АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ В НОВОМ ФОРМАТЕ

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ
ОТКРЫТОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР
НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Ю. П. Дудницын
А. В. Семенов

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11 класс

Контрольные работы в НОВОМ формате

Москва
«Интеллект-Центр»
2011

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721
Д 81

Под общей редакцией заведующего методической лабораторией математики Московского института открытого образования, к.п.н. А.В. Семенова

Рецензент – учитель математики ГБОУ СОШ № 129 СЗОУО г. Москвы, к.п.н. П.И. Самсонов

Рекомендовано лабораторией математики МИОО для использования в образовательном процессе общеобразовательных учреждений.

Дудницын, Ю. П.

Д 81 Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Контрольные работы в НОВОМ формате: [учебное пособие] / Ю. П. Дудницын, А. В. Семенов; [под общ. ред. А. В. Семенова]; Московский центр непрерывного математического образования. – Москва: Интеллект-Центр, 2011. – 64 стр.

ISBN 978-5-89790-835-6

Сборник предназначен для проведения тематического контроля знаний учащихся по алгебре и началам математического анализа за курс 11 класса. Он будет также полезен при подготовке к итоговой аттестации.

Контрольные работы ориентированы на учебник по алгебре и началам анализа для 10-11 классов под редакцией Колмогорова А.Н. (авторы: А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд – М.: Просвещение, 2007 и последующие издания).

Сборник поможет учителю повысить эффективность тематического контроля, учащемуся – подготовиться к итоговой аттестации в форме единого государственного экзамена.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721

Генеральный директор издательства «Интеллект-Центр»
М.Б. Миндюк

Редактор Д.П. Локтионов
Художественный редактор Е.Ю. Воробьева

Подписано в печать 29.08.2011. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 4,0. Тираж 5000 экз. Заказ № 1108980.

Издательство «Интеллект-Центр»
117342, Москва, ул. Бутлерова, д. 17Б

arvato ЯПК

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ISBN 978-5-89790-835-6

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Сборник предназначен для проведения контрольных работ по алгебре и началам анализа в 11 классе с целью проверки уровня усвоения учащимися 11 класса знаний и умений в объеме, установленном обязательным минимумом содержания образования. Он ориентирован на учебник по алгебре и началам анализа для 10–11 классов под редакцией Колмогорова А.Н. (авторы: А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд – М.: Просвещение, 2007 и последующие издания).

Материалы сборника будут также полезны учителям и учащимся, занимающимся по другим учебникам. Их можно использовать при организации тематического и обобщающего контроля, организации итогового повторения, а также для подготовки учащихся единому государственному экзамену.

Количество контрольных работ, предусмотренных традиционным планированием курса алгебры и начал математического анализа 11 класса (вариант тематического планирования приведен после введения), сохраняется, изменяется только структура самих работ. Каждая контрольная работа по алгебре и началам анализа, представленная в сборнике, состоит из двух частей.

Часть 1 содержит четыре задания базового уровня с кратким ответом (для них необходимо записать только ответ).

Часть 2 содержит три задания повышенного уровня – с развернутой формой ответа, к которым необходимо записать подробные решения в тетради для контрольных работ или на отдельном листе. Такая форма заданий присутствует в традиционных контрольных работах и хорошо знакома учащимся.

На выполнение каждой контрольной работы отводится 40–45 минут.

В конце сборника содержатся два приложения.

В приложении 1 представлены рекомендации по применению контрольных работ в учебном процессе и оценке результатов выполнения учащимися контрольной работы.

Проверка правильности выполнения работы учащегося производится учителем в соответствии с ответами к заданиям части 1 и критериями оценивания к заданиям части 2 (приложение 2). Выполнение задания из части 1 оценивается 1 баллом. За задание части 2 учащийся может получить от 0 до 2-х баллов в зависимости от правильности и полноты ответа.

Данный формат контрольных работ поможет и учителю, и учащемуся адаптироваться к формату единого государственного экзамена.

Предлагаемые контрольные работы примерные, каждый учитель вправе внести в них свои изменения в соответствии с профилем обучения и уровнем подготовленности учащихся класса.

Текущие контрольные работы выполняют прежде всего диагностическую и контролирующую функции, но нельзя исключать обучающую составляющую. Задания первой части предполагают проверку только одного ответа (как на ЕГЭ), но с целью формирования навыков самоконтроля лучше, если учащийся запишет решение, а потом даст ответ. С этой целью имеет смысл ставить один балл за правильное решение и правильный ответ.

Контрольные работы составлены на проверку знаний традиционного курса алгебры и начал анализа старшей школы. При профильном обучении математике в старшей школе инвариантность курса алгебры и начал анализа поддерживается предложенным набором контрольных работ, но учитель вправе некоторые задания изменить.

При оценивании выполнения заданий следует обращать внимание не только на правильность ответа, но и на правильность решения. В отличие от средней школы учащегося нужно ориентировать на получение правильного ответа «законными» способами, а не искать, за что бы похвалить. Разумная последовательность и даже жесткость предъявляемых требований в оценивании выполнения заданий с последующей корректировкой знаний позволит учащемуся получить знания школьного курса алгебры и начал анализа, сдать экзамен (в любой форме) и продолжать обучение в высшем учебном заведении.

ПЛАНИРОВАНИЕ

11 класс

Базовый уровень[1]

Учебник: А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд «Алгебра и начала анализа, 10–11» (Москва, Просвещение, 2007 г. и последующие издания)

№ уроков	Содержание учебного материала
1–4	Повторение: определение производной, производные функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$ $y = x^n$, где $n \in \mathbf{Z}$, правило вычисления производных, применение производных
	§7. Первообразная (9 ч)
5–8	Определение первообразной. Основное свойство первообразной
9–13	Три правила нахождения первообразных. Проверочная самостоятельная работа (20–25 мин)
	§8. Интеграл (10 ч)
14, 15	Площадь криволинейной трапеции
16–18	Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (Интеграл от a до b функции f как приращение первообразной F этой функции: $F(b) - F(a)$)
19–22	Применение интеграла (вычисление площади фигур и объемов тел)
23	**Контрольная работа №1**

[1] Примерное тематическое планирование учебного материала по алгебре и началам анализа. 11 класс. Базовый уровень разработано методистом лаборатории математики МИОО Саакяном С.М.

§9. Обобщение понятия степени (14 ч)	
24–27	Корень *n*-ой степени и его свойство
28–31	Иррациональные уравнения
32–36	Степень с рациональным показателем
37	**Контрольная работа №2**
§10. Показательная и логарифмическая функции (20 ч)	
38–40	Показательная функция
41–45	Решение показательных уравнений и неравенств. Проверочная самостоятельная работа (20–25 мин.)
46–48	Логарифмы и их свойства
49–51	Логарифмическая функция
52–56	Решение логарифмических уравнений и неравенств
57	**Контрольная работа №3**
§11. Производная показательной и логарифмической функции (44 ч)	
58–61	Производная показательной функции. (Число *e*, исследование функций, вычисление площадей)
62–65	Производная логарифмической функции. (Исследование функций, вычисление площадей)
66–69	Степенная функция. (Свойства, графики, производная, исследование функции)
70, 71	Понятие о дифференциальных уравнениях (радиоактивный распад, гармонические колебания)
72, 73	Решение задач по теме
74	**Контрольная работа №4**
Заключительное повторение курса алгебры и начал анализа (26 ч)	
75–101	Заключительное повторение курса алгебры и начал анализа. *Итоговая контрольная работа (2 ч)*

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Часть 1

1 Вычислите $f'(\pi)$, если

$$f(x) = \frac{x^3}{3\pi} + x + \sin x.$$

2 Вычислите интеграл

$$\int_{-2}^{1} \left(10x^4 + 1\right) \mathrm{d}x.$$

3 Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x) = \frac{4}{x^2} + 3\cos x + 3$$

на интервале $(0; +\infty)$.

4 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 1 - x^2 \text{ и } y = 0.$$

Часть 2

5 Докажите, что функция

$$F(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}\cos 2x + \sqrt{5}$$

является первообразной для функции

$$f(x) = 6x^2 + \sin 2x.$$

6 Для функции

$$f(x) = \sin 3x + 1$$

найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right)$.

7 Вычислите интеграл

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2}\,dx.$$

Контрольная работа № 1

Вариант 2

Часть 1

1 Вычислите $f'(0)$, если

$$f(x) = x^4 + 3x + \cos x.$$

2 Вычислите интеграл

$$\int_{-1}^{2} (8x^3 + 1)\,dx.$$

3 Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x) = \frac{6}{x^2} + 2\sin x + 3$$

на интервале $(0; +\infty)$.

4 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 1, \; y = 0 \text{ и } x = 2.$$

Часть 2

5 Докажите, что функция

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - 2x^2 - \sqrt{6}$$

является первообразной для функции

$$f(x) = \cos 2x - 4x.$$

6 Для функции

$$f(x) = \cos 3x + 1$$

найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{18}\right)$.

7 Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Контрольная работа № 2

Вариант 1

Часть 1

1 Вычислите значение выражения

$$\sqrt{25} \cdot 64^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{16}}.$$

2 Вычислите

$$\left(10^{-4} \cdot \frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}} + 20^{0}.$$

3 Решите уравнение

$$x^6 - 64 = 0.$$

4 Решите уравнение

$$\sqrt[5]{x^5 - 5x^2 + 5} = x.$$

Часть 2

5 Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{1}{a-b}\right)^{-1}.$$

6 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ x-y=40.\end{cases}$$

7 Решите неравенство

$$\sqrt{x+2}>x.$$

Контрольная работа № 2

Вариант 2

Часть 1

1 Вычислите значение выражения

$$\sqrt{36}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{32}}\cdot 81^{\frac{1}{4}}.$$

2 Вычислите

$$\left(4^{-3}\cdot\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}-12^{0}.$$

3 Решите уравнение

$$x^4-81=0.$$

4 Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x^3+2x^2-8}=x.$$

Часть 2

5 Упростите выражение

$$\left(\frac{2a^{\frac{1}{2}}}{a-4}-\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}+2}\right)\cdot\left(\frac{1}{a-4}\right)^{-1}.$$

6 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=2,\\ x-y=8.\end{cases}$$

7 Решите неравенство $\sqrt{x+1}<x-1$.

Полугодовая контрольная работа

(2 урока)

Вариант 1

Часть 1

1 Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или пеноблочный. Для фундамента из пеноблоков необходимо 2 кубометра пеноблоков и 4 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 2 тонны щебня и 20 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2450 рублей, щебень стоит 620 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 230 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешевый вариант?

2 Вычислите значение выражения

$$\sqrt[3]{-27}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{81}}\cdot 64^{\frac{1}{6}}.$$

3 Запишите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=2\left(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\right).$$

4 Сравните числа a и b,

если $a=\int\limits_{-1}^{2}\left(2x-5x^4\right)\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{2}^{3}\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

5 Найдите наибольшее целое отрицательное число, которое является решением неравенства $4^{1-x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$.

6 Найдите множество всех отрицательных чисел, принадлежащих области определения функции

$$y = \left(\frac{5-x}{x+4x^2}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

7 Решите уравнение $\sqrt{6-x-x^2} = x-3$.

Часть 2

8 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 + 1$, $y = 0$ и $x = 1$.

9 При каком значении a число 4 является корнем уравнения $\sqrt{4x+9} = \sqrt{x+a} + \sqrt{x}$?

10 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 27^x = 3^{7-y}, \\ \frac{1}{x} + 2 = \frac{12}{y}. \end{cases}$$

11 Решите неравенство $\frac{x}{\sqrt{x}} \le \sqrt{x^2-9}$.

Полугодовая контрольная работа

(2 урока)

Вариант 2

Часть 1

1 Семья из трех человек планирует поехать из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 660 рублей. Автомобиль расходует 8 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 19,5 рубля за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

2 Вычислите значение выражения

$$\sqrt[5]{-32}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{125}.$$

3 Запишите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

4 Сравните числа a и b,

если $a=\int\limits_{-1}^{2}\left(x+3x^2\right)\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{1}^{3}\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

5 Найдите наибольшее целое положительное число, которое является решением неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9^{2x-11}$.

6 Найдите множество всех положительных чисел, принадлежащих области определения функции

$$y = \sqrt[6]{\frac{x^2-3x}{1-x}}.$$

7 Решите уравнение $2x-3=\sqrt{x^2+x+5}$.

Часть 2

8 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1-x^3$, $y=0$ и $x=-1$.

9 При каком значении a число 6 является корнем уравнения $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+3}=\sqrt{4x+a}$?

10 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-9}=4^y, \\ \frac{6}{x}+\frac{1}{5y}=1. \end{cases}$$

11 Решите неравенство $\sqrt{4-x^2} \ge \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

Часть 1

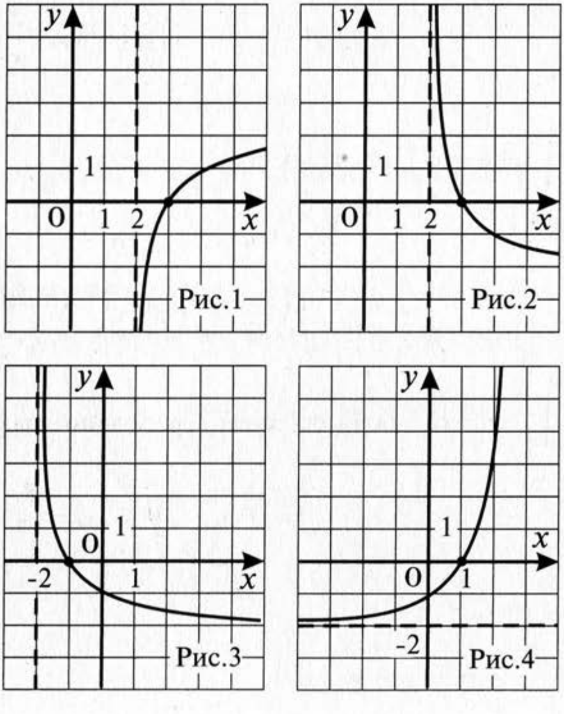
1 Найдите значение выражения

$$\log_{0,6}(\log_8 32) + 49^{\log_7 2}.$$

2 На каком рисунке изображен эскиз графика функции

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2).$$

Найдите область определения этой функции.



3 Решите уравнение

$$4^{x+3}+4^{x}=260 .$$

4 Найдите все целые решения неравенства

$$\log_{\frac{1}{4}}(2x-5)>-1 .$$

Часть 2

5 Решите неравенство

$$\log_{12}\left(x^{2}-3x-4\right)\leq 2+\log_{12}\frac{x+1}{x-4} .$$

6 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{2+\log_{2}\left(x^{2}+y^{2}\right)}=20, \\ \lg\left(x^{2}-y^{2}\right)-\lg(x-y)=0. \end{cases}$$

7 Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$f(x)=x^{\log_{2}x} \text{ и } g(x)=\frac{8}{x^{2}} .$$

Контрольная работа № 3

Вариант 2

Часть 1

1 Найдите значение выражения

$$\log_{1,2}\left(\log_{64}32\right)+9^{\log_3 5}.$$

2 На каком рисунке изображен эскиз графика функции

$$y=\log_{\frac{1}{3}}\left(x+3\right).$$

Найдите множество значений этой функции.

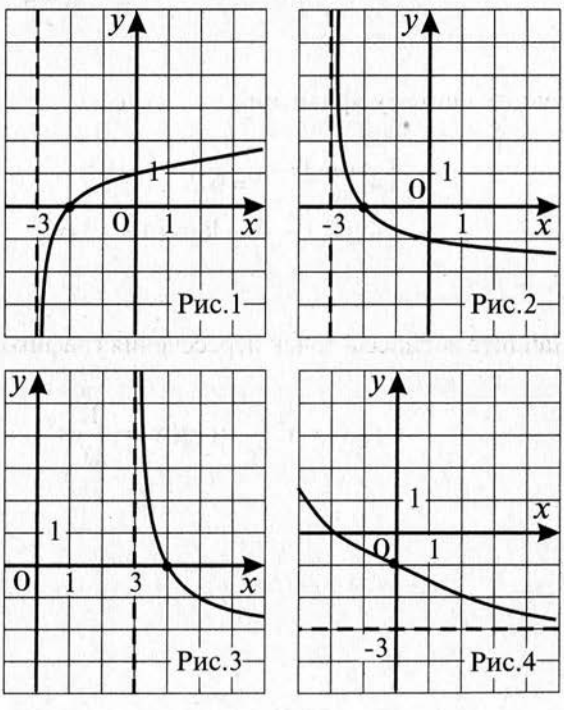


Рис.1 Рис.2 Рис.3 Рис.4

3 Решите уравнение

$$5^{x+1}+5^{x}=150.$$

4 Найдите все целые решения неравенства

$$\log_6(4x-11)<1.$$

Часть 2

5 Решите неравенство

$$\log_7\left(x^2-7x+12\right)\le 2+\log_7\frac{x-3}{x-4}.$$

6 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}4^{2+\log_4(x-y)}=64,\\ \log_2(x-y)+\log_2(x+y)=3.\end{cases}$$

7 Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$f(x)=x^{\log_3 x} \text{ и } g(x)=\frac{1}{27}x^4.$$

Контрольная работа № 4

Вариант 1

Часть 1

1 Вычислите

$$f'\left(\frac{4}{5}\right), \text{ если } f(x)=2\ln x-1 .$$

2 Найдите координаты общих точек графиков функций

$$y=x^{\sqrt{3}} \text{ и } y=x^{0,2} .$$

3 Решите уравнение

$$\ln x=\ln\left(2x^2-5\right)-\ln(x+4) .$$

4 Составьте уравнение касательной к графику функции $y=e^{\frac{x}{2}}$, проведенной через точку пересечения его с осью ординат.

Часть 2

5 Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \ln x - 4{,}5x^2.$$

6 Докажите, что функция $y = e^{4x}$ является решением дифференциального уравнения $y' = 4y$.

7 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{4}{x},\ y = 4,\ x = 4.$$

Контрольная работа № 4

Вариант 2

Часть 1

1 Вычислите

$$f'\left(\frac{2}{3}\right), \text{ если } f(x)=\frac{1}{2}\ln x+3.$$

2 Найдите координаты общих точек графиков функций

$$y=x^{\sqrt{5}} \text{ и } y=x^{0,7}.$$

3 Решите уравнение

$$\ln(x+3)=\ln\left(2x^2-4\right)-\ln x.$$

4 Составьте уравнение касательной к графику функции $y=e^{-2x}$, проведенной через точку пересечения его с осью ординат.

Часть 2

5 Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = 2x^2 - \ln x .$$

6 Докажите, что функция $y = e^{5x}$ является решением дифференциального уравнения $y' = 5y$.

7 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{2}{x},\ y = 3 - x .$$

Итоговая контрольная работа

(2 урока)

Вариант 1

Часть 1

1 Художественная студия приобретает 240 кг скульптурного гипса у одного их трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость (в рублях) покупки гипса с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена 1 кг гипса (в рублях)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	120	3000	
Б	110	2700	При заказе на сумму больше 35000 руб. доставка бесплатно
В	125	2400	При заказе на сумму больше 30000 руб. доставка бесплатно

2 Найдите значение выражения

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_2 \frac{\sqrt[3]{2}}{8} : 7^{2\log_{49} 5}.$$

3 Решите уравнение

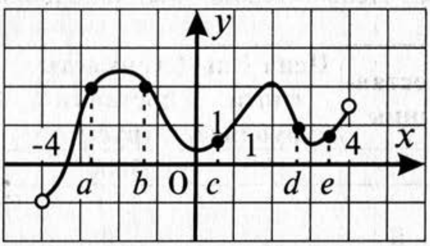
$$\sqrt{7-3x} = 1 - x.$$

4 Решите неравенство

$$2^{4-5x} > \frac{1}{32}.$$

5 Найдите все корни уравнения $6\cos^2 x = 5\sin x - 5$, принадлежащие промежутку $[-2\pi; 2\pi]$.

6 Функция $f(x)$ определена и дифференцируема в каждой точке интервала $(-4; 4)$. Сравните с нулем значения производной функции $f(x)$ в точках: a, b, c, d и e (см. рис.).



7 Напишите уравнение касательной к графику функции

$$y = x\ln 0,5x,$$

проведенной в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Часть 2

8 Докажите, что функция

$$y=e^{1-2x}-x$$

убывает на всей области определения.

9 Решите уравнение

$$\sqrt{6+5x-x^2}\cdot(\cos 3x-1)=0.$$

10 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-y^2\right)-2=0,\\ 4^{1+\log_4\left(x^2+y^2\right)}=16.\end{cases}$$

11 Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x}{\log_3(3x-2)}<1.$$

Итоговая контрольная работа

(2 урока)

Вариант 2

Часть 1

1 Для транспортировки 28 тонн груза на 1200 км можно использовать одного из трех перевозчиков. Тарифы перевозчиков приведены в таблице. Какова наименьшая стоимость (в рублях) транспортировки?

Поставщик	Стоимость перевозки одним автомобилем (в рублях на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	3700	3,5
Б	4300	5
В	9800	12

2 Найдите значение выражения

$$\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{\sqrt[4]{5}}{25} : 9^{\log_3 2}.$$

3 Решите уравнение

$$\sqrt{3x+4} = 2 - x.$$

4 Решите неравенство

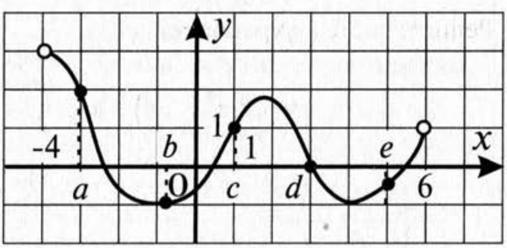
$$7^{2-3x} > \frac{1}{49}.$$

5 Найдите корни уравнения

$$7\sin^2 x - 6\cos x + 6 = 0,$$

принадлежащие промежутку $[-\pi; 3\pi]$.

6 Функция $f(x)$ определена и дифференцируема в каждой точке интервала $(-4; 6)$. Сравните с нулем значения производной функции $f(x)$ в точках: a, b, c, d и e (см. рис.).



7 Напишите уравнение касательной к графику функции

$$y = x\ln 2x,$$

проведенной через его точку с абсциссой $x_0 = 0{,}5$.

Часть 2

8 Докажите, что функция

$$y = e^{-x} - 5x$$

убывает на всей области определения.

9 Решите уравнение

$$\sqrt{4 - x^2} \cdot \sin 2x = 0.$$

10 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3\left(x^2 - y^2\right) = \log_3\left(x + y\right), \\ 2^{2 + \log_2\left(x^2 + y^2\right)} = 20. \end{cases}$$

11 Решите неравенство

$$1 + \log_6 \frac{x+3}{x+7} \geq \frac{1}{2} \log_{\sqrt{6}}\left(x - 1\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение № 1

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ МАТЕРИАЛОВ СБОРНИКА ДЛЯ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

В начале сборника приведено тематическое планирование по алгебре и началам математического анализа для 10–11 класса по учебнику «Алгебра и начала математического анализа, 10–11» А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд / под ред.А.Н. Колмогорова – М.: Просвещение, 2007 и последующие издания. В таблице показано, что изучение каждой темы завершается проведением соответствующей контрольной работой, представленной в данном сборнике. Учитель может заменить некоторые задания другими из соответствующей темы или уменьшить (увеличить) объем контрольной работы в зависимости от уровня подготовленности учащихся своего класса.

Для оценки предложенных работ можно использовать следующую шкалу. За каждое верно выполненное задание части 1 выставляется 1 балл. Количество баллов за каждое верно выполненное задание части 2 – 2 балла (в зависимости от полноты и правильности ответа).

Успешность выполнения каждой тематической контрольной работы определяется в соответствии со шкалой:

удовлетворительно – 4, 5 баллов;
хорошо – 6–8 баллов;
отлично – 9, 10 баллов;

для полугодовой и итоговой контрольных работ в соответствии со шкалой:

удовлетворительно – 6–8 баллов;
хорошо – 9–12 баллов;
отлично – 13–15 баллов.

Таким образом, оценку «4» учащийся может получить, только выполнив хотя бы одно из заданий части 2.

Учитель может скорректировать предлагаемую шкалу оценок с учетом особенностей класса.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	π	69	$F(x)=-\frac{4}{x}+3\sin x+3x+C$, где C – произвольное действительное число	$\frac{4}{3}$

Часть 2

5 Докажите, что функция

$$F(x)=2x^3-\frac{1}{2}\cos 2x+\sqrt{5}$$

является первообразной для функции

$$f(x)=6x^2+\sin 2x.$$

Решение.

$F(x)=2x^3-\frac{1}{2}\cos 2x+\sqrt{5}$, $D(F)=\mathbf{R}$.

$F'(x)=\left(2x^3-\frac{1}{2}\cos 2x+\sqrt{5}\right)'=6x^2+\sin 2x=f(x)$, $D(f)=\mathbf{R}$.

$F'(x)=f(x)$ при всех $x\in\mathbf{R}$, то есть $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

6 Для функции

$$f(x) = \sin 3x + 1$$

найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right)$.

Решение.

$f(x) = \sin 3x + 1,\ D(f) = \mathbf{R}$.

$F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + x + C$, где C – произвольное действительное число, $D(F) = \mathbf{R}$.

$F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\pi}{9}$. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = -\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + C$, $-\frac{1}{6} + \frac{\pi}{9} + C = \frac{\pi}{9}$, $C = \frac{1}{6}$,

$F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + x + \frac{1}{6}$.

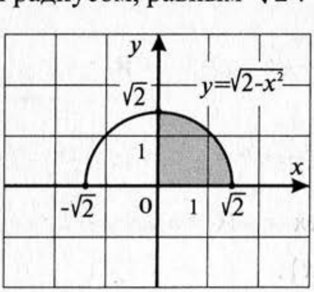
Ответ: $F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + x + \frac{1}{6}$.

7 Вычислите интеграл

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Решение.

Графиком функции $y = \sqrt{2 - x^2}$ является полуокружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом, равным $\sqrt{2}$.



Интеграл равен площади четверти круга:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Контрольная работа № 1

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	3	33	$F(x) = -\frac{6}{x} - 2\cos x + 3x + C$, где C – произвольное действительное число	$\frac{4}{3}$

Часть 2

5 Докажите, что функция

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - 2x^2 - \sqrt{6}$$

является первообразной для функции

$$f(x) = \cos 2x - 4x.$$

Решение.

$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - 2x^2 - \sqrt{6}$, $D(F) = \mathbf{R}$.

$F'(x) = \left(\frac{1}{2}\sin 2x - 2x^2 - \sqrt{6}\right)' = \cos 2x - 4x = f(x)$, $D(f) = \mathbf{R}$.

$F'(x) = f(x)$ при всех $x \in \mathbf{R}$, то есть $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

6 Для функции

$$f(x)=\cos 3x+1$$

найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{18};\frac{\pi}{18}\right)$.

Решение.

$f(x)=\cos 3x+1$, $D(f)=\mathbf{R}$.

$F(x)=\frac{1}{3}\sin 3x+x+C$, где C – произвольное действительное число, $D(F)=\mathbf{R}$.

$F\left(\frac{\pi}{18}\right)=\frac{\pi}{18}$. $F\left(\frac{\pi}{18}\right)=\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{18}+C$, $\frac{1}{6}+\frac{\pi}{18}+C=\frac{\pi}{18}$, $C=-\frac{1}{6}$,

$F(x)=\frac{1}{3}\sin 3x+x-\frac{1}{6}$.

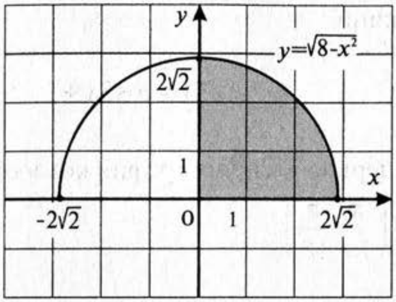
Ответ: $F(x)=\frac{1}{3}\sin 3x+x-\frac{1}{6}$.

7 Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Решение.

Графиком функции $y=\sqrt{8-x^2}$ является полуокружность с центром в точке $(0;\,0)$ и радиусом, равным $2\sqrt{2}$.



Интеграл равен площади четверти круга:

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi.$$

Ответ: 2π.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	10	21	–2; 2	–1; 1

Часть 2

5 Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{1}{a-b}\right)^{-1}.$$

Решение.

$$\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{1}{a-b}\right)^{-1}=\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a-b}-\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)\cdot(a-b)=$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a-b}\cdot(a-b)=a^{\frac{1}{2}}.$$

Ответ: $a^{\frac{1}{2}}$.

6 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ x-y=40.\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ x-y=40;\end{cases}\quad\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=40;\end{cases}\quad\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=4;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x}=7,\\ \sqrt{y}=3;\end{cases}\quad\begin{cases}x=49,\\ y=9.\end{cases}$$

Ответ: $x=49$, $y=9$.

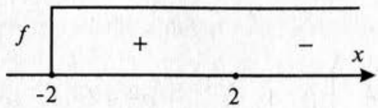
7 Решите неравенство

$$\sqrt{x+2}>x.$$

Решение.

$f(x)=\sqrt{x+2}-x$, $D(f)=[-2;\ +\infty)$.

$$f(x)=0:\ \sqrt{x+2}=x,\quad\begin{cases}x+2=x^2,\\ x\ge 0,\end{cases}\quad\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2,\end{array}\right.\\ x\ge 0,\end{cases}\quad x=2.$$



$f(x) > 0$ при $x \in [-2; 2)$.

Ответ: $[-2; 2)$.

Контрольная работа № 2

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	9	11	–3; 3	–2; 2

Часть 2

5 Упростите выражение

$$\left(\frac{2a^{\frac{1}{2}}}{a-4} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}+2}\right) \cdot \left(\frac{1}{a-4}\right)^{-1}.$$

Решение.

$$\left(\frac{2a^{\frac{1}{2}}}{a-4} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}+2}\right) \cdot \left(\frac{1}{a-4}\right)^{-1} = \left(\frac{2a^{\frac{1}{2}}}{a-4} - \frac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-4}\right) \cdot (a-4) =$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a-4} \cdot (a-4) = a^{\frac{1}{2}}+2.$$

Ответ: $a^{\frac{1}{2}}+2$.

6 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2, \\ x-y=8. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2, \\ x-y=8, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2, \\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=8, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x}=3, \\ \sqrt{y}=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=9, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: $x=9$, $y=1$.

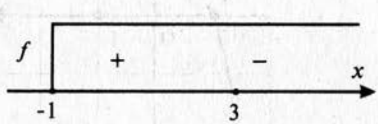
7 Решите неравенство $\sqrt{x+1}<x-1$.

Решение.

$f(x)=\sqrt{x+1}-x+1$, $D(f)=[-1;\,+\infty)$.

$$f(x)=0:\ \sqrt{x+1}=x-1,\ \begin{cases} x+1=(x-1)^2, \\ x\geq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-3x=0, \\ x\geq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3, \end{array}\right. \\ x\geq 1, \end{cases} \quad x=3.$$



$f(x)<0$ при $x\in(3;+\infty)$.

Ответ: $(3;+\infty)$

Полугодовая контрольная работа

Вариант 1

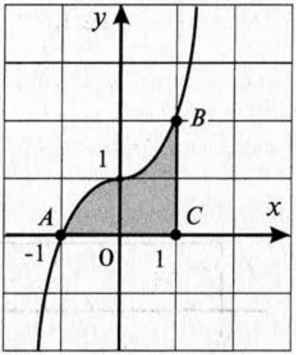
Часть 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	5820	–2	$F(x)=-2\sin x+C$	$a<b$	–5	$x<-\frac{1}{4}$	нет корней

Часть 2

8 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3+1$, $y=0$ и $x=1$.

Решение.
Найдем абсциссу точки пересечения линий, заданных уравнениями: $y=x^3+1$ и $y=0$.



$x^3=-1$, $x=-1$.

$$S_{ABC}=\int_{-1}^{1}\left(x^3+1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{4}+1\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)=2.$$

Ответ: 2.

9 При каком значении a число 4 является корнем уравнения $\sqrt{4x+9}=\sqrt{x+a}+\sqrt{x}$?

Решение.
Число 4 является корнем уравнения, следовательно,
$\sqrt{4\cdot 4+9}=\sqrt{4+a}+\sqrt{4}$
$5=\sqrt{4+a}+2$,
$a=5$.
При $a=5$ корнем исходного уравнения является число 4.
Ответ: 5.

10 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 27^x = 3^{7-y}, \\ \dfrac{1}{x}+2=\dfrac{12}{y}. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 3^{3x} = 3^{7-y}, \\ \dfrac{1}{x}+2=\dfrac{12}{y}. \end{cases} \begin{cases} 3x = 7-y, \\ \dfrac{1}{x}+2=\dfrac{12}{y}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7-3x, \\ \dfrac{1}{x}+2=\dfrac{12}{7-3x}; \end{cases} \begin{cases} 6x^2+x-7=0, \\ y=7-3x. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются две пары чисел:

$$\begin{cases} x=1, \\ y=4, \end{cases} \begin{cases} x=-\dfrac{7}{6}, \\ y=\dfrac{21}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x=1,\ y=4$;

$x=-\dfrac{7}{6},\ y=\dfrac{21}{2}$.

11 Решите неравенство $\frac{x}{\sqrt{x}} \le \sqrt{x^2-9}$.

Решение.

$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 9 \ge 0; \end{cases}$, $x \ge 3$.

$\sqrt{x} \le \sqrt{x^2-9}$,

$\begin{cases} x^2 - x - 9 \ge 0, \\ x \ge 3; \end{cases}$ $x \ge \frac{1+\sqrt{37}}{2}$.

Ответ: $\left[\frac{1+\sqrt{37}}{2}; +\infty\right)$.

Полугодовая контрольная работа

Вариант 2

Часть 1

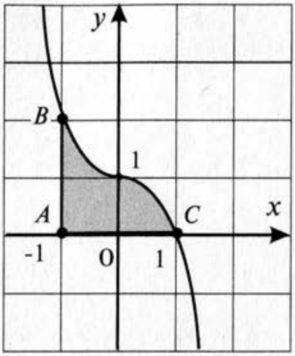
№ задания	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	1092	–5	$F(x) = -2\cos x + C$	$a > b$	4	$1 < x \le 3$	4

Часть 2

8 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^3$, $y = 0$ и $x = -1$.

Решение.

Найдем абсциссу точки пересечения линий, заданных уравнениями: $y = 1 - x^3$ и $y = 0$.



$x^3 = 1$, $x = 1$.

$$S_{ABC} = \int_{-1}^{1}\left(1 - x^3\right)\mathrm{d}\,x = \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(-1 - \frac{1}{4}\right) = 2.$$

Ответ: 2.

9 При каком значении a число 6 является корнем уравнения $\sqrt{x+10} - \sqrt{x+3} = \sqrt{4x+a}$?

Решение.

Число 6 является корнем уравнения, следовательно,

$\sqrt{6+10} - \sqrt{6+3} = \sqrt{4 \cdot 6 + a}$

$4 - 3 = \sqrt{24 + a}$,

$a = -23$.

При $a = -23$ корнем исходного уравнения является число 6.

Ответ: –23.

10 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-9} = 4^{y}, \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{1}{5y} = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2^{x-9}=4^{y}, \\ \dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{5y}=1; \end{cases} \begin{cases} 2^{x-9}=2^{2y}, \\ \dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{5y}=1; \end{cases} \begin{cases} x=9+2y, \\ \dfrac{6}{9+2y}+\dfrac{1}{5y}=1; \end{cases} \begin{cases} x=9+2y, \\ 10y^2+13y-9=0. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются две пары чисел:

$$\begin{cases} x=5,4, \\ y=-1,8, \end{cases} \begin{cases} x=10, \\ y=0,5. \end{cases}$$

Ответ: $x=5,4,\ y=-1,8;\ x=10,\ y=0,5$.

11 Решите неравенство $\sqrt{4-x^2} \geq \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.

Решение.

$$\sqrt{4-x^2} \geq \frac{|x|}{x}$$

$$\begin{cases} x>0, \\ \sqrt{4-x^2} \geq 1; \end{cases} \begin{cases} x>0, \\ 4-x^2 \geq 1; \end{cases} \quad 0<x \leq \sqrt{3}.$$

$$\begin{cases} x<0, \\ \sqrt{4-x^2} \geq -1; \end{cases} \begin{cases} x<0, \\ 4-x^2 \geq 0; \end{cases} \quad -2 \leq x<0.$$

Ответ: $-2 \leq x<0$, $0<x \leq \sqrt{3}$.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	3	Рис.2, $(2;+\infty)$	1	3; 4

Часть 2

5 Решите неравенство

$$\log_{12}\left(x^2-3x-4\right)\le 2+\log_{12}\frac{x+1}{x-4}.$$

Решение.

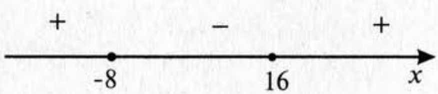
Область допустимых значений переменной:

$$\begin{cases} x^2-3x-4>0, \\ \dfrac{x+1}{x-4}>0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-4)(x+1)>0, \\ \dfrac{x+1}{x-4}>0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>4. \end{array}\right.$$

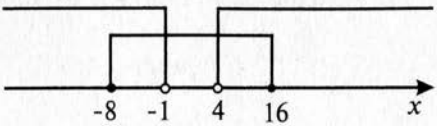
$$\log_{12}\left(x^2-3x-4\right)\le 2+\log_{12}\frac{x+1}{x-4},$$

$$\log_{12}\left(x^2-3x-4\right)-\log_{12}\frac{x+1}{x-4}\le 2,\ \log_{12}\frac{(x+1)(x-4)(x-4)}{x+1}\le 2,$$

$$\log_{12}(x-4)^2\le\log_{12}12^2,\ (x-4)^2\le 12^2,\ (x-16)(x+8)\le 0,\ -8\le x\le 16.$$



С учетом области допустимых значений переменной



получаем: $[-8;-1)\cup(4;16]$.

Ответ: $[-8;-1)\cup(4;16]$.

6 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{2+\log_2\left(x^2+y^2\right)}=20, \\ \lg\left(x^2-y^2\right)-\lg(x-y)=0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2^{2+\log_2\left(x^2+y^2\right)}=20, \\ \lg\left(x^2-y^2\right)-\lg(x-y)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^2\cdot 2^{\log_2\left(x^2+y^2\right)}=20, \\ \lg\left(x^2-y^2\right)=\lg(x-y); \end{cases} \begin{cases} 4\left(x^2+y^2\right)=20, \\ x^2-y^2=x-y, \\ x-y>0, \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y=1, \end{array}\right. \\ x-y>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x+y=1, \\ x-y>0, \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$$

Ответ: $x=2,\ y=-1$.

7 Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$f(x)=x^{\log_2 x} \text{ и } g(x)=\frac{8}{x^2}.$$

Решение.

$f(x)=g(x)$ при $x>0$.

$x^{\log_2 x}=\frac{8}{x^2}$, $\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2\frac{8}{x^2}$, $\log_2 x\cdot\log_2 x=\log_2 8-\log_2 x^2$,

$(\log_2 x)^2+2\log_2 x-3=0$,

$\log_2 x=1$ или $\log_2 x=-3$; $x=2$. $x=\frac{1}{8}$.

Ответ: $x=\frac{1}{8}, x=2$.

Контрольная работа № 3

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	24	Рис.2, $(-3;+\infty)$	2	3; 4

Часть 2

5 Решите неравенство

$$\log_7\left(x^2-7x+12\right)\le 2+\log_7\frac{x-3}{x-4}.$$

Решение.

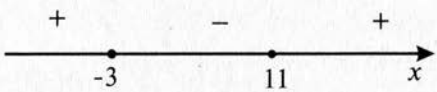
Область допустимых значений переменной: $\begin{cases} x^2-7x+12>0, \\ \dfrac{x-3}{x-4}>0; \end{cases}$

$$\begin{cases}(x-4)(x-3)>0,\\ \dfrac{x-3}{x-4}>0;\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}x<3\\ x>4.\end{array}\right.$$

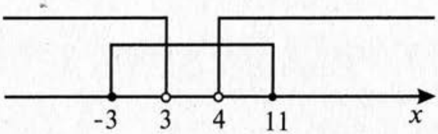
$\log_7\left(x^2-7x+12\right)\le 2+\log_7\dfrac{x-3}{x-4}$,

$\log_7\left(x^2-7x+12\right)-\log_7\dfrac{x-3}{x-4}\le 2$, $\log_7\dfrac{(x-3)(x-4)(x-4)}{x-3}\le 2$,

$\log_7(x-4)^2\le\log_7 7^2$, $(x-4)^2\le 7^2$, $(x-11)(x+3)\le 0$, $-3\le x\le 11$.



С учетом области допустимых значений переменной



получаем: $[-3;3)\cup(4;11]$.

Ответ: $[-3;3)\cup(4;11]$.

6 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}4^{2+\log_4(x-y)}=64,\\ \log_2(x-y)+\log_2(x+y)=3.\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 4^{2+\log_4(x-y)} = 64, \\ \log_2(x-y)+\log_2(x+y)=3. \end{cases} \quad \begin{cases} 4^2 \cdot 4^{\log_4(x-y)} = 64, \\ \log_2(x-y)+\log_2(x+y)=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16(x-y)=64, \\ \log_2(x-y)(x+y)=\log_2 8, \\ x+y>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=4, \\ x+y=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$$

Ответ: $x=3,\ y=-1$.

7 Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$f(x)=x^{\log_3 x} \text{ и } g(x)=\frac{1}{27}x^4.$$

Решение.

$f(x)=g(x)$ при $x>0$.

$x^{\log_3 x}=\frac{1}{27}x^4$, $\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3\frac{1}{27}x^4$,

$\log_3 x\cdot\log_3 x=-\log_3 27+\log_3 x^4$, $(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3=0$,

$\log_3 x=1$ или $\log_3 x=3$; $x=3$, $x=27$.

Ответ: $x=3$, $x=27$.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	2,5	(0; 0), (1; 1)	5	$y=\frac{1}{2}x+1$

Часть 2

5 Найдите промежутки возрастания и убывания функции

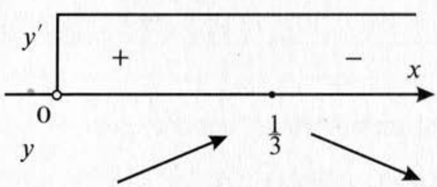
$$y = \ln x - 4{,}5x^2 .$$

Решение.

$y = \ln x - 4{,}5x^2$, $D(y) = (0; +\infty)$.

$y' = \dfrac{1}{x} - 9x$, $D(y') = (0; +\infty)$.

$y'(x) = 0$, $\dfrac{1-9x^2}{x} = 0$ при $x = \dfrac{1}{3}$.



$y' \geq 0$ при $x \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right]$, следовательно, функция $y(x)$ возрастает на промежутке $\left(0; \dfrac{1}{3}\right]$;

$y' \leq 0$ при $x \in \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$, следовательно, функция $y(x)$ убывает на промежутке $\left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: функция $y(x)$ возрастает на промежутке $\left(0; \dfrac{1}{3}\right]$ и убывает на промежутке $\left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

6 Докажите, что функция $y = e^{4x}$ является решением дифференциального уравнения $y' = 4y$.

Решение.

$y = e^{4x}$, $D(y) = \mathbf{R}$.

$y' = 4e^{4x}$, $D(y') = \mathbf{R}$.

$y' = 4 \cdot e^{4x} = 4y$, то есть функция $y = e^{4x}$ является решением дифференциального уравнения $y' = 4y$.

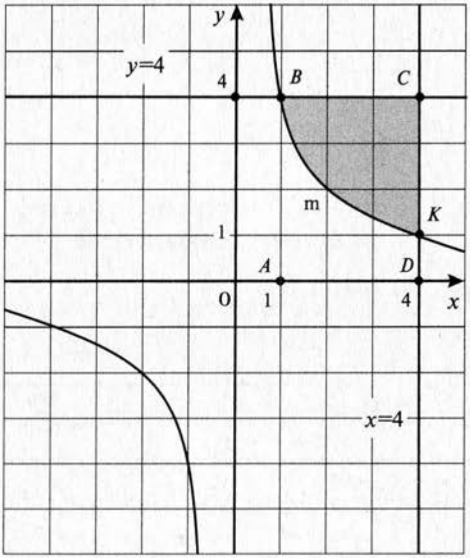
7 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{4}{x},\ y = 4,\ x = 4.$$

Решение.

Найдем координаты точек пересечения: $\frac{4}{x} = 4$, $x = 1$.

$A(1; 0)$, $B(1; 4)$, $C(4; 4)$, $D(4; 0)$, $K(4; 1)$.



$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 4 \cdot 3 = 12$.

$S_{ABmKD} = \int\limits_1^4 \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x = 4\ln x\Big|_1^4 = 4\ln 4$.

$S = S_{ABCD} - S_{ABmKD} = 12 - 4\ln 4$.

Ответ: $12 - 4\ln 4$.

Контрольная работа № 4

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	0,75	(0; 0), (1; 1)	4	$y = -2x + 1$

Часть 2

5 Найдите промежутки возрастания и убывания функции

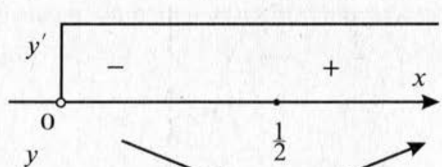
$$y = 2x^2 - \ln x.$$

Решение.

$y = 2x^2 - \ln x$, $D(y) = (0; +\infty)$.

$y' = 4x - \frac{1}{x}$, $D(y') = (0; +\infty)$.

$y'(x) = 0$, $\frac{4x^2 - 1}{x} = 0$ при $x = \frac{1}{2}$.



$y' \geq 0$ при $x \in \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$, следовательно, функция $y(x)$ возрастает на промежутке $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$;

$y' \leq 0$ при $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$, следовательно, функция $y(x)$ убывает на промежутке $\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Ответ: функция $y(x)$ возрастает на промежутке $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ и убывает на промежутке $\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$.

6 Докажите, что функция $y = e^{5x}$ является решением дифференциального уравнения $y' = 5y$.

Решение.

$y = e^{5x}$, $D(y) = \mathbf{R}$.

$y' = 5e^{5x}$, $D(y') = \mathbf{R}$.

$y' = 5 \cdot e^{5x} = 5y$, то есть функция $y = e^{5x}$ является решением дифференциального уравнения $y' = 5y$.

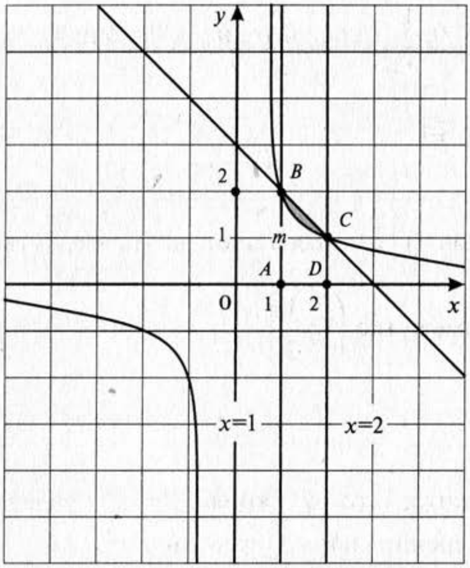
7 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{2}{x},\ y = 3 - x.$$

Решение.

Найдем координаты точек пересечения: $\dfrac{2}{x} = 3 - x$, $x = 1$ и $x = 2$.

$A(1;\,0)$, $B(1;\,2)$, $C(2;\,1)$, $D(2;\,0)$.



$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AD = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

$$S_{ABmCD} = \int_1^2 \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln x\Big|_1^2 = 2\ln 2.$$

$$S = S_{ABCD} - S_{ABmCD} = \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

Ответ: $\dfrac{3}{2} - 2\ln 2$.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	29100	$\frac{16}{15}$	-3	$x<1{,}8$

№ задания	5	6	7
Ответ	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$ $-\frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}$	$f'(a)>0$, $f'(b)<0$, $f'(c)>0$, $f'(d)<0$, $f'(e)>0$	$y=x-2$

Часть 2

8 Докажите, что функция

$$y=e^{1-2x}-x$$

убывает на всей области определения.

Решение.

$y=e^{1-2x}-x$, $D(y)=\mathbf{R}$.

$y'=-2e^{1-2x}-1$, $D(y')=\mathbf{R}$.

$y'<0$ при любом x, так как $e^{1-2x}>0$ при всех $x\in\mathbf{R}$.

Так как $y'<0$ при $x\in\mathbf{R}$, то функция $y(x)$ убывает на $\mathbf{R}$.

9 Решите уравнение

$$\sqrt{6+5x-x^2}\cdot(\cos 3x-1)=0.$$

Решение.

$\sqrt{6+5x-x^2}\cdot(\cos 3x-1)=0$.

$6+5x-x^2\ge 0$, $x^2-5x-6\le 0$, $-1\le x\le 6$.

$$\begin{cases}\cos 3x-1=0,\\ -1\le x\le 6;\end{cases}\quad \begin{cases}3x=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ -1\le x\le 6;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{2\pi}{3}n,\ n\in\mathbf{Z},\\ -1\le x\le 6.\end{cases}$$

$-1\le\dfrac{2\pi}{3}n\le 6$, $\quad\dfrac{-3}{2\pi}\le n\le\dfrac{18}{2\pi}$,

$n=0;1;2:\ \ x=0;\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{4\pi}{3}$.

$\sqrt{6+5x-x^2}=0$ при $x=-1$ и при $x=6$.

Корни уравнения: $-1;\ 0;\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{4\pi}{3};6$.

Ответ: $-1;\ 0;\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{4\pi}{3};6$.

10 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-y^2\right)-2=0,\\ 4^{1+\log_4\left(x^2+y^2\right)}=16.\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-y^2\right)-2=0,\\ 4^{1+\log_4\left(x^2+y^2\right)}=16.\end{cases}\qquad \begin{cases}x^2-y^2=2,\\ x^2+y^2=4;\end{cases}\qquad \begin{cases}x^2=3,\\ y^2=1.\end{cases}$$

Решениями этой системы являются четыре пары чисел:

$$\begin{cases}x=-\sqrt{3},\\ y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=-\sqrt{3},\\ y=1,\end{cases}\begin{cases}x=\sqrt{3},\\ y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=\sqrt{3},\\ y=1.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases}x=-\sqrt{3},\\ y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=-\sqrt{3},\\ y=1,\end{cases}\begin{cases}x=\sqrt{3},\\ y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=\sqrt{3},\\ y=1.\end{cases}$

11 Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x}{\log_3(3x-2)}<1.$$

Решение.

$\frac{\log_3 x}{\log_3(3x-2)}<1$, $\frac{\log_3 x-\log_3(3x-2)}{\log_3(3x-2)}<0$.

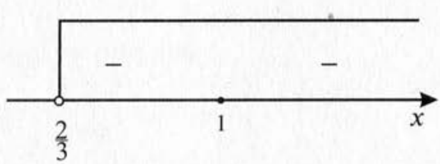
$f(x)=\frac{\log_3 x-\log_3(3x-2)}{\log_3(3x-2)}$.

$D(f):\begin{cases} x>0, \\ 3x-2>0, \\ 3x-2\neq 1; \end{cases} \begin{cases} x>\frac{2}{3}, \\ x\neq 1. \end{cases}$

$f(x)=0:\ \log_3 x=\log_3(3x-2),\ x=1$.

$f(x)$ – непрерывна в каждой точке $D(f)$,

$f(0{,}9)<0,\ f(3)<0$



$f(x)<0$ при $x\in\left(\frac{2}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $\left(\frac{2}{3};1\right)$, $(1;+\infty)$.

Итоговая контрольная работа

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	352800	1,75	0	$x<\frac{4}{3}$

№ задания	5	6	7
Ответ	$x=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$ $0,\ 2\pi$	$f'(a)<0$, $f'(b)>0$, $f'(c)>0$, $f'(d)<0$, $f'(e)>0$	$y=x-0{,}5$

Часть 2

8 Докажите, что функция

$$y=e^{-x}-5x$$

убывает на всей области определения.

Решение.

Функция $f(x)=e^{-x}=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ – убывающая на $\mathbf{R}$, $g(x)=-5x$ – убывающая на $\mathbf{R}$. Функция $y(x)$ убывает на $\mathbf{R}$ как сумма двух убывающих функций.

9 Решите уравнение

$$\sqrt{4-x^2}\cdot\sin 2x=0.$$

Решение.

$4-x^2\ge 0$, $-2\le x\le 2$.

$\begin{cases}\sin 2x=0,\\ -2\le x\le 2;\end{cases}\ \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z},\\ -2\le x\le 2.\end{cases}$

$-2\le\dfrac{\pi}{2}n\le 2$,

$-\dfrac{4}{\pi}\le n\le\dfrac{4}{\pi}$,

$n=-1;0;1:\ x=-\dfrac{\pi}{2};0;\dfrac{\pi}{2}$.

$\sqrt{4-x^2}=0$ при $x=-2$ и $x=2$.

Корни уравнения: -2; $-\dfrac{\pi}{2}$; 0; $\dfrac{\pi}{2}$; 2.

Ответ: -2; $-\dfrac{\pi}{2}$; 0; $\dfrac{\pi}{2}$; 2.

10 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_3\left(x^2-y^2\right)=\log_3\left(x+y\right),\\ 2^{2+\log_2\left(x^2+y^2\right)}=20.\end{cases}$$

Решение.

$\begin{cases}x^2-y^2>0,\\ x+y>0,\\ x^2+y^2>0;\end{cases}\ \begin{cases}x-y>0,\\ x+y>0.\end{cases}\ (1)$

$\begin{cases}x^2-y^2=x+y,\\ x^2+y^2=5;\end{cases}\ \begin{cases}x-y=1,\\ x^2+y^2=5;\end{cases}\ \begin{cases}x=y+1,\\ 2y^2+2y-4=0:\end{cases}$

пара чисел: $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ – удовлетворяет условию (1),

пара чисел: $\begin{cases} x=-1, \\ y=-2 \end{cases}$ – не удовлетворяет условию (1).

Ответ: $x=2;\ y=1$.

11 Решите неравенство

$$1+\log_6 \frac{x+3}{x+7} \geq \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}(x-1).$$

Решение.

$1+\log_6 \frac{x+3}{x+7} \geq \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}(x-1)$.

$\begin{cases} \dfrac{x+3}{x+7}>0, \\ x-1>0; \end{cases}$ $x>1$.

$1+\log_6 \frac{x+3}{x+7} \geq \log_6(x-1)$, $\log_6 \frac{6(x+3)}{x+7} \geq \log_6(x-1)$.

$\begin{cases} \dfrac{6(x+3)}{x+7} \geq x-1, \\ x>1; \end{cases}$ $\begin{cases} 6(x+3) \geq (x-1)(x+7), \\ x>1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \leq 25, \\ x>1; \end{cases}$ $1<x\leq 5$.

Ответ: $1<x\leq 5$.

Для заметок

ИНТЕЛЛЕКТ-ЦЕНТР

Учебные материалы для подготовки к ЕГЭ и ГИА

Тетради для тематического и итогового контроля

Сборники тестовых заданий

Дидактические материалы

Материалы для развития интеллектуальных способностей

Учебные пособия, реализующие современные технологии в обучении и контроле учащихся

ISBN 978-5-89790-835-6

9 785897 908356 >

По вопросам оптовых закупок и заключения договоров обращайтесь по тел./факсу: (495) 330-43-47, 330-08-83

Ждем Ваших писем: Москва, 117485, а/я 18

E-mail: incent@com2com.ru

http: www.intellectcentre.ru