots + p - 1) = \frac{1}{2}pq(p + q).$$

637. $\frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$.

638. Simplificăm cu $x - 1$; $\frac{n(n + 1)}{2p}$.

639. Scriem $x^m - 1 = [1 + (x - 1)]^m - 1 = m(x - 1) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(x - 1)^2 + \dots$; la fel pentru $x^n - 1$, din care $(x^m - 1)(x^n - 1) = mn(x - 1)^2 + \frac{mn(m+n-2)}{1 \cdot 2}(x - 1)^3 + \text{mult. } (x - 1)^4$. Frația dată ia forma $\frac{mn(m+n-2)}{1 \cdot 2} + \text{mult. } (x - 1)$, care pentru $x = 1$ dă $\frac{mn(m+n-2)}{1 \cdot 2}$.

640. $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$; $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$; $\sin 2x = 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x$; $\frac{1}{8}$.

641. $\cos 3x = \cos x(1 - 4 \sin^2 x)$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$642. \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{(\sin x)(3 - 4 \sin^2 x)}{2 \sin x \cos x}; \quad \frac{3}{2}. \quad 643. \operatorname{tg} x - 1 = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4};$$

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 2 \left(\sin x - \sin \frac{\pi}{4} \right) = \dots; \quad \sqrt{2}. \quad 644. -3.$$

$$645. u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2); \quad E(o) = \frac{3}{2}.$$

$$646. -6 \cos^2 2a. \quad 647. \infty.$$

$$648. 1 - \cos 4x = 2 \sin^2 2x; \quad E(0) = E(\pi) = 1$$

$$649. \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a = \frac{\sin(x-a)}{\cos x \cos a}; \quad \sin 2x - \sin 2a = 2 \sin(x-a) \cos(x+a);$$

$$E(a) = 1 : 2 \cos^2 a \cos 2a.$$

$$650. E(x) = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)} = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos x\right)} = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{4 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)};$$

$$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad 651. \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \text{ și amplificăm cu } \cos x + \sqrt{2 \cos^2 x - 1}; \quad \frac{1}{2}.$$

ECUAȚII DE GRADUL I ȘI II

652. 6. 653. 3. 654. 3. 655. 15. 656. 7. 657. 10. 658. —2.
 659. 18. 660. 5. 661. Ecuația nu are soluție, deoarece $\frac{x}{x-a} - \frac{a}{x-a} = \frac{x-a}{x-a} = 1$, adică diferența celor doi membri nu este nulă.
 662. $x = 2a$, deoarece $\frac{x^2}{x-2a} - \frac{4a(x-a)}{x-2a} = \frac{x^2 - 4ax + 4a^2}{x-2a} = \frac{(x-2a)^2}{x-2a} = x-2a$, adică diferența celor doi membri poate fi făcută nulă pentru $x = 2a$. 663. Nu are soluție, deoarece $x = 0$ anulează numitorul.
 664. 13. 665. 2,5 666. 4. 667. 1. 668. 3. 669. $8/3$.
 670. $-3/4$. 671. $3/4$. 672. $2/5$. 673. $3(m-4)x^2 - (18m-67)x + 26m - 88 = 0$; $m = 4$; $x = 3\frac{1}{5}$. 674. 0. 675. $\frac{7}{8}$. 676. 1.
 677. $\frac{1}{2}(a-b)$. 678. $-\frac{a+b}{2}$. 679. $\frac{ab}{a+b}$. 680. $-2a$. 681. a .
 682. $a+b+c$. 683. $a+b+c$. 684. $\frac{ab}{a+b}$. 685. $a^2 + b^2 - c^2$.
 686. $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$. 687. $a^2 - c^2$. 688. $\frac{1}{a^2 + a + 1}$. 689. $\frac{2}{a+b}$.
 690. 0. 691. b . 692. ab . 693 — 694. $a+b+c$. 695. 1, $a \neq \pm b$.
 696. În partea întâi este o diferență de pătrate; $\frac{2ab}{a+b}$, $a \neq b$.
 697. 1° Dacă A este un număr real, avem

$$|A| = \begin{cases} A & \text{dacă } A > 0 \\ 0 & \text{dacă } A = 0; \quad |x| = 5; \quad \text{dacă } x < 0, \text{ atunci} \\ -A & \text{dacă } A < 0 \end{cases}$$

$|x| = -x$, $-x = 5$, rădăcina $x_1 = -5$; dacă $x > 0$, atunci $|x| = x$, $x = 5$, rădăcina $x_2 = 5$; 2° $|x| = -1$, imposibilitate. 698. 1° Pentru

$x < 0$, avem $-x = x + 1$, rădăcina $x = -\frac{1}{2}$; dacă $x > 0$, atunci $x = x + 1$, imposibilitate; $2^\circ x < 0$, $\frac{-x}{x} = -1$, oricare ar fi x negativ; $x > 0$, imposibilitate. **699.** Pentru $x > 1$, avem $x - 1 = 2$, $x_1 = 3$; dacă $x < 1$, $-(x - 1) = 2$, $x_2 = -1$, $2^\circ x = 4$.

700. $1^\circ x_1 = \frac{17}{19}$, $x_2 = 3$; $2^\circ x = 3$.

701. $1^\circ x \geq 6$; $2^\circ x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

702. $1^\circ x_1 = 1$, $x_2 = \frac{11}{2}$; $2^\circ x = -2$, iar pentru $x \geq 2$ identitate.

703. $x = 3$; valoarea $x = 2$ nu convine, anulînd numitorul.

704. Se trece primul termen în membrul doi; $\frac{6}{5}$; $\frac{12}{5}$. **705.** -1 , $1\frac{23}{39}$.

706. $-\frac{1}{3}$, valoarea $\frac{1}{2}$ nu convine, anulînd numitorul. **707.** $\frac{39}{59}$,

iar $\frac{1}{2}$ nu convine. **708.** $a - 1$, $a - 3$. **709.** $\frac{4a + 3}{a + 1}$, 1 .

710. $a, \frac{2ab}{a + b}$. **711.** $\frac{a^2 + b^2}{a + b}, \frac{2ab}{a + b}$. **712.** $a \neq 1$, $x_1 = x_2 = 1$.

713. $a + b \neq 0$, $-a$, $-b$. **714.** $a + 1$, $b + 1$.

715. $\frac{a - c}{c - d}$, 1 . **716.** 0 , $-a^3$. **717.** $-\frac{2b}{a}$, $2, \frac{b - 2a}{a - 2}$.

718. $-\frac{a - 1}{a + 2}$, $-\frac{a - 1}{a - 1}$. **719.** $1, \frac{b + c - 2a}{a + c - 2b}$.

720. $\frac{a - 2b}{a - b}$, $-\frac{a + b}{a + 2b}$. **721.** $a + b + c, \frac{3}{2}(a + b + c)$.

722. $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$, avem $x^2 + x + 1 = 0$,

723. 1 , $-\cos \alpha$. **724.** 1 , $\operatorname{tg}^2 \alpha$. **725.** $\cos a$, $\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}$.

726. $\sin a, \frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}$. **727.** $1 - \cos a$, $1 - \sin a$.

728. $1 - \cos a, \frac{\cos a}{1 - \cos a}$. **729.** Rădăcinile ecuației sînt $-\frac{p}{2} \pm$

$\pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} \right)$. Vom deosebi cazurile: I rădăcini

reale și $1^\circ q > 0$, $2^\circ q < 0$; II rădăcini imaginare, I. $1^\circ q > 0$, punem (1) $\sin^2 \varphi = \frac{4q}{p^2}$ sau $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{q}}{|p|}$; rădăcinile în acest caz sînt $-\frac{p}{2}(1 \pm \pm \cos \varphi)$, adică $x_1 = -p \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, $x_2 = -p \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, expresii calculabile prin logaritmi. Pentru a le scrie mai simplu, scoatem din (1) pe $|p|$ și avem $|p| = \frac{2\sqrt{q}}{\sin \varphi}$ sau $p = \varepsilon \frac{2\sqrt{q}}{\sin \varphi}$, $\varepsilon =$ fiind ± 1 , în care semnul este același cu al lui p . Cu acestea

$$x_1 = -\varepsilon \sqrt{q} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = -\varepsilon \sqrt{q} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Practic determinăm φ cu formula (1) și apoi se înlocuiește în ultimele expresii ale rădăcinilor.

$$2^\circ q < 0; \text{ notăm } \operatorname{tg}^2 \varphi = -\frac{4q}{p^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{-q}}{|p|} \text{ și ca mai sus } x_1 = \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}, x_2 = -p \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} \text{ și apoi } x_1 = \varepsilon \sqrt{-q} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, x_2 = -\varepsilon \sqrt{-q} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

II. Punem $\frac{4q}{p^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ și se obține $x_1 = \sqrt{q}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $x_2 = \sqrt{q}(\cos \varphi - i \sin \varphi)$ 730. v. ex. precedent; avem $p = -\frac{6718}{2584}$, $q = \frac{428}{2584}$ și $\varepsilon = -1$; $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{q}}{|p|}$, $x_1 = \sqrt{q} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $x_2 = \sqrt{q} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$, $\log \sin \varphi = \bar{1},49565$, $\varphi = 18^\circ 14' 41''$ $x = 0,0653486$, $x_2 = 2,53453$. 731—733. Ca în ex. 729—730. 734. Avem $p = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}$, $q = -\frac{\sin \gamma}{\cos \alpha}$. Deoarece $q < 0$ și $p > 0$, ($\varepsilon = +1$), utilizăm formulele $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{-q}}{|p|}$, $x_1 = \sqrt{-q} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $x_2 = -\sqrt{-q} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ și înlocuind p și q prin valorile lor, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{\sin \gamma \cos \alpha}}{\operatorname{tg} \beta}$, $x_1 = \sqrt{\frac{\sin \gamma}{\cos \alpha}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{\sin \gamma}{\cos \alpha}} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$, $x_1 = 0,8139$, $x_2 = -1,0831$.

735. La fel ca în ex. 697—702. Pentru $x < -\frac{3}{2}$, $|2x + 3| = -2x - 3$, $x^2 + 2x + 3 = 0$, rădăcini imaginare; dacă $x > -\frac{3}{2}$, $|2x + 3| = 2x + 3$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = 3$, valoarea $x = -1$ nu convine, deoarece $-1 < \frac{3}{2}$.

736. Avem

| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ |
|-----------|-----------|------|-----|-----------|
| $x^2 - 1$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| | | $+$ | 0 | $+$ |

Pentru $x < -1$ și $x > 1$, $|x^2 - 1| = x^2 - 1$, $x^2 - 1 = 2$, $x_{1,2} = \mp \sqrt{3}$; dacă $-1 < x < 1$, $|x^2 - 1| = 1 - x^2$, $1 - x^2 = 2$, rădăcini imaginare.

737. $x \leq -3$, $x > 2$. 738. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $m = 2$. 739. $m_1 = 2$, $m_2 = -\frac{1}{7}$. 740. $m = 5$. 741. $m = -2$, $m = \frac{33}{8}$. 742. $m_1 = -\frac{1}{4}$, $m_2 = \frac{213}{125}$.

743. $m = \pm 2$. 744. $\frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_1 + x_2}{5}$; $x_1 = \frac{3}{5}(x_1 + x_2)$ etc. $m = -\frac{62}{85}$. 745. $m = \pm \frac{1}{2}$. 746. $m = -\frac{1}{3}$, $m = 2$. 747. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 +$

$+ x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -9$; $(m+1)(m^2+5m+1)=0$, $m=-1$ etc. 748. $m=0$, $m=15$. 749. $m=10$. 750. $[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2] + [(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)] = 0$, $m_1=m_2=1$, $m_3=2$. 751. 1° $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2-2ac}{a^2}$; 2° $x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$;

3° $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \pm \frac{b}{a^2}\sqrt{b^2-4ac}$; 4° $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \frac{3abc-b^3}{a^3}$; 5° $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] = \pm \frac{1}{a^3}(b^2 - ac)\sqrt{b^2-4ac}$; 6° și 7° $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \frac{1}{a^4}(b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2)$; $x_1^5 + x_2^5 = (x_1 + x_2)[x_1^4 + x_2^4 -$

$- x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) + x_1 \cdot x_2]$. Să calculăm altfel. Avem (1) $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$; adăugînd membru cu membru și punînd $x_1^p + x_2^p = s_p$, obținem $as_2 + bs_1 + 2c = 0$; înlocuind $s_1 = -b/a$, deducem pe s_2 ; multiplicînd relațiile (1) respectiv cu x_1^{p-2} și x_2^{p-2} și adunînd membru cu membru, obținem $as_p + bs_{p-1} + cs_{p-2} = 0$, relație care ne permite să aflăm din aproape în aproape s_3, s_4, s_5 etc. Se deduce

$$s_5 = -\frac{1}{a^5}(b^5 - 5ab^3c + 5a^2bc^2);$$

$8^\circ - 10^\circ$ Avem

$$\frac{1}{x_1^p} + \frac{1}{x_2^p} = \frac{x_1^p + x_2^p}{(x_1x_2)^p}; \quad s_{-1} = -\frac{b}{c}, \quad s_{-2} = \frac{b^2-2ac}{c^2}, \quad s_{-3} = \frac{3abc-b^3}{c^3};$$

$$11^\circ \quad 4x_1x_2(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 - (x_1^3 + x_2^3) = \frac{b^3 - 7abc + 2a^2c}{a^3};$$

$$12^\circ \frac{3(x_1 + x_2) + 9x_1 x_2 + 1}{-18(x_1 + x_2) + 4x_1 x_2 + 81} = \frac{a - 3b + 9c}{81a + 18b + 4c};$$

$$13^\circ \frac{a^2(x_1^2 + x_2^2) + 2ab(x_1 + x_2) + 2b^2}{[ab(x_1 + x_2) + a^2x_1x_2 + b^2]^2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2};$$

$$14^\circ s = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}, \quad s^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = -\frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{c}{a}};$$

$$s = \sqrt{-\frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{c}{a}}}. \quad 15^\circ s = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}, \quad s^5 = x_1 + 4\sqrt[4]{x_1^3x_2} + 6\sqrt[4]{x_1^2x_2^2} + 4\sqrt[4]{x_1x_2^3} + x_2 = (x_1 + x_2) + 4\sqrt[4]{x_1x_2}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) + 6\sqrt{x_1x_2};$$

$$s = \sqrt{-\frac{b}{a} + 4\sqrt[4]{\frac{c}{a}}\sqrt{-\frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{c}{a}}} + 6\sqrt{\frac{c}{a}}}.$$

$$752. \text{ Avem } e_1 = \frac{y_1}{x_1^3} + \frac{y_2}{x_2^3} = \frac{x_1^2 + mx_1 + m^2}{x_1^3} + \frac{x_2^2 + mx_2 + m^2}{x_2^3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} +$$

$$+ m\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) + m^2\left(\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}\right) = \frac{s_1}{x_1x_2} + m\frac{s_2}{(x_1x_2)^2} + m^2\frac{s_3}{(x_1x_2)^3}; \quad x_1^p + x_2^p = s_p.$$

Dar $s_1 = 2$, $s_2 = 4 - 2m$, $s_3 = 8 - 6m$ și $x_1x_2 = m$, astfel $E = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{2}{m}(6m^2 + 8m + 7)$. **753.** $E = a^4(x_1x_2)^2 + a^2b^2(x_1^2 + x_2^2) +$

$$+ b^4 = \left(\frac{a^2q^2 + b^2p^2}{p^2 - a^2}\right)^2. \quad 754. x_1^2 + x_2^2 = x'^2 + x''^2; \quad p^2 - 2 = 1 - 2p,$$

$p_1 = 1$, $p_2 = -3$. **755.** $3(x_2 - x_1)x^2 - 3(x_2^2 - x_1^2)x + x_2^3 - x_1^3 = 0$. Împărțind cu $x_2 - x_1 \neq 0$ și cu $mx_1 + x_2 = p$, $x_1x_2 = q$, $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$, rămâne $3x^2 - 3px + p^2 - q = 0$. **756.** Se elimină x_1 , x_2 între relațiile dintre rădăcini și coeficienți și relația dată; găsim

$$(ap + nb)(ap + mb) + ac(m - n)^2 = 0.$$

$$757. x_1 = -\left(\frac{c-1}{b+1}\right)^2, \quad x_2 = -\left(\frac{c+1}{b-1}\right)^2; \quad E = \pm \frac{b+c}{1+bc}.$$

758. 1° Se elimină m între relațiile dintre rădăcini și coeficienți $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 4$, $2^\circ m = 1$, $x_1 = x_2 = -2$.

759. Efectuăm calculele și raționalizăm, $(2a - b)^2 = a^2 - ab + ac$.

760. $1^\circ (a + 1)x^2 - 4x + 4 - a = 0$; $2^\circ a_1 = -3$, $a_2 = -\frac{1}{9}$.

761. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{p}{q-1}$; $E = \cos^2(\alpha + \beta)[\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) + p\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + q]$; exprimăm $\cos(\alpha + \beta)$ în funcție de $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; $E = q$. **762.** $1^\circ y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2) = -3p$, $y_1y_2 = 5x_1x_2 + 2(x_1^2 + x_2^2) = q + 2p^2$,

$$y^2 + 3py + 2p^2 + q = 0; \quad 2^\circ y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q, \quad y_1y_2 = x_1^2x_2^2 = q^2; \quad y^2 - (p^2 - 2q)y + q^2 = 0.$$

$$3^\circ y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} \text{ etc.}; \quad qy^2 + p(q+1)y + (q+1)^2 = 0.$$

$$4^\circ qy^2 - (p^2 - 2p)y + q = 0. \quad 5^\circ (q - p + 1)y^2 - (p^2 - 2q - p)y + q = 0.$$

$$6^\circ qy^2 + (4q - p^2)y + 4q - p^2 = 0. \quad 7^\circ p^2qy^2 + p^2(q - p^2)y + (p^2 - q)^2 = 0. \quad 8^\circ qy^2 + (p^3q - 3pq^2 + p)y + q^4 + p^2q - 2q^2 + 1 = 0.$$

763. Se deduce $2y_1y_2 - (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + 2x_1x_2 = 0$, $2y_1y_2 - 3(y_1 + y_2) + 4 = 0$. Înlocuind pe $x_1 + x_2$ și x_1x_2 și scăzând ultimele relații una din alta, $y_1 + y_2 = 2$, $y_1y_2 = 1$; $y^2 - 2y + 1 = 0$. **764.** $1^\circ qX^2 + p(p^2 - 3q)X + q^2 = 0$, $2^\circ q^2y^2 + (p^3 - 3pq)y + q = 0$; $\Delta = (p^2 -$

$$- 4q)(p^4 - 2p^2q + q^2) = \Delta_x(p^4 - 2p^2q + q^2) \quad \mathbf{765.} \quad x_2 = x_1 \frac{\sqrt[3]{3}}{2}, \text{ rezultînd c\^a } \\ 2b^2(7\sqrt[3]{3} - 12) = ac. \quad \mathbf{766.} \quad a^2a_1^2z^2 - aba_1b_1z + acb_1^2 + a_1c_1b^2 - 4aa_1cc_1 = 0.$$

$$\mathbf{767.} \quad 1^\circ y^2 + q(p^2 - 2q)y + p^5 - 4p^3q + q^4 = 0. \quad 2^\circ \Delta = -(q+2)(4q - 1)(q-2); \quad q \leq -2, \quad \frac{1}{4} \leq q \leq 2.$$

$$\mathbf{768.} \quad \operatorname{tg}(a+b) = \sqrt[3]{3}; \quad 1^\circ \sqrt[3]{3} + p - \sqrt[3]{3}q = 0. \quad 2^\circ \operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} 2b = 2 \operatorname{tg} a/(1 - \operatorname{tg}^2 a) + \dots; \quad [(q+1)^2 - p^2z^2 - 2p(q-1)z + 4q = 0.$$

769. $x_1 + x_2, x_1x_2$ etc. **770.** $(b - a^2)y^2 - 2a(b - a^2)y + b(b - a^2) = 0$. Dacă $b - a^2 \neq 0$, ecuațiile au aceleași rădăcini, dacă $b - a^2 = 0$, atunci

$$x_1 = x_2 = a \text{ și transformarea devine } x = a. \quad \mathbf{771.} \quad \frac{\beta + 1}{\beta - 1} = \frac{b^2 - 2ac + 2a^2\alpha}{b\sqrt[3]{b^2 - 4ac}}.$$

$$\mathbf{772.} \quad 4 \sin^2 \alpha (3 \sin^2 \alpha - 2) = 0.$$

$$\mathbf{773.} \quad \text{Fie } P(x) = Ax^2 + Bx + C. \quad P(x) = -x^2 + (a+b+c)x; \quad \alpha = -\frac{1}{4}(a+b+c)^2. \quad \mathbf{774.} \quad x_1^3 + x_2^3 + x_1^2x_2^2 = 3k^2 \geq 0. \quad \mathbf{775.} \quad 1^\circ 0 \leq m \leq 4.$$

Se elimină m între P și S , găsim $(S - 4)^2 P = S^2$. **776.** $\Delta_1 = p^2 - 4q$; $\Delta_2 = (q+2)^2 \Delta_1$; $\Delta_3 = p^2 \Delta_1$; $\Delta_4 = (p^2 - q)^2 \Delta_1$; $\Delta_5 = p^2(p^2 - 2q)^2 \Delta_1$.

Între rădăcinile primelor două ecuații există relația $X_1 = x_2 + \frac{2}{x_1}$, $X_2 =$

$$= x_1 + \frac{2}{x_2}. \quad \mathbf{777.} \quad 1^\circ x_1 = -x_2, \text{ cînd } m = 0; \quad 2^\circ m = -\frac{13}{3}; \quad 3^\circ m = -1;$$

$$4^\circ m = -\frac{7}{6}; \quad 5^\circ \text{ Se înlocuiește valoarea rădăcinii dată în ecuație, obți-}$$

nîndu-se $m = -2$. Nu se poate afirma că a doua rădăcină este $x_2 = -$

$$-\frac{1}{2}(-2 - \sqrt[3]{5}) \text{ numai dacă } m \text{ ar fi presupus rațional; } 6^\circ m_1 = -3,$$

$$m_2 = -318 : 5; \quad 7^\circ m + 6 = 0.$$

778. Discriminantul $\Delta = -11m^2 + 30m + 9$ are rădăcinile $m_1 = -3/11$, $m_2 = 3$.

| m | Δ | P | S | Rădăcinile ecuației |
|-----------------|----------|----------|----------|--|
| $-\infty$ | — | + | — | imaginare |
| $-\frac{3}{11}$ | — | + | 0 | imaginare |
| $-\frac{3}{11}$ | — | + | + | imaginare |
| $-\frac{3}{11}$ | 0 | + | + | reale, egale și pozitive $x_1 = x_2 = 3/2$ |
| $-\frac{3}{11}$ | + | + | + | reale și diferite, ambele pozitive |
| $-\frac{1}{5}$ | + | ∞ | ∞ | reale, $x_1 = \infty$, $x_2 = 3/8$ |
| $-\frac{1}{5}$ | + | — | — | reale, diferite, de semn contrar, cea negativă, mai mare în valoare absolută |
| 0 | + | 0 | — | reale, diferite, $x_1 = 0$, $x_2 < 0$ |
| 0 | + | + | — | reale, diferite, ambele negative |
| 3 | 0 | + | — | reale, egale și negative $x_1 = x_2 = -3/4$ |
| $+\infty$ | — | + | — | imaginare |

779. $\Delta = 14(11 - m)$; pentru $m = 11$ rădăcini reale și egale, pentru $m < 11$ rădăcini reale și diferite, iar pentru $m > 11$ rădăcini imaginare.

780. Discriminantul $\Delta = 4m(m^2 - 4m + 6)$ are factorul al doilea totdeauna pozitiv. Avem tabloul discuției.

| m | Δ | P | S | Rădăcinile ecuației |
|-----------|----------|----------|----------|--|
| $-\infty$ | — | + | + | imaginare |
| 0 | 0 | 0 | 0 | $x_1 = x_2 = 0$ |
| 0 | + | — | — | reale, diferite, de semn contrar, cea negativă mai mare în valoarea absolută |
| 2 | + | ∞ | ∞ | $x_1 = \infty$, $x_2 = 1/2$ |
| 3 | + | + | + | reale, diferite, ambele pozitive |
| 3 | + | 0 | + | reale, diferite, $x_1 = 0$, $x_2 > 0$ |
| 3 | + | — | + | reale, diferite, de semn contrar, cea pozitivă mai mare în valoare absolută |
| $+\infty$ | — | + | — | imaginare |

781. Discriminantul $\Delta = 9m^2 + 24m + 16 = (3m + 4)^2 \geq 0$. Ecuația admite rădăcini reale, oricare ar fi m real.

782. Discriminantul $\Delta = 4$; ecuația are totdeauna rădăcinile reale.

783. Discriminantul $\Delta = 2m^2 + 3m + 1$. Rădăcinile sînt reale și diferite pentru $m < -1$ și $m > -1/2$; reale și egale pentru $m = -1$ și $m = -1/2$; imaginare pentru $-1 < m < -\frac{1}{2}$, $m = 0$, o rădăcină ∞ etc.

784. $\Delta = (m^2 - 2m - 3)(m^2 + 2m - 3)$ și $\Delta = 0$ pentru $m = \pm 1$ și $m = \pm 3$, cînd ecuația are rădăcini reale și egale. Pentru $m < -3$, $-1 < m < 1$ și $m > 3$ rădăcinile sînt reale și diferite; pentru $-3 < m < 1$ și $1 < m < 3$, rădăcini imaginare. 785. $\Delta = -7m^2 - 16m$; pentru $m = -16/7$ și $m = 0$ rădăcini reale și egale; pentru $-16/7 < m < 0$ rădăcini reale; pentru $m < -16/7$ și $m > 0$ rădăcini imaginare; pentru $m = -1$ o rădăcină infinită. 786. $\Delta = m^2 + 3m - 4$; pentru $m = -4$ și $m = 1$ rădăcini reale și egale; $m < -4$ și $m > 1$ rădăcini reale și diferite, $-4 < m < 1$, imaginare. 787. $\Delta = -3m^2 + 6m + 1$, $m_1 = (3 - 2\sqrt{3}) : 3$, $m_2 = (3 + 2\sqrt{3}) : 3$, rădăcini reale pentru $m_1 < m < m_2$.

788. $\Delta = -8m^2 + 8m + 1$, rădăcini reale pentru $-\frac{2 - \sqrt{6}}{4} \leq m \leq \frac{2 + \sqrt{6}}{4}$. 789. $(a + b + c)x^2 + 2(ab + bc + ca)x + 3abc = 0$, $\Delta = (b^2 - bc + c^2)a^2 - bc(b + c)a + b^2c^2$. Scris ordonat după puterile lui a , discriminantul este un trinom de gradul II în a , care avînd rădăcinile imaginare și primul termen pozitiv, este totdeauna pozitiv; sau $\Delta = \frac{1}{2}[(ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2] \geq 0$. 790. Rădăcini reale

pentru $m \leq 2$. Trebuie ca $P > 0$ și $S < 0$, condiții ce nu pot fi îndeplinite simultan, deoarece $S < 0$ pentru $0 < m < 1$, dar atunci $P < 0$.

791. 1° $\Delta > 0$, iar $P < 0$; $m < -10$ sau $m > 0$; 2° $x_1 + x_2 = S$, $x_1x_2 = P$, $5S = 2P + 12$; 3° 2 și 3. 792. $x^2 + px + q = 0$; $x^2 - 2(m + 1)x + m + 7 = 0$; rădăcini reale pentru $m \leq -3$ și $m \geq 2$; imaginare pentru $-3 < m < 2$; reale și egale pentru $m_1 = -3$, $m_2 = 2$.

793. 1° $\Delta = x^2 + 4y$; ecuația $x^2 + 4y = 0$ reprezintă o parabolă (fig. 3). Parabola împarte planul în două regiuni, una interioară ei, I, și alta exterioară ei, II; în I, $\Delta < 0$, iar în II $\Delta > 0$, pe parabolă $\Delta = 0$. 2° Rezolvînd sistemul în t_1 și t_2 ,

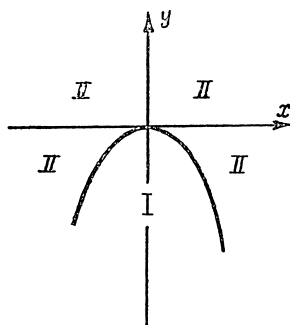


Fig. 3

găsim $t_1 = 1$, $t_2 = 3$. Înlocuind succesiv în ecuația dată pe t_1 și t_2 , deducem sistemul $4y = 0,8x + 16y - 4 = 0$; $x = 0,5$, $y = 0$.

794. 1° Scriem ecuația astfel

$$m + 1 - \frac{2m}{x} + \frac{m-3}{x^2} = 0$$

sau $(m-3)u^2 - 2mu + m + 1 = 0$, $\frac{1}{x} = u$; cînd $m \rightarrow -1$, $u_1 \rightarrow 0$ și

$u_2 \rightarrow \frac{1}{2}$. 2° Se scrie ecuația $\left(1 + \frac{1}{m}\right)x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{m} = 0$; cînd $m \rightarrow -\infty$

sau $m \rightarrow \infty$ atunci $x^2 - 2x + 1 = 0$, deci $x_1 = x_2 = 1$.

Se poate proceda și astfel

$$x = \frac{m \pm \sqrt{2m+3}}{m+1} = \frac{m \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{m} + \frac{3}{m^2}}\right)}{m \left(1 + \frac{1}{m}\right)}; \text{ cînd } m \rightarrow \pm \infty, x \rightarrow 1.$$

795. Avem $a_2 = a_1q$, $a_3 = a_1q^2$ și $f(1) = a + b + c = a_1$, $f(2) = 4a +$
 $+ 2b + c = a_1q$, $f(3) = 9a + 3b + c = a_1q^2$. Se deduce $a = \frac{1}{2}a_1(q-1)^2$,

$b = -\frac{1}{2}a_1(q-1)(3q-5)$, $c = a_1(q^2 - 3q + 3)$, $q = 1$, $a = b = c = 0$.

fie $q \neq 1$. Ecuația este $(q-1)^2x^2 - (q-1)(3q-5)x + 2(q^2 - 3q + 3) = 0$,

$a_1 \neq 0$. Calculînd $\Delta = (q-1)^2(q^2 - 6q + 1)$, $P = 2 \frac{q^2 - 3q + 3}{(q-1)^2}$, $S =$

$= \frac{3q-5}{q-1}$. Avem pentru $q < 3 - 2\sqrt{2}$ rădăcini reale și pozitive; $q = 3 -$

$-2\sqrt{2}$, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}(4 + \sqrt{2})$, $q = 1$, identitate; $q = 3 + 2\sqrt{2}$, $x_1 =$

$= x_2 = \frac{1}{2}(4 - \sqrt{2})$; $q > 3 + 2\sqrt{2}$, rădăcini reale și pozitive; pentru

restul valorilor lui q , rădăcini imaginare.

796. Notăm cu I și II ex. cu + respectiv - și cu III pe $x^2 - [3mx +$
 $+ 4(m^2 - 25)] = 0$. Se discută III. Valorile reale obținute la III vor fi

acceptabile pentru I și II, cînd expresia de sub radical este pozitivă.

Rezultă: $m < -5$, I și II o rădăcină; $m = -5$, I, 2 rădăcini și II $x = 0$;

$-5 < m < -4$, I, două rădăcini; $m = -4$, I, $x = -6$; $m = 4$, II $x =$

$= 6$; $4 < m < 5$, II, două rădăcini; $m = 5$, I, $x = 0$, II $x_1 = 0$, $x_2 =$

$= 15$; $m > 5$, I și II o rădăcină.

797. 1° Substituim $x = y + m$ și avem

$$(1) ay^2 + (2am + b)y + am^2 + bm + c = 0,$$

cu rădăcinile y_1 și y_2 și $\Delta = b^2 - 4ac$, același cu al ecuației date. Din relația de substituție avem $y = x - m$, $y_1 = x_1 - m$, $y_2 = x_2 - m$. Întrucît $x_1 < m$ și $x_2 < m$, y_1 și y_2 sînt negative, deci $y_1 y_2 > 0$ și $y_1 + y_2 < 0$, adică $\frac{am^2 + bm + c}{a} > 0$ și $-\frac{2am + b}{a} < 0$ cu $\Delta \geq 0$. 2° Prin aceeași substituție $y_1 = x_1 - m$ și $y_2 = x_2 - m$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, deoarece $x_1 > m$ și $x_2 > m$, deci $y_1 y_2 > 0$, $y_1 + y_2 > 0$ sau condițiile $\frac{am^2 + bm + c}{a} > 0$ și $-\frac{2am + b}{a} > 0$ cu $\Delta \geq 0$. 3° Ca la 1°; $x_1 < m$, $x_2 > m$; $y_1 < 0$ și $y_2 > 0$, deci $y_1 y_2 < 0$, adică $\frac{am^2 + bm + c}{a} < 0$ cu $\Delta \geq 0$. 4° Substituim $y = \frac{x - m}{x - n}$ sau $x = \frac{ny - m}{y - 1}$. Ecuația dată devine

(2) $(an^2 + bn + c)y^2 - (2amn + bm + bn + 2c)y + (am^2 + bm + c) = 0$; $\Delta = (b^2 - 4ac)(m - n)^2$, deci rădăcinile ecuației (2) sînt reale pentru aceleași valori ale lui a , b , c . Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației date și y_1 , y_2 rădăcinile ecuației (2). Avem

$$(3) \quad y_1 = \frac{x_1 - m}{x_1 - n}, \quad y_2 = \frac{x_2 - m}{x_2 - n}.$$

Pentru ca $m < x_1 < n$ și $m < x_2 < n$, trebuie ca $y_1 < 0$, $y_2 < 0$, numărătorii expresiilor (3) fiind pozitivi, iar numitorii negativi. Avem deci $y_1 y_2 > 0$ și $y_1 + y_2 < 0$, adică $\frac{am^2 + bm + c}{an^2 + bn + c} < 0$ și $\frac{2amn + bm + bn + 2c}{an^2 + bn + c} < 0$ cu $\Delta \geq 0$. 5° Trebuie ca $x_1 < m < x_2$ și $x_1 < n < x_2$, ca la punctul 3° și rezultă

$$\frac{am^2 + bm + c}{a} < 0 \quad \text{și} \quad \frac{an^2 + bn + c}{a} < 0 \quad \text{cu} \quad \Delta \geq 0.$$

798. — $\frac{5}{4} \leq m < -1$, $1 - \sqrt{2} < m < 1$, $m > 1 + \sqrt{2}$ (v. ex. precedent).

799. — $1 < m < 3$, $m > 8$ (v. ex. 780). 800. $m < -6$, $-\frac{7}{6} < m \leq -\frac{2}{3}$ și $3 \leq m < +\infty$.

801. $\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} < m < 1$. 802. $0 < m < 1$.

803. — $1 < m \leq 2(2 - \sqrt{6})$. 804. $4 \leq m \leq \frac{25}{4}$.

805. $\frac{1 + \sqrt{65}}{8} \leq m < \frac{5}{4}$.

806. Înlocuim $\sin 2x$ și $\cos 3x$ în funcție de arcul simplu x ; obținem $\cos x (4 \sin^2 x - 2 \sin x + m - 1) = 0$, din care $\cos x = 0$ cu soluțiile $x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ și

$$(1) \quad 4 \sin^2 x - 2 \sin x + m - 1 = 0.$$

Înlocuim $\sin x = y$ și avem (1') $4y^2 - 2y + m - 1 = 0$. Rădăcinile acestei ecuații trebuie să fie cuprinse între -1 și $+1$, mai departe ca în ex.

797. 4° Ecuația (1) are rădăcini dacă $-1 < m < \frac{5}{4}$, $x = 2k\pi +$

$+\arcsin \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4m}}{4}$. Înlocuind în (1) $\sin x = \pm 1$, găsim acceptabile $m = -5$, $m = -1$ și $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$.

807. v. ex. precedent. Pentru $-5 < m < 1$ ecuația are o singură valoare acceptabilă pentru $\sin x$, iar pentru $1 < m < \frac{9}{8}$ două valori acceptabile.

808. v. ex. 806. Se obține ecuația $(m+1)y^2 - 2(m+2)y + 2m + 1 = 0$, în care $\sin x = \frac{1-y}{1+y}$; pentru $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ rădăcini reale; pentru $-1 < m < -\frac{1}{2}$ numai rădăcina pozitivă a ecuației în y are sens pentru ecuația în x .

809. v. ex. 806. $x_1 = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; pentru $-1 < m < 1$ rădăcini reale; pentru $m = 0$, $x_2 = k \frac{\pi}{3}$; pentru $m = \pm 4$ rădăcini imaginare.

810. Înlocuim $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$, apoi $\sin^2 2x = y$ și obținem ecuația $20y^2 - 22y - m = 0$, care are rădăcini reale pentru $m > 6 \frac{1}{20}$.

Discutăm ecuația în y , observînd că ecuația în x are soluții dacă $y_1 > 0$ sau $y_2 > 0$.

811. Punem $\sin x = y$ și ecuația în y trebuie să aibă rădăcini reale și cuprinse între -1 și 1 . Condiția de realitate $-m(m-5) \geq 0$, $0 < m < 5$; $f(-1)f(1) = 5m(m-4)$; 1° $0 < m < 4$; $f(-1)f(1) < 0$, o singură rădăcină cuprinsă între -1 și 1 ; dacă $0 < m < \frac{1}{2}$, o soluție negativă; dacă $\frac{1}{2} < m < 1$, o soluție pozitivă; $1 < m < 4$, o soluție pozitivă. 2° $4 < m < 5$ nu avem soluții.

812. v. ex. 797 și 1363, 1365. Trebuie să avem $\Delta = \alpha^2 - \beta^2 \gg 0$, $\frac{2\alpha - \beta - 1}{4\alpha - \beta - 4} > 0$ și $\frac{3\alpha - \beta - 2}{4\alpha - \beta - 4} < 0$. Satisfac condiția dată punctele situate în regiunea din afara parabolei $\beta = \alpha^2$ și în interiorul triunghiului ABC în care $A(1, 1)$, $B\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $C(2, 4)$.

$$813. \frac{11 - \sqrt{89}}{2} < m < 2, m > \frac{11 + \sqrt{89}}{2}.$$

814. Trebuie să avem $x_1 < -3 < x_2$ și $x_1 < -1 < x_2$. Substituim $x = y - 3$ și obținem ecuația $my^2 - (4m+1)y + 4m + 4 = 0$, $\Delta = -8m + 1$ (același cu al ecuației în x). Rădăcinile $y_1 = x_1 + 3$ și $y_2 = x_2 + 3$, deoarece $x_1 < -3$ și $x_2 > -3$ trebuie să fie $y_1 < 0$ și $y_2 > 0$, prin urmare $y_1 y_2 < 0$, deci $\frac{4m+4}{m} < 0$. În mod analog, substituind $x = y - 1$ obținem $my^2 - y + 2 = 0$ și $\frac{2}{m} < 0$, deci $-1 < m < 0$.

$$815. \text{Nu există valori pentru } m. \quad 816. \frac{11}{4} < a < \frac{24}{7}.$$

$$817. m = 3, x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{3}.$$

818.* Notăm cu x_1, x_2 rădăcinile primei ecuații și $f(x) = (m^2 - 3)x^2 - 6x - m^2 + 1$. Trebuie să avem $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, $[(m^2 - 3)x_1^2 - 6x_1 - m^2 + 1][(m^2 - 3)x_2^2 - 6x_2 - m^2 + 1] < 0$. După efectuarea operațiilor și ținând seama de relațiile dintre coeficienții și rădăcinile primei ecuații, avem $-(m^2 - 1)(2m^2 - 11)(3m^2 + 1) < 0$. Rezultă valorile $m_1 < -\sqrt{5,5}$, $-1 < m_2 < 1$, $m_3 > \sqrt{5,5}$.

819—820. Coeficienții termenilor de același grad trebuie să fie proporționali; $a = 11$, $b = 7$, $a = -9$, $b = \frac{13}{2}$.

821. 1° Fie x_1 rădăcina comună; avem $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, $a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 = 0$. Rezolvăm sistemul în raport cu x_1^2 și x_1 și găsim $x_1^2 = \frac{bc_1 - cb_1}{ab_1 - ba_1}$, $x_1 = \frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1}$ cu condiția $ab_1 - ba_1 \neq 0$. Relația cerută este $R = (ac_1 - ca_1)^2 - (ab_1 - ba_1)(bc_1 - cb_1) = 0$; R se numește rezultatul a două ecuații de gradul II. 2° $x_1 = \frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1}$. 3° Fie x_1 și x_2 rădăcinile

* v. și alte soluții în G.M., 47, pag. 379

primei ecuații, iar x_1 și x_3 ale celei de-a doua. Avem $x_2 = \frac{c}{a} \cdot \frac{ab_1 - ba_1}{ca_1 - ac_1}$,
 $x_3 = \frac{c_1}{a_1} \cdot \frac{ab_1 - ba_1}{ca_1 - ac_1}$ și ecuația cerută $aa_1(bc_1 - cb_1)y^2 - (c^2a_1^2 - a^2c_1^2)y +$
 $+ cc_1(ab_1 - ba_1) = 0$. 822. V. ex. precedent; $R = 0$; $x = a$. 823. $R = 0, x =$
 $= a/(2a + 1)$. 824. (ex. 821) $m = 1$ și $m = -2$. 825. $m_1 = 5$, $m_2 = -7$.
 826. v. ex. 821. $R \equiv 0$, $x_1 = m + 1$. 827. Ordonăm după x ;
 $\Delta = (b_1^2 - 4a_1c_1)\lambda^2 + 2(bb_1 - 2ac_1 - 2ca_1)\lambda + b^2 - 4ac$, rădăcinile sînt
 raționale, dacă Δ este pătrat perfect sau 0, deci ca discriminantul lui Δ să fie
 nul, expresie care este echivalentă cu $(ac_1 - ca_1)^2 - (ab_1 - ba_1)(bc_1 - cb_1) = 0$,
 condiție ce exprimă că ecuațiile $ax^2 + bx + c = 0$ și $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$
 au o rădăcină comună (ex. 821).

828. Notăm cu α, β, γ coeficienții ecuației a doua, rezultatul celor două
 ecuații trebuie să fie nul (ex. 821). Avem, scriind sub altă formă (ex.
 827) $(-b\beta + 2a\gamma + 2c\alpha)^2 = (b^2 - 4ac)(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$, dar $-b\beta + 2a\gamma + 2c\alpha =$
 $= 0$, rezultă că $b^2 - 4ac = 0$ sau $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$.

829. Utilizăm $\sin \alpha = 2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} / \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right)$; găsim $pq_1(1 + q) = 2p_1q$.

830. 1° $m = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; $m = \frac{3}{2}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. 2° $\frac{-m+2}{m} > 0$,
 $0 < m < 2$.

831. $(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) > m^2$, $m^3 - 6m > m^2$; $-2 < m < 0$,
 $m > 3$.

832. Relațiile dintre coeficienți și rădăcini dau $a + b = -m$, $ab = 2m$,
 $A + B = 2m$, $AB = m^2 - 3$, iar neegalitatea devine $m(m^2 - 4m + 3) < 0$,
 din care $m < 0$ și $1 < m < 3$. 833. Notăm cu x_1, x_2 respectiv x_3, x_4 ră-

dăcinile ecuațiilor. Avem $(A_1A_2A_3A_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = -1$;

$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 2(x_1x_2 + x_3x_4)$; $bb_1 - 2(ac_1 + a_1c) = 0$.

834. v. ex. precedent; $m_1 = 0$, $m_2 = 3$.

835. Trinomul $ax^2 + bx + c$ are valoarea maximă $\frac{4ac - b^2}{4a}$ pentru $x =$
 $-\frac{b}{2a}$, dacă $a < 0$; valoarea minimă $(4ac - b^2) : 4a$ pentru $x = -\frac{b}{2a}$, dacă
 $a > 0$; 1° -4 , $x = 4$; 2° $\frac{23}{16}$, $x = \frac{5}{8}$, 3° 0 , $x = 3$; 4° 0 , $x = \frac{1}{3}$; 5° 4 ,
 $x = 1$; 6° $-\frac{9}{5}$, $x = \frac{6}{5}$.

836. Fie a latura pătratului. $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ} = x$ (fig. 4). Avem $S = \overline{MN}^2 = x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$, trinom care este minim pentru $x = \frac{a}{2}$.

837. Fie $\overline{AB} = a$, $\overline{AM} = x$, $\overline{BM} = y$ (fig. 5). Avem $x = \overline{AB'} - \overline{MB'} = \sqrt{a^2 - d^2} - \sqrt{y^2 - d^2}$. Costul transportului pe traiectul mixt AMB este

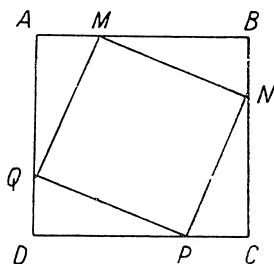


Fig. 4

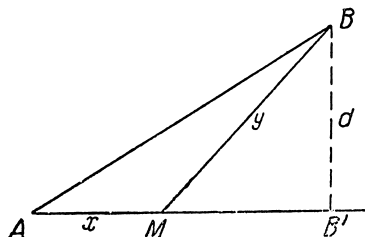


Fig. 5

echivalent cu cel pe o cale ferată de lungime $L = x + 2y = \sqrt{a^2 - d^2} - \sqrt{y^2 - d^2} + 2y$ și este minim când această distanță este minimă. Avem L minim când $m = 2y - \sqrt{y^2 - d^2}$ este minim sau $3y^2 - 4my + m^2 + d^2 = 0$. Trebuie ca $\Delta = m^2 - 3d^2 \geq 0$, $m \geq d\sqrt{3}$. L este minim pentru $m = d\sqrt{3}$; $y = \frac{2d\sqrt{3}}{3}$, $x = \sqrt{a^2 - d^2} - \frac{d\sqrt{3}}{3}$. Aplicație $x \simeq 130$ km.

838. Perimetrul $p = 2x + 2y + \pi x$, $y = \frac{1}{2}(p - 2x - \pi x)$. Avem $S = 2xy + \frac{\pi x^2}{2}$ și, înlocuind pe y ,

$S = \frac{1}{2}[-(4 + \pi)x^2 + 2px]$; S maxim pentru $x = \frac{p}{4 + \pi}$ (fig. 6). Se

deduce că înălțimea totală a ferestrei trebuie să fie egală cu lungimea dreptunghiului.

839. $\Delta = 1 > 0$ și nu depinde de m ; $x_1 + x_2 = 0$, $m = -1$. 840. Trebuie ca ecuația $x^2 - 4x + 3 = 2x^2 - 2(m + 3)x + m^2$ să admită rădăcini reale și egale, deci $\Delta = 2m + 4 = 0$, $m = -2$. Graficele parabolilor $y = x^2 - 4x + 3$ și $y = 2x^2 - 2x + 4$ în figura 7, cu punctul de tangență $(-1, 8)$. 841. $\Delta_1 = -9(3m - 1)$; $\Delta_2 = -9(2m - 1)$; $\Delta_1 > 0$ când $m < \frac{1}{3}$,

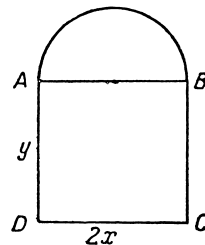


Fig. 6

atunci și $\Delta_2 > 0$; $\Delta_2 < 0$ pentru $m > \frac{1}{2}$, atunci și $\Delta_1 < 0$. 842. 1° (Fig. 8.)

Se scad ecuațiile una din alta, $A\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$, $B(-2, -1)$,

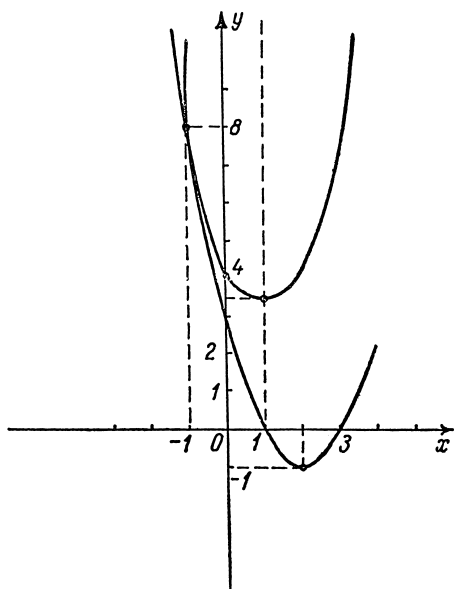


Fig. 7

$C\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$, $D(-1, -2)$;

2° (Fig. 9.). Virfurile parabolilor în $E(2, -1)$ și $F(-1, 2)$; punctele de intersecție $A(3, 0)$, $B(0, 3)$, $C\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right)$ și $D\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)$

$$843. \frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \frac{p}{2} = 1, p = 2.$$

$$844. (x_1 + x_2)/2 = 3/4; \frac{7}{8} = f\left(\frac{3}{4}\right),$$

$$m = 2. 845. \frac{x_1 + x_2}{2} = 3, -\frac{p}{2} = 3,$$

$p = -6$; $f(3) = -1$, $q = 8$. 846. $y = (x - m)^2 + m$, deci vârful este $V(m, m)$, care verifică ecuația când $m = -1$. 847. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2m + 10$, $m = 1$.

$$848. P(8) = 64a + 8b + c = 0, a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right], -\frac{b}{2a} = 6, -12 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}; a = 3, b = -36, c = 96.$$

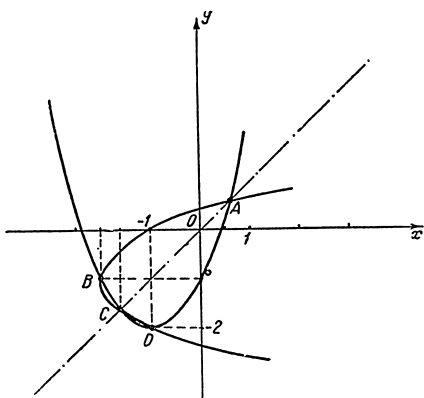


Fig. 8

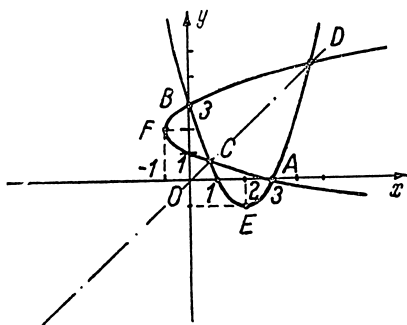


Fig. 9

$$849. x = -\frac{ab + a_1b_1}{a^2 + a_1^2}, \frac{(ab_1 - ba_1)^2}{a^2 + a_1^2}.$$

850. 1° Egalind fracția cu m , avem $(m-1)x^2 - 3x + m - 5 = 0$. Trebuie ca $\Delta = -4m^2 + 24m - 11 \geq 0$, $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{11}{2}$; maximă $\frac{11}{2}$ pentru $x = \frac{1}{3}$, minimă $\frac{1}{2}$ pentru $x = -3$; 2° maximă 7 pentru $x = 2$; minimă -3 pentru $x = -\frac{1}{2}$; 3° maximă $-2 - \sqrt{5}$ pentru $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; minimă $-2 + \sqrt{5}$ pentru $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$; 4° maximă 1 pentru $x = 1$; minimă -3 pentru $x = -1$; 5° maximă $\frac{1}{4}$, $x = -2$; minimă 1, $x = -\frac{1}{2}$; 6° maximă $-4(3 + \sqrt{10})$, $x = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{10})$; minimă $-4(3 - \sqrt{10})$, $x = \frac{1}{3}(1 - \sqrt{10})$; 7° nu are maximă sau minimă. 851. $\Delta \leq 0$, $m - 2 > 0$; $m \geq 3$. 852. 1° $-1 \leq m \leq -\frac{1}{5}$; 2° Avem tabloul

| m | $-\infty$ | -2 | $-\sqrt{2}$ | $+\sqrt{2}$ | 3 | $+\infty$ | | |
|-----------|-----------|------|-------------|-------------|-----|-----------|---|---|
| m^2-2 | | + | + | 0 | — | 0 | + | + |
| m^2-m-6 | | + | 0 | — | — | — | 0 | + |
| $f(-1)$ | | + | — | + | — | — | + | + |

ordinea $-1, x_1, 1, x_2$ | $x_1, -1, x_2, 1$ | $x_1, -1, x_2, 1$ | $-1, x_1, 1, x_2$
Pentru $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ avem ordinea $-1, x_1, x_2, 1$, afară de valorile lui $-1 < m < -\frac{1}{5}$, pentru care trinomialul nu are rădăcini reale; pentru

$m = -2$ ecuația are o singură rădăcină $x = \frac{1}{3}$; pentru $m = -\sqrt{2}$, $x_1 = \frac{3 - \sqrt{2}}{7}$, $x_2 = -1$; pentru $m = \sqrt{2}$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3 + \sqrt{2}}{7}$; pentru $m = 3$, o singură rădăcină $x = \frac{3}{4}$; 3° $\Delta = 5m^2 + 6m + 1$

| | | | | | | | | | | |
|----------|-----------|------|----------------|-----|----------------|-----|-----|-----|-----------|-----|
| m | $-\infty$ | -1 | $-\frac{3}{5}$ | | $-\frac{1}{5}$ | | 0 | | $+\infty$ | |
| Δ | | $+$ | 0 | $-$ | $-\frac{4}{5}$ | $-$ | 0 | $+$ | 1 | $+$ |

Rădăcini reale pentru $m \leq -1$ și $m \geq -\frac{1}{5}$ (fig. 10).

853. Curba este tangentă la Ox , dacă $\Delta = 0$, $m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 2m + 1 = 0$; $m = -1$; $y = (2x - 1)^2$ (fig. 11).

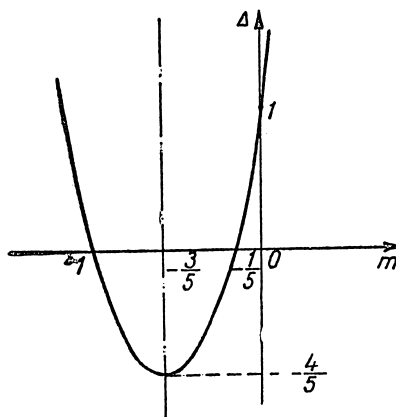


Fig. 10

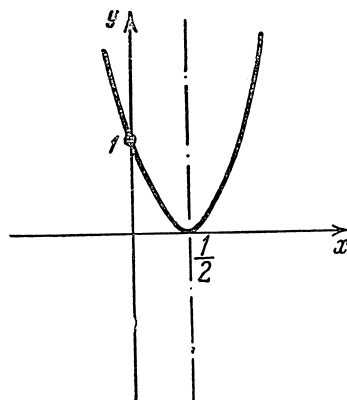


Fig. 11

854. 1° $p = 2$, parabola este tangentă la axa Ox în punctul $A(-2, 0)$; 2° $p = 0$, virful parabolei este în $B(0, 4)$; 3° Fie M mijlocul segmentului AB , de coordonate $(-1, 2)$, iar ecuația unei drepte ce trece prin M este

$$(1) \quad y - 2 = k(x + 1).$$

Se arată că punctul M este mijlocul oricărui segment de dreaptă care are extremitățile în punctele de intersecție ale dreptei (1) cu cele două parabole, o extremitate fiind pe o parabolă și a doua pe cealaltă. 4° Ordonăm după p , $x^2 + y - 4 - p(x^2 + 2x) = 0$, $x^2 + y - 4 = 0$, $x^2 + 2x = 0$; $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$.

ECUAȚII DE GRAD SUPERIOR

855. $\pm \frac{a+b}{a-b}, \pm \frac{a-b}{a+b}$. 856. $\pm a, \pm \sqrt{ab}$. 857. $\pm \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \pm \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$.
 858. $\pm (a-b), \pm (a+b)$. 859. $\pm \frac{1}{2}, \pm i\sqrt{5}$. 860. $\pm \sin \frac{a}{4}, \pm \cos \frac{a}{4}$.
 861. $3 \pm 2i, -3 \pm 2i$. 862. $(x^2 - 3x + 2)^2 = y; y_1 = 1, y_2 = 2; x^2 - 3x + 2 = \pm 1, x^2 - 3x + 2 = \pm \sqrt{2}$. 863. $(x + \sqrt{x})^2 = y, y_1 = -35, y_2 = 36; x + \sqrt{x} = \pm 6, x + \sqrt{x} = \pm \sqrt{35}i, \sqrt{x} = t$ etc. 864. Împărțim cu x^4 și punem $\left(\frac{x^2 - x + 1}{x}\right)^2 = y; 2 \pm \sqrt{3}, -1, -1, 1, 1 \pm i$. 865. $x^2 = y; 2y^2 - 3(a^2 + b^2)y + 4a^2b^2 = 0, \Delta = 9a^4 - 14a^2b^2 + 9b^4 = 9(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 \geq 0, y_1$ și y_2 sînt reali; cum $y_1 + y_2 = \frac{3}{2}(a^2 + b^2) \geq 0$ și $y_1y_2 = \frac{4}{3}a^2b^2 > 0$, deci $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$, rezultă că rădăcinile $x_{1,2} = \pm \sqrt{y_1}, x_{3,4} = \pm \sqrt{y_2}$ sînt reale. 866. Punem $x^2 = y$; avem

| m | $\Delta = m^2 - 4m$ | $P = 2m + 1$ | $S = 2(m - 1)$ | Natura rădăcinilor
ecuației în y | Natura rădăcinilor ecuației
bipătrate |
|----------------|---------------------|--------------|----------------|---------------------------------------|---|
| $-\infty$ | + | - | - | reale, $y_1 > 0,$
$y_2 < 0,$ | două rădăcini reale
și două imaginare |
| $-\frac{1}{2}$ | + | 0 | - | reale, $y_1 = 0$
$y_2 < 0$ | două rădăcini reale
și două imaginare |
| | + | + | - | reale și negative | patru rădăcini imaginare |
| 0 | 0 | + | - | reale, egale,
negative | patru rădăcini imaginare |
| | - | + | - | imaginare | patru rădăcini imaginare |
| 1 | - | + | 0 | imaginare | patru rădăcini imaginare |
| | - | + | + | imaginare | patru rădăcini imaginare |
| 4 | 0 | + | + | reale, egale
pozitive | $x_1 = x_2 = +\sqrt[3]{3},$
$x_3 = x_4 = -\sqrt[3]{3}$ |
| $+\infty$ | + | + | + | reale, pozitive | patru rădăcini reale |

867. Pentru $\frac{3}{2} < m < 2$ avem două rădăcini reale și două imaginare; $m = 2$, x_1 și x_2 infinite, $x_3 = -\frac{1}{2}$; $x_4 = \frac{1}{2}$; $2 < m < 6$, patru rădăcini reale; $m = 6$, $x_1 = x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_3 = x_4 = \sqrt{\frac{3}{2}}$; pentru celelalte valori ale lui m , rădăcini imaginare. 868. $m < 3$, două rădăcini reale și două imaginare; $m = 3$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -\sqrt{6}$, $x_4 = \sqrt{6}$; $m > 3$, patru rădăcini reale.

874. $y_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $y^2 - 10y + 1 = 0$, $x^4 - 10x^2 + 1$. 875. Notăm $x^2 = y$ și fie $y_1 < y_2$; rădăcinile ecuației bipătrate sînt, în ordinea mărimii, $-\sqrt{y_2}$, $-\sqrt{y_1}$, $\sqrt{y_1}$, $\sqrt{y_2}$. Rația r a progresiei este egală cu diferența a doi termeni succesivi, adică

$$r = -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_1} = \sqrt{y_2} - \sqrt{y_1},$$

din care rezultă $9y_1 = y_2$. Dar $y_1 + y_2 = -p$, $y_1 y_2 = q$; $19y_1 = -p$, $9y_1^2 = q$; condiția este $9p^2 - 100q = 0$. Rezolvanta are două rădăcini reale pozitive, dacă $p^2 - 4q > 0$, $q > 0$, $p < 0$.

876. v. ex. precedent. Trebuie ca $q = \frac{9}{16}$, $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{3}{2}$.

877. Fie α , αq , αq^2 , αq^3 rădăcinile ecuației. Identificînd ecuația cu $(x - \alpha)(x - \alpha q)(x - \alpha q^2)(x - \alpha q^3)$, rezultă sistemul $\alpha(q + 1)(q^2 + 1) = 0$, $\alpha^3 q^3(q + 1)(q^2 + 1) = 0$. Se deosebesc cazurile: 1° $\alpha = 0$, care dă $ax^4 = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; 2° $q = -1$, rădăcinile sînt α , $-\alpha$, α , $-\alpha$; ecuația este $(x^2 - \alpha^2)^2 = 0$; de aici, condiția $b^2 - 4ac = 0$ și atunci $\alpha^2 = -\frac{b}{2a}$; 3° $q = \pm i$, acum rădăcinile sînt α , αi , $-\alpha$, $-\alpha i$, respectiv α , $-\alpha i$, $-\alpha$, αi , ecuația este $x^4 - \alpha^4 = 0$, condiția este $b = 0$ și $\alpha^4 = -\frac{c}{a}$.

878. $x^4 + 6a^2x^2 + a^4 - b^4 = 0$. Dacă $a^2 > b^2$, deci $a^4 > b^4$, prima parte a ecuației este pozitivă pentru x real, ecuația are deci patru rădăcini imaginare. Dacă $a^2 = b^2$, atunci $x_1 = x_2 = 0$, $x_{3,4} = \pm ai\sqrt{6}$. Dacă $a^2 < b^2$, ecuația rezolvantă are rădăcini reale de semne contrare, ecuația dată are două rădăcini reale și două rădăcini imaginare.

879. $5x^4 + 10a^2x^2 + \frac{a^5 - b^5}{a} = 0$, $a \neq 0$. Factorul $a^5 - b^5$ are același semn cu $a - b$, deci termenul liber are semnul ca $a(a - b)$. 1° Dacă $a(a - b) > 0$,

ecuația are patru rădăcini imaginare; 2° dacă $a(a - b) < 0$, ecuația are două rădăcini reale și două imaginare; 3° dacă $a = b$, rămâne $5x^4 + 10a^2x^2 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$ și $x_{3,4} = \pm ai\sqrt{2}$.

880. $x^4 + (10 - \lambda)x^2 + 5 - 3\lambda = 0$. $\lambda < \frac{5}{3}$, rădăcinile sînt imaginare;

$\lambda = \frac{5}{3}$, $x_1 = x_2 = 0$, două rădăcini imaginare; $\lambda > \frac{5}{3}$, două rădăcini reale și două imaginare. 881. $(1 - \lambda)x^4 + 10(a^2 - \lambda b^2)x^2 + 5(a^4 - \lambda b^4) = 0$. *Discuție.* Presupunem că $a^2 > b^2$. Dacă $\lambda < 1$, cei trei coeficienți ai ecuației sînt pozitivi, ecuația are toate rădăcinile imaginare; $\lambda = 1$, două rădăcini infinite, două imaginare; $\lambda = a^4/b^4$, $x_1 = x_2 = 0$. Se scrie ecuația rezoluantă și rămîn cazurile $1 < \lambda < a^4/b^4$, cînd ecuația are două rădăcini reale; $\lambda > a^4/b^4$, nici o rădăcină reală.

882. $\pm \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{4a^2 - b^2} \pm \sqrt{4a^2 - 9b^2})$. 883. $-\frac{4}{5} < m < 0$. 884. $1, 2, \frac{1}{2}$.

885. $-1, 1 + i, \frac{1-i}{2} = \frac{1}{1+i}$ 886. $-1, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}$. 887. $1, \frac{a-b}{a+b}, \frac{a+b}{a-b}$.

888. $1, a^2, a^{-2}$. 889. $x_1 = 1$ și $2mx^2 + (2 - 5m)x + 2m = 0$. 890. $x_1 = 1$ și $2(m - 1)x^2 - (m^2 - 2m - 5)x + 2(m - 1) = 0$. 891. Împărțim cu x^2 și notăm $x + \frac{1}{x} = y$; $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$; $y^2 + y - 6 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x^2 + 3x + 1 = 0$. 892. Dividem cu x^2 și punem $x - \frac{1}{x} = y$, rămîne $x^2 + x - 1 = 0$, $x^2 - 4x - 1 = 0$.

893. $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, x^2 + x + 1 = 0$. 894. $(1 - a)x^4 + (1 + a)x^3 + (1 - a)x^2 + (1 + a)x + 1 - a = 0$, $x + \frac{1}{x} = y$; $(1 - a)y^2 + (1 + a)y - (1 - a) = 0$. 895. $a(1 - m)x^4 + (1 - a)^2(1 + m)x^3 + 2(a^2 - a + 1)(m - 1)x^2 + (a - 1)^2(1 + m)x + a(1 - m) = 0$, $x + \frac{1}{x} = y$, $a(1 - m)y^2 + (1 - a)^2(1 + m)y + 2(m - 1)(a^2 + 1) = 0$. 896. $x + \frac{1}{x} = y$, $y^2 - 4y \cos a \cos b + 2(\cos 2a + \cos 2b) = 0$, $y_1 = 2 \cos(a - b)$, $y_2 = 2 \cos(a + b)$, $x_{1,2} = \cos(a - b) \pm i \sin(a - b)$, $x_{3,4} = \cos(a + b) \pm i \sin(a + b)$. 897. $x_1 = \cos a$, $x_2 = 1/\cos a$, $x_3 = 1 - \cos a$, $x_4 = 1/(1 - \cos a)$. 898. $x + \frac{1}{x} = y$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 2\frac{m-2}{m}$; $x_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{15})$ și ecuația $mx^2 - 2(m - 2)x + m = 0$; $m < 0$, rădăcini pozitive; $m = 0$, reale și diferite; $x_3 = 0$, $0 < m < 1$, rădăcini reale, ambele negative; $m = 1$, $x_3 =$

$= x_4 = -1$; $m > 1$, rădăcini imaginare. 899. Notăm $x + \frac{1}{x} = y$; obținem (1) $(a-1)y^2 + 2ay + 2 = 0$, valorile lui x sînt date de (2) $x^2 - yx + 1 = 0$. Ca x să fie real, trebuie ca (1) să aibă rădăcini reale, dar $\Delta = (a-1)^2 + 4 \geq 0$, oricare ar fi x . Ecuația (2) are rădăcini reale cînd $y^2 - 4 \geq 0$, adică rădăcinile ecuației (1) să fie inferioare lui 2. Ori $f(-2) = -2$ și $f(2) = 8\left(a - \frac{1}{4}\right)$, coeficientul lui y^2 fiind $a-1$; discuția se leagă de valorile $1/4$ și 1. Dacă $a < 1/4$, $f(2) < 0$ și $a-1 < 0$, deci -2 și 2 sînt exterioare rădăcinilor y_1 și y_2 , deoarece semisuma $\frac{a}{1-a}$ este cuprinsă între -2 și 2 ; aceste rădăcini dau pentru x valori imaginare. Dacă $\frac{1}{4} < a < 1$, x va avea valori reale pozitive. Dacă $1 < a$, cea mai mică dintre rădăcinile y_1 și y_2 dă pentru x rădăcini reale negative. 902. $x_1 = -1$, $x_2 = 5/4$, $x_3 = 4/5$, $x_{4,5} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$. 903. $x_2 = y$, $y_1 = -1$ etc., $x_{1,2} = \pm i$, $x_3 = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{3-a} \pm i\sqrt{1+a})$. 904. Împărțim cu x^3 și punem $x + \frac{1}{x} = y$, apoi $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$; $y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = (y+1)^3 = 0$, $y_1 = y_2 = y_3 = -1$, $x^2 + x + 1 = 0$.

Metoda II-a. Cercetăm dacă polinomul este cub perfect; $P(x) = (x^2 + ax + 1)^3$; $a = 1$. 905. Se împarte cu x^5 și $x + \frac{1}{x} = y$, ..., $x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2$, $x^5 + \frac{1}{x^5} = y^5 - 5y^3 + 5y$ etc. 906. Rezolvăm ecuația trinomă și notînd $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$; $x_1 = 1$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \alpha^2$, $x_4 = 2\sqrt[3]{2}$, $x_5 = 2\sqrt[3]{2}\alpha$; $x_6 = 2\sqrt[3]{2}\alpha^2$. 907. $x^3 = -\frac{3a}{a-2}$, $x^3 = \frac{3a}{a+2}$ etc. 908 - 909. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. 910. $\frac{x+1}{x} = y$. 911. $\frac{x}{x-1} = y$. 912. $(x-5)^2 - x = y$; $y^2 - 7y + 6 = 0$. 913. $x^2 + x = y$. 914. $\sqrt{x^2 + 2x + 8} = y$; $x^2 + 2x - 5 = y^2 - 13$ acceptabil $y = 4$. 915. $12(x^3 + a^3) - 13ax(x+a) = 0$; $-a$, $\frac{4a}{3}$, $\frac{3a}{4}$. 916. $(x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x) + 2 = 0$; $x^2 - 2x = y$. 917. Se împarte cu a^2x^2 , $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = y$, sau se notează $x = ay$ etc. 918. Se împarte cu x^2 și $ax - \frac{b}{x} = y$, $y_1 = a$, $y_2 = b$.

919. $x + \frac{d}{x} = z, z^2 + az + b - 2d = 0$. **920.** Pentru $x = -a, x = -b$ și $a = -b$ avem identitate, $(x + a + b)^5 - x^5 - a^5 - b^5$ se divide cu $(x + a)(x + b)(a + b)$; $x_1 = -a, x_2 = -b$ și $x^2 + (a + b)x + a^2 + ab + b^2 = 0$. **921.** Soluția I. $x + \frac{1}{2} = u; \left(u^2 + \frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \left(u^2 + \frac{5}{4}\right)^2 - u^2$. Soluția II-a. $[(x^2 + 1) + x]^2 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$. Soluția III-a. $x^2 + x + 1 = \pm i$; $x_1 = -i, x_2 = i, x_3 = -1 - i, x_4 = 1 + i$. **922.** $[(x - 1)(x - 4)][(x - 2)(x - 3)]; x^2 - 5x = y; x_1 = 8, x_2 = -3, x_{3,4} = \frac{5 \pm i\sqrt{111}}{2}$ (sau ex. următor). **923.** $(x - a)(x - b) = u, (x - c)(x - d) = v, u - v = ab - cd, uv = m$ (v. ex. prec.) **924.** $3x^2 + ax = y$. **925.** (v. ex. 917.) **926.** $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(\Sigma u^2 - \Sigma uv)$; $x_1 = \frac{a + b + c}{3}$. **927.** $x_1 = 0, x_2 = a + b, x_{3,4} = \frac{1}{2} \left[a + b \pm (a - b) \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 3ab}{a^2 + b^2 + ab}} \right]$. **928.** $x_1 = 0, x_2 = a + b$ și o ecuație de gradul II. **929.** $\sum \left(\frac{x+a}{x-a} + 1 \right) = \sum \frac{2x}{x-a} = 0$; $x_1 = 0, x_{2,3} = \frac{1}{3} \left\{ a + b + c \pm \sqrt{\frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]} \right\}$, rădăcinile sînt toate reale. **930.** $\sum \left(\frac{b+c}{x-a} - 1 \right) = \sum \frac{x - (a+b+c)}{x-a} = 0, x_1 = a + b + c$ și $3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$. **931.** $\frac{x-1}{x+1} = y, \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{y}$ etc., $(y^2 + 4) \left(y^4 - \frac{1}{y^4} \right) = 0$ etc. **932—33.** Se grupează termenii 1 și 4, $x = -\frac{1}{2}(a + b)$; $2x^2 + 2(a + b)x + ab = 0$. **934.** Grupăm primii trei termeni, rămîne $\frac{1}{abx} + \frac{1}{\alpha x^2 - abx - \alpha^3} = 0$; $\alpha = 0$ identitate; $\alpha \neq 0, x = \pm \alpha$. **935.** $x_1 = -2, x_2 = -3$. **936.** $\frac{ax^2 + bx + 1}{px^2 + qx + 1} = y, y_1 = 1$ și $y_2 = \frac{n}{m}$; $x_1 = 0, x_2 = \frac{q-b}{a-p}$ etc. **937.** $x_1 = -1, x_2 = 1, ax^2 - (a^2 - 1)x + a = 0$. **938.** Fiecare termen mărit cu 1 este un pătrat perfect, avem

$$[(x + p)^2 + 3(x + p) + 1]^2 - [(x + q)^2 + 3(x + q) + 1]^2 = 0, \\ p \neq q$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}(p + q + 3), 2x^2 + 2(p + q + 3)x + p^2 + q^2 + 3p + 3q + 2 = 0.$$

$$\mathbf{939.} \ x = -2. \ \mathbf{940.} \ (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + m = 0, x^2 + 3x = y,$$

apoi $x^2 + 3x + 1 \pm \sqrt{1 - m} = 0$. O primă condiție $m < 1$. Punînd condiția în discriminantul ultimei ecuații care trebuie să fie pozitiv, obținem

$9 - 4(1 \pm \sqrt{1 - m}) > 0; -\frac{9}{16} < m < 1$. **941.** $(x + 3)^3 = x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3; x^3 - 6x - 9 = 0, x = 3$. **942.** $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = 0; m = 0; x_1 = x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 2; m = -2$. **943.** $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{2}; m = 9$. **944.** $a = -26; x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}, x_3 = -4$. **945.** $a = -3; x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 3$. **946.** $x_1 = 3, m = 7; x_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm i)$. **947.** $2x_2 = x_1 + x_3; a = 1, x_2 = 1, x_{1,3} = 1 \pm i\sqrt{3}; a = -2, x_2 = -2, x_{1,3} = -2 \pm \sqrt{6}$. **948.** Avem șase sisteme de soluții: $1^\circ a = 0, b = 0, c = 0; 2^\circ a = 1, b = -2, c = 0; 3^\circ a = 1, b = -1, c = -1$; celelalte trei sînt date de $a = -\frac{1}{\lambda}, b = \lambda, c = \frac{2}{\lambda} - \lambda$, λ fiind una din rădăcinile ecuației $\lambda^3 - 2\lambda + 2 = 0$. **949.** $x_1 = 2k, x_2 = 3k, x_3 = 4k; k = 0, x_1 = x_2 = x_3 = 0; k = -2, x_1 = -4, x_2 = -6, x_3 = -8; k = 2, x_1 = 4, x_2 = 6, x_3 = 8$. **950.** $\lambda = -1, x_1 = 1, x_2 = -1; x_3 = 2$. **951.** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{5}{2}, (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = \frac{5}{2}, x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -\frac{5}{2}, x_1x_2x_3x_4 = a$; cu $x_1 + x_2 = 0$, relațiile întii, a doua și a treia devin $x_3 + x_4 = \frac{5}{2}, x_1x_2 + x_3x_4 = \frac{5}{2}, x_1x_2(x_3 + x_4) = -\frac{5}{2}$; din acestea $x_1x_2 = -1$. Grupăm $x_1 + x_2 = 0$ și $x_1x_2 = -1$; deducem $x_1 = -1, x_2 = 1$ sau $x_1 = 1, x_2 = -1$. Avînd în vedere $x_1x_2 = -1$, deducem $x_3 + x_4 = \frac{5}{2}, x_3x_4 = \frac{7}{2}; x_{3,4} = \frac{1}{4}(5 \pm i\sqrt{31})$ apoi $a = -\frac{7}{2}$. **952.** $2, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; a = 25$. **953.** $a = -3, x_1 = i, x_2 = -i, x_{3,4} = \frac{1}{6}(3 \pm i\sqrt{3}); a = -9, x_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}, x_{3,4} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$. **954.** $x_1 = x_2 = -1, x_{3,4} = \pm i; a = 1$. **955.** $x_1 = 2, x_2 = 3, x_{3,4} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}); a = 22$. **956.** $x_1 = u - r, x_2 = u, x_3 = u + r; x_2 = 3$, apoi $m = 23; x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$. **957.** Ex. precedent; $2b^3 - 9abc + 27a^2d = 0, x_2 = -\frac{b}{3a}, x_{1,2} = \frac{1}{3a}(-b \pm \sqrt{3b^2 - 9ac}), \frac{u}{q}, u, uq; b^3d - ac^3 = 0$. Aplicații: $1^\circ a = 0$ sau $9m^2 = 25a^2; 2^\circ a = 0$ sau $c = 1$. **958.** $\frac{1}{a}, \frac{b}{a}, \frac{b^2}{a}$. **959.** $\frac{3}{x_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}; 9abc - 27c^2 -$

$-2b^3 = 0, x_1 = -\frac{3c}{b}$. Aplicație: $c = -\frac{1}{n^3 - n}, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{1}{n-1}, x_3 = \frac{1}{n+1}$; $c = -\frac{2n}{(n^2-1)^2}, x_1 = \frac{2n}{n^2-1}, n(n^2-1)x^2 - (n^2-1)x + n = 0$.

960. $x_1 = -1, x^2 - 2ax - a = 0$. **961.** $a = 35; 1, 2, 3, 4$. **962.** $1^\circ x_1 = u, x_2 = u + r, x_3 = u + 2r, x_4 = u + 3r; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4u + 6r = -a, x_1x_2 + x_1x_3 + \dots = 6u^2 + 18ru + 11r^2 = b$; eliminăm u și avem $r = \pm \frac{1}{10} \sqrt{15a^2 - 40b}$; $2^\circ u = \frac{-5a \mp 3\sqrt{15a^2 - 40b}}{20}$,
 $u + r = \frac{-5a \mp \sqrt{15a^2 - 40b}}{20}; u + 3r = \frac{-5a \pm 3\sqrt{15a^2 - 40b}}{20}$,
 $u + 2r = \frac{-5a \pm \sqrt{15a^2 - 40b}}{20}; u + (u + 3r) = -\frac{a}{2}, u(u + 3r) = \frac{-11a^2 + 36b}{40}$,
 deci x_1 și x_4 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{-11a^2 + 36b}{40} = 0, (u + r) + (u + 2r) = -\frac{a}{2}, (u + r)(u + 2r) = \frac{a^2 + 4b}{40}$, deci x_2 și x_3 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a^2 + 4b}{40} = 0$. **963.** $u - 3v, u - v, u + v, u + 3v; a \neq 0, u = -\frac{b}{2a}; P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm \frac{5}{4}$. Dacă $a > 0$, rădăcinile sînt reale pentru $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{5}{4}; a < 0$, pentru $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{5}{4}$. **964.** Fie $\frac{u}{q^3}, \frac{u}{q}, uq, uq^3$ rădăcinile. Notăm $q + \frac{1}{q} = v$, deducem $q^3 + \frac{1}{q^3} = u^3 - 3v$ și atunci relațiile între coeficienți și rădăcini devin $uv(v^2 - 2) = -15, u^2v^2(v^2 - 3) + 2u^2 = 70, u^3v(v^2 - 2) = -120, u^4 = 64$. Deducem $q + \frac{1}{q} = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}, q + \frac{1}{q} = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}, q + \frac{1}{q} = \pm \sqrt{\frac{3 \pm i\sqrt{34}}{2}}$ care împreună cu $u^2 = \pm 8$, excluzînd valorile imaginare, dau rădăcinile acceptabile $-1, -2, -4, -8$. **965.** Ex. precedent; obținem sistemul $uv(v^2 - 2) = \frac{15}{4}, u^2v^2(v^2 - 3) + 2u^2 = \frac{35}{8}, u^3v(v^2 - 2) = -\frac{m}{8}, u^4 = \frac{1}{4}; m = -15$, rădăcini acceptabile $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. **966.** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -12, x_3x_4 = x_1x_2, 3x_1x_2 = -12; m = 16$, rădăcinile $-1, 4, 2, -2$. **967.** Avem $2x_1 + x_2 + x_3 = 3, x_1^2 + 2x_1(x_3 + x_4) + x_3x_4 = a; x_1^2(x_3 + x_4) + 2x_1x_3x_4 = 4(a - 1); -3x_1^2 + 6x_1 + x_3x_4 = a, -2x_1^3 + 3x_1^2 + 2x_1x_3x_4 = 4(a - 1)$; înmulțim prima egalitate cu $-2x_1$ și adunăm la ultima, obținem $4x_1^3 - 9x_1^2 + 2ax_1 - 4(a - 1) = 0$, care are rădăcina $x_1 = 2$ etc. **968.** $x_3 = -2, x_4 = -3; m = 3, n = 4, x_{1,2} =$

$= \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$; $m = \frac{2}{5}$, $n = -9$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{85}}{10}$. **969.** Se identifică cu $(x^2 + \alpha x + \beta)^2$; $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $b = 0$, $a = -\frac{1}{3}$; $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $b = 4$, $a = 1$.

970. Se înlocuiește $x_3 + x_4 = 1 - x_3x_4$ în $(x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = -2$ și $x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -\lambda$. Relația ultimă obținută se adună cu $x_1x_2x_3x_4 = \lambda + 2$. Rămâne $x_3^2x_4^2 - x_3x_4 - 2 = 0$; $x_3x_4 = -1$, $x_3x_4 = 2$. Apoi $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -6$. **971.** $x_1(x_2x_3x_4) = 9$, $x_1 = \pm 3$; $x_1 = 3$, $p = -6$, $q = -12$, $(x-3)(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) = 0$; $x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = (x-1)^3 - 2 = 0$, $x_2 = 1 + \sqrt[3]{2}$, $x_3 = 1 + \varepsilon_1 \sqrt[3]{2}$, $x_4 = 1 + \varepsilon_2 \sqrt[3]{2}$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$; $x_1 = -3$, $p = 6$, $q = 12$, $(x+1)^3 + 2 = 0$, $x_2 = -1 - \sqrt[3]{2}$, $x_3 = -1 - \varepsilon_1 \sqrt[3]{2}$, $x_4 = -1 - \varepsilon^2 \sqrt[3]{2}$. **972.** Rădăcinile $\alpha - 2\beta$, $\alpha - \beta$, α , $\alpha + \beta$, $\alpha + 2\beta$; suma rădăcinilor dă $5\alpha = 0$, $\alpha = 0$. Rezultă $c = 0$ și rămâne ecuația $x^4 - 20x^2 + ax + b = 0$; $\beta = \pm 2$; $a = 0$, $b = 64$; -4 , -2 , 0 , 2 , 4 . **973.** Identificăm cu $(x-a)^3(x^2 + Ax + B)$; în sistemul obținut eliminăm A și B , obținem $5a^3 + 12a^2 - 18a - 27 = 0$, $a_1 = -3$, $a_{2,3} = \frac{3}{10}(1 \pm \sqrt{21})$ etc.

974. Se identifică cu $(x-a)^3(x-b)^2$, $a = -1$, $b = 2$.

975. $x^3 - (6 + a + b + c)x^2 + (11 + 5a + 4b + 3c)x - 6 - 6a - 3b - 2c = 0$. Cum $x_1 = x_2 = -2$, $x_3 = -1$, rezultă sistemul $a + b + c = -11$, $5a + 4b + 3c = -3$, $6a + 3b + 2c = -10$; apoi $a = -9$, $b = 48$, $c = -50$.

976. $x_2^3 = \cos 2\alpha$; condiția $\cos^6 \alpha = \cos^2 2\alpha$; $\cos^3 \alpha = \pm \cos 2\alpha$; se deduc ecuațiile (1) $\cos^3 \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 1 = 0$ (2) $\cos^3 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 = 0$. Se deduce din (1) $\cos \alpha = 1$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ și $\cos^2 \alpha - \cos \alpha - 1 = 0$, $x_1 = -\frac{3}{2}(1 - \sqrt{5})$, $x_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$, $x_3 = 1 - \sqrt{5}$ analog din (2) $\cos \alpha = -1$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ și $\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$, $x_1 = -\frac{3}{2}(1 + \sqrt{5})$, $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $x_3 = 1 + \sqrt{5}$. **977.** Dintre $x_1 + x_2 + x_3 = a + 3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2a + 3$ și $x_2 = ax_1 + 1$ se elimină x_2 și x_3 , se obține $(a^2 + a + 1)x_1^2 - (a^2 + 2a + 2)x_1 + a + 1 = 0$, din care $x_1 = 1$, $x_2 = (a + 1) : (a^2 + a + 1)$.

978. 1° a) Notăm $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = u$. Avem $2u = a$, $u^2 + x_1x_2 + x_3x_4 = b$, $u(x_1x_2 + x_3x_4) = -c$. Condiția este $a^3 - 4ab + 8c = 0$; b) $a^2d =$

$= c^2$; $2^\circ x = y - \frac{a}{4}$; $3^\circ y^2 + ay + b - 2\frac{c}{a}$. **979.** $n(x_1 + x_2 + x_3) + x_2 + 2x_3 = 0$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, deci $x_2 + 3x_3 = 0$; $x_1 = x_3 = 1$, $x_2 = -2$. **980.** $x_1 = 4$, $x_{2,3} = 1 \pm 3i$; $\lambda = 40$; **981.** $\lambda = 0$ etc. **982.** $a = 0$, $b = -1$; $-1, 0, 1$. **983.** Înmulțind ecuația dată cu $x(x \neq 0)$, x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile, avem $x_1^4 + px_1^2 - 2x_1 = 0, \dots$, adunînd, $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - p(x_1 + x_2 + x_3) = 0$; $18 - 2p^2 = 0$, $p = \pm 3$. **984.** $x_1 = -5$. **985.** $x_1 = 2$. **986.** $x_1 = 3$. **987.** $x_1 = -\frac{7}{3}$. **988.** $x_1 = -\frac{8}{3}$, $x_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{7}$. **989.** $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$. **990.** $x_1 = x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = -5$. **991.** $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{5}$. **992.** $1, -2, 3, 5$ și $\frac{1}{2}$. **993.** $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$. **994.** $(x^2 + 1)(x^2 + mx + m) = 0$, rădăcini duble pentru $m = 0$ și $m = 4$. **995.** Admite și pe $1 + \sqrt{3}$; $x_1 + x_2 = 2$, $x_1x_2 = -2$; $x_3 = 2$, $x_4 = 3$; $\lambda = -12$. **996.** Admite și pe $3 - \sqrt{5}$; membrul întîi se divide cu $(x - 3 + \sqrt{5})$ ($x - 3 - \sqrt{5}$) $= x^2 - 6x + 4$; $(x^2 - 6x + 4)(x^2 - 4x + 3) = 0$ etc. **997.** Admite și $-2 - \sqrt{3}$. Membrul întîi este divizibil cu $(x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}) = x^2 + 4x + 1$; $a = -5$, $b = 6$, $x_{3,4} = 1 \pm i$. **998.** $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$. **999.** $x_2 = -i$, $x^2 - x + 1 = 0$. **1000.** Admite și pe $x_3 = 3 - i\sqrt{2}$, celelalte verifică $x^2 + 7x + 6 = 0$. **1001.** Identificăm cu $(x^2 - 2x + 5)(x^2 + px + q)$; $p = 5$, $q = 2$, $\alpha = -3$, $\beta = 10$. **1002.** Ex. precedent; $\alpha = -11$, $\beta = -101$, $x_2 = 3 - 2i$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. **1003.** $m = -4$, $n = -50$; $(x^4 + 2x^2 + 25)(x^2 - 2x - 4) = 0$.

1 004. Admite și $\sqrt{2} - i$, $-\sqrt{2} + i$, $-\sqrt{2} - i$, care sînt rădăcinile ecuației $x^4 + 2x^2 + 9$; identificăm cu $(x^4 + 2x^2 + 9)(x^2 + Ax + B)$, $A = -2$, $B = -3$, $x_5 = -1$, $x_6 = 3$. **1 005.** Din proporționalitatea coeficienților se deduce $m = 5$ și $m = 6$. **1 006.** $(x^2 + x + 2)^2 = 0$.

1 007. $(x + 1)^2(2x - 1)^3 = 0$, $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = x_5 = \frac{1}{2}$. **1 008.** $(2x - 1)^3(x + 2) = 0$.

1 009. Se află c.m.m.d.c., care este $x^2 - 3x + 2$; rădăcinile comune sînt $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **1 010.** Se află c.m.m.d.c.; $x = 1$. **1 011.** C.m.m.d.c. este $x^2 + 3x + 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$ și $x'_1 = -1$, $x'_2 = -2$, $x'_{3,4} = \pm i$.

1 012. C.m.m.d.c. este $x^2 - 6x + 8$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$; $x'_1 = 2$, $x'_2 = 4$, $x'_3 = 8$. **1 013.** c.m.m.d.c. este $x^3 - 7x^2 + 5x + 1$ ale cărui rădăcini sînt $1, 3 \pm \sqrt{10}$; $x_4 = -1$, $x_{5,6} = \pm i$; $x'_{4,5} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$. **1 014.** Se împarte ecuația a doua cu prima, cîtul este $x \sin \alpha + a \sin 2\alpha$.

1 015. Se scad $x^2 - x = 0$, $x_1 = 0$, $a = 0$, $x_2 = 1$, $a = -6$. **1 016.** Se scad membru cu membru, $\alpha(x^2 - 3x + 2) = \alpha(x - 1)(x - 2) = 0$, deci $1^\circ \alpha = 0$, toate rădăcinile comune; $2^\circ x = 1$, $\alpha = -2$; $3^\circ x = 2$, $\alpha = -10$.

1 017. Se înmulțește prima ecuație cu x^2 și se scade dintr-a doua; rămîne $x^3 + \alpha x^2 + (1 - 3\alpha)x + 3\alpha = 0$. Scădem acum din aceasta prima ecuație; rămîne $\alpha(x^2 - 3x + 2) = 0$. Dacă $\alpha = 0$, rădăcini comune $x = 0$ și $x = \pm i$ dacă $x^2 - 3x + 2 = 0$, adică $1^\circ x = 1$, atunci din prima ecuație se deduce $\alpha = -2$; $x = 2$, $\alpha = -10$ etc.

1 018. Se scad $x^2(x - 1) = 0$; $1^\circ x = 0$, $q = 0$; $2^\circ x = 1$, $p + q + 1 = 0$. **1 019.** Se aplică algoritmul lui Euclid. Prima împărțire dă restul $-ax^2 + (b + 1)x + 2a$, care trebuie să împartă exact pe $x^3 + ax + b$. Restul $\left[\frac{(b + 1)^2}{a} + a^2 + 2a\right]x + ab + 2(b + 1)$ cu $a \neq 0$ trebuie să fie identic nul, deci $(b + 1)^2 + a^3 + 2a^2 = 0$, $ab + 2b + 2 = 0$, care dă $a = -3$, $b = 2$. Cazul $a = 0$ nu conduce la strict două rădăcini comune. **1 020.** c.m.m.d.c. trebuie să fie de gradul II. $4x^2 + (10 - q)x + p - 3q$, și restul $[4(3q - p - 28) + (q - 10)^2]x + 16q + (p - 3q)(10 - q)$; după eliminarea lui p obținem $(q - 10)^3 - 4 \cdot 28(q - 10) - 4^3 q = 0$, $q = 6$, $p = -6$ și rădăcinile comune 2 și -3 .

1 021. Fie $x^2 + px + q$ divizorul comun și $x^2 + ax + b$ respectiv $x^2 + Ax + B$ cîturile. Din identificare rezultă:

$$\begin{aligned} p = 0, \quad q = -1, \quad a = -2, \quad b = 4, \quad \alpha = -4, \quad A = -3, \quad B = 5, \quad \beta = -5 \\ p = 1, \quad q = 1, \quad a = -3, \quad b = 5, \quad \alpha = 5, \quad A = -4, \quad B = 7, \quad \beta = 7 \\ p = 3, \quad q = 5, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad \alpha = 5, \quad A = 0, \quad B = -4, \quad \beta = -5 \end{aligned}$$

Soluția a II-a. Se efectuează operațiile pentru aflarea c.m.m.d.c. și se scrie că restul de gradul I este identic nul. Restul este

$$R(x) = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 11\alpha + 8\beta - 5)x - 2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2 + 17\alpha - 13\beta.$$

Egalăm cu zero cei doi coeficienți. Pentru rezolvarea sistemului adunăm membru cu membru și se obține $(\alpha - 5)(\beta - \alpha + 1) = 0$, deci $\alpha = 5$ etc. **1 022.** Dacă notăm $a = \arctg x_1$ etc., $\arctg a = x_1$; $\Sigma \arctg x_i < \pi$, $\arctg(a + b + c) =$

$$= (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c) : [1 - (\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c)] = (x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 x_3) : [1 - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)] = 1; \operatorname{tg} E = 1, \text{ deci } E = \frac{\pi}{4}.$$

1 023. $m^3 = \frac{1}{a}, n = -\frac{b}{3a}$. **1 024.** $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 2; x_1^3 - x_1 + 1 = 0, x_2^3 - x_2 + 1 = 0, x_3^3 - x_3 + 1 = 0$. Adunăm $\Sigma x_i^3 - \Sigma x_i + 3 = 0, \Sigma x_i^3 = -3$. **1 025.** $\Sigma x_i^2 = (\Sigma x_i)^2 - 2 \Sigma x_1 x_2 = -2p, \Sigma (x_1 - x_2)^2 = -6p$. **1 026.** a, b, c fiind rădăcini, $a^3 + pa + q = 0, b^3 + pb + q = 0, c^3 + pc + q = 0$, relații care înmulțite respectiv cu $a^{n-3}, b^{n-3}, c^{n-3}$ și adunate dau $s_n + ps_{n-2} + qs_{n-3} = 0$, unde n este un număr întreg. Relația de recurență de mai sus permite de a calcula din aproape în aproape sumele s_n . De exemplu,
 $s_2 = -ps_0 - qs_{-1} = -3p - q\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = -3p - q \frac{ab + bc + ca}{abc} = -2p,$
 $s_3 = -3q, s_4 = 2p^2, s_5 = 5pq, s_6 = -2p^3 + 3q^2, s_{-1} = -\frac{p}{q}, s_{-2} = \frac{p^2}{q^2}, s_{-3} = -\frac{p^3 + 3q^2}{q^3}, s_{-4} = \frac{p}{q^4}(p^3 + 4q^2), s_{-5} = -\frac{p^2}{q^5}(p^2 + 5q^2), s_{-6} = \frac{1}{q^6}(p^6 + 6p^3q^2 + 3q^4)$. **O b s e r v a r e.** Când $a + b + c = 0$, consecințe sînt ex. 293, 391 — 396.

1 027. Ex. precedent. **1 028.** $E = s_1 s_3 - s_4 = -2p^2$ (v. ex. 1 026). **1 029.** Cum $x_1 + x_2 + x_3 = -1, y_1 = \frac{-1 - x_1}{x_1}$ etc., deci $y = \frac{-1 - x}{x}, x = -\frac{1}{y + 1}$, care înlocuită în ecuația dată dă $y^3 - 5y - 2 = 0; y_1 = -2, y_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$, apoi $x_1 = \frac{-1}{y_1 + 1} = 1, x_{2,3} = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{2})$.

1 030. $\Sigma[(x_1^2 + x_2^2)^2 - x_3^4] = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = a^3 + \frac{b}{a^2}; b = a^6 - a^5;$
 $x^3 + ax^2 + a^6 - a^5 = 0, x_1 = -a^2, x^2 + (a - a^2)x + a^4 - a^3 = 0, -\frac{1}{3} \leq \leq a \leq 1.$

1 031. Avem $x_1 + x_2 + x_3 = -a, x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = b, x_1 x_2 x_3 = -c$. Calculăm expresiile $S_1 = X_1 + X_2 + X_3 = (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_3 + x_1) = -2a, S_2 = X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_2 X_3 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3) + \dots = (-a - x_3)(-a - x_1) + \dots = a^2 + a(x_1 + x_3) + x_1 x_3 + \dots = a^2 + a(x_1 + x_3 + x_2 + x_3 + x_1 + x_2) + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = a^2 - 2a^2 + b = -a^2 + b, S_3 = X_1 X_2 X_3 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = -(a + x_3)(a + x_2)(a + x_1) = -a^3 - (x_1 + x_2 + x_3)a^2 - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)a - x_1 x_2 x_3, S_3 = -a^3 + a^3 - ab + c = -ab + c$. Ecuația este $X^3 + 2aX^2 + (-a^2 + b)X + ab - c = 0$. **1 032.** $a + b + c =$

$$\begin{aligned}
&= -m, \quad ab + bc + ca = p, \quad abc = -q - 1; \quad X_1 = \frac{abc + 1}{ab} = \frac{-q}{ab}; \quad s_1 = X_1 + \\
&+ X_2 + X_3 = -q \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = -\frac{mq}{q+1}, \quad s_2 = X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_2 X_3 = \\
&= \frac{q^2}{abc} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{q^2 p}{(q+1)^2}, \quad s_3 = X_1 X_2 X_3 = -\frac{q^3}{(q+1)^2}; \quad Y^3 - s_1 Y^2 + \\
&+ s_2 Y - s_3 = (q+1)^2 Y^3 + mq(q+1) Y^2 + q^2 p Y + q^3 = 0; \quad m = 2, \quad p = \\
&= q = 1, \quad 4Y^3 + 4Y^2 + Y + 1 = 0, \quad Y_1 = -1, \quad 4Y^2 + 1 = 0, \quad x_1 = -2, \\
&x_{2,3} = \pm i. \quad \mathbf{1033.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = q, \quad x_1 x_2 x_3 = \\
&= -r. \quad \text{Apoi } S_1 = X_1 + X_2 + X_3 = \frac{x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_1^2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{q^2 - 2pr}{-r}; \quad S_2 = \\
&= X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_2 X_3 = x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 = p^2 - 2q, \quad S_3 = X_1 X_2 X_3 = \\
&= x_1 x_2 x_3 = -r. \quad \text{Ecuația cerută este } rX^3 + (q^2 - 2pr) X^2 + r(p^2 - 2q) X \\
&+ r^2 = 0. \quad \text{Altă metodă: } x_1 x_2 x_3 = -r, \quad X = \frac{x_2 x_3}{x_1} = \frac{-r}{x_1^2}, \quad x_1^2 = -\frac{r}{X}; \\
&\text{eliminăm pe } x \text{ între ecuația dată și } x^2 = -\frac{r}{X}. \quad \mathbf{1034.} \quad E = \left(\frac{x_1}{x_2 + x_3} + 1 \right) + \\
&+ \left(\frac{x_2}{x_3 + x_1} + 1 \right) + \left(\frac{x_3}{x_1 + x_2} + 1 \right) - 3 = \sum \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3} - 3 = p \left(\frac{1}{x_2 + x_3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{x_3 + x_1} + \frac{1}{x_1 + x_2} \right) - 3 = p \left(\frac{1}{p - x_1} + \frac{1}{p - x_2} + \frac{1}{p - x_3} \right) - 3 = \\
&= p \frac{\Sigma[p^2 - (x_2 + x_3)p + x_2 x_3]}{p^3 - (x_1 + x_2 + x_3)p^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)p - x_1 x_2 x_3} - 3 = \\
&p = \frac{3p^2 - p(x_1 + x_2 + x_3) + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1}{p^3 - p^2 + pq - r} - 3 = \frac{p^3 - 2pq + 3r}{pq - r}.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{1035.} \quad \Sigma y_1 = -\frac{1}{4}, \quad \Sigma y_1 y_2 = -2, \quad y_1 y_2 y_3 = -4, \quad 4y^3 + y^2 - 8y + 16 = 0.$$

Altă metodă: eliminăm x între $y = x + \frac{1}{x}$ și $x^3 + x + 4 = 0$.

$$\mathbf{1036.} \quad \text{Eliminăm } x \text{ între } y = 1 - \frac{1}{x^2} \text{ și ecuația dată; } q^2 y^3 + (+p^2 - 3q^2 - 2q)y^2 + (3q^2 - 2p^2 + 4q - 2p + 1)y + (p^2 - q^2 + 2p - 2q) = 0.$$

$\mathbf{1037.}$ Metoda I. v. ex. 824; găsim $(3u - 2v - 13)^2 - 5(u + v - 4) = 0$. Metoda II-a. Eliminăm întâi pe x^2 . Pentru aceasta înmulțim ecuațiile cu respectiv -3 și 2 și adunăm; rămâne $x = \frac{1}{5}(13 - 3u - 2v)$ și aceasta o înlocuim în una din ecuații. $\mathbf{1038.}$ Înmulțim prima ecuație cu $-a$, a doua cu x și adunând eliminăm pe x^3 ; eliminăm apoi pe x^2 între ecuația obținută și ecuația a doua etc.; obținem $(bc - a^2)^2 - (ac - b^2)(ab - c^2) = 0$. $\mathbf{1039.}$ $m^4 - 9m^2 + 54 = 0$.

$$\mathbf{1040.} \quad 28m^3 + 713m^2 - 100m = 0.$$

ECUAȚII IRAȚIONALE ¹

1 041. 4. **1 042.** $\frac{13}{4}$. **1043.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1 044.** 4. **1 045.** 8. **1 046.** Ambele ecuații conduc la $x^2 + 7x - 30 = 0$ care admite rădăcinile 3 și -10 . Prima este verificată numai de $x = 3$, iar a doua de $x = -10$. **1 047.** -6 și 6 . **1 048.** 8. **1 049.** a și b . **1 050.** 34. **1 051.** 7. **1 052.** 10. **1 053.** $\frac{16}{25}$. **1 054.** $\frac{16}{9}$. **1 055.** Punem $x^2 - 1 = z^2$, pentru suma radicalilor avem $x = \pm \sqrt{2}$ și $x = \pm 1$, iar pentru diferența radicalilor identitate. **1 056.** $x^2 - 1 = z^2$, pentru suma radicalilor avem o identitate, iar pentru diferență $x = \pm \sqrt{2}$. **1 057.** Notăm $x^2 - 4x = t$, găsim $t^2 + t - 2 = 0$, acceptabil $t = 1$, $x = 2 \pm \sqrt{5}$. **1 058.** $\sqrt[3]{3x^2 - x + 2} = z$; $x = 1$, $x = -\frac{2}{3}$. **1 059.** $\sqrt[3]{8x^2 - 26x + 16} = y$; $x_1 = 0,75$; $x_2 = 2,5$. **1 060.** $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = y$; $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$. **1 061—62.** $x = [a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2abc(a + b + c)] : 4abc$. **1 063.** $x = \sqrt[3]{\frac{1 - 4a^3}{4(1 - 4a^4)}}$. **1 064.** 0 și 1. **1 065.** 1.

1 066. 25 : 16. **1 067.** 2 și 3. **1 068.** 0 și $\pm \sqrt{\frac{2a-b}{a^2b}}$, $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{b} < 1$. **1 069.** Prima parte amplificată cu 2 se poate scrie $\frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{x})^2}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{x})^2}$ și deci egală cu $a^3 \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{x}}$; rezultă că $\left(\frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{x}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{x}}\right)^3 = a^3$. Rădăcina reală $x = \frac{(1-a)^2}{2a}$, $0 < a \leq 1$.

1 070. a și $-a$. **1 071.** 9 : 2. **1 072.** $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. **1 073.** 2.

¹ Între soluții nu sînt trecute valorile introduse prin raționalizare care nu verifică ecuațiile.

1074. 4 și $-\frac{10}{27}$. **1075.** $a \neq b$, $x = a^2 b^2 : (a - b)^2$; $a = b \neq 0$ imposibilitate; $a^2 = b = 0$ identitate.

1076. $2a\sqrt{b} : (b + 1)$. **1077.** 5 și $-\frac{12}{5}$. **1078.** $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

1079. 2,5. **1080.** $\frac{1}{2a}(1 - 2b \pm \sqrt{1 - 4b})$, răd. reală dacă $b < \frac{1}{4}$.

1081. $c(c + 2)^2(c + 4)x^4 - 2(c + 2)^2(a + b)x^2 + (a - b)^2 = 0$, $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\pm \frac{7}{\sqrt{15}}$. **1082.** a și b . **1083.** Se scoate factor comun la numitori pe

$\sqrt{x+1}$ și se notează $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$, avem $10t^2 - 11t + 3 = 0$, $x_1 = 17 : 8$ și

$x_2 = 5 : 3$. **1084.** Se aplică proprietăți ale proporțiilor, rămâne $\sqrt{a - bx} \left(\frac{1}{\sqrt{a - cx}} - \frac{1}{\sqrt{ax - b}} \right) = 0$; $x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{a + b}{a + c}$. **1085.** 1° $x = 3$, 2° $x = \frac{2}{3}$.

1086. Rădăcinile sînt reale dacă $x^2 - 1 > 0$, adică $|x| > 1$; $x = \pm \sqrt{2}$. **1087.** Se amplifică cu expresia conjugată numitorului, obținem $-\sqrt{2 - x^2} = x(\sqrt{2} - x) - \sqrt{2}$; $x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + (2\sqrt{2} + 3)x^2 - 4x = 0$, $x = 0$, $x = 1$ și $x^2 + (1 - 2\sqrt{2})x + 4 = 0$, $x = 0$ nu convine. **1088.** 62.

1089. Trebuie ca $x + a \geq 0$, $x - 1 \geq 0$, $2x - 1 \geq 1$, deci $x \geq -a$ și $x \geq 1$, în plus $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-1} > 0$. Ridicînd la pătrat, avem $2\sqrt{x^2 - (1-a)x - a} = a$, deci $a > 0$ și avînd în vedere că $x > -a$, rămîn condițiile $x > 1$ și $a > 0$. Ridicînd încă o dată la pătrat, se obține $f(x) = x^2 - x(1-a) - \frac{a^2 + 4a}{4} = 0$, $x = \frac{1}{2}(1 - a \pm \sqrt{2a^2 + a + 1})$. Radicalul este real oricare ar fi a căci $2a^2 + 2a + 1 = 0$ are rădăcini imaginare. Trebuie însă $x > 1$, ori $f(1) = -\frac{a^2}{4} < 0$, ceea ce arată că 1 este între rădăcinile ecuației, dintre care numai cea mai mare convine. În rezumat, nu avem soluții pentru $a < 0$; pentru $a > 0$, avem singura soluție $x = \frac{1}{2}(1 - a + \sqrt{2a^2 + 2a + 1})$; pentru $a = 0$ avem $x = 1$.

1090. Membrul întii fiind pozitiv, trebuie ca $-x + 2m - 3 \geq 0$, $x \leq 2m - 3$. Raționalizînd, obținem $f(x) = x^2 - (21 - 3m)x - 2 + 9m - 3m^2 = 0$, $x = \frac{1}{2}(21 - 3m \pm \sqrt{449 - 162m + 21m^2})$; rădăcinile discriminantului fiind imaginare, rădăcinile ecuației sînt reale oricare

ar fi m . Este suficientă deci numai condiția $x \leq 2m - 3$. Avem $f(2m - 3) = 7m^2 - 54m + 70$ ale cărei rădăcini fie m_1 și m_2 . Pentru $m_1 < m < m_2$, $f(2m - 3)$ este negativ și $m_1 < 2m < m_2$, convine rădăcina cea mai mică. Pentru $m > m_2$, $2m - 3$ este în afara rădăcinilor, pentru ca rădăcinile să convină, trebuie să avem $2m - 3 > \frac{1}{2}(24 - 3m)$, ceea ce se verifică, ambele rădăcini convin. Pentru $m = m_2$, $f(2m - 3)$ este nul, rădăcinile convin.

1 091. Scriem ecuația sub forma $\lambda\sqrt{1 - x^2} = \lambda + 1 - (\lambda - 1)x$. Înmulțind cu λ rezultă condiția (1) $\lambda[\lambda + 1 - (\lambda - 1)x] > 0$ și ecuația raționalizată este (2) $f(x) = (2\lambda^2 - 2\lambda + 1)x^2 - 2(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda + 1 = 0$. Această ecuație are rădăcinile reale dacă $\Delta = \lambda^3(\lambda - 4) \geq 0$, din care fie $\lambda \leq 0$, fie $\lambda \geq 4$. Când $\lambda = 0$, $x = -1$; $\lambda = 4$ dă $x = 3/5$. 1° $\lambda < 0$. Inegalitatea (1) dă $\lambda + 1 - (\lambda - 1)x < 0$, din care avînd în vedere că $\lambda - 1 < 0$, avem

$x < \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$, $f\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\right) = \frac{4\lambda^3}{(\lambda - 1)^2} < 0$, deci $x_1 < \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} < x_2$ rădăcina x_1 este acceptabilă. 2° $\lambda > 0$, inegalitatea (2) devine $\lambda + 1 - (\lambda - 1)x > 0$, cum $\lambda - 1 > 0$,

$$x < \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}, \text{ iar } f\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\right) > 0, \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} > x_1 > x_2$$

ambele rădăcini convin. **1 092.** 0, 1, 2. **1 093.** 8 și $5 \pm i\sqrt{2}$.

1 094. Scriem $\sqrt[3]{1 - 3x} = \sqrt[3]{1 + x}$ și ridicăm la puterea a șasea; $(1 - 3x)^2 = (1 + x)^3$, verifică $x = 0$. **1 095.** Punem $\sqrt[3]{x} = t$, $\sqrt[3]{t^3 - 11} = 7 - t$; $t^3 - t^2 + 14t - 60 = 0$, $t_1 = 3$, $t^2 + 2t + 20 = 0$; răd. reală $x = 27$.

1 096. Notăm $\sqrt[4]{x} = t$, $\sqrt[4]{t^4 + 343} = 7 - t$, $t = 0$, $t = -7$, $t^2 - 6t + 21 = 0$. **1 097.** Utilizăm $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$; dacă $a = b$ identitate, dacă $a \neq b$ $x_1 = -a$, $x_2 = -b$. **1 098.** $x = a^2 - \frac{(b - 2a)^3}{27b}$.

1 099. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

1 100. Se amplifică fracția din primul membru cu expresia conjugată numitorului; deducem $\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{15}{8}\sqrt[3]{\frac{x^4}{15}}$. Se ridică la pătrat, înlocuim $\sqrt{x^2} = y$ și se obține $y = (-32 \pm 68) : 15\sqrt[3]{15}$. Rădăcinile ecuației date sînt reale dacă $-1 \leq x \leq 1$, valoarea negativă a lui y nu convine; $x = \pm \frac{24}{25}$ și $x = 0$. **1 101.** $x = 3$, $x = 22$. **1 102.** Notăm $x + a = u$, $x - a = v$; Ecuația

obținută se înmulțește cu $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$, găsim $u - v = \sqrt[3]{a^2} (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})$, dar $u - v = 2a$, deci, $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = 2 \sqrt[3]{a}$, care se ridică la cub; rădăcina este $x = 0$. **1 103.** Se ridică la cub, $x_1 = \frac{2a}{\sqrt[3]{5}}$, $x_2 = -\frac{2a}{\sqrt[3]{5}}$. Verifică ecuația numai x_1 ; rădăcina x_2 verifică ecuația obținută din cea dată, schimbînd pe x în $-x$. **1 104.** Împărțim cu $(a - x)^{\frac{2}{3}}$, rămîne ecuația $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{2}{3}} - 5\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}} + 4 = 0$ care rezolvată în $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}$ dă rădăcinile 1 și 4. Rădăcinile sînt $x_1 = 0$ și $x_2 = \frac{63}{65}a$. **1 105.** Notăm $x - 15 = t^4$, rămîne $\sqrt[4]{82 - t^4} = 4 - t$, care se ridică la puterea a patra $t^4 - 8t^3 + 48t^2 - 128t + 87 = 0$, care admite rădăcinile reale 1 și 3. Se deduce $x_1 = 16$ și $x_2 = 96$. Altă metodă, *v. ex. următor.* **1 106.** $\sqrt[4]{x+15} = u$, $\sqrt[4]{x-1} = v$, $u - v = 2$, $u^4 - v^4 = 16$; eliminînd u , obținem $v = 0$ și $v^2 + 3v + 4 = 0$; răd. reale $v = 0$, $u = 2$ care dau $x = 1$. **1 107.** Izolăm radicalul de ordinul patru și ridicăm la pătrat; deducem $13\sqrt{x^2+17} = x^2 + 53$; iar de aici $x^4 - 63x^2 - 64 = 0$, ecuație cu rădăcinile $x_1 = -8$, $x_2 = 8$, $x_3 = -i$, $x_4 = i$. Verifică ecuația 1 numai x_1 și x_2 , iar pe a 2-a x_3 și x_4 . **1 108.** Se notează primul termen cu u și al doilea cu v , avem $uv = 1$, și $u + v = 2$, rezultă că $u = v = 1$; apoi $x = \frac{2a^2b}{a^2+b^2}$. **1 109.** Dacă trecem totul în stînga, ecuația se poate scrie

$$\left(\sqrt[4]{1-a}\sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[4]{1+a}\sqrt[8]{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2 = 0,$$

$$\sqrt[4]{1-a}\sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt[4]{1+a}\sqrt[8]{\frac{1-x}{1+x}}$$

care ridicată la puterea a opta dă $x = a$. **1 110.** $\sqrt[5]{(7x-3)^3} = y$; rădăcini reale $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{2}{7}$.

1 111. Notăm $u = \sqrt[5]{37-x}$, $v = \sqrt[5]{x-4}$; deducem sistemul $u + v = 3$, $u^5 + v^5 = 33$; punem acum $u = \frac{1}{2}(3+z)$, $v = \frac{1}{2}(3-z)$ și deducem ecuația $z^4 + 18z^2 - 19 = 0$, $z_1^2 = -19$, $z_2^2 = 1$, $z_1 = \pm i\sqrt{19}$, $z_2 = \pm 1$, prin urmare $u = \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{19})$, $v = \frac{1}{2}(3 \mp i\sqrt{19})$; $u = 2$, $v = 1$ și $u = 1$, $v = 2$. Prima pereche conduce la rădăcini imaginare; rădăcini reale sînt $x_1 = 5$ și $x_2 = 36$.

SISTEME DE ECUAȚII

- 1 112.** $x = a, y = b$ **1 113.** $x = -a^2b^3 (a + b), y = b^4(a^2 + ab + b^2).$
1 114. $x = \frac{a^4b}{(a^2 + b^2)^2}, y = \frac{ab^4}{(a^2 + b^2)^2}.$ **1 115.** $x = (a + b)^2, y = (a - b)^2.$
1 116. $x = a^3 - b^3, y = a^3 + b^3.$ **1 117.** $x = \frac{ab}{a + b}, y = \frac{ab}{a - b}.$ **1 118.** Notăm $\frac{1}{x} = u, x = 1, y = 0.$ **1 119.** $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v; x = y = 2.$
1 120. $x^2 = u; x = \pm ab, y = a^3 + b^3.$ **1 121.** $x = y = \frac{1}{2}.$ **1 122.** $x = -pq, y = p + q.$ Sistemul este nedeterminat dacă $abp^3q^3(p - q) = 0.$ **1 123.** $x = -1, y = 2 \cos a.$ **1 124.** $x = a \cos 2\alpha, y = -a \sin 2\alpha; x^2 + y^2 = a^2.$

$$\mathbf{1\ 225.} \quad x = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + n^2} - m \sqrt{b^2 + a^2 m^2}}{1 + m^2}, \quad y = \frac{\sqrt{b^2 + a^2 m^2} + m \sqrt{a^2 + b^2 m^2}}{1 + m^2}.$$

- 1 126.** Din primele două ecuații $x = a, y = b$ care verifică ecuația a treia.
1 127. $x = y = a + b.$ **1 128.** Scoatem x din ecuația a doua și înlocuim în ecuația întâi, $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} (m - 1) y, (m^2 - 4) y + (m - 2) = 0.$ Dacă $m^2 - 4 \neq 0,$ atunci $x = \frac{m + 1}{m + 2}, y = -\frac{1}{m + 2}.$ Dacă $m = 2,$ atunci y este nedeterminat și $x = \frac{1}{3} (2 - y).$ Dacă $m = -2,$ sistemul este imposibil.
1 129. $x = \cos b, y = \sin b.$ **1 130.** 1° $k = 0$ dă $x = \frac{7}{3}, y = -1;$ fie $k \neq 0,$ scoțind x din prima ecuație și înlocuind în a doua se obține $(k - 1)(k - 3) y = -3(k - 1)^2.$ Observind factorul comun $k - 1,$ pentru $k = 1$ sistemul este nedeterminat; putem lua în acest caz $y = \lambda$ și atunci $x = 1 - 2\lambda,$ cu λ oarecare. Pentru $k \neq 1$ și $k \neq 3$ rămâne $y = -3 \frac{k - 1}{k - 3}, x = \frac{5k - 7}{k - 3}.$ Pentru $k = 3,$ sistemul este imposibil. 2° Se deduce $x = 61,5003...$

$y = -45,3758...$ **1 131.** 1° $x = \cos (a - b)$, $y = \sin (a - b)$, $\sin a \neq 0$. Dacă $\sin a = 0$, adică $a_1 = 2n\pi$, $a_2 = (2n + 1)\pi$ atunci $\cos a = \pm 1$, ecuațiile se reduc la $x = \pm \cos b$, iar y este nedeterminat. 2° Avem $x^2 + y^2 = \sin^2 (a - b) + \cos^2 (a - b) = 1$; cînd a și b variază, punctul $M(x, y)$ descrie un cerc cu centrul în origine și de rază 1. **1 132.** Din a doua ecuație scoatem pe y și substituind în prima, obținem $(t^2 - 3t + 2)x = t^2 - t - 2$.

Avem deci un sistem de soluții bine determinat dacă $t^2 - 3t + 2 \neq 0$. Simplificînd cu $t - 2$, expresia lui x devine $x = \frac{t+1}{t-1}$ căreia îi corespunde $y = -\frac{2t+1}{t-1}$. Semnul rădăcinilor x și y rezultă din tabloul

| t | $-\infty$ | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $+\infty$ | |
|---------|-----------|------|----------------|----------|-----------|-----|
| $t+1$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $-2t-1$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | |
| $t-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | |
| x | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | ∞ | $+$ |
| y | $-$ | $-$ | $+$ | ∞ | $-$ | |

Pentru $t = 2$ sistemul se reduce la $2x + y = 1$, nedeterminat; dacă $t = 1$ obținem $9x + 6y = 0$, $3x + 2y = 1$, incompatibil.

1 133. Se rezolvă sistemul în $\sin x$ și $\cos x$ și din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, rezultă condiția: $(cb' - bc')^2 + (ac' - a'c)^2 = (ab' - ba')^2$;

Soluția a 2-a. Se înlocuiește $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, unde $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Sistemul devine $(b + c)t^2 - 2at + c - b = 0$, $(b' + c')t^2 - 2a't + c' - b' = 0$. Se scrie că ecuațiile au o rădăcină comună.

1 134. Trebuie ca coeficienții să fie proporționali. Deducem: 1° $2m = n$, a) $m = 0$, $n = 0$ imposibil, b) $m = 1$, $n = 2$ nedeterminat; 2° $2m = -n$, a) $m = 0$, $n = 0$ imposibil, b) $m = 3$, $n = -6$ nedeterminat. **1 135.** $a = 1$, $x = 2$, $y = 3$; $a = -5$, $x = \frac{2}{7}$, $y = \frac{3}{7}$. **1 136.** Din prima ecuație scoatem $x = 1 - 3y$ și înlocuim în ecuația a doua, $-(m + 6)y = 8$. Dacă $m + 6 \neq 0$, atunci $y = -\frac{8}{m+6}$, $x = \frac{m+30}{m+6}$. Dacă $m = -6$ sistemul este imposibil. Sistemul este compatibil dacă valorile x și y găsite

mai sus, cu $m \neq -6$, verifică ecuația a treia; se deduce condiția $m^2 + 7m - 18 = 0$, din care $m = 2$ și $m = -9$; 1° $m = 2$, $x = 4$, $y = -1$; 2° $m = -9$, $x = 7$, $y = \frac{8}{3}$. **1 137.** Adunând ecuațiile a 2-a cu a 3-a, avem

$(p + 1)x = p + 1$. Dacă $p \neq -1$, $x = 1$, $y = \frac{1}{2}(p + 1)$ valori care înlocuite în ecuația 1 dau condiția $p^2 + p - 12 = 0$, adică $p = 3$ și $p = -4$. Pentru $p = 3$, $x = 1$, $y = 2$; pentru $p = -4$, $x = 1$, $y = -\frac{3}{2}$.

Când $p = -1$. $x = \frac{17}{5}$, $y = -\frac{6}{5}$.

1 138. Scăzând ecuația a doua din prima rămâne $b(a - c)y = -(a - c)(a + c)$; 1° $a - c \neq 0$, A) $b \neq 0$ atunci $y = -\frac{1}{b}(a + c)$, $x = a^2 + c^2 + ac$, valori care înlocuite în ecuația a 3-a dau $a^2b + bc^2 + abc - a^2c - ac^2 = b^3$ care se poate scrie $(b - c)(a - b)(a + b + c) = 0$; sistemul este compatibil în cazurile $b = c$, $a = b$, $a + b + c = 0$. Soluțiile rezultă imediat. B) $b = 0$ sistemul este imposibil; 2° $a - c = 0$, înlocuim în sistem c prin a și apoi ca mai sus. **1 139.** Din ecuația 1 și a 4-a se deduce $y = -1$ și apoi $ax = 1 + b$; $a \neq 0$ și înlocuind aceste valori în ecuația a 2-a și a 3-a se deduce $a = 1$, $b = 2$ și $x = 3$. Dacă $a = 0$, sistemul este imposibil. **1 140.** Din prima ecuație $y = 1 - x$, valoare care înlocuită în ecuația a 2-a dă $(a - b)x = 2 - b$, $a \neq b$, rezultă $x = \frac{2 - b}{a - b}$, $y = \frac{a - 2}{a - b}$.

$a \neq b$. Sistemul este compatibil dacă aceste valori verifică celelalte trei ecuații. Condițiile sînt $(C_1) a^2 - 5a - bc + 3b + 2c = 0$; $(C_2) -4b^2 + 12b + ac - 4a - 2c = 0$ $(C_3) -b^2 + 7b + ac - a - 2ab - 2c = 0$. Făcînd combinațiile $C_2 - 4C_3$ găsim $(a - 2)(8b - 3c) = 0$ din care pentru $a \neq b$ deducem $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, apoi $x = 1$, $y = 0$. **1 141.** $x = a$, $y = b$, $z = a - b$. **1 142.** $x = \frac{1}{a - 1}$, $y = 1$, $z = -\frac{1}{a - 1}$, pentru $a \neq 1$.

1 143. $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$. **1 144.** $x = \frac{a + b - c}{2 \sin A}$, $y = \frac{b + c - a}{2 \sin B}$,

$z = \frac{a + c - b}{2 \sin C}$. **1 145.** $x = \frac{b + c}{a}$, $y = \frac{c + a}{b}$, $z = \frac{a + b}{c}$; $x + 1 = \frac{a + b + c}{a}$;

$\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} + \frac{1}{z + 1} = 1$; cînd $a + b + c = 0$ $x = y = z = -1$.

1 146. O soluție este evidentă $x = y = z = 0$. Să căutăm legea generală de formare și a altor soluții în caz că are astfel de soluții. Presupunem $ab' - ba' \neq 0$, $bc' - cb' \neq 0$ și $ca' - ac' \neq 0$. Înmulțim prima ecuație cu b' și a doua cu $-b$, adunăm membru cu membru și avem (1) $x(ab' - ba') +$

$+z(cb' - bc') = 0$. În mod analog formăm ecuația care nu conține pe z
 (2) $x(ac' - ca') + y(bc' - cb') = 0$. Ecuațiile (1) și (2) se pot scrie (3) $\frac{x}{bc' - ab'} =$
 $\frac{y}{ca' - ac'} = \frac{z}{ab' - ba'}$. Din (3), egalînd cu λ , deducem $x = (bc' - cb')\lambda$,
 $y = (ca' - ac')\lambda$, $z = (ab' - ba')\lambda$, cum λ poate fi oarecare, sistemul admite o
 infinitate de soluții. **1 147.** Primele două ecuații omogene ne dau $\frac{x}{-5-8} =$
 $= \frac{y}{-12+2} = \frac{z}{-4-15} = -\lambda$, $x = 13\lambda$, $y = 10\lambda$, $z = 19\lambda$ și înlocuind în
 ecuația a treia găsim $\lambda = 3$, deci $x = 39$, $y = 30$, $z = 57$. **1 148.** $x = y =$
 $= z = 0$; din primele două $x = \lambda(b - c)$, $y = \lambda(c - a)$, $z = \lambda(a - b)$
 cu ecuația ultimă $\lambda = \pm 1$. **1 149.** Din primele două ecuații se deduce
 (1) $x = \lambda(bc' - cb')$, $y = \lambda(ca' - ac')$, $z = \lambda(ab' - ba')$

care înlocuite în ecuația a treia dau

$$\lambda(bc'a'' - cb'a'' + ca'b'' - ac'b'' + ab'c'' - ba'c'') = 0 \text{ sau } \lambda D = 0,$$

D simbolizînd expresia din paranteză.

1° dacă $D \neq 0$, trebuie ca $\lambda = 0$, prin urmare $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

2° dacă $D = 0$, sistemul este nedeterminat, admite o infinitate de soluții,
 date de (1), λ fiind oarecare.

1 150. $D = m^3 - 3m + 2 = 0$, $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = 2$; $m = 1$, $x = -\lambda -$
 $-\mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$, λ și μ arbitrari; $m = 2$, $x = -\lambda$, $y = -\lambda$, $z = 3\lambda$

1 151. $D = 4m^2 - 67m + 165 = 0$, $m_1 = 3$, $m_2 = \frac{55}{4}$. **1 152.** $m_1 = 0$,
 $m_2 = 1$, $m_3 = 2$.

1 153—1 154. $x = y = z = 0$ și $x = \lambda(b - c)$, $y = \lambda(c - a)$, $z =$
 $= \lambda(a - b)$, λ oarecare. **1 155.** $x = y = z = 0$ și $x = \lambda \sin a$, $y = \lambda \cos a$,
 $z = -\lambda$, λ oarecare. **1 156.** v. ex. 1 149. $D = 9a - 18 = 0$, $a = 2$; pentru
 orice altă valoare a lui a sistemul nu admite decît soluția $x = y = z = 0$.

1 157. Adunăm membru cu membru și din rezultat scădem prima ecuație :
 obținem $t = \frac{1}{3}(a + b + c - 2d)$; analog $x = \frac{1}{3}(b + c + d - 2a)$,
 $y = \frac{1}{3}(c + d + a - 2b)$, $z = \frac{1}{3}(d + a + b - 2c)$. **1 158.** Notăm $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} =$
 $= v$, $\frac{1}{z} = w$ și adunînd membru cu membru, avem $a + b + c = 0$;
 sistemul este imposibil dacă $a + b + c \neq 0$ și nedeterminat dacă $a + b +$
 $+ c = 0$. **1 159.** 1° $x = y = z = 0$. 2° Împărțim prima ecuație cu yz diferit

de zero și avem $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$, analog $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$; notăm $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$, $\frac{1}{z} = w$ etc. $x = \frac{2abc}{ab - bc + ca}$, y și z prin permutări circulare.

1 160. Excluzînd $x = y = z = 0$, împărțim cu xyz și avem $1 = a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right) = b \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \right) = c \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)$ sau $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{1}{b}$, $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{c}$ și apoi ca în exemplul precedent. **1 161.** Pri-

mele două ecuații sînt omogene și scoatem (vezi ex. 1 146) $\frac{x}{(a+b) - (c+a)} = \frac{y}{(b+c) - (a+b)} = \frac{z}{(c+a) - (b+c)}$, $\frac{x}{b-c} = \frac{y}{c-a} = \frac{z}{a-b} = \lambda$, din care $x = (b-c)\lambda$, $y = (c-a)\lambda$, $z = (a-b)\lambda$. Înlocuind aceste valori în ecuația a treia obținem $\lambda = \frac{1}{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)} =$
 $= -\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ și apoi $x = -\frac{1}{(a-b)(c-a)}$,
 $y = -\frac{1}{(b-c)(a-b)}$, $z = -\frac{1}{(c-a)(b-c)}$, $a \neq b \neq c$.

1 162. Fie ecuația $t^3 = t^2z + ty + x$ cu rădăcinile a, b, c . Dacă scriem relațiile dintre rădăcini și coeficienți, obținem $x = abc$, $y = -(ab + bc + ca)$, $z = a + b + c$. **1 163.** Împărțind prima ecuație cu ab , a doua cu ac , a treia cu bc , avem $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = \frac{c}{ab}$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{b}{ac}$, $\frac{z}{c} + \frac{y}{b} = \frac{a}{bc}$, adunăm membru cu membru și scădem succesiv fiecare ecuație

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad z = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2ab}.$$

1 164. Punînd $\sin(-x + y + z) = u$, $\sin(x - y + z) = v$, $\sin(x + y - z) = w$, sistemul devine $au + bv = c$, $bw + cu = a$, $cv + aw = b$;
 $u = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos B$, $v = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos A$, $w = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos C$;
 $x = k\pi + \frac{B}{2}$, $y = k'\pi + \frac{A}{2}$, $z = k''\pi + \frac{C}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

1 165. $x = \frac{a}{d' + d'' - d}$, $y = \frac{b}{d + d'' - d'}$, $z = \frac{c}{d + d' - d''}$. **1 166.** Se împart ecuațiile respectiv cu yz, zx, xy ; se adună apoi, se împarte cu 2 și din rezultat se scad succesiv ecuațiile date; $x = \frac{\cos a}{2 \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} y$ și z prin per-

mutarea circulară a lui a, b și c . **1 167.** $x = \frac{c-b}{a+b+c}, \quad y = \frac{a-c}{a+b+c}, \quad z =$

$= \frac{b-a}{a+b+c}$ pentru $a+b+c \neq 0$. **1 168.** $x = \frac{dnp}{anp + bmp + cmp}$; pentru y

și z se permută circular a, b, c și m, n, p . **1 169.** $\frac{\sqrt[3]{a}}{x} = \frac{\sqrt[3]{b}}{y} = \frac{\sqrt[3]{c}}{z} =$

$= \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{\frac{1}{d}}; \quad x = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{a}}$ etc.

1 170. $\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{mx}{\frac{1}{m}} = \frac{-y}{-\frac{1}{b}} = \frac{-nz}{-\frac{1}{c}} = \frac{mx - y - nz}{\frac{1}{m} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}} = \frac{d}{\frac{1}{m} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}};$

$x = \frac{bcd}{bcm - ac - abn}$ etc. **1 171.** $x = \frac{a+b+c+d}{ap}$ etc. **1 172.** $\frac{x+z}{xyz} = \frac{m+p}{mp},$

$\frac{1}{yz} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{m} + \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{xy} = Z, \quad \frac{1}{yz} = X, \quad \frac{1}{zx} = Y; \quad x = \frac{\sqrt{mnp}}{m}, \quad y = \frac{\sqrt{mnp}}{n},$

$z = \frac{\sqrt{mnp}}{p}$. **1 173.** $x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{1}{4}$. **1 174.** $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ etc.

1 175. Avem $\frac{xy}{ab} = \frac{xz}{ac} = \frac{yz}{bc} = \frac{xy + xz + yz}{ab + ac + bc} = \frac{m^2}{ab + ac + bc}; \quad x =$

$= \frac{am}{\sqrt{ab + ac + bc}}$ etc. **1 176.** $x = bc \sqrt{\frac{r}{mb^2c^2 + na^2c^2 + pa^2b^2}}, \quad y$ și z permutând circular a, b, c .

1 177. $x = \frac{1}{(a+b-c)(a-b+c)}$ etc. **1 178.** $\frac{2-x}{3} = \frac{4-y}{5} = t;$

$2-x=3t, \quad 4-y=5t$ etc; $x_1 = -1, y_1 = -1; x_2 = 5, y_2 = 9$. **1 179.** Notăm rapoartele cu t și avem $2x+y-1=(5a-1)t$ și $x-y+1=(a+1)t$, apoi înlocuim în ecuația a doua și obținem $t = \pm 1$; pentru $t_1 = 1, \quad x_1 = 2a, \quad y_1 = a,$ pentru $t_2 = -1, \quad x_2 = -2a, \quad y_2 = 2-a$.

1 180. $x = \frac{ad}{am + bn + cp}$ etc. **1 181.** Se amplifică fiecare raport respectiv

cu a, b și c și se face suma numărătorilor pe suma numitorilor; $x = ad : A,$

$y = bd : A, \quad z = cd : A, \quad A = am + nb + cp$. **1 182.** $x = \frac{\sqrt{ABC}}{A}, \quad y = \frac{\sqrt{ABC}}{B},$

$z = \frac{\sqrt{ABC}}{C},$ în care $A = \frac{b+c-a}{2}, \quad B = \frac{a+c-b}{2}, \quad C = \frac{a+b-c}{2}.$

$$1183. \quad x = \frac{a+c}{a(a+b+c)}, \quad y = \frac{(a+c)(b+c)}{c(b-a)(a+b+c)}, \quad z = \frac{b+c}{c(a+b+c)}.$$

1184. $x = 3, y = -2(a+b+c), z = ab+bc+ca, 3t^2 - 2(a+b+c)t + ab+bc+ca = 0; \quad \Delta = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$, răd. reale. 1185. Adunăm ecuația 1 cu a 2-a și din ecuația a 3-a scădem ecuația 1 înmulțită cu m , obținem

$$(m+1)x + (m+2)y = 2 + m - m^2,$$

$$(1-m^2)x - (m+2)y = -2 + 3m - m^2;$$

acestea adunate dau $(m+1)(2-m)x = 2m(2-m), x = \frac{2m}{m+1}, m \neq -1, m \neq 2$. Introducând x în ultimul sistem, deducem $y = 1-m, m \neq \pm 2$, apoi $z = \frac{m^2+1}{m+1}, m \neq -1$. Cazurile excluse: 1° $m = -1$, sistem imposibil; 2° $m = 2, x = 0, y = 0, z = 0, x - 2y - 2z = 0$, sistem nedeterminat; 3° $m = -2, x = 4, y - z = 8$, sistem nedeterminat.

1186. $x = \frac{(1+2a)(1-a^2)}{(a^2+a+1)^2}, y = \frac{a(a+2)(1+2a)}{(a^2+a+1)^2}, z = \frac{a(a^2-1)(a+2)}{(a^2+a+1)^2}$; sistemul are soluții pentru $(a^3-1)^2 \neq 0$; pentru $(a^3-1)^2 = 0$ sistemul este nedeterminat.

1187. Compatibil dacă $a = 5$ dar nedeterminat, $x = \frac{1}{5}(4-z-6t), y = \frac{1}{5}(3+3z-7t)$.

1188. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, sistemul admite numai soluția $x = y = z = t = 0$. 1189. $x_1 = 6k, x_2 = -11k, x_3 = 9k, x_4 = -4k, k$ arbitrar.

1190. $x_1 = 3k, x_2 = 0, x_3 = 4k, x_4 = 0, k$ arbitrar. 1191. $x_1 = -x_4, x_2 = 3x_4, x_3 = -3x_4$ sau $x_1 = -k, x_2 = 3k, x_3 = -3k, x_4 = k, k$ arbitrar.

1192. $x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2, x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2, x_1$ și x_2 arbitrare.

1193. imposibil.

1194. $x_4 = -\frac{1}{4}(9x_1 + 6x_2 + 8x_3), x_5 = \frac{1}{4}(3x_1 + 2x_2 + 4x_3), x_1, x_2, x_3$ arbitrare. 1195. Punem $x + y + z + t = s$, scoatem x, y, z, t în funcție de s , se determină apoi s . 1196. Ca în exemplul precedent.

$$\mathbf{1\ 197.} \ x = \frac{ba_i}{\sqrt[n]{\sum_{i=1}^n a_i^p}}, i = 1, 2, \dots, n. \mathbf{1\ 198.} \text{ Însemnînd cu } \frac{1}{u} \text{ valoarea comu-}$$

nă a rapoartelor date, avem $x_1 = au$, $x_2 = ux_1$, $x_3 = ux_2$, ..., $x_n = ux_{n-1}$,
 $b = ux_n$; $u = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$, $x_i = a \sqrt[n+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. $\mathbf{1\ 199.} \ x_1 = x_2 = \dots =$
 $= x_n = 1$. $\mathbf{1\ 200.}$ Scădem ecuația a doua din celelalte; $x_1 = x_3 = x_4 = \dots =$
 $= x_n = 1$ și $x_2 = 2 - n$

$\mathbf{1\ 201.}$ Se adună ecuațiile. Notînd $\alpha = \frac{1}{n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, găsim
 $x_i = \alpha - a_i$, unde $i = 1, 2, \dots, n$.

$\mathbf{1\ 202.}$ Notăm $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$ și adunînd membru cu membru
avem $s + 2s + 3s + \dots + ns = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ sau $s(1 + 2 + \dots + n) =$
 $= s \frac{n(n+1)}{2} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, de unde $s = \frac{2}{n(n+1)} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = A$.
Scăzînd acum ecuația a doua din prima, $x_1 + x_2 + \dots + x_n - nx_1 =$
 $= a_1 - a_2$, de unde $nx_1 = A + a_2 - a_1$, $x_1 = \frac{A + a_2 - a_1}{n}$. Analog, scăzînd
ecuația a treia din ecuația a doua, deducem $x_2 = \frac{A + a_3 - a_2}{n}$, $x_n =$
 $= \frac{A + a_n - a_{n-1}}{n}$.

$\mathbf{1\ 203.}$ Notînd $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$, atunci sistemul $-s + 2x_1 =$
 $= 2a$, $-s + 4x_2 = 4a$, $-s + 8x_3 = 8a$, ..., $-s + 2^n x_n = 2^n a$, de
unde $x_1 = a + \frac{s}{2}$, $x_2 = a + \frac{s}{4}$, $x_3 = a + \frac{s}{8}$, ..., $x_n = a + \frac{s}{2^n}$. Adunînd mem-
bru cu membru, $s = na \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$. Paranteza este o sumă de ter-
meni în progresie geometrică cu rația $q = \frac{1}{2}$ egală cu $1 - \frac{1}{2^n}$, deci $s = 2^n na$.
Cu acestea $x_1 = a + \frac{s}{2} = a(1 + 2^{n-1}n)$, $x_2 = a(1 + 2^{n-2}n)$, ..., $x_n = a(1 + n)$.

$\mathbf{1\ 204.}$ $(a-b) x_1 = a(c_1 + c_2 + \dots + c_n) - c_1 [(n-1)a + b]$, ..., $(a-b) x_n =$
 $= a(c_1 + c_2 + \dots + c_n) - c_n [(n-1)a + b]$.

$$\mathbf{1\ 205.} \ x_k = \frac{c_k}{a-b} - \frac{b \sum_{i=1}^n c_i}{(a-b)[a + (n-1)b]}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$\mathbf{1206.} \ x_k = a_k - C_k^1 a_{k-1} + C_k^2 a_{k-2} + \dots + (-1)^i C_k^i a_{k-i} + \dots + (-1)^k a_0$,
 $k = 1, 2, \dots, n$.

1 207. Scoatem pe y din ecuația 1 și înlocuim în ecuația a 2-a, rămâne $(m+1)x^2 - 2(2m+1)x + 2m+5 = 0$; $\Delta \gg 0$. **1 208. Soluția 1.** Se scoate y din ecuația 1 și se introduce în a 2-a. **Soluția a 2-a.** Se pune $y = tx$ și atunci $x^2(1+t) = 10$ și $x^2(t^2+t) = 15$. Se împarte membru cu membru; $x = \pm 2$, $y = \pm 3$.

1 209. $x = \pm 2$, $y = \pm 1$; $x = \pm 3i$, $y = \pm 8i$.

1 210. $x + y = u$, $xy = v$; $x = 9$, $y = 3$; $x = 3$, $y = 9$.

1 211. $x = \pm 9$, $y = \pm 3$. **1 212.** $x = 1$, $y = 2$. **1 213.** x și y satisfac ecuația $z^2 \pm 2az + 9 - 3a^2 = 0$; $a < -\sqrt{3}$ sau $a > \sqrt{3}$ atunci x și y sînt reale de semn contrar; $-\sqrt{3} < a < -\frac{3}{2}$ și $\frac{3}{2} < a < \sqrt{3}$, x și y reale și negative; $-\frac{3}{2} < a < \frac{3}{2}$, imaginare; $\frac{3}{2} < a < -\sqrt{3}$ reale și pozitive.

1 214. $x = -\frac{n(a-b)}{m-n}$, $y = -\frac{m(a-b)}{m-n}$.

1 215. $x^4 - (m^2 + a^2 - b^2)x^2 + a^2m^2 = 0$. **1 216.** $x + y = u$, $xy = v$; $x = 5$, $y = 2$; $x = 2$, $y = 5$; $x = -1$; $y = -1$. **1 217.** Se scad, $1^\circ x - y = 0$ și $2^\circ x + y = -4$; $x = 0$, $y = 0$; $x = -2$, $y = -2$. **1 218.** $x = 9$, $y = 12$; $x = -12$, $y = -9$; $x = \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{423})$ etc.

1 219. $x + y = u$, $xy = v$; $x = y = 6$; $x = -\frac{3}{2}(1 + \sqrt{5})$; $y = -\frac{3}{2}(1 - \sqrt{5})$ și invers. **1 220.** $x + y = u$; $xy = v$; $x = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21})$, $y = \frac{1}{2}(5 \mp \sqrt{21})$; $x = \frac{1}{2}(2 \pm i\sqrt{6})$, $y = \frac{1}{2}(2 \mp i\sqrt{6})$. **1 221.** $x = \pm 4$, $y = \pm 2$; $x = \pm 2$, $y = \pm 4$. **1 222.** Scădem, $(x+y)[5(x-y)+1] = 0$; $y = -x$, $x = 1$, $x = -\frac{2}{3}$ etc. **1 223.** $y = tx$; $t_1 = \frac{2}{3}$, $x = \pm 3$, $y = \pm 2$, $t_2 = \frac{1}{5}$, $x = \pm \frac{5}{2}\sqrt{2}$, $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1 224. $xy = u$, $x = \frac{27-u}{u+1}$, $y = \frac{5-u}{u+1}$, $u^3 + u^2 + 33u - 135 = 0$, $u = 3$ etc. **1 225.** $x = 9$, $y = 4$; $x = 4$, $y = 9$. **1 227.** $\sqrt{x+y} = u$; $u_1 = 2$, $x = 1$, $y = 3$, $x = 3$, $y = 1$; $u_2 = -3$, $x = \frac{1}{2}(9 + i\sqrt{61})$, $y = \frac{1}{2}(9 - i\sqrt{61})$; $x = \frac{1}{2}(9 - i\sqrt{61})$, $y = \frac{1}{2}(9 + i\sqrt{61})$.

1 228. Rezolvăm ecuația a 2-a în xy , găsim $xy = 30$, $xy = -\frac{51}{2}$; $x=5$, $y=6$ și $x=6$, $y=5$ etc.

1 229. $x=8$, $y=2$; $x=-2$, $y=-8$. **1 230.** $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$; $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{2}$. **1 231.** $x=p$, $y=q$; $x=\frac{p(a^2-b^2)qb(2a-b)}{a^2+b^2-ab}$,

$$y=\frac{-q(a^2-b^2)+pa(2b-a)}{a^2+b^2-ab}.$$

1 232. Ecuația a 2-a dă $xy=4/5$, $xy=-5/4$; $x=\frac{2}{5}$, $y=2$, $x_2=-2$, $y=-\frac{2}{5}$, $x_3=5+2\sqrt{5}$, $y=-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x_3}$; $x_4=5-2\sqrt{5}$, $y=-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x_4}$. **1 233.** Din $x^2+y=x-y^2$ rezultă $x=y$ și $x+y=1$; $x=y=0$, $x=y=\frac{1}{a-1}$ și $(a+1)x^2-(a+1)x+1=0$. **1 234.** $x=2$. $y=4$; $x=-\frac{12}{7}$, $y=-\frac{37}{7}$. **1 235.** $x=1$, $y=3$; $x=3$, $y=1$.

1 236. Se scad ecuațiile $x=0$, $y=-1$; $x=-1$, $y=0$; $x=\frac{1}{2}(2a-1\pm\sqrt{4ab+1})$.

1 237. $x=2$, $y=3$; $x=-5$, $y=2$. **1 238.** $x=1/m$, $y=m$. **1 239.** Înmulțim ecuația întâi cu 2 și scădem din ecuația a 2-a; din ecuația rămasă scoatem pe x ; $y^4-3y^3+y^2+3y-2=0$; $y_1=-1$, $y_2=2$, $y_{3,4}=1$; $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=3$, $x_4=1$. **1 240.** $x=4$, $y=9$; $x=9$, $y=4$. **1 241.** $x=y=0$; $x=\sqrt[3]{(a-1)(b-1)^2}$, $y=\sqrt[3]{(a-1)^2(b-1)}$.

1 242. $x=9$, $y=4$. **1 243. Soluția 1:** Punem $(x-1):(x+1)=u$, $(y-1):(y+1)=v$; $x=(1+u):(1-u)$. **Soluția a 2-a:** $x+Y=X$, $xy=Y$, $x=\frac{1+a}{1-a}$, $y=\frac{1+b}{1-b}$.

1 244. Ecuația 1 $(x-y)(xy-1)=0$; $x=y$, $x=y=\sqrt{a}$, $x=y=-\sqrt{a}$; $xy=1$; $x=\pm\sqrt{a}$, $y=\mp\frac{1}{\sqrt{a}}$; $x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$, $y=\mp\sqrt{a}$.

1 245. $x+y=u$, $xy=v$, atunci $u^2-2v=4$, $u(4-v)=8$; $v=0$, $u=2$; $v=6$, $u=-4$. Altă metodă: $y=tx$ și atunci $3t^4-2t^3+3t^2=0$ etc. **1 246.** $x^3+y^3+3(x^2y+xy^2)=(x+y)^3=27$; $x+y=3$, $xy=2$; $x=1$, $y=2$; $x=2$, $y=1$ și rădăcini imaginare. **1 247.** x^3+

+ $y^3 + 3xy(x + y) = (x + y)^3 = \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^3$ etc. **1 248.** $x(x^2 + y^2) = a^3$, $y(x^2 + y^2) = b^3$, $y = \frac{b^3}{a^3} x$ etc. **1 249.** Se pune $y = tx$, după împărțirea ecuațiilor obținute, găsim $t^3 + at^2 - at - 1 = 0$, $(t - 1)[t^2 + (1 + a)t + 1] = 0$. **1 250.** Se face suma și diferența ecuațiilor, se deduc sistemele $x + y = 0$, $x - y = 0$; $x + y = 0$, $x^2 + xy + y^2 = a - b$; $x^2 - xy + y^2 = a + b$, $x - y = 0$; $x^2 - xy + y^2 = a + b$, $x - y = 0$; $x^2 - xy + y^2 = a + b$, $x^2 + y^2 + xy = a - b$. Soluțiile sînt:

$$\frac{x \left| 0 \right| \pm \sqrt{a-b} \left| \pm \sqrt{a+b} \right| \frac{1}{2} (-\sqrt{a-2b} \pm \sqrt{a \pm 2b}) \left| \frac{1}{2} (\sqrt{a-2b} \pm \sqrt{a+2b}) \right|}{y \left| 0 \right| \mp \sqrt{a-b} \left| \pm \sqrt{a+b} \right| \frac{1}{2} (-\sqrt{a-2b} \mp \sqrt{a+2b}) \left| \frac{1}{2} (\sqrt{a-2b} \mp \sqrt{a+2b}) \right|}$$

1 251. $x^3 + y^3 + x^3y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) + x^3y^3 = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] + x^3y^3 = 17$, $x + y = u$, $xy = v$; $u + v = 5$, $u^3 + v^3 - 3uv = 17$. Soluțiile sînt: $x = 1$, $y = 2$; $x = 2$, $y = 1$; $x = 1 + i\sqrt{2}$, $y = 1 - i\sqrt{2}$; $x = 1 - i\sqrt{2}$, $y = 1 + i\sqrt{2}$.

1 252. Soluția 1. Punem $y = tx$ și împărțim, $t = 2$, $t = \frac{1}{2}$, ($t \neq -1$); $x^3 = 1$, $x^3 = 8$

$$\frac{x \left| 1 \right| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \left| -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| \left| 2 \right| -1 + i\sqrt{3} \left| -1 - i\sqrt{3} \right|}{y \left| 2 \right| -1 + i\sqrt{3} \left| -1 - i\sqrt{3} \right| \left| 1 \right| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \left| -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|}.$$

Soluția a 2-a. Punem $x + y = u$, $x - y = v$; $uv^2 = 3$, $u(u^2 + v^2) = 30$; scăzînd membru cu membru, $u^3 = 27$, $u^3 - 3^3 = (u - 3)(u^2 + 3u + 9) = 0$, $u = 3$, $u = \frac{3}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$ etc.

Soluția a 3-a. Adunînd și scăzînd ecuațiile date, avem $x^3 + y^3 = 9$, $x^2y + xy^2 = 6$ sau $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = 9$, $xy(x + y) = 6$, în care notăm $x + y = u$, $xy = v$; $u(u^2 - 3v) = 9$, $uv = 6$; $u = 3$, $u = \frac{3}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. **1 253.** Notăm $xy = u$, scoatem $x = -\frac{a^3 + u}{a + u}$, $y = \frac{a^3 - 2a^2 - u}{a + u}$; facem produsul xy care este u . Rămîne ecuația $u^3 + (2a - 1)u^2 - a^2u + a^6 - 2a^5 = 0$, $u_1 = -a^2$ etc. **1 254.** Se adună și se scad $x^3 + \frac{3}{x} = 4y$, $3x + \frac{1}{x^3} = \frac{4}{y}$; eliminăm pe y

făcînd produsul, avem $x^8 - 2x^4 + 1 = (x^4 - 1)^2 = 0$; $x = \pm 1$, $y = \pm 1$; $x = \pm i$, $y = \mp i$. **1 255.** Împărțim membru cu membru, avem $y = \frac{b}{a} x$ etc. sau $y = tx$ etc. **1 256.** $x + y = u$, $xy = v$, apoi $u = tv$, se deduce prin împărțire $t = \frac{2}{3}$ și $t = \frac{3}{2}$. Soluțiile sînt: $x = 1$, $y = 2$; $x = 2$, $y = 1$; $x = 1 \pm i\sqrt{2}$, $y = 1 \mp i\sqrt{2}$. **1 257.** Punem $y = tx$, împărțim membru cu membru cele două ecuații $16t^4 - 32t^3 + 24t^2 - 8t + 1 = 0$, $(2t - 1)^4 = 0$, $t = \frac{1}{2}$, $x^4 = 2^4$, $y = \frac{1}{x}$. **1 258.** Ridicăm ecuația întâi la puterea a patra, se scoate apoi $xy = a^2 \pm \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{2}}$. **1 259.** $a^5 = (x + y)^5 = x^5 + y^5 + 5xy[(x + y)^3 - 3xy(x + y)] + 10x^2y^2(x + y)$, se scoate $xy \frac{a^2}{2} \pm \frac{\sqrt{5a(a^5 + 4b^5)}}{10a}$. **1 260.** $x = 9$, $y = 0$. **1 261.** $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}$; se ridică la pătrat. **1 262.** $x = 3$, $y = 3/2$; $x = 24/23$, $y = 24$. **1 263.** $y = tx$ și se elimină x ; sau $\sqrt{x^2 + y^2} = 8\sqrt{2} - \sqrt{2xy}$ etc. **1 264.** $\sqrt[4]{x} = u$, $\sqrt[5]{y} = v$, $u + v = 5$, $u^3 + v^3 = 35$. **1 265.** $x + y = u$, $xy = v$, $x = 81$, $y = 16$. **1 266.** $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = z$ etc. **1 267.** Ecuația a doua $\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{y^3} = 3,5 \sqrt[3]{xy} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})$; $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3,5 \sqrt[3]{xy}$; $x = 216$; $y = 27$; $x = -27$, $y = -216$. **1 268.** $x = 9$, $y = 16$. **1 269.** $x = \pm 4$, $y = \pm 5$, $z = \pm 6$. **1 270.** $x = 2$, $y = -3$, $z = 4$; $x = -3$, $y = 2$, $z = 4$; $x = 3$, $y = -4$, $z = -2$; $x = -4$, $y = 3$, $z = -2$. **1 271.** $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$; $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$. **1 272.** $x = 6$, $y = 9$, $z = 1$. **1 273.** $x = 4$, $y = 6$, $z = 9$, $x = 9$, $y = 6$, $z = 4$. **1 274.** $x = 2$, $y = 7$, $z = 1$; $x = \frac{5}{9}$, $y = \frac{8}{3}$, $z = -\frac{17}{9}$. **1 275.** $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$; $x = \frac{11}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{2}{3}$. **1 276.** Adunînd membru cu membru, $x = \frac{a}{\sqrt{A}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{A}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{A}}$, $A = a + b + c$. **1 277.** $ax = by = cz = \frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}} = \frac{a + b + c}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$; $x = \frac{k}{a}$, $y = \frac{k}{b}$, $z = \frac{k}{c}$, unde $k = \pm \sqrt{a + b + c}$. **1 278.** O soluție evidentă $x = y = z = 0$. Înmulțind membru cu membru, deducem $xyz = abc$ și apoi $x = \sqrt[7]{a^4b^2c}$, $y = \sqrt[7]{ab^4c^2}$, $z = \sqrt[7]{a^2b^2c^4}$. **1 279.** Ca în exemplul precedent; $x = y = z = 0$, $x^2 = ab$, $y^2 = ac$, $z^2 = bc$. **1 280.** Se ridică prima ecuație la puterea n și a doua la puterea m și se împart, se elimină x ; ridicăm prima ecuație la

puterea p și a treia la puterea m și împărțind, rămâne încă o ecuație fără x . În ecuațiile rămase se elimină y . **1 281.** Se înmulțesc ecuațiile între ele.

$$\frac{n(n+1)}{2} (x_1 x_2 \dots x_n)^2 = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Împărțind ecuația întâi cu a doua

$$\frac{x_2 x_3 \dots x_n}{x_1^{n-1}} = \frac{a_1}{a_2}, \quad x_1^n = \frac{a_2}{a_1} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad a = \frac{n(n+1)}{2} \text{ etc.}$$

1 282. Punem $x + y + z = s$; $x(y + z) = 2s$ etc. Se adună membru cu membru, $yz = 2,5s$, $xz = 1,5s$, $xy = 0,5s$; $xyz = \sqrt{1,875s} \sqrt{s}$; $x = \frac{23}{10}$,

$y = \frac{23}{6}$, $z = \frac{23}{2}$. **1 283.** Aducînd la numitor comun în ecuația a treia

și avînd în vedere ecuația a doua, găsim $xyz = 24$. Rezultă că x, y, z , sînt rădăcinile ecuației $t^3 - 9t^2 + 26t - 24 = 0$. Prin urmare $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$ și permutări circulare ale acestor numere. **1 284.** Adunînd membru cu membru, $(x + y + z)^2 (a + 2) = k^2 + l^2 + m^2$; $x + y + z = \pm \sqrt{\frac{k^2 + l^2 + m^2}{a + 2}} = \alpha$ cu $a + 2 \neq 0$, $x = \frac{k^2 - \alpha^2}{\alpha(\alpha - 1)}$, $y = \frac{l^2 - \alpha^2}{\alpha(\alpha - 1)}$, $z = \frac{m^2 - \alpha^2}{\alpha(\alpha - 1)}$.

1 285. Se înmulțește prima ecuație cu y , a doua cu x și se adună. Înlăturînd soluția evidentă $x = y = z = 0$, găsim $ay^2 + bx^2 = xyz$ și analog, alte două ecuații; se egalează prima ecuație cu a doua și a doua cu a treia, se deduce

$$\frac{x^2}{a(a-b-c)} = \frac{y^2}{b(b-a-b)} = \frac{z^2}{c(c-c-a)} = \rho$$

$$x = 2a \sqrt{\frac{bc}{(a+b-c)(a+c-b)}} \text{ etc.}$$

1 286. Avem $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = (2 - z)^2 - (6 - z)^2$, $xy = z^2 - 2z - 1$; $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$, $(2 - z)^3 = 8 - z^3 + 3(z^2 - 2z - 1)(2 - z)$, sau aranjînd, $z^3 - 3z^2 - z + 2 = 0$, $(z^2 - 1)(z - 2) = 0$; x și y sînt rădăcinile ecuației $t^2 - t(2 - z) + z^2 - 2z - 1 = 0$. Pentru $z = -1$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ și avem soluțiile: $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $z_1 = -1$ și $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, $z_2 = -1$. Pentru $z = 1$ avem $x_3 = -1$, $y_3 = 2$, $z_3 = 1$ și $x_4 = 2$, $y_4 = -1$, $z_4 = 1$. Pentru $z = 2$ avem: $x_5 = -1$, $y_5 = 1$, $z_5 = 2$ și $x_6 = 1$, $y_6 = -1$, $z_6 = 2$. Se mai obțin șase sisteme de soluții prin permutarea în toate modurile posibile ale numerelor $-1, 1$ și 2 . **1 287.** $xy = u$, $yz = v$, $zx = w$, vezi exemplul precedent.

1 288. $x = 2k, y = 5k, z = 9k$; ecuația a doua dă $k = \frac{1}{16}$, $x = \frac{1}{8}$,
 $y = \frac{5}{16}$, $z = \frac{9}{16}$. **1 289.** $x = 12, y = 2, u = 6, v = 4$; $x = 12, y = 2,$
 $u = 4, v = 6$; $x = 2, y = 12, u = 6, v = 4$; $x = 2, y = 12, u = 4,$
 $v = 6$. **1 290.** Din ultimele două ecuații $x + y = \frac{7}{12} xy, z + t = \frac{5}{18} zt$.

Prin înmulțirea membru cu membru, $(x + y)(z + t) = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 18} xyzt = 105$;

deci $x + y$ și $z + t$ sînt rădăcinile ecuației $u^2 - 22u + 105 = 0$ etc. Rădăcinile sînt: $x = 3, y = 4, z = 6, t = 9$; $x = 3, y = 4, z = 9, t = 6$; $x = 4, y = 3, z = 6, t = 9$; $x = 4, y = 3, z = 9, t = 6$. **1 291.** Prin scăderi și împărțiri se găsește: $z = 5u - 10, y = 4u - 3,$
 $x = 23 - 10u$, apoi: $5u^2 - 16u + 12 = 0$; $x = 3, y = 5, z = 0, u = 2,$
sau $x = 11, y = 1, z = -4; u = 1, 2$. **1 292.** $t = 1 - x; y = 2x - x^2$.

1 293. Metoda 1. Scriem ecuațiile astfel $2t^2 - t + 3 - x = 0, 3t^2 + t - 2 - y = 0$ și se elimină t (v. ex. 824); găsim $(3x - 2y - 13)^2 - 5(x + y - 1) = 0$. **Metoda a 2-a.** Procedăm direct. Eliminăm întâi pe t^2 pentru aceasta înmulțim ecuațiile respectiv cu -3 și 2 și adunăm, rămîne $t = \frac{1}{5} (13 - 3x + 2y)$ și aceasta o înlocuim în una din ecuații.

1 294. $x^2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 = y + 2, x^2 = y + 2$. **1 295.** $x^3 = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^3, x^3 = t^3 +$
 $+ \frac{1}{t^3} + 3\left(t + \frac{1}{t}\right), x^3 = y + 3x$. **1 296.** $t = \sqrt[3]{x}, \log_a y = t \log_a x \cdot \sqrt[3]{x} \log_a x =$
 $= \log_a y$. **1 297.** $x^3 = 1 - \sqrt[3]{t}, y^2 = 1 - \sqrt[3]{t}; \sqrt[3]{t} = 1 - x^3, \sqrt[3]{t} = 1 - y^2; t =$
 $= (1 - x^3)^2, t = (1 - y^2)^3$, deci $(1 - x^3)^2 = (1 - y^2)^3$.

1 298. $\frac{y}{x} = t$ și înlocuim t în una din ecuații, găsim $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

1 299. Ordonăm ecuațiile după puterile lui t , avem $at^3 - yt^2 - at - y = 0,$
 $(x - 2a)t^2 - x = 0$. Eliminăm succesiv pe t după grade, mergînd descrescînd; pentru aceasta înmulțim ecuația 1 cu $(x - 2a)$, iar pe a 2-a cu at și le scădem; găsim $y(x - 2a)t^2 - 2a^2t + y(x - 2a) = 0$. Acum eliminăm t^2 dintre ecuația ultimă și a 2-a de mai sus; găsim $y^2(x - a)^2 (x - 2a) - a^4x = 0$.

1 300. Se egalează șirul rapoartelor cu y și se dezvoltă calculele, ordonîndu-se după x, y și xy . Se rezolvă sistemul în aceste valori și se scrie că produsul valorilor găsite pentru x și y este egal cu valoarea găsită pentru xy .

1 301. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy, c = a^2 - 2b$. **1 302.** $x^3 + y^3 =$

$= (x + y)(x^2 + y^2 - xy)$ și $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \therefore xy = b - \frac{c}{a}$,
 $b = a^2 - 2xy$. Eliminând xy , obținem $a^3 - 3ab + 2c = 0$.

1 303. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

1 304. Soluția 1. Înmulțind membru cu membru, găsim $ab = \frac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3}$.
 Aplicând o proprietate a proporțiilor primei ecuații date și ultimei, deducem $\frac{y}{x} = \frac{1-a}{1+a}$, $\frac{y^3}{x^3} = \frac{1-ab}{1+ab}$ și de aici, $\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^3 = \frac{1-ab}{1+ab}$.

Soluția a 2-a. Expresiile fiind omogene în x și y , punem $y = tx$ și deducem $a = \frac{1+t}{1-t}$, $b = \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}$; $ab = \frac{1+t^3}{1-t^3}$. Scoatem pe t din prima ecuație și înlocuim în ultima. **1 305.** Notăm $y = tx$ și apoi ca mai sus.

1306. Notăm $X = \frac{\sqrt{x-y}}{x-y}$, $Y = \frac{\sqrt{y-z}}{y-z}$, $Z = \frac{\sqrt{z-x}}{z-x}$ și sistemul devine $X - iZ = a$, $Y - iX = b$, $Z = iY = c$. Din acestea deducem (1) $X = \frac{a+b+ic}{1-i}$, $Y = \frac{ia+b+c}{1-i}$, $Z = \frac{a+ib+c}{1-i}$. Din notații, prin inversare și ridicare la pătrat, deducem $x - y = \frac{1}{X^2}$, $y - z = \frac{1}{Y^2}$, $z - x = \frac{1}{Z^2}$.

$\therefore \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} = 0$, deci rezultatul eliminării este

$$\frac{1}{(a+b+ic)^2} + \frac{1}{(ia+b+c)^2} + \frac{1}{(a+ib+c)^2} = 0.$$

1 307. $ab + bc + ca + 1 = 0$. Se formează $[(a+1) : (a-1); (b+1) : (b-1)]$ etc. **1 308.** Ridicăm prima ecuație la pătrat, $1 + 2 \sin x \cos x = a^2$, $\sin x \cos x = \frac{a^2-1}{2}$ care cu a doua, scrisă $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = b$, dă $2a = b(a^2 - 1)$. **1 309.** Înmulțim prima ecuație cu n , a doua cu m și adunând obținem $\cos x = \frac{na+mb}{mn}$, apoi $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{2(na+mb)^2}{m^2n^2} - 1$, înlocuim în prima ecuație; $2(na+mb)^3 = 2m^2n^3a + m^3n^2b$.

INEGALITĂȚI

1 310. $x < 6$.

1 311. $1 < x < 4$. **1 312.** Avem tabloul

| x | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | 1 | $+\infty$ |
|----------|-----------|----------------|------|-----------|
| $x - 1$ | — | — | $0+$ | |
| $2x + 3$ | — | 0 | $+$ | $+$ |
| F | $+$ | ∞ | $—$ | $0+$ |

din care rezultă $-\frac{3}{2} < x < 1$.

1 313. $-\frac{7}{3} < x < 1$. **1 314.** $\frac{19}{5} < x < \frac{119}{25}$. **1 315.** $1 < x < 3$, $x > 7$.
1 316. $-1 < x < 1$, $2 < x < 3$. **1 317.** $x < -3$, $x > 1$. **1 318.** $x < 1$, $x > 4$.

1 319. Trebuie $x > 0$; avem tabloul

| x | 0 | 2 | 3 | 4 | ∞ |
|----------------|-----|-----|-----|-----|----------|
| $x^2 - 5x + 6$ | $+$ | 0 | $—$ | 0 | $+$ |
| $\sqrt{x} - 2$ | $—$ | $—$ | $—$ | 0 | $+$ |
| $x^2 + 4x + 3$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| F | $—$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ |

$2 < x < 3$ și $x > 4$.

1 320. $-2 < x \leq -\frac{5}{3}$ și $1 \leq x < 5$.

1 321. Deducem $\frac{x(3x-2)}{(x-1)(x+2)(x-2)} > 0$.

| x | $-\infty$ | -2 | 0 | $\frac{2}{3}$ | 1 | 2 | $+\infty$ | | | | | |
|-----------|-----------|------|----------|---------------|-----|-----|-----------|---|----------|---|----------|---|
| $x(3x-2)$ | | + | + | 0 | — | 0 | + | + | + | | | |
| $x-1$ | | — | — | | — | — | 0 | + | + | | | |
| x^2-4 | | + | 0 | — | | — | | — | 0 | + | | |
| F | | — | ∞ | + | 0 | — | 0 | + | ∞ | — | ∞ | + |

Inecuația este verificată de $-2 < x < 0$, $\frac{2}{3} < x < 1$, $x > 2$. **1 322.** Tre-
cînd în primul membru, avem $\frac{-x(x^2-3x-10)}{(x-1)(x+1)} > 0$; $x < -5$, $-1 < x < 0$,
 $1 < x < 2$.

1 323. $1 < x < 2$, $3 < x < 3,5$.

1 324. $-2 < x < 1$, $x > 2$.

1 325. $-3 - 2\sqrt{2} < x < -3 + 2\sqrt{2}$.

1 326. $-2\sqrt{2} < x < -1$, $1 < x < 2\sqrt{2}$.

1 327. $-5 < x < -3$, $-2 < x < -1$, $1 < x < 2$, $3 < x < 5$.

1 328. $x < -2$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x > \sqrt{2}$.

1 329. $-1 < x < -\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} < x < 1$, $x > 2$.

1 330. $-3 < x < -2$. **1 331.** $x < \frac{5}{3}$, $x > 3$.

1 332. $-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$.

1 333. 2° Punem $x = \operatorname{tg} y$ și avem $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \sin 4y \leq \frac{1}{4}$, $-1 \leq \sin 4y \leq$
 ≤ 1 , inegalitate evidentă. **1 334.** Numitorul fiind totdeauna pozitiv, avem
sistemul de inegalități: (1) $x^2 - mx + 1 > -3(x^2 + x + 1)$, (2) $x^2 - mx +$

+ 1 < 3(x² + x + 1). Din (1) avem 4x² + (3 - m)x + 4 > 0 care este verificată de orice valori ale lui x dacă Δ₁ = m² - 6m - 55 ≤ 0; -5 ≤ m ≤ 11. Din (2) avem 2x² + (3 + m)x + 2 > 0; Δ₂ = m² - 6m - 7 ≤ 0, deci trebuie ca -1 ≤ m ≤ 7.

1 335. $\frac{x^2 + (b-a)x + a^2 + b^2}{x^2 - (a+b)x + a^2 + b^2} > 0$. Numărătorul și numitorul sînt totdeauna pozitivi căci Δ₁ = -[2(a² + b²) + (a + b)²] < 0, Δ₂ = -[2(a² + b²) + (a - b)²] < 0.

1 336. Rezolvăm inegalitățile simultane :

$$(1) \quad \frac{1-x}{1+x} < \frac{1-kx}{1+kx} \quad (2) \quad \frac{1-kx}{1+kx} < \frac{1-k^2x}{1+k^2x}$$

care sînt echivalente cu

$$(1') \quad P_1(x, k) \equiv x(x+1) \left(x + \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{k}\right) < 0$$

$$(2') \quad P_2(x, k) \equiv x \left(x + \frac{1}{k}\right) \left(x + \frac{1}{k^2}\right) (k-1) < 0.$$

Rezolvăm aceste inegalități pentru cazurile $k > 1$, $0 < k < 1$, $-1 < k < 0$, $k < -1$ și alegem valorile lui x care fac $P_1 < 0$, $P_2 < 0$. Pentru $k > 1$, $x < -1$ sau $-\frac{1}{k^2} < x < 0$; pentru $0 < k < 1$, $x > 0$; pentru $-1 < k < 0$, $-\frac{1}{k^2} < x < -1$; pentru $k < -1$ imposibilitate.

1 337. Pentru $a < 10$, $x < \frac{4a}{5}$ și $x > \frac{3+16a}{2(10-a)}$; pentru $a = 10$, $x < 8$, pentru $a > 10$, $-\frac{3+16a}{2(a-10)} < x < \frac{4a}{5}$.

1 338. Prima parte este pozitivă, trebuie deci și partea a doua să fie pozitivă; rezultă $x < 2$, dar atunci prima parte este imaginară, deci problema nu admite soluție.

1 339. Fie $a \neq b$. Pentru $x > b$, $x > a$, avem inegalitatea echivalentă $(x-a)^2 > x-b$ sau (1) $f(x) = x^2 - (2a+1)x + a^2 + b > 0$. Trinomul $f(x)$ are rădăcini reale pentru $b \leq a + \frac{1}{4}$. Dacă $b > a + \frac{1}{4}$, $f(x)$ este totdeauna pozitiv, $x > b$, $x > a$. Dacă $b < a + \frac{1}{4}$, $f(x)$ are rădăcinile reale x_1 și x_2 pe care le comparăm față de a și b ; dacă $b < a$, $f(a) < 0$, $b < x_1 < a < x_2$, $x > x_2$; dacă $b > a$, $a < b < x_1 < x_2$ rezultă $b < x < x_1$ și $x > x_2$. Dacă $a = b$, rezultă $x < a$, $x > a + 1$.

1 340. Trebuie ca $x > 8$. Scriem $\sqrt{2x+1} > 3 + \sqrt{x-8}$ și întrucît ambii membri sînt pozitivi, ridicăm la pătrat $x > 6\sqrt{x-8}$ și printr-o nouă ridicare la pătrat $x^2 > 36(x-8)$, $x^2 - 36x + 288 > 0$; $8 < x < 12$, $x > 24$.

1 341. Trebuie ca $2x + 1 > 0$, $x > -\frac{1}{2}$. Ridicăm ambii membri la pătrat (1) $2\sqrt{(2x+1)(x+1)} < -(3x+1)$. Dacă $x > -\frac{1}{3}$ membrul doi este negativ și inegalitatea nu este verificată. Dacă $x < -\frac{1}{3}$ sau $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$, ridicăm inegalitatea (1) la pătrat și obținem $x^2 - 6x - 3 > 0$, $x < 3 - \sqrt{12}$, $x > 3 + \sqrt{12}$. În concluzie $-\frac{1}{2} < x < 3 - \sqrt{12}$. **1 342.** Radicalii au sens dacă $x \geq a$ și $x \geq -1$. Scriem $\sqrt{x-a} < 2 + \sqrt{x+1}$ și ridicînd la pătrat, rămîne $-a - 5 < 4\sqrt{x+1}$. Dacă $-a - 5 < 0$ adică $a > -5$, cum $x \geq -1$ și $x \geq a$, rezultă $-5 < a < -1$ cu $x > -1$ și $a > -1$ cu $x \geq a$. Dacă $a < -5$, $x > \frac{1}{16}(a^2 + 10a + 9)$. **1 343.** Trebuie ca $x > \frac{5}{2}$ și ridicăm la pătrat, $5 - x > \sqrt{(x+1)(2x-5)}$. Dacă $x > 5$, primul membru este negativ și al doilea pozitiv, inegalitatea nu are sens. Dacă $x < 5$, ridicăm din nou la pătrat și rămîne $x^2 + 7x - 30 < 0$, $-10 < x < 3$. Totalizînd condițiile, $\frac{5}{2} < x < 3$. **1 344.** $x > \frac{-17 + \sqrt{691}}{4}$.

1 345. Trebuie ca $\frac{3x-1}{2-x} > 0$, $\frac{1}{3} < x < 2$. Ambii membri ai inegalității date fiind pozitivi, ridicînd la pătrat, avem $\frac{3x-1}{2-x} > 1$, $\frac{3}{4} < x < 2$ și în concluzie $\frac{3}{4} < x < 2$.

1 346. Trebuie îndeplinite simultan condițiile $2x - 1 > 0$, $x^2 - 3x + 2 > 0$, $(2x - 1)^2 > x^2 - 3x + 2$; $\frac{1 + \sqrt{13}}{6} < x < 1$ și $x > 2$.

1 347. $x < -5$, $-\frac{4}{3} < x < 4$.

1 348. $-2 < x < 2$. **1 349.** $-\frac{1}{2} < x < \frac{11 - \sqrt{153}}{4}$ și $0 < x < 2$.

1 350. Trebuie ca $\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4} > 0$, $-\frac{4}{3}\sqrt{3} \leq x \leq \frac{4}{3}\sqrt{3}$ și $\frac{2}{x} - \frac{1}{2} > 0$,

$0 < x < 4$; ridicăm la pătrat. $2 < x \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$. **1 351.** O primă condiție $x \geq 0$; trecem totul în membrul întâi, avem $\frac{4\sqrt{x}}{1-x} \geq 0$. Numărătorul este pozitiv când $1-x > 0$, $x < 1$. În concluzie $0 \leq x < 1$.

1 352. Prima condiție: $x^2 - 10x + 9 > 0$, $x \leq 1$ sau $x \geq 9$; a doua condiție: $x + 2\sqrt{x^2 - 10x + 9} > 0$, iar a treia: $x + \sqrt{x^2 - 10x + 9} > 0$. Ultimele două condiții sînt satisfăcute dacă $x > 0$. Ridicăm ambii membri la pătrat; rămîne $2x^2 - 11x + 9 + 2(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - 10x + 9} \geq 0$ sau observînd că $2x^2 - 11x + 9 = (2x-9)(x-1)$, avem $(x-1)(2x-9 + 2\sqrt{x^2 - 10x + 9}) \geq 0$. 1° Fie $x-1 > 0$ (lucru ce convine condiției $x \geq 9$). Factorul al doilea trebuie să fie pozitiv, $2\sqrt{x^2 - 10x + 9} > 9 - 2x$, inegalitate verificată pentru $x \geq 9$. 2° Fie $x-1 < 0$, $x < 1$. Trebuie ca $2\sqrt{x^2 - 10x + 9} < 9 - 2x$. Ambii membri sînt pozitivi pentru $x < 1$, ridicăm deci la pătrat și avem $4(x^2 - 10x + 9) < 81 - 36x + 4x^2$, $x > -\frac{45}{4}$; trebuie deci $-\frac{45}{4} < x < 1$. În rezumat, soluția este $-\frac{45}{4} < x < 1$ și $x \geq 9$. Pentru $x = 1$ și $x = -\frac{45}{4}$ avem o egalitate.

1 353. $x < -3$ și $x > 12$, vezi ex. 697—702. **1 354.** $x < 1$. **1 355.** $x < -5$ și $x > -1$. **1 356.** $x \leq -\frac{24}{7}$ și $x \leq -\frac{18}{12}$.

1 357. $\Delta \leq 0$ și $m^2 - 5m + 4 > 0$; $x < 7 - 3\sqrt{5}$, $x > 7 + 3\sqrt{5}$. **1 358.** 1° $m < 4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ verificată pentru orice valoare reală a lui x ; 2° $m = 4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ totdeauna verificată, afară de $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 3° $4 - \frac{2\sqrt{3}}{3} < m < 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ dacă $m < 4$ verificată pentru $x_1 < x < x_2$, dacă $m > 4$ verificată pentru $x < x_1$ și $x > x_2$; 4° $m \geq 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ nu este verificată de nici o valoare reală a lui x .

1 359. Notăm $f(x) = mx^4 + 4(m+1)x^2 + m - 2$ și $\varphi(y) = my^2 + 4(m+1)y + m - 2$. 1° Dacă $m(m-2) < 0$ sau $0 < m < 2$, $\varphi(y)$ are o singură rădăcină pozitivă α^2 ; $f(x)$ are semnul expresiei $m(x^2 - \alpha^2)$; inegalitatea este verificată pentru $x < -\alpha$ și $x > \alpha$. 2° Dacă $m > 2$, inegalitatea este totdeauna verificată. 3° Dacă $m < 0$ și $m < -1$, inegalitatea nu este verificată de nici o valoare reală a lui x . Rămîne de examinat $-1 < m < 0$.

Discriminantul lui $\varphi(y)$ este $\Delta_1 = 3m^2 + 10m + 4$ și $\varphi(y)$ are rădăcini reale pentru $m < \frac{-5 - \sqrt{13}}{3}$ și $m > \frac{-5 + \sqrt{13}}{3}$. Pentru $m = -1$, $\Delta_1 < 0$ deci -1

este cuprins între rădăcinile m_1 și m_2 ale lui Δ_1 ; $m_1 < -1 < m_2 < 0$. Dacă $-1 < m < m_2$, $\varphi(y)$ nu are rădăcini; el are semnul lui m și este totdeauna negativ; inegalitatea nu este verificată. Dacă $m_2 < m < 0$, $\varphi(y)$ are două rădăcini pozitive, p^2 și q^2 , ($p^2 q^2$); avem $\varphi(y) \equiv m(y - p^2)(y - q^2)$, $f(x) \equiv m(x^2 - p^2)(x^2 - q^2)$ și cum $m < 0$, inegalitatea se scrie $(x + q)(x + p)(x - p)(x - q) < 0$ și este verificată pentru $-q < x < -p$ și $p < x < q$. În rezumat, pentru $m < m_2$ nu avem soluții; pentru $m_2 < m < 0$, $-q < x < -p$, $p < x < q$; pentru $0 < m < 2$, $x < -\alpha$, $x > \alpha$; pentru $m > 2$, inecuația este totdeauna verificată. **1 360.** Semiplanul inferior (drept) relativ la dreapta $3x - 2y + 3 = 0$. **1 361.** Semiplanul superior (stîng) relativ la dreapta $x - y - 1 = 0$. **1 362.** $1^\circ x \geq 0$, $y \geq 0$ (primul cadran) $x + y < 1$ sau $0 < y < 1 - x$; avem triunghiul (fără ipoteuză) : $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1 - x$. $2^\circ x \leq 0$, $y \geq 0$ (cadranul doi), $y - x < 1$, triunghiul : $0 \leq y < x + 1$, $-1 < x \leq 0$. $3^\circ x \leq 0$, $y \leq 0$; triunghiul $y > -x - 1$, $-1 < x \leq 0$. $4^\circ x \geq 0$, $y \leq 0$, triunghiul $y > x - 1$, $0 \leq x < 1$. Aceste triunghiuri formează pătratul mărginit de dreptele $y = \pm x \pm 1$ (figura 12). $x - 1 < y < -x + 1$ dacă $0 \leq x < 1$; $-x - 1 < y < x + 1$ dacă $-1 < x \leq 0$. **1 363.** Soluția generală a sistemului este dată de mulțimea punctelor cuprinse între dreptele $y = x - 1$ și $y = 2x - 3$ pentru $x > 2$ (partea hașurată din figura 13). **1 364.** Mulțimea punctelor din regiunea hașurată a figurii 14. **1 365.** Mulțimea punctelor din regiunea hașurată a figurii 15. **1 366.** Rezolvăm sistemul în ipoteza $k \neq \pm 2$; avem $x = \frac{6}{2+k}$, $y = \frac{3}{2+k}$ din care după enunț rezultă $-2 < k < 4$. Dacă $k = -2$, sistemul este incompatibil. Când $k = 2$, sistemul se reduce la $x + 2y = 3$ din care $x = 3 - 2y$. După enunț se vede că trebuie ca $0 < y < 1$ și atunci $x = 3 - 2y$. **1 367.** $x_1 = -2m + 11$, $y_1 = \frac{1}{2}(3m - 11)$; înlocuind, avem $(5m - 31)(5m - 19) > 0$,

$\frac{19}{5} < a < \frac{31}{5}$ **1 368.** Mulțimea punctelor din regiunea hașurată a figurii 16.

1 369. Soluția generală a sistemului este dată de mulțimea punctelor din domeniul hașurat ABC în figura 17. **1 370.** Soluția generală a ecuației este dată de $y = 2x + 1$ și înlocuind în inecuație obținem $x > -1$. În interpretare geometrică, mulțimea soluțiilor sistemului mixt este formată de punctele dreptei $2x - y + 1 = 0$ situată în semiplanul hașurat (fig. 18).

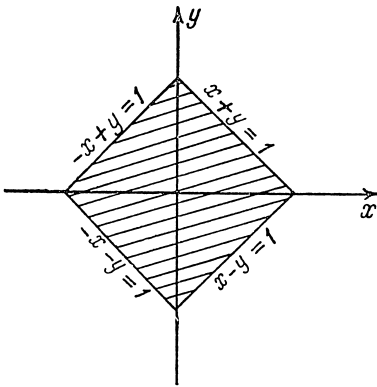


Fig. 12

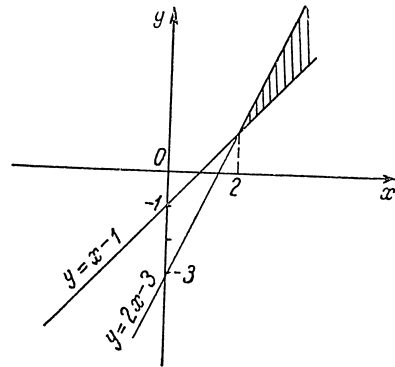


Fig. 13

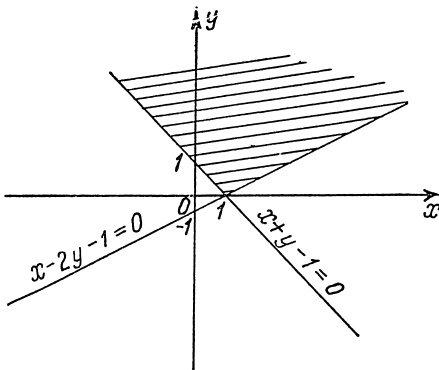


Fig. 14

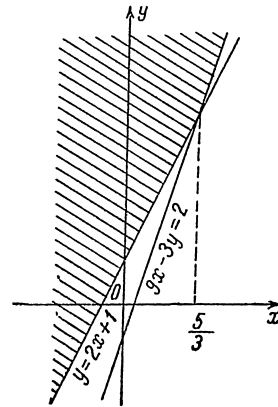


Fig. 15

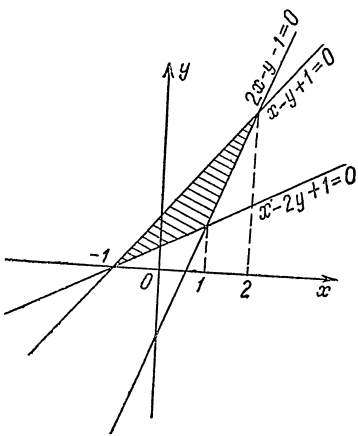


Fig. 16

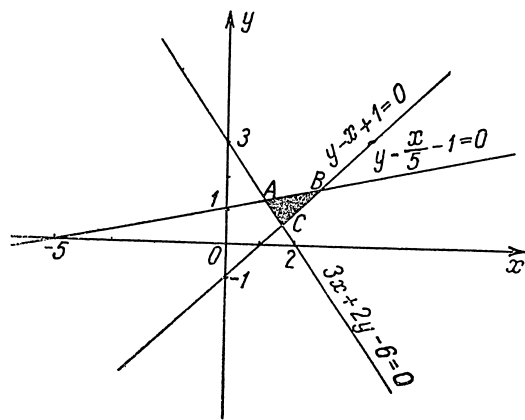


Fig. 17

1 371. Soluția generală a ecuației este $y = x + 1$ și înlocuind în cele două inecuații, avem $x > -1$ și $x < 2$. Geometric, mulțimea soluțiilor sistemului mixt este dată de punctele segmentului cuprins în interiorul unghiului hașurat (fig. 19). **1 372.** Regiunea hașurată din figura 20.

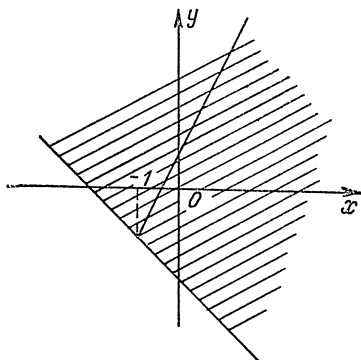


Fig. 18

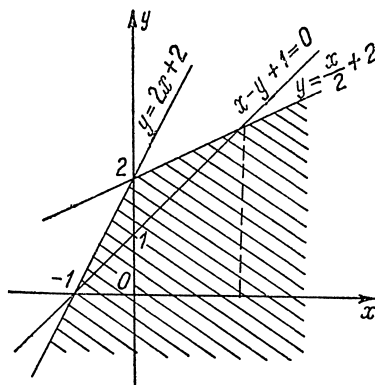


Fig. 19

1 373. Avem (1) $y^4 + (2x^2 + a^2) y^2 + x^2 (x^2 - a^2) < 0$. Formăm $z^2 + (2x^2 + a^2) z + x^2(x^2 - a^2) = 0$ în care $z = y^2$. Deoarece $\Delta = a^2(8x^2 + a^2) > 0$ și $z_1 + z_2 = -(2x^2 + a^2) < 0$, rădăcinile ecuației sînt reale, distincte, cea mai mică negativă. Dacă $0 < |x| < a$, atunci $z_1 z_2 = x^2(x^2 - a^2) < 0$ și $z_1 < 0 < z_2$; dacă $|x| > a$, atunci $z_1 < z_2 < 0$; dacă $x = \pm a$ sau $x = 0$, atunci $z_2 = 0$. Inegalitatea (1) este satisfăcută dacă $z = y^2$ este cuprinsă între rădăcinile z_1 și z_2 și deoarece $y^2 \geq 0$ trebuie să avem $0 \leq y^2 < z_2$, lucru posibil dacă $0 < |x| < a$. Dacă $|x| \geq a$ sau $x = 0$, atunci $z_2 \leq 0$ și inegalitatea (1) nu este satisfăcută. În concluzie, avem $|y| < \sqrt{z_2}$ dacă $0 < |x| < a$, de unde obținem două domenii

$$-\sqrt{\frac{a\sqrt{8x^2 + a^2} - (2x^2 + a^2)}{2}} < y < \sqrt{\frac{a\sqrt{8x^2 + a^2} - (2x^2 + a^2)}{2}}$$

unde $-a < x < 0$ și $0 < x < a$. Geometric, $P(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$, este ecuația lemniscatei lui Bernoulli. $P(x, y) < 0$ este satisfăcută în interiorul celor două domenii mărginite de buclele lemniscatei; $P(x, y) > 0$ este satisfăcută în domeniul exterior buclelor (fig. 24).

1 374. Primul membru se poate scrie $(x-1)^2 + (y-1)^2 + m - 2$, prin urmare trebuie ca $m > 2$. **1 375.** Trecem în membrul întii și efectuînd, calculul, avem $\frac{x^2 - 2ax - 24a^2}{2a + 1} > 0$.

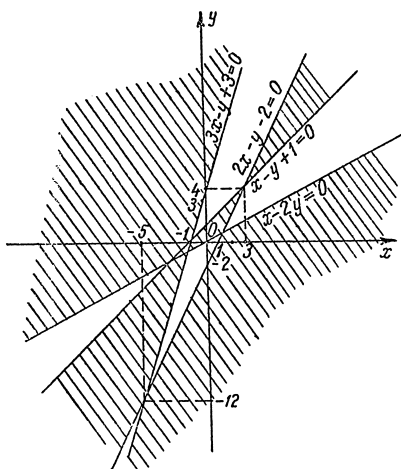


Fig. 20

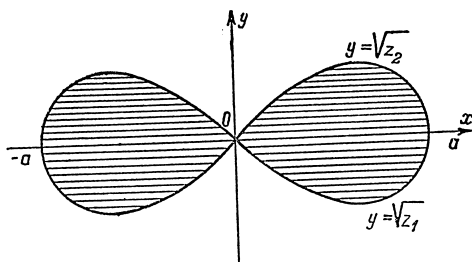


Fig. 21

trebuie ca $x^2 - 2ax - 24a^2 < 0$, deci $6a < x < -4a$. 3° Pentru $a = 0$, $x^2 > 0$, $x < 0$, sau $x > 0$. Geometric, soluțiile sînt date de figura 22. **1 376.** $x < x^3$ sau $x(x + 1)(x - 1) > 0$ din care $-1 < x < 0$ și $x > 1$. Prin urmare $x < y < x^3$ dacă $-1 < x < 0$ sau $x > 1$. Geometric, soluția este formată din două domenii avînd punctele așezate deasupra dreptei $y = x$ și sub parabola cubică $y = x^3$ (fig. 23).

1 377. Soluția generală este dată de punctele domeniului cuprins între cercul $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ și parabola $y^2 = 2ax$ (partea hașurată din figura 24). **1 378.** Partea hașurată din figura 25. **1 379.** Trecem în membrul întii și după toate calculele, avem $a^4 - a^3 - a + 1 > 0$, $(a - 1)^2 (a^2 + a + 1) > 0$ care este satisfăcută pentru orice valoare reală a lui a , trinomial fiind totdeauna pozitiv, avînd rădăcinile imaginare. **1 380.** Avem succesiv $a^2 + b^2 - ab = (a - b)^2 + ab = (a - b)^2 + \frac{1}{4} (a + b)^2 - \frac{1}{4} (a - b)^2 = \frac{1}{4} (a + b)^2 + \frac{3}{4} (a - b)^2$, expresie totdeauna pozitivă.

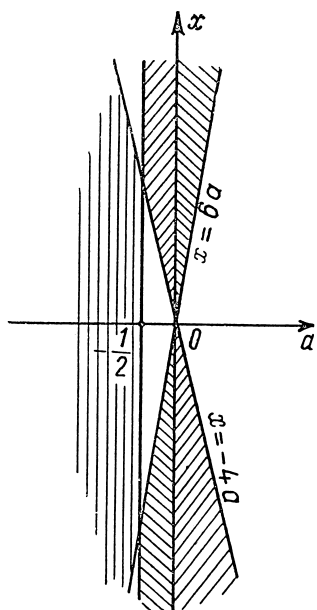


Fig. 22

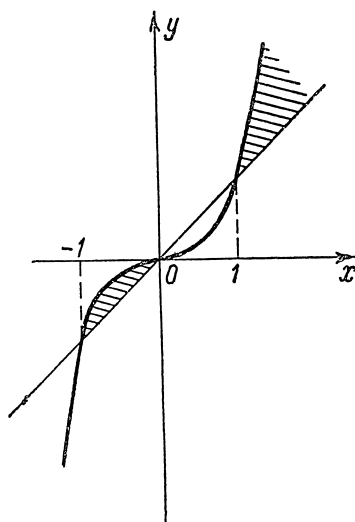


Fig. 23

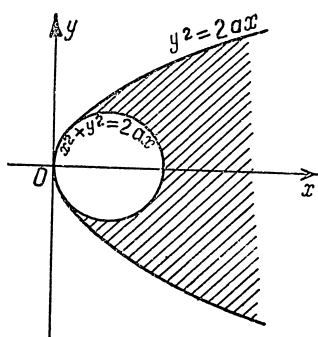


Fig. 24

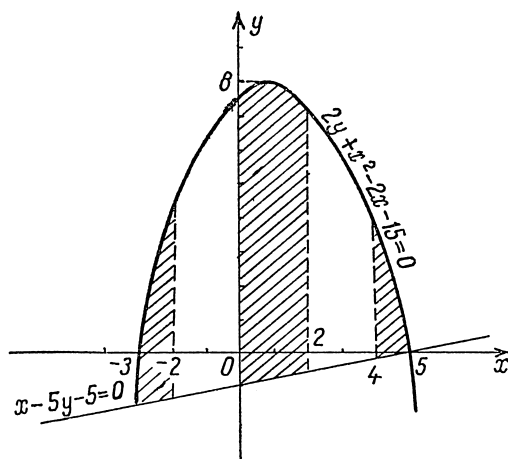


Fig. 25

1 381. Înmulțind ambii membri cu 2, se poate scrie

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 > 0$$

inegalitate verificată pentru orice valori reale ale lui a, b, c .

1 382. Putem scrie: $(x - 2y + z - 3)^2 + \left(2y + \frac{1}{2}z - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 + h - 3^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^2$, trebuie să avem $h > 45/4$. **1 383.** Ambii

membri fiind pozitivi, ridicăm la pătrat, $\frac{(a+b)^2}{4} > ab$ sau $(a+b)^2 > 4ab$,

$(a-b)^2 > 0$, inegalitatea evidentă. **1 384.** Dacă $x, y, z > 0$ din identitatea $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ rezultă $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz > 0$ (vezi ex. 1 381) și apoi punem $a = x^3$,

$b = y^3, c = z^3$. **1 385.** Arătăm mai întâi că $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{(a-b)^2}{b}$,

$(a \geq b)$. Putem scrie $\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \leq \frac{1}{8} \frac{(a-b)^2}{b}$. Împărțind ambii membri cu

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, avem $\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{8b} \geq \frac{1}{2}$ inegalitate echivalentă cu $\frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 \geq \frac{1}{2}$,

evidentă pentru $\frac{a}{b} \geq 1$. Analog se demonstrează și prima inegalitate.

1 386. Scriem $\frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{2} \geq \frac{(a+b)^3}{8}$, împărțim cu $a+b, (a+b > 0)$,

trecem totul în membrul întâi și rămâne $3(a-b)^2 \geq 0$, inegalitate evidentă.

1 387. După toate calculele, avem $(a+c)(a+b)(b+d)(c+d) - (a+b+c+d)ab(c+d) + cd(a+b) \geq 0, (ad-bc)^2 \geq 0$.

1 388. Scriem $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ și ambii membri fiind pozitivi, ridicând la

pătrat, avem $ab(a+b)^2 \geq 4a^2b^2, (a-b)^2 \geq 0$. **1 389.** Avem $\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$

$\sqrt{a_1 a_3} \leq \frac{a_1 + a_3}{2}, \dots, \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$ (v. ex. 1383). Adunând membru cu

membru aceste inegalități, obținem inegalitatea dată. **1 390.** $\frac{1}{2}[(a-b)^2 +$

$+(b-c)^2 + (c-a)^2]$ evident pozitivă. **1 391.** Notînd membrul întâi cu E , avem $2E = \Sigma a^2(b+c)^2 \geq 0$. **1 392.** Inegalitatea poate fi scrisă succesiv:

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) \geq 0$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \dots + (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots \geq 0$$

inegalitate evidentă. Altă soluție: se folosește identitatea lui Lagrange (v. ex. 291). **1 393.** Folosim identitatea lui Lagrange (v. ex. 291) în care

membrul doi este pozitiv fiind sumă de pătrate. Egalitatea este posibilă dacă membrul doi este nul, adică $a_1b_2 = a_2b_1, a_1b_3 = a_3b_1, \dots, a_{n-1}b_n = a_nb_{n-1}$, totuna cu $a_i = kb_i, i = 1, 2, \dots, n$. **1 394.** Utilizînd inegalitatea (1) $(xy + zt)^2 \leq (x^2 + z^2)(y^2 + t^2)$ în care facem $x = a^2, y = ab, z = c^2, t = cd$, avem $(a^3b + c^3d)^2 \leq (a^4 + c^4)(a^2b^2 + c^2d^2)$. Ridicăm la pătrat, ambii membri fiind pozitivi și aplicînd din nou (1), (2) $(a^3b + c^3d)^4 \leq (a^4 + c^4)^2(a^2b^2 + c^2d^2)^2 \leq (a^4 + c^4)^2(a^4 + c^4) \cdot (b^4 + d^4)$. Extragem rădăcina a patra din (2) și avem (3) $a^3b + c^3d \leq (a^4 + c^4)^{\frac{3}{4}}(b^4 + d^4)^{\frac{1}{4}}$ în care înlocuind a prin $a + b$ și c prin $c + d$, avem (4) $(a + b)^3b + (c + d)^3d \leq [(a + b)^4 + (c + d)^4]^{\frac{3}{4}}(b^4 + d^4)^{\frac{1}{4}}$ în care, schimbînd între ele a cu b și c cu d , avem (5) $(a + b)^3a + (c + d)^3c \leq [(a + b)^4 + (c + d)^4]^{\frac{3}{4}}(a^4 + c^4)^{\frac{1}{4}}$. Adunînd inegalitățile (3), (4) și (5) membru cu membru, obținem $(a + b)^4 + (c + d)^4 \leq [(a + b)^4 + (c + d)^4]^{\frac{3}{4}}[(a^4 + c^4)^{\frac{1}{4}} + (b^4 + d^4)^{\frac{1}{4}}]$ sau $[(a + b)^4 + (c + d)^4]^{\frac{1}{4}} \leq (a^4 + c^4)^{\frac{1}{4}} + (b^4 + d^4)^{\frac{1}{4}}$.

1 395. Față de un reper rectangular, luăm $A(a, b), B(-a, -b), A'(a', b'), B'(-a', -b')$; $AA'BB'$ este un paralelogram în care latura AB' este mai mică decît semisuma diagonalelor. **1 396.** Avem $\sum(a_i - b_i)^2 = \sum a_i^2 + \sum b_i^2 - 2\sum a_i b_i \leq \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sum |a_i||b_i| \leq \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sqrt{\sum a_i^2 \cdot \sum b_i^2} = [\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}]^2, i = 1, 2, \dots, n$; aplicînd teorema modului sumei (v. ex. 1393).

1 397. Membrul întîi se poate scrie $\frac{a+b+c}{a} - 1 + \frac{a+b+c}{b} - 1 + \frac{a+b+c}{c} - 1 = (a+b+c) \cdot \frac{ab+bc+ca}{abc} - 3$. Totodată $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (v. ex. 1 384). **1 398.** Pentru $n > 1$, avem $\frac{1}{2} < \frac{n}{n+1} < 1, \frac{1}{2} < \frac{n}{n+2} < 1, \dots, \frac{1}{2} \leq \frac{n}{2n} < 1$ și adunăm membru cu membru.

1 399. Înmulțim membru cu membru inegalitățile (v. ex. 1 384) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \frac{ab+ac+bc}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, avem $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc, (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$. **1 400.** Scriem $a^2 \geq a^2 - (b-c)^2, b^2 \geq b^2 - (c-a)^2, c^2 \geq c^2 - (a-b)^2$, deducem $a^2b^2c^2 \geq (a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2$ și inegalitățile date. **1 401.** 1° v. ex. 1 413. 2° $(a-b)^4 \geq 0$.

1 402. Scriem $am^2 - 2am + b + c > 0$. Discriminantul trinomului este $\Delta = a(a - b - c)$ care este negativ deoarece $a > 0$, $a < b + c$. Trinomul este totdeauna pozitiv, avînd rădăcini imaginare și coeficientul lui m^2 pozitiv. **1 403.** Deoarece $a^2 + b^2 > 2ab$, scriem $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) > ab(a + b)$ în care am înlocuit $a^2 + b^2$ prin $2ab$. Tot așa $b^3 + c^3 > bc(b + c)$ și $c^3 + a^3 > ca(c + a)$. Adunăm aceste trei inegalități apoi adunăm ambilor membri $a^3 + b^3 + c^3$, avem (1) $3(a^3 + b^3 + c^3) > (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$. Ținînd seama că $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$, inegalitatea (1) poate fi scrisă (2) $3(a^3 + b^3 + c^3) > (a + b + c)(ab + bc + ca)$. Înmulțind (2) cu 2 și adunăm (1), avem $9(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c)^3$.

1 404. Adunăm membru cu membru inegalitățile $(a - b)^2 > 0$, $(b - c)^2 > 0$, $(c - a)^2 > 0$ ținînd seama de $ab + bc + ca = 1$. **1 405.** Avem $-a + b + c = 2(b + c)$, $a - b + c = -2b$, $a + b - c = -2c$ și expresia devine $4(b + c)^2 - 16bc = 4(b - c)^2 > 0$. **1 406.** Înmulțind membru cu membru $a = a$, $a > b$, $a > c$, avem $a^3 > abc$; adunînd membru cu membru $a > c$, $b > c$, $c = c$, avem $abc > c^3$.

1 407. $(a + b + c)^2 \geq 0$, $2(ab + bc + ca) \geq -(a^2 + b^2 + c^2) = -1$, $ab + bc + ca \geq -\frac{1}{2}$; adunăm inegalitățile $2ab \leq a^2 + b^2$, $2ac \leq a^2 + c^2$, $2bc \leq b^2 + c^2$, $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

1 408. Suma factorilor din membrul doi este constantă și egală cu a . Dacă acești trei factori sînt pozitivi, deci $x, y, z < \frac{a}{2}$, produsul lor este maxim cînd fiecare din ei este inferior lui $\left(\frac{a}{3}\right)^3$. Dacă unul din acești factori este negativ, fie $x > \frac{a}{2}$, trebuie ca $y + z = a - x < \frac{a}{2}$ și pentru că $y, z > 0$, $y < \frac{a}{2}$, $z < \frac{a}{2}$, factorii $a - 2y$, $a - 2z$ sînt pozitivi iar inegalitatea este evidentă avînd membrul întîi pozitiv și al doilea negativ.

1 409. Din $x + y + z = 1$, rezultă $x < 1$, $y < 1$, $z < 1$, deoarece $x, y, z > 0$. Avem $\frac{1}{x} > 1$, $\frac{1}{y} > 1$, $\frac{1}{z} > 1$ și adunăm membru cu membru.

1 410. Ambii membri fiind pozitivi, se ridică la pătrat, $a^3 + b^3 > ab(a + b)$, $(a - b)^2 > 0$.

1 411. Avem $\frac{1+a_1}{2} \geq \sqrt{a_1}$, $\frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_2}$, ..., $\frac{1+a_n}{2} \geq \sqrt{a_n}$ și înmulțind membru cu membru,

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}{2^n} \geq \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} = 1.$$

1 412. Avem $(n!)^2 = (1 \cdot n) (2 \cdot (n-1)) (3 \cdot (n-2)) \dots (n \cdot 1)$. Folosim inegalitatea $k(n-k+1) \geq n$ în care $k \leq n$, adevărată deoarece $k(n-k+1) - n = (n-k)(k-1)$. Facem $k = 1, 2, \dots, n$; $1 \cdot n = n$, $2 \cdot (n-1) \geq n$, $3 \cdot (n-2) \geq n$, ..., $n \cdot 1 = n$ și înmulțind membru cu membru, avem $(n!)^2 \geq n^n$ și $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{n}$.

1 413. Scriem $\sum \frac{x_1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} = \sum \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} - n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \sum \frac{1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} - n$. Avem $\sum (x_2 + x_3 + \dots + x_n) \geq n \sqrt[n]{\pi(x_2 + x_3 + \dots + x_n)}$, $(1) x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{\pi(x_2 + x_3 + \dots + x_n)}$ și totodată

$$(2) \sum \frac{1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} \geq \frac{n}{\pi(x_2 + x_3 + \dots + x_n)} \sqrt[n]{\pi(x_2 + x_3 + \dots + x_n)^{n-1}}$$

(v. ex. 1422). Înmulțind (1) cu (2) și scăzând din ambii membri pe n , avem

$$\sum \frac{x_1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} \geq \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1}.$$

1 414. Scriem $y_1 + y_2 + \dots + y_n \geq n \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$ și $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \dots + \frac{1}{y_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{1}{y_1} \cdot \frac{1}{y_2} \dots \frac{1}{y_n}}$ și înmulțind membru cu membru.

1 415. Folosim identitatea lui Lagrange (v. ex. 291) din care deducem $(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2 = 1 - [(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2]$. Membrul întâi fiind pozitiv, membrul doi trebuie să fie pozitiv și mai mic decât 1, deci $-1 \leq a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \leq 1$. **1 416.** 1° Trebuie ca $a, b, c > 0$. Condiția $c > 0$ cere $|x| > 1$ și $b > 0$, $t > -\frac{1}{2}$ sau în total $t > 1$. Deducem $a - c = x + 2 > 0$ și trebuind ca $a - c < b < a + c$ avem $t + 2 < 2t + 1 < t^2 + t + 1 + t^2 - 1 = 2t^2 + t$ din care $t > 1$; pentru $t = 1$, $a = b = 3$, $c = 0$. 2° Din 1° am văzut că $a - b = t(t-1) > 0$. 3° $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$, $A = \frac{2\pi}{3}$, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{t^2 + t + 1}{\sqrt{3}}$, $S = \frac{bc}{2} \sin A = (t^2 - 1)(2t + 1) \frac{\sqrt{3}}{4}$; $r = \frac{S}{p} = (t-1) \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1417. Notînd $y = \alpha x$, avem $E_1 = x^{\alpha y}$, $E_2 = y^{\frac{x}{\alpha}}$. Expresia a doua se poate scrie $E_2^{\alpha^3} = y^{\alpha^2 x} = (\alpha x)^{\alpha y} = \alpha^{\alpha y} E_1$, deci $E_1 : E_2 = \left(\frac{x^{\alpha^3 - 1}}{\alpha} \right)^{\frac{x}{\alpha}}$. În consecință, dacă $\frac{x}{\alpha} > 0$ și $x > \alpha^{\frac{1}{3} - 1}$, atunci $E_1 > E_2$; de asemenea dacă $\frac{x}{\alpha} < 0$ și $x < \alpha^{\frac{1}{3} - 1}$, atunci $E_1 > E_2$. În toate celelalte cazuri, $E_1 < E_2$. (G.M. 43 pag. 265).

1 418. Fie funcția liniară $y = \alpha x + \beta$ unde x aparține intervalului închis $[a, b]$. Să presupunem că dacă $x = a$ atunci $y = c$, iar cînd $x = b$ atunci $y = d$, deducem sistemul $c = \alpha a + \beta$, $d = \alpha b + \beta$; rezolvînd în α și β obținem valorile date în enunț.

1 419. Putem scrie (1) $1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1} = \frac{x^m - 1}{x - 1}$. Înlocuim x prin $\frac{b}{a}$ și scăpînd de numitori, avem :

$$(2) a^{m-1} + ba^{m-2} + b^2a^{m-3} + \dots + b^{m-3}a^2 + b^{m-2}a + b^{m-1} = \frac{a^m - b^m}{a - b}.$$

Membrul întîi conține m termeni, iar dacă $a > 0$, $b > 0$, și $a > b$, primul termen este cel mai mare, iar ultimul cel mai mic. Avem deci inegalitatea cerută. **1 420.** 1° În inegalitatea de la ex. 1 419 facem $a = m + 1$, $b = m$

și avem $m(m + 1)^{m-1} > (m + 1)^m - m^m$, $m^m > (m + 1)^{m-1}$ sau $m^{-1}\sqrt[m]{m} > \sqrt[m]{m + 1}$. 2° Putem scrie $(m + 1)^2 > \frac{(m + 1)^{m+1}}{m^m}$ în care facem succesiv

$m = 1, 2, 3, \dots, m - 1$, înmulțim membru cu membru și rămîne 1. 2. 3 ... m

$> \sqrt[m]{m^m}$. 3° Avem $m^{+1}\sqrt[1]{1} \cdot m^{+2}\sqrt[2]{2} \cdot m^{+3}\sqrt[3]{3} \dots \frac{2m}{\sqrt[m]{m}} > \frac{2m}{\sqrt[1]{1}} \cdot \frac{2m}{\sqrt[2]{2}} \dots \frac{2m}{\sqrt[m]{m}} =$

$= \frac{2m}{\sqrt[1]{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}}$ și ținînd seama de inegalitatea de la 2°, avem inegalitatea cerută. **1 421.** 1° În inegalitatea din ex. 1 419 luăm $a = \sqrt{x + 1}$, $b = \sqrt{x}$,

$m = 2$ și avem $2\sqrt{x + 1} > \frac{(x + 1) - x}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}} > 2\sqrt{x}$. Ținînd seama că $a > b$,

deci $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, putem scrie $\frac{1}{\sqrt{x + 1}} < 2(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) < \frac{1}{x}$. 2° În inegalitatea

de la 1° facem succesiv $x = a, a + 1, a + 2, \dots, a + n - 1$ și adunînd vom avea după reducere $2(\sqrt{a + n} - \sqrt{a}) + \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a + n}} > \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a + 1}} +$

$+ \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{a+n-1}} > 2 (\sqrt[n]{a+n} - \sqrt[n]{a})$. Punind $a = \alpha$ și $n = 2\alpha + 1$ obținem

relația cerută. 1422. 1° În inegalitatea din ex. 1419 înlocuim $a = 1 + \frac{x - \sqrt[m-1]{y}}{m \sqrt[m-1]{y}}$,

$b = 1$ și avem $(m-1) \sqrt[m-1]{y} + x > m \sqrt[m]{xy}$ cu condiția $x^{m-1} > y$ deoarece $a > b$. Dacă pentru $(m-1)$ numere $a, b, c, \dots, k$ presupunem $a + b + c + \dots + k > (m-1) \sqrt[m-1]{abc \dots k}$, vom avea $a + b + c + \dots + k + l > (m-1) \sqrt[m-1]{abc \dots k} + l > m \sqrt[m]{abc \dots kl}$. Pentru $m = 2$ și $m = 3$, vezi 1383-4, pentru $m = 4, 5, \dots, n, \dots$, din aproape în aproape.

Aplicind cele stabilite, avem

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_m}}{m} > \sqrt[m]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x_1 x_2 \dots x_m}}$$

și împreună cu

$$\sqrt[m]{x_1 x_2 \dots x_m} < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}$$

rezultă

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_m}}{m} < \sqrt[m]{x_1 x_2 \dots x_m} < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}.$$

2° Avem $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} \frac{a+b}{2}$ și notind cu A primul membru și cu A' ultimul,

$AA' = ab$. Astfel căutarea lui $\sqrt{ab}$ se reduce la aceea a lui $\sqrt{AA'}$ și putem scrie

$$(1 \frac{2}{\frac{1}{A} + \frac{1}{A'}} < ab < \frac{A + A'}{2}.$$

Se demonstrează cu

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \frac{2}{\frac{1}{A} + \frac{1}{A'}}, \frac{A + A'}{2} < \frac{a + b}{2}.$$

Notînd cu B și B' primul și ultimul membru al inegalității (1), avem $A < B < \sqrt{ab} < B' < A'$ și așa mai departe. **1 423.** Scriem

$$\frac{a}{a+1} + \frac{a+1}{a+2} + \dots + \frac{a+m-1}{a+m} > m \cdot \sqrt[m]{\frac{a}{a+m}}$$

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \dots + \frac{1}{a+m} > m \sqrt[m]{\frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a+2} \dots \frac{1}{a+m}}$$

și adunăm membru cu membru.

PROGRESII ARITMETICE ȘI GEOMETRICE

1 424. Luăm $x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r$; $-5, -2, 1, 4, 7$ și $7, 4, 1, -2, -5$. **1 425.** $x - 3r, x - r, x + r, x + 3r$; $2, 5, 8, 11$.

1 426. $x(x + 4) (x + 8) (x + 12) = 3\,465$, $(x^2 + 12x) (x^2 + 12x + 32) = 3\,465$; notăm $x^2 + 12x = y$; $3, 7, 11, 15$ și $-15, -11, -7, -3$.

1 427. 180 bătăi.

1 428. $s - a = 180, s - l = 156, r = \frac{l}{13}, r = \frac{l - a}{n - 1}; a = 2, r = 2, l = 26$.

1 429. Fie x primul termen, r rația și $2n + 1$ numărul termenilor; progresia este $x, x + r, x + 2r, \dots, x + 2nr$; ecuațiile problemei conduc la $(x + nr) n = 295, (x + nr) (n + 1) = 354, x(x + 2nr) = 981$; $n = 5, r = \pm 10, x = 9$ și $x = 109$. $\div 9, 19, 29, \dots, 99, 109$ și invers. **1 430.** ex. 1 429, dar citul nefiind precizat cum se face, ajungem la sistemele $x + nr = 17, (x + nr) (2n + 1) = 289, x : (x + 2nr) = 33$ și $x + nr = 17, (x + nr) (2n + 1) = 289, (x + 2nr) : x = 33$. Se deduce $x = 33, r = -2, n = 8$ și $x = 1, r = 2, n = 8$, progresia are deci 17 termeni. **1 431.** Avem $768 = 3 + (n - 1)r, 192 = 3 + (p - 1)r$ sau $(n - 1)r = 765, (p - 1)r = 189$; împărțind membru cu membru, avem $85p - 21n - 64 = 0$, ecuație nedeterminată în n și p întregi. Scriem $n = 4p - 3 + \frac{p - 1}{2}$, punind $p - 1 = 2k$,

deducem $p = 21k + 1$ și apoi $n = 85k + 1$ unde k este un întreg. Avînd în vedere că $765 = 5 \cdot 9 \cdot 17 = (n - 1)r = 5 \cdot 17 \cdot kr$, rezultă $t = 1$ și $r = 9$, prin urmare $r = 9, p = 22$ și $n = 86$. **1 432.** $\div 15, 21, 27$. **1 433.** Relațiile celor două progresii sînt respectiv 5 și -3 și atunci $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 1$; $b_p = 93 - (p - 1) \cdot 3 = -3p + 96$; termenii comuni se deduc din $a_n = b_p$ adică $5n + 3p = 97$, ecuație care trebuie rezolvată în numere întregi; găsim $79, 44$ și 9 . **1 434.** v. ex. precedent; $4n - 3 = 11p - 7$ pe care o rezolvăm în numere întregi; scriem $n = \frac{11p - 4}{4} =$

$= 2p - 1 + \frac{3p}{4}$, rezultă că p trebuie să fie multiplu de 4; notăm $p = 4k$, deci $n = 11k - 1$; cu aceasta, expresia termenului general al progresiei căutate este $c_r = a_n = b_p = 44k - 7$. Progresia se obține făcând $k = 1, 2, 3, \dots$ și găsim $\div 37, 81, 125, \dots$ **1 435.** Scriem relația dată astfel $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$ și notăm valoarea comună cu r , deducem $a_n = a_{n-1} + r$, $a_{n-1} = a_{n-2} + r = a_{n-1} + 2r$. **1 436.** Trebuie $2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+4} = 2(3 + \sqrt{2x-6})$, $x_1 = 5$, $x_2 = 10$. **1 437.** Egalitatea $(x^2 - yz) + (z^2 - xy) = 2(y^2 - zx)$ este echivalentă cu $(x + y + z)(x - 2y + z) = 0$. **1 438.** Condiția $(x^2 + xy + y^2) + (y^2 + yz + z^2) = 2(x^2 + xz + z^2)$ este identitate dacă $x + z = 2y$. Reciproca conduce la ex. precedent. Diferența a doi termeni ne dă rațiile celor două progresii, $r_1 = y - x = z - y$; $r_2 = (x^2 + xz + z^2) - (x^2 + xy + y^2) = (y - z)(x + y + z)$, $r_2 : r_1 = x + y + z$. **1 439.** Condiția $a^2 + 2bc + c^2 + 2ab = 2(b^2 + 2ca)$ este echivalentă cu $2(b - c)(a - b) + (c - a)^2 = 0$ din care $\frac{2}{c - a} = \frac{1}{b - c} + \frac{1}{a - b}$.

1 441. Expresia se poate scrie $E = 3(xy + yz + zx) \cdot (x - 2y + z) = 0$ reciproca este adevărată și dacă $xy + yz + zx = 0$.

1 442. $x^2 - 6x + 8 = q$; pentru altă ordine $3x^2 - 10x + 8 = 0$, $3x^2 - 8x + 4 = 0$, $x^2 - 4 = 0$. **1 443.** Dacă r este rația progresiei atunci $x = y - r$ și $z = y + r$ care înlocuite în relația dată dau $y = 0$; $\div -r, 0, r$. **1 444.** Fie $2n + 1$ numărul termenilor și l ultimul termen. Avem ecuațiile $l = 6 + 2nr$, $3(2n + 3) - 3 = 6 + 6 + 2nr$; $n = \frac{6}{3 - r}$; n fiind întreg, se poate lua $r = 1, 2, 0$ și -3 . **1 445.** Se înlocuiește în expresia dată $a = a_1 + (m - 1)r$, $b = a_1 + (n - 1)r$, $c = a_1 + (p - 1)r$ pe care o verifică.

1 446. Avem $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, deci rația $r = -\frac{1}{n}$, $a_n = 0$, $S = \frac{n-1}{2}$.

1 447. Pentru $n = 1$ și $n = 2$ avem $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{5}{6}$; $r = a_2 - a_1 = \frac{1}{2}$; $S = \frac{n}{12}(3n + 1)$.

1 448. Condiția $a_1 + a_3 = 2a_2$ conduce la $(a - 1)^2(x^2 - 1) = 0$; $1^\circ a = 1$, atunci $r = 0$; $2^\circ x = -1$, atunci $r = a - \frac{1}{a}$; $3^\circ x = 1$, atunci $r = \frac{1}{a} - a$.

1 449. Rezolvînd sistemul, $x = \frac{9a}{6a-1}$, $y = \frac{8a-8}{6a-1}$, $z = \frac{9a+3}{6a-1}$, $6a + 1 \neq 0$; din $x + z = 2y$ deducem $a = \frac{13}{6}$. **1 450.** $a_i = a_1 + (i - 1)r$, termenul de

rangul i al sumei este $u_i = \frac{a_i}{2} [2a_i + (i-1)r]i = \frac{1}{2} [r^2 i^3 + r(3a_1 - r) i^2 + (r - a_1)(r - 2a_1)i]$. Dind aici lui i valorile $1, 2, \dots, n$ și adunînd, cu notația $s_p = 1^p + 2^p + \dots + n^p$ avem $2S = r^2 S_3 + r(3a_1 - 2r) S_2 + (r - 2a_1)(r - a_1) S_1$. **1 451.** 1° Avem $a_1 a_2 a_3 - a_0 a_1 a_2 = 3ra_1 a_2$, $a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 a_3 = 3ra_2 a_3$, ..., $a_{n-1} a_n a_{n+1} - a_{n-2} a_{n-1} a_n = 3ra_{n-1} a_n$. Adunînd membru cu membru, $S_1 = \frac{1}{3r} (a_{n-1} a_n a_{n+1} - a_0 a_1 a_2)$. 2° $a_{n-2} a_{n-1} a_n a_{n+1} - a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} a_n = 4ra_{n-2} a_{n-1} a_n$, $n = 3, 4 \dots$ și adunînd, $S_2 = \frac{1}{4r} (a_{n-2} a_{n-1} a_n a_{n+1} - a_0 a_1 a_2 a_3)$;
 $S_p = \frac{1}{(p+1)r} (a_{n-p+1} \dots a_{n+1} - a_0 a_1 \dots a_p)$. Aplicații: $S'_1 = \frac{1}{3} (n-1)n(n+1)$,
 $S''_1 = \frac{1}{3} n(4n^2 + 6n - 1)$; $S'_3 = \frac{1}{4} (n-2)(n-1)n(n+1)$. **1 452.** Avem
 $\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{r}{a_{n-1} a_n}$, $s_1 = \frac{n-1}{a_1 a_n}$; $\frac{1}{a_{n-2} a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{2r}{a_{n-2} a_{n-1} a_n}$, $s_2 = \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n-1} a_n} \right)$. **1 453.** $S = \frac{1}{(p-1)r} \left(\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{p-1}} - \frac{1}{a_{n-p-2} \dots a_n} \right)$. **1 454.** $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.
1 455. $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$; $m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(c^2 + a^2) - b^2}$,
 $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$, $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 2m_b^2$, $2b^2 = a^2 + c^2$.

1 456. $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C = 2\operatorname{tg} C$; exprimînd în funcție de sinus și cosinus rezultă $\sin B = 0$ și relația dată. **1 457.** Se fac calculabili prin logaritmi membrii ai doilea, $\cos r = 1$. **1 458.** Din $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} z = 2 \operatorname{arctg} y$, luînd tangenta, deducem $(x+z):(1-xz) = 2y:(1-y^2)$. **1 459.** Din relația $\sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) = 2 \sin(\gamma + \alpha - \beta)$ făcînd calculabilă prin logaritmi prima parte, avem $\sin \beta \cos(\gamma - \alpha) = \sin[(\gamma + \alpha) - \beta] = \sin(\gamma + \alpha) \cos \beta - \cos(\gamma + \alpha) \sin \beta$ din care $\sin \beta [\cos(\gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha)] = \sin(\gamma + \alpha) \cos \beta$; împărțind cu $\cos \beta$, avem $\operatorname{tg} \beta (2\cos \gamma \cos \alpha) = \sin(\gamma + \alpha)$; $2\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\gamma + \alpha)}{\cos \alpha \cos \gamma} = \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha$.

1 460. Avem $a_n = a_1 + (n-1)r$ și atunci $S = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k+1}{k} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} +$
 $+\frac{1}{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2} \left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2} 1 + \frac{1}{n-2} = n-2 + \frac{1}{n-2} =$

$$= \frac{n^2 - 4n + 5}{n - 2}. \quad \mathbf{1\ 461.} \quad s_1 = n \frac{n+1}{2}, s_2 = n^2, \dots, s_n = \frac{1}{2} n(n^2 - n + 2) \text{ ra\c{t}ia } r = \frac{n}{2} (n - 1).$$

1 462. Avem $a_n = a_1 + (n - 1)r$, $s_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)r]$,
 $s_{2n} = n[2a_1 + (2n - 1)r]$, $s_{3n} = \frac{3n}{2}[2a_1 + (3n - 1)r]$; $E = 0$. Generalizare.
 $s_p = a_1 p + \frac{1}{2} p(p - 1)r$, $s_q = a_1 q + \frac{1}{2} q(q - 1)r$, $s_t = a_1 t + \frac{1}{2} t(t - 1)r$,
avem

$$a_1(\alpha p + \beta q + \gamma t) + \frac{r}{2}[\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma t^2 - (\alpha p + \beta q + \gamma t)] = 0 \text{ care este}$$

identic nulă dacă $\alpha p + \beta q + \gamma t = 0$, $\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma t^2 = 0$. Sistem omogen
(v. ex. 1 449)  n : α, β, γ , verificat pentru $\alpha = \beta = \gamma = 0$ soluție banală şi

$$\frac{\alpha}{qt^2 - q^2t} = \frac{\beta}{p^2r - pt^2} = \frac{\gamma}{pq^2 - p^2q} \quad (k \neq 0)$$

$\alpha = kqt(t - q)$, $\beta = kpt(p - t)$, $\gamma = kqp(q - p)$. Ajungem la cazul ini ial
dacă luăm $k = 1 : 2n^3$, $p = n$, $q = 2n$, $t = 3n$.

1 463. Soluție în cazul $a_1 = 1$  i $r = 1$; avem

$$9 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] > 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \frac{(2n+1)^2}{4} > n(n+1), \quad 1 > 0.$$

$$\text{în cazul general, } S_1 = \frac{n(rn - r + 2)}{2}, S_2 = \frac{n^3r^2 + 3a_1n(a_1 + nr) - rn - 3S_1r}{3}, \dots$$

1 464. Fie $x_1 = u - 3\alpha$, $x_2 = u - \alpha$, $x_3 = u + \alpha$, $x_4 = u + 3\alpha$. Avem
 $S_1 = 4u = 0$, $u = 0$; $S_2 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 = 6u^2 -$
 $- 10\alpha^2 = -3\lambda - 5$; $S_3 = x_2x_3(x_1 + x_4) + x_1x_4(x_2 + x_3) = 4u(u^2 - 5\alpha^2) =$
 $= 0$; $S_4 = (x_1x_4)(x_2x_3) = u^4 - 10u^2\alpha^2 + 9\alpha^4 = (\lambda + 1)^2$ din care $\lambda = 5$,
 $x_1 = -3\sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = 3\sqrt{2}$ (v.  i ex. 875). **1 465.**
Există o infinitate de progresii care răspund chestiunii, cele a căror ra ie este
dublul primului termen. **1 466.** 1  30 m; 2  10 tuburi, ultimul 21 kg. **1 467.**

n^3 . **1 468.** Se scrie $a_1 = -\frac{2}{3}$ şi $q = -\frac{2}{3}$; $a_1 = 2$, $q = 2$; $\div -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27},$
 $\frac{16}{81}, -\frac{32}{243}, \frac{64}{729}$  i $\div 2, 4, 8, 16, 32, 64$. **1 469.** $\div 9, 27, 81, 243$  i $\div -18, 54,$
 $-162, 486$. **1 470.** $a_7 = 183$.

1 471. $\div 16, 8, 4$  i $\div 2, -6, 18$. **1 472.** $\div 2, 6, 18, 54$.

1 473. $\div 1, 2, 4, 8, 16$ și $\div 16, 8, 4, 2, 1$. **1 474.** $\div 7^{28}, 7^{29}, 7^{30}$ și $\div -7^{30}, 7^{29}, -7^{28}$. **1 475.** $x + y + z = 124, y^2 = xz, y + 32 = \frac{x+z}{2}$; $x = 100, y = 20, z = 4$ și $x = 4, y = 20, z = 100$. **1 476.** $q = 2, S = 3\,069$. **1 477.** $4, 12; 36$.

1 478. $(x+1)(x+5) = (x+2)^2$; $x = -\frac{1}{2}$.

1 479. Soluția 1. Fie a, aq, aq^2 numerele, atunci $\div a, aq + 8, aq^2$ pentru care (1) $a + aq^2 = 2(aq + 8)$; apoi $\div a, aq + 8, aq^2 + 64$ din care (2) $a(aq^2 + 64) = (aq + 8)^2$. Rezolvăm sistemul (1) și (2), deducem $4, 12, 36$ și $\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}$. Soluția a 2-a. Fie x, y, z numerele; rezultă sistemul $xz = y^2, x + z = 2(y + 8), x(z + 64) = (y + 8)^2$.

1 480. Fie progresiile $\div a, a + r, a + 2r, a + 3r$ și $\div b, bq, bq^2, bq^3$. Trebuie ca $a + b = 18, a + bq + r = 18, a + bq^2 + 2r = 26, a + bq^3 + 3r = 58$, din care $a = 16, r = -4, b = 2, q = 3$. **1 481.** Fie $\div a, aq, aq^2; \div b, b + r, b + 2r$. Avem $\div a - b, aq - b - r, aq^2 - b - 2r$ din care $(a - b) + (aq^2 - b - 2r) = 2(aq - b - r), a(1 + q^2) = 2aq, a(q - 1)^2 = 0$; $1^\circ q = 1, \div a, a, a$; 2° și $3^\circ \div 0, 0, 0$. **1 482.** Se deduce $2x = a + y, y^2 = bx; x = \frac{1}{8}(b - 4a \pm \sqrt{b^2 - 8ab}), y = \frac{1}{4}(b \pm \sqrt{b^2 - 8ab})$.

1 483. $4, 4q, 4q^2, 4q^3, 64$. Urmează că $64 - 4q^4$, deci $q = \pm 2, q = \pm 2i$. **1 484.** $q = 2, t_4 = 2^{18}, t_1 = 1$.

1 485. După enunț $192 = 3 \cdot q^{p-1}, 768 = 192 \cdot q^{n-p}$ din care $q^{p-1} = 2^6, q^{n-p} = 2^2$ apoi $2^{\frac{6}{p-1}} = 2^{\frac{2}{n-p}}$; rezultă $4p - 3n = 1$. Ecuația aceasta, rezolvată în numere întregi, dă $p = 3k + 1, n = 4k + 1$ unde k este un întreg oarecare. [Se scrie $n = p + \frac{p-1}{3}$; n fiind întreg, rezultă $p - 1 = 3k$]. Problema admite o infinitate de soluții. **1 486.** Înălțimile zonelor sferice sînt:

$$x = \frac{2r}{1 + q + q^2 + q^3}, y = qx, z = q^2x, t = q^3x.$$

1 487. Notăm $x = (a^2 - bc)(b - c), y = (b^2 - ca)(c - a), z = (c^2 - ab)(a - b)$, avem $x + y + z = 0$. După ex. 16 avem $E = 3xyz = 0$ căci $b^2 = ac$. **1 488.** Avem $a_1a_3 - a_2^2 = -(y^2 - xz)^3 = 0$, căci $y^2 = xz$. **1 489.** Soluția 1. Putem scrie $x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 + 3(xy + yz)(yz + zx)(zx + xy) = xyz[x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x)]$ sau $\Sigma x^3y^3 + 3xyz - (x + y) = xyz[x^3 + 3xyz \pi(x + y)]$; de aici $\Sigma x^3y^3 - xyz \Sigma x^3 = 0$.

Ultima expresie se poate scrie $xz(xz - y^2) + yx^3(y^2 - xz) + z^3(y^2 - xz) = (xz - y^2)(xy - z^2)(yz - x^2) = 0$. Soluția a 2-a. Notăm $a = x + y + z$, $b = xy + yz + zx$, $c = xyz$; avem $xy + yz + zx = b = (x + y + z) \sqrt[3]{xyz} = a \sqrt[3]{c}$. Formăm ecuația $v^3 - av^2 + a \sqrt[3]{c} v - c = 0$, $(v - \sqrt[3]{c})(v^2 + v \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2} - av) = 0$ ale cărei rădăcini sînt în progresie geometrică. **1 490.** Avem $y^2 = xz$. **1 491.** $a_1 a_3 = a_2^2$ adică $\cos^2 x = \cos(x - r) \cdot \cos(x + r)$, de aici $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 r$, $\sin^2 r = 0$, $r = k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$ **1 492.** Identitățile se verifică cu condiția $b^2 = ac$. **1 493.** $\Delta = b^2 - 4ac$, dar cum $b^2 = ac$, avem $\Delta = b^2 - 4b^2 = -3b^2 < 0$. **1 494.** Avem $m = ar^{p+q-1}$, $n = ar^{p-q-1}$; deducem $r = \sqrt[2q]{\frac{m}{n}}$, $a = m^{\frac{q-p+1}{2q}} n^{\frac{q+p-1}{2q}}$, $a_p = ar^{p-1} = \sqrt[p]{mn}$, $a_q = ar^{q-1} = m \sqrt[q]{\left(\frac{n}{m}\right)^p}$.

1 495. Fie $P(x) = ax^2 + bx + c$ și $x_1 = x - y$, $x_2 = x$, $x_3 = x + y$. Trebuie ca (1) $P^2(x_2) = P(x_1) P(x_3)$; găsim $P(x_1) = P^2(x_2) + ay^2 - y(2ax + b)$, $P(x_3) = P^2(x_2) + ay^2 + y(2ax + b)$ și cu acestea egalitatea (1) dă $2a(ax^2 + bx + c) + a^2y^2 - 4a^2x^2 - 4abx - b^2 = 0$. Deducem $y^2 = \frac{2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{f(x)}{a^2}$, $y = \frac{\pm \sqrt{f(x)}}{a}$. Obținem o infinitate de soluții dînd lui x valori care fac trinomialul $f(x)$ mai mare ca zero. **1 496.** Fie a , aq , aq^2 laturile triunghiului. Avem $a^2q^4 = a^2 + a^2q^2$, $q^4 - q^2 - 1 = 0$, $q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$.

1 497. Avem $\sum_{i=1}^n a_i^2 = a_1^2(1 + q^2 + \dots + q^{2n-2}) = a_1^2 \frac{q^{2n}-1}{q^2-1}$, $\sum_{i=1}^n a_i^2 a_{i+1} = a_1^2(q^2 + \dots + q^{2n}) = a_1^2 \cdot \frac{q^2(q^{2n}-1)}{q^2-1}$, $\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} = a_1^2(q + q^3 + \dots + q^{2n-1}) = a_1^2 \frac{q(q^{2n}-1)}{q^2-1}$; reciproc se aplică identitatea lui Lagrange, ex. 291, pentru grupele de cîte n numere $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ și $(a_2, a_3, \dots, a_{n+1})$ și se deduce că $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

1 498. $\sum_{i=1}^n a_i^n = a_1^n [1 + q^n + q^{2n} + \dots + q^{n(n-1)}] = a_1^n \frac{q^{n^2}-1}{q^n-1}$, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^n} = \frac{1}{a_1^n} \left[1 + \frac{1}{q^n} + \dots + \frac{1}{q^{n(n-1)}} \right] = \frac{1}{a_1^n} \frac{q^{n^2}-1}{(q^n-1)q^{n(n-1)}}$, $a_1^2 \cdot a_2^2 \dots a_n^2 = a_1^{2n} q^{2+4+\dots+2n-2} = a_1^{2n} q^{n(n-1)}$.

1 499. Avem $\frac{a}{a+1} (1 + a + \dots + a^{n-1}) = \frac{a(a^n-1)}{a^2-1}$.

1 500. Avem $a = \alpha m^{p-1}$, $b = \alpha m^{q-1}$, $c = \alpha m^{r-1}$.

1 501. 1° Crescătoare dacă $q = 2\cos x > 1$ adică $0 < x < \frac{\pi}{3}$; descrescătoare dacă $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$, dacă $x = \frac{\pi}{3}$ atunci $q = 1$. $2^\circ \sin x/(1 - 2\cos x) = 2\sqrt{2}, \sin x + 4\sqrt{2}\cos x = 2\sqrt{2}, x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x = 2k\pi - 2\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{3}$.

1 502. Fie $b = aq, c = aq^2, d = aq^3$. Avem $a^2 + d^2 - (b^2 + c^2) = a^2[1 + q^6 - (q^2 + q^4)] = a^2(1 + q^2)(1 - q^2)^2 > 0$. **1 503.** Trebuie ca $2\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + r) + \operatorname{tg}(\alpha - r), \operatorname{tg}^2 r(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0$. Totodată $\cos^2 \alpha = \cos(\alpha + r)\cos(\alpha - r)$ (v. ex. 1491). **1 505.** $x = 1$. **1 507.** $\frac{\sqrt{a} + a}{a}$.

1 508. $S = 1 + \frac{(n-1)\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}$. **1 509.** 1° Rația $q = \frac{b}{a}, S = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \cdot \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(b-a)a^p}$. $2^\circ n$.

1 510. Descompunem expresia dată în două sume:

$S_1 = \frac{a}{b} \sum_{i=0}^n \frac{1}{q^i}$ și $S_2 = \frac{r}{b} \sum_{i=1}^n \frac{i}{q^i}$. Avem $S_1 = \frac{a}{b} \frac{1 - q^{n+1}}{q^n(1 - q)}$. Pentru calculul lui S_2 putem scrie

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{q^i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{q^i} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{q^i} + \sum_{i=3}^n \frac{1}{q^i} + \dots + \frac{1}{q^n} = \frac{1}{q-1} \left[\left(1 - \frac{1}{q^n}\right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q^n}\right) + \dots + \left(\frac{1}{q^{n-1}} - \frac{1}{q^n}\right) \right] = \frac{1}{(q-1)^2} \left[q - \frac{1}{q^{n-1}} \right] - \frac{n}{(q-1)q^n}.$$

1 511. 1° Termenii sînt în progresie geometrică cu rația $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$; rezultă $\frac{1 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^{n+1}}{(a-b)^n(1 - \sqrt{a} + \sqrt{b})}$; 2° Termenii sînt în progresie geometrică cu rația $\frac{1}{1-a}$; rezultă $\frac{(1+a)^n[1 - (1-a)^{n+1}]}{a}$. **1 512.** $1 + r + r^2 + \dots + br(1 + r + r^2 + \dots) + b^2r^2(1 + r + r^2 + \dots) = \frac{1}{(1-r)(1-br)}$. **1 513.** Suma se poate scrie $s = 1 + \sin^2 a + \sin^4 a + \dots + \sin^{2n} a + \dots + 1 + \cos^2 a + \cos^4 a + \dots + \cos^{2n} a + \dots$. Dacă $a \neq k\pi$ și $a \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), avem de însumat două progresii geometrice infinite descrescătoare, $s = \frac{1}{1 - \sin^2 a} + \frac{1}{1 - \cos^2 a} = \frac{4}{\sin^2 2a}$. Dacă $a = k\pi$, prima sumă este 1, a doua infinită;

dacă $a = \frac{k\pi}{2}$, prima sumă este infinită, a doua zero. **1 514.** $x = \frac{3}{2} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100\,000} + \dots = \frac{3}{2} + \frac{23}{1\,000} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \dots \right) = \frac{754}{495}$.

1 515. Fie a primul termen și q rația. Avem $a : (1 - q) = 16$, $aq - aq^2 = 2$, $q = 1/2$, $a = 8$; $\div: 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$ **1 516.** Avem $s = \frac{1}{1 - q}$, $S = \frac{1}{1 - q}$, $E = \frac{1}{1 - qQ}$; deducem $q = 1 - \frac{1}{s}$, $Q = 1 - \frac{1}{S}$, deci $E = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{s}\right) \left(1 - \frac{1}{S}\right)} = \frac{sS}{s + S - 1}$.

Generalizare. Fie $s_1 = 1 + q_1 + q_1^2 + \dots$, $s_2 = 1 + q_2 + q_2^2 + \dots$, ..., $s_h = 1 + q_h + q_h^2 + \dots$ unde $q_1, q_2, \dots, q_h = 1$. Avem $E_h = 1 + q_1 q_2 \dots q_h + q_1^2 q_2^2 \dots q_h^2 + \dots = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{s_1}\right) \left(1 - \frac{1}{s_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{s_h}\right)}$.

1 517. Folosind formula $s = \frac{a_1}{1 - q}$, $q < 1$, avem $s_1 = \frac{\sin a}{1 - \sin a}$, $a \neq (2n + 1) \frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Cu acestea, presupunînd $|s_1| < 1$, găsim $s_2 = \frac{\sin a}{1 - 2 \sin a}$ și din aproape în aproape, presupunînd că avem $s_n = \frac{\sin a}{1 - n \sin a}$, găsim că $s_{n+1} = \frac{\sin a}{1 - (n + 1) \sin a}$, deci legea de formare este generală, cu condiția ca suma anterioară să fie subunitară. Se vede că pentru $s_{n-1} > 1$, termenii lui s_n cresc peste orice limită. Pentru ca s_p să fie finit, trebuie ca $|s_{p-1}| = \left| \frac{\sin a}{1 - (p - 1) \sin a} \right| < 1$ din care dacă $\sin a > 0$, deducem $\sin a < \frac{1}{p}$ și dacă $\sin a < 0$, atunci $\sin a < \frac{1}{p - 2}$ lucrul ce se verifică deoarece $p - 1 > 1$; $\sin a = \frac{1}{p}$, $s_{p-1} = p \sin a = 1$ și s_p este infinită. Pentru ca sumele $s_1, s_2, \dots, s_p$ să fie toate finite trebuie ca $-1 < \sin a < \frac{1}{p}$.

CALCUL LOGARITMIC, ECUAȚII ȘI SISTEME EXPONENȚIALE ȘI LOGARITMICE

1 518. $x = \sqrt[3]{5} = 1,709961$. **1 519.** $x^x = a, x = \sqrt[a]{a}$.

1 520. $x = a$. **1 521.** 1° Punem $\log_b a = x; b^x = a$; logaritmăm în baza $a, x \log_a b = \log_a a$ deci $\log_b a \log_a b = \log_a a = 1$. 2° Punem $\log_b a = x, \log_c a = y$, din care $b^x = a, c^y = a, b^x = c^y$; acum se iau logaritmi în baza $c, x \log_c b = y; \log_b a \log_c b = \log_c a$. **1 522.** $E = a^p m^m n^n$. **1 523.** Din $2 \log y = \log x + \log z$ rezultă $y^2 = xz$. **1 524.** Se aplică logaritmi ambelor părți. **1 525 — 26.** Notăm cu x_1, x_2, x_3, x_4 respectiv cei patru factori; avem $5 = 12^{x_1}, 7 = 11^{x_2}, 5 = 11^{x_3}, 7 = 12^{x_4}$ și aplicăm logaritmi într-o bază oarecare $x_1 = \frac{\log 5}{\log 12}, x_2 = \frac{\log 7}{\log 11}, x_3 = \frac{\log 5}{\log 11}, x_4 = \frac{\log 7}{\log 12}; x_1 x_2 = x_3 x_4$. **1 527.** Ținând seamă de ex. 1521 avem $\frac{1}{\log_a n} = \log_n a, \frac{1}{\log_b n} = \log_n b, \frac{1}{\log_c n} \log_n c$ deci egalitatea dată se poate scrie: $2 \log_n b = \log_n a + \log_n c; b^2 = ac$. Reciproca este adevărată. **1 528.** $n \cdot 0,01 = \log_x 1,01^n, x = 1,01^{100}$.

1 529. $\log \alpha + \log \beta + \dots = \log \alpha \beta \dots; s = \log(a+1)(b+1)$. **1 530.** $T = 2,34866$. **1 531.** $x = 0,4^{0,1}, \log x = 0,1 \cdot \log 0,4 = 0,1 \cdot \bar{1} = \bar{1},9; x = 0,794 [3]$. **1532.** $x = 1,35534$. **1 533.** $x = 5,133 [4]$. **1 534.** $x = 152,421$. **1 535.** $x = 0,63959$. **1 536.** $0,70122$. **1 537.** $x = 0,19474$. **1 538.** $0,76584$. **1 539.** $1,11136$. **1 540.** $x = 0,50301$. **1 541.** $x = 1,55968$. **1 542.** $2,303$. **1 543.** $x = -0,001069$. **1 544.** $E = -5,94685$. **1 545.** $x = -3 \frac{43}{65}$. **1 546.** $x = 3$. **1 547.** $x = \pm 2$. **1 548.** $x = -\frac{4}{3}$. **1 549.** $x = -1$. **1 550.** $x = 2$. **1 551.** $x = \pm 3$. **1 552.** $x = 6$. **1 553.** $x_1 = -1, x_2 = 7$. **1 554.** $x = 9$. **1 555.** $x^3 = 8, x = 2$. **1 556.** $x_1 = -1, x_2 = 2$. **1 557.** $x_1 = -1, x_2 = 1$. **1 558.** $x_1 = 1, x_2 = 2$. **1 559.** $x = 6$. **1 560.** $x_1 = -1,$

$$x_2 = \frac{1}{2}. \quad \mathbf{1\ 561.} \quad x = 10. \quad \mathbf{1\ 562.} \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 2. \quad \mathbf{1\ 563.} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4,$$

$$x_3 = 0. \quad \mathbf{1\ 564.} \quad \sqrt[a]{a^b} = a^{\frac{b}{a}}, \quad x = 2. \quad \mathbf{1\ 565.} \quad x_1 = -\frac{4}{3}, \quad x_2 = 2. \quad \mathbf{1\ 566.} \quad x = 4.$$

$$\mathbf{1\ 567.} \quad \text{Se ridică la pătrat, } x = 6. \quad \mathbf{1\ 568.} \quad x = 8. \quad \mathbf{1\ 569.} \quad x = 5. \quad \mathbf{1570.} \quad x = 4.$$

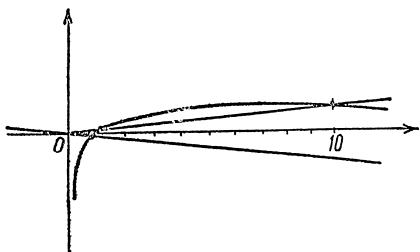


Fig. 26

$$\mathbf{1\ 571.} \quad x = 16. \quad \mathbf{1\ 572.} \quad x = 6. \quad \mathbf{1\ 573.} \quad x = 1.$$

$$\mathbf{1\ 574.} \quad x = \log 2. \quad \mathbf{1\ 575.} \quad x = -\infty.$$

$$\mathbf{1\ 576.} \quad t = 2,1337. \quad \mathbf{1\ 577.} \quad u = 0,64817.$$

$$\mathbf{1\ 578.} \quad (x+1) \log x = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

$$\mathbf{1\ 579.} \quad \text{Dacă } x > 0, \text{ atunci } x = \log x. \text{ Dacă } x < 0, \text{ punem } x = -|x|.$$

$$\text{Tăind curbă } y = \log x \text{ cu dreptele}$$

$$y = \frac{1}{10}x \text{ (fig. 26) și } y = -\frac{1}{10}x$$

$$\text{se obțin trei rădăcini } x_1 = 10, \quad x_2 = 1,373 \text{ și } x_3 = -0,827. \quad \mathbf{1\ 580.} \quad 1^\circ \text{ Ecuația}$$

$$\text{este } 5 = 7^x, \log_{10} 5 = x \log_{10} 7, \quad x = 0,82708. \quad 2^\circ a^{\log a^N} = N; \quad 40. \quad 3^\circ 7^{\log_{40} 5^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot 7^{\log_{40} 5} = \frac{1}{7} \cdot 49^{\frac{1}{2} \log_{40} 5} = \frac{1}{7} \cdot 49^{\log_{40} \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{7}. \quad 4^\circ \text{ v. ex. } \mathbf{1\ 521} \text{ (punctul } 2^\circ);$$

$$\log_{25} 16 = \frac{\log_5 16}{\log_5 25} = \frac{1}{2} \log_5 16 \text{ și } 125 = 5^3; \quad 64. \quad \mathbf{1\ 581.} \quad \text{Logaritmăm, } 2^x \log 3 =$$

$$= 3^x \log 2, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{\log 2}{\log 3}, \quad x = \frac{\log \log 2 - \log \log 3}{\log 2 - \log 3} = 1,13589. \quad \mathbf{1\ 582.} \quad x =$$

$$= 2. \quad \mathbf{1\ 583.} \quad x = (\log c) : (m \log a + n \log b). \quad \mathbf{1\ 584.} \quad x = 8. \quad \mathbf{1\ 585.} \quad \sqrt[b]{\frac{b^a}{a^b}}.$$

$$\mathbf{1\ 586.} \quad \text{Rezolvăm în } x \text{ ecuația } x^2 \log b - x \log ab + \log a = 0. \quad \mathbf{1\ 587.} \quad (49 \log 5 -$$

$$- 25 \log 7) \quad x = 35 \quad (\log 7 - \log 5), \quad x = 0,38977. \quad \mathbf{1\ 588.} \quad 0,5^{x-1} (1 + 0,5) =$$

$$= 2,4^{2x-1} (1 + 2,4) \cdot \left(\frac{0,5}{2,4^2}\right)^x = \frac{17}{36}, \text{ apoi } x = (\log 17 - \log 36) : (\log 0,5 -$$

$$- 2 \log 2,4) = (1,67415) : (2,93855) = 0,32585 : 1,06145 = 0,30698. \quad \mathbf{1\ 589.} \quad 15 =$$

$$= 3 \cdot 5, \quad 3^{x-3} = 5^{x-3}, \quad x = 3. \quad \mathbf{1\ 590.} \quad 3^x = y; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = (\log 2) : (\log 3), \text{ inacceptabile.}$$

$$\mathbf{1\ 591.} \quad 4^x = y, \quad x = \frac{7}{2}. \quad \mathbf{1\ 592.} \quad x^x = y; \quad x^x = 4, \quad x^x = -1; \quad x_1 = 2, \quad x_2 =$$

$$= -1. \quad \mathbf{1\ 593.} \quad 4^2 = 2^4, \quad 64 = 2^6, \quad x = 35. \quad \mathbf{1\ 594.} \quad 0,25 = 2^{-2}x = 7. \quad \mathbf{1\ 595.} \quad \sqrt[2x]{10} =$$

$$y, \quad x = \frac{1}{2}. \quad \mathbf{1\ 596.} \quad \text{Împărțim cu } b^{2x}, \quad (a:b)^x = t; \quad t^2 - 2t - 1 = 0, \quad x =$$

$$= [\log (1 + \sqrt{2})] : \log \frac{a}{b}.$$

$$\mathbf{1\ 597.} \quad 2^x(3 - 2^3) = 3^{x-2}(1 - 2 \cdot 3^2); \quad x = \frac{\log 45 - \log 17}{\log 3 - \log 2}. \quad \mathbf{1\ 598.} \quad 6^x(1 + 6) =$$

$$= 2^x(1 + 2 + 2^2); \quad x = 0. \quad \mathbf{1\ 599.} \quad 729 = 3^6; \quad x^4 - x^2 - 6 = 0, \quad x = \pm \sqrt{3},$$

$x = \pm i\sqrt{2}$. **1 600.** $2^{2x-1}(1+2) = 3^{x-\frac{1}{2}} \cdot (1+3)$, $2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}}$; $x = \frac{3}{2}$, **1 601.**

Se împarte cu 9^x și $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$; $y^2 + y - 1 = 0$; $x = [\log 2 - \log(-1 + \sqrt{5})]$:

$(\log 3 - \log 2) = 1,486865$; $\sqrt{5} = 2,236068$. **1 602.** $x = [\log(a-b)] : \log(a+b)$, $a > b$, $b > 0$. **1 603.** $2(x+1)(2x+1)^x - (2x+1)^{x+1} = (x-1)^x$,

$(2x+1)^x = (x-1)^x$; $x \neq 1$, $\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x = 1$, $x_1 = 0$, $(2x+1) : (x-1) =$

$= 1$, $x_2 = -2$. **1 604.** $x = y^8$, $(y^{63} - 1)(y^{65} - 1) = 0$; de aici $y^{63} - 1 =$
 $= 0$, $y^{65} - 1 = 0$, $y = \sqrt[63]{1} = \cos \frac{2k\pi}{63} + i \sin \frac{2k\pi}{63}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 62$;

$y = \sqrt[65]{1} = \cos \frac{2k\pi}{65} + i \sin \frac{2k\pi}{65}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 64$; $x = y^8$. **1 605.** Se

deduce $\sin x + \sin 2x = \frac{5}{a} \sin 3x \therefore \sin x(2 \cos x + 1)[a - 5(2 \cos x - 1)] = 0$

$x_1 = k\pi$, $x_2 = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ $k = 0, 1, 2, \dots$, $\cos x = \frac{1}{10}(a+5)$; aici soluții

acceptabile dacă $-15 \leq a \leq 5$. **1 606.** $3^{\cos x - \frac{1}{2}}(1+3+3^3) = 31$, $\cos x =$

$= \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$ **1 607.** $2^{\lg x - \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$; $\lg x = 1$, $x =$

$= \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$ **1 608.** Scriem $2^3 \cdot 2^4 (\cos^2 x - 1) + 5 \cdot 2^{2\sin^2 x} -$

$- 5 \cdot 2^{\cos 2x} - 2^4 \sin^2 x = 2$ sau $2 \cdot 2^{2 \cos 2x} + 10 \cdot 2^{-\cos 2x} - 5 \cdot 2^{\cos 2x} - 4 \cdot 2^{-2 \cos 2x} =$

$= 2, 2 \cos 2x = y$, $2y^4 - 5y^3 - 2y^2 + 10y - 4 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $y_{3,4} =$

$= \pm \sqrt{2}$, dar din substituție rezultă că trebuie ca $\frac{1}{2} \leq y \leq 2$; $1^\circ y = 2$ dă

$x = k\pi$, $2^\circ y = \frac{1}{2}$, $3^\circ x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$; $y = \sqrt{2}$, $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $k = 0, 1,$

$2, \dots$; valoarea $y = -\sqrt{2}$ nu este acceptabilă.

1 609. Cum $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^x = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{-x}$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. **1 610.** Scriem
 $\log_2[2 + \log_3(3+x)] = \log_2 4$; $\log_3(3+x) = -1 = \log_3 3^{-1}$; $x = -\frac{8}{3}$,

1 611. $x = 2$. **1 612.** $1 = \log_2 2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. **1 613.** $x = \frac{1}{9}$. **1 614.**

$x = \frac{3}{2}$, iar $x = \frac{3}{5}$ nu convine, căci $x - 1 < 0$. **1 615.** $x = 8$. **1 616.**

$\log(7 - x^3) = 3 \log(3 - x)$, $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$. **1 617.5. 1 618.** $\log 2x \log 5x =$

$= \log 3x \log 4x$; $\log 2x = \log 2 + \log x$ etc. $x = (\log 3 \log 4 - \log 2 \log 5) :$

$(\log 5 - \log 3 - \log 2) = -\frac{7685}{7918}$, $x = 0,1070$. **1 619.** $(x-1)^3(x+27)^3 = 8^7 = (27)^3$; $x_1 = 5$, $x_2 = -31$ (nu convine). **1 620.** $x_1 = \frac{1}{3}(5 + 2\sqrt{19})$. Valoarea $x_2 = \frac{1}{3}(5 - 2\sqrt{19})$ nu convine, căci $3x-4 < 0$. **1 621.** Logaritmăm, $(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$; $\log x = -1$, $\log x = 2$; $x_1 = 0,1$, $x_2 = 100$. **1 622.** $\log \sqrt{x^2-9} = \log 3$; $x = 3\sqrt{2}$, valoarea $x = -3\sqrt{2}$ nu convine. **1 623.** $3,11261 = \log 1296$, $x = 8$, celelalte valori nu convin. **1 624.** $x = 9$. **1 625.** Găsim $x = -1$ și $x = 1$ dar nu le acceptăm ca rădăcini căci ele fac cei doi membri infiniți. **1 626.** $x = 3$. **1 627.** Ridicăm la pătrat și logaritmăm, $\frac{1}{2}(\log 2x)^2 = 2$, $\log 2x = \pm 2$; $x_1 = 50$, $x_2 = \frac{1}{200}$. **1 628.** $x = 10^6$. **1 629.** $\log_x 10 = \frac{1}{\log x}$, $\log_{10x} 10 = \frac{1}{1 + \log x}$, $\log_{100x} 10 = \frac{1}{2 + \log x}$; $3 \log^2 x + 5 \log x + 1 = 0$, $x_1 = 0,58558$, $x_2 = 0,03679$. **1 630.** $x^2 - x + 1 - m = 0$; pentru $m < \frac{3}{4}$ răd. imaginare; $\frac{3}{4} < m < 1$ răd. pozitive; $m > 1$ răd. de semn contrar; $m = \frac{3}{4}$, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$; $m = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Trebuie ca $\frac{x^2+1}{x} > 0$, $\frac{m+x}{mx} > 0$, $10m > 0$ și atunci convin $m > \frac{3}{4}$ și $x > 0$. **1 631.** $x = 3$. **1 632.** $\left(\frac{1}{2} \log_x 5\right)^2 - \frac{3}{2} \log_x 5 + \frac{5}{4} = 0$, $(\log_x 5)^2 - 6 \log_x 5 + 5 = 0$, $\log_x 5 = 3 \pm 2$; $x_1 = 5$, $x_2 = \sqrt[5]{5}$. **1 633.** $\log_x \sqrt{3x} \cdot \log_3^2 x = 1$; $\frac{1}{2}(\log_x 3 + \log_x x) \log_3^2 x = 1$, $\log_x 3 \log_3 x \cdot \log_3 x + \log_3^2 x = 2$; după ex. 1 452 rămîne $\log_3^2 x + \log_3 x - 2 = 0 \therefore \log_3 x = -2$ și $\log_3 x = 1$, dar din enunț $\log_3 x < 0$ membrul doi fiind negativ rămîne $\log_3 x = -2$ adică $x = \frac{1}{9}$. **1 634.** $x_1 = 10$, $x_2 = 10^4$. **1 635.** $x = \frac{1}{5}$, (v. ex. 1 521). **1 636.** (v. ex. 1 521, 1°), avem $\log_2 x \log_2 2x = \log_2 4x$; $\log_2 x (\log_2 2 + \log_2 x) = 2 \log_2 2 + \log_2 x$; $\log_2^2 x = 2$; $x_1 = 2^{\sqrt{2}}$, $x_2 = 2^{-\sqrt{2}}$. **1 637.** $a > 0$, $a \neq 1$ (v. ex. 1 521, 1°), avem $\frac{10}{\log_x(ax)} + \frac{21}{\log_x(a^2x)} = \frac{6}{\log_x\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}$, $\frac{10}{1 + \log_x a} + \frac{21}{1 + 2 \log_x a} = \frac{6}{1 - \frac{1}{2} \log_x a}$, $\log_x a = y$; $x_1 = 1$, $x_2 = a$, $x_3 = a^{-\frac{13}{10}}$. **1 638.** $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log \frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \sqrt[5]{2(x-1)}$; logaritmăm etc.

$x = 3$. **1 639.** $2 \log_2 |x + 1| + \log_2 |x + 1| = 6$; $\log_2 |x + 1| = 2$, $|x + 1| = 4$; $x_1 = 3$, $x_2 = -5$. **1 640.** $x^{\log \sqrt{x}^{(x-2)}} = x^{\log_x (x-2)^2} = 9$, $(x - 2)^2 = 9$; cum $x > 0$, $x - 2 = 3$, $x = 5$. **1 641.** $x = \sqrt[3]{26}$. **1 642.** Se aplică logaritmi în baza 10 și v. ex. 1 521; 2° rămîne $\log_a (x^2 - 3x + 5) = \log_a 10 \cdot \frac{\log_a 3}{\log_a 10}$, găsim $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **1 643.** Logaritmăm în baza 10; $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{10}$. **1 644.** $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. **1 645.** $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. **1 646.** $x = 1 - a^2$. **1 647.** Logaritmăm în baza a ; $x_1 = 1$, $x_2 = a$. **1 648.** Logaritmăm în baza x , apoi v. ex. 1 521, 2° , $\log_{a^2} 4 = \frac{\log_x 4}{\log_x a^2}$ etc. $x = 2$. **1 649.** v. ex. 1 521, 2° , $\log_7 x = (\log_5 x) : (\log_5 7)$; $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{1}{25}$. **1 650.** Ecuația se poate scrie $\frac{x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2-2}+1-\sqrt{2}\sqrt{x^2-2}} = \sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{x^2-2}+1-\sqrt{2}\sqrt{x^2-2}}$; $x = \sqrt{x^2-1} = \sqrt{2}\sqrt{(2\sqrt{x^2-2}+1)^2-2\sqrt{x^2-2}}$. Raționalizînd, $(x^2 - 2)(x^2 - 7) = 4\sqrt{x^2-2}$, $(x^2-2)[(x^2-2)(x^2-7)-16] = 0$, se deduce $x^2 = 2$, $x^2 = 3$, $x^4 - 13x^2 + 38 = 0$ etc. **1 651.** Ecuația se poate scrie $(x-1)(x-27) = 3^{2x-1}(x-25)^2$, prin urmare $(x-1)(x-27) > 0$, $x > 25$, condiția este $x > 27$. **1 652.** Se deduce ecuația $x^2 + (2m-a)x + m^2 = 0$. Ca rădăcinile să fie reale și pozitive, trebuie ca $(2m-a)^2 - 4m^2 > 0$ și $2m-a > 0$. Din prima $m < \frac{a}{4}$, din a doua $m < \frac{a}{2}$ deci trebuie ca $m < \frac{a}{4}$. Mai trebuie ca $m+x > 0$, adică $m > -x$. Cînd $m > 0$, ambele rădăcini convin, iar cînd $m < 0$, numai cea mai mare. **1 653.** $2^x = u$, $3^y = v$, $u + v = 3$, $u^2 + v^2 = 5$; $2^x = 1$, $3^y = 2$; $x = 0$, $y = (\log 2) : \log 3$ sau $2^x = 2$, $3^y = 1$, $x = 1$, $y = 0$. **1 654.** $x = 2$, $y = 3$; $x = 3$, $y = 2$. **1 655.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 6$, $5x - 4y = -3$; $x = 9$, $y = 12$. **1 656.** $x = 1$, $y = 2$. **1 657.** $5^x \cdot 7^{3-x} = 5^2 \cdot 7$; $5^{x-2} = 7^{x-2}$; $x = 2$, $y = 1$. **1 658.** $(2 \cdot 3)^{x+y} = 12 \cdot 18 = 6^3$, $x + y - 3 = 0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, $x - y - 1 = 0$; $x = 2$, $y = 1$. **1 659.** $x = 4$, $y = 10$; $x = -3$, $y = 9$; $x = 5$; $y = 1$; $x = 7$, $y = -1$. **1 660.** $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{5}$. **1 661.** $2^{x+y} = u$, $2^{x-y} = v$; $x = 4$, $y = 2$. **1 662.** $\sqrt[p]{a^n} = a^{\frac{n}{p}}$; $x = 18$, $y = 12$. **1 663.** $x = 9$, $y = 7$. **1 664.** $x = \frac{1}{6}$, $y = 1$. **1 665.** $x = 6$, $y = 10$. **1 666.** $x = \left(\log \frac{b^n}{m}\right) : \log \frac{b}{a}$, $y = \left(\log \frac{m}{a^n}\right) : \log \frac{b}{a}$. **1 667.**

Înlocuind y cu ax , se deduce $ax = x^a$, de aici $(a - 1) \log_a x = \log_a a$. Dacă $a = 1$, sistemul este nedeterminat, $y = x$, oricare ar fi x . Când $a \neq 1$, atunci $x = \alpha^{\frac{\log_a a}{a-1}}$, $y = a\alpha^{\frac{\log_a a}{a-1}}$. **1 668.** Logaritmăm cele două ecuații și înmulțim membru cu membru, cum $xy > 0$, deducem $\log x = \frac{\log b}{\log a} \log y$,

$$x = y^{\frac{\log b}{\log a}} \text{ dar } \frac{x}{y} = \frac{\log b}{\log a}, \frac{\log b}{\log a} = y^{\frac{\log b}{\log a} - 1}. \text{ Rădăcinile sînt } x = \left(\frac{\log b}{\log a} \right)^{\frac{\log b}{\log b - \log a}},$$

$$= \left(\frac{\log b}{\log a} \right)^{\frac{\log a}{\log b - \log a}}. \text{ 1 669. } x = 1, y = 1; x = 16, y = 4. \text{ 1 670. } x_1 =$$

$$= y_1 = 1. \text{ Dacă } p \neq q, \text{ scriem sistemul } x = y^{\frac{x}{y}}, x = y^{\frac{q}{p}} \text{ de aici } x = \frac{q}{p} y$$

$$\therefore x_2 = \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{q}{p-q}}, y_2 = \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{q}{p-q}}. \text{ 1671. } \text{Aplicăm logaritmi primelor ecuații și}$$

$$\text{împărțim cu } \log a \log b \log c, \text{ deducem } \frac{x}{\log b \log c} = \frac{y}{\log c \log a} = \frac{z}{\log a \log b} = (k).$$

Scoatem pe x, y, z și înlocuim în ultima ecuație, $k = d : \sqrt[3]{\Sigma \log^2 a \log^2 b}$ etc.

$$\text{Generalizarea este evidentă. 1 672 — 73. } x = \left(\frac{\log b}{\log a} \right)^{\frac{b}{2(b-a)}}, y =$$

$$= \left(\frac{\log b}{\log a} \right)^{\frac{a}{2(b-a)}}. \text{ 1 674. } x = 1, y = 1; x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}. \text{ 1 675. } x = y^{\frac{12}{x+y}};$$

$$x_1 = 1, y_1 = 1; x_2 = 4, y_2 = 2; x_3 = 1, y_3 = -1; x_4 = 9, y_4 = -3.$$

$$\text{1 676. Se notează } \left(\frac{3}{2} \right)^{x-y} = u, \text{ atunci } \left(\frac{2}{3} \right)^{x-y} = \frac{1}{u}; u_1 = -\frac{9}{4}, u_2 = -\frac{9}{4};$$

$$x_1 = 12, y_1 = 10; x_2 = -10, y_2 = -12. \text{ 1 677. } x_1 = y_1 = 1; x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, y_2 = \sqrt[3]{9}; x_3 = -1, y_3 = 1. \text{ 1 678. } x = y = 2, z = 1.$$

$$\text{1 679. Ecuația a doua se poate scrie } (y^2 - 1)^{2x-2} = \frac{(y-1)^{2x}(y+1)^{2x}}{(y-1)^2(y+1)^2} = \frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2} \therefore \frac{(y-1)^{2x}[(y+1)^{2x} - (y-1)^2]}{(y-1)^2(y+1)^2} = 0. \text{ Dacă } 2x > 2, \text{ rezultă că}$$

$$(y-1)^{2x} = 0, y_1 = 1, x_1 = \log_2 100 = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 2} > 1 \text{ (v. ex. 1 524, 2°).}$$

$$\text{Ecuația } (y+1)^{2x} - (y-1)^2 = 0, \text{ dacă } y-1 = \pm (y+1)^x; x_2 = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 102}, y_2 = 101. \text{ 1 680. } x_1 = 1, y_1 = 3; x_2 = \frac{1}{4}, y_2 = \frac{3}{8}. \text{ 1 681.}$$

$$x = 20, y = 5. \text{ 1 682. } x_1 = 10, y_1 = 1; x_2 = 1, y_2 = \sqrt[3]{100}. \text{ 1 683. } 0,25 = \frac{1}{4}; x = 10, y = 5. \text{ 1 684. Soluția 1. Se scoate din ecuația a doua,}$$

$x^{3-\log a} = 100$ și acum logaritmăm, $(\log x)^2 - 3 \log x + 2 = 0$; $x_1 = 10$, $y_1 = 100$; $x_2 = 100$, $y_2 = 10$. **Soluția a 2-a.** Se logaritmează ecuațiile, apoi $\log x = u$, $\log y = v$ etc. **1 685.** Logaritmăm sistemul și obținem un sistem în $\log x$ și $\log y$. Găsim $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$. **1 686.** $x_1 = 10$, $y_1 = \sqrt[4]{10}$; $x_2 = \sqrt[4]{10}$, $y_2 = 10$; (ex. 1 521, 2°). **1 687.** Prima ecuație $\log x^2 y^5 = \log \frac{x^6}{y^{15}}$ cu $x, y > 0$ rezultă $x = y^5$, valoare care se înlocuiește în ecuația a doua; găsim $x = 10^5$, $y = 10$. **1 688.** Logaritmăm ecuația a doua, avem $y \log_{10} x = -2$; eliminând $\log_{10} x$, găsim $y^2 - y - 2 = 0$. $x_1 = \frac{1}{10}$, $y_1 = 2$; $x_2 = 100$, $y_2 = -1$. **1 689.** Atașăm $\log_y x \log_x y = 1$ (ex. 1 521, 2°). Găsim $\log_y x$ și $\log_x y$; $x_1 = 8$, $y_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{4}$, $y_2 = 64$. **1 690.** **Soluția 1.** Logaritmăm prima ecuație $\log_2 \cdot \log x + \log 3 \cdot \log y = \frac{1}{2} \log 54$ și rezolvăm sistemul în $\log x$ și $\log y$. **Soluția a 2-a.** Substituim $\log y = 2 - \log x$, avem $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. $x = 10$, $y = 10 \sqrt[3]{10}$. **1 691.** $\log \frac{1}{y} = -\log x$; prima ecuație (ex. 1 521, 2° cu $c = 10$), se poate scrie $[\log (y - x)] : \log 0,5 = [\log y] : [\log 2] - 2$, de aici $\log (y - x) = \log \frac{4}{y}$. $y^2 - xy = 4$; $x_1 = 3$, $y_1 = 4$; $x_2 = -\frac{7}{\sqrt{2}}$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **1 692.** Se logaritmează prima ecuație și se rezolvă în $\log x$ și $\log y$, cum avem a^2 , rădăcinile sînt $x_1 = \frac{1}{|a|}$, $y_1 = |a|^3$; $x_2 = |a|^3$, $y_2 = \frac{1}{|a|}$. **1 693.** $\log_y a = \frac{\log_x a}{\log_x y}$ (ex. 1 425, 2°) și $x^a = 4y^b$ ecuație pe care o logaritmăm, $q = \log_x 4 + \log_x y$. $x = 2^{\frac{1}{q}}$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$. **1 694.** $x = c^{\frac{b^2}{a(b-a)}}$, $y = c^{\frac{b}{b-a}}$. **1 695.** $x_1 = 1$, $y_1 = 64$; $x_2 = \frac{16}{9}$, $y_2 = 36$. **1 696.** Ecuațiile se pot scrie $\frac{1}{2} (n \log x + m \log y) = mn + 1$, $(\log x)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 (\log y)^2$. Dacă $mn + 1 \neq 0$ rezultă $x = a^{m+\frac{1}{n}}$, $y = a^{m+\frac{1}{m}}$ unde a este baza sistemului de logaritmi. **1 697.** $x_1 = y_2 = a^{\sqrt{\log A}}$, $x_2 = y_1 = a^{\sqrt{\log B}}$ în care $A = a^{m \frac{p+q}{p-q}}$ și $B = a^{n \frac{p-q}{p+q}}$. Este necesar ca $p > q$, $A > 1$ și $B < 1$. **1 698.** $x = 7$, $y = 5$.

PROBLEME APLICATIVE

1 699. Fie x numărul pieselor din prima zi. Ecuația este $x + \left(x + \frac{x}{3}\right) + \left(x + \frac{x}{3} + 10\right) = 87$; $x = 21$. **1 700.** Fie x spațiul parcurs în prima oră. În ora a doua merge $\frac{3x}{4}$, iar în ultimele două ore viteza este $\frac{2}{3} \cdot \frac{3x}{4} = \frac{x}{2}$. $x + \frac{3x}{4} + x = 220$; $x = 80$ km; 60 km și 80 km. **1 701.** Fie x distanța în km dintre A și B . Viteza trenului care merge mai repede este $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x + 15\right) = \frac{1}{4}(x + 30)$ iar a celuilalt $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - 15\right) = \frac{x - 30}{4}$. Avem $\frac{14}{5} \cdot \frac{x + 30}{8} + \frac{14}{5} \cdot \frac{x - 30}{4} = x$, $x = 240$ km; viteza primului tren 60 km/oră, al doilea 45 km/oră. **1 702.** Fie x numărul de sărituri ale ogarului; 50 sărituri ale vulpii fac $\frac{100}{3}$ sărituri de ogar; în timp ce ogarul face x sărituri, vulpea face $\frac{4x}{3}$ sărituri egale cu $\frac{8x}{9}$ sărituri de ogar; $x = \frac{100}{3} + \frac{8x}{9}$, $x = 300$. **1 703.** 1° , 2° . Fie x temperatura apei reci și y temperatura apei calde. Avem $3(39 - x) = 7(y - 39)$, $7(31 - x) = 3(y - 31)$; $x = 25^\circ$, $y = 45^\circ$. 3° 350 litri apă caldă și 350 litri apă rece. **1 704.** $x + y = 360$, $\left(x + \frac{10x}{100}\right) + \left(y + \frac{15y}{100}\right) = 404$; $x = 200$ tone, $y = 160$ tone. **1 705.** 12 ore și 30 ore. **1 706.** Ora 1 și $5 + \frac{5}{11}$ minute; ora 2 și $10 + \frac{10}{11}$ minute. **1 707.** $\frac{10,8}{x} + \frac{4,8}{y} = 10$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{1,44}$; $x = 1,8$ și $y = 1,2$. **1 708.** 120 ari; ora 6 dimineă. **1 709.** Fie x camere și y becuri. Avem $y = x + n$, $n(x - n) = y$, din care $x = \frac{n(n+1)}{n-1}$, $y = \frac{2n^2}{n-1}$. Cum x și y sînt întregi, rezultă $x = 6$,

$y = 8$ sau 9 . **1 710.** Fie x, y, z debitele robinetelor și V volumul bazi-
nului. Avem $a(x + y + z) = V$, $b(x + y + z) + c(x + y) = V$, $b(x + y +$
 $+ z) + d(x + y) + ex = V$. Deducem

$$t_1 = \frac{V'}{x} = \frac{ace}{(a-b)(c-d)}, \quad t_2 = \frac{V}{y} = \frac{ace}{(a-b)(e-c+d)},$$

$$t_3 = \frac{V}{z} = \frac{ac}{b-a+c}.$$

1 711. $3x + 0,5y + z = 20$, $x + y + z = 20$. Eliminăm z , $x = 2$, $y = 8$,
 $z = 10$; $x = 1$, $y = 4$, $z = 15$; $x = 3$, $y = 12$, $z = 5$; $z = 20$, $x = y = 0$;
 $x = 4$, $y = 16$, $z = 0$. **1 712.** $kx - 5 = nx + 2$, $k > 0$, $n > 0$; $x = \frac{7}{k-n}$

pentru $k > n$. Pentru $k \leq n$, problema nu admite soluție. **1 713.** Dacă
roata A se învîrte de x ori, roata B a făcut y rotații complete și primul dinte
apasă dintele k al roții B ; atunci (1) $ax = by + k$ pentru $x \geq 0$, $y \geq 0$.
Aplicație: Avem $14x - 37y = 3$ și rezolvată în numere întregi dă $x =$
 $= 24 + 37t$, $y = 9 + 14t$, $t \geq 0$, deci după 24 rotații roata A apasă
cu primul ei dinte prima oară al 18-lea dinte al roții, B ; acest lucru se
repetă apoi din 37 în 37 rotații ale roții A . Pentru $k = 5$, de exemplu, ecuația
(1) nu admite soluții în numere întregi, deci primul dinte al roții A nu va
apăsa niciodată al cincilea dinte al roții B . **1 714***. 1° Alegem două cercuri
de pe disc, primul avînd a găuri, al doilea b găuri, astfel că dacă M este c.m.
m.m.c. al lui a și b , numărul $40M$ să se dividă cu n . 2° Folosim cercul cu 20
găuri și cercul cu 14 găuri; ecuația este $32 = 7x + 10y$. **1 715.** Fie x distanța
 AB . Avem

$$\frac{\frac{2}{3}x}{v_1} + \frac{\frac{1}{3}x - d}{\frac{v_1}{2}} - \frac{x - d}{v_2} = \frac{x}{v_1} - \frac{x}{v_2} \quad x = \frac{3d(2v_2 - v_1)}{v_2}.$$

1 716. Avem $a_1 + m_1x = a_2 + m_2x$ sau (1) $x(m_1 - m_2) = a_2 - a_1$ cu
condițiile $0 \leq a_1 \leq v_1$, $0 \leq a_2 \leq v_2$ și (2) $0 \leq a_1 + m_1x \leq v_1$, $0 \leq a_2 + m_2x \leq$
 $\leq v_2$. Din (1), $x = \frac{a_2 - a_1}{m_1 - m_2}$, $m_1 \neq m_2$ și (2) îndeplinite, soluție unică.

Fără îndeplinirea condițiilor (2), volumele nu pot fi egale. Dacă $m_1 = m_2$,
 $a_1 \neq a_2$, ecuația nu are soluție; dacă $m_1 = m_2$, $a_1 = a_2$, în ambele vase sînt
cantități egale tot timpul observației. **1 717.** Turnînd x cm³, în primul vas
rămîn $(80 - x) \cdot 1$, $2 = 96 - 1,2x$ grame; în al doilea vom avea $100 \cdot 0,8 +$
 $+ 1,2x = 80 + 1,2x$ grame. Greutatea specifică din vasul al doilea este
 $\frac{80 + 1,2x}{100 + x}$ g/cm³. Turnăm înapoi $x \cdot \frac{80 + 1,2x}{100 + x}$ grame și ecuația va fi $96 - 1,2x +$

* Vezi Revista Matematică și Fizică nr. 9/950, pag. 13.

+ $x \cdot \frac{80 + 1,2x}{100 + x} = 80 + 1,2x - x \cdot \frac{80 + 1,2x}{100 + x}$. $x = 25 \text{ cm}^3$. **1 718.** Fie x, y, z cantitățile ce se iau respectiv din cele trei feluri de vin. Avem $ax + by + c(x + y) = nd$, $(a + c)x + (b + c)y = nd$ și $x + y = z$. Dacă $a < b$, trebuie ca $\frac{a+c}{2} < d < \frac{b+c}{2}$ ($x, y > 0$); dacă $a = b$ și $2d = a + c = b + c$, sistemul este nedeterminat; dacă $a = b$ și $2d \neq a + c$ (evident și $2d \neq b + c$), sistemul este imposibil. **1 719.** Fie x greutatea primului metal și y a celui de al doilea. Avem $x + y = a$, $\frac{x}{d_1} + \frac{y}{d_2} = \frac{a}{d}$, $a, d, d_1, d_2 > 0, x \geq 0, y \geq 0$; $x = \frac{ad_1(d_2 - d_1)}{d(d_2 - d_1)}$, $y = \frac{ad_2(d - d_1)}{d(d_2 - d_1)}$. 1° Dacă $d_1 \neq d_2$ și fie $0 < d_1 < d_2$, problema are soluție dacă $d_1 \leq d \leq d_2$. 2° Dacă $d_1 = d_2 \neq d$, ambele metale au aceeași greutate specifică și nu putem forma aliaj cu $d \neq d_1$. 3° Dacă $d_1 = d_2 = d$, $y = a - x$ (x arbitrar), o infinitate de soluții ($0 \leq x \leq a$). **1 720.** Fie x procentul căutat. Vom avea $A = \frac{ax}{100} \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n + \frac{bq}{100} m^3$ impurități în rezervor după terminarea experienței și $B = b + a \left(1 - \frac{x}{100}\right) + \frac{ax}{100} \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n m^3$ gaz și impurități care au trecut prin filtre. Trebuie ca $A \leq \frac{r}{100} B$ pentru $0 \leq p \leq 100, 0 \leq q \leq 100, 0 \leq r \leq 100, n$ număr natural, cu condiția

$0 \leq x \leq 100$. Obținem

$$x \leq \frac{r(a+b) - bq}{a \left[\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \left(1 - \frac{r}{100}\right) + \frac{r}{100} \right]} \text{ cu condiția } r \geq \frac{bq}{a+b}.$$

1 721. 10 zile; 50 ha și 75 ha. **1 722.** 24 m². **1 723.** 10 persoane. **1 724.** 2,5 t.

1 725. $\frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + abp}}{2a}$ tone. **1 726.** 30 km/oră, 18 km/oră; 120 km. **1 727.**

Fie $AB = x$, v_1 și v_2 vitezele curierilor. Avem $v_1 = \frac{x-k}{2a}$, $v_2 = \frac{x+k}{2b}$.

Ecuția problemei este $a(x+k)^2 = b(x-k)^2$, din care $x = \frac{k(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ ($a \neq b$).

Avem soluție pentru $k > 0$ și $b > a$ sau $k < 0$ și $a > b$. Pentru $k > 0$ însă $a > b$ sau $k < 0$ și $b > a$ nu avem soluție. Pentru $a = b$, $k \neq 0$ problema nu are soluție. Dacă $a = b$, $k = 0$, problema are o infinitate de soluții. **1 728.** Fie x

viteza proprie a bărcii. Trebuie ca (1) $\frac{s_1}{x+v} + \frac{s_2}{x-v} \leq t$ cu condiția ca s_1, s_2, v ,

$t > 0$ și $x > v$. Inegalitatea (1) este echivalentă cu $\frac{tx^2 - (s_1 + s_2)x + v(s_1 - s_2) - tv^2}{(x + v)(x - v)} \gg 0$

și deoarece $0 < v < x$, $f(x) = tx^2 - (s_1 + s_2)x + v(s_1 - s_2) - tv^2 \gg 0$. Trinomul $f(x)$ are $\Delta = (s_1 + s_2 - 2vt)^2 + 8s_2vt > 0$, rădăcinile x_1, x_2 sînt reale și distincte. Deoarece $f(v) = -s_2v < 0$, avem $x_1 < v < x_2$. **1 729.**

10 zile și 15 zile. **1 730.** Fie x numărul vaselor mari. Avem $\frac{60}{x} - \frac{60}{32 - x} = 2$,

$x = 12$ vase mari și 20 vase mici. **1 731.** Notăm cu x procentul căutat. Avem $\frac{600 - 6x}{10} - \frac{600x - 6x^2}{1000} = 48,6$; $x = 10\%$. **1 732.** Fie x numărul de zile necesar

celui de-al doilea gater pentru a termina singur lucrarea. Frațiunile din lucrare executate într-o zi de fiecare gater sînt respectiv $\frac{1}{x - 10}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x + 15}$.

Gaterile I și II realizează împreună într-o zi $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 10} = \frac{2x - 10}{x(x - 10)}$ din lucrare și termină lucrînd împreună în $\frac{x(x - 10)}{2x - 10}$ zile. Analog, gaterile II și III

termină împreună în $\frac{x(x + 15)}{2x + 15}$ zile. Ecuația problemei este $\frac{x(x - 10)}{2x - 10} + 6 =$

$= \frac{x(x + 15)}{2x + 15}$; $x = 30$. Lucrînd fiecare singur, gaterile ar termina lucrarea în respectiv 20 zile, 30 zile și 45 zile.

1 733. Notînd cu x, y, z respectiv numărul dinților celor trei roți, avem $3x = y$, $27x = 2z$, $z^2 - xy = 103\,248$. Găsim $x = 24$, $y = 72$, $z = 324$.

1 734. Avem, conform legii lentilelor (1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x} = \frac{1}{f}$, în care f este distanța focală a lentilei, cu condiția $d > 0$, $f > 0$ și $0 < x < d$. Din (1) rezultă $f(x) = x^2 - dx + df = 0$, $\Delta = d(d - 4f)$. Dacă $d \geq 4f$, rădăcinile sînt reale și pozitive. Avem $f(d) = df > 0$ și $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{d}{2} < d$, deci $x_1 \leq x_2 \leq d$. Pentru

$d = 4f$, $x = \frac{d}{2}$; pentru $d < 4f$, problema nu are soluție.

$$\mathbf{1\,735.} \quad x \gg \frac{\log \frac{2Np - 100n}{Np - 100n}}{\log \left(1 + \frac{p}{100}\right)}. \quad \mathbf{1\,736.} \quad 1^\circ d_n = \frac{(p - 1)^n d + [p^n - (p - 1)^n] d'}{p^n};$$

$2^\circ d_\infty = d'$; $3^\circ d_3 = 0,9125$. **1 737.** $1^\circ \frac{n^2}{2}$ (n par) sau $\frac{n^2 + 1}{2}$ (n impar); 2°

$\frac{n(2n^2 + 3n + 4)}{12}$ (n par) sau $\frac{(n + 1)(2n^2 + n + 3)}{12}$ (n impar). **1 738.** 1° Pînă la a

n -a întâlnire $t = \frac{d + (n-1)l}{v - v'}$ dacă $v > v'$ și $t = \frac{nl - d}{v' - v}$ dacă $v < v'$; $2^\circ t = \frac{d}{v + v'}$

la prima întâlnire; $t = \frac{d + (n-1)l}{v + v'}$ la a n -a întâlnire, mergând pe arcul d ,

$A \rightarrow B$ și $B \rightarrow A$; $t = \frac{nl - d}{v + v'}$ mergând în sens contrar decât

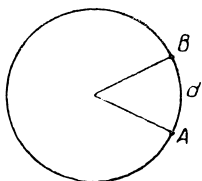


Fig. 27

în cazul precedent (pe arcul $l - d$) (fig. 27). **1 739.** 9 cm.

1 740. Notăm $BM = x$, $MC = a - x$, $BC = a$ etc.

$\triangle MBF \sim \triangle CBA$, deci $\overline{MF} : b = \overline{BM} : a$; $\triangle MEC \sim \triangle BAC$,

deci $\overline{ME} : c = \overline{MC} : a$. Se scoate $MF = \frac{bx}{d}$. $ME =$

$$= \frac{(a-x)c}{a} \cdot \frac{bx}{a} + \frac{(a-x)c}{a} = l; x = a \frac{l-c}{b-c}.$$

D i s c u ț i e. Avem o soluție bine determinată când

$b > c$ și $l > c$ sau $b < c$ și $l < c$, atunci x pozitiv,

$b > c$ și $l < c$ sau $b < c$ și $l > c$, atunci x negativ,

$l = c$ și $b \neq c$, $x = 0$, M se află în B ,

$l \neq c$ și $b = c$ sau $l = c$ și $b = c$, cădem peste o teoremă cunoscută în triunghiul isoscel, $ME + MF = b = c$.

1 741. Aria 5 000 m². Notăm cu x înălțimea trapezului format de paralelă cu baza mare, și cu y baza mică a acestui trapez. Ecuațiile sînt $\frac{1}{2} x(25+y) = 2500$, $\frac{1}{2} (y+15)(250-x) = 2500$, $x = 625 - 125 \sqrt{17}$, $y = 5\sqrt{17}$.

1 742. Fie $ED \parallel CB$ cu E pe AC și D pe AB , iar $AD = x$ și $AB = c$; (aria ADE): (aria ABC) = $x^2 : c^2 = m : (m+n)$; $x = c \sqrt{m : (m+n)}$. **1 743.**

Notăm $BM = x$, $a + b + c = 2p'$; deducem $x = \frac{a(p' - p)}{p' - b}$. Numitorul este

pozitiv și invariabil. 1° Dacă $p < p'$, $x > 0$; M se află între B și C iar perimetrul trapezului este mai mic decât al triunghiului, deoarece $MN < NM + BM$. 2° Dacă $p = p'$, $x = 0$; trapezul se confundă cu triunghiul. 3° Dacă $p > p'$, $x < 0$; M se află dincolo de B , pe prelungirea laturei BC . 4° Deoarece $EM'' < CE + CM''$, avem $2p < 2b$, $p' - p > p' - b$ și $x > a$. Când x crește, perimetrul p devine negativ și descrește nedefinit (fig. 28). **1 744.** Fie N punctul căutat (fig. 29). Punem $CN = x$, $MC = d$. Avem.

$$\frac{S_{MCN}}{S_{ACB}} = \frac{m}{m+n} = \frac{dx}{ab}, x = \frac{abm}{d(m+n)}.$$

Putem construi ușor $\frac{ab}{d}$ (a patra proporțională) și fie l segmentul de dreaptă obținut. Cu aceasta $x = \frac{lm}{m+n}$ și poate fi construit luînd a patra proporțio-

nală între $m + n$, m și l . **1 745.** Fie $AC = x$ (fig. 30). Din triunghiul dreptunghic EOC deducem $x = \frac{d^2 + a^2 - R^2}{2(d + R)}$. Ca $x > 0$, trebuie să avem $d^2 + a^2 > R^2$, adică A exterior cercului. Dacă $d = R$, $x = \frac{a^2}{4R}$, MN este tangentă cercului. Dacă

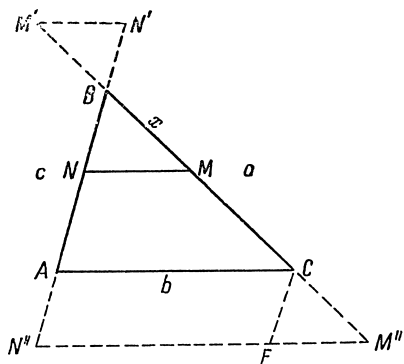


Fig. 28

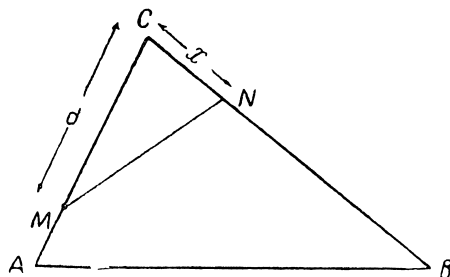


Fig. 29

dreapta MN taie cercul și A este exterior cercului, problema este posibilă. Dacă dreapta MN trece prin centrul cercului, $d = 0$, $x = \frac{a^2 - R^2}{2R}$; trebuie ca $a > R$.

1 746. Avem (fig. 34), $\frac{y}{18} = \frac{12 - x}{12}$, $x + y = 14$; $x = 8$, $y = 6$.

Generalizare. Fie h înălțimea triunghiului, $x + y = p$ și $AB = c$. Din sistemul $x + y = p$, $\frac{h - x}{h} = \frac{y}{c}$ deducem $x = \frac{h(c - p)}{c - h}$, $y = \frac{c(p - h)}{c - h}$ ($c \neq h$). Avem $x > 0$ și $y > 0$, pentru $h < p < c$ sau $c < p < h$. Dreptunghiul este pătrat pentru $x = y$, adică $h(c - p) = c(p - h)$, $p = \frac{2ch}{c + h}$. **1 747.** Fie

x latura pătratului (fig. 32). Deducem $x = \frac{bh}{b + h}$. Dacă vom presupune altă latură b' și înălțimea corespunzătoare h' , $x' = \frac{b'h'}{b' + h'}$. Avem $bh = b'h'$, $\frac{b}{h} = \frac{b'}{h'}$, $\frac{b - h'}{b} = \frac{b' - h}{b'}$ și considerînd $b > b'$, rezultă $b - h' > b' - h$ sau $b + h > b' + h'$, de unde $x < x'$. **1 748.** Notăm $AB = AC = b$, $BC = a$; $DB = DE = x$; obținem $x = \frac{ab}{a + b}$. **1 749.** $\frac{1}{2}(-a + b + c)$, $\frac{1}{2}(a - b + c)$; $\frac{1}{2}(a + b - c)$; $\frac{1}{2}(a + b + c)$; $\frac{1}{2}(a + b - c)$; $\frac{1}{2}(a - b + c)$.

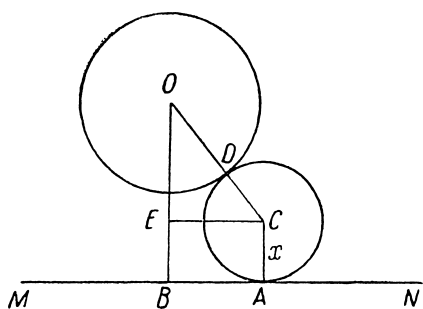


Fig. 30

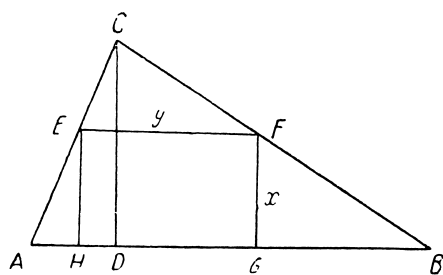


Fig. 31

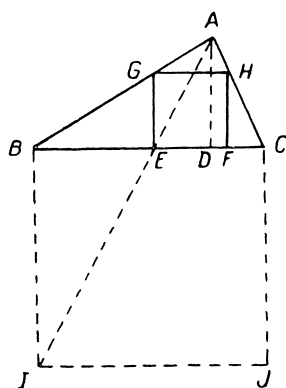


Fig. 32

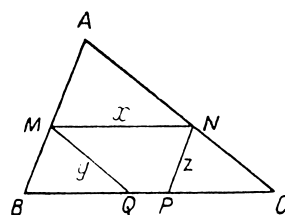


Fig. 33

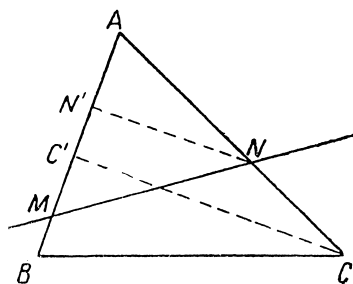


Fig. 34

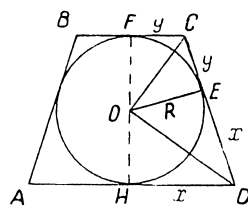


Fig. 35

1750. Notăm $DC = a$, $AB = b$, $AD = c$, $BC = d$. Avem $\frac{y-b}{a-b} = \frac{c-x}{c} = \frac{d-z}{d}$, $x + y + z = k$; $x = \frac{(k-a)c}{b+c+d-a}$, $y = \frac{a(c+d-k)+bk}{b+c+d-a}$, $z = \frac{(k-a)d}{b+c+d-a}$ **1751.** Deducem $x = a \cdot \frac{k+a-b-c}{3a-b-c}$, $y = b \cdot \frac{2a-k}{3a-b-c}$, $z = c \cdot \frac{2a-k}{3a-b-c}$ (fig. 33). Pentru ca trapezul să fie convex, trebuie ca $\frac{a}{2} < x < a$. Avem (1) $x - a = a \cdot \frac{k-2a}{3a-b-c}$ și (2) $x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2k-a-b-c}{3a-b-c}$. Deoarece $a > b$, $a > c$, rezultă $3a-b-c > 0$, iar din (1), $x - a < 0$ deci $k - 2a < 0$ sau $k < 2a$. Tot așa, în relația (2) trebuie ca $x - \frac{a}{2} > 0$, deci $2k > a + b + c$. În concluzie, trapezul este convex dacă $\frac{a+b+c}{2a} < x < 2a$.

1752. Notăm cu x distanța dintre centrul cercului și baza triunghiului. Avem $n^2(R^2 - x^2) = 2R^2 + 2Rx$, $x = \frac{n^2R - 2R}{n^2}$. **1753.** Fie x distanța dintre centrul cercului și coardă. Avem $x^2 = R^2 - \frac{a^2}{4n^2}$. **1754.** Fie a latura pătratului. Avem $PM = PN$, $x^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \left(\frac{3a}{4} - x\right)^2 + a^2$, $x = \frac{2a}{3}$. **1755.** Fie $AB = a$, $AC = x$ (C între A și B). Conform enunțului trebuie ca $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, $x^2 + ax - a^2 = 0$, $x = \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$. Avem $x_1 < 0$ și $x_2 > 0$ deoarece $x_1 x_2 = -a^2 < 0$. Totodată $x_1 < \frac{a}{2} < x_2 < a$ deoarece $f(a) > 0$ și $f\left(\frac{a}{2}\right) < 0$ iar $|x_1| > a$, deci există un punct C' în afara segmentului AB care satisface condițiile problemei. **1756.** $(a+x)^2 = (b+x)^2 + (c+x)^2$, $x = a - b - c \pm \sqrt{2(a-b)(a-c)}$. Semnul lui x ne arată sensul în care trebuie construit segmentul. Problema este posibilă dacă $a \geq b$; $a \geq c$ sau $a \leq b$ și $a \leq c$.

1757. Notăm $AM = x$, $AN = y$, $BC = a$, $AC = b$ și $AB = c$. Avem (fig. 34) $x + y = \frac{1}{2}(a + b + c)$ și (1) $x \cdot \overline{NN'} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \overline{CC'}$. Din asemănarea triunghiurilor ANN' și ACC' avem $b \cdot \overline{NN'} = y \cdot \overline{CC'}$ și împărțind membru cu membru cu (1), obținem $2xy = bc$; x și y sînt rădăcinile ecuației $z^2 - \frac{a+b+c}{2}z + \frac{bc}{c} = 0$, $\Delta = (a+b+c)^2 - 8bc$. Problema este posibilă dacă $(a+b+c)^2 \geq 8bc$. **1758.** 1° Avem (fig. 35), $x + y = \frac{p}{2}$. În triun-

ghiul dreptunghic COD putem scrie $xy = R^2$. Necunoscutele x și y sînt rădăcinile ecuației $z^2 - \frac{p}{2}z + R^2 = 0$. Problema are soluție dacă $\Delta = p^2 - 16R^2 \geq 0$, $p \geq 4R$. 2° Avem $x + y = \frac{S}{2R}$ și $xy = R^2$; x și y sînt rădăcinile

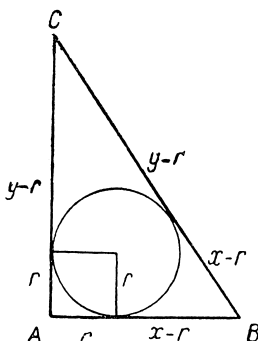


Fig. 36

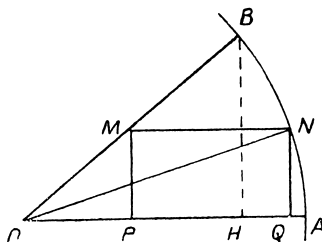


Fig. 37

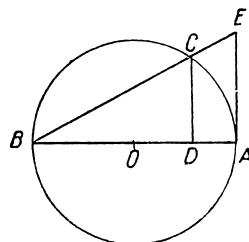


Fig. 38

ecuației $z^2 - \frac{S}{2R}z + R^2 = 0$. Problema este posibilă dacă $\Delta = \frac{S^2}{4R^2} - 4R^2 \geq 0$, $S \geq 4R^2$, adică aria trapezului să fie mai mare ca aria pătratului circumscris cercului. **1 759.** Fie x și y laturile necunoscute. Avem $x + y = 2p - a$, $s^2 = p(p - a)(p - x)(p - y)$. Notînd $p - x = u$, $p - y = v$, u și v sînt rădăcinile ecuației $z^2 - az + \frac{s^2}{p(p - a)} = 0$ etc. **1 760.** Notînd lungimile medianelor cu α , β , γ , avem ecuațiile $b^2 + c^2 = 2\alpha^2 + \frac{a^2}{2}$, $c^2 + a^2 = 2\beta^2 + \frac{b^2}{2}$, $a^2 + b^2 = 2\gamma^2 + \frac{c^2}{2}$. Adunînd membru cu membru, $2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$, $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$. Deducem $a^2 = \frac{4}{9}(2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2)$, analog b^2 și c^2 . **1 761.** Fie $BC = a$, $AB = x$, $AC = y$ (fig. 36). Avem $x^2 + y^2 = (x + y - 2r)^2$, $x + y = a + 2r$, $xy = 2r(a + r)$; x și y sînt rădăcinile ecuației $z^2 - (a + 2r)z + 2r(a + r) = 0$. Problema are soluție dacă $\Delta = -4r^2 - 4ar + a^2 \geq 0$. Ipotenuza a rămînînd constantă, trebuie ca $0 < r < \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$. **1 762.** Fie $MN = 2x$, $MQ = y$. Avem $4x + 2y = 2p$, $x^2 + y^2 = R^2$, $x = \frac{1}{5}(2p \pm$

$\pm \sqrt{5R^2 - p^2}$. Ca problema să aibă soluție, trebuie ca $0 \leq x \leq \frac{p}{2}$, $p \leq R\sqrt{5}$ apoi $\frac{1}{5}(2p + \sqrt{5R^2 - p^2}) \leq \frac{p}{2}$, $p \geq 2R$. În concluzie $2R \leq p \leq R\sqrt{5}$.

1 763. Notăm $OP = PM = x$ (fig. 37). Avem $BH = OH = \frac{R}{\sqrt{2}}$ și observăm că $0 < x < \frac{R}{\sqrt{2}}$. Ecuația problemei este $x(\sqrt{R^2 - x^2} - x) = a^2$, $2x^4 - (R^2 - 2a^2)x^2 + a^4 = 0$, $2y^2 - (R^2 - 2a^2)y + a^4 = 0$. Trebuie ca $\Delta = (R^2 - 2a^2)^2 - 8a^4 > 0$ sau $(R^2 - 2a^2 + 2\sqrt{2}a^2)(R^2 - 2a^2 - 2\sqrt{2}a^2) > 0$ și cum primul factor este pozitiv, rezultă $a^2 < \frac{R^2(\sqrt{2} - 1)}{2}$. Dacă $a^2 =$

$\frac{R^2(\sqrt{2} - 1)}{2}$, avem soluția dublă $\frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. **1 764.** Notăm $AE = x$ (fig. 38). Scriind puterea punctului E față de cerc și din asemănarea triunghiurilor dreptunghice BCD și BEA deducem ecuația $x^4 + 4R^2x^2 - 16R^4 = 0$ $x = R\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}$. **1 765.** Fie a, b, c , dimensiunile paralelipipedului. Avem $abc = 6$, $\frac{a}{21} = \frac{b}{14} = \frac{c}{7}$, $\frac{abc}{21 \cdot 14 \cdot 7} = \frac{a^3}{21^3} = \frac{b^3}{14^3} = \frac{c^3}{7^3} = \frac{6}{21 \cdot 14 \cdot 7}$, $a = 3, b = 2, c = 1$. **1 766.** $3\sqrt{17}, 6\sqrt{5}; 144 \text{ cm}^3$. **1 767** $1^\circ V_a = \frac{\pi h_a^2 a}{3}$

$V_b = \frac{\pi h_b^2 b}{3}, V_c = \frac{\pi h_c^2 c}{3}; ah_a = bh_b = ch_c = 2S; 2a = b + c$. 2° Avem $V_a = \frac{\pi b^2 c^2}{3a}, V_b = \frac{\pi a^2 b}{3}, V_c = \frac{\pi b^2 c}{3}$. Din $V_a + V_b + V_c = \frac{\pi \alpha^3}{3}$ deducem $b^2 c^2 + a b^2 c + abc^2 = a\alpha^3$ și cu $bc = 2S$, obținem $4Sa^4 + (16S^2 - \alpha^6)a^2 + 8\alpha^3 S^2 a - 16S^4 = 0$ etc. $3^\circ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

1 768. Avem $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $2S = ah_a = bh_b = ch_c, h_a = \frac{2S}{a}$;

$1^\circ S_1 = \pi b h_a + \pi c h_a = \pi h_a(b + c) = \frac{2\pi S}{a}(b + c)$; în mod analog S_2 și

S_3 . $2^\circ V_1 = \frac{4\pi S^2}{3a}$ etc. 3° Avem $\frac{V_1}{s_1^2} = \frac{a}{3\pi(b+c)^2} = k, b + c = \sqrt{\frac{a}{3\pi k}} =$

$= \text{constant}$. Locul geometric este o elipsă avînd focarele în B și C , axa mare $b + c \sqrt{\frac{a}{3\pi k}}$, iar axa mică $\sqrt{\frac{a(1 - 3\pi ka)}{3\pi k}}, k < \frac{1}{3\pi a}$. **1 769.** $\frac{3\pi R^2}{50}(7 - 2\sqrt{6})$.

1 770. $x = \frac{rh}{2h - r}$ ($r \neq 2h$) înțelegînd prin x distanța de la vîrfurile conului la

planul bazei superioare a cilindrului. **1771.** Notăm $SO = h$, $Oa = R$. Fie $x = MP$ înălțimea cilindrului și $y = IM$ raza cilindrului. (fig. 39). Deducem $2xy + 2y^2 = R^2$, $\frac{y}{R} = \frac{h-x}{h}$ și substituind pe y , ecuația (1) $f(x) =$

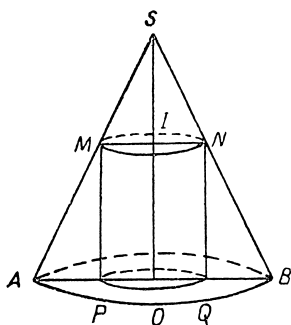


Fig. 39

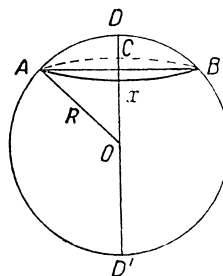


Fig. 40

$= 2(R-h)x^2 + 2h(h-2R)x + Rh^2 = 0$. Trebuie ca $0 < x < h$. Ecuația (1) are totdeauna o rădăcină pozitivă mai mică decât h deoarece $f(0) = Rh^2$, $f(h) = -Rh^2$. 1° Dacă $h < R$, $0 < x_1 < h < x_2$; x_1 convine. 2° Dacă $h > R$, $x_1 < 0 < x_2 < h$; x_2 convine. 3° Dacă $h = R$, $x = y = \frac{R}{2}$, ecuația

(1) este de gradul întâi. **1772.** Înălțimea calotei mici $x = 4,8$ cm. **1773.** Notăm $OC = x$, $OA = R$ (fig. 40). 1° Avem $\pi(R^2 - x^2) = 2\pi R(R+x) - 2\pi R(R-x)$, $x^2 + 4R - R^2 = 0$, $x = R(\sqrt{5} - 2)$; rădăcina negativă nu este acceptabilă. 2° Avem $S = \pi(R^2 - x^2)$, $S_1 = 2\pi R(R-x)$, $S_2 = 2\pi R(R+x)$; $x = R - \frac{S_1}{2\pi R} = \frac{S_2}{2\pi R} - R$; $S = \pi\left[R^2 - \left(R - \frac{S_1}{2\pi R}\right)^2\right] = \pi\left(\frac{2RS_1}{2\pi R} - \frac{S_1^2}{4\pi^2 R^2}\right) = S_1\left(1 - \frac{S_1}{4\pi R^2}\right)$ și la fel $S = S_2\left(1 - \frac{S_2}{4\pi R^2}\right)$. Ultimele două relații ne dau $4\pi R^2 = \frac{S_1^2}{S_1 - S} = \frac{S_2^2}{S_2 - S}$, sau $S_1 S_2 (S_1 - S_2) = S(S_1^2 - S_2^2)$ și considerînd $S_1 - S_2 \neq 0$, $S_1 S_2 = S(S_1 + S_2)$. 3° Deducem $f(x) \equiv x^2 + 2R(m+1)x + R^2(1-2m) = 0$, $\Delta = R^2 m(m+4)$. Trebuie ca $0 < x < R$, $m < -4$ și $m > 0$. Deoarece $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) < R$, avem $-R(m+1) < R$, $m > -2$, condiție îndeplinită o dată cu $\Delta > 0$. Observăm că $f(R) = 4R^2$, deci R trebuie să fie în afara intervalului dintre rădăcini. Totodată $f(0) = R^2(1-2m) > 0$ pentru $0 < m < \frac{1}{2}$, deci 0 este în afara intervalului dintre rădăcini, iar rădăcinile vor fi convenabile pentru

$0 < -R(m+1)$, $m < -1$, lucru ce contrazice ipoteza. Pentru $m > \frac{1}{2}$, $f(0) < 0$, 0 este între rădăcini. În concluzie, convine rădăcina cea mai mare, pentru $m > \frac{1}{2}$; pentru $m = \frac{1}{2}$, $x = 0$. Relația găsită la 2° dă $S_1 (S_2 - S) = SS_2$, $\frac{S_2 - S}{S_1} = \frac{SS_2}{S_1^2} = \frac{(R+x)^2}{2R(R-x)} (R \neq x)$. Când x crește de la 0 la R , numitorul scade de la $2R^2$ la 0, numărătorul crește de la R^2 la $4R^2$, iar raportul crește de la $\frac{1}{2}$ la infinit. Acest lucru rezultă și din faptul că $\frac{S_2 - S}{S_1} = m > \frac{1}{2}$. **1 774.** Notăm cu x distanța de la centrul sferei la plan. 1° $3x^2 + 5Rx = 0$; $x_1 = \frac{-5R}{3}$, inacceptabilă și $x_2 = 0$. Planul trece deci prin centrul sferei. 2° $4x^2 + Rx - 2R^2 = 0$, $x = \frac{R}{8} (-1 \pm \sqrt{33})$. **1 775.** Notăm cu x distanța de la centrul sferei la plan și R raza sferei. Volumele sferice sînt $V_1 = \frac{\pi}{3} (R-x)^2 (2R+x)$ și $V_2 = \frac{\pi}{3} (R+x)^2 (2R-x)$. Avem $\frac{(R-x)^2 (2R+x)}{(R+x)^2 (2R-x)} = \frac{5}{27}$, $8x^3 - 24R^2x + 11R^3 = 0$; $x_1 = \frac{R}{2}$, $x_{2,3} = \frac{R}{4} (-1 \pm 3\sqrt{5})$. Ultimele două rădăcini sînt inacceptabile. **1 776.** Notăm cu r raza sferei, y înălțimea segmentului și cu x raza mică a bazei. Avem $\frac{1}{6} \pi y^3 + \frac{1}{2} \pi y (r^2 + x^2) = \frac{1}{3} \pi x y (r^2 + rx + x^2)$, $x^2 + y^2 = r^2$ și eliminînd pe y , (1) $(m-1)x^2 + mrx + (m-2)r^2 = 0$. Rădăcinile sînt reale dacă $-3m^2 + 12m - 8 \geq 0$, $\frac{2}{3} (3 - \sqrt{3}) \leq m \leq \frac{2}{3} (3 + \sqrt{3})$; ele trebuie să fie cuprinse între $-r$ și r . Trebuie ca $f(r)$. $f(-r) = 3r^4 (m-1)(m-3) < 0$, $1 < m < 3$. Condiția $x_1^2 x_2^2 < r^2$ dă $\frac{(m-2)^2 r^4}{(m-1)^2} < r^4$, $(m-2)^2 - (m-1)^2 < 0$, $m > \frac{3}{2}$ etc. **1 777.** Notăm cu R raza sferei, x distanța de la centrul 0 la planul P , r_1 și r_2 razele cercurilor secțiunilor. Avem $2x^2 - 2dx + d^2 + 2Rd - 2R^2 = 0$; $0 < d < 2R(\sqrt{2}-1)$. **1 778.** $V + V' = \frac{2\pi R}{3} x(2R-x)$, $y = \frac{x(2R-x)}{2R^2}$; y este maxim cînd $x = 2R - x$, $x = R$, $y = \frac{1}{2}$. Pentru $y = \lambda$, $f(x) \equiv x^2 - 2Rx + 2\lambda R^2 = 0$ iar $x = R(1 \pm \sqrt{1-2\lambda})$. Trebuie ca $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Pentru $\lambda = \frac{1}{2}$, $x_1 =$

$= x_2$; pentru $\lambda = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2R$ (fig. 41, 42). **1 779.** Latura ρ a cubului înscris într-o sferă de rază R este $\rho = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Notînd cu a_1 latura primului cub C_1 și cu R_1 raza primei sfere S_1 , se deduce: $1^\circ V = a_1^3 \left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 + \right.$

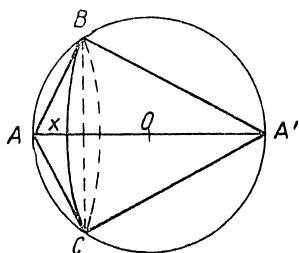


Fig. 41

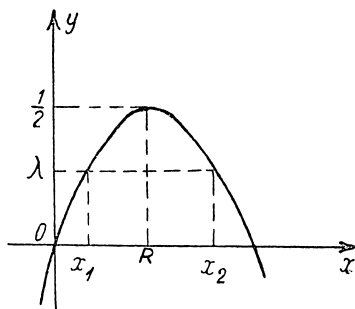


Fig. 42

$+ \dots] = a_1^3 \cdot \frac{3(9 + \sqrt{3})}{26} \cdot 2^\circ V' = \frac{1}{6} \pi V$. **1 780.** 1° Avem $V(x) = \frac{4}{3} \pi (x + 1)^3 - \frac{4}{3} \pi x^3 = \frac{4\pi}{3} (3x^2 + 3x + 1)$. $2^\circ \frac{4\pi}{3} (3x^2 + 3x + 1) = \frac{4}{3} \pi k, 3x^2 + 3x + 1 - k = 0$, $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3(4k - 1)}}{6}$. Trebuie ca $x > 0$; ori $x_1 + x_2 = -1$, deci $x_1 x_2 < 0$, $\frac{1-k}{3} < 0$, $k > 1$. Soluția este $x = \frac{-3 + \sqrt{3(4k - 1)}}{6}$

în care făcînd $k = 0$, obținem $x = 0$. **1 781.** $\frac{R}{r} = 2$; densitatea $\delta = \frac{27}{56} \cdot \frac{R}{r} = 0,96$. **1 782.** Notăm $r_1 = QE$, $r_2 = QG$ (fig. 43). Avem $\pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi a^2$, (1) $r_1^2 - r_2^2 = a^2$. Din $\triangle QOE$ deducem $r^2 = 2Rx - x^2$ iar din asemănarea triunghiurilor QFC și PAC , $r_2^2 = \frac{x^2}{3}$. Înlocuind în (1), avem $4x^2 -$

$- 6Rx + 3a^2 = 0$. Trebuie ca $\Delta = 9R^2 - 12a^2 \geq 0$, din care $a < \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

1 783. Punem $AM = x$. Volumele sînt $\pi a^3 - \frac{1}{3} \pi a^2 x$, $\pi a^3 - \frac{1}{3} \pi a x^2$. Avem

$\frac{3a^2 - ax}{3a^2 - x^2} = m$. Cum $x \leq a$, $x^2 \leq ax$, $3a^2 - x^2 \geq 3a^2 - ax$, deci $m \leq 1$.

Deducem ecuația $m x^2 - ax + 3a^2(1 - m) = 0$. Trebuie ca $\Delta = 1 - 12m + 12m^2 \geq 0$, $m \leq 1$, $0 \leq x \leq a$ rezultă în concluzie $\frac{1}{6} (3 + \sqrt{6}) \leq m \leq 1$.

1 784. Notăm $AM = x$ și avem ecuația $2\pi a^3 = \frac{2\pi a}{3} (x^2 + ax + a^2) (m + 1)$ sau $f(x) = (m + 1) x^2 + (m + 1) ax + a^2(m - 2) = 0$. Trebuie ca $0 \leq x \leq a$. Dacă $m > 2$, cei trei coeficienți sînt pozitivi, ecuația nu are rădăcini pozitive; problema nu are soluție. Dacă $m < 2$ ecuația are o rădăcină $x_2 > 0$, care convine deoarece $f(a) > 0$ și deci $x_2 > a$. Pentru $m = 2$, $x = 0$, punctul

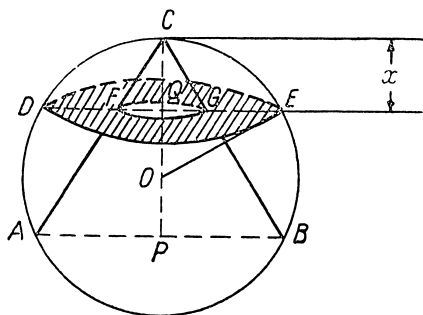


Fig. 43

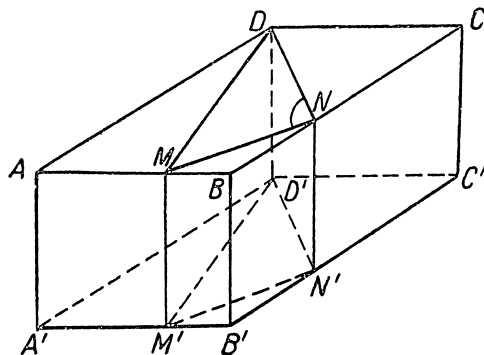


Fig. 44

M se află în punctul A . 1 785. $1^\circ AM = \frac{2b}{3}$, $CN = \frac{2a}{3}$. $2^\circ \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$. $3^\circ \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. $4^\circ V = \frac{5\pi a^2 h}{27} = 0,5\pi = 1,57 \text{ m}^3$ (fig. 44). 1 786. Considerăm ABC secțiunea dreaptă prin prismă, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ și fie CMN secțiunea cerută (fig. 45). Notăm $AM = x$, $BN = y$. Trebuie ca (1) $CM = CN = MN$. În triunghiurile dreptunghice AMC și BNC avem $\overline{CM}^2 = b^2 + x^2$, $\overline{CN}^2 = a^2 + y^2$. Ducem $NP \perp AA'$ și luăm $MP = MA + AP = y - x$, $\overline{MN}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PN}^2 = (y - x)^2 + c^2$. Din (1) deducem $b^2 + x^2 = a^2 + y^2$, $b^2 + x^2 = (y - x)^2 + c^2$ și substituind $x = \frac{y^2 + c^2 - b^2}{2y}$, obținem (2) $3y^4 + 2(2a^2 - b^2 - c^2)y^2 - (b^2 - c^2)^2 = 0$. Ecuația (2) are două rădăcini reale opuse $y = \pm \sqrt{\alpha}$ cu care $x = \pm \frac{\alpha^2 + c^2 - b^2}{2\sqrt{\alpha}}$. Se obțin deci două triunghiuri echilaterale simetrice față de planul ABC . 1 787. 1° În triunghiul BCD (fig. 46), avem $2S_{BMO} + 2S_{BNO} = 2S_{BMN}$ sau $BM \cdot OD' + BN \cdot OC' = BM \cdot NP$ în care înlocuim $BP = \frac{BN}{2} = \frac{y}{2}$, $NP = \frac{y\sqrt{3}}{2}$,

$OD' = OC' = \frac{BB'}{3} = \frac{u}{2\sqrt{3}}$. 2° Ariile triunghiurilor sînt respectiv $a \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - xy}}{\sqrt{6}}$, $ay \frac{\sqrt{3}}{4}$, $ax \frac{\sqrt{3}}{4}$ iar aria tetraedrului $a^2 \sqrt{3}$. Rezolvăm sistemul

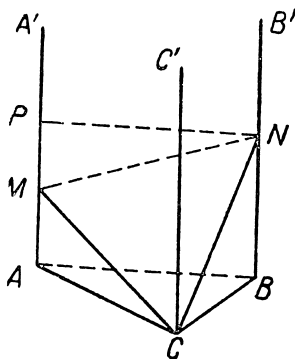
$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 - xy}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}(x + y)}{4} = ka \sqrt{3},$$


Fig. 45

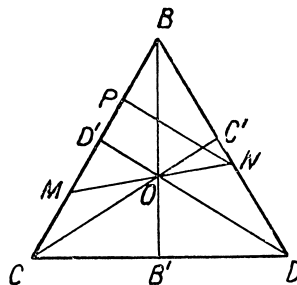


Fig. 46

$a(x + y) = xy$. Notînd $x + y = u$, obținem $u^2 = 8a(9k - 1)u + 144k^2a^2 = 0$ ale cărei rădăcini sînt reale dacă $0 \leq k \leq 12$ și $k > 1/6$. Rezolvăm apoi sistemul $x + y = u$, $xy = \frac{au}{3}$, x și y fiind rădăcinile ecuațiilor $z^2 - uz + \frac{au}{3} = 0$ în care u se înlocuiește cu u_1 și u_2 . Rădăcinile sînt reale și convin problemei dacă $u > \frac{4a}{3}$. 3° Valoarea minimă a sumei $x + y$ este $\frac{4a}{3}$ deci $x + y \geq \frac{4a}{3}$ sau $BM + BN \geq \frac{4a}{3}$. Egalitatea corespunde cazului cînd MN este paralelă cu CD .

1788.* Trebuie ca volumul cilindrului de înălțime x să fie egal cu volumul segmentului sferic (fig. 47).

$$\text{Avem } \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 x = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h), \quad x = \frac{4h^2(3R - h)}{3d^2}.$$

Înlocuim R în funcție de D și h și obținem

$$x = \frac{h(4h^2 + 3D^2)}{6d^2}, \quad l = q + x.$$

* V. „Probleme din tehnică“ G.M.F., Seria A, Nr. 10/1957, p. 550.

1 789. Fie V volumul comun. Avem (fig. 48). (1) $V = \frac{\pi}{2} \cdot AH \cdot \overline{TH}^2 +$
 $+ \frac{\pi}{6} \cdot \overline{AH}^3 + \frac{\pi}{2} HB \cdot \overline{TH}^2 + \frac{\pi}{6} \cdot \overline{HB}^3 = \frac{\pi}{2} \cdot \overline{TH}^2 (AH + HB) + \frac{\pi}{6} (\overline{AH}^3 +$
 $+ \overline{HB}^3)$. Notăm $x + y = z$ și observăm că $x^2 + y^2 = a^2$, $xy = \frac{1}{2} [(x +$

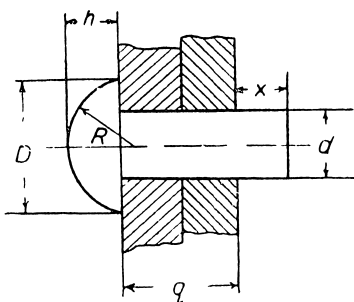


Fig. 47

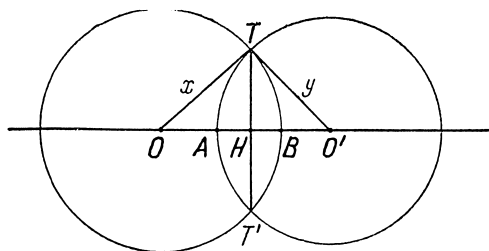


Fig. 48

$+ y)^2 - x^2 - y^2] = \frac{z^2 - a^2}{2}$. Deducem $AH = y - \frac{y^2}{a}$, $HB = x - \frac{x^2}{a}$, $AH +$
 $+ HB = z - a$, $\overline{TH}^2 (AH + HB) = \frac{x^2 y^2}{2} (z - a)$, $\overline{AH}^3 + \overline{HB}^3 = (z - a)$
 $\left(\frac{3z^3}{2a} - \frac{z^2}{2} - \frac{7az}{2} + \frac{5a^2}{2} - \frac{3x^2 y^2}{a^2} \right)$ și înlocuind în (1) obținem $V = \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi a^3}{6} =$
 $= \frac{\pi}{6} (z - a) \left(\frac{3z^3}{2a} - \frac{z^2}{2} - \frac{7az}{2} + \frac{5a^2}{2} \right)$ din care rezultă ecuația $9z^4 - 12az^3 -$
 $- 18a^2 z^2 + 36a^3 z - 16a^4 = 0$. Singura rădăcină care convine este $z = \frac{4a}{3}$;
 x și y sînt rădăcinile ecuației $X^2 - zX + \frac{z^2 - a^2}{2} = 0$. Pentru $z = \frac{4a}{3}$
avem $x = \frac{a}{6} (4 + \sqrt{2})$, $y = \frac{a}{6} (4 - \sqrt{2})$. 1 790. 1° Perimetrul este $2\pi R$,
aria (A) este $\frac{\pi}{4} (R^2 - x^2)$, aria totală a lui (S) este $2\pi (3R^2 + x^2)$ iar volu-
mul $\pi R(R^2 - x^2)$. Cînd x crește de la 0 la R , perimetrul ariei (A) este con-
stant, aria descrește de la $\frac{\pi R^2}{4}$ la 0; suprafața solidului (S) crește de la $6\pi R^2$
la $8\pi R^2$ iar volumul descrește de la πR^3 la 0 (fig. 49). 2° Aria $s = 2\pi (x^2 -$
 $- Rx + 2 R^2)$, volumul $v = \frac{\pi R}{2} (R^2 + Rx - 2x^2)$. Variația lor conform

graficelor din figurile 50 și 51. 3° Luind $R = 1$, avem

$\frac{\pi}{2} (1 + x - 2x^2) = 1$, $x = \frac{1 + \sqrt{9 - \frac{16}{\pi}}}{4}$, $x = 0,74418$. Rădăcina negativă nu convine. 1791. Fie x înălțimea calotei. Avem ecuația $\frac{1}{3} \pi x^2 \cdot (3R -$

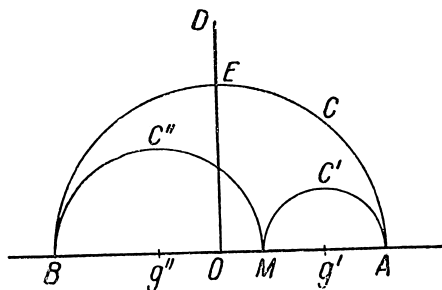


Fig. 49

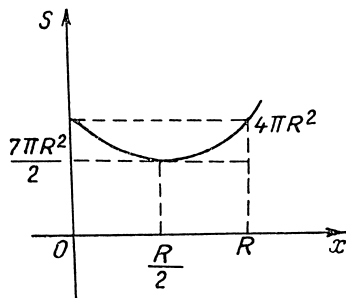


Fig. 50

— $x) d' = \frac{4}{3} \pi R^3 d$. Punem $x = \frac{2R}{y}$ și obținem ecuația $f(y) = y^3 - 3 \frac{d'}{d} y + 2 \frac{d'}{d} = 0$. Formăm $4p^3 + 27q^2 = 4 \cdot 27 \left(\frac{d'}{d}\right)^2 \left(1 - \frac{d'}{d}\right)$; $f(1)$ și $f(+\infty)$ au semnul respectiv al lui $1 - \frac{d'}{d}$ și al lui $+\infty$. Dacă $d' < d$, ecuația are o

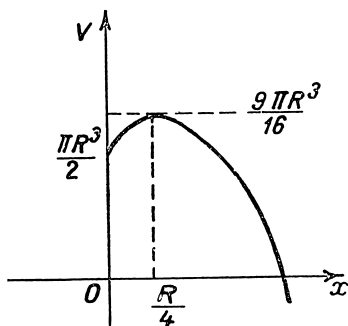


Fig. 51

singură rădăcină reală și negativă iar problema nu are soluție; dacă $d' > d$ ecuația are trei rădăcini reale dintre care numai una este mai mare ca 1 și reprezintă singura soluție a problemei.

1792. Fie x înălțimea, y raza bazei, a generatoarea și $\frac{\pi m^3}{3}$ volumul conului. Avem $xy^2 = m^3$, $x^2 + y^2 = a^2$ din care eliminând pe y , obținem ecuația (1) $x^3 - a^2x + m^3 = 0$ ($m > 0$). Ecuația derivată $3x^2 - a^2 = 0$ are

rădăcinile $x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$; rezultatul substituirii acestor rădăcini și a numerelor $-\infty, 0, a, +\infty$ în primul membru al ecuației (1) dă următorul tablou

| | | | | | |
|-----------|------------------------|---|--------------------------------|-----|-----------|
| $-\infty$ | $-\frac{a\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ | a | $+\infty$ |
| — | + | + | $m^3 - \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ | + | + |

Dacă $m^3 < \frac{2a^3\sqrt[3]{3}}{9}$, ecuația are trei rădăcini reale, $x_1 < 0$, $0 < x_2 < x_3 < a$, problema are două soluții; dacă $m^3 = \frac{2a^3\sqrt[3]{3}}{9}$ ecuația are $x_1 < 0$, $x_2 = x_3 = \frac{a\sqrt[3]{3}}{9}$, problema are o soluție; dacă $m^3 > \frac{2a^3\sqrt[3]{3}}{9}$, ecuația are o singură rădăcină reală și negativă iar problema nu are soluție. **1 793.** Fie $4\pi a^2$ suprafața totală, $\frac{4}{3} \pi b^3$ volumul cazanului ($a, b > 0$), x raza bazelor și y înălțimea cilindrului. Avem ecuațiile

$$S = 2\pi xy + 4\pi x^2 = 4\pi a^2, \quad V = \pi x^2 y + \frac{4}{3} \pi x^3 = \frac{4}{3} \pi b^3;$$

x și y sînt date din sistemul $f(x) = x^3 - 3a^2x + 2b^3 = 0$, $y = \frac{2(a^2 - x^2)}{x}$.

Derivata $f'(x) = 3(x^2 - a^2)$ se anulează pentru $x = \pm a$. 1° $a < b$, ecuația $f(x) = 0$ are o singură rădăcină reală $x_1 < -a < 0$ pentru care $y > 0$, problema nu are soluție. 2° $a > b$, $x_1 < -a < 0$, care nu convine, $0 < x_2 < a$ pentru care $y > 0$ și convine problemei, $x_3 > a$, $y < 0$ care nu convine problemei.

NUMERE COMPLEXE

1 794. $(a^2 + b^2) i$. **1 795.** 0. **1 796.** $1 + i$. **1 797.** a) 1; b) $-100(2 + i)$.
1 798. $1^\circ x = 2, y = 1; x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$. $2^\circ x = 6, y = 1$. **1 799.** $2a(a^2 - 3b^2) : (a^2 + b^2)$. **1 800.** 0. **1 801.** $-i$. **1 803.** $\alpha^4 = \alpha$. **1 806.** $1^\circ x^2 - xy + y^2$.
 $2^\circ x^3 + y^3$. $3^\circ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. **1 807.** $1^\circ \alpha^4 = \alpha, \alpha^5 = \alpha^2$; $2^\circ 2 + 5\alpha + 2\alpha^2 = 2(1 + \alpha + \alpha^2) + 3\alpha = 3\alpha$; $2 + 2\alpha + 5\alpha^2 = 2(1 + \alpha + \alpha^2) + 3\alpha^2 = 3\alpha^2$; $\alpha^6 = \alpha^3\alpha^3 = 1, \alpha^{12} = \alpha^6\alpha^6 = 1$. **1 808.** $\frac{0}{0}; \alpha^4 = \alpha, \alpha^3 = 1$.
1 809. $x^2 - y^2 - 1 = 0, 2xy = -\sqrt{3}; x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}, y = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$ **1 810.** $1^\circ x = 0, y = 0; x = 1, y = 0; x = -\frac{1}{2}, y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. $2^\circ x^3 - 3xy^2 - 3x + 2 = 0;$
 $3x^2y - y^3 - y = 0; y = 0, x = 1; y = 0, x = -2; x = 1, y = \pm \sqrt{2}$.
1 811. $E_1 = i; E_2 = 4(1 - i)$, cu binomul lui Newton, sau $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ și $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), (1 + i)^5 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right);$
 $E_3 = -556; E_4 = i; E_5 = \frac{1}{5}(20 + 11i); E_6 = \frac{1}{318}(44 - 5i); E_7 = i;$
 $E_8 = i; E_9 = -i$. **1 812.** $f_1 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i, f_2 = \frac{x}{x^2 + y^2} -$
 $-\frac{y}{x^2 + y^2}i, f_3 = \frac{x(x-1) + y^2}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}i, f_4 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2} -$
 $-\frac{2x}{x^2 + (y+1)^2}i, f_5 = \frac{-3x^2y + y^3 - 2x^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2} - \frac{x^3 + xy^2 + xy + x}{x^2 + (y+1)^2}i$ **1 813.** $(x^2 -$
 $-2x + 2)(x^2 + x + 1) = 0$. **1 814.** $2^\circ -1 + ai = i(a + i), 1 + ai = i(a - i), (1 - i)^2 = -2i, (1 + i)^2 = 2i$. **1 815.** $x^5 - 10x^3y^2 +$
 $+ 5xy^4 = 1, 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 = 1$; punem $y = tx$ și împărțim mem-
bru cu membru, $t^5 - 5t^4 - 10t^3 + 10t^2 + 5t - 1 = 0; t_1 = 1, \text{ etc.}$
1 816. $1^\circ \alpha = 0, \alpha = \pm \sqrt{3}; 2^\circ \alpha^5 - 10\alpha^3 + 5\alpha = 0, \alpha = 0, \alpha =$

$= \pm \sqrt{5 \pm 25}$. **1 817.** $P(\pm i) \equiv 0$ sau soluție directă $P(x) = (x^2 + 1) \sin \alpha \sin \beta$. **1 818.** v. ex. 66, 67. **1 819** Progresie geometrică cu rația i ; $s_n = \frac{1}{2}(1 + i - i^{n+1} - i^{n+2})$; $s_{4k} = 1$, $s_{4k+1} = 1 + i$, $s_{4k+2} = i$, $s_{4k+3} = 0$. **1 820.** $(1 + i)^2 = 2i$; $E_1 = (i)^{50} = -1$; pentru E_2 notăm $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ și $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$; $\alpha^{3k} = (3^3)^k = 1$; $\alpha^{3k+1} = \alpha^{3k} \cdot \alpha = \alpha$; $\alpha^{3k} = 1$; $\alpha^{3k+1} = \alpha$; $n = 3k$, $E_2 = 2$; $n = 3k + 1$, $E_2 = -1$; $n = 3k + 2$, $E_2 = -1$; $E_3 = \frac{(1 - i)^{2n}(1 - i)^{2m}}{(1 + i)^{2m}(1 - i)^{2m}} = \frac{(1 - i)^{2(n+m)}}{(1 - i^2)^{2m}} = \frac{(-2i)^{n+m}}{2^{2m}} = 2^{n-m}(-i)^{n+m}$. Deosebim cazurile $1^\circ m + n = 4k$, atunci $E_3 = 2^{n-m}$; $m + n = 4k + 1$, $E_3 = -2^{n-m}i$; $m + n = 4k + 2$, $E_3 = -2^{n-m}$; $m + n = 4k + 3$, $E_3 = 2^{n-m}i$. **1 821.** $i + a_k = i(1 - a_k i)$. **1 822.** $1^\circ \sqrt{1 + 2i} = x + yi$; $x^2 - y^2 = 1$, $2xy = 2$; $\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \right)$. $2^\circ \sqrt{-5 - 12i} = \pm (2 - 3i)$. $3^\circ \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(3 - i\sqrt{3})$. $4^\circ \pm \frac{1}{2}\sqrt{n}(\sqrt{14} - i\sqrt{2})$. $5^\circ \pm [x + (x - 1)i]$. $6^\circ \pm [a + b + (a - b)i]$. $7^\circ z_0 = \frac{1}{4}\sqrt[6]{2}(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}})$, $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt[6]{2}(-1 + i)$, $z_2 = \frac{1}{4}\sqrt[6]{2}(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - i\sqrt{2 - \sqrt{3}})$. $8^\circ (1 + i) : (1 - i) = i$; $z_0 = i$, $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$, $z_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$. **1 823.** $1^\circ x_1 = -1$, $x_2 = 1 + i$. $2^\circ x_1 = i$, $x_2 = -1 - i$. $3^\circ x_1 = -3 + i$, $x_2 = -2 + i$. $4^\circ x_1 = 2 - 3i$, $x_2 = 3 + 5i$. $5^\circ x_1 = \frac{1}{2}(5 - i)$, $x_2 = i$. 6° și $7^\circ x^2 + x + 1 = \pm ix^2$, $x^2 + 1 = \pm i(x - 1)^2$ etc. **1 824.** $z_1 = 0 + 0i$, $z_2 = -1 + 0i$, $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **1 825.** $\pm (\beta - \alpha i)$. **1 826.** $P_1(-2, -5)$, $P_2(-1, -2)$ etc. $3x - y + 1 = 0$. **1 827.** $x^2 = 4y$. **1 828.** $|z_1| = 2$; $\arg z_1 = 60^\circ$ sau $\frac{\pi}{3}^*$; $\arg z_2 = 300^\circ$ sau $\frac{5\pi}{3}$; $\arg \frac{z_1}{z_2} = 120^\circ$ sau $\frac{2\pi}{3}$; $\left(\arg \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} \right)_0 = 40^\circ$, $\left(\arg \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} \right)_1 = 160^\circ$, $\left(\arg \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} \right)_2 = 280^\circ$; $\left(\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \right)$. **1 829.** $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$; $\arg z_1 = \arctg \frac{b}{a}$ etc.

* Dăm numai determinarea principală a argumentului.

1830. $|z_1| = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4}$, $|z_2| = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$, $|z_3| = \frac{13}{6}$, $|z_4| = 1$,
 $|z_5| = \frac{13}{10}$, $|z_6| = \sqrt{\frac{n}{a}}$ **1 831.** $z_1 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$; $z_2 = -i =$
 $= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$; $z_3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$; $z_4 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$;
 $z_5 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$; $z_6 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$; $z_7 = \sqrt{13} (\cos 56^\circ 19' 25''$
 $+ i \sin 56^\circ 19' 25'')$; $z_8 = 2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$; $z_9 = z_{10} = \cos \pi +$
 $+ i \sin \pi = -1$. **1 832.** $z_1 = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$; $z_2 =$
 $= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$; $z_3 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\pi - \alpha}{2} + i \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \right)$;
 $z_4 = \frac{1}{\cos \alpha} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$; $z_5 = \cos (2\pi - 2\alpha) + i \sin (2\pi - 2\alpha)$.

1 833. $z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 1} + i \sqrt{\sqrt{2} - 1}$; $z_3 = (\sqrt{2} - \sqrt{6}) +$
 $+ i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$; $z_4 = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. **1 834.** $z_1 = -2^{15}(1 +$
 $+ i\sqrt{3})$; $z_2 = -\frac{1}{16}$; $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + 2\alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + 2\alpha \right) \right]$; $z_4 =$
 $= 16\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$; $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, $-\frac{1}{2} -$
 $- i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$, $1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$, $(1 + i)^7 =$
 $= 8\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$, $\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{13} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$, $(1 -$
 $- i)^{10} = 32 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$, $z_5 = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{8} (1 + i\sqrt{3})$;
 $z_6 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i)$; $z_{7(0)} = i$, $z_{7(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $z_{7(2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$; $z_8 =$
 $= \sqrt[4]{2} \cos \left(\frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} \right)$, $k = 0, 1, 2, 3$, $z_{8(0)} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (\sqrt{2 + \sqrt{3}} +$
 $+ i\sqrt{2 - \sqrt{3}})$, $z_{8(1)} = iz_{8(0)}$, $z_{8(2)} = -z_{8(0)}$, $z_{8(3)} = -iz_{8(0)}$; $z_9 = \sqrt[4]{i}$ cu
rădăcinile $\pm \frac{1}{2} (\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i \sqrt{2 - \sqrt{2}})$, $\pm \frac{1}{2} (-\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i \sqrt{2 + \sqrt{2}})$;
 $z_{10(0)} = \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{\pi}{20} + i \sin \frac{\pi}{20} \right)$, $z_{10(1)} = \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{20} + i \sin \frac{9\pi}{20} \right)$, $z_{10(2)} =$
 $= \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{20} + i \sin \frac{17\pi}{20} \right)$, $z_{10(3)} = \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$, $z_{10(4)} =$

$$= \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{33\pi}{20} + i \sin \frac{33\pi}{20} \right); z_{11} = \sqrt[10]{34} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{5} \right) \text{ unde}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{5} \text{ și } k = 0, 1, 2, 3, 4, z_{11(0)} = 1,4145 + 0,15348i, z_{11(1)} = 0,29114 +$$

$$+ 1,3927i, z_{11(2)} = -1,2346 + 0,70727i, z_{11(3)} = -1,0542 - 0,9556i,$$

$$z_{11(4)} = 0,58309 - 1,2979i; z_{12} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \cdot \left(\cos \frac{24k + 17}{72} \pi + i \sin \frac{24k + 17}{72} \pi \right),$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

1 835. $E = 2^{\frac{n+2}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$. Dacă $n = 4p$ (mult de 4), $E = (-1)^{\frac{n}{4}} 2^{\frac{n+2}{2}}$; $n =$

$$= 4p \pm 1, E = (-1)^{\frac{n+1}{4}} 2^{\frac{n+1}{2}}; n = 4p + 2, E = 0.$$

1 836. 1° Soluția 1-a, $x^3 + i = x^3 - i^3 = (x - i)(x + ix + i^2) = 0, x_1 = i, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$

$$x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Soluția a 2-a, $x = \sqrt[3]{-1}$, v. ex. 1834, z_7 ; Soluția a 3-a, $\sqrt[3]{-i} = \alpha + \beta$ etc.

2° Soluția 1-a, $x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = 0,$

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), x_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i).$$

Soluția 2-a, $x = \sqrt[4]{-1} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4},$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$

3° $x = \sqrt[10]{13} (\cos 11^\circ 15' 29'' + i \sin 11^\circ 15' 29'') (\cos 72^\circ \cdot k + i \sin 72^\circ \cdot k),$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

4° $x = \alpha + \beta i, |x| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}; \sqrt{x^2 + y^2} - (\alpha + \beta i) = 1 + 2i, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha = 1, \beta = -2; x = \frac{3}{2} - 2i;$

5° $x = \frac{3}{4}i; 6^\circ \pm i, \pm(1 + 2i), 7^\circ x_i = \pm \sqrt{-1 \pm i\sqrt{3}}, i = 1, 2, \dots, 8;$

$$x_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (\sqrt{3} + 1), x_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (1 + i\sqrt{3}), x_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (-1 + \sqrt{3}).$$

$$x_4 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \dots, x_7 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \dots$$

$$x_8 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \dots$$

1 837. $z_1 + z_2 + z_3 = -4 - 16i, |z_1 + z_2 + z_3| = 4\sqrt{17}, |z_1| = 5,$

$$|z_2| = 13, |z_3| = 10; 4\sqrt{17} < 28.$$

1 838. 1° $\cos \alpha - i \sin \alpha = \cos (-\alpha) + i \sin (-\alpha), \sin \alpha - i \cos \alpha =$

$$= -i(\cos \alpha + i \sin \alpha). E = [\cos (-\alpha) + i \sin (-\alpha)] : (\cos \alpha + i \sin \alpha) =$$

$$= \cos (-2\alpha) + i \sin (-2\alpha) = \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha; -i(\sin 2\alpha + i \sin 2\alpha) =$$

$= \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha = E$; $1 + i \operatorname{tg} \alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha) : \cos \alpha$, $1 - i \operatorname{tg} \alpha = (\cos \alpha - i \sin \alpha) : \cos \alpha = [\cos (-\alpha) + i \sin (-\alpha)] : \cos \alpha$ și aplicăm formula lui Moivre.

1 839. $z_1 + z_2 + z_3 = r (2 \cos \beta + 1) [\cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta)] = 0$, dar $\cos (\alpha + \beta)$ și $\sin (\alpha + \beta)$ nu pot fi nule în același timp; rezultă că $2 \cos \beta + 1 = 0$; luăm $\beta = 120^\circ$ caz în care punctele de afixe z_1, z_2, z_3 formează un triunghi echilateral. **1 840.** $z_1 z_2 z_3 = r_1 r_2 r_3$. **1 841.** Produsul ordonat după puterile lui x este $x^n + s_1 i x^{n-1} + s_2 i^2 x^{n-2} + s_3 i^3 x^{n-3} + s_4 i^4 x^{n-4} + \dots = (x^n - s_2 x^{n-2} + s_4 x^{n-4} - \dots) + i(s_1 x^{n-1} - s_3 x^{n-3} + \dots)$, s-a notat cu $s_1, s_2, \dots, s_n$ suma produselor câte una, câte două, ..., câte n a cantităților reale α_i , Produsul este real dacă $s_1 x^{n-1} - s_3 x^{n-3} + s_5 x^{n-5} - \dots = 0$, este de forma ai dacă $x^n - s_2 x^{n-2} + s_4 x^{n-4} - \dots = 0$.

1 842. 1° Punem $x = \operatorname{tg} \alpha$; v. ex. 1838; $2^\circ \operatorname{tg} 4\alpha = a$. **1 843.** Punem $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, după ex. 1838, 1 și 2° , $\cos m\alpha + i \sin m\alpha = a + bi$, de unde $\cos m\alpha = a$,

$\sin m\alpha = b$. Trebuie ca $|a|, |b| \leq 1$. **1 844.** Înmulțind, avem $\cos (1 + 2 +$

$+ \dots + n) x + i \sin (1 + 2 + \dots + n) x = 1$, $\cos \frac{1}{2} n (n + 1) x + i \sin \frac{1}{2} n (n +$

$+ 1) x = 1$, $\cos \frac{1}{2} n (n + 1) x = 1$, $\sin \frac{1}{2} n (n + 1) x = 0$. De aici $\frac{1}{2} n (n +$

$+ 1) x = 2k\pi$. **1 845.** $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$; după enunț, $(a + c)^2 + (b + d)^2 + (a - c)^2 + (b - d)^2 = 2[(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2)]$; interpretarea geometrică este: suma pătratelor diagonalelor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor laturilor sale.

1 846. Punem $z_1 = r(\cos a_1 + i \sin a_1)$, $z_2 = r(\cos a_2 + i \sin a_2)$, ..., $z_n = r(\cos a_n + i \sin a_n)$ și facem calculabile prin logaritmi sumele.

$E = 2^n \cos \frac{a_1 - a_2}{2} \cos \frac{a_2 - a_3}{2} \dots \cos \frac{a_n - a_{n+1}}{2}$ care

este un număr real (G.M. XLV pag. 383). **1 847.** $E = [\cos (-\alpha) + i \sin (-\alpha)] (\cos 5\alpha + i \sin 5\alpha) = \cos 4\alpha + i \sin 4\alpha$, $\sin 4\alpha = 0$, $4\alpha = k\pi$.

1 848. Înlocuim $z = \alpha + \beta i$, $(2\alpha\beta + \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta + 1) + i(2\alpha\beta - \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1)$; expresia este reală dacă $2\alpha\beta - \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 = 0$

adică $\alpha = \beta - 1 \pm \sqrt{2(\beta^2 + \beta + 1)}$ cu β arbitrar, semnul este dat de expresia $2\alpha\beta + \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta + 1$ (G.M. VIII). **1 849.** Se scoate $x = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$,

$\frac{1}{x} = \cos \alpha \mp i \sin \alpha$ și se aplică formula lui Moivre. **1 850.** Fie $a = \cos \alpha +$

$+ i \sin \alpha$; $(1 + ix) : (1 - ix) = \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{m}$ din care $x =$

$= \operatorname{tg} \frac{\alpha + 2k\pi}{2m}$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$. **1 851.** Ecuația se poate scrie sub

forma $\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]^n = \mp 1$. Scriind 1 și -1 sub forma trigonometrică, se deduc ecuațiile $\frac{P(x)}{Q(x)} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ ecuații care urmează a fi rezolvate cum se va vedea din aplicațiile următoare. 1° Deducem $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$, $\frac{x+1}{x-1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = \varepsilon_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, din care $x = (\varepsilon_k + 1) : (\varepsilon_k - 1)$ expresie care transformată dă $x_k = i \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, rădăcinile sînt imaginare. 2° $x_k = \operatorname{ctg} \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, rădăcinile sînt reale. 3° Cum $x = i$ nu este rădăcină, punem $(x+i) : (x-i) = y$; $x = i(y+1) : (y-1)$ și ecuația devine $y^n - 1 = 0$ cu rădăcinile $y = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}$, deci $x = \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{m}$, $m = 0, 1, \dots, m-1$. 4° $\left(\frac{x+a}{\sqrt[4]{2x}}\right)^n = 1$, $x_k = \frac{a}{\varepsilon_k \sqrt[4]{2} - 1}$, unde $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 5° $x_k = 1 : \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$; rădăcinile sînt reale. 6° Se deduce $[(n+ix) : (n-ix)]^n = -1 = \cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)$ din care $x = n \operatorname{tg} \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Cînd $n = 2p+1$, rădăcina pentru $k = p$ este infinită. 7° $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha + k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. 8° $x_k = -\frac{1}{m^2} \left[\operatorname{tg} \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right]^2$, $k = 0, 1, \dots, n-1$; ecuația are toate rădăcinile reale și negative. 9° $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$; rădăcinile sînt simple, cuprinse în intervalul $(-1, 1)$. **1 852.** Se scrie $[(1+xi) : (1-xi)]^n = [(1+ai) : (1-ai)]^m$ și punem $(1+ai) : (1-ai) = \cos \alpha + i \sin \alpha$; $x = \operatorname{tg} \left(\frac{k\pi}{n} + \frac{m\alpha}{2n} \right)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. **1 853.** $E = \cos \frac{(p+q)\pi}{4} + i \sin \frac{(p+q)\pi}{4}$. Se vede că E poate lua opt valori distincte care se obțin făcînd $p+q = 0, 1, 2, \dots, 7$, căci luînd $p+q = 8m+r$ cu $r < 8$, cădem peste una din cele găsite în ipoteza făcută și anume $\cos \frac{r\pi}{4} + i \sin \frac{r\pi}{4}$.

1 854. Notăm cu A și B respectiv cele două sume, avem $A + iB = (\cos x + i \sin x)[1 + (\cos h + i \sin h) + \dots + (\cos h + i \sin h)^{n-1}]$, expresia din

paranteza mare este o sumă cu termenii în progresie geometrică cu rația $\cos h + i \sin h$.

Avem succesiv $A + iB = (\cos x + i \sin x) \frac{(\cos h + i \sin h)^n - 1}{\cos h + i \sin h - 1} = (\cos x +$

$$+ i \sin x) \frac{\cos nh + i \sin nh - 1}{\cos h + i \sin h - 1} =$$

$$= (\cos x + i \sin x) \frac{2i \sin \frac{nh}{2} \left(\cos \frac{nh}{2} + i \sin \frac{nh}{2} \right)}{2i \sin \frac{h}{2} \left(\cos \frac{h}{2} + i \sin \frac{h}{2} \right)} =$$

$$= (\cos x + i \sin x) \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \left(\cos \frac{n-1}{2} h + i \sin \frac{n-1}{2} h \right) =$$

$$= \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \cos \left(x + \frac{n-1}{2} h \right) + i \sin \left(x + \frac{n-1}{2} h \right). \text{ Din egalarea părților reale}$$

și a celor imaginare, rezultă identitățile date. **1 855.** Înlocuim $\cos^2 ix = \frac{1}{2} (1 + \cos 2ix)$, $\sin^2 ix = \frac{1}{2} (1 - \cos 2ix)$ și avem în vedere ex. 1 854 în care facem $h = x$. **1 856.** Luăm $s_1 + is_2$ după formula lui Moivre, $s_1 + is_2 = 1 + r(\cos a + i \sin a) + \dots + r^n(\cos a + i \sin a)^n = \frac{r^{n+1}(\cos a + i \sin a)^{n+1} - 1}{r(\cos a + i \sin a) - 1}$, amplificăm această fracție cu $r(\cos a - i \sin a) - 1$ și atunci

$$s_1 + is_2 = \frac{r^{n+2} \cos na - r^{n+1} \cos (n+1)a - r \cos a + 1 + i}{r^2 - 2r \cos a + 1} +$$

$$+ \frac{[r^{n+2} \sin na - r^{n+1} \sin (n+1)a + r \sin a]}{r^2 - 2r \cos a + 1}$$

$$\text{rezultă că } s_1 = \frac{r^{n+2} \cos na - r^{n+1} \cos(n+1)a - r \cos a + 1}{r^2 - 2r \cos a + 1},$$

$$s_2 = \frac{r^{n+2} \sin na - r^{n+1} \sin(n+1)a + r \sin a}{r^2 - 2r \cos a + 1},$$

$$s_3 = \frac{r^{n+2} \sin(a + nh) - r^{n+1} [\sin a + (n+1)h] - r \sin(a + h) + \sin a}{r^2 - 2r \cos a + 1}$$

1 857. $s_1 + is_2 = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right)$; $s_1 = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2}$,
 $s_2 = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2}$. **1 858.** $x'' = u$, $u = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha$, $x_k =$
 $= \cos \left(a + \frac{2k\pi}{n} \right) \pm i \sin \left(a + \frac{2k\pi}{n} \right)$ unde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $x^{2n} -$
 $2x^n \cos n\alpha + 1 = (x^2 - 2x \cos \alpha + 1) \left[x^2 - 2x \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) + 1 \right] \dots \left[x^2 - \right.$
 $\left. - 2x \cos \left(\alpha + \frac{2n-1}{n} \pi \right) + 1 \right]$.

1 859. $\sqrt{i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i)$, punctele $P_1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ $P_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
sînt situate pe cercul de rază 1 și simetrice față de origine. **1 860.** Punem
 $z = x + yi$; $1^\circ x^2 + y^2 < 4$, punctele interioare cercului cu centrul în
origine și de rază 2. $2^\circ 1 < x^2 + y^2 < 2$, coroana circulară dintre cer-
curile concentrice de raze 1 și 2, centrul lor fiind în origine.

$3^\circ \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \leq 2$, interiorul cercului cu centrul în $(0,3)$ și de rază
2, cercul face parte. $4^\circ \sqrt{(x-2)^2 + y^2} < 4$ interiorul cercului cu centrul
în $(2, 0)$ și de rază 4. 5° Semidreapta ce pleacă din originea axelor de
coordonate și face cu Ox un unghi de $\frac{\pi}{3}$ radiani. 6° Domeniul unghiular

cu virful în origine, avînd ca laturi semidreapta ce face un unghi de $\frac{\pi}{3}$
radiani cu axa Ox și semiaxa pozitivă, Oy . 7° Sectorul circular de rază 1
și de raze drepte ce fac cu Ox unghiurile de $\frac{\pi}{6}$, respectiv $\frac{\pi}{3}$ radiani.

1 861. Se scrie $at + b + (a_1t + b_1)i$, punem $x = at + b$, $y = a_1t + b_1$
și eliminînd pe t , avem $\frac{x-b}{a} = \frac{y-b_1}{a_1}$, o dreaptă ce trece prin punctul

(b, b_1) și de coeficient unghiular $\frac{a_1}{a}$. **1 862.** $1^\circ x = 1 + t_1$, $y = 2t - 1$ și
eliminînd pe t , găsim dreapta de ecuație $2x - y - 3 = 0$; $2^\circ 3x - y - 4 =$
 $= 0$; $3^\circ x^2 + y^2 = 1$, cerc cu centrul în origine și de rază 1. Pentru nume-
rele imaginar conjugate se obțin drepte simetrice față de axa Ox , $2x + y - 3$
și $3x + y - 4$; cercul se reproduce.

1 863. Egalăm cu $x + yi$ și deducem $x = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$, $y = \frac{2k}{k^2 + 1}$, $x^2 + y^2 = 1$,
un cerc cu centrul în origine și de rază 1. **1 864.** $z = x + yi$, punctele sînt
 $M_1(0, 1)$, $M_2(x, y)$, $M_3(-y, x)$. Condiția de colinearitate conduce la
 $x^2 + y^2 - x - y = 0$, locul este deci un cerc cu centrul în $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ și de

rază 1 : $\sqrt{2}$. **1 865.** Se înlocuiește $z = x + yi$ și $\bar{z} = x - yi$, găsim $(x - a)^2 + y^2 - a^2 = 0$, cerc cu centrul în $(a, 0)$ și de rază a . **1 866.** Avem $x_1 + x_2 = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) + \rho(\cos \beta + i \sin \beta) = \rho e^{i\alpha} + \rho e^{i\beta} = \rho(e^{i\alpha} + e^{i\beta}) = -p$, $x_1 x_2 = \rho^2 e^{i(\alpha+\beta)} = q$. Scriem $\frac{p^2}{q} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2}$, $q \neq 0$, deci $\frac{p^2}{4q} = \cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2}$; condiția necesară $0 < \frac{p^2}{4q} < 1$. Condiția este și suficientă, căci punând $p^2 = 4q \cos^2 \omega$ în care $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, deducem $p = 2\sqrt{q} \cos \omega$ și ecuația dată devine $(x + \sqrt{q} \cos \omega)^2 = -q \sin^2 \omega$ cu rădăcinile $-\sqrt{q} e^{\pm i\omega}$ de modul $\sqrt{|q|}$. 1° Condiția satisfăcută; $q > 0$, $p^2 - 4q < 0$, rădăcinile imaginar conjugate; $2^\circ \omega = \frac{\pi}{4}$, $p = -2i\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}$ și rădăcinile $i \pm 1$. **1 867.** $1^\circ |x^2 - y^2 + 1 + 2xyi| = 1$, $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, curbă numită lemniscata lui Bernoulli (figura de la soluția ex. 1373). $2^\circ x^2 + y^2 - 2\frac{1+a^2}{1-a^2}y + 1 = 0$, un cerc. **1 868.** $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{x}{x^2+y^2} = a$, $x^2 + y^2 - \frac{1}{a} = 0$, cerc tangent în O axei Oy . **1 869.** Domeniul interior elipsei de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **1 870.** $1^\circ x^2 + y^2 + 6x = 7$, $(x+3)^2 + y^2 = 16$, cerc cu centrul în $(-3, 0)$ și de rază $r = 4$. **1 871.** $(z-1)(\bar{z}-2) = (x-1) + iy(x-2) + i\bar{y} = x^2 - y^2 - 3x + 2 + i(2x-3)y$, locul este hiperbola echilaterală $x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0$. **1 872.** $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\frac{2xy}{x^2 + y^2} = u + i\nu$, $u^2 + \nu^2 = 1$, un cerc cu centrul în origine și de rază 1. **1 873.** $z = x + yi$, $x^2 - y^2 = t + 1$, $2xy = -t$, se elimină t , $x^2 - y^2 + 2xy - 1 = 0$, hiperbolă echilaterală.

1 874. Punem $z = x + yi$ și $\bar{z} = x - yi$; din identificare rezultă $y = 0$ și hiperbola $a(3x^2 - y^2) + 2bx + c = 0$. **1 875.** Multiplicăm fracția care reprezintă pe z cu expresia conjugată numitorului și obținem

$$x = \frac{(\alpha + \beta\lambda)(\gamma + \delta\lambda) + (\alpha' + \beta'\lambda)(\gamma' + \delta'\lambda)}{(\gamma + \delta\lambda)^2 + (\gamma' + \delta'\lambda)^2}$$

$$y = \frac{(\alpha' + \beta'\lambda)(\gamma + \delta\lambda) - (\alpha + \beta\lambda)(\gamma' + \delta'\lambda)}{(\gamma + \delta\lambda)^2 + (\gamma' + \delta'\lambda)^2}.$$

Pentru a găsi ecuația locului trebuie să eliminăm pe λ între aceste două ecuații. Pentru aceasta multiplicăm pe x cu $\gamma' + \delta'\lambda$ și pe y cu $\gamma + \delta\lambda$ și adunând cele obținute, avem $x(\gamma' + \delta'\lambda) + y(\gamma + \delta\lambda) = \alpha' + \beta'\lambda$. La fel găsim $x(\gamma + \delta\lambda) - y(\gamma' + \delta'\lambda) = \alpha + \beta\lambda$. Eliminând λ între aceste două relații, găsim

$(x^2 + y^2)(\delta\gamma' - \gamma\delta') + P = 0$ unde P este, un polinom de gradul întâi în x și y , prin urmare ultima ecuație reprezintă un cerc. Cercul se reduce la o dreaptă $P = 0$, când $\delta\gamma' - \gamma\delta' = 0$. **1 876.** $x^2 = -(a\alpha + b\beta) \pm i(a\beta - b\alpha)$; înlocuind aici $x = u + \nu i$, cum $a, b, \alpha, \beta, u, \nu$, sînt reale, celelalte rădăcini vor fi $u - \nu i$, $-u + \nu i$ și $-u - \nu i$ care reprezintă vîrfurile unui dreptunghi. 2° $x_1 = \frac{1}{4} [\sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})]$, $x_2 = \frac{1}{4} [\sqrt{6} - \sqrt{2} - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})]$, $x_3 = \frac{1}{4} [-\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})]$, $x_4 = \frac{1}{4} [-\sqrt{6} + \sqrt{2} - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})]$. 3° Avem pătrat dacă $u = \nu$, deci expresia lui x^2 nu conține partea reală, rezultă $a\alpha + b\beta = 0$. Punctul M se află pe una din bisectoarele sistemului de axe rectangulare, iar M' pe cealaltă bisectoare.

1 877. Rezolvăm în raport cu z , obținem $z_k z - z_1 c = az + b$, $z = \frac{z_1 c + b}{z_1 - a}$,

avem $1 = \frac{|z_1 c + b|}{|z_1 - a|}$ cu $z_1 = u + i\nu$, $a = a_1 + ia_2$, $c = c_1 + ic_2$, $b = b_1 + ib_2$ din care $(u - a_1)^2 + (\nu - a_2)^2 = (uc_1 - \nu c_2 + b_1)^2 + (uc_2 + \nu c_1 + b_2)^2$, ecuație ce reprezintă un cerc cu centrul în (a_1, a_2) iar pătratul razei este egal cu membrul al doilea. Dacă $c = 1$, atunci ecuația reprezintă o dreaptă.

1 878. Avem identitatea

$$(z - z_1)(z_2 - z_3) + (z - z_2)(z_3 - z_1) + (z - z_3)(z_1 - z_2) = 0.$$

Dacă z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor A, B, C , atunci

$$(1) \quad |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$$

triunghiul ABC fiind echilateral. Avem prin urmare

$$|z - z_1| \cdot |z_2 - z_3| \leq |z - z_2| \cdot |z_3 - z_1| + |z - z_3| \cdot |z_1 - z_2|$$

și ținînd seama de (1), obținem $|z - z_1| \leq |z - z_2| + |z - z_3|$ sau $MA < MB + MC$ adică o latură în triunghi este mai mică decît suma celorlalte două. **1 879.** Fie, A, B, C punctele de afixe Z_1, Z_2, Z_3 și A', B', C' de afixe z_1, z_2, z_3 . Avem $|Z_2 - Z_1| = AB$, $|Z_3 - Z_1| = AC$, $|z_2 - z_1| = A'B'$, $|z_3 - z_1| = A'C'$, $\arg \frac{Z_2 - Z_1}{Z_3 - Z_1} = \sphericalangle BAC$, $\arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \sphericalangle B'A'C'$. Rezultă $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$, $BAC = B'A'C'$, condiție necesară și sufi-

cientă de asemănare. **1 880.** $1 + \sqrt[7]{2}e^{\frac{7\pi i}{12}}$. **1 881.** $Z_4 = Z_1 - Z_2 - Z_3$. **1 882.** Dacă $\operatorname{tg} a = \pm i$ atunci $\operatorname{tg}(a + b) = \pm i$, oricare ar fi valoarea reală sau imaginară a lui b .

ANALIZA COMBINATORIE

1 883. $A_5^3 = 60$. **1 884.** A_6^3 numere încep cu cifra 0, rămân $A_7^4 - A_6^3 = 720$. **1 885.:** Să presupunem că cercurile pline reprezintă pozițiile bărbaților. La o așezare a bărbaților, femeile se pot așeza în $P_3 = 3! = 6$ moduri. Dar cum bărbații se pot așeza în 6 moduri pe locurile indicate, rezultă deci $6 \cdot 6 = 36$ așezări împreună cu femeile. Analog 36 așezări schimbând locurile bărbaților cu cele ale femeilor; în total 72 posibilități. **1 886.** $C_5^3 = 10$; $c_n^3 - c_m^3$. **1 887.** Sînt n vîrfuri care se pot uni două cîte două în C_n^2 moduri, dar din acestea n segmente sînt laturile poligonului, deci $C_n^2 - n$ diagonale. Puncte de intersecție sînt atîtea cîte patrulatere se pot forma, deci C_n^4 (v. ex. 1 883). **1 888.** $\frac{1}{2} C_{n-1}^2$. **1 889.** $1^\circ C_{n-p}^{k-p}$; $2^\circ C_{n-q}^{k-s}$; $3^\circ C_{n-p}^{k-1}$; $4^\circ C_{n-2}^{k-1}$; $5^\circ C_n^k - C_{n-p}^k$. **1 890.** C_{n-q-p}^{k-r} (cazuri particulare $1^\circ - 4^\circ$ din ex. precedent). **1 891.** $1^\circ A_{n-1}^{k-1}$; $2^\circ k A_{n-1}^{k-1}$; $3^\circ 2! A_{n-2}^{k-2}$; $4^\circ k(k-1) A_{n-2}^{k-2}$ $5^\circ p! A_{n-p}^{k-p}$. **1 892.** C_n^4 , (vezi ex. 1887). **1 893.** n drepte se taie în C_n^2 puncte; p fiind concurente, se pierde $C_p^2 - 1$ puncte, iar q fiind paralele se pierde C_q^2 puncte; rămîn $N = C_n^2 - C_p^2 - C_q^2 + 1$ puncte. **1 894.** $n^2 + (3 - 2p)n + p^2 - 3p + 2 - m = 0$. Discriminantul trebuie să fie nul sau un pătrat perfect. Prima ipoteză cade căci m trebuie să fie un întreg; cum $4m + 1$ este un număr impar, rezultă că $4m + 1 = (2k + 1)^2$, deci $m = k(k + 1)$, unde k este un număr natural oarecare. Cu acestea deducem că $n_1 = p + k - 1$, $n_2 = p - k - 2$; soluție acceptabilă este numai n_1 . **1 902.** $1^\circ 5! = 120$ numere; 2° Se observă că $4! = 24$ numere încep cu 3, tot atîtea încep cu cifrele 4, 9, 6 și 5. Avînd în vedere că $34\,965 = 5 + 10 \cdot 6 + 10^2 \cdot 9 + 10^3 \cdot 4 + 10^4 \cdot 3$, rezultă că suma cerută este $24(5 + 6 + 9 + 4 + 3)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 7\,199\,928$. 3° Cel mai mic număr este 34 569 și este al 6-lea în șirul crescător. **1 903.** Dacă cifrele nu se repetă, A_5^3 ; dacă cifrele se repetă, $5^3 = 125$ (aranjamente cu repetiție). **1 904.** Avem $5 + 3 + 4 = 12$, prin urmare permutări cu repetiție

de 12 obiecte $= \frac{12!}{3! 4! 5!} = 27\,720$ ⁽¹⁾. **1 905.** Cele m litere dintr-un termen oarecare figurează de atâtea ori cît arată exponentul. Suma exponenților este i , vom avea deci atîția termeni cîte combinații cu repetiție se pot forma cu cele m litere luate cîte n , adică $K_m^n = C_{m+n-1}^n$. **1 906.** Introducem o variabilă auxiliară pentru a-l face omogen. După ex. 1 905 rezultă că polinomul considerat $K_{m+1}^n = C_{m+n}^n$ termeni. Altfel, polinomul conține K_m^n termeni de gradul n , K_m^{n-1} termeni de gradul $n-1$ etc., numărul total va fi $K_m^n + K_m^{n-1} + \dots + K_m^{n-p} + \dots + K_m^0 = K_{m+1}^n$. **1 907.** 1° Avem $K_m^p = C_{m+p-1}^p K_{p+1}^{m-1} = C_{m+p-1}^{m-1}$, la C_{m+p-1}^p aplicăm proprietatea $C_\alpha^\beta = C_\alpha^{\alpha-\beta}$. 2° $K_i^{p-1} = C_{i+p-2}^{p-1}$ și găsim egalitatea cunoscută $C_{p-1}^{p-1} + C_p^{p-1} + C_{p+1}^{p-1} + \dots + C_{m+p-2}^{p-1} = C_{m+p-1}^p$. **1 908.** Problema se referă la aranjări cu repetiție cînd numărul tuturor aranjărilor cu repetiție de n elemente luate cîte k este n^k . Deducem $(p+1)^n - 1$ moduri de alegere a cărților. **1 909.** Exemplu de permutări cu repetiție, $\frac{(p+q+r)!}{p! q! r!}$ moduri de împărțire. **1 910.** $K_p^n = C_{p+n-1}^p$ combinații posibile. **1 911.** Scriem $2^n \cdot n! = (2 \cdot 2 \dots 2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n$; dar $(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1) \dots (2n)$ rezultă că $P = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$; $Q = C_{2n-1}^n C_{3n-1}^{n-1}$, R produs de combinații. **1 912.** $C_x^4 = C_x^2$, $C_x^{x-4} = C_x^2$; $x = 6$. **1 913.** $\frac{x(x-1)(x-2)}{6} = x(x-1)$; $x = 8$. **1 914.** $x \geq y$, apoi $x \leq 3$; $x = y = 3$. **1 915.** $n \geq 4$, $A_n^6 = (n-5)(n-4) A_n^4$, $A_n^4 \neq 0$, acceptabil $n = 7$.

1 916. $C_n^p = C_n^{n-p}$; $x = 10$. **1 917.** $x(x+1) - (x+1) = (x-1)^3$; $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$, acceptabil $x = 3$. **1 918.** $x = \frac{2}{35}$. **1 919.** $x! = (x+1)^2 - x = x(x+2)$; $x_1 = 0$, $(x-1)! = x+2$, $(x-1)! - (x-1) = 3$, $x-1 = 3$; $x = 4$. **1 920.** Avem $C_n^p = \frac{n-p+1}{p} C_n^{p-1}$, $C_n^{p+2} = \frac{n-p-2+1}{p+2} C_n^{p+1} = \frac{n-p-1}{p+2} C_n^{p+1} = \frac{n-p-1}{p+2} \frac{n-p}{p+1} C_n^p$; $C_n^p \neq 0$, rămîne $3 + 2 \frac{n-p}{p+1} = \frac{n-p-1}{p+2} \frac{n-p}{p+1}$, $n_1 = -1$, $n_2 = 4p+6$; soluție acceptabilă $n = 4p+6$. **1 921.** $2a + b^2 = 5$, $a^2 + 2ab + 2b = 10$, din care $a = -10$, $b = 5$; $a = 2$, $b = 1$, $a = -2$; $b = -3$. **1 922.** $[(x+a)-a]^5 = x^5$. **1 923.** 112. **1 924.** $C_{12}^8 (x^2)^{12-8} \left(\frac{2}{x}\right)^8 = C_{12}^4 \cdot 2^8 = 49\,528$. **1 925.** Fie un termen oarecare

¹ Vezi Novoselov : Cours special de algèbre élémentaire, capitolul VIII sau V. Myller-Lebedev : Leçons de algèbre, capitolul I. Th. Angheluță : Cours de algèbre supérieure, volumul I, p. 42, N. Ciorănescu : Cours de algèbre și analiză matematică, pagina 18.

$C_{2m}^r(x^2)^{2m-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_{2m}^r x^{4m-3r}$; condiționăm ca $4m - 3r = m$; $m = r$; coeficientul este $C_{2m}^m = \frac{(2m)!}{(m!)^2}$.

1 926. Fie a_p acel termen; $a_p = (-1)^p C_{10}^p (3x)^{10-p} \left(\frac{2}{x}\right)^p = (-1)^p \cdot 3^{10-p} \cdot 2^p \cdot C_{10}^p \cdot x^{10-p}$, rezultă $10 - 2p = 0$, $p = 5$; $a_5 = -6^5 C_{10}^5$. **1 927.** $T_{p+1} = (-1)^p C_m^p x^{m-p} a^p$, $T_{p+1} = (-1)^p C_{112}^p \left(\frac{a}{x^2 y^3 z^4}\right)^{112-p} \cdot (bxyz^5)^p$ gradul este zero dacă $p + p + 5p = 224 - 2p + 336 - 3p + 448 - 4p$ din care $p = 63$, $T_{64} = -C_{112}^{63} a^{49} b^{63}$. **1 928.** Trebuie ca $C_m^8 3^{m-8} m^8 < C_m^9 3^{m-9} m^9 > C_m^{10} 3^{m-10} m^{10}$, de aici $m^2 - 8m - 27 > 0$, deci $m < m_1 = 4 - \sqrt{43}$, $m > m_2 = 4 + \sqrt{43}$, apoi $m^2 - 9m - 30 < 0$, $m_3 = \frac{1}{2}(9 - \sqrt{201}) < m < m_4 = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{201})$, cum $m_3 < m_1 < m_2 < m_4$ rămîne că m trebuie să fie cuprins între $4 + \sqrt{43}$ și $\frac{1}{2}(9 + \sqrt{201})$ și fiind număr natural, rezultă $m = 11$. **1 929.** $C_{3n}^p(x_4)^{3n-p}(x^{-5})^p = C_{3n}^p x^{12n-9p}$, $12n - 9p = k$, $p = \frac{1}{9}(12n - k)$; numărul k nu poate fi oarecare, trebuie ca $12n - k$ să fie divizibil cu 9.

1 930. $C_n^1 x^{n-1} y = 240$, $C_n^2 x^{n-2} y^2 = 720$, $C_n^3 x^{n-3} y^3 = 1080$; se înlocuiesc expresiile combinațiilor și apoi produsul dintre ecuația 1 cu a 3-a se împarte cu patratul ecuației a 2-a; găsim $n = 5$ și rămîne sistemul $x^4 y = 48$, $x^3 y^2 = 72$, $x^2 y^3 = 108$. Rădăcini întregi $x = 2$, $y = 3$. **1 931.** Se scrie $2[(x + 3) - 3]^4 - 7[(x + 3) - 3]^3 + [(x + 3) - 3] - 1 = 2(x + 3)^4 - 31(x + 3)^3 + 171(x + 3)^2 - 405(x + 3) + 27$. **1 932.** Soluția 1 $(a + b + c)^m = \sum \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma!} a^\alpha b^\beta c^\gamma$ unde $\alpha + \beta + \gamma = m$; aici $m = 6$, $a = 1$,

$b = -x$, $c = 2x^2$. Pentru ca să avem $\beta + 2\gamma = 6$ putem lua 1° $\alpha = 0$, $\beta = 4$, $\gamma = 1$, deci 10. 2° $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 3$, deci 80; 3° $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, deci 120, coeficientul lui x^6 este $10 + 120 + 80 = 210$. Soluția a 2-a. Scriem $[(1 - x) + 2x^2]^5$ și luăm în dezvoltare numai termeni care pot da pe x^6 . **1 933—34** v. ex. 1 932; 8 085, respectiv 25 452. **1 935.** 1 124.

1 936. —120 (v. ex. 1928). **1 937.** Progresie geometrică cu rația $\frac{x}{1+x}$, $E_1 = (1 + x)^{1001} - x^{1001} = 1 + 10\,001\,x + C_{1001}^2 x^2 + C_{1001}^3 x^3 + \dots + 1\,001\,x^{1000}$, coeficientul căutat este C_{1001}^{50} . **1 938—39.** Presupunem dezvoltat $(x + 1)^n$, atunci x^p poate să provină din această dezvoltare înmulțind termenii care conțin pe x^{p-2} , x^{p-1} , x^p respectiv cu $(p - 2)x^2$, nx ,

$-p$; din primul factor coeficientul căutat este $a_p = (p-2) C_n^{p-2} + n C_n^{p-1} - p C_n^p = n C_n^{p-2}$. **1 940.** Produsul va fi de forma

$$x^n + x^{n-1} \sum_{k=1}^n k + x^{n-2} \sum_{k,h=1}^n kh + x^{n-3} \sum_{k,h,l=1}^n kh l + \dots, \text{ dar } \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \\ = \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k,h=1}^n kh^{(*)}, \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \sum_{k,h=1}^n kh;$$

$$A = \sum_{k,h=1}^n kh = \frac{1}{24} (n-1) n (n+1) (3n+2). \text{ Apoi } \sum_{k,h,l=1}^n kh l = \\ = \frac{1}{3} \sum kh \sum k - \sum k^2 h = A \sum k - (\sum a^2 \sum a - \sum a^3) =$$

$$\frac{1}{48} (n-2) (n-1) n^2 (n+1). \text{ **1 941.** Ca ex. precedent, găsim } a_{n-2} = \\ = \frac{q^3(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{q-1}, a_{n-3} = \frac{q^6(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)}. \text{ **1 942. } 1^\circ 1 + 2x +**$$

$$+ 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots 2^\circ 1 + 4x + 10x^2 + \dots + \frac{1}{6} (n+1) (n+2) (n+3) x^n + \dots \text{ **1 943. Fie } P(x) = a_0 x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + \\ + a_4 x^2 + a_5 x + a_6; \text{ din identificare rezultă } P(x) = \frac{16}{3} x^6 - \frac{20}{3} x^4 + \frac{7}{3} x^2 +**$$

$$+ a_6, a_6, \text{ arbitrar. **1 944. Trebuie ca } 2C_n^p = C_n^{p-1} + C_n^{p+1}, p = \frac{1}{2} (n \pm \\ \pm \sqrt{n+2}); \text{ dacă } m \text{ este par, atunci } n+2 = 4k^2, n = 2(2k^2-1), p = \\ = 2k^2 \pm k-1; n \text{ impar, } n+2 = (2k+1)^2, n = 4(k+1)k-1, p = \\ = 2k^2 + 3k, p = 2k^2 + k-1. \text{ **1 945. Avem } C_n^x = \frac{n-x+1}{x} C_n^{x-1}, C_n^{x+1} =****$$

$$= \frac{n-x}{x+1} C_n^x = \frac{(n-x)(n-x+1)}{(n+1)x}; 4x^2 - 4nx + n^2 + n = 0, x = \\ = \frac{1}{2} (n \pm \sqrt{-n}), \text{ imposibilitate. **1 946. } c_1 + c_2 = C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p, c_3 +**$$

$$+ c_4 = C_{n+1}^{p+2}, c_2 + c_3 = C_{n+1}^{p+1}. \text{ **1 947. Verifică relația } a_1 + a_3 = 2a_2. \\ \text{ **1 948. Punem } a_i = a_1 + (i-1)r; \text{ avem } a_1 [1 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n] - \\ - r [C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} n C_n^n]. \text{ Parantezele mari sînt nule,****$$

(*) $\sum_{k,h=1}^n kh$ înseamnă suma produselor cîte două, în toate modurile posibile, a numerelor 1, 2, 3, ..., n.

prima $(1 - 1)^n$. **1 949.** $C_{n+1}^{m+1} = \frac{n-m+1}{m+1} C_{n+1}^m = \frac{n-m+1}{m+1} \cdot \frac{n-m+2}{m} C_{n+1}^{m-1}$,
 $m = 3$, $n = 6$. **1950.** $1^\circ (1 + 1)^n$; $2^\circ (2 - 1)^n$. **1951.** $1^\circ (1 + 1)^n + (1 - 1)^n$
și $(1 + 1)^n - (1 - 1)^n$ etc. 4° Avînd în vedere că $C_n^k = C_n^{n-k}$, suma se
poate scrie succesiv $s = \sum_{k=0}^n (n - k + 1) C_n^k = \sum_{k=0}^n [n + 2 - (k + 1)] C_n^k =$
 $= (n + 2) \sum_{k=0}^n C_n^k - \sum_{k=0}^n (k + 1) C_n^k$, dar $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$, (1°), iar suma a doua
este cea căutată, rezultă $s = (n + 2) \cdot 2^n - s$, adică $s = (n + 2) \cdot 2^{n-1}$. 5° .
Suma se poate scrie $n - 2 \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 3 \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots + (-1)^{n-1} n =$
 $= n \left[1 - \frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} - \dots + (-1)^{n-2} \cdot \frac{n-1}{1} + (-1)^{n-1} \right] =$
 $= n(1 - 1)^{n-1} = 0$. 6° . Ca mai sus; scriem $\frac{n}{2} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} +$
 $+ \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \left[\frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \right] =$
 $= \frac{1}{n+1} \left\{ \left[1 - \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + (-1)^{n-1} \right] - 1 + \right.$
 $\left. + \frac{n+1}{1} \right\} = \frac{1}{n+1} [(1 - 1)^{n+1} + n] = \frac{n}{n+1}$. Chestiunile 5° și 6° se pot
deduce din dezvoltarea $(1 - x)^n = 1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots$ care se derivează
și integrează și apoi se face $x = 1$. **1 952.** $1 + 2 + \dots + p = \frac{(p+1)p}{2} =$
 $= C_{p+1}^2$, $s_1 = C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{n+1}^2 = C_{n+1}^3$. 3° Notăm $\delta_1 = a_2 +$
 $+ a_2 + \dots + a_n$, $\delta_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$. Avem $\delta_1^2 = \delta_2 + 2\delta_1 - 2s -$
 $- 2a_1(a_1 - 1)$ din care $s = \frac{1}{2}(\delta_1^2 + \delta_2) - a_1(a_1 - 1)$ formulă care per-
mite calculului lui s cînd cunoaștem δ_1 și δ_2 . Aplicații: α) Pentru s_2 avem
 $\delta_1 = \frac{1}{2} n(n+1)$, $\delta_2 = \frac{n}{6} (n+1)(2n+1)$, $s_2 = \frac{n}{24} (n+1)(n+2)(3n+$
 $+ 1)$. β) Cînd avem o progresie aritmetică cu $a_1 = a$ și rația r , atunci
 $\delta_1 = n \left(a + \frac{n-1}{2} r \right)$, $\delta_2 = na^2 + n(n-1)ar + \frac{n}{6} (n-1)(2n-1)r^2$,
 $s = \frac{n}{24} (n+1) [(n-1)(3n-2)r^2 + 12a(n-1)r + 12a^2] - a(a-1)$.
 γ) În cazul unei progresii geometrice $s = \frac{1}{2} \left[\frac{a^2(q^n - 1)^2}{(q-1)^2} + \frac{a^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} \right] -$
 $- a(a-1)$ (V. ex. 1450) **1 953.** $1^\circ (n-1)! (n-1) = n! - (n-1)!$,
facem $n = 2, 3, \dots$ și adunăm $2^\circ (k+i-1)! (k+i-1) = (k+i)! -$

$$- (k + i - 1)!; \sum_{i=1}^n (k + i)! - \sum_{i=1}^n (k + i - 1)! = \sum_{i=1}^n (k + i - 1)!$$

$$(k + i - 1), (k + n)! - k! = \sum_{i=1}^n (k + i - 1)! (k + i - 1). \quad \mathbf{1\ 954.} \quad 1^3 + 3^3 +$$

$$+ \dots + (2n - 1)^3 = \sum_{k=1}^n (2k - 1)^3 = 8 \sum_{k=1}^n k^3 - 12 \sum_{k=1}^n k^2 + 6 \sum_{k=1}^n k - n =$$

$$= 2n^2 (n + 1)^2 - 2n (n + 1) (2n + 1) + 3n (n + 1) - n = n^2 (2n^2 - 1).$$

Altă soluție. $1^3 + 3^3 + \dots + (2n - 1)^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 -$

$$- [2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3] = \left[\frac{2n(2n + 1)}{2} \right]^2 - 2^3 (1 + 2^3 + \dots + n^3 =$$

$$= n^2 (2n + 1)^2 - 2n^2 (n + 1)^2 = n^2 (2n^2 - 1). \quad \mathbf{1\ 955.} \quad 1^\circ \text{ v. ex. } 1954.$$

$$2^\circ \sum_{n=1}^n n = \frac{n}{2} (n + 1); \sum_{n=1}^n \sum_{n=1}^n n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^n (n^2 + n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^n n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^n n =$$

$$= \frac{1}{12} n(n + 1) (2n + 1) + \frac{1}{4} n(n + 1).$$

$$\mathbf{1\ 956.} \text{ Avem } \sum_{n=1}^n n = \frac{1}{2} n(n + 1), \sum_{n=1}^n n^2 = \frac{1}{6} n(n + 1) (2n + 1); 1^\circ \frac{3}{2n + 1};$$

$$2^\circ \sum_{n=1}^n n^4 = \frac{n}{30} (n + 1) (2n + 1) (3n^2 + 3n - 1); \frac{5}{3n^2 + 3n - 1}. \quad \mathbf{1\ 957.} \quad s =$$

$$= n(16n^3 - 16n^2 - 2n + 3) \text{ (v. ex. } 1954). \quad \mathbf{1\ 958.} \quad s = \sum k^3 + \frac{3}{2} \sum k^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum k = \frac{n}{4} (n + 1) (n^2 + 3n + 2). \quad \mathbf{1\ 959.} \quad s = p! \left[1 + \frac{p + 1}{1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(p + 1)(p + 2)}{2!} + \dots + \frac{n(n + 1) \dots (n - p + 1)}{p!} \right] = p! (C_p^p + C_{p+1}^p + \dots +$$

$$+ C_{n+p-1}^p) = p! C_{n+p}^{p+1} = \frac{1}{p + 1} (n + p) (n + p - 1) \dots n. \text{ Se poate proceda}$$

și prin inducție. $\mathbf{1\ 960.}$ Înmulțind cu $x - 1$ avem $x^{n+1} - 1 = (x - 1) +$

$$+ C_n^1 x(x - 1) + C_n^2 x(x - 1)^2 + \dots + C_n^n x(x - 1)^n. \text{ Partea a doua o scriem}$$

$$\text{succesiv } x - 1 + x[1 + C_n^1(x - 1) + \dots + C_n^n(x - 1)^n] - x = x - 1 +$$

$$+ x[1 + (x - 1)]^n - x = -1 + x(x)^n = x^{n+1} - 1. \quad \mathbf{1961.} \quad 1^\circ \text{ Avem } (x +$$

$$+ a)^n (x + a)^p = (x + a)^{n+p}. \text{ Se identifică coeficienții lui } x^2 \text{ din ambele}$$

$$\text{dezvoltări. } 2^\circ \text{ Se identifică coeficienții lui } x^n \text{ din } (x + a)^n (x + a)^n = (x +$$

$$+ a)^{2n}. \quad \mathbf{1\ 962.} \quad (1 + i)^n = 1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots), \text{ dar}$$

$$1 + i = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \text{ din identificare, } s_1 = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4},$$

$s_2 = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$. Dacă $n \equiv 0 \pmod{4}$, adică $n = 4m$, atunci $s_1 = (-1)^m 2^{2m}$,

$s_2 = 0$; dacă $n \equiv 1 \pmod{4}$, adică $n = 4m + 1$, atunci $s_1 = s_2 = (-1)^m 2^{2m}$; dacă $n \equiv 2 \pmod{4}$, adică $n = 4m + 2$, atunci $s_1 = 0$; $s_2 = (-1)^m 2^{2m+1}$, cînd $n \equiv 3 \pmod{4}$, adică $n = 4m + 3$, atunci $s_1 = (-1)^{m+1} 2^{2m+1}$, $s_2 =$

$= s_2 = (-1)^m 2^{2m+1}$. **1 963.** Dezvoltăm $(1 + k)^{n+1}$ și avem în vedere că $C_{n+1}^p =$

$= \frac{n+1}{n-p+1} C_n^p$ atunci

$$\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = C_n^0 x + \frac{C_n^1}{2} x^2 + \frac{C_n^2}{3} x^3 + \dots + \frac{C_n^n}{n+1} x^{n+1}.$$

E N U N Ț U R I

| | | |
|-------------------|---|-----|
| <i>Cap. I.</i> | Împărțirea polinoamelor | 7 |
| <i>Cap. II</i> | Descompunerea în factori. Simplificarea
fracțiilor | 16 |
| <i>Cap. III.</i> | Calculul cu expresii raționale și iraționale .. | 24 |
| <i>Cap. IV</i> | Ecuatii de gradul întâi și doi | 58 |
| <i>Cap. V.</i> | Ecuatii de grad superior | 77 |
| <i>Cap. VI.</i> | Ecuatii iraționale | 87 |
| <i>Cap. VII.</i> | Sisteme de ecuații | 92 |
| <i>Cap. VIII.</i> | Inegalități | 107 |
| <i>Cap. IX.</i> | Progresii aritmetice și geometrice | 116 |
| <i>Cap. X.</i> | Calculul logaritmice, ecuații și sisteme expo-
nențiale și logaritmice | 126 |
| <i>Cap. XI.</i> | Probleme aplicative | 135 |
| <i>Cap. XII.</i> | Numere complexe | 147 |
| <i>Cap. XIII.</i> | Analiza combinatorie | 158 |

S O L U Ț I I, I N D I C A Ț I I Ș I R Ă S P U N S U R I

| | | |
|-------------------|---|-----|
| <i>Cap. I.</i> | Împărțirea polinoamelor | 167 |
| <i>Cap. II.</i> | Descompunerea în factori. Simplificarea
fracțiilor | 176 |
| <i>Cap. III.</i> | Calculul cu expresii algebrice raționale și ira-
ționale | 184 |
| <i>Cap. IV.</i> | Ecuatii de gradul întâi și doi | 204 |
| <i>Cap. V.</i> | Ecuatii de grad superior | 221 |
| <i>Cap. VI.</i> | Ecuatii iraționale | 233 |
| <i>Cap. VII.</i> | Sisteme de ecuații | 237 |
| <i>Cap. VIII.</i> | Inegalități | 252 |
| <i>Cap. IX.</i> | Progresii aritmetice și geometrice | 269 |
| <i>Cap. X.</i> | Calculul logaritmice, ecuații și sisteme exponen-
țiale și logaritmice | 277 |
| <i>Cap. XI.</i> | Probleme aplicative | 284 |
| <i>Cap. XII.</i> | Numere complexe | 302 |
| <i>Cap. XIII.</i> | Analiza combinatorie | 312 |

Redactor responsabil : VOICU I. VOICU
Tehnoredactor : NECȘOIU OTTO

*Dat la cules 1.04.1965. Bun de tipar 12.06.1965. Apă-
rut 1965. Tiraj 40000+130 ex. Hirtie tip 11 A. de 63 g/m²,
ft. 16/70×100. Coli editoriale 19,017. Coli de tipar 20,
plan 13506. A. 4003 C. Z. pentru bibliotecile mari 512(08)
C. Z. pentru bibliotecile mici 51.*

Intreprinderea poligrafică „13 Decembrie 1918”
Str. Grigore Alexandrescu nr. 93—95, București — R.P.R.
Comanda nr. 580