Elemente de combinatorică

I. Repere teoretice

Fie o mulţime $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $card\, M=n$.

1) ***Aranjamente de n elemente luate câte m*** ale mulţimi M, $0\le m\le n$, sunt submulţime ordonate ale mulţimii M, având fiecare câte m elemente.

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

2) ***Permutări de n elemente*** mulţimi M sunt aranjamentele de n elemente luate câte n ale acestei mulţimii.

$$P_n=n!$$

3) ***Combinări de n elemente luate câte m*** ale mulţimi M, $0\le m\le n$, sunt submulţimile mulţimii , având fiecare câte m elemente.

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Regula multiplicităţii (înmulţirii): Dacă mulţimile A şi B sunt finite, atunci cardinalul produsului cartezian A× B este egal cu produsul cardinalelor acestor mulţimi: $card(A\times B)=cardA\times cardB$.

Regula adunării: Dacă mulţimile finite A şi B sunt disjuncte, adică $A\cap B=\varnothing$, atunci cardinalul reuniunii mulţimilor A,B este egal cu suma cardinalelor acestor mulţimi: $card(A\cup B)=cardA+cardB$.

II. Exerciţii şi probleme rezolvate

1) Pe un raft sunt 6 manuale diferite. În câte moduri se pot aranja aceste manuale pe raft?

Rezolvare:

↓	↓	↓	↓	↓	↓
6 pos	*5 pos*	*4 pos*	*3 pos*	*2 pos*	*1 pos*

Deci, $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=P_6=6!=720$.

Răspuns: 720 de moduri.

2) Pe un raft sunt 6 manuale diferite, printre care *Matematică* şi *Fizică*. În câte moduri se pot aranja aceste manuale pe raft, astfel încât manualele *Matematică* şi *Fizică* să fie alături?

Rezolvare:

• Avem de aranjat 6 manuale pe 6 poziţii, dar manualele *Matematică* şi *Fizică* să fie alături:

m	*f*				

sau

f	*m*				

Adică manualele *Matematică* şi *Fizică*, împreună, ocupă o poziţie şi putem reprezenta schematic:

f, m				

sau

m, f				

Astfel, avem de completat (în mod ordonat) 5 poziţii cu 5 elemente:

↓	↓	↓	↓	↓
5 pos	*4 pos*	*3 pos*	*2 pos*	*1 pos*

Deci avem $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_5 = 5!$ posibilităţi.

• Vom ţine cont de faptul că putem schimba locul celor 2 manuale *Matematică* şi *Fizică*, adică aranjate în $P_2 = 2!$ moduri.

Rezultă că sunt posibile $P_5 \cdot P_2 = 5! \cdot 2! = 120 \cdot 2 = 240$ moduri de aranjare pe raft.

Răspuns: 240 *de* moduri.

3) Pe un raft sunt 6 manuale, printre care *Matematică, Chimie* şi *Fizică*. În câte moduri se pot aranja aceste manuale pe raft astfel încât manualele *Matematică, Chimie* şi *Fizică* să fie alături?

Rezolvare:

1) Avem de ordonat 6 manuale pe 6 poziţii, astfel încât manualele *Matematică, Chimie* şi *Fizică* să fie alături:

m	*ch*	*f*			

Vom ţine cont de faptul că locurile celor 3 manuale *Matematică, Chimie* şi *Fizică* pot fi schimbate, adică aranjate în $P_3 = 3!$ moduri.

2) Pentru că manualele *Matematică, Chimie* şi *Fizică* vor sta alături, rezultă că ele împreună ocupă o poziţie şi putem reprezenta schematic:

m, ch, f			

Astfel, avem de completat (în mod ordonat) 4 poziţii cu 4 elemente:

↓	↓	↓	↓
4 pos	*3 pos*	*2 pos*	*1 pos*

Deci avem $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_4 = 4!$ posibilităţi.

Rezultă că sunt posibile $P_4 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$ moduri de aranjare pe raft.

Răspuns: 144 moduri.

4) În câte moduri din 20 de profesori poate fi formată o echipă de 3 manageri: un director, un adjunct pe instruire şi un adjunct pe educaţie?

Rezolvare:

Din 20 de profesori se aleg în mod ordonat 3 profesori; adică din 20 de elemente distincte se aleg submulţimi ordonate care conţin 3 elemente distincte:

↓	↓	↓
20 pos	*19 pos*	*18 pos*

Deci $A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ (moduri).

Răspuns: 6840 moduri.

5) Utilizând cifrele 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 determinați:

a) Câte numere de 6 cifre se pot forma?

b) Câte numere de 6 cifre care nu se repetă se pot forma?

c) Câte numere de 6 cifre, divizibile cu 25 se pot forma?

Rezolvare:

a) Formăm numerele de 6 cifre (ținem cont că prima cifră este diferită de zero):

↓	↓	↓	↓	↓	↓
9 pos	*10 pos*	*10 pos*	*10 pos*	*10 pos*	*10 pos*

Conform regulii de înmulțire, numărul rezultatelor posibile este $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 9\cdot 10^5$.

b) Formăm numerele de 6 cifre care nu se repetă (ținem cont că prima cifră este diferită de zero) și începând cu poziția a doua se vor alege în mod ordonat cifre distincte din cele 9 cifre rămase:

↓	↓	↓	↓	↓	↓
9 pos	*9 pos*	*8 pos*	*7 pos*	*6 pos*	*5 pos*

Conform regulii de înmulțire, numărul rezultatelor posibile este $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 9\cdot A_9^5 = 136080$.

c) Formăm numere de 6 cifre, divizibile cu 25. Deci ultimele două cifre sunt 00, 25, 50, 75. Pentru fiecare dintre aceste cazuri avem:

↓	↓	↓	↓		
9 pos	*10 pos*	*10 pos*	*10 pos*		

Deci, pentru fiecare caz avem $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 9\cdot 10^3$, iar în total avem $\left(9\cdot 10^3\right)\cdot 4 = 36000$ (numere).

Răspuns: a) $9\cdot 10^5$ numere; b) 136080 numere; c) 36000 numere.

6) Sunt date cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5.

a) Determinați câte coduri de 6 cifre care nu se repetă pot fi formate cu aceste cifre.

b) Determinați câte coduri de 6 cifre pot fi formate cu aceste cifre.

c) Determinați câte numere naturale de 3 cifre care nu se repetă pot fi formate cu aceste cifre.

Rezolvare:

a) Formăm coduri de 6 cifre diferite:

↓	↓	↓	↓	↓	↓
6 pos	*5 pos*	*4 pos*	*3 pos*	*2 pos*	*1 pos*

Conform regulii de înmulțire, numărul rezultatelor posibile este $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = P_6 = 6! = 720$.

b) Formăm coduri de 6 cifre:

↓	↓	↓	↓	↓	↓
6 pos	*6 pos*	*6 pos*	*6 pos*	*6 pos*	*6 pos*

Conform regulii de înmulţire, numărul rezultatelor posibile este $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^6 = 46656$.

c) Metoda I: Formăm numere de 3 cifre care nu se repetă cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 (ţinem cont că prima cifră este diferită de zero) şi începând cu poziţia a doua se vor alege în mod ordonat cifre distincte din cele 5 cifre rămase:

↓	↓	↓
5 pos	*5pos*	*4 pos*

Conform regulii de înmulţire, numărul rezultatelor posibile este $5 \cdot 5 \cdot 4 = 5 \cdot A_5^2 = 100$.

Metoda II: Din numărul total de numere de 3 cifre distincte care pot fi formate cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 (inclusiv de prima poziţie să fie zero) se exclude numărul de numere care au pe prima poziţie zero:

			–	0		
↓	↓	↓		↓	↓	↓
6 pos	*5pos*	*4 pos*		*1 pos*	*5pos*	*4 pos*

$A_6^3 - A_5^2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 100.$

Răspuns: a) 720 coduri; b) 46656 coduri; c) 100 numere.

7) Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se formează aleator un cod de 3 cifre care nu se repetă şi care conţin cifrele 0 şi 1. Determinaţi câte coduri se pot forma.

Rezolvare:

Formăm coduri de 3 cifre distincte şi care conţin cifrele 0 şi 1:

0	1	
↓		↓
A_3^2		*8 pos*

Cifrele 0 şi 1 ocupă aleator, în mod ordonat, două poziţii din cele 3. Deci pot ocupa aceste poziţii în A_3^2 moduri. Pe unul din cele trei locuri rămase poate fi orice cifră din cele 8 rămase 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Conform regulii multiplicităţii, numărul rezultatelor posibile este $A_3^2 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 8 = 48$.

Răspuns: 48 de coduri.

8) În câte moduri, din 20 de elevi, poate fi formată o echipă din trei elevi pentru a participa la Conferinţa Republicană a reprezentanţilor Consiliului Naţional de elevi.

Rezolvare:

Din 20 de elevi se iau 3 elevi, fără a ţine cont de ordine; adică din 20 de elemente distincte se aleg submulţimi care conţin 3 elemente distincte:

$C_{20}^3 = \dfrac{20!}{17!\cdot 3!} = \dfrac{18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140$ (moduri).

Răspuns: 1140 de moduri.

9) În ascensorul unei case cu unsprezece etaje, la primul etaj au urcat patru persoane. Determinați în câte moduri ele pot ieși din ascensor, dacă:

a) fiecare poate ieși din ascensor aleatoriu la orice etaj, începând cu al doilea;

b) toate patru persoane vor coborî la etaje diferite, începând cu al doilea;

c) la etajul trei vor coborî 2 persoane.

Rezolvare:

a) Fiecare persoană poate ieși aleatoriu la unul din 10 etaje și alegerea unei persoane este independentă de alegerea altora:

P1	*P2*	*P3*	*P4*
↓	↓	↓	↓
10 pos	*10 pos*	*10 pos*	*10 pos*

Conform regulii de înmulțire, numărul rezultatelor posibile este $10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 10^4$.

b) Dacă persoanele vor coborî la etaje diferite, începând cu al doilea, atunci din 10 etaje ele aleg în mod ordonat 4 etaje diferite:

P1	*P2*	*P3*	*P4*
↓	↓	↓	↓
10 pos	*9 pos*	*8 pos*	*7 pos*

Conform regulii de înmulțire, numărul rezultatelor posibile este $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = A_{10}^4$.

c) Dacă la etajul trei vor coborî 2 persoane, atunci 2 dintre ele au o singură alegere, iar restul pot coborî la oricare din cele 9 etaje rămase. Aceste 2 persoane pot fi luate în C_4^2 moduri. Schematic:

P1	*P2*	*P3*	*P4*
↓		↓	↓
Aleși aleator în C_4^2 moduri		*9 pos*	*9 pos*

Conform regulii multiplicității, numărul rezultatelor posibile este
$C_4^2\cdot 9\cdot 9 = C_4^2\cdot 81 = 486$.

Răspuns: a) 10^4; b) A_{10}^4; c) 486.

10) La o companie lucrează 3 directori adjuncți și 8 manageri de vânzări. În câte moduri se poate forma o comisie din 4 persoane astfel încât ea să includă cel puțin doi directori adjuncți?

Rezolvare:

Comisia din 4 persoane, astfel încât ea să includă cel puțin doi directori adjuncți înseamnă că comisia va fi alcătuită din 2 directori adjuncți și 2 manageri sau 3 directori adjuncți și 1 manager:

2 dir.adj.	*2 man.*		*3 dir.adj.*	*1 man.*
↓	↓	sau	↓	↓
C_3^2 *pos.*	C_8^2 *pos.*		C_3^3 *pos.*	C_8^1 *pos.*

Dacă în comisie vor fi 2 directori adjuncţi şi 2 manageri, atunci această comisie, conform regulii multiplicităţii, poate fi formată în $C_3^2 \cdot C_8^2$ moduri.
Dacă în comisie vor fi 3 directori adjuncţi şi 1 manager, atunci această comisie, conform regulii multiplicităţii, poate fi formată în $C_3^3 \cdot C_8^1$ moduri.
În total, conform regulii adunării a combinatoricii, comisia respectivă poate fi formată în $C_3^2 \cdot C_8^2 + C_3^3 \cdot C_8^1 = 84 + 8 = 92$ moduri.
Răspuns: 92 de moduri.

11) Într-o clasă sunt 10 băieţi şi 12 fete. Se formează o echipă de 4 elevi. Determinaţi:
a) în câte moduri se poate forma echipa;
b) în câte moduri se poate forma echipa din 2 băieţi şi 2 fete;
c) în câte moduri se poate forma echipa, dacă ea este formată din cel puţin 2 băieţi.
Rezolvare:
a) În clasă sunt 10 băieţi şi 12 fete. Deci din 22 de elevi se aleg 4 elevi, fără a ţine cont de ordine; adică din 22 de elemente distincte se aleg submulţimi care conţin 4 elemente distincte:

$$C_{22}^4 = \frac{22!}{18! \cdot 4!} = \frac{19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7315 \text{ (moduri).}$$

b) Echipa de 4 elevi, dintre care 2 băieţi şi 2 fete:

2 băieţi	*2 fete*
↓	↓
C_{10}^2 *pos.*	C_{12}^2 *pos.*

$C_{10}^2 \cdot C_{12}^2 = 45 \cdot 66 = 2970$ (moduri).

c) Echipa de 4 elevi, dintre care cel puţin sunt 2 băieţi:

2 băieţi	*2 fete*		*3 băieţi*	*2 fete*		*4 băieţi*	*0 fete*
↓	↓	sau	↓	↓	sau	↓	↓
C_{10}^2 *pos.*	C_{12}^2 *pos.*		C_{10}^3 *pos.*	C_{12}^1 *pos.*		C_{10}^4 *pos.*	C_{12}^0 *pos.*

Deci $C_{10}^2 \cdot C_{12}^2 + C_{10}^3 \cdot C_{12}^1 + C_{10}^4 \cdot C_{12}^0 = 2970 + 1440 + 210 = 4620 \text{(moduri)}$.

O altă metodă de rezolvare ar fi prin excluderea din numărul total de moduri de formare a echipei de 4 persoane numărul de echipe formate doar din fete sau din 1 băiat şi 3 fete:

1 băiat	*2 fete*		*0 băieţi*	*4 fete*
↓	↓	sau	↓	↓
C_{10}^1 *pos.*	C_{12}^3 *pos.*		$_{10}$ *pos.*	C_{12}^4 *pos.*

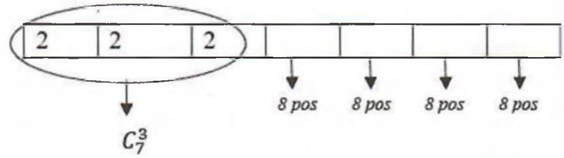
Deci $C_{22}^4 - \left(C_{10}^0 \cdot C_{12}^4 + C_{10}^1 \cdot C_{12}^3\right) = 7315 - \left(45 \cdot 11 + 100 \cdot 22\right) = 4620$ (moduri).

Răspuns: a) 7315 moduri; b) 2970 moduri; c) 4620 moduri.

12) Câte numere de 7 cifre pot fi scrise cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 astfel încât cifra 2 să se conţină în fiecare număr nu mai puţin de 3 ori.

Rezolvare:

Din cele 7 poziții trei vor fi ocupate de cifra 2. Aceste poziţii sunt alese aleator în C_7^3 moduri. Fiecare din poziţiile rămase pot fi ocupate de oricare cifră din cele 8. Prin urmare, obţinem: $8^4 \cdot C_7^3 = 143360$ numere.



13) Rezolvați în N ecuația $\dfrac{6(2n)!}{(2n-1)!} = \dfrac{n!}{(n-3)!}$.

Rezolvare:

$$\frac{6(2n-1)!\cdot 2n}{(2n-1)!} = \frac{(n-3)!\cdot(n-2)(n-1)n}{(n-3)!} \Leftrightarrow \begin{cases} 12n = (n-2)(n-1)n \\ n \geq 3, n \in N \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 12 = (n-2)(n-1) \\ n \geq 3, n \in N \end{cases} \Leftrightarrow n = 5.$$

Răspuns: $S = \{5\}$.

14) Rezolvați în N ecuația $\dfrac{A_n^4 \cdot P_{n-4}}{P_{n-2}} = 42$.

Rezolvare: DVA: $n \geq 4, n \in N$.

$$A_n^4 = \frac{n!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3);$$

$$\frac{P_{n-4}}{P_{n-2}} = \frac{(n-4)!}{(n-2)!} = \frac{(n-4)!}{(n-4)!(n-3)(n-2)} = \frac{1}{(n-3)(n-2)};$$

$$\frac{A_n^4 \cdot P_{n-4}}{P_{n-2}} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(n-3)(n-2)} = n(n-1).$$

$$\frac{A_n^4 \cdot P_{n-4}}{P_{n-2}} = 42 \Leftrightarrow \begin{cases} n(n-1) = 42 \\ n \geq 4, n \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n(n-1) = 7 \cdot 6 \\ n \geq 4, n \in N \end{cases} \Leftrightarrow n = 7.$$

Răspuns: $S = \{7\}$.

15) Rezolvați în N ecuația $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3$.

Rezolvare:

$$C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(n+8)!}{(n+3)!5!} = 5\dfrac{(n+6)!}{(n+3)!} \\ n \geq -3, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{(n+3)!(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+8)}{(n+3)!5!} = 5\dfrac{(n+3)!(n+4)(n+5)(n+6)}{(n+3)!} \\ n \geq -3, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(n+7)(n+8)}{5!} = 5 \\ n \geq -3, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} n^2 + 15n + 56 = 600 \\ n \geq -3, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + 15n - 544 = 0 \\ n \geq -3, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} n = -32 \\ n = 17 \end{array}\right. \\ n \geq -3, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow n = 17.$$

Răspuns: $S = \{17\}$.

16) Rezolvaţi în N inecuaţia $\dfrac{(2n)!}{(2n-2)!}<80$

Rezolvare: DVA: $n\geq 1,\quad 2n\in N$.
În DVA avem:

$$\frac{(2n)!}{(2n-2)!}<80\Leftrightarrow\frac{(2n-2)!(2n-1)2n}{(2n-2)!}<80\Leftrightarrow(2n-1)n<40\Leftrightarrow 2n^2-n-40<0\Leftrightarrow$$

$$\cdot\, n\in\left(\frac{1-\sqrt{321}}{2};\frac{1+\sqrt{321}}{2}\right).$$

Ţinând cont de DVA, obţinem $n\in\left\{1;\frac{3}{2};\ 2;\frac{5}{2};\ 3;\frac{7}{2};\ 4;\ \frac{9}{2}\right\}$.

Răspuns: $S=\left\{1;\frac{3}{2};\ 2;\frac{5}{2};\ 3;\frac{7}{2};4;\frac{9}{2}\right\}$.

17) Rezolvaţi în N inecuaţia $C_x^6\leq C_x^4$.

Rezolvare:

$$C_x^6\leq C_x^4\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x!}{(x-6)!4!\cdot 5\cdot 6}\leq\dfrac{x!}{(x-6)!(x-5)(x-4)4!}\\ x\geq 6, x\in N\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{5\cdot 6}\leq\dfrac{1}{(x-5)(x-4)}\\ x\geq 6, x\in N\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-5)(x-4)\leq 30\\ x\geq 6, x\in N\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[-1;10]\\ x\geq 6, x\in N\end{cases}\Leftrightarrow x\in\{6;7;8;9;10\}.$$

Răspuns: S = {6; 7; 8; 9; 10}.

18) Rezolvaţi în N inecuaţia $C_{16}^k>C_{16}^{k+2}$.

Rezolvare:

$$C_{16}^k>C_{16}^{k+2}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{16!}{(16-k)!k!}>\dfrac{16!}{(14-k)!(k+2)!}\\ k\leq 16\\ k+2\leq 16\\ k\in N\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{16!}{(14-k)!(15-k)(16-k)k!}>\dfrac{16!}{(14-k)!k!(k+1)(k+2)}\\ k\leq 14\\ k\in N\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{(15-k)(16-k)}>\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\\ k\leq 14\\ k\in N\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(k+1)(k+2)>(15-k)(16-k)\\ k\leq 14\\ k\in N\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k^2+3k+2>240-31k+k^2\\ k\leq 14\\ k\in N\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k>7\\ k\leq 14\\ k\in N\end{cases}\Leftrightarrow$$

$k\in\{8;9;10;11;12;13;14\}$.

Răspuns: S = {8; 9; 10; 11; 12; 13; 14}.

Binomul lui Newton

I. Repere teoretice

Binomul lui Newton:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n b^n.$

$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n.$

Proprietăți ale dezvoltării binomului la putere și a coeficienților binomiali:

1) Termenul al $(k+1)-lea$ din dezvoltarea binomului la putere:
   $(a+b)^n : T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$
   $(a-b)^n : T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k,\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$
2) Dezvoltarea $(a+b)^n$ conține $n+1$ termeni.
3) În dezvoltarea binomului la putere, exponenții puterilor lui a descresc de la n la 0, iar exponenții puterilor lui b cresc de la 0 la n.
4) În orice termen al dezvoltării binomului la putere, suma exponenților puterilor lui a și ale lui b este egală cu n.
5) Suma coeficienților binomiali din dezvoltarea binomului la putere este $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n,\ n \in N.$
6) Suma coeficienților binomiali situați pe locurile pare în dezvoltarea binomului este egală cu suma coeficienților binomiali situați pe locurile impare ale aceleiași dezvoltări și este egală cu 2^{n-1}.

II. Exerciții și probleme rezolvate

1) Determinați termenul al optulea în dezvoltarea la putere a binomului $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{11}$.
Rezolvare:
$$T_8 = C_{11}^7 \cdot \left(x^2\right)^{11-7} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^7 = C_{11}^7 \cdot x^8 \cdot x^{-7} = C_{11}^7 \cdot x = \frac{11!}{4! \cdot 7!} \cdot x = 330x.$$
Răspuns: $T_8 = 330x$.

2) Aflați termenul din mijloc al dezvoltării $\left(2x^2 + \frac{1}{2x}\right)^{12}$.
Rezolvare:
Dezvoltarea binomului $\left(2x^2 + \frac{1}{2x}\right)^{12}$ conține 13 termeni, cel din mijloc fiind T_7.
$$T_7 = T_{6+1} = C_{12}^6 \cdot \left(2x^2\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^6 = C_{12}^6 \cdot 2^6 \cdot x^{12} \cdot 2^{-6} \cdot x^{-6} = C_{12}^6 \cdot x^6 = 924x^6.$$
Răspuns: Termenul din mijloc este $T_7 = 924x^6$.

3) Determinați cei doi termeni din mijloc ai dezvoltării $\left(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}\right)^{13}$.
Rezolvare:
Dezvoltarea binomului $\left(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}\right)^{13}$ conține 14 termeni, cei doi din mijloc fiind T_7 și T_8.

$T_7 = T_{6+1} = (-1)^6 C_{13}^6 \cdot (2\sqrt{a})^7 \cdot (\sqrt[4]{b})^6 = C_{13}^6 \cdot 2^7 \cdot (\sqrt{a})^7 \cdot (\sqrt[4]{b})^6 = 1716 \cdot 128 \cdot a^3\sqrt{ab}(\sqrt[4]{b})^2 =$
$219648a^3b\sqrt{ab}$.
$T_8 = T_{7+1} = (-1)^8 C_{13}^7 \cdot (2\sqrt{a})^6 \cdot (\sqrt[4]{b})^7 = -C_{13}^7 \cdot 2^6 \cdot (\sqrt{a})^6 \cdot (\sqrt[4]{b})^7 = -1716 \cdot 64 \cdot a^3b(\sqrt[4]{b})^3 =$
$-109824a^3b\sqrt[4]{b^3}$.

Răspuns: Termenii din mijloc sunt $T_7 = 219648a^3b\sqrt{ab}; T_8 = -109824a^3b\sqrt[4]{b^3}$.

4) Aflați termenul al cincilea din dezvoltarea $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$, știind că raportul coeficienților binomiali ai termenilor al treilea și al doilea este egal cu $\frac{11}{2}$.

Rezolvare:
Coeficientul binomial al termenului al treilea este
$C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1)}{2} (n \geq 2, n \in N)$, iar coeficientul binomial al termenului al doilea este $C_n^1 = n, (n \geq 1, n \in N)$.

Din datele problemei, avem $\frac{C_n^2}{C_n^1} = \frac{11}{2}$, deci în condiția $n \geq 2, n \in N$, obținem:
$\frac{n(n-1)}{2} : n = \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{n-1}{2} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow n-1 = 11 \Leftrightarrow n = 12.$
Termenul al cincilea din dezvoltarea $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a}\right)^{12}$ este

$$T_5 = T_{4+1} = C_{12}^4 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^8 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^4 = C_{12}^4 \cdot \frac{a^8}{x^4} \cdot \frac{x^2}{a^4} = 495\frac{a^4}{x^2}.$$

Răspuns: $T_5 = 495\frac{a^4}{x^2}$.

5) Determinați rangul termenului care-l conține pe x^3 în dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{x} + y)^9$.

Rezolvare:
Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = C_9^k \cdot (\sqrt{x})^{9-k} \cdot y^k = C_9^k \cdot x^{\frac{9-k}{2}} \cdot y^k$.

Conform datelor problemei avem $x^{\frac{9-k}{2}} = x^3$. Deci, $\frac{9-k}{2} = 3 \Leftrightarrow 9-k = 6 \Leftrightarrow k = 3$.

Răspuns: Termenul al patrulea al dezvoltării.

6) Aflați termenul care-l conține pe a^4 în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\frac{\sqrt{a}}{3} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$.

Rezolvare:
Termenul general al dezvoltării este

$$T_{k+1} = C_{13}^k \left(\frac{\sqrt{a}}{3}\right)^{13-k} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^k = C_{13}^k \cdot a^{\frac{13-k}{2}} \cdot 3^{-13+k} \cdot 3^k \cdot a^{\frac{-k}{3}} = C_{13}^k \cdot a^{\frac{39-5k}{6}} \cdot 3^{-13+2k}.$$

Conform datelor problemei $a^{\frac{39-5k}{6}} = a^4$. Deci

$$\frac{39-5k}{6} = 4 \Leftrightarrow 39-5k = 24 \Leftrightarrow k = 3 \Rightarrow T_4 = C_{13}^3 \cdot a^4 \cdot 3^{-7} = \frac{286}{2187} \cdot a^4.$$

Răspuns: $T_4 = \dfrac{286}{2187} \cdot a^4$.

7) Determinați rangul termenului care nu-l conține pe x în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{25}$.

Rezolvare:

Termenul general al dezvoltării la putere a binomului $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{25}$ este

$$T_{k+1} = C_{25}^k \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^{25-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = C_{25}^k \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{25-k} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = C_{25}^k \cdot x^{\frac{25-k}{3}} \cdot x^{-\frac{k}{2}} = C_{25}^k \cdot x^{\frac{50-5k}{6}}.$$

Conform datelor problemei avem $x^{\frac{50-5k}{6}} = x^0$. Deci $\dfrac{50-5k}{6} = 0 \Leftrightarrow 50-5k = 0 \Leftrightarrow k = 10.$

Răspuns: Termenul al unsprezecelea al dezvoltării.

8) Determinați $n \in N^*$ și termenul care-l conține pe x^4 din dezvoltarea la putere a binomului $\left(x\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)^n$, știind că suma coeficienților binomiali ai acestei dezvoltări este egală cu 128.

Rezolvare:

Suma coeficienților binomiali din dezvoltarea binomului la putere este egală cu 2^n.

Din datele, problemei rezultă că $2^n = 128 \Leftrightarrow 2^n = 2^7 \Leftrightarrow n = 7$.

Termenul general al dezvoltării la putere al binomului $\left(x\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)^7$ este

$$T_{k+1} = C_7^k \cdot \left(x\sqrt[3]{x}\right)^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)^k = C_7^k \cdot x^{\frac{4(7-k)}{3}} \cdot x^{-\frac{4}{3}k} = C_7^k \cdot x^{\frac{28-8k}{3}}.$$

Din datele problemei, avem: $x^{\frac{28-8k}{3}} = x^4$. Deci $\dfrac{28-8k}{3} = 4 \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow T_3 = C_7^2 \cdot x^4 = 21x^4$.

Răspuns: $n = 7, T_3 = 21x^4$.

9) În dezvoltarea la putere a binomului $\left(a\sqrt[4]{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^n, a \in R^*$, suma coeficienților binomiali de rang par este egală cu 128. Determinați termenul care-l conține pe a^3.

Rezolvare:

Suma coeficienților binomiali de rang par din dezvoltarea binomului la putere este egală 2^{n-1}. Din datele, problemei rezultă că $2^{n-1} = 128 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^7 \Leftrightarrow n = 8$.

Termenul general al dezvoltării la putere al binomului $\left(a\sqrt[4]{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^8$ este

$$T_{k+1} = C_8^k \cdot \left(a\sqrt[4]{a}\right)^{8-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^k = C_8^k \cdot a^{\frac{40-5k}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{2}k} = C_8^k \cdot a^{\frac{40-7k}{4}}.$$

Din datele problemei avem: $a^{\frac{40-7k}{4}}=a^3$. Deci $\frac{40-7k}{4}=3 \Leftrightarrow k=4 \Rightarrow T_5=C_8^4\cdot a^3=70a^3$.

Răspuns: $T_5=70a^3$.

10) Determinați $n\in N^*$, dacă suma coeficienților binomiali ai primilor 3 termeni ai dezvoltării la putere a binomului $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$ este egală cu 211.

Rezolvare:

Suma coeficienților binomiali ai primilor 3 termeni ai dezvoltării la putere a binomului dat este $C_n^0+C_n^1+C_n^2=1+n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$, cu $n\geq 2, n\in N$.

Din datele problemei avem:

$$\begin{cases}\frac{n^2+n+2}{2}=211\\ n\geq 2\\ n\in N\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2+n-420=0\\ n\geq 2\\ n\in N\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} n=20\\ n=-21\end{array}\right.\\ n\geq 2\\ n\in N\end{cases} \Leftrightarrow n=20.$$

Răspuns: $n=20$.

11) Determinați numărul de termeni raționali ai dezvoltării la putere a binomului $\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{3}\right)^{100}$.

Rezolvare:

Termenul general al dezvoltării la putere al binomului este

$T_{k+1}=C_{100}^k\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{100-k}\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^k=C_{100}^k\cdot 5^{\frac{100-k}{2}}\cdot 3^{\frac{k}{3}}=C_{100}^k\cdot 5^{50-\frac{k}{2}}\cdot 3^{\frac{k}{3}}$, unde $k\in[0;100]\cap N$

Termenul $5^{50-\frac{k}{2}}$ va fi rațional dacă k se divide prin 2, termenul $3^{\frac{k}{3}}$ va fi rațional dacă k se divide prin 3.

Astfel, obținem sistemul: $\begin{cases} k\,\vdots\,2\\ k\,\vdots\,3\\ k\in[0;100]\\ k\in N\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\,\vdots\,6\\ k\in[0;100]\\ k\in N\end{cases} \Leftrightarrow k\in\{0;6;12;18;.........96\}$.

$k\in\{6\cdot 0; 6\cdot 1; 6\cdot 2; 6\cdot 3; ....; 6\cdot 16\} \Rightarrow$ sunt 17 valori ale lui k.

Răspuns: 17 termeni raționali.

Elemente de teoria probabilităţilor şi statistică matematică

I. Repere teoretice

Definiția clasică a probabilității realizării unui eveniment:

$P(A)=\frac{m}{n}$, unde n este numărul total de rezultate egal posibile ale experimentului, m este numărul de rezultate egal posibile favorabile ale experimentului.

- Probabilitatea evenimentului sigur $P(E)=1$.
- Probabilitatea evenimentului imposibil $P(\varnothing)=0$.
- Probabilitatea evenimentului aleator $0<P(A)<1$.
- Dacă A şi B sunt evenimente incompatibile, atunci $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
- Eveniment contrar evenimentului A se numeşte evenimentul, notat $\bar{A}$, care constă în nerealizarea lui A.
  $P(\bar{A})=1-P(A)$.
- Evenimentele aleatoare A şi B se numesc independente dacă
  $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Valoare medie a variabilei aleatoare ξ cu repartiţia

ξ	x_1	x_2	..	x_n
P	p_1	p_2		p_n

$M(\xi)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots x_np_n$.

II. Exerciţii şi probleme rezolvate

1) Se aruncă o monedă de 5 ori. Determinaţi probabilitatea ca stema să cadă exact de 2 ori.

Rezolvare: $P(A)=\frac{m}{n}$.

- Numărul total de cazuri egal posibile: $n=2^5=32$.
- Numărul de cazuri favorabile: $m=C_5^2=10$.
- $P(A)=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$.

Răspuns: $P(A)=\frac{5}{16}$.

2) Se aruncă simultan două zaruri. Determinaţi probabilitatea ca produsul punctelor de pe fețele apărute să fie egal cu 6.

Rezolvare: $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

- Numărul total de cazuri egal posibile: $n=6^2=36$.
- Numărul de cazuri favorabile: $m=4$. Produsul punctelor de pe fețele apărute va fi egal cu 6 în cazurile apariției numerelor $\{16;23;32;61\}$
- $P(A)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$.

Răspuns: $P(A)=\dfrac{1}{9}$.

3) Se aruncă simultan 4 zaruri. Determinați probabilitatea ca suma punctelor de pe fețele apărute să fie egală cu 5.

Rezolvare: $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

- Numărul total de cazuri egal posibile: $n=6^4$.
- Suma punctelor de pe fețele apărute va fi egală cu 5 dacă vom avea trei cifre de 1 și o cifră de 2.

1	1	1	2
	↓		↓
	Apar aleator în C_4^3 *moduri*		*1 pos*

La rândul său, cele trei cifre de 1 pot ocupa aleatoriu 3 poziții din cele 4. Deci, în C_4^3 moduri.

Numărul de cazuri favorabile: $m=C_4^3\cdot 1=4$.

- $P(A)=\dfrac{4}{1296}=\dfrac{1}{324}$.

Răspuns: $P(A)=\dfrac{1}{324}$.

4) Se aruncă zarul de 4 ori. Determinați probabilitatea că suma punctelor de pe fețele apărute va fi egală cu 22.

Rezolvare: $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

- Numărul total de cazuri egal posibile: $n=6^4$.
- Suma punctelor de pe fețele apărute va fi egală cu 22 dacă vom avea două cifre de 5 și două cifre de 6 sau trei cifre de 6 și o cifră de 4. La rândul lor, cele 2 cifre de 5 pot ocupa aleatoriu 2 poziții din cele 4 și, respectiv, cele 3 cifre de 6 pot ocupa aleatoriu 3 poziții din cele 4.

5	5	6	6
↓		↓	↓
Apar aleator în C_4^2 *moduri*		*1 pos*	*1 pos*

sau

6	6	6	4
	↓		↓
	Apar aleator în C_4^3 *moduri*		*1 pos*

Numărul de cazuri favorabile: $m=C_4^2+C_4^3=10$.

• $P(A)=\dfrac{10}{1296}=\dfrac{5}{648}$.

Răspuns: $P(A)=\dfrac{5}{648}$.

5) Se aruncă concomitent 4 zaruri. Determinați probabilitatea ca:
a) fața cu 6 puncte să apară de 3 ori;
b) fața cu 6 puncte să apară pe cel puțin un zar.

Rezolvare:

a) Numărul total de cazuri egal posibile:
$n=6^4$.

Fața cu 6 puncte va apărea de 3 ori.
La rândul lor, cele trei zaruri pot apărea aleator din cele 4:
Deci, în C_4^3 cazuri, iar pe cel de-al patrulea zar poate fi oricare cifră din restul 5 cifre.
Numărul de cazuri favorabile $m=C_4^3\cdot 5=20$.

6 puncte	6 puncte	6 puncte	
	↓		↓
	Apar aleator în C_4^3 moduri		*5 pos*

$P(A)=\dfrac{20}{1296}=\dfrac{5}{324}$.

b) Fie evenimentul B = „La aruncarea zarului de 4 ori fața cu 6 puncte va nimeri pe cel puțin un zar”.

Definim evenimentul contrar $\overline{B}=$ „La aruncarea zarului de 4 ori fața cu 6 puncte nu apare pe niciun zar”.

Numărul total de cazuri egal posibile: $n=6^4$.
Fața cu 6 puncte nu apare pe niciun zar; adică pe fețele zarurilor sunt oricare cifră în afară de 6:
Numărul de cazuri favorabile $m=5^4$.

Zar 1	*Zar 2*	*Zar 3*	*Zar 4*
↓	↓	↓	↓
5 pos	*5 pos*	*5 pos*	*5 pos*

$P(\overline{B})=\dfrac{5^4}{6^4}\Rightarrow P(B)=1-\dfrac{5^4}{6^4}=\dfrac{1296-625}{1296}=\dfrac{671}{1296}$.

Răspuns: a) $P(A)=\dfrac{5}{324}$; b) $P(B)=\dfrac{671}{1296}$.

6) Un zar este lansat până la apariția feței cu 6 puncte. Determinați probabilitatea ca zarul să fie aruncat de 4 ori.

Rezolvare: $P(A)=\dfrac{m}{n}$

$n=6^4=1296$

Evenimentul este realizat dacă zarul este aruncat de 4 ori. La primele 3 lansări apare una dintre fețele cu 1, 2, 3, 4 sau 5 puncte și la a patra lansare apare fața cu 6 puncte:

$m=5\cdot 5\cdot 5\cdot 1=125$

$P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{125}{1296}$.

Lansare 1	*Lansare 2*	*Lansare 3*	*Lansare 4*
↓	↓	↓	↓
5 pos	*5 pos*	*5 pos*	*1 pos*

Răspuns: $P(A)=\dfrac{125}{1296}$.

7) Un zar este aruncat până la apariția feței cu 5 puncte. Determinați probabilitatea ca zarul să fie aruncat mai mult de o dată, dar mai puțin de 4 ori.

Rezolvare:
Evenimentul este realizat dacă zarul este aruncat de 2 ori: la prima lansare apare una dintre fețele cu 1, 2, 3, 4 sau 6 puncte și la a doua lansare apare fața cu 5 puncte sau, dacă zarul este aruncat de 3 ori: la primele două lansări apare una dintre fețele cu 1, 2, 3, 4 sau 6 puncte și la a treia lansare apare fața cu 5 puncte:

Lansare 1	*Lansare 2*
↓	↓
6 pos	*6 pos*

sau

Lansare 1	*Lansare 2*	*Lansare 3*
↓	↓	↓
6 pos	*6 pos*	*6 pos*

Cazuri total egal posibile:

Lansare 1	*Lansare 2*
↓	↓
5 pos	*1 pos*

sau

Lansare 1	*Lansare 2*	*Lansare 3*
↓	↓	↓
5 pos	*5 pos*	*1 pos*

Cazuri favorabile:

$$P(A)=\frac{5\cdot1}{6\cdot6}+\frac{5\cdot5\cdot1}{6\cdot6\cdot6}=\frac{55}{216}.$$

Răspuns: $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{55}{216}.$

8) Determinați probabilitatea ca un număr natural de șase cifre, format aleator, să fie divizibil prin 25.

Rezolvare:

↓	↓	↓	↓	↓	↓
9 pos	*10 pos*	*10 pos*	*10 pos*	*10 pos*	*10 pos*

Cazuri total egal posibile: $n=9\cdot10^5$.

↓	↓	↓	↓	↓	
9 pos	*10 pos*	*10 pos*	*10 pos*	*4 pos: 00,25,50,75*	

Cazuri favorabile: $m=9\cdot10^3\cdot4$.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{9\cdot10^3\cdot4}{9\cdot10^5}=\frac{1}{25}.$$

Răspuns: $P(A)=\frac{1}{25}.$

9) Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se formează aleator un număr de șapte cifre distincte două câte două. Determinați probabilitatea ca primele trei cifre ale numărului să fie pare, iar celelalte – impare.

Rezolvare:

↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
7 pos	*6 pos*	*5 pos*	*4 pos*	*3 pos*	*2 pos*	*1 pos*

Cazuri total egal posibile: $n=7!$

	pare			impare		
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
3 pos	*2 pos*	*1 pos*	*4 pos*	*3 pos*	*2 pos*	*1pos*

Cazuri favorabile: $m = 3!4!$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3!4!}{7!} = \frac{1}{35}.$

Răspuns: $P(A) = \frac{1}{35}.$

10) Literele *M, A, T, E, M, A, T, I, C, A* sunt scrise câte una pe 10 fişe identice. Fişele se amestecă, apoi se extrag aleator consecutiv 4 fişe. Determinaţi probabilitatea ca fişele extrase să formeze în ordinea extragerii cuvântul „*MAMA*".

Rezolvare:

Cazuri total egal posibile: $n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

↓	↓	↓	↓
10 pos	*9 pos*	*8 pos*	*7 pos*

Cazuri favorabile: $m = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2$.

M	*A*	*M*	*A*
↓	↓	↓	↓
2 pos	*3 pos*	*1 pos*	*2 pos*

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{420}.$

Răspuns: $P(A) = \frac{1}{420}.$

11) Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se formează în mod aleator un cod din 3 cifre care nu se repetă. Determinaţi probabilitatea ca cifrele 4, 5 să se conţină în cod.

Rezolvare:

Numărul total de cazuri egal posibile: $n = 10 \cdot 9 \cdot 8$

↓	↓	↓
10 pos	*9 pos*	*8 pos*

Cazuri favorabile: $m = A_3^2 \cdot 8$.

4	*5*	
↓		↓
Poziţiile se aleg în A_3^2 moduri		*8 pos*

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A_3^2 \cdot 8}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{6 \cdot 8}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{15}.$

Răspuns: $P(A) = \frac{1}{15}.$

12) Cinci fete au decis să dăruiască de 1 martie mărţişoare celor 5 colegi ai lor. Fiecare dintre ele dăruieşte un mărţişor unui coleg ales la întâmplare. Determinaţi probabilitatea că fiecare coleg va primi mărţişor.

Rezolvare:

Cazuri totale egal posibile: fiecare băiat poate primi un mărţişor de la fiecare fată, deci $n = 5^5$.

Băiat1	*Băiat2*	*Băiat3*	*Băiat4*	*Băiat5*
↓	↓	↓	↓	↓
5 fete	*5 fete*	*5 fete*	*5 fete*	*5 fete*

Cazuri favorabile: Fiecare băiat a primit un mărțișor de la o singură fată: deci $m=5!$

$P(A)=\frac{5!}{5^5}=\frac{24}{625}$.

Răspuns: $P(A)=\frac{24}{625}$.

Băiat1	*Băiat2*	*Băiat3*	*Băiat4*	*Băiat5*
↓	↓	↓	↓	↓
5 fete	*4 fete*	*3 fete*	*2 fete*	*1 fată*

13) Pe un raft sunt aranjate 8 manuale, printre care un manual de matematică şi un manual de chimie. Determinaţi probabilitatea ca manualul de matematică şi de chimie să se situeze alături.

Rezolvare:

$n=8!$

$m=2!\cdot 7!$, deoarece un manual de matematică şi un manual de chimie sunt situate alături, ele s-au grupat şi ocupă o poziție, iar împreună cu celelalte 6 manuale pot fi schimbate în $7!$ moduri. Dar şi manualul de matematică şi manualul de chimie pot fi schimbate în $2!$ moduri.

$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2\cdot 7!}{8!}=\frac{1}{4}$.

Răspuns: $P(A)=\frac{1}{4}$.

14) Cu cifrele 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se formează coduri de 10 cifre care nu se repetă. Determinaţi probabilitatea ca un cod format la întâmplare să conțină secvența 123.

Rezolvare:

Numărul total de cazuri egal posibile: $n=10!$

1 *2* *3*							
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
8 pos	*7 pos*	*6 pos*	*5 pos*	*4 pos*	*3 pos*	*2 pos*	*1 pos*

Cazuri favorabile: $m=8!$

$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{8!}{10!}=\frac{1}{90}$.

Răspuns: $P(A)=\frac{1}{90}$.

15) În ascensorul unei case cu unsprezece etaje la primul etaj au urcat patru persoane. Fiecare dintre ei poate ieşi din ascensor aleatoriu la orice etaj, începând cu al doilea. Determinați probabilitatea ca:

a) toate patru persoane să coboare la etajul cinci;

b) toate patru persoane să coboare la unul şi acelaşi etaj;

c) toate patru persoane să coboare la etaje diferite;

d) la etajul trei să coboare 2 persoane.

Rezolvare:

Pers1	*Pers2*	*Pers3*	*Pers4*
↓	↓	↓	↓
10 pos	*10 pos*	*10 pos*	*10 pos*

Numărul total de cazuri egal posibile: $n=10^4$.

a) Cazuri favorabile: $m = 1$.

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10^4}$.

Pers1	*Pers2*	*Pers3*	*Pers4*
↓	↓	↓	↓
1 pos(etajul 5)	*1 pos(etajul 5)*	*1 pos(etajul 5)*	*1 pos(etajul 5)*

b) Cazuri favorabile: $m = 10$.

$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{10}{10^4} = \frac{1}{10^3}$.

Pers1	*Pers2*	*Pers3*	*Pers4*
↓	↓	↓	↓
10 pos	*1 pos*	*1 pos*	*1 pos*

c) Cazuri favorabile: $m = A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

$P(C) = \frac{A_{10}^4}{10^4} = \frac{63}{125}$.

Pers1	*Pers2*	*Pers3*	*Pers4*
↓	↓	↓	↓
10 pos	*9 pos*	*8 pos*	*7 pos*

d) Cazuri favorabile: $m = C_4^2 \cdot 9^2$.

$P(C) = \frac{C_4^2 \cdot 9^2}{10^4} = \frac{243}{5000}$.

		Pers3	*Pers4*
↓	↓	↓	↓
Se aleg 2 persoane în C_4^2 moduri		*9 pos*	*9 pos*

Răspuns: a) $P(A) = \frac{1}{10^4}$; b) $P(B) = \frac{1}{1000}$; c) $P(C) = \frac{63}{125}$; d) $P(D) = \frac{243}{5000}$.

16) Într-un tren compus din 3 vagoane urcă 9 călători, fiecare alegând vagonul la întâmplare. Determinați probabilitatea evenimentului aleator:

a) A = {în primul vagon urcă 3 persoane};

b) B = {în fiecare vagon urcă 3 persoane};

c) C = {în primul vagon urcă 4 persoane, în al doilea vagon urcă 3 persoane şi în al treilea vagon urcă 2 persoane}.

Rezolvare:

Fiecare călător poate urca aleator în oricare dintre cele 9 vagoane şi alegerea fiecăruia nu depinde de alegerea celorlalţi călători.

Deci numărul total de cazuri egal posibile: $n = 3^9$.

Călător1	*Călător 2*	*Călător 3*	*Călător 4*	*Călător 5*	*Călător 6*	*Călător 7*	*Călător 8*	*Călător 9*
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
3 pos	*3 pos*	*3 pos*	*3 pos*	*3 pos*	*3 pos*	*3 pos*	*3 pos*	*3 pos*

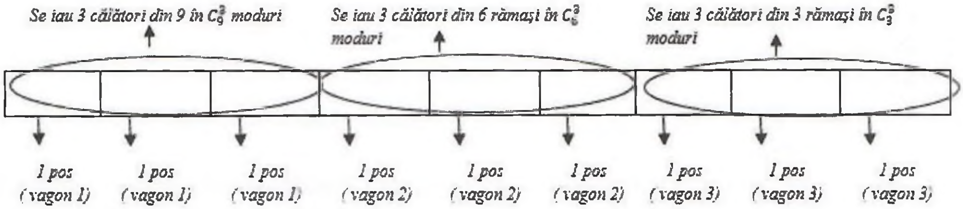
a) Cazuri favorabile: $m = C_9^3 \cdot 2^6$.

Se iau 3 călători în C_9^3 moduri

Călător1	*Călător 2*	*Călător 3*	*Călător 4*	*Călător 5*	*Călător 6*	*Călător 7*	*Călător 8*	*Călător 9*
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1 pos (vagon 1)	*1 pos (vagon 1)*	*1 pos (vagon 1)*	*2 pos*	*2 pos*	*2 pos*	*2 pos*	*2 pos*	*2 pos*

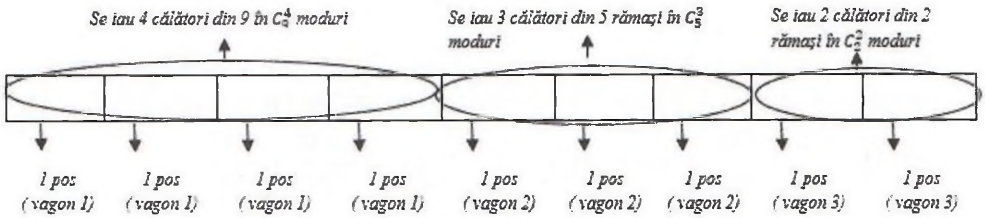
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_9^3 \cdot 2^6}{3^9} = \frac{5376}{19683} \approx 0{,}273.$$

b) Cazuri favorabile: $m = C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3$.



$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{3^9} = \frac{84 \cdot 20 \cdot 1}{19683} \approx 0{,}085.$$

c) Cazuri favorabile: $m = C_9^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2$.



$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{C_9^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2}{3^9} = \frac{126 \cdot 10 \cdot 1}{19683} \approx 0{,}064.$$

Răspuns: a) $P(A) \approx 0{,}273$; b) $P(B) \approx 0{,}085$; c) $P(C) \approx 0{,}064$.

17) Într-o clasă sunt 12 băieţi şi 18 fete. Se formează aleator o delegaţie din 2 elevi. Determinaţi probabilitatea ca delegaţia să fie formată din: a) doi băieţi; b) două fete; c) o fată şi un băiat.

Rezolvare:

a) $P(A) = \frac{m}{n}; n = C_{30}^2 = \frac{30!}{28! \cdot 2!} = \frac{29 \cdot 30}{2} = 29 \cdot 15; m = C_{12}^2 = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 12}{2} =$

$11 \cdot 6; P(A) = \frac{11 \cdot 6}{29 \cdot 15} = \frac{11 \cdot 2}{29 \cdot 5} = \frac{22}{145}.$

b) $P(B) = \frac{m}{n}; n = C_{30}^2 = \frac{30!}{28! \cdot 2!} = \frac{29 \cdot 30}{2} = 29 \cdot 15; m = C_{18}^2 = \frac{18!}{16! \cdot 2!} = \frac{17 \cdot 18}{2} = 17 \cdot 9;$

$P(B) = \frac{17 \cdot 9}{29 \cdot 15} = \frac{17 \cdot 3}{29 \cdot 5} = \frac{51}{145}.$

c) $P(C) = \frac{m}{n}; n = C_{30}^2 = \frac{30!}{28! \cdot 2!} = \frac{29 \cdot 30}{2} = 29 \cdot 15; m = C_{12}^1 \cdot C_{18}^1 = 12 \cdot 18;$

$P(C) = \frac{12 \cdot 18}{29 \cdot 15} = \frac{4 \cdot 18}{29 \cdot 5} = \frac{72}{145}.$

Răspuns: a) $P(A) = \frac{22}{145}$; b) $P(B) = \frac{51}{145}$; c) $P(C) = \frac{72}{145}$.

18) La o tombolă sunt 30 de bilete, dintre care 3 câştigătoare. O persoană cumpără 4 bilete. Determinaţi probabilitatea ca cel puţin un bilet dintre cele cumpărate să fie câştigător.

Rezolvare:

Metoda I:

Numărul total de cazuri egal posibile: în total sunt 30 bilete şi se aleg aleator 3 bilete în C_{30}^4 moduri.

Numărul de cazuri favorabile: cel puţin un bilet dintre cele cumpărate este câştigător înseamnă: un bilet este cu câstig şi 3 bilete fără câştig (alese în $C_3^1 \cdot C_{27}^3$ moduri) sau 2 bilete cu câştig şi 2 bilete fără câştig (alese în $C_3^2 \cdot C_{27}^2$ moduri) sau 3 bilete cu câştig şi 1 bilet fără câştig (alese în $C_3^3 \cdot C_{27}^1$ moduri).

$$P(A)=\frac{C_3^1 \cdot C_{27}^3}{C_{30}^4}+\frac{C_3^2 \cdot C_{27}^2}{C_{30}^4}+\frac{C_3^3 \cdot C_{27}^1}{C_{30}^4}=\frac{73}{203}.$$

Metoda II:

Definim evenimentele: A = {Cel puţin un bilet dintre cele 4 cumpărate este câştigător} şi $\overline{A}$ = { Niciun bilet din cele 4 cumpărate nu este cu câştig}

$$P(\overline{A})=\frac{C_{27}^4}{C_{30}^4}=\frac{130}{203}. \text{ Atunci, } P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{130}{203}=\frac{73}{203}.$$

Răspuns: $P(A)=\frac{73}{203}$.

19) Pentru participare la un sondaj, dintr-o clasă de 25 de elevi, se iau la întâmplare 2 elevi. Probabilitatea ca la sondaj să participe două fete este egală cu $\frac{11}{50}$. Determinaţi numărul de fete din clasă.

Rezolvare:

Notam: x numărul de fete din clasă, $2 \le x \le 25, x \in N$. Atunci:

Numărul de cazuri total egal posibile este $n=C_{25}^2=\frac{24 \cdot 25}{2}=12 \cdot 25$.

Numărul de cazuri favorabile este $m=C_x^2=\frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!}=\frac{(x-1)x}{2}$.

$$P(A)=\frac{C_x^2}{C_{25}^2}=\frac{x(x-1)}{24 \cdot 25} \Rightarrow \frac{x(x-1)}{24 \cdot 25}=\frac{11}{50} \Leftrightarrow x(x-1)=132 \Leftrightarrow x^2-x-132=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-11 \end{array}\right. \overset{2 \le x \le 25,\ x \in N}{\Longrightarrow} x=12.$$

Răspuns: 12 fete.

20) Într-un centru de tehnologii informaţionale activează 4 programatori, 5 ingineri şi 3 testieri. În luna iulie 8 angajaţi ai centrului, luaţi aleator, vor beneficia de concediu. Determinaţi probabilitatea ca în luna iulie în centru să rămână să activeze cel puţin câte un specialist de fiecare profil.

Rezolvare:

Numărul de cazuri totale egal posibile: se iau aleator 4 persoane din $4+5+3=12$ angajaţi $\Rightarrow n=C_{12}^4$.

Numărul de cazuri favorabile:

2 programatori	1 inginer	1 testier
↓	↓	↓
Aleși în C_4^2 moduri	Aleși în C_5^1 moduri	Aleși în C_3^1 moduri

sau

1 programator	1 inginer	2 testieri
↓	↓	↓
Aleși în C_4^1 moduri	Aleși în C_5^1 moduri	Aleși în C_3^2 moduri

sau

1 programator	2 ingineri	1 testier
↓	↓	↓
Aleși în C_4^1 moduri	Aleși în C_5^2 moduri	Aleși în C_3^1 moduri

$m = C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 + C_4^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 + C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2$

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 + C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 + C_3^2 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1}{C_{12}^4} = \frac{6\cdot 5\cdot 3 + 10\cdot 4\cdot 3 + 3\cdot 4\cdot 5}{495} = \frac{270}{495} = \frac{6}{11}.$$

Răspuns: $P(A) = \frac{6}{11}$.

21) Două urne conțin câte 4 bile albe și câte 5 bile negre. Din prima urnă se iau la întâmplare 3 bile și se pun în urna a doua. Determinați probabilitatea că în urna a doua să nu fie bile albe mai puține decât bile negre.

Rezolvare:

Numărul de cazuri totale egal posibile : $n = C_9^3 = 84$.

Cazuri favorabile: Dacă din prima urnă se iau 2 bile albe (alese în C_4^2 moduri) și una neagră (alese în C_5^1 moduri) atunci în urna a doua vor fi 6 bile albe și 6 bile negre. Sau, dacă din prima urnă se iau 3 albe (alese în C_4^3 moduri) atunci în urna a doua vor fi 7 bile albe și 5 bile negre. Deci $m = C_4^2 \cdot C_5^1 + C_4^3 = 34$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{34}{84} = \frac{17}{42}.$$

Răspuns: $P(A) = \frac{17}{42}$.

22) Dintr-o urnă ce conține 8 jetoane numerotate de la 1 la 8 s-au extras la întâmplare simultan 3 jetoane. Determinați probabilitatea ca suma numerelor de pe jetoanele extrase să fie mai mare decât suma numerelor de pe jetoanele rămase în urnă.

Rezolvare:

Numărul de cazuri totale egal posibile: $n = C_8^3 = 56$.

Cazuri favorabile: $m = 4$, dacă se extrag jetoanele: 8, 7, 6 sau 8, 7, 4 sau 8, 7, 5 sau 8, 6, 5.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}.$$

Răspuns: $P(A) = \frac{1}{14}$.

23) Colectivul de muncă al unei întreprinderi este format din 10 cupluri familiale. Pentru consiliul de administrare sunt luate la întâmplare 2 persoane. Determinați probabilitatea ca persoanele luate să nu formeze un cuplu familial.