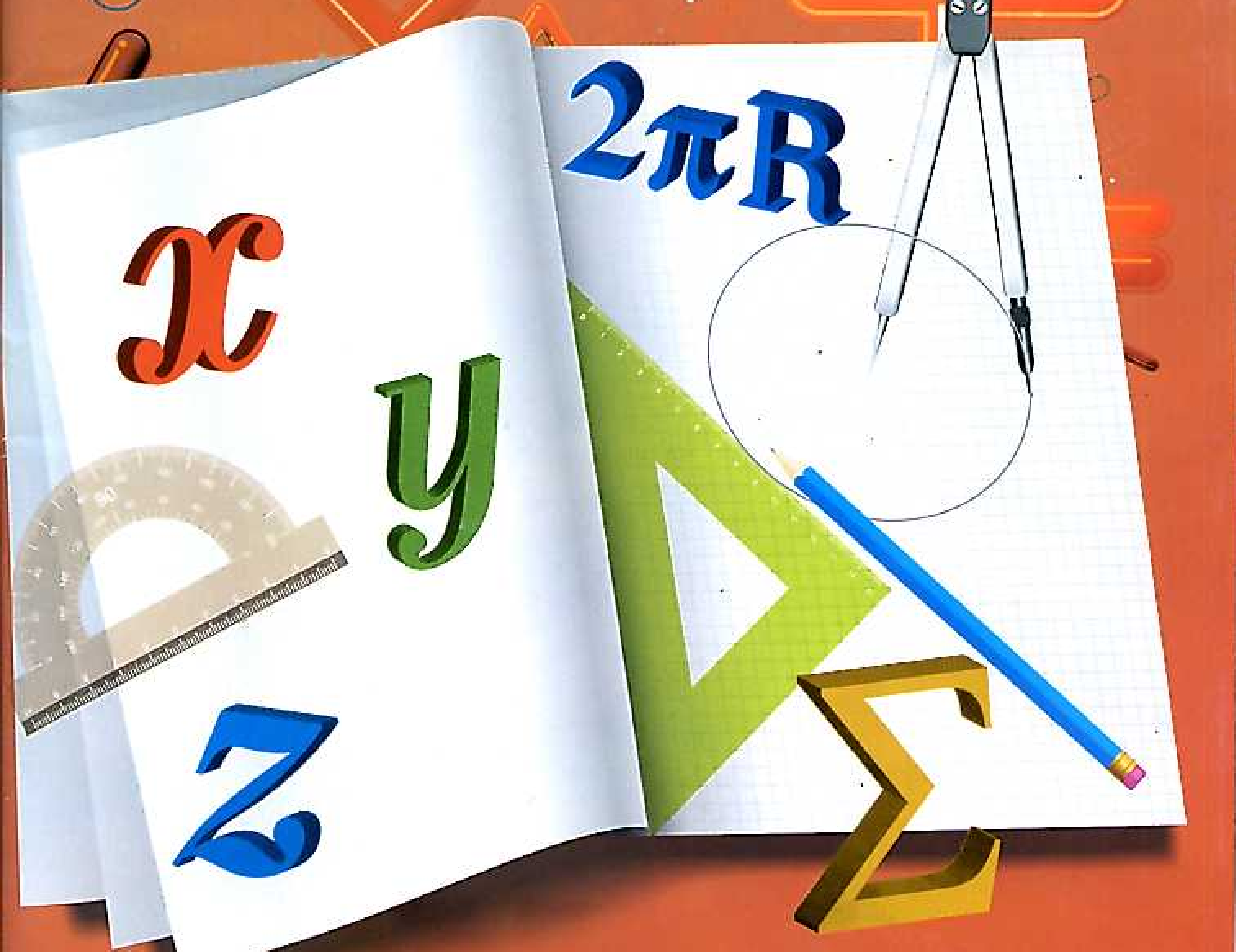
Готовимся к ГИА

ИНТЕЛЛЕКТ-ЦЕНТР

АЛГЕБРА

9 класс

ПРАКТИКУМ



Г.Д. Карташёва, Л.Б. Крайнева

Алгебра
9 класс

ПРАКТИКУМ

ГОТОВИМСЯ К ГИА

Москва
«Интеллект-Центр»
2013

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721
К27

Карташёва, Г. Д.
К27 Алгебра. 9 класс. Практикум. Готовимся к ГИА: [учебное пособие] / Г.Д. Карташёва, Л.Б. Крайнева. – Москва: Интеллект-Центр, 2013. – 120 с.

ISBN 978-5-00026-018-0

Данное пособие представляет собой практикум по решению задач основных тем курса алгебры 9 класса и предназначено для закрепления и систематизации знаний учащимися, выработки прочных навыков алгебраических преобразований и решения уравнений и неравенств курса математики 9 класса.

Каждая тема содержит краткий теоретический материал, приведены опорные задачи с решениями, а также задания базового и повышенного уровня сложности для самостоятельного решения учащимися. В конце каждой темы даны проверочные работы для самоконтроля и диагностики знаний и умений учащихся и их последующей коррекции.

Пособие написано в соответствии с программой курса алгебры 9 класса, ориентированной на учебник «Алгебра 9», авторов Ю. Н. Макарычева и др., но может быть использовано и при работе по другим учебникам.

Пособие адресовано учащимся 9 класса, их родителям, учителям математики и методистам.

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721

Генеральный директор издательства «Интеллект-Центр»
М. Б. Миндюк

Редактор Д. П. Локтионов
Художественный редактор Е. Ю. Воробьева

Подписано в печать 13.09.2013. Формат 60x84/8.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 15,0. Тираж 5000 экз.

Издательство «Интеллект-Центр»
125445, Москва, ул. Смольная, д. 24, оф. 712

ISBN 978-5-00026-018-0

Предисловие

Данное пособие представляет собой практикум по решению задач основных тем курса алгебры 9 класса и предназначено для закрепления и систематизации знаний учащимися, выработки прочных навыков алгебраических преобразований выражений и решения уравнений и неравенств, их систем, задач с помощью уравнений, а также самостоятельного повторения основного материала курса алгебры 9 класса.

Каждая тема включает в себя:

– опорный теоретический материал;

– образцы решения задач по данной теме;

– задания для самостоятельного решения.

В разделе «Проверочные работы» предлагаются тестовые задания в новом формате, предназначенные не только для самоконтроля, но и для ознакомления учащихся со структурно-содержательным аспектом материалов ГИА. В каждой проверочной работе базовый уровень курса алгебры 9 класса представлен заданиями нескольких видов:

1) задания с выбором ответа (из четырёх ответов необходимо выбрать верный и записать номер этого ответа в специальной таблице);

2) задания с кратким ответом (для них необходимо записать ответ в той же таблице);

3) задания на соотнесение (для них необходимо записать соответствие между двумя множествами математических объектов, например, между уравнениями и корнями этих уравнений);

4) задания с развернутой формой ответа, к которым необходимо записать решение в специально отведенном для него месте.

Для выполнения заданий первых трёх видов рекомендуется использование черновика.

В конце пособия приведены некоторые справочные материалы курса алгебры 7–9 классов, а также ответы ко всем заданиям основной части пособия и к заданиям проверочных работ, отдельные комментарии к ним.

Предлагаемый материал поможет девятиклассникам отработать навыки решения задач по указанным темам, ликвидировать пробелы и систематизировать знания в процессе подготовки к ГИА. Пособие может быть использовано в учебном процессе учащимися для самостоятельной работы, а также учителями для индивидуального контроля на уроке.

Данное пособие ориентировано на учебник «Алгебра 9» авторов Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой, а также может быть использовано при работе по другим учебникам алгебры для 9 класса.

ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА КУРСА АЛГЕБРЫ 7–8-х КЛАССОВ

Для успешного изучения первых тем курса алгебры 9 класса из ранее изученного в 7–8 классах повторите:

1) понятия функции и графика функции;

2) свойства и графики функций: $y = kx + b$; $y = \dfrac{k}{x}$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$;

3) решение квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ по формулам:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};\ \text{где}\ D = b^2 - 4ac;$$

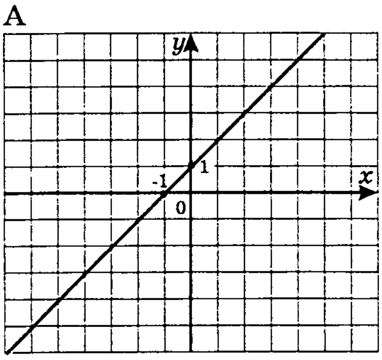
$$x_{1,2} = \frac{-\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a},\ \text{где}\ D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

(эти формулы удобно использовать, когда b – чётное число).

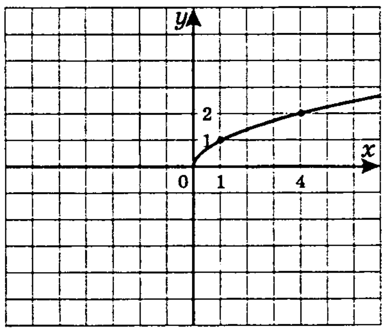
Выполните упражнения.

1. Функции заданы графиками:

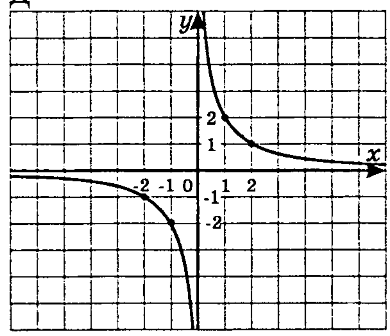
А



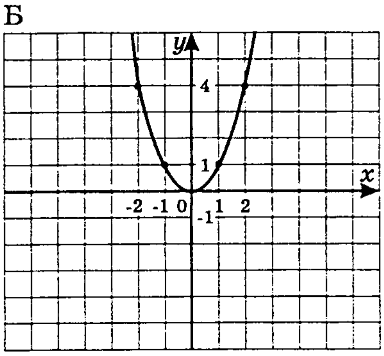
В



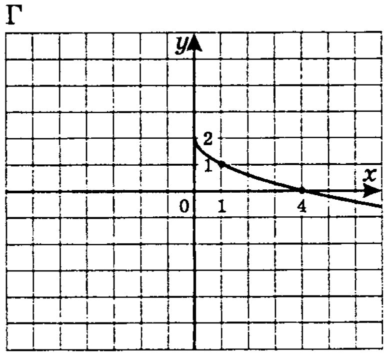
Д



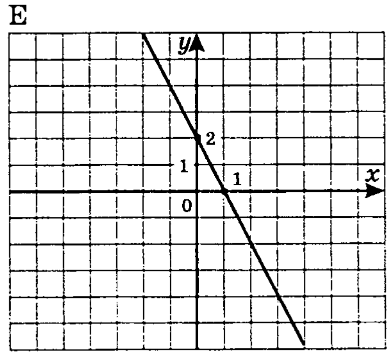
Б



Г



Е



Установите соответствие между графиками функций и формулами:

1) $y = x^2$;   3) $y = \dfrac{2}{x}$;   5) $y = -\sqrt{x} + 2$;

2) $y = \sqrt{x}$;   4) $y = x + 1$;   6) $y = -2x + 2$.

Заполните таблицу:

А	Б	В	Г	Д	Е

2. Постройте график функции:

а) $y = -3x + 2$; в) $y = x^2 + 4$; д) $y = -x^2$; ж) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$;

б) $y = \dfrac{-8}{x}$; г) $y = \dfrac{6}{x}$; е) $y = -\sqrt{x}$; з) $y = \dfrac{(x-2)^2}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}$.

3. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; д) $4x^2 - 25 = 0$; и) $(2x+1)^2 = 0$;

б) $5x^2 - 3x - 2 = 0$; е) $5x^2 = 0$; к) $x^2 - 10x = -25$;

в) $2x^2 - 5x = 0$; ж) $\dfrac{8}{x} - \dfrac{3}{x-5} = 0$; л) $-\dfrac{2}{3}x^2 + x - 1 = 0$;

г) $4x^2 + 6 = 0$; з) $(x-5)(x+1) = 0$; м) $(x-1)^2 = 16$;

4. Упростите выражение:

1) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ при: а) $x \geq 2$; б) $x \leq -3$

2) $\sqrt{x^2 + 10x + 25} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ при: а) $x \geq 1$; б) $-5 \leq x \leq 1$; в) $x < -5$.

5. С помощью графиков функций определите число корней уравнения:

а) $x^2 = 2x + 3$;

б) $x^3 = -x + 1$;

в) $\dfrac{6}{x} = \sqrt{x}$;

г) $x^2 = \dfrac{2}{|x|}$.

6. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{6} - \sqrt{15}\right)^2 + 3\left(\sqrt{40} - 2\right)$;

б) $\sqrt{\left(\sqrt{7} - 2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{7} - 5\right)^2}$;

в) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$;

г) $7 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2} + 3} - \dfrac{1}{\sqrt{2} - 3}\right) \cdot \left(\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)$;

д) $\dfrac{4 \cdot \left(\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} + \sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)}$.

Проверочная работа

Вариант 1

1. Найдите корни уравнения $2y^2 - 2y + 0,5 = 0$.

1) $-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 0.

2. Значения многочленов $x^2 - \frac{3x-1}{2}$ и $x-1$ равны при x, равном:

1) $-1; -\frac{3}{2}$; 2) $-1; \frac{3}{2}$; 3) $1; \frac{3}{2}$; 4) $1; -\frac{3}{2}$.

3. Сократите дробь $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{x-5}$.

1) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{x}-\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{x}+\sqrt{5}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$.

4. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку A (9; − 2). Найдите значение k.

1) $-\frac{9}{2}$; 2) $-\frac{2}{9}$; 3) 18; 4) − 18.

5. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{1+2x}{5}}$.

1) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

6. В каких четвертях расположен график функции $y = -x^2$?

1) I и II; 2) III и IV; 3) I и IV; 4) II и IV.

7. Функция задана формулой $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. Определите, при каких значениях x значение данной функции равно нулю.

8. Упростите выражение $\left(3+\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{5}-3\right)^2$.

9. Докажите, что уравнение $x^2 = \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2$ имеет целые корни, и найдите их.

10. Упростите выражение $\frac{a^2-x^2}{a^2+3} \cdot \left(\frac{3-ax}{a^2+2ax+x^2} + \frac{a}{a+x}\right)$.

Вариант 2

1. Найдите корни уравнения $x^2+2,8x-\frac{3}{5}=0$.

1) − 4; 0; 2) − 4; − 3; 3) $-3;\frac{1}{5}$; 4) − 3; 0.

2. Значения многочленов $x^2-\frac{2x-1}{3}$ и $2x+4$ равны при x, равном:

1) $-1;\frac{11}{3}$; 2) $1;-\frac{11}{3}$; 3) $\frac{5}{2};\frac{1}{6}$; 4) $-\frac{5}{2};-\frac{1}{6}$.

3. Сократите дробь $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$.

1) $\sqrt{x}-2$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$; 3) $\frac{1}{x-2}$; 4) $x-2$.

4. График функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку A (− 4; 9). Найдите значение k.

1) $-\frac{4}{9}$; 2) $\frac{9}{4}$; 3) − 36; 4) 36.

5. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\frac{3-5x}{2}}$.

1) $(-\infty;0,6)$; 2) $(-\infty;0,6]$; 3) $(0,6;+\infty)$; 4) $[0,6;+\infty)$.

6. В каких четвертях расположен график функции $y=-(x-3)^2$?

1) I и II; 2) II и IV; 3) III и IV; 4) I и IV.

7. Функция задана формулой $y=\frac{x^2-x-6}{x^2-4}$. Определите, при каких значениях x значение функции равно нулю.

8. Упростите выражение $\left(4-\sqrt{6}\right)^2-\left(4+\sqrt{6}\right)^2$.

9. Докажите, что уравнение $x^2=\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2$ имеет целые корни, и найдите их.

10. Упростите выражение $\frac{x^2}{x^2-2xy+y^2}:\left(\frac{x}{x+y}-\frac{xy}{y^2-x^2}\right)$.

I. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

1. Функции и их свойства

Нужно помнить, что функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Переменную x называют независимой переменной или аргументом. Переменную y называют зависимой переменной.

Говорят также, что переменная y является функцией от переменной x.

Значения зависимой переменной называют значениями функции.

Если зависимость переменной y от переменной x является функцией, то кратко это записывают так: $y = f(x)$.

Символом $f(x)$ обозначают также значение функции, соответствующее значению аргумента, равному x.

Множество значений x называют областью определения функции и обозначают $D(f)$.

Множество значений y называют множеством значений функции и обозначают $E(f)$.

Пример. Дана функция $f(x) = x^2 + 6$.

Её область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Её область значений $E(f) = [6; +\infty)$

Найдем значения функции f, соответствующие значениям x, равным 3; – 4; 0:

$f(3) = 3^2 + 6 = 9 + 6 = 15$; $f(-4) = (-4)^2 + 6 = 16 + 6 = 22$; $f(0) = 0^2 + 6 = 6$.

Функция $y = f(x)$ считается заданной, если указаны её область определения и правило, по которому каждому значению x поставлено в соответствие единственное значение y.

Если функция $y = f(x)$ задана формулой и её область определения не указана, то считают, что область определения функции состоит из всех значений переменной x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Примеры: 1) $f(x) = x^2 - 5x$. Областью определения этой функции является множество всех действительных чисел. Можно записать: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) $f(x) = \dfrac{-3}{x+5}$. Областью определения этой функции является любое число, кроме -5, так как при $x = -5$ знаменатель дроби $\dfrac{-3}{x+5}$ равен 0, а деление на 0 не определено.

Можно записать так: $D = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции, т.е. это точки с координатами x и y. Кратко: $(x; y)$ или $(x; f(x))$.

Из курса алгебры 7–8-х классов нужно знать:

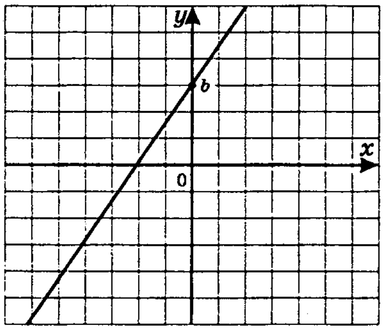
1) линейную функцию $y = kx + b$, где k и b – некоторые числа;

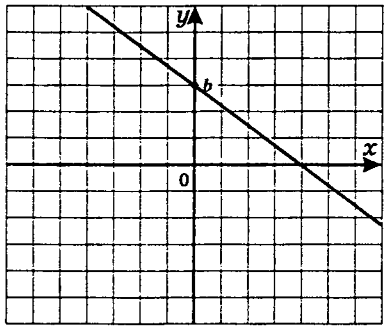
при $b = 0$ и $k \neq 0$ – прямая пропорциональность, $D = (-\infty; +\infty)$, $E = (-\infty; +\infty)$;

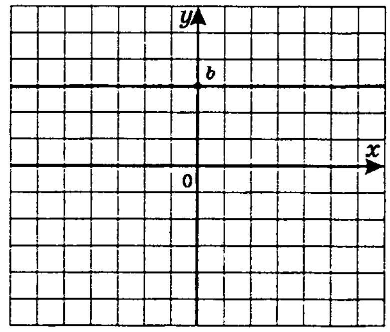
если $k = 0$, то $y = b$ и $D = (-\infty; +\infty)$, а $E = \{b\}$;

график линейной функции – прямая.

$y = kx + b$ $(k > 0)$	$y = kx + b$ $(k < 0)$	$y = kx + b$ $(k = 0)$





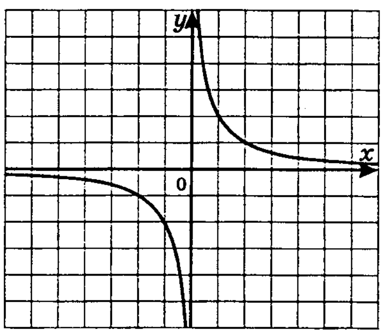


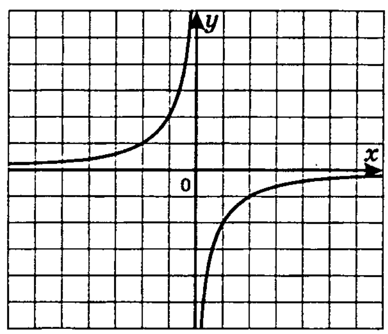
2) обратную пропорциональность $y = \dfrac{k}{x}$, $k \neq 0$,

$D = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, $E = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

График называется гиперболой.

$y = \dfrac{k}{x}$ $(k > 0)$	$y = \dfrac{k}{x}$ $(k < 0)$

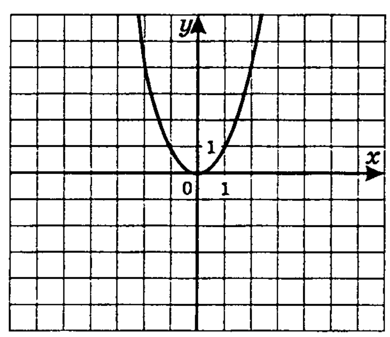




3) $y = x^2$,

$D = (-\infty;\ +\infty)$, $E = [0;\ +\infty)$.

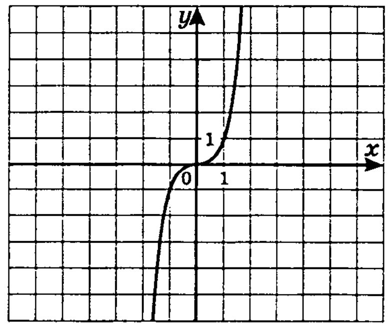
График называется параболой.



4) $y = x^3$;

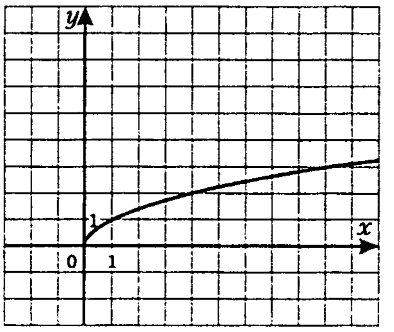
$D = (-\infty;\ +\infty)$ $E = (-\infty;\ +\infty)$.

График называется кубической параболой.



5) $y = \sqrt{x}$;

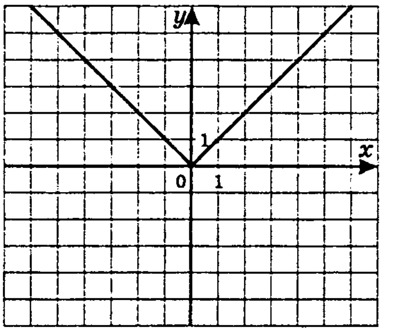
$D = [0; +\infty)$ $E = [0; +\infty)$.



6) $y = |x|$,

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \ge 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

$D = (-\infty; +\infty)$, $E = [0; +\infty)$.



7. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = -4x + 5$; в) $y = \dfrac{-2x}{6 - x}$; д) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2}$; ж) $y = x^2 + \sqrt{|x| - 2}$;

б) $y = x^2 - 6x + 2$; г) $y = \dfrac{-3}{(x-5)(x+2)}$; е) $y = \sqrt{2x - 8}$; з) $y = \sqrt{|3 - x| - 2x}$.

8. На рисунке изображён график функции $y = g(x)$, $D = [-6; 5]$.

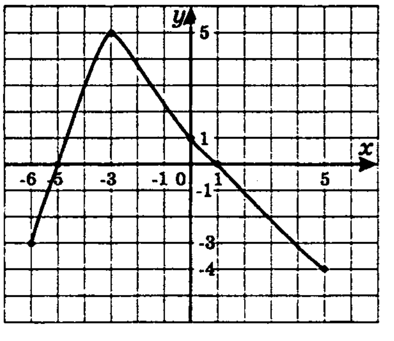
С помощью графика найдите:

а) $g(-3)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(5)$;

б) значения x, при которых $g(x) = 5$; $g(x) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значения функции;

г) область значений функции.



9. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = 2,5 - 4x$; в) $y = -3,5x$; д) $y = \dfrac{6}{x - 2}$;

б) $y = \dfrac{-10}{x}$; г) $y = \dfrac{3}{|x|}$; е) $y = \dfrac{-8}{x + 4}$.

Укажите область определения каждой функции.

Свойства функций

Промежутки, в которых функция сохраняет знак, называют промежутками знакопостоянства.

Функция называется возрастающей в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

График функции, возрастающей в некотором промежутке, с увеличением x идёт вверх на этом промежутке.

Функция называется убывающей в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

График функции, убывающей в некотором промежутке, с увеличением x идёт вниз на этом промежутке.

Если функция возрастает на всей области определения, то её называют возрастающей функцией, а если убывает, то убывающей функцией.

Надо знать свойства функций $y = kx + b$ и $y = \frac{k}{x}$ (смотри учебник пункт 2).

Линейная функция $y = kx + b$ при $k > 0$ возрастающая, при $k < 0$ – убывающая.

Обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ убывает в $(-\infty; 0)$ и в $(0; +\infty)$; при $k < 0$ – возрастает в $(-\infty; 0)$ и в $(0; +\infty)$, но эта функция не является убывающей и не является возрастающей.

10. Найдите нули функции (если они существуют):

а) $y = -0,13x + 65$; в) $y = \frac{8 + 2x}{x^2 + 6}$; д) $y = \sqrt{x + 2}$;

б) $y = (3x - 15)(x + 3)$; г) $y = \frac{-8}{(x - 3)(x + 5)}$; е) $y = \sqrt{x - 1} - 2$.

11. Укажите область определения и нули функции:

а) $y = \frac{x - \sqrt{x + 5}}{x + 2}$; б) $y = \frac{4x^2 + 36x}{2 - \sqrt{15 - 6x}}$; в) $y = \frac{4x^2 - 16x}{2 - \sqrt{18 - 9x}}$.

12. При каких значениях x функция $y = f(x)$ обращается в нуль, принимает положительные и отрицательные значения, если:

а) $f(x) = -0,8x + 16$; б) $f(x) = 30x + 40$?

13. Какие из функций

$y = 9x - 7$; $y = -4x + 13$; $y = -49x - 50$; $y = x + 1$; $y = 5$; $y = -10$

являются:

а) возрастающими;
б) убывающими;
в) не являются ни возрастающими, ни убывающими?

14. При каких значениях a функция $y = (a + 3)x - 2$:

а) является возрастающей;
б) является убывающей;
в) не является ни возрастающей, ни убывающей?

15. Сравните $h(3)$ и $h(-3)$ если:

а) $h(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$; б) $h(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$; в) $h(x) = \dfrac{-x}{x^2+4}$.

16. Является ли возрастающей или убывающей функция:

а) $y = 6x + \sqrt{x}$; в) $y = x^2 + 2\sqrt{x}$; д) $y = -x^3 - \sqrt{x}$?

б) $y = -2x + \sqrt{-x}$; г) $y = x^3 + \sqrt{-x}$;

17. Функция задана формулой $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-1}$.

а) Найдите $f\left(\sqrt{2}+1\right)$.

б) Решите уравнение $f(x-1) = 1$.

в) Найдите область определения и нули функции.

18. Функция задана формулой:

а) $y = -3x + 9$; б) $y = \dfrac{x+4}{\sqrt{5x+15}}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{3x-18}}{x-1}$.

Определите, при каких значениях x $y(x) > 0$; $y(x) < 0$?

19. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $f(x) = 2,5 - 5x$; в) $f(x) = \dfrac{-20}{x}$; д) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$; ж) $y = \sqrt{x^2+4x+4}$.

б) $f(x) = 3,5x$; г) $f(x) = \sqrt{-x-2}$; е) $y = |x|^2$;

Укажите область определения и область значений каждой функции.

2. Квадратный трёхчлен

Определение. Квадратным трёхчленом называется многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x – переменная, a, b, c – некоторые числа (коэффициенты), причем $a \neq 0$.

Коэффициент a называют старшим коэффициентом, c – свободным членом квадратного трёхчлена.

Примеры:

1) $5x^2 - 3x - 2$, $a = 5$, $b = -3$, $c = -2$;
2) $x^2 + 8x - 9$, $a = 1$, $b = 8$, $c = -9$;
3) $x^2 + 11x$, $a = 1$, $b = 11$, $c = 0$;
4) $7x^2$, $a = 7$, $b = 0$, $c = 0$.

Корнями квадратного трёхчлена называются значения x, при которых значение квадратного трёхчлена равно 0, т.е. это корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если квадратный трёхчлен имеет корни, то его можно разложить на множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни.

Пример. Разложим квадратный трёхчлен $-6x^2 - x + 5$ на множители.

Найдем его корни $-6x^2 - x + 5 = 0$; $6x^2 + x - 5 = 0$;

$D = 1 - 4 \cdot 6 \cdot (-5) = 121$;

$x = \dfrac{-1 \pm 11}{12}$; $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$.

$$-6x^2 - x + 5 = -6 \cdot (x - (-1))\left(x - \frac{5}{6}\right) = (x+1)(-6x+5) = (x+1)(5-6x).$$

Так как корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ это корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, а их число зависит от дискриминанта D, то D называют дискриминантом квадратного трёхчлена.

Если $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня; если $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет один корень; если $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет корней.

При решении задач иногда бывает удобно представить квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ в виде $a(x-m)^2 + n$, где m и n – некоторые числа. Такое преобразование называется выделением квадрата двучлена из квадратного трёхчлена.

Проделаем это в общем виде:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a},$$

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}.$$

Можно формулы не запоминать, а каждый раз применять этот алгоритм выделения квадрата двучлена из квадратного трёхчлена.

Пример. $3x^2 - 11x - 4 = 3\left(x^2 - \dfrac{11x}{3} - \dfrac{4}{3}\right) =$

$$= 3\left(x^2 - \frac{2 \cdot 11x}{2 \cdot 3} - \frac{4}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2x \cdot \frac{11}{6} + \left(\frac{11}{6}\right)^2 - \left(\frac{11}{6}\right)^2 - \frac{4}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\left(x^2 - 2x \cdot \frac{11}{6} + \left(\frac{11}{6}\right)^2\right) - \frac{121}{36} - \frac{4}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{169}{36}\right) = 3\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{169}{12};$$

или считаем $m = -\dfrac{b}{2a}$; $m = -\dfrac{-11}{2 \cdot 3} = \dfrac{11}{6}$.

$D = b^2 - 4ac$; $D = 121 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 169$;

$n = -\dfrac{D}{4a} = -\dfrac{169}{12}$;

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a};$$

$$3x^2 - 11x - 4 = 3 \cdot \left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{169}{12}.$$

20. Найдите корни квадратного трёхчлена:

а) $x^2-2x-24$; б) $3x^2+5x-2$; в) $\frac{1}{2}x^2-2x-6$; г) $3x^2-4$.

21. Выделите квадрат двучлена из квадратного трёхчлена:

а) x^2-4x+5; б) $6x^2+5x-4$; в) $2x^2-13x+6$.

22. Сумма коэффициентов квадратного трёхчлена равна нулю, а его свободный член в 5 раз больше старшего коэффициента. Найдите корни этого трёхчлена.

23. Сумма коэффициентов квадратного трёхчлена равна нулю, а его второй коэффициент в 4 раза меньше старшего коэффициента. Найдите корни этого трёхчлена.

24. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $4x^2-32x+28$; в) $x^2-15x+50$; д) $-2x^2+5x+3$;

б) $\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}$; г) $-y^2+18y-17$; е) $10x^2+19x-2$.

25. Сократите дробь:

а) $\frac{2x^2-5x+2}{3x-6}$; в) $\frac{3x^2-12}{3x^2-7x+2}$; д) $\frac{9x^3-9x^2+2x}{1-3x+y-3xy}$.

б) $\frac{6x-2}{3x^2+5x-2}$; г) $\frac{42-x-x^2}{2x^2-13x+6}$;

26. Упростите выражение:

а) $\frac{9a-4}{a+7}-\frac{44-16a}{a^2+5a-14}$; б) $\frac{9a^2-4}{2a^2-5a+2}\cdot\frac{2-a}{3a+2}+\frac{a}{1-2a}$.

Проверочная работа № 1 по теме «Свойства функций. Квадратный трёхчлен»

Вариант 1

1. Найдите область определения функции $y = \dfrac{-5x}{x^2 - 5x - 14}$.

1) $(-\infty; -2)$;
2) $(-2; 7)$;
3) $(7; +\infty)$;
4) $(-\infty; -2) \cup (-2; 7) \cup (7; +\infty)$.

2. Нулями функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x}{x^2 - 49}$ являются числа

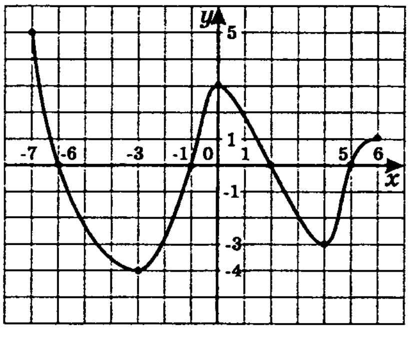
1) -7; 0; 7; 2) 0; 7; 3) -7; 7; 4) 0.

3. Разложите на множители квадратный трёхчлен $-6x^2 - x + 5$.

1) $(6x-5)(x+1)$; 2) $(x-1)(6x+5)$; 3) $(x+1)(5-6x)$; 4) $(x-1)(5-6x)$.

4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, где $-7 \le x \le 6$. Укажите промежутки, в которых функция принимает отрицательные значения.

1) $(-7; -3)$; $(2; 5)$;
2) $(-6; -1)$; $(2; 5)$;
3) $(-7; -6)$; $(-1; 2)$;
4) $(-3; 0)$; $(5; 6)$.



5. Для функции $y = f(x)$, заданной графически (см. рисунок к заданию 4), укажите промежутки, в которых функция возрастает.

1) $[-7; -3]$; $[0; 4]$;
2) $[-3; 0]$; $[4; 6]$;
3) $[-6; -1]$; $[2; 5]$;
4) $[-7; 0]$; $[2; 6]$.

6. Сократите дробь $\dfrac{2x^2 + 5x - 12}{x^2 - 16}$.

7. Функция задана формулой $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x - 1}$. Найдите $f\left(\sqrt{3} + 1\right)$.

8. Упростите выражение $\dfrac{8a - 3}{a + 5} - \dfrac{40 - 27a}{a^2 + 2a - 15}$.

9. Составьте квадратный трёхчлен, корнями которого были бы числа $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$.

10. Дана функция $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x - 1}$. Решите уравнение $f(x + 1) = -1$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции $y = \dfrac{8x}{x^2 + 2x - 8}$.

   1) $(-\infty; -4)$;
   2) $(-4; 2)$;
   3) $(-\infty; -4); (-4; 2); (2; +\infty)$;
   4) $(2; +\infty)$.

2. Нулями функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 - 6x}$ являются числа

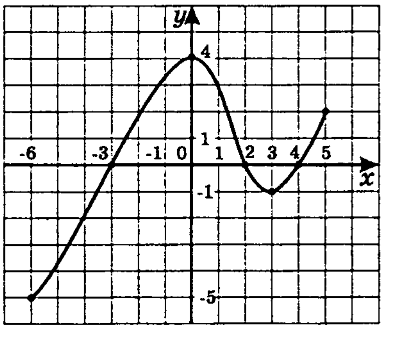
   1) $-3; 0; 3$; 2) $0; 3$; 3) -3; 4) 3.

3. Разложите на множители квадратный трёхчлен $-3x^2 - 14x + 5$.

   1) $(1 - 3x)(x + 5)$; 2) $(x - 5)(3x - 1)$; 3) $(x + 5)(3x - 1)$; 4) $(x - 5)(3x - 1)$.

4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, где $-6 \le x \le 5$. Укажите промежутки, в которых функция принимает положительные значения.

   1) $(-3; 2); (4; 5]$;
   2) $(-6; -3); (0; 3)$;
   3) $(-6; 0); (3; 5)$;
   4) $(-3; 0); (4; 5)$.



5. Для функции $y = f(x)$, заданной графически (см. рисунок к заданию 4), укажите промежутки, в которых функция убывает.

   1) $[-6; 0]; [2; 4)$;
   2) $[0; 3]$;
   3) $[-6; 0]; [3; 5]$;
   4) $[0; 5]$.

6. Сократите дробь $\dfrac{x^2 - 25}{3x^2 + 14x - 5}$.

7. Функция задана формулой $f(x) = \dfrac{6 - x^2}{x - 1}$. Найдите $f\left(\sqrt{5} + 1\right)$.

8. Упростите выражение $\dfrac{3}{x - 4} + \dfrac{x - 19}{x^2 - 3x - 4}$.

9. Составьте квадратный трёхчлен, корнями которого были бы числа $3 - \sqrt{2}$ и $3 + \sqrt{2}$.

10. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 1}$. Решите уравнение $f(x - 1) = 1$.

3. Квадратичная функция и её график

Определение. Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x – независимая переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Числа b и c могут быть нулями.

1) $b = c = 0$, тогда $y = ax^2$;

2) $b = 0, c \neq 0$, тогда $y = ax^2 + c$;

3) $c = 0, b \neq 0$, тогда $y = ax^2 + bx$;

4) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, тогда $y = ax^2 + bx + c$.

Примеры: 1) $y = 3x^2, a = 3, b = 0, c = 0$;

2) $y = -2x^2 + 5, a = -2, b = 0, c = 5$;

3) $y = 4x^2 + 3x, a = 4, b = 3, c = 0$;

4) $y = 2x^2 - 4x + 5, a = 2, b = -4, c = 5$.

Областью определения любой квадратичной функции является множество всех чисел.

Рассмотрим график квадратичной функции и изучим её свойства.

1) $y = ax^2$. При $a = 1$ $y = x^2$. Эта функция изучалась в 7 классе, её графиком является парабола.

График функции $y = ax^2$ при $a \neq 1$ называется также параболой. Ветви параболы направлены вверх при $a > 0$. Ветви параболы направлены вниз при $a < 0$.

При $x = 0$ $y(0) = 0$.

При $x \neq 0$ $y > 0$ при $a > 0$ и $y < 0$ при $a < 0$; $y(-x) = y(x)$. График симметричен относительно оси y.

При $a > 0$ функция убывает при $x \in (-\infty; 0]$ и возрастает при $x \in [0; +\infty)$.

При $a < 0$ функция возрастает при $x \in (-\infty; 0]$ и убывает при $x \in [0; +\infty)$.

При $a > 0$ у функции есть наименьшее значение 0, но нет наибольшего.

При $a < 0$ у функции есть наибольшее значение 0, но нет наименьшего значения.

2) График функции $y = ax^2 + n$ получается из графика функции $y = ax^2$ параллельным переносом вдоль оси y на n единиц вверх при $n > 0$ и вниз на $-n$ единиц при $n < 0$.

3) График функции $y = a(x-m)^2$ получается из графика функции $y = ax^2$ параллельным переносом вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$ и на $-m$ единиц влево, если $m < 0$.

4) Графиком функции $y = a(x-m)^2 + n$ является парабола, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$, и сдвига вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$.

Производить параллельные переносы можно в любом порядке.

5) Для построения графика квадратичной функции запишем её в другом виде, выделив квадрат двучлена.

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x+m)^2 + n;$$

$$m = -\frac{b}{2a}, \; n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Значит, график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельных переносов – сдвига вдоль оси x и сдвига вдоль оси y.

Вершина параболы – это точка (m; n), где $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ или $n = y(m)$.

Осью симметрии служит прямая $x = m$, параллельная оси y. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ – вниз.

План построения графика квадратичной функции.

1) Найти координаты вершины параболы и отметить её в координатной плоскости.
2) Провести через вершину параболы ось симметрии, т.е. прямую, параллельную оси y.
3) Построить еще несколько точек, принадлежащих параболе.
4) Соединить отмеченные точки плавной линией.

27. Постройте график функции:

а) $y = 1,5x^2$;

б) $y = -\dfrac{3}{4}x^2$;

в) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 3$;

г) $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + 2$;

д) $y = -2(x-3)^2$;

е) $y = 2(x+4)^2$;

ж) $y = \dfrac{1}{2}(x+2)^2 - 1$;

з) $y = -4(x-2)^2 + 3$;

и) $y = 2x^2 - 8x + 3$;

к) $y = -x^2 + 4x - 9$;

л) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 3x - 5$.

28. Постройте график функции $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + 4x - 4$.

а) Найдите значения y при $x = 3$; $x = 1$.
б) Найдите значения x, при которых $y = 4; -1$.
в) Найдите нули функции и промежутки знакопостоянства.
г) Укажите промежутки возрастания и убывания функции; наименьшее и наибольшее значения функции.

29. Функция задана формулой $y = x^2 + px + q$. Найдите p и q если:

а) график функции пересекает оси координат в точках (0; 8) и (4; 0);
б) наименьшее значение, равное –5, функция принимает при $x = 2$.

30. Определите значения a, при которых график функции $y = 2x^2 + x + a$ лежит выше оси абсцисс.

31. Задайте формулой квадратичную функцию, график которой проходит через точки $A(-3; -3)$, $B(1; -3)$, $C(-5; 15)$.

32. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = x^2 - 4x + a$, если её наименьшее значение равно 2;
б) $y = -x^2 + 6x + a$, если её наибольшее значение равно 3.

33. Квадратичная функция задана формулой $y = ax^2 + (a-4)x + 3$. Найдите a, если осью симметрии графика является прямая $x = 1$.

34. Постройте схематически график функции $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что:

а) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$, $D > 0$ (D – дискриминант квадратного трёхчлена);
б) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D < 0$.

35. Найдите промежутки монотонности функции, построив схематически график функции:

а) $y = x^2 - 7|x| + 6$; б) $y = |x^2 - 7x + 6|$.

36. Постройте график функции:

а) $y = x\sqrt{x^2 - 4x + 4}$; б) $y = ||x^2 - x| - 2|$.

37. Дана функция $f(x) = x^2 - 2x$. Постройте график функции:

а) $y = f(x) + 1$; в) $y = |2f(x)|$; д) $y = f(|x - 1|)$.

б) $y = -f(x) + 1$; г) $y = f(x - 1)$;

4. Степенная функция. Корень n-й степени

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется чётной, если её область определения симметрична относительно нуля, и для любого значения x верно равенство $f(-x) = f(x)$.

График такой функции симметричен относительно оси ординат.

Примером такой функции являются функции $f(x) = x^2$; $f(x) = x^4$; $f(x) = |x|$.

Определение 2. Функция $y = g(x)$ называется нечётной, если её область определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента x верно равенство $g(-x) = -g(x)$.

График любой нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Примеры нечётных функций: $g(x) = x$; $g(x) = x^3$; $g(x) = \frac{k}{x}$; $g(x) = kx$.

Замечание. Не всякая функция является чётной или нечётной.

Например, каждая из функций $y = 2x + 1$; $y = x^2 + x$; $y = \sqrt{x}$; $y = (x - 2)^2$ не является ни чётной, ни нечётной.

Определение 3. Функция, заданная формулой $y = x^n$, где x – независимая переменная, а n – натуральное число, называется степенной функцией с натуральным показателем.

Степенные функции при $n = 1$; 2 и 3, т.е. функции $y = x$; $y = x^2$ и $y = x^3$ вами изучены.

Нужно знать общие свойства этих функций при любом натуральном n.

Областью определения функции $y = x^n$ является множество всех действительных чисел, $y(0) = 0$. График любой степенной функции проходит через начало координат.

I случай: n – чётное число, т.е. $n = 2k$, где $k \in N$. $y = x^{2k}$, т.е. функции $y = x^2$; $y = x^4$; $y = x^6$ и т.д.

1. При $x \neq 0$, $y > 0$.

График расположен в первой и второй координатных четвертях.

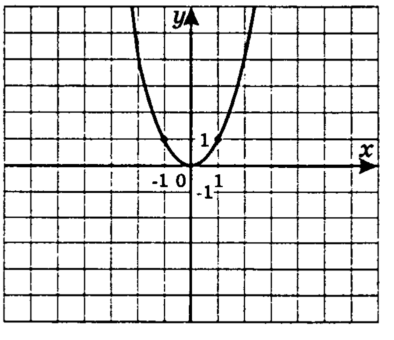
2. Функция является чётной, т.к. $(-x)^{2k} = x^{2k}$ верно для любого значения x.

График функции симметричен относительно оси ординат.

3. Функция возрастает в промежутке $[0; +\infty)$ и убывает в промежутке $(-\infty; 0]$.

4. Область значений функции есть множество неотрицательных чисел.

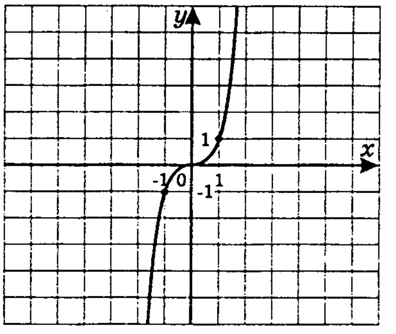
График степенной функции с чётным показателем выглядит, как показано на рисунке.



II случай: n – нечётное число, т.е. $n = 1; 3; 5; 7$ и т.д.: $y = x$; $y = x^3$; $y = x^5$ и т.д.

1. Если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$.

График функции расположен в первой и третьей координатных четвертях.



2. Функция является нечётной, т.к. $(-x)^n = -x^n$ при n – нечётном.

График функции симметричен относительно начала координат.

3. Функция возрастает на всей области определения.

4. Область значений функции есть множество всех действительных чисел.

График любой такой функции имеет вид, как показано на рисунке.

Определение 4. Корнем n-й степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.

Обозначим корень n-й степени из числа a за x, тогда определение запишется так: $x^n = a$, т.е. корень n-й степени из числа a – это корень уравнения $x^n = a$.

Примеры: 1) корень пятой степени из числа 32 – это корень уравнения $x^5 = 32$, тогда $x = 2$, т.к. $2^5 = 32$;

2) корнями четвёртой степени из числа 81 являются корни уравнения $x^4 = 81$. Таких чисел два: $x = 3$ и $x = -3$, т.к. $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$.

Определение 5. Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a. Для него вводится обозначение $\sqrt[n]{a}$, где $a \geq 0$; $\sqrt[n]{a} \geq 0$. Определение тогда можно записать так: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, где $a \geq 0$; $\sqrt[n]{a} \geq 0$ и $n > 1$, n – натуральное число.

Примеры: $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[5]{32} = 2$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[4]{16} = 2$.

При чётном n уравнения вида $x^4 = 81$; $x^4 = 16$; $x^6 = 64$ имеют два корня: один из них арифметический корень n-ой степени, другой – ему противоположное число, т.е. его можно записать так: $-\sqrt[4]{81} = -3$; $-\sqrt[4]{16} = -2$; $-\sqrt[6]{64} = -2$.

Запись $-\sqrt[4]{81}$ читается так: число, противоположное арифметическому квадратному корню четвёртой степени из числа 81.

Арифметический корень нечётной степени из отрицательного числа не существует, но существует просто корень n-й степени из числа a.

Корень кубический из -8 существует и равен -2, но арифметический кубический корень из -8 не существует. Для нечётной степени считают, что запись $\sqrt[3]{-8}$ имеет смысл и $\sqrt[3]{-8} = -2$, но это не арифметический корень, его можно выразить через арифметический корень $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Итак, $\sqrt[2k]{a}$, $a \geq 0$ и $\sqrt[2k+1]{a}$, где a – любое число.

С помощью знака арифметического корня n-й степени записывают решение уравнений вида $x^n = a$ в двух случаях:

1. Если n – чётное, то это уравнение имеет решения при $a \geq 0$ и $x_1 = \sqrt[n]{a}$; $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.

Примеры: 1) $x^4 = 625$; $x_1 = \sqrt[4]{625} = 5$; $x_2 = -\sqrt[4]{625} = -5$.

2) $x^6 = 64$; $x_1 = \sqrt[6]{64} = 2$; $x_2 = -\sqrt[6]{64} = -2$.

3) $x^8 = 7$; $x_1 = \sqrt[8]{7}$; $x_2 = -\sqrt[8]{7}$.

2. Если n – нечётное, то уравнение $x^n = a$, т.е. $x^{2k+1} = a$ имеет одно решение $x = \sqrt[n]{a}$ или $x = \sqrt[2k+1]{a}$, где a – любое число.

Примеры: 1) $x^3 = 27,\ x = \sqrt[3]{27},\ x = 3$;

2) $x^3 = -8,\ x = \sqrt[3]{-8},\ x = -2$;

3) $x^5 = -32,\ x = \sqrt[5]{-32},\ x = -2$;

4) $x^3 = 5,\ x = \sqrt[3]{5}$;

5) $x^7 = -3;\ x = \sqrt[7]{-3};\ x = -\sqrt[7]{3}$.

Свойства арифметического корня n-й степени.

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},\ a \geq 0,\ b \geq 0$.

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ a \geq 0,\ b > 0$.

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a},\ a \geq 0$.

4) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m},\ a \geq 0$.

Примеры: 1) $\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6$;

2) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$;

3) $\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}} = \sqrt[3]{\dfrac{64}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{4}{3} = 1\dfrac{1}{3}$;

4) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$;

5) $\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^3} = \sqrt{2}$.

38. Функция задана формулой $y = x^{34}$. Сравните с нулём значения этой функции при $x = 2;\ 0;\ -3$.

39. Сравните с нулём значения функции $y = x^{25}$ при $x = -8;\ 0;\ 5$.

40. Функция задана формулой $f(x) = x^{12}$. Сравните:

а) $f(3,4)$ и $f(4,5)$;
в) $f(-7)$ и $f(6)$;
б) $f(-4,7)$ и $f(-6,2)$;
г) $f(30)$ и $f(-27)$.

41. Функция задана формулой $f(x) = x^{33}$. Сравните:

а) $f(7,5)$ и $f(8,7)$;
б) $f(-4,3)$ и $f(-5,6)$;
в) $f(-9)$ и $f(6)$;
г) $f(-53)$ и $f(53)$.

42. Сравните:

а) $1{,}3^6$ и $1{,}5^6$;
б) $0{,}8^6$ и $0{,}7^6$;
в) $0{,}9^4$ и 1;
г) $(-3{,}2)^6$ и $(-3{,}6)^6$;
д) $0{,}4^5$ и $0{,}9^5$;
е) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^7$ и $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^7$.

43. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = x^{30}$;
б) $y = x^{101}$?

44. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{81}$; б) $\sqrt[6]{1}$; в) $\sqrt[5]{243}$; г) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; д) $\sqrt[3]{-0,125}$; е) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; ж) $\sqrt[6]{64}$; з) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$; и) $\sqrt[7]{-128}$; к) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; л) $\sqrt[5]{-0,00001}$.

45. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt[5]{-243}$; б) $\sqrt[7]{-1}$; в) $\sqrt[4]{-5}$; г) $\sqrt[7]{(-3)^3}$; д) $\sqrt[8]{(-3)^3}$; е) $\sqrt[8]{(-3)^4}$; ж) $\sqrt[10]{(-9)^2}$?

46. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[9]{-1}$; в) $-2\sqrt[4]{16}$; г) $-4\sqrt[3]{-27}$; д) $\sqrt[5]{-32}+\sqrt[3]{8}$; е) $-\sqrt[4]{625}-\sqrt[3]{-125}$; ж) $14-5\cdot\sqrt[3]{-27}$; з) $\sqrt[5]{-1}+10\sqrt[4]{0,0081}$; и) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}+\sqrt{144}$; к) $3\sqrt[3]{-64}-5\sqrt[4]{81}$; л) $\left(\sqrt{20}\right)^2$; м) $\left(-\sqrt[4]{13}\right)^4$; н) $\sqrt[6]{(-2)^6}$; о) $-\sqrt[6]{36^3}$.

47. При каких значениях a верно равенство:

а) $\sqrt[4]{a^4}=a$; б) $\sqrt[6]{a^6}=-a$; в) $\sqrt[5]{a^5}=a$; г) $\left(\sqrt[8]{a}\right)^8=a$; д) $\sqrt[8]{a^8}=|a|$?

48. Решите уравнение:

а) $x^3=216$; б) $x^3=-125$; в) $x^4=625$; г) $x^4=-16$; д) $x^3=9$; е) $x^5=-7$; ж) $x^6=11$; з) $x^4=0$; и) $x^3+27=0$; к) $x^{12}-1=0$; л) $x^{10}+1=0$; м) $16x^3-2=0$; н) $\frac{1}{4}x^5+8=0$; о) $-0,01x^5+1000=0$; п) $0,05x^6-1,25=0$; р) $x^5=9$; с) $x^7=-6$; т) $x^4-18=0$.

49. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{16\cdot 81}$; б) $\sqrt[3]{125\cdot 8}$; в) $\sqrt[4]{0,0081\cdot 16}$; г) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$; д) $\sqrt[6]{729\cdot\frac{1}{64}}$; е) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$; ж) $\sqrt[3]{5^9\cdot 2^6}$; з) $\sqrt[5]{0,3^{15}\cdot 10^{10}}$; и) $\sqrt[4]{\frac{(-3)^{12}}{2^8}}$; к) $\sqrt[5]{\frac{(-5)^5}{13^{10}}}$.

50. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{16x}$; в) $\sqrt{36b^3}$; д) $\sqrt[3]{54a^{10}}$.

б) $\sqrt{18b}$; г) $\sqrt[3]{40c^6}$;

51. Внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt[3]{2}$; в) $b\sqrt[6]{3}$ при $b < 0$; д) $c\sqrt[10]{4c^2}$.

б) $2\sqrt[5]{\dfrac{1}{16}}$; г) $a\sqrt[4]{6}$ при $a > 0$;

52. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} + \dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$; в) $\sqrt[6]{(-5)^6} + \left(\sqrt[3]{-5}\right)^3$; д) $\sqrt[8]{(-3)^8} - \left(\sqrt[16]{(-9)^2}\right)^4$;

б) $\sqrt[5]{7\dfrac{19}{32}} - \sqrt[3]{-0{,}125}$; г) $\sqrt[4]{(-2)^4} - \left(\sqrt[12]{4^3}\right)^2$; е) $\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$.

53. Решите уравнение:

а) $\dfrac{1}{32}x^5 + \dfrac{1}{243} = 0$; в) $4\sqrt[3]{3x+6} - 12 = 0$; д) $\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[8]{x} - 4 = 0$.

б) $3\sqrt[5]{2x-4} + 6 = 0$; г) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$;

54. Сравните числа:

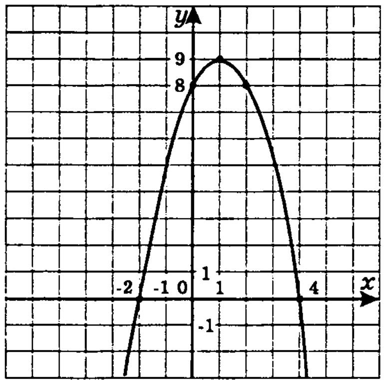
а) $-\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$ и $-\sqrt[3]{5}$; б) $-2\sqrt[4]{3}$ и $-\sqrt[8]{6\sqrt{2}}$.

Проверочная работа № 2 по теме «Квадратичная функция. Степенная функция»

Вариант 1

1. График какой квадратичной функции изображен на рисунке?

1) $y = x^2 - 2x - 8$;
2) $y = -x^2 + 2x + 8$;
3) $y = -x^2 - 2x + 8$;
4) $y = x^2 + 2x + 8$.



2. Функция задана формулой $y = x^{26}$. Выберите верное утверждение:

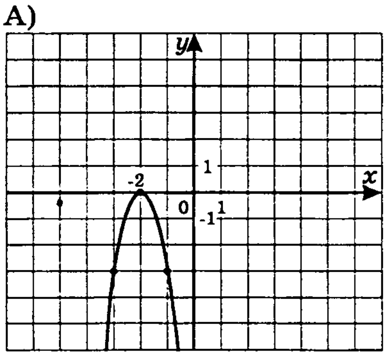
1) областью значений функции является множество всех действительных чисел;
2) функция возрастает в промежутке $(-\infty; 0]$;
3) функция убывает в промежутке $(0; +\infty)$;
4) $y \geq 0$ при всех действительных значениях x.

3. Значение выражения $\sqrt[6]{64}$ равно:

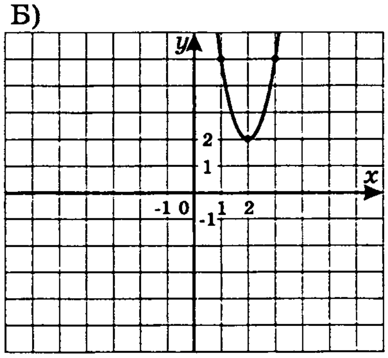
1) 2; 2) – 2; 3) – 2; 2; 4) не существует.

4. Каждый график:

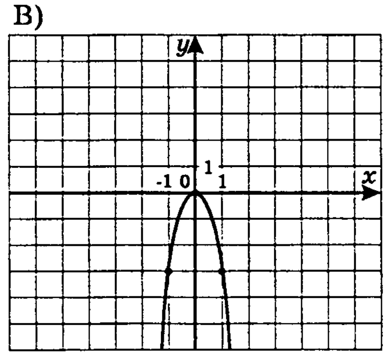
А)



Б)



В)



соотнесите с соответствующей формулой:

1) $y = 3x^2 + 2$;
2) $y = -3(x+2)^2$;
3) $y = 3(x-2)^2 + 2$;
4) $y = -3x^2$.

Ответ:

А	Б	В

5. Функция задана формулой $y = x^{21}$. Сравните:

а) $y(-9)$ и $y(9)$;
б) $y(-20)$ и $y(8)$.

6. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{-125} - \sqrt[4]{(-3)^4}$;   б) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} + \sqrt[3]{54 \cdot 32} - \frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}}$.

7. Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 3$.

8. Определите, при каких значениях a наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 8x + a$ равно 2.

9. Найдите значение n, если известно, что график функции $g(x) = x^n$ проходит через точку $A(-3;\ -243)$.

10. Исследуйте функцию $h(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ на чётность или нечётность.

Вариант 2

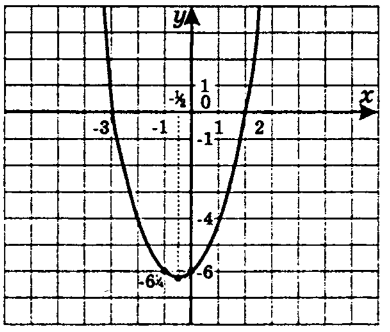
1. График какой квадратичной функции изображен на рисунке?

1) $y = x^2 + x - 6$;

2) $y = -x^2 - x + 6$;

3) $y = -x^2 + x - 6$;

4) $y = x^2 - x + 6$.



2. Функция задана формулой $y = x^{27}$. Выберите верное утверждение:

1) функция убывает в промежутке $(-\infty; +\infty)$;

2) областью значений функции является множество всех действительных чисел;

3) $y \geq 0$ при всех $x \leq 0$;

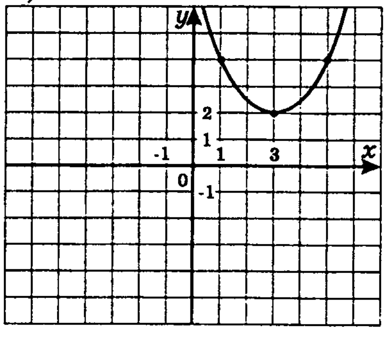
4) $y(-5) = y(5)$.

3. Значение выражения $\sqrt[5]{-243}$ равно:

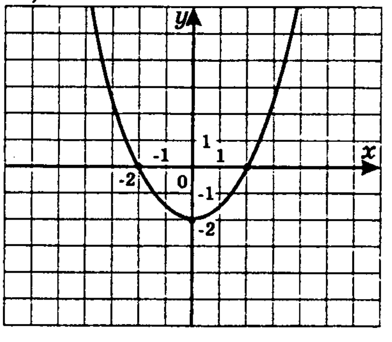
1) 3; 2) −3; 3) −3; 3; 4) не существует.

4. Каждый график:

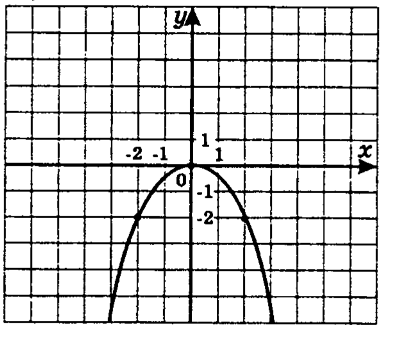
А)



Б)



В)



соотнесите с соответствующей формулой:

1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$;

2) $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2$;

3) $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$;

4) $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Ответ:

А	Б	В

5. Функция задана формулой $y = x^{28}$. Сравните:

а) $y(-30)$ и $y(30)$;
б) $y(-28)$ и $y(3)$.

6. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{-243} + \sqrt[4]{(-5)^4}$; б) $\sqrt[3]{42\frac{7}{8}} - \sqrt[4]{8 \cdot 162} - \frac{\sqrt[5]{160}}{\sqrt[5]{5}}$.

7. Постройте график функции $y = -x^2 - 6x - 8$.

8. Определите, при каких значениях a наибольшее значение функции $y = -2x^2 - 16x - a$ равно 2.

9. Найдите значение n, если известно, что график функции $f(x) = x^n$ проходит через точку $A(-3;\ 81)$.

10. Исследуйте функцию $h(x) = \frac{x^2 + 3}{x^6}$ на чётность или нечётность.

II. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Уравнения с одной переменной

Определение. Целым уравнением с одной переменной называется уравнение, левая и правая части которого – целые выражения.

Если уравнение с одной переменной записано в виде $P(x)=0$, где $P(x)$ – многочлен стандартного вида, то степень этого многочлена называется степенью уравнения.

Степенью произвольного целого уравнения называется степень равносильного ему уравнения вида $P(x)=0$, где $P(x)$ – многочлен стандартного вида.

1) Уравнение первой степени приводится к виду $ax+b=0$, x – переменная, a, b – числа, причем $a \neq 0$; $x=-\dfrac{b}{a}$ – корень этого уравнения.

Каждое уравнение первой степени имеет один корень $-\dfrac{b}{a}$.

2) Уравнение второй степени можно привести к виду $ax^2+bx+c=0$, где x – переменная, a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Число корней этого уравнения зависит от дискриминанта $D=b^2-4ac$.

Если $D>0$, то уравнение имеет два корня.

Если $D=0$, то уравнение имеет один корень.

Если $D<0$, то уравнение не имеет корней.

3) Уравнение третьей степени можно привести к виду $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

4) Уравнение четвёртой степени можно привести к виду $ax^4+bx^3+cx^2+dx+c=0$ и т.д., где a, b, c, d, … – числа, причем $a \neq 0$.

Вообще уравнение n-ой степени имеет не более n корней.

Специальных формул для решения уравнений высших степеней нет. Для их решения используют разложение левой части $P(x)$ на множители или вводят новую переменную.

Примеры. Решим уравнения: 1) $x^3-6x^2-x+6=0$; 2) $\left(2x^2+3\right)^2-12\left(2x^2+3\right)+11=0$.

1) $x^3-6x^2-x+6=0$.

Разложим левую часть на множители:

$\left(x^3-6x^2\right)-(x-6)=0$,

$x^2(x-6)-(x-6)=0$,

$(x-6)\left(x^2-1\right)=0$,

$(x-6)(x-1)(x+1)=0$

$x-6=0$, или $x-1=0$, или $x+1=0$;

$x_1=6$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

Ответ: -1; 1; 6.

2) $\left(2x^2+3\right)^2-12\left(2x^2+3\right)+11=0$.

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$4x^4+12x^2+9-24x^2-36+11=0$

$4x^4-12x^2-16=0$,

$x^4-3x^2-4=0$.

Пусть $x^2=y$, тогда получим уравнение

$y^2-3y-4=0$, его корни $y_1=4$, $y_2=-1$.

$x^2=4$ или $x^2=-1$.

$x=\pm 2$. Это уравнение не имеет корней.

Ответ: -2; 2.

Другой способ.

Введём новую переменную: $y=2x^2+3$.

Тогда $y^2-12y+11=0$. Решим это уравнение: $y_1=1$, $y_2=11$, а затем найдём корни уравнений: $2x^2+3=1$ и $2x^2+3=11$.

Определение. Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называется биквадратным (дважды квадратное).

Заменой $x^2 = y$ сводим его к квадратному $ay^2 + by + c = 0$.

55. Какова степень уравнения:

а) $2x^3 - 6x^5 + 3 = 0$;

б) $x^6 - 4x^4 + 3x^3 - 4 = 0$;

в) $7x^{10} = 0$;

г) $(x+9)(x-8) = 0$;

д) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{5} = 4$;

е) $6x^3 - 5x^2\left(x^3 + 4\right) = 18$?

56. Решите уравнение:

а) $(8x+1)(2x-3) - 1 = (4x-2)^2$;

б) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$;

в) $6x^3 - x^2 = 0$;

г) $\left(x^2 - 5\right)^2 - 3\left(x^2 - 5\right) - 4 = 0$;

д) $\left(x^2 - 3\right)^2 + x^2 - 3 = 2$;

е) $\left(x^2 + 3x + 1\right)\left(x^2 + 3x + 3\right) = -1$;

ж) $x^5 - 5x^3 - 36x = 0$;

з) $x^3 + 3x^2 + 6x + 8 = 0$.

57. При каких значениях x равны значения двучленов $x^3 - 4x^2$ и $9x - 36$?

58. Найдите четыре последовательных целых числа, произведение которых равно 120.

59. Найдите четыре последовательных нечётных числа, произведение которых равно 105.

Дробные рациональные уравнения

Определение. Дробным рациональным уравнением называется уравнение, обе части которого являются рациональными выражениями, причем хотя бы одно из них – дробным выражением.

Примеры: 1) $\dfrac{7}{x^2+8} - 3\left(x^2 - 1\right)(x+1) = 5$;

2) $\dfrac{8x}{x^3 - 9} - \dfrac{9x}{\left(x^2+8\right)\left(9 - x^2\right)} = \dfrac{x^4}{x^4 - x^2 - 72}$.

При решении дробных рациональных уравнений поступают следующим образом:
1) находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2) умножают обе части уравнения на этот знаменатель;
3) решают получившееся целое уравнение;
4) исключают из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель дробей.

Иногда при решении дробных рациональных уравнений используют введение новой переменной.

60. Решите уравнение, выполнив подходящую замену переменной:

а) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1$;

б) $6\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 38 = 0$;

в) $\dfrac{x^2 - 3x - 6}{x} - \dfrac{8x}{x^2 - 3x - 6} = -2$.

61. Решите уравнение, используя выделение полного квадрата:

а) $x^2 + \left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^2 = 2;$

б) $x^2 + \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = 8.$

2. Неравенства с одной переменной

Определение. Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа и $a \neq 0$, называют неравенствами второй степени с одной переменной.

Решение этих неравенств сводится к нахождению промежутков, в которых функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные или отрицательные значения.

Для этого надо проанализировать, как расположен график функции $y = ax^2 + bx + c$ в координатной плоскости: куда направлены ветви параболы – вверх или вниз, пересекает ли парабола ось x и, если пересекает, то в каких точках.

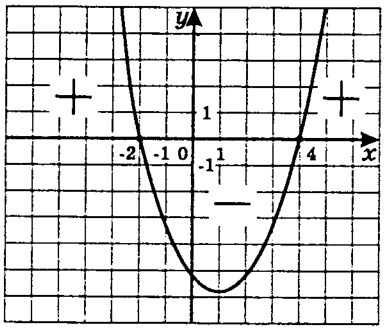
Пример 1. Решим неравенство $x^2 - 2x - 8 < 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x - 8$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх.

Выясним, как расположена эта парабола относительно оси x. Для этого решим уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. Значит парабола пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны -2 и 4.

Покажем схематически, как расположена парабола в координатной плоскости.



Из рисунка видно, что функция принимает отрицательные значения, когда $x \in (-2; 4)$. Следовательно, множеством решений неравенства $x^2 - 2x - 8 < 0$ является числовой промежуток $(-2; 4)$.

Замечание. При рассмотренном способе решения нас не интересовала вершина параболы. Важно лишь знать, куда направлены ветви параболы – вверх или вниз и каковы абсциссы точек её пересечения с осью x.

Пример 2. Решим неравенство $2x^2 - 5x + 2 > 0$.

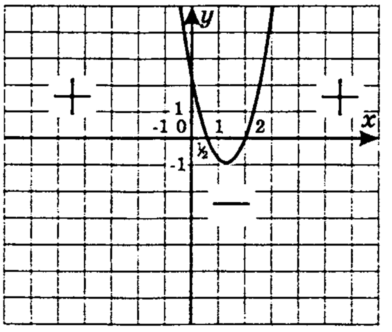
График функции $y = 2x^2 - 5x + 2$ – парабола, ветви которой направлены вверх.

Решим уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

$D = 25 - 16 = 9$;

$x = \dfrac{5 \pm 3}{4}$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 2$.

Парабола пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых $\frac{1}{2}$ и 2. Изобразим схематически эту параболу в координатной плоскости.



Из рисунка видно, что функция принимает положительные значения в двух промежутках $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ и $(2; +\infty)$. Следовательно, множеством решений неравенства является объединение промежутков $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ и $(2; +\infty)$. Ответ можно записать так: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство $-3x^2 + 7x - 4 \geq 0$.

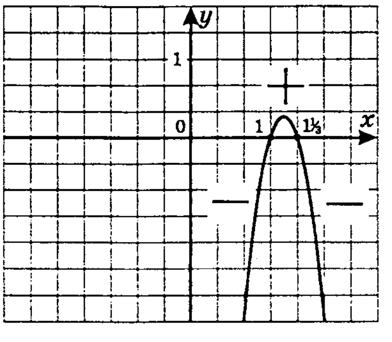
Рассмотрим функцию $y = -3x^2 + 7x - 4$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вниз.

Выясним, как расположена парабола относительно оси x. Для этого решим уравнение $-3x^2 + 7x - 4 = 0$.

$D = 49 - 48 = 1$; $x = \frac{-7 \pm 1}{-6}$; $x_1 = \frac{4}{3}$; $x_2 = 1$.

Парабола пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых $1; 1\frac{1}{3}$.

Изобразим схематически параболу в координатной плоскости.



Из рисунка видно, что множеством решений неравенства (ответом) является числовой отрезок $\left[1; 1\frac{1}{3}\right]$.

Итак, при решении неравенств вида $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$ поступают так:

1) находят дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ и выясняют, имеет ли трёхчлен корни;

2) если трёхчлен имеет корни, то отмечают их на оси x и через отмеченные точки проводят схематически параболу, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$; если трёхчлен не имеет корней, то схематически изображают параболу, расположенную в верхней полуплоскости при $a > 0$ или в нижней при $a < 0$;

3) находят на оси x промежутки, для которых точки параболы расположены выше оси x (для неравенства $ax^2 + bx + c > 0$) или ниже оси x (для неравенства $ax^2 + bx + c < 0$).

62. Решите неравенство:

а) $x^2 - 8x + 15 \geq 0$;

б) $8 - 2x^2 > 0$;

в) $(2 + 7x)^2 \leq (4 - 3x)^2$;

г) $4x^2 - 20x + 25 \geq 0$;

д) $-9x^2 + 24x - 16 \geq 0$;

е) $12x^2 + 12x + 3 > 0$;

ж) $12x - 18 < 2x^2$;

з) $\sqrt{x^2 - 7x} > -1$.

63. Найдите область определения функции $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{-6x^2 + 11x - 5}}$.

64. Докажите, что при любом значении a верно неравенство:

а) $1 > 2a - 5a^2$;

б) $6a < a^2 + 10$.

65. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0, \\ x^2 + x - 2 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0, \\ x^2 + 2x - 15 \leq 0. \end{cases}$

66. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 + (a - 2)x - 2a + 1 = 0$ не имеет корней.

67. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 + (a + 2)x - a^2 + 1 = 0$ имеет два корня.

68. Укажите все целые значения x, принадлежащие области определения функции:

а) $y = \sqrt{36 - x^2} + \sqrt{14 - 9x + x^2}$;

б) $y = \sqrt{9x - x^2 - 18} + \sqrt{16 - x^2}$.

Решение неравенств методом интервалов

Решение неравенств высших степеней основано на свойствах функции вида $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, где x – переменная, а x_1, x_2, x_3, ..., x_n – нули функции, обладать знакопостоянством в каждом из промежутков, на которые область определения разбивается нулями функции.

Это свойство используется для решения неравенств вида;

$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) > 0$ и $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) < 0$,

где x_1, x_2, x_3, ..., x_n – не равные друг другу числа.

Пример 1. Решим неравенство $(x + 7)(x + 2)(x - 6) < 0$.

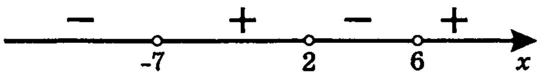
Рассмотрим функцию $f(x) = (x + 7)(x + 2)(x - 6)$.

Область определения функции: множество всех действительных чисел. Найдём нули функции. Для этого решим уравнение $(x + 7)(x + 2)(x - 6) = 0$;

$x + 7 = 0$ или $x + 2 = 0$ или $x - 6 = 0$

$x_1 = -7$, $x_2 = -2$, $x_3 = 6$.

Отметим их на координатной прямой.



Определим знак в крайнем правом промежутке: для этого найдём значение функции в любой точке этого промежутка, например, $f(7)=(7+7)(7+2)(7-6)=14\cdot 9\cdot 1=126$; $f(7)>0$, следовательно, $f(x)>0$ при любом $x\in(6;+\infty)$.

Расставим знаки функции в каждом промежутке, пользуясь свойством чередования знаков, двигаясь справа налево, или определим знак так же, как в промежутке $(6;+\infty)$.

Множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-\infty;-7)$ и $(-2;6)$.

Ответ: $(-\infty;-7)\cup(-2;6)$.

Рассмотренный способ решения неравенств называют методом интервалов.

Пример 2. Решим неравенство $x(0,8-x)(x+6)<0$.

Приведем неравенство к виду, когда каждый множитель имеет вид $x-x_n$.

$x\cdot(-1)(x-0,8)(x+6<0,$

$-x(x-0,8)(x+6)<0,$

$x(x-0,8)(x+6)>0.$

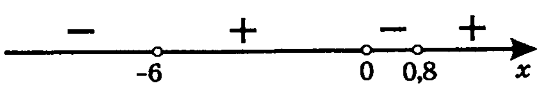
$f(x)=x(x-0,8)(x+6)$; $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

$f(x)=0$: $x(x-0,8)(x+6)=0$;

$x=0$ или $x-0,8=0$ или $x+6=0$;

$x_1=0$ $x_2=0,8$ $x_3=-6$.

$f(1)=1\cdot(1-0,8)(1+6)=0,2\cdot 7=1,4,\ f(1)>0.$



Ответ: $(-6;0)\cup(0,8;+\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство $(1+6x)(4-x)\geq 0$.

Преобразуем неравенство так, чтобы каждый множитель был вида $x-x_n$:

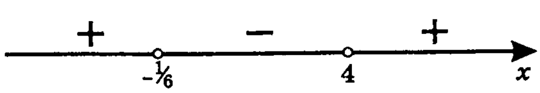
$6\left(x+\frac{1}{6}\right)\cdot(-1)(x-4)\geq 0,$

$-6\left(x+\frac{1}{6}\right)(x-4)\geq 0;\ \left(x+\frac{1}{6}\right)(x-4)\leq 0.$

$f(x)=\left(x+\frac{1}{6}\right)(x-4)$; $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

$f(x)=0$, т.е. $\left(x+\frac{1}{6}\right)(x-4)=0$, $x_1=-\frac{1}{6}$, $x_2=4$,

$f(5)=\left(5+\frac{1}{6}\right)(5-4)=5\frac{1}{6}$, $f(5)>0$.



Ответ: $\left[-\frac{1}{6};4\right]$.

Пример 4. Решим неравенство $\frac{8-x}{x+3}<0$.

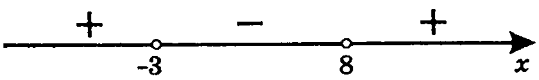
Так как при всех значениях x, при которых дробь $\frac{8-x}{x+3}$ имеет смысл, её знак совпадает со знаком произведения $(8-x)(x+3)$, то данное неравенство равносильно неравенству $(8-x)(x+3)<0$ при $x+3\neq 0$, т.е. $x\neq -3$.

$\begin{cases}(8-x)(x+3)<0,\\ x+3\neq 0;\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x\neq -3,\\ -(x-8)(x+3)<0;\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x\neq -3,\\ (x-8)(x+3)>0;\end{cases}$

$f(x)=(x-8)(x+3)$; $\quad D(f)=(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$.

$f(x)=0,\ (x-8)(x+3)=0,\ x-8=0,\ x=8$.

$f(9)=(9-8)(9+3)=12;\ f(9)>0$.



Ответ: $(-\infty;-3)\cup(8;+\infty)$.

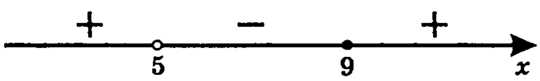
Пример 5. Решим неравенство $\frac{18-2x}{x-5}\geq 0$.

$\begin{cases}(18-2x)(x-5)\geq 0,\\ x-5\neq 0;\end{cases}$ $\quad\begin{cases}-2(x-9)(x-5)\geq 0,\\ x\neq 5;\end{cases}$ $\quad\begin{cases}(x-9)(x-5)\leq 0,\\ x\neq 5,\end{cases}$

$f(x)=(x-9)(x-5)$, $D(f)=(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$.

$f(x)=0,\ (x-9)(x-5)=0;\ x-9=0,\ x=9$.

$f(10)=(10-9)(10-5)=5,\ f(10)>0$.



Ответ: $(5;9]$.

Пример 6. Решим неравенство $(x+2)^2(x-3)(x+8)(x+10)<0$.

Так как $(x+2)^2\geq 0$ при любом значении x, а значение x, при котором $x+2=0$ (т.е. при $x=-2$), является решением неравенства, то, поделив обе части неравенства на $(x+2)^2$, заменим неравенство равносильным $\begin{cases}(x-3)(x+8)(x+10)<0,\\ x\neq -2.\end{cases}$

Неравенство $(x-3)(x+8)(x+10)<0$ решаем методом интервалов.

Получим $x\in(-\infty;-10)\cup(-8;3)$. Теперь учтём, что $x\neq -2$, а $-2\in(-8;3)$, и получим ответ: $(-\infty;-10)\cup(-8;-2)\cup(-2;3)$.

Пример 7. Решим неравенство $(x+2)^2(x-3)(x+8)(x+10)\geq 0$.

Так как $(x+2)^2\geq 0$ при любом значении x, а значение x, при котором $x+2=0$ (т.е. при $x=-2$), является решением неравенства, то, поделив обе части неравенства на $(x+2)^2$, получим $(x-3)(x+8)(x+10)\geq 0$ или $x=-2$.

Неравенство $(x-3)(x+8)(x+10)\geq 0$ решаем методом интервалов и получим $x\in[-10;-8]\cup[3;+\infty)$.

Учтём, что $x=-2$ является решением неравенства, и получим ответ: $[-10;-8]\cup[3;+\infty);-2$.

69. Решите неравенство, используя метод интервалов:

а) $(x+10)(x-6)>0$;

б) $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{7}\right)\le 0$;

в) $(5x-5)(2+x)(6-x)>0$;

г) $x^3-100x\ge 0$;

д) $\left(x^2+2x-3\right)^2\le\left(x^2-3x\right)^2$;

е) $\left(x^2+3x+2\right)^2\ge\left(x^2+2x\right)^2$;

ж) $(1-3x)^3(5-2x)^2(2-x)>0$;

з) $(x+2)^2(1-x)(x-2)^3(x-3)\le 0$;

и) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-6}\ge 0$;

к) $\dfrac{2x^3-x^4+3x^2}{x^2+x+6}>0$;

л) $\dfrac{x-3}{2x^2-7x+5}\le 1$;

м) $\dfrac{1}{x+10}\ge\dfrac{x}{x^2-2x+3}$;

н) $(x-15)^2(x-13)(x+10)(5-x)<0$;

о) $(x-15)^2(x-13)(x+10)(5-x)>0$;

п) $(x-7)^2(x-20)(x+6)\le 0$;

р) $(x-7)^2(x-20)(x+6)\ge 0$.

70. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{(x-1)(2x+5)(x-16)}$;

б) $\sqrt{x(9+x)(8-4x)}$?

71. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}\dfrac{4}{x(x+5)}\ge 1;\\ x^2-6x+8\le 0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}4+\dfrac{7(4x+1)}{x^2-3x+2}\le 0;\\ 2x^2+5x-3\le 0.\end{cases}$

Проверочная работа № 3 по теме «Уравнения и неравенства с одной переменной»

Вариант 1

1. Установите соответствие между уравнениями:

А) $6x^3 - 9x^5 + 1 = 0$,
Б) $x^2 - x^4 + x^6 - 9x^7 = 0$,
В) $(x-1)(x+8)(x+3) = 0$

и их степенью:

1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 7.

Ответ:

А	Б	В

2. Решите биквадратное уравнение $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

1) −2; 2; 2) −3; 3; 3) −3; −2; 2; 3; 4) −2; 3.

3. Решите уравнение $\left(x^2 - 2x\right)\left(x^2 - 2x - 7\right) = 8$.

1) −2; 1; 4; 2) −2; 4; 3) −1; 1; 4; 4) 1; 4.

4. Решением неравенства $2x^2 - 5x + 3 > 0$ является множество:

1) $(-\infty; 1)$; 2) $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$; 3) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$; 4) $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

5. При каких значениях a значение дроби $\frac{a^3 - 4a}{a^2 - a - 6}$ равно 0?

1) 0; 2; 2) −2; 0; 2; 3) 0; −2; 2; 3; 4) −2; 3.

6. Решите неравенство $x + 22 \le (x+2)^2$.

7. Решите неравенство $(3x - 15)(6 + x)(2 - x) > 0$, используя метод интервалов.

8. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{8 + 2x - x^2}{x - 4}}$.

9. Решите неравенство $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{4} \le \frac{1-x}{2}$.

10. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(x-4)\sqrt{x^2 + x - 2}}{x+5} \le 0, \\ 15 + 2x - x^2 > 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Установите соответствие между уравнениями:

А) $-4x^2+9x^6-20=0$;

Б) $2x^2-3x^4+x^7-9x^8=0$;

В) $x^2\left(x^2-3\right)-x^4-5=0$

и их степенью:

1) 2; 2) 4; 3) 6; 4) 8.

Ответ:

А	Б	В

2. Решите биквадратное уравнение $x^4+5x^2-36=0$.

1) -3; -2; 2; 3; 2) -2; 2; 3) -3; 3; 4) 2; 3.

3. Решите уравнение $\left(x^2-3\right)^2+x^2-3=2$.

1) -2; -1; 1; 2; 2) -2; 2; 3) -1; 1; 4) 1; 2.

4. Решите неравенство $-6x^2+11x-5<0$.

1) $\left(-\infty;\frac{5}{6}\right)$; 2) $(1:+\infty)$; 3) $\left(\frac{5}{6};1\right)$; 4) $\left(-\infty;\frac{5}{6}\right)\cup(1;+\infty)$.

5. При каких значениях a значение дроби $\dfrac{a^5-6a^4+9a^3}{a^4-81}$ равно 0?

1) -3; 0; 3; 2) -3; 3; 3) 0; 4) -3; 0.

6. Решите неравенство $11-x\geq(x+1)^2$.

7. Решите неравенство $(4x-16)(9+x)(3-x)<0$, используя метод интервалов.

8. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x-5}{15-2x-x^2}}$.

9. Решите неравенство $\dfrac{(x+1)^2}{12}-\dfrac{(x-1)^2}{3}\leq\dfrac{2x-1}{4}$.

10. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{(x+4)\sqrt{x^2-x-2}}{x-5}\leq 0,\\ 15+2x-x^2>0.\end{cases}$$

III. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Примеры уравнений с двумя переменными:

$3x + 2y = 18;$

$x^2 = 6 - y^2;$

$xy - 12 = 0.$

Определение. Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Уравнение с двумя переменными имеет, как правило, бесконечное множество решений.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение в верное равенство.

Два уравнения, имеющие одно и то же множество решений, называют равносильными уравнениями.

При решении уравнений используют два свойства уравнений, которые сохраняют равносильность:

1) слагаемые можно переносить из одной части в другую с противоположным знаком;
2) обе части уравнения можно умножать или делить на одно и то же число, отличное от 0.

Надо знать графики уравнений вида:

1) $ax + by = c$, где $a \neq 0$ или $b \neq 0$; графиком является прямая;
2) $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$; графиком является парабола;
3) $xy = k$, где $k \neq 0$; графиком является гипербола;
4) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; графиком является окружность.

При решении системы уравнений с двумя переменными используют три способа:

1) способ подстановки;
2) способ алгебраического сложения;
3) графический.

72. Является ли пара чисел (–2; 3) решением уравнения:

а) $x^2 - y - 1 = 0;$ б) $xy + y = 7;$
в) $x^2 + y^2 = 13;$ г) $x^2 - y^2 + 10 = 0$?

73. Найдите три каких-нибудь решения уравнения:

а) $x - 3y = 10;$ в) $x - xy = 15;$
б) $0 \cdot x + y = 15;$ г) $(x - y)(x + 3) = 0.$

74. Постройте график уравнения:

а) $3x + 0y = 15;$ г) $y = 2,5;$ ж) $|x| = 4;$ к) $y - 2x^2 = 3;$
б) $0x - y = 3;$ д) $(x - 3)(y + 2) = 0;$ з) $|y| = 2;$ л) $x^2 + y^2 = 16;$
в) $x = 6;$ е) $(x + 5)(y + 3) = 0;$ и) $xy = 8;$ м) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9.$

75. Составьте уравнение окружности с центром в начале координат, зная, что она проходит через точку:

а) $A(3; \sqrt{5});$ б) $B(-3; -4);$ в) $C(4; 0).$

76. Напишите уравнение окружности, зная, что её центр находится в точке $A(-2;\ 5)$, и она проходит через точку:

а) $B(1;\ 1)$; б) $C(3;\ -7)$; в) $D(-1;\ 4)$.

77. Является ли решением системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=5; \\ -6x+5y=-4 \end{cases}$ пара чисел:

а) $(2;\ -1)$, б) $(-1;\ -2)$?

78. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y+x^2=0; \\ y-2x-3=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy=6; \\ -2x+3y=-6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=100; \\ y=-\dfrac{1}{2}x^2+10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x+4)^2+(y+5)^2=9, \\ y=-x. \end{cases}$

79. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy-x=4, \\ 2x+y=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2-3xy=-4, \\ 3x+y=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ x+y=5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{y+3}=0, \\ y^2+x=11; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2}, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{y+3}=0, \\ \dfrac{y^2-9}{x+2}=0. \end{cases}$

80. Используя замену переменных, решите систему:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+3y}+y=5, \\ \dfrac{y}{x+3y}=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy+x-y=7, \\ x^2y-xy^2=6. \end{cases}$

81. Решите систему, используя разложение на множители:

а) $\begin{cases} (x+4)(y-1)=x^2+5x+4, \\ x^2-y^2-3x+8=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-1)(y+5)=2x^2+x-3, \\ 2x^2-xy-3y-7=0. \end{cases}$

82. Изобразите на плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} (y-x-2)(x+y-3)\ge 0, \\ x-2y\le 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2\ge 4, \\ x+2y\ge 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (4x+3y-12)(x-3y-3)\ge 0, \\ 4x-y\ge 0,\ x\ge 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+y^2\le 25, \\ x^2+y^2\ge 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2\le 9, \\ x-y\ge 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2+y^2\le 16, \\ y\ge |x|. \end{cases}$

Проверочная работа № 4 по теме «Уравнения и неравенства с двумя переменными»

Вариант 1

1. Какая фигура является графиком уравнения $(x-4)^2+(y-2)^2=0$?

   1) Прямая $x = 4$;
   2) прямая $y = 2$;
   3) точка с координатами $x = 4$, $y = 2$;
   4) пара прямых $x = 4$ и $y = 2$.

2. Уравнение окружности с центром в точке $A(-2; -1)$ и радиусом 5 имеет вид:

   1) $(x+2)^2+(y+1)^2=5$;
   2) $(x+2)^2+(y+1)^2=25$;
   3) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$;
   4) $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x-y=5, \\ x^2+6y+2=0. \end{cases}$

   1) (2; −1) и (−14; −33);
   2) (−2; 1) и (14; 33);
   3) (2; −1);
   4) (−14; − 33).

4. Для какого неравенства пара чисел (2; −3) является решением?

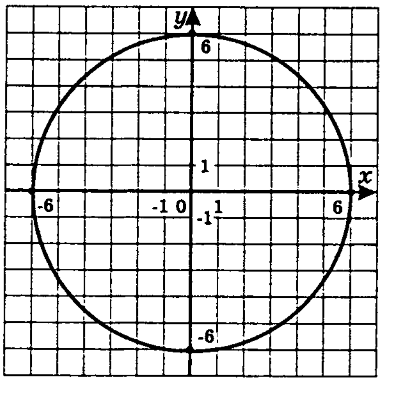
   1) $2x-3y+16>0$;
   2) $-x^2-3xy+y^2<-20$;
   3) $(x-3)^2+(y+4)^2<2$;
   4) $y>2x-3$.

5. Окружность, изображённая на рисунке, задаётся уравнением $x^2+y^2=36$. Используя этот рисунок, для каждой системы уравнений:

   А) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ y=x+6; \end{cases}$

   Б) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ x=-6; \end{cases}$

   В) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ y=7 \end{cases}$



укажите соответствующее утверждение:

1) система имеет одно решение;
2) система имеет два решения;
3) система не имеет решений;
4) система имеет бесконечное множество решений.

Ответ:

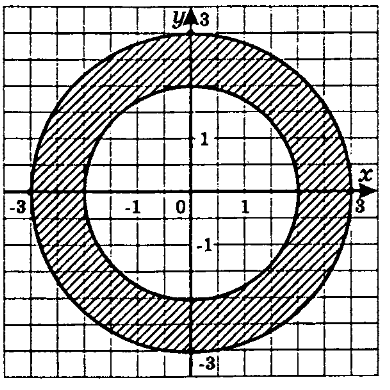
А	Б	В

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + 2xy + 2y^2 = 17. \end{cases}$

7. Найдите значения x, при которых графики функций $y = \left(x^2 - 3\right)^2$ и $y = x^2 - 3$ пересекаются.

8. Найдите решения системы уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{y + 5} = 0, \\ \dfrac{y^2 - 25}{x + 4} = 0. \end{cases}$

9. Задайте системой неравенств кольцо, изображенное на рисунке.



10. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy = -2, \\ y^2 - xy = 3. \end{cases}$

Вариант 2

1. Какая фигура является графиком уравнения $(x+4)^2+(y-3)^2=9$?

1) Прямая $x = -4$;
2) точка с координатами $x = 4$, $y = 3$;
3) прямая $y = 3$;
4) окружность.

2. Уравнение окружности с центром в точке $A(3; -5)$ и радиусом 6 имеет вид:

1) $(x-3)^2+(y+5)^2=6$;
2) $(x-3)^2+(y+5)^2=36$;
3) $(x+3)+(y-5)^2=6$;
4) $(x-3)+(y-5)^2=36$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x-y=5, \\ x^2-15y=109. \end{cases}$

1) $(-17; -12)$;
2) $(17; 12)$ и $(-2; -7)$;
3) $(-2; -7)$;
4) $(2; 7)$.

4. Какая пара чисел является решением системы неравенств $\begin{cases} 2y-x^2>-7, \\ 3<3x+y? \end{cases}$

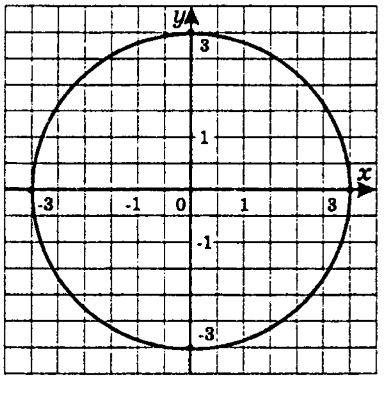
1) $(4; 2)$; 2) $(1; 5)$; 3) $(5; 1)$; 4) $(1; 0)$.

5. Окружность, изображённая на рисунке, задаётся уравнением $x^2+y^2=9$. Используя рисунок, для каждой системы уравнений:

А) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=-3; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x=5; \end{cases}$

В) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=-x-3 \end{cases}$



укажите соответствующее утверждение:

1) система имеет одно решение;
2) система имеет два решения;
3) система имеет бесконечное множество решений;
4) система не имеет решений.

Ответ:

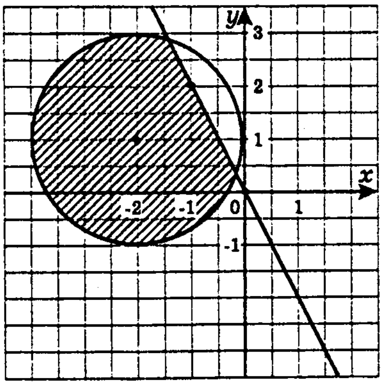
А	Б	В

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x^2 - 2xy + y^2 = 10. \end{cases}$

7. Не выполняя построений, найдите координаты точек пересечения параболы $y = x^2 + 3$ и окружности $x^2 + y^2 = 17$.

8. Найдите решения системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 36}{y - 3} = 0, \\ \dfrac{y^2 - 9}{x - 6} = 0. \end{cases}$

9. Задайте системой неравенств фигуру, изображенную на рисунке.



10. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + xy = 10, \\ y^2 + xy = 15. \end{cases}$

IV. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

1. Последовательности

Часто на практике приходится иметь дело с последовательностями: последовательность домов на отдельной улице (1), последовательность рядов в зале театра (2) и последовательность мест в каждом ряду (3), последовательность натуральных чисел (4), последовательность квадратов двузначных натуральных чисел (5) и др.

Последовательности бывают нечисловыми (1) – (3) и числовыми (4) и (5), конечными (1) – (3) и (5) и бесконечными (4).

Будем рассматривать числовые последовательности.

Числа, образующие последовательность, называются *членами последовательности*. Их обозначают: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... Саму последовательность будем обозначать (a_n).

Последовательности задают разными способами: описанием, перечислением её членов (для конечной последовательности), формулой (для числовой последовательности) и др.

Часто последовательность задают с помощью формулы n-го члена. Например, последовательность положительных чётных чисел можно задать формулой $a_n = 2n$, последовательность квадратов натуральных чисел – формулой $b_n = n^2$, последовательность правильных дробей с числителем, равным 1, – формулой $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ и др.

Существует способ задания последовательности с помощью *рекуррентной формулы* – *рекуррентный способ* (от латинского слова *recurro* – возвращаться). При этом указывают первый член последовательности или несколько её первых членов и формулу, выражающую любой член последовательности, начиная с некоторого, через предыдущие (один или несколько).

Например, последовательность чисел (a_n), в которой $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ при $n > 2$:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots.$$

Это последовательность *чисел Фибоначчи*, описанная в работах итальянского математика Леонардо из Пизы, известного под именем Леонардо Фибоначчи (1180–1240).

83. Пусть (a_n) – последовательность натуральных чисел, кратных 9, взятых в порядке возрастания. Укажите её первый член, третий, десятый, двадцать пятый, тысячный и n-й члены.

84. Какой член последовательности (a_n):

а) следует за членом a_{31}, a_{500}, a_n, a_{3n}, a_{5n+1};

б) предшествует члену a_{51}, a_{300}, a_{n-5}, a_{7n}, a_{8n-1}?

85. Перечислите члены последовательности (c_n), которые расположены между:

а) c_{25} и c_{30};   б) c_n и c_{n+7};   в) c_{n-3} и c_n;   г) c_{n-1} и c_{n+4}.

86. Найдите первые пять членов последовательности (a_n), заданной формулой:

а) $a_n = 3n - 1$;   в) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$;   д) $a_n = 3^{n-3}$;

б) $a_n = n^2 + 5$;   г) $a_n = (-1)^n \cdot 3$;   е) $a_n = \dfrac{1}{4} \cdot 8^n$.

87. Запишите следующие три члена последовательности:

а) 7, 11, 15, 19, ...;
в) 2, 4, 8, 16, ...;
д) 27, 9, 3, 1, ...;
б) 60, 53, 46, 39, ...;
г) 4, 9, 16, 25, ...;
е) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \ldots$.

88. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = 2n^2 - 5n + 3$. Найдите:

а) x_3;
б) x_{10};
в) x_{40}.

89. Выпишите первые пять членов последовательности (b_n), если:

а) $b_1 = 3,\ b_{n+1} = b_n - 5$;
в) $b_1 = 125,\ b_{n+1} = -0{,}2b_n$;
б) $b_1 = 64,\ b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$;
г) $b_1 = 2,\ b_{n+1} = b_n^{-2}$.

90. Напишите формулу общего члена a_n последовательности:

а) 3, 7, 11, 15, ...;
в) 1, 4, 9, 16, ...;
д) −4, 8, −16, 32, ...;
б) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$;
г) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$;
е) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \ldots$.

91. Принадлежат ли числа 15, 35 и 65 последовательности $a_n = 5 + 3(n-1)$?

92. Принадлежат ли числа 12, 56 и 96 последовательности $b_n = 3 \cdot 2^n$?

93. Дана последовательность $c_n = -10 + 6(n-1)$. Какой порядковый номер имеет член этой последовательности, равный 116?

2. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность (a_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с некоторым числом, то есть для любого натурального n выполняется условие $a_{n+1} = a_n + d$, где d – некоторое число. Число d называется *разностью* арифметической прогрессии (a_n): $a_{n+1} - a_n = d$.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать её первый член и разность.

Формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Например, найдем 30-й член арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = -51,\ d = 0{,}4$:

$a_{30} = -51 + 0{,}4 \cdot (30-1) = -51 + 0{,}4 \cdot 29 = -51 + 11{,}6 = -39{,}4$.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии:
последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого её члена, начиная со второго, верно равенство: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, то есть каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.

Другое характеристическое свойство арифметической прогрессии:
последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда её n-й член можно задать формулой вида $a_n = kn + b$, где k и b – некоторые числа.

Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ или $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$.

Например, найдем сумму первых 30-ти членов арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = -51$, $d = 0,4$: $S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{-51 + (-39,4)}{2} \cdot 30 = -45,2 \cdot 30 = -1356$.

94. Какие из следующих последовательностей являются арифметической прогрессией:

а) 5, 8, 11, 14, ...; в) 2, 4, 6, 8, 16, ...; д) 0, −4, −8, −12, ...;

б) 20, 16, 12, 8, ...; г) 5, 2, −1, −4, ...; е) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$?

95. Выпишите первые четыре члена арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1 = 5,\ d = 7$; в) $a_1 = 1,4,\ d = -0,3$;
б) $a_1 = 40,\ d = -12$; г) $a_1 = -2,7,\ d = 0,9$.

96. Последовательность (x_n) – арифметическая прогрессия, первый член которой равен x_1, а разность равна d. Выразите через x_1 и d:

а) x_6; г) x_m;
б) x_{31}; д) x_{m+4};
в) x_{179}; е) x_{3m}.

97. Последовательность (c_n) – арифметическая прогрессия. Найдите:

а) c_7, если $c_1 = 10,\ d = 6$; б) c_{60}, если $c_1 = 7,2,\ d = -1,1$.

98. Найдите двадцатый и n-й члены арифметической прогрессии:

а) $\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}; \ldots$; б) 4,1; 2; ....

99. Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_{20} = 139,\ d = 6$; б) $a_{65} = -307,\ d = -9$.

100. Найдите разность арифметической прогрессии (c_n), в которой:

а) $c_1 = 12,\ c_6 = 27$; б) $c_1 = 2,5,\ c_{17} = -1,5$.

101. Между числами 8 и 4,5 вставьте шесть таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

102. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (b_n), если:

а) $b_4 = 13,\ b_{28} = 85$; б) $b_{30} = 0,\ b_{73} = -172$.

103. Содержит ли арифметическая прогрессия 6; 10; ... число:

а) 76; б) 258?

104. Для каких членов арифметической прогрессии (c_n): 8,4; 6,3; ... выполняется условие:

а) $c_n \le 0$; б) $c_n > 0$?

105. Найдите номера положительных членов арифметической прогрессии 4,6; 3,1; .... Чему равен первый отрицательный член этой прогрессии?

106. Является ли арифметической прогрессией последовательность (a_n), заданная формулой:

а) $a_n = 5n - 2$; в) $a_n = n + 17$; д) $a_n = -\frac{1}{3}n + 4$;

б) $a_n = n^2 + 8$; г) $a_n = \frac{1}{2n+3}$; е) $a_n = -12n$?

107. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если сумма первого и второго членов равна 12, а их произведение равно 20.

108. Докажите, что в арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4 сумма средних членов равна сумме крайних членов.

109. Найдите сумму первых сорока членов арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1 = 15$, $a_{40} = 25$; б) $a_1 = -2,3$, $a_{40} = 20,5$.

110. Найдите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии:

а) −37; −32; ...; б) 21,6; 20,9; ....

111. Найдите сумму первых двадцати, ста, n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_n = 5n - 3$.

112. Найдите сумму:

а) всех натуральных чисел, не превосходящих 120;
б) всех натуральных чисел от 10 до 210 включительно;
в) всех натуральных чисел, кратных 6 и не превосходящих 200;
г) всех нечётных чисел от 15 до 55 включительно.

113. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с одиннадцатого по двадцать шестой включительно, если первый член равен 20, а разность равна 4.

114. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{16} = -12,5$ и $a_{26} = 34,5$.

115. Укажите наибольшее число членов арифметической прогрессии 6; 9; 12; ..., сумма которых не превосходит 195.

116. Дана арифметическая прогрессия (a_n). Заполните таблицу:

№ п/п	a_1	d	n	a_n	S_n
1	7			39	207
2	– 5		12		72
3			17	50	442
4		– 7	10		– 235
5		6	12	71	
6		3		31	164

117. Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 44, а сумма второго и седьмого членов равна 49. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

118. Второй член арифметической прогрессии равен 11, а шестой равен 27. Найдите четвёртый член этой прогрессии.

119. Найдите сумму членов арифметической прогрессии (a_n) с двадцатого по тридцатый включительно, если $a_n = 5n + 3$.

120. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ и $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 15$.

121. Найдите сумму шести членов арифметической прогрессии (a_n), у которой $a_5 - a_3 = 4$, $a_1 + a_3 = 10$.

122. Вычислите сумму:

а) $10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$;
б) $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

123. Решите уравнение:

а) $1 + 5 + 8 + \ldots + x = 222$;
б) $(2 + x) + (4 + x) + (6 + x) + \ldots + (30 + x) = 285$.

124. Углы в треугольнике образуют арифметическую прогрессию. Найдите углы этого треугольника.

125. Периметр треугольника равен 36 см, а стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите среднюю по величине сторону треугольника.

126. Стороны прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 4 см. Найдите стороны этого треугольника.

127. Стороны n-угольника образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна 2 м. Наибольшая сторона n-угольника равна 24 м, а его периметр – 136 м. Найдите n.

128. Часы с кукушкой устроены так, что кукушка кукует число целых часов и каждые полчаса. Сколько раз кукушка прокукует за сутки?

129. Свободно падающее тело в первую секунду проходит 4,9 м, а в каждую следующую секунду – на 9,8 м больше, чем в предыдущую, если не учитывать сопротивление воздуха. Вычислите время падения тела с высоты 490 м без учёта сопротивления воздуха.

130. За сколько часов велосипедист проедет 90 км, если он проезжает за первый час 20 км, а за каждый последующий час на 2 км меньше?

131. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 400 км, выезжают одновременно навстречу друг другу два мотоциклиста. Первый мотоциклист в первый час проезжает 40 км, а в каждый последующий час – на 2 км меньше, чем в предыдущий. Второй мотоциклист в первый час проезжает 50 км, а в каждый последующий час – на 3 км меньше, чем в предыдущий. Через сколько часов они встретятся?

Проверочная работа № 5 по теме «Арифметическая прогрессия»

Вариант 1

Часть 1

1. Какая из последовательностей, заданных формулой n-го члена является арифметической прогрессией?

1) $a_n = 2n^2 + 1$; 2) $a_n = -\frac{1}{2}n + 1$; 3) $a_n = \frac{1}{5-n}$; 4) $a_n = 3 \cdot 5^n$.

2. Найдите восьмой член арифметической прогрессии, у которой первый член равен -45, а разность равна 4.

1) -13; 2) -27; 3) -17; 4) 17.

3. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия, $a_{20} = 153$, $d = 6$. Найдите a_1.

1) 33; 2) 273; 3) 267; 4) 39.

4. Найдите сумму первых шестидесяти членов арифметической прогрессии (c_n), если $c_1 = -8$, $c_{60} = 44$.

1) 18; 2) 2160; 3) 1080; 4) 1560.

5. Найдите сумму первых семи членов арифметической прогрессии (b_n): -35; -28; ....

1) -98; 2) -392; 3) 49; 4) 98.

6. Найдите сумму первых шести членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_n = -3n + 4$.

Ответ: ________________________.

7. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_8 = 31$, $a_{18} = 16$.

Ответ: ________________________.

Часть 2

8. Найдите первые пять членов последовательности (c_n), если $c_1 = -5$, $c_{n+1} - c_n = 11$.

9. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии (a_n): $a_7 = 45$, $d = -1{,}5$.

10. Найдите сумму всех чётных чисел от 22 до 54 включительно.

Запишите ответы в таблицу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Проверьте ответы (см. в конце пособия). Если сделали много ошибок – повторите попытку (решите вариант 2).

Вариант 2

Часть 1

1. Какая из последовательностей, заданных формулой n-го члена является арифметической прогрессией?

1) $a_n = n^2 - 4n$; 2) $a_n = \frac{n+1}{5n}$; 3) $a_n = -\frac{1}{3}n + 8$; 4) $a_n = -3 \cdot 6^n$.

2. Найдите седьмой член арифметической прогрессии, у которой первый член равен 12, а разность равна −5.

1) −23; 2) −18; 3) 42; 4) 47.

3. Последовательность (b_n) – арифметическая прогрессия, $b_{35} = -304$, $d = -6$. Найдите b_1.

1) −100; 2) 100; 3) −508; 4) −94.

4. Найдите сумму первых сорока членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_1 = 38$, $x_{40} = 72$.

1) 55; 2) 2200; 3) 4400; 4) 2000.

5. Найдите сумму первых восьми членов арифметической прогрессии (a_n): 5,5; 6,3; ....

1) 64,24; 2) 132,8; 3) 44,4; 4) 66,4.

6. Найдите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии (y_n), если $y_n = -5n + 3$.

Ответ: ______________________.

7. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (b_n), если $b_9 = 53$, $b_{19} = 46$.

Ответ: ______________________.

Часть 2

8. Найдите первые шесть членов последовательности (z_n), если $z_1 = 11$, $z_{n+1} - z_n = -4$.

9. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии (c_n): $c_8 = -61$, $d = 2,5$.

10. Найдите сумму всех нечётных чисел от 33 до 61 включительно.

Запишите ответы в таблицу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Проверьте ответы (см. в конце пособия).

3. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность (b_n) отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на некоторое число, то есть для любого натурального n выполняется условие $b_n \neq 0$, $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где q – некоторое число. Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии (b_n): $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать её первый член и знаменатель.

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Например, найдем 8-й член геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 36$, $d = \dfrac{1}{2}$:

$$b_8 = 36 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 36 \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{2^2 \cdot 9}{2^7} = \frac{9}{2^5} = \frac{9}{32}.$$

Характеристическое свойство геометрической прогрессии:
последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого её члена, начиная со второго, верно равенство: $b_n{}^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, то есть квадрат каждого члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов.

Заметим, что в этом случае $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии $(q \neq 1)$:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} \text{ или } S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}.$$

Например, найдём сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 5$, $q = 0{,}5$: $S_6 = \dfrac{5 \cdot \left(0{,}5^6 - 1\right)}{0{,}5 - 1} = \dfrac{5 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{0{,}5} = 10 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{64}\right) = \dfrac{10 \cdot 63}{64} = \dfrac{315}{32} = 9\dfrac{27}{32}$.

132. Какие из следующих последовательностей являются геометрическими прогрессиями:

а) 12, 19, 26, ...; в) 1, 4, 9, 16, ...; д) 1, 3, 9, ...;

б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$; г) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \ldots$; е) $\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots$?

133. Найдите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 2$, $q = 3$; в) $b_1 = -48$, $q = -\frac{3}{2}$;

б) $b_1 = -20$, $q = 0{,}5$; г) $b_1 = 0{,}9$, $q = \sqrt{3}$.

134. Напишите четвёртый и пятый члены геометрической прогрессии:

а) 27, 9, 3, ...; в) 4, −2, 1, ...;

б) 4, 6, 9, ...; г) $3, \sqrt{3}, 1, \ldots$.

135. Последовательность (c_n) – геометрическая прогрессия, первый член которой равен c_1, а знаменатель равен q. Выразите через c_1 и q:

а) c_7; г) c_m;
б) c_{30}; д) c_{m+5};
в) c_{159}; е) c_{4m}.

136. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия. Найдите:

а) b_7, если $b_1 = 32$, $q = 0,5$;
б) b_6, если $b_1 = -2700$, $q = \frac{1}{3}$;
в) b_{12}, если $b_1 = 0,25$, $q = -\sqrt{2}$;
г) b_4, если $b_1 = -128$, $q = 0,25$.

137. Найдите пятый и n-й члены геометрической прогрессии:

а) −3; 6; ... ;
б) −60; −20; ... ;
в) 0,064; −0,32; ... ;
г) −1000; −10; ....

138. Найдите первый член геометрической прогрессии (c_n), если:

а) $c_5 = -0,25$, $q = -\frac{1}{2}$;
б) $c_7 = \frac{\sqrt{3}}{27}$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

139. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (x_n), в которой:

а) $x_3 = 12$, $x_5 = 300$;
б) $x_{10} = 81$, $x_{12} = 25$.

140. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), заданной формулой n-го члена:

а) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$;
б) $b_n = 4 \cdot 2^n$.

141. Дана геометрическая прогрессия $-27, b_2, b_3, 1, b_5, b_6$. Найдите неизвестные члены этой прогрессии.

142. Между числами 4 и 0,125 вставьте четыре таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

143. Докажите, что в геометрической прогрессии (b_n) $b_3 \cdot b_9 = b_5 \cdot b_7$.

144. Дана геометрическая прогрессия (b_n). Выразите b_{10} через $b_5 = x$ и q.

145. Ежегодный доход по вкладу в 9000 р. в банке X составляет 6%. Каким станет этот вклад через 3 года?

146. Население города составляет 10 000 человек. Ежегодный прирост населения равен 2%. Сколько будет населения в городе через 4 года?

147. Каждое движение поршня разрежающего насоса удаляет из сосуда $\frac{1}{5}$ часть находящегося там воздуха. Каково будет давление воздуха в сосуде после 4 движений поршня, если начальное давление поршня было 750 мм ртутного столба?

148. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (x_n), если:

а) $x_1 = 81,\ q = \frac{1}{3}$; б) $x_1 = 2000,\ q = 0,5$.

149. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии:

а) 90; 60; ...; б) −125; 25; ....

150. Найдите сумму первых n членов геометрической прогрессии:

а) $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots$; в) $1,\ x,\ x^2,\ \ldots$;

б) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ \ldots$; г) $1,\ -x^2,\ x^4,\ \ldots$.

151. Найдите сумму первых четырёх членов геометрической прогрессии (c_n), у которой $c_5 = -243,\ q = -3$.

152. Найдите первый и последний члены геометрической прогрессии (b_n), у которой:

а) $S_5 = 155,\ q = 2$; б) $S_4 = 130,\ q = \frac{2}{3}$.

153. Найдите число членов геометрической прогрессии (b_n), у которой:

а) $b_1 = 3,\ b_n = 96,\ S_n = 189$; б) $b_1 = 1,\ b_n = 256,\ S_n = 341$.

154. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), у которой $b_5 - b_1 = 90,\ b_4 - b_2 = 36$.

155. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (b_n), у которой $b_3 + b_1 = 5,\ b_5 - b_1 = 15$.

156. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 28, а сумма следующих трёх её членов равна 3,5. Найдите восьмой член прогрессии.

157. Найдите четыре таких числа, что три первых из них составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 2, а три последних – арифметическую прогрессию с разностью 6.

158. Четыре числа составляют арифметическую прогрессию. Если к ним прибавить соответственно 1, 1, 3, 9, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

159. У арифметической и геометрической прогрессий первые члены равны 4, третьи члены одинаковые. Второй член геометрической прогрессии меньше второго члена арифметической прогрессии на 8. Найдите эти прогрессии.

160. У арифметической прогрессии сумма первых трёх членов равна 18. Если от первого члена отнять 2, от второго члена отнять 3, а третий член оставить без изменений, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите числа, составляющие арифметическую прогрессию.

Проверочная работа № 6 по теме «Геометрическая прогрессия»

Вариант 1

Часть 1

1. Установите соответствие между последовательностями, заданными формулой n-го члена:

А) $b_n = 2 + 3^n$; Б) $b_n = 2 \cdot 3^n$; В) $b_n = 2 + 3n$

и высказываниями:

1) (b_n) – арифметическая прогрессия;
2) (b_n) – геометрическая прогрессия;
3) (b_n) – не является ни арифметической, ни геометрической прогрессией.

Ответ:

А	Б	В

2. Найдите седьмой член геометрической прогрессии, у которой первый член равен 27, а знаменатель равен $-\frac{1}{3}$.

1) $\frac{1}{81}$; 2) $-\frac{1}{81}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) $\frac{1}{27}$.

3. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_5 = -540$, $q = 3$. Найдите b_1.

1) $-\frac{20}{9}$; 2) $-\frac{20}{3}$; 3) $\frac{20}{3}$; 4) $\frac{20}{9}$.

4. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (c_n), если $c_1 = 16, q = 0,5$.

1) –31,5; 2) 31; 3) 31,5; 4) –32.

5. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (x_n): 2; –4; ....

1) 22; 2) –22; 3) –10; 4) 10.

6. В геометрической прогрессии (y_n) $y_1 = 36$, $q = \frac{1}{4}$. Сравните y_6 и y_8.

Ответ: ________________________.

7. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (c_n), если $c_5 = -56$, $c_7 = -14$.

Ответ: ________________________.

Часть 2

8. Между числами 5 и 1280 вставьте три положительных числа так, чтобы они вместе с данными образовали геометрическую прогрессию.

9. Четыре положительных числа составляют геометрическую прогрессию, причём $b_1 + b_2 = 9$ и $b_3 + b_4 = 36$. Найдите первый член этой прогрессии.

10. Найдите x, если известно, что числа $x - 3$, $\sqrt{5x}$, $x + 16$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

Запишите ответы в таблицу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Проверьте ответы (см. в конце пособия). Если сделали много ошибок – повторите попытку (решите вариант 2).

Вариант 2

Часть 1

1. Установите соответствие между последовательностями, заданными формулой n-го члена:

А) $b_n = 7 - 4^n$;   Б) $b_n = 7 - 4n$;   В) $b_n = 7 \cdot (-4)^n$

и высказываниями:

1) (b_n) – арифметическая прогрессия;
2) (b_n) – геометрическая прогрессия;
3) (b_n) – не является ни арифметической, ни геометрической прогрессией.

Ответ:

А	Б	В

2. Найдите шестой член геометрической прогрессии, у которой первый член равен 250, а знаменатель равен $-\frac{2}{5}$.

1) $\frac{128}{125}$;   2) $-\frac{128}{125}$;   3) $\frac{128}{25}$;   4) $-\frac{128}{25}$.

3. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_7 = 162$, $q = 3$. Найдите b_1.

1) $\frac{1}{27}$;   2) $\frac{2}{27}$;   3) $\frac{2}{9}$;   4) $\frac{1}{9}$.

4. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (c_n), если $c_1 = 3{,}6, q = -2$.

1) –39,6;   2) 39,6;   3) 18;   4) –18.

5. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (x_n): –4; –8; ....

1) –84;   2) 84;   3) –252;   4) 252.

6. В геометрической прогрессии (y_n) $y_1 = \frac{1}{24}$, $q = -4$. Сравните y_5 и y_7.

Ответ: ________________________.

7. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (c_n), если $c_9 = 25$, $c_4 = 9$.

Ответ: ________________________.

Часть 2

8. Между числами 2 и 48 вставьте четыре числа так, чтобы они вместе с данными образовали геометрическую прогрессию.

9. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, состоящей из семи членов, у которых сумма трёх первых членов равна 26, а сумма трёх последних равна 2106.

10. Найдите x, если известно, что числа $x-3$, $\sqrt{2x}$, $x+4$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

Запишите ответы в таблицу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Проверьте ответы (см. в конце пособия).

V. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Элементы комбинаторики

В практической деятельности человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия. Приходится выбирать из некоторого конечного множества совокупности объектов его подмножества, обладающие тем или иным свойством, подсчитывать, сколько различных комбинаций можно составить из конечного числа элементов, принадлежащих данной совокупности, располагать эти элементы в определённом порядке. Например, сколько способов выбрать трёх дежурных для уборки класса или сколько способов составить слово из данных букв. В этих задачах речь идет о тех или иных комбинациях. Задачи такого типа называются **комбинаторными,** а область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называют **комбинаторикой.**

Комбинаторное правило умножения:
Пусть имеется n элементов и требуется выбрать из них один за другим k элементов. Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, после чего второй элемент можно выбрать n_2 способами из оставшихся, затем третий элемент можно выбрать n_3 способами из оставшихся и т. д., то число способов, которыми могут быть выбраны все k элементов, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пример. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

Решение. Цифру десятков можно выбрать только из цифр 1, 2, 3, 4, то есть четырьмя способами. Цифра единиц может быть любой из пяти предложенных цифр, то есть её можно выбрать пятью способами. Таким образом, существует $4 \cdot 5 = 20$ двузначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4.

Ответ: 20.

161. У Кати 3 юбки и 5 блузок для школьной формы на каждый день. Сколькими способами Катя может выбрать костюм, состоящий из юбки и блузки, для выхода на занятия в школу?

162. Сколько трёхзначных чисел можно составить из чётных цифр (0, 2, 4, 6, 8) при условии, что:

а) цифры в числе не повторяются;
б) цифры в числе могут повторяться?

163. В летнем лагере проходил турнир по шашкам, в котором участвовало 10 человек. Каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?

164. В пятницу в 9А классе пять уроков: алгебра, литература, история, физика и физкультура.

а) Сколькими способами можно составить расписание уроков для 9А на пятницу?
б) Сколько существует способов такого расписания при условии, что физкультура должна быть последним уроком?

165. В стоимость проживания в гостинице включена стоимость завтрака в ресторане гостиницы. В понедельник в меню ресторана были предложены следующие блюда для завтрака:

1) каша, яичница, сырники со сметаной, блинчики с мясом;
2) булочка, пирожное, бутерброд с сыром;
3) чай, кофе, какао, сок, кефир.

Сколькими способами проживающий в гостинице может составить себе завтрак из трёх блюд по одному из каждой категории?

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются перестановки.

Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определённом порядке. Число перестановок из n элементов обозначают P_n (читают: «P из n»):

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Пример. Сколько различных четырёхзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

Решение. Число всех возможных перестановок цифр 0, 2, 4, 6 будет $P_4 = 4!$, но нужно учесть, что число не может начинаться на 0. Поэтому следует исключить те записи, которые начинаются с цифры 0, – это возможные перестановки из чисел 2, 4, 6, их $P_3 = 3!$. Таким образом, существует $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 3!(4-1) = 18$ четырёхзначных чисел, составленных из цифр 0, 2, 4, 6.

Ответ: 18.

166. Вычислите:

а) $\dfrac{P_5 + P_4}{P_3}$; б) $\dfrac{P_6 - P_4}{P_3}$.

167. В известной басне И.С. Крылова «Проказница-Мартышка, Осёл, Козёл да косолапый Мишка затеяли сыграть квартет...». При этом они пытались рассесться таким образом, чтобы получилась мелодия. Сколькими способами можно рассадить этих животных на четырёх стульях?

168. Курьер должен развезти пиццу по шести адресам. Сколько маршрутов он может выбрать?

169. Из слова КОТ можно составить следующие слова (не обязательно осмысленные): КТО, ОКТ, ОТК, ТОК, ТКО. Их называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова: а) книга; б) ластик?

170. Сколько пятизначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно записать, используя только чётные цифры (0, 2, 4, 6, 8)?

Размещением из n элементов по k $(k \le n)$ называется любое множество, состоящее из k элементов, взятых в определённом порядке из данных n элементов. Число размещений из n элементов по k обозначают A_n^k (читают: «A из n по k»):

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Пример. В классе 10 предметов и 5 уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на 1 день, учитывая, что все уроки разные?

Решение. Так как порядок следования предметов при составлении расписания учитывается, то в данном случае мы имеем дело с размещениями из 10 по 5: $A_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 30240$. Значит, существует 30240 способов составить такое расписание на 1 день.

Ответ: 30240.

171. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифры десятков и единиц различны и нечётны?

172. Турист может посетить города Золотого кольца России: Суздаль, Владимир, Кострому, Углич и Ярославль. Сколько маршрутов с последовательным посещением трёх городов он может составить?

173. Сколько существует шестизначных телефонных номеров, в которых все цифры различны и первая цифра отлична от нуля?

174. Вычислите:

а) $\frac{A_6^4 - P_5}{A_5^2}$; б) $\frac{2P_3 + 3A_5^2 - P_5}{5P_5 - P_3}$.

175. Решите уравнение: а) $A_n^2 = 42$; б) $A_{n+1}^2 = 30$.

Сочетанием из n элементов по k $(k \le n)$ называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов. Число сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k (читают: «C из n по k»):

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать четырёх делегатов на конференцию, если в группе 20 человек?

Решение. Так как порядок выбора делегатов не важен, то в данном случае мы имеем дело с сочетаниями из 20 по 4: $C_{20}^4 = \frac{20!}{4!(20-4)!} = \frac{20!}{4! \cdot 16!} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 15 \cdot 17 \cdot 19 = 4845$. Значит, существует 4845 способов выбора делегатов на конференцию.

Ответ: 4845.

176. Проверьте равенство $C_{15}^5 = \frac{A_{15}^5}{P_5}$.

177. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 3 членов, можно образовать из 10 преподавателей?

178. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из 25 учащихся класса?

179. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги из 7 имеющихся по данной проблеме в библиотеке?

180. На родительском собрании присутствовало 20 человек. Сколькими способами можно выбрать из них 5 человек в состав родительского комитета класса?

2. Начальные сведения из теории вероятностей

В повседневной жизни, в научной деятельности и на практике часто наблюдают те или иные явления, проводят определённые эксперименты. В процессе наблюдения или эксперимента встречаются с некоторыми **случайными событиями**, то есть такими событиями, которые могут произойти или не произойти. Так, вытягивание выигрышного билета в лотерее, наступление солнечного дня, выпадение «решки» при подбрасывании монеты – примеры случайных событий, происходящих в повседневной жизни и влияющих на нас.

Закономерности случайных событий изучает раздел математики, который называется **теорией вероятностей**. Методы теории вероятностей применяются во многих областях знаний: в информатике, физике, астрономии, биологии, медицине и др.

Относительной частотой случайного события в серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых это событие наступило, к числу всех испытаний.

Пример. В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 20 подтекают. Для контроля выбирают насос. Найдите относительную частоту выбора насоса, который не подтекает.

Решение. По условию задачи из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, не подтекают $2000-20=1980$ насосов. Следовательно, относительная частота выбора исправного насоса равна $\frac{1980}{2000}=0,99$.

Ответ: 0,99.

181. В 2010 г. в городе Дедовске в летние месяцы (июнь, июль, август) 31 день лил дождь. Какова относительная частота дождливых дней в указанном месте в летний период?

182. В среднем из 5000 куриных яиц в инкубаторе появляется 4957 здоровых цыплят. Найдите относительную частоту появления на свет здорового цыплёнка.

183. Многократная проверка показала, что всхожесть семян тыквы определённого сорта равна 0,88. На колхозном участке посадили 250 семян этого сорта. Какое предположение можно сделать о числе проросших семян?

Исходы, при которых происходит некоторое событие, называются **благоприятными исходами** для этого события.

Если все исходы какого-либо испытания равновозможны, то вероятность события в этом испытании равна отношению числа благоприятных для него исходов к числу всех равновозможных исходов: $P(A)=\frac{m}{n}$, где $P(A)$ – вероятность события A, m – число благоприятных для события A исходов, n – число всех равновозможных исходов данного испытания.

Пример. Какова вероятность появления чётного числа очков при одном бросании игрального кубика?

Решение. При бросании игрального кубика возможно $n = 6$ исходов выпадения очков: 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Из них $m = 3$ благоприятных исходов выпадения очков: 2, 4 или 6. Значит, вероятность появления чётного числа очков (событие А): $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

Событие, которое при проведении некоторого опыта или наблюдения происходит всегда, называют **достоверным событием**.

Вероятность наступления достоверного события равна 1.

Например, ежедневный восход солнца – достоверное событие. Его вероятность равна 1.

Событие, которое не может произойти ни при каком исходе опыта или наблюдения, называют **невозможным событием**.

Вероятность наступления невозможного события равна 0.

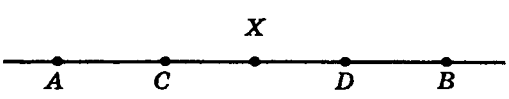
Например, выпадение снега на экваторе – невозможное событие. Его вероятность равна 0.

Так как $0 \le m \le n$, то $0 \le P(A) \le 1$ для любого события A.

Понятие геометрической вероятности

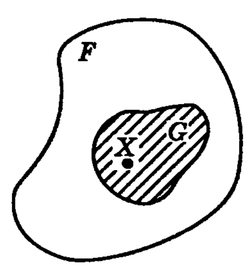
1) Если точку X бросают на отрезок AB, то вероятность попадания точки X на отрезок CD, который является частью отрезка AB, равна отношению длин отрезков CD и AB:

$$P(X \in CD) = \frac{CD}{AB}.$$



2) Если точку X бросают на фигуру F, то вероятность попадания точки X на фигуру G, которая является частью фигуры F, равна отношению площадей фигур G и F:

$$P(X \in G) = \frac{S(G)}{S(F)}.$$



184. В коробке лежат 5 красных, 3 синих и 4 белых шара. Охарактеризуйте следующие события:

а) из коробки достали 1 жёлтый шар;
б) из коробки достали красный, синий и белый шары;
в) из коробки достали красный, синий и чёрный шары;
г) из коробки достали 12 разноцветных шаров.

185. В страховой компании застраховано от ущерба 2000 автомобилей. За год в различных дорожно-транспортных происшествиях ущерб был причинён 53 застрахованным автомашинам. Найдите вероятность повреждения автомобилей в результате ДТП.

186. В урне 75 шаров, из которых 15 белые. Из урны наугад достают один, случайно выбранный, шар. Найдите вероятность того, что этот шар не будет белым.

187. В среднем на 144 исправных станка, изготовленных на заводе, приходятся шесть неисправных. Найдите вероятность того, что приобретённый станок исправен.

188. Мама испекла пирожки и разложила их по тарелкам. На одной тарелке оказались пирожки, по виду все одинаковые: 4 с мясом, 6 с капустой и 5 с картошкой. Коля наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок с капустой.

189. Международная научная конференция проводится в 5 дней. Всего заявлено 75 докладов – по одному от каждой страны. В первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление представителя от России состоится в последний день конференции?

190. В случайном эксперименте монету бросают два раза. Найдите вероятность того, что оба раза выпадет решка.

191. В случайном эксперименте монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что два раза выпадет орёл и один раз решка.

192. Найдите вероятность того, что при броске игрального кубика выпадет не менее 5 очков.

193. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждой из выпавших граней появится 3 очка;
б) на всех выпавших гранях появится одинаковое количество очков.

194. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 кратно трём?

195. На координатной прямой отмечены точки: $A(16)$, $B(-4)$, $C(-1)$, $D(12)$. Точку X наугад бросают на отрезок AB. Найдите вероятность того, что:

а) $X \in CD$;   б) $X \in BC$.

196. В треугольнике ABC проведён отрезок MN, параллельный BC $(M \in AB,\ N \in AC)$, причём $AM : MB = 1:3$. Точку X наугад бросают на треугольник ABC. Найдите вероятность попадания точки X на треугольник AMN.

197. На плоскости даны две концентрические окружности, радиусы которых 5 см и 10 см. Найдите вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями.

198*. На отрезке [0; 1] случайным образом выбирают два числа x и y. Найдите вероятность того, что $y \geq 0{,}4x$.

Проверочная работа № 7 по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей»

Вариант 1

Часть 1

1. Число 9! делится на:

1) 99; 2) 90; 3) 108; 4) 55.

2. Число перестановок из семи элементов равно:

1) $P_7 = 720$; 2) $P_7 = 49$; 3) $P_7 = 5040$; 4) $P_7 = 28$.

3. Какое из равенств верно?

1) $C_{15}^3 = \frac{15!}{3!}$; 2) $C_{15}^3 = \frac{15!}{3! \cdot 12!}$; 3) $C_{15}^3 = \frac{15!}{12!}$; 4) $C_{15}^3 = \frac{18!}{3! \cdot 15!}$.

4. Сколькими способами 6 человек смогут разместиться на 6 местах зрительного зала театра?

1) 12; 2) 36; 3) 120; 4) 720.

5. Сколько различных трёхзначных чисел (без повторения цифр) можно составить из нечётных цифр?

1) 60; 2) 20; 3) 24; 4) 30.

6. В чемпионате по гимнастике участвуют 25 спортсменок: 11 из России, 8 из США, остальные из Китая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая последней, окажется из Китая.

Ответ: ____________________.

7. В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

Ответ: ____________________.

Часть 2

8. Учитель записал на доске двузначное число. Какова вероятность того, что это число кратно 3?

9. В треугольник ABC вписан параллелограмм $BKMN$ так, что $K \in AB$, $M \in AC$, $N \in BC$ и $AK : KB = 1 : 2$. Какова вероятность того, что точка X, брошенная наугад на треугольник ABC, попадёт на параллелограмм $BKMN$.

10. Решите уравнение $A_n^4 = 12 \cdot A_n^2$.

Запишите ответы в таблицу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Проверьте ответы (см. в конце пособия). Если сделали много ошибок – повторите попытку (решите вариант 2).

Вариант 2

Часть 1

1. Число 13! делится на:

1) 169; 2) 170; 3) 19; 4) 1300.

2. Число перестановок из пяти элементов равно:

1) $P_5 = 25$; 2) $P_5 = 120$; 3) $P_5 = 10$; 4) $P_5 = 15$.

3. Какое из равенств верно?

1) $A_{18}^4 = \frac{18!}{4!}$; 2) $A_{18}^4 = \frac{18!}{4! \cdot 14!}$; 3) $A_{18}^4 = \frac{18!}{14!}$; 4) $A_{18}^4 = \frac{22!}{4! \cdot 18!}$.

4. Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь в кассе супермаркета?

1) 12; 2) 36; 3) 120; 4) 720.

5. Сколько различных четырёхзначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

1) 30; 2) 360; 3) 720; 4) 15.

6. Конкурс исполнителей проводится 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день пройдёт 20 выступлений, а остальные распределены поровну между оставшимися днями. Какова вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день?

Ответ: ________________________.

7. При встрече 16 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

Ответ: ________________________.

Часть 2

8. Ученик записал в тетради двузначное число. Какова вероятность того, что сумма цифр этого числа равна 9?

9. Дана последовательность квадратов с общим углом при вершине A: $AB_1C_1D_1$, $AB_2C_2D_2$, $AB_3C_3D_3$, $AB_4C_4D_4$, ..., такая, что $AB_2 = \frac{1}{2}AB_1$, $AB_3 = \frac{1}{2}AB_2$, и так далее. Какова вероятность того, что точка X, брошенная наугад на квадрат $AB_1C_1D_1$, попадёт на второй квадрат, но не попадёт на третий.

10. Решите уравнение $\frac{A_n^5 + A_n^3}{A_n^3} = 43$.

Запишите ответы в таблицу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Проверьте ответы (см. в конце пособия).

VI. ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 7–9-х КЛАССОВ

1. Вычисления

199. Найдите значение выражения:

а) $1\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}$;

б) $9\frac{5}{12}-2\frac{8}{15}+1\frac{2}{3}$;

в) $6\frac{2}{3}\cdot1\frac{1}{4}+2\frac{2}{5}\cdot1\frac{2}{3}$;

г) $25\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{11}+12\frac{3}{5}:2{,}1$.

200. Выполните действия:

а) $-37+80+38-79$;

б) $-0{,}5+\frac{6}{7}+4\frac{1}{7}-5\frac{1}{2}$;

в) $\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{5}{6}\cdot\left(-1\frac{1}{5}\right)\cdot30$;

г) $(-0{,}4)\cdot(-2{,}5)\cdot2{,}5\cdot4$;

д) $0{,}6-(-1{,}8):(-3)+8-(-4):0{,}4$;

е) $2{,}5-(-2{,}8):(-7)-(-5)-(-10):2$.

201. Найдите значение выражения:

а) $2\frac{1}{6}+2\frac{1}{12}\cdot(1{,}25-1{,}64:0{,}8)$;

б) $-0{,}81\cdot\left(-\frac{5}{9}\right):(1{,}53:1{,}5-1{,}2)$;

в) $(2{,}472:2{,}4-1{,}3):(-0{,}6):(-0{,}9)$;

г) $2\frac{2}{9}:\left(-1\frac{1}{3}\right)^2+0{,}5\cdot0{,}6$;

д) $\left(1{,}6^2-2{,}4\cdot1\frac{3}{5}\right):3\frac{1}{5}$;

е) $(0{,}2\cdot0{,}1-0{,}1):0{,}5+0{,}75$.

202. Выполните действия:

а) $\dfrac{0{,}15-0{,}15\cdot6{,}4}{-\frac{3}{8}+0{,}175}$;

б) $\dfrac{0{,}2\cdot1{,}8+0{,}8\cdot1{,}8}{1{,}3^2-0{,}5^2}$;

в) $1{,}2+3{,}8:\left(2\frac{5}{18}-5\frac{1}{12}+1\frac{2}{9}\right)$;

г) $\left(\frac{5}{6}-1\frac{1}{15}+\frac{3}{20}\right)\cdot1{,}2+0{,}8$.

203. Найдите значение выражения:

а) $-0{,}2^3\cdot0{,}2^{-2}+0{,}5^{-1}-5^3:5+6{,}5^0$;

б) $5^2:5^{-1}+\left(\sqrt{3}\right)^0-4^2\cdot4^{-3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

204. Расположите числовые выражения в порядке возрастания их значений:

а) $-\frac{2}{5}:0{,}9$; $-\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}$; $0{,}5-\frac{5}{6}$;

б) $-1{,}23:0{,}4$; $1{,}26-4\frac{2}{3}$; $-3{,}8\cdot0{,}92$.

205. Вычислите рациональным способом:

а) $12\frac{3}{7}:\left(1\frac{8}{15}+0{,}25-3\frac{1}{30}-1\frac{3}{4}\right)$;

б) $\left(3\frac{13}{15}-12\frac{3}{20}-5\frac{4}{45}-0{,}85\right)\cdot3$.

206. Найдите значение выражения:

а) $0,5x+2,4$ при $x=-4$;

б) $3a-2b$ при $a=3\frac{1}{3}$, $b=-3,5$;

в) $3x^2-2x+1$ при $x=-1$;

г) $(y+2)^2-5y$ при $y=-3$;

д) $\frac{(x+1)^2}{x-1}+6x$ при $x=-4$;

е) $\frac{x^2-4x+2}{x^2-5}+6x$ при $x=-6$.

207. Найдите:

а) 12,5% от 400;

б) число, если 17% этого числа равны 51.

208. Фирма получила заказ на изготовление 240 автоприцепов, а изготовила 216 автоприцепов. Вычислите процент выполнения заказа.

209. В результате мер по экономии электроэнергии в первый месяц сократили её расход на 20%, во второй – на 10%, а в третий – на 10%. На сколько процентов в результате сократился расход электроэнергии?

210. Определите.

а) К 400 мл 30% раствора кислоты добавили 100 мл воды. Какой стала концентрация кислоты?

б) Некоторое количество 25% раствора кислоты смешали с таким же количеством 35%-го раствора этой же кислоты. Какова концентрация получившегося раствора?

в) Имеется два сорта молока – жирностью 3,5% и 6%. Их смешали в отношении 4 : 1. Какова жирность получившегося молока?

211. Выполните действия:

а) $3\sqrt{72}-2\sqrt{200}+5\sqrt{32}-\sqrt{400}$;

б) $8\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt{24}-6\sqrt{3\frac{13}{36}}-\frac{2}{3}\sqrt{54}$;

в) $\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{54}+6\sqrt{96}\right)\cdot 2\sqrt{3}$;

г) $\left(2\sqrt{15}+4\sqrt{5}-30\sqrt{15}\right):2\sqrt{5}$;

д) $\left(2\sqrt{10}+3\sqrt{5}\right)^2$;

е) $\left(7\sqrt{3}+2\sqrt{6}\right)\cdot\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)$.

212. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{5+\sqrt{21}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}$;

б) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

213. Выполните действия:

а) $\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$;

б) $\left(5-2\sqrt{3}\right)^2+\left(5+2\sqrt{3}\right)^2$;

в) $\left(\sqrt{10+5\sqrt{3}}-\sqrt{10-5\sqrt{3}}\right)^2$;

г) $\frac{1}{6-3\sqrt{2}}+\frac{1}{6+3\sqrt{2}}$.

214. Сравните значения выражений без использования микрокалькулятора:

а) $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}$;

б) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{5}+2$;

в) $2\sqrt{10}$ и $3\sqrt{5}$;

г) $\sqrt{6}+3$ и $\sqrt{5}+\sqrt{10}$.

215. Найдите первый член и сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_2 = -2$, $a_3 = 1$.

216. Найдите сумму членов с третьего по десятый включительно арифметической прогрессии (a_n): -3; -1; ....

217. Найдите первый член и сумму первых восьми членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = -2$, $b_3 = -1$.

218. Найдите сумму членов с третьего по шестой включительно геометрической прогрессии (b_n): $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{8}$; ....

219. Найдите значение выражения:

а) $\frac{15!}{12!}$; б) $\frac{6!}{8!}$; в) $\frac{40!}{39!}$; г) $\frac{15!}{3! \cdot 12!}$.

220. Сравните числа:

а) $\frac{17!}{14!}$ и 10^3; б) $\frac{4!}{8!}$ и 10^{-3}.

221. Вычислите $\frac{2P_3 + 3A_4^2}{5P_5 - P_3}$.

222. Сколько существует четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, в записи которых цифры не повторяются?

223. Сколькими способами можно выбрать 2 детали из ящика, содержащего 10 деталей?

224. Слово – это любая последовательность букв русского алфавита. Сколько различных слов можно составить из букв слова:

а) ВЕКТОР; б) ЛИНИЯ?

225. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 190 качественных сумок приходится 10 сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной.

226. В урне 30 шаров: 8 красных, 10 синих, 12 белых. Найдите вероятность появления цветного шара.

227. Игральный кубик бросают трижды. Найдите вероятность того, что шестёрка выпала не более двух раз.

2. Тождественные преобразования

228. Преобразуйте в многочлен:

а) $2x(5x-7)+5x(3-2x)$;

б) $(y^2-2y+4)(y+2)-y(y^2-1)$;

в) $(a^3-a^2+a-1)(a+1)$;

г) $(11x-5)^2-(10x+1)^2-(7x+10)(3x-20)$;

д) $(7+10y)(8y+3)+(8y-1)^2-(5+12y)^2+50y$;

е) $5(x-y)(5x-2y)^2+(y-5x)(5x-4y)^2$.

229. Разложите на множители:

а) $25x^2-81y^2$;

б) $2a^3-2a$;

в) $a^2+2ab+b^2-4$;

г) $a^3-a^2b-ab^2+b^3$;

д) $9(2x-y)^2-4(3x-y)^2$;

е) $10x^4y^2-40x^2y^4$.

230. Докажите тождество:

а) $(a^2+b^2)(a-b)(a+b)=a^4-b^4$;

б) $5a^2-2(a-1)(a+1)=3a^2+2$.

231. Разложите на множители:

а) $64x^3-1$;

б) a^3-a;

в) $(2x-1)^3+1$;

г) $(a-b)^3-a^3$.

232. Разложите на множители трёхчлен:

а) $6x^2+7x-3$;

б) $-3x^2+5x+2$;

в) $x^2-5xy+6y^2$;

г) $2a^2+ab-3b^2$.

233. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2-ab}{b^2-ab}$;

б) $\dfrac{3x^2-15xy}{10y^2-2xy}$;

в) $\dfrac{(a-b)^2}{2b^2-2a^2}$;

г) $\dfrac{x^3+2x^2y+xy^2}{x^3-xy^2}$.

234. Упростите выражение $\dfrac{1-y+x-xy}{1-3y+3y^2-y^3}$ и найдите его значение при $x=8$, $y=4$.

235. Упростите:

а) $\dfrac{8-a}{a-4}+\dfrac{a-3}{a+1}$;

б) $\dfrac{2a}{a^2-1}+\dfrac{3}{1+a}-\dfrac{1}{a-1}$;

в) $\dfrac{3y(3y-x)}{2(x^2-y^2)}-\dfrac{3x}{2(x-y)}+\dfrac{3y}{x+y}$;

г) $\dfrac{x^2+8}{x^3-8}+\dfrac{x}{x^2+2x+4}-\dfrac{1}{x-2}$.

236. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{a^2-ab}{8b^4}\cdot\dfrac{4b^3}{a-b}$;

б) $\dfrac{a^2-36}{a^2-3a}:\dfrac{a^2+6a}{a^2-9}$;

в) $\dfrac{15(x-2y)^2}{x^4-16y^4}:\dfrac{5x^2-10xy}{x^2+4y^2}$;

г) $\dfrac{x^3-y^3}{2x^2-2y^2}\cdot\dfrac{4x+4y}{5x^2+5xy+5y^2}$.

237. Упростите выражение $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}:\dfrac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$ и найдите его значение при $x=10,5$.

238. Упростите выражение:

а) $\left(a+\dfrac{6-a^2}{1+a}\right):\dfrac{6+a}{a^2-1}$;

б) $\left(a-5+\dfrac{15}{a+5}\right):\dfrac{a^2-10}{a^2+10a+25}$;

в) $\dfrac{1}{a-2}-\dfrac{4a}{a^2-4}\left(\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a^2-a}\right)$;

г) $\left(\dfrac{2}{3-b}-\dfrac{4b}{9-b^2}-\dfrac{1}{3+b}\right)\left(9+6b+b^2\right)$;

д) $\dfrac{5b-6}{b+2}+\dfrac{b}{b+2}\cdot\dfrac{b^2-4}{b}+\dfrac{10-3b}{b+2}$;

е) $\left(\dfrac{2x}{x-7}+\dfrac{7x}{x^2-14x+49}\right):\dfrac{2x-7}{x^2-49}-\dfrac{7(x+7)}{x-7}$.

239. Найдите значение выражения:

а) x^2+y^2, если $x+y=7,\ xy=5$;

б) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, если $x+\dfrac{1}{x}=7,5$.

240. Упростите выражение:

а) $\left(4a^3b^{-2}\right)^2\cdot 3a^{-5}b^4$;

б) $\left(\dfrac{4x^{-3}}{5y^{-2}}\right)^2\cdot\dfrac{15y}{x^{-5}}$;

в) $\dfrac{15^n}{3^{n+2}\cdot 5^n}$;

г) $\dfrac{0,5^{-2n}+0,5^{-3n}}{2^{4n}+2^{3n}}$.

241. Упростите выражение:

а) $\sqrt{27a}+\sqrt{75a}-\sqrt{108a}$;

б) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\sqrt{x}$;

в) $\left(\sqrt{3a}+\sqrt{2b}\right)^2-\left(\sqrt{3a}-\sqrt{2b}\right)^2$;

г) $\left(\sqrt{c}+\sqrt{7}\right)\left(c-\sqrt{7c}+7\right)$.

242. Сократите дробь:

а) $\dfrac{3-\sqrt{b}}{3\sqrt{b}-b}$;

б) $\dfrac{x\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2}$;

в) $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b}$;

г) $\dfrac{64-a\sqrt{a}}{16+4\sqrt{a}+a}$.

3. Уравнения и системы уравнений

243. Решите уравнение:

а) $8x^2=(2x-3)(4x+3)+30$;

б) $(2x-1)(2x+1)-4x(x-3)=23$;

в) $\frac{4x+5}{6}-\frac{3x-2}{4}=\frac{2x-5}{3}$;

г) $\frac{7x-3}{12}-\frac{4x+9}{15}=x-7$.

244. Скорый и пассажирский поезда идут навстречу друг другу по параллельным путям со скоростями 60 км/ч и 48 км/ч соответственно. Пассажир, сидящий во втором поезде, заметил, что скорый поезд шёл мимо него в течение 5 с. Найдите длину скорого поезда.

245. Поп нанял работника Балду на год, обещал ему 120 р. и красный кафтан. Однако, проработав 7 месяцев, Балда стал просить у попа расчёт и получил за работу 50 р. и красный кафтан. Сколько стоил кафтан?

246. Расстояние, равное 24 км, лодка проплыла по течению за 4 ч, а против течения за 6 ч. Найдите скорость лодки и скорость течения реки.

247. Два равных по массе слитка имеют различное содержание меди. От каждого слитка отрезали по $\frac{3}{4}$ и каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого слитка. В результате оказалось, что в первом слитке процентное содержание меди в 2 раза выше, чем во втором. Во сколько раз во втором слитке было первоначально меди больше, чем в первом?

248. Решите уравнение:

а) $5x^2-4x=0$;

б) $7y^2-0,28=0$;

в) $x^2-5,5x+7=0$;

г) $3x^2-5x+4=0$.

249. При каких значениях k уравнение имеет хотя бы один корень:

а) $3x^2+2kx+k+6=0$;

б) $x^2+6kx+9=0$?

250. При каких значениях k уравнение не имеет корней:

а) $4x^2-2kx+k+3=0$;

б) $x^2-2kx-k=0$?

251. Решите уравнение:

а) $(2x-1)(x+4)+7=0$;

б) $(4x-3)(4-x)=3$;

в) $\frac{2x+3}{5}+\frac{4-x^2}{8}=-1$;

г) $\frac{4-4x+x^2}{8}+\frac{x-3}{5}=\frac{4-x}{6}$.

252. Требуется огородить участок прямоугольной формы, одна сторона которого на 10 м больше другой. Найдите длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 м^2.

253. Найдите три последовательных чётных числа, таких, что сумма квадратов первых двух из них равна квадрату третьего числа.

254. В равнобедренном треугольнике основание больше высоты, проведённой к основанию, на 6 см, а площадь его равна 108 см^2. Найдите длину боковой стороны треугольника.

255. Среднее арифметическое двух чисел равно 13, а среднее геометрическое – 12. Найдите эти числа.

256. Решите уравнение:

а) $\dfrac{2x+5}{x^2+x}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3x}{x+1}=0$;

б) $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{18}{x^2-9}=\dfrac{x}{x+3}$;

в) $\dfrac{2}{x^2+10x+25}-\dfrac{10}{25-x^2}=\dfrac{1}{x-5}$;

г) $\dfrac{15}{x^2-4x-5}+\dfrac{9}{5x-x^2}=\dfrac{5}{x^2-1}$.

257. Расстояние между двумя пунктами по реке равно 2 км. Лодка совершает путь в оба конца за 1 ч 30 мин. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

258. Турист проплыл на байдарке 15 км против течения реки и 14 км по течению, затратив на всё путешествие столько же времени, сколько ему понадобилось бы, чтобы проплыть в стоячей воде 30 км. Зная, что скорость течения реки равна 1 км/ч, найдите скорость байдарки в стоячей воде.

259. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 20 км, выехал мотоциклист, а через 6 мин вслед за ним выехал автобус, скорость которого на 10 км/ч больше скорости мотоциклиста. Автобус прибыл в пункт В на 4 мин раньше мотоциклиста. Найдите скорости автобуса и мотоциклиста.

260. Две бригады за определённый срок должны были изготовить по 180 деталей. Изготовляя в час на 2 детали больше первой, вторая бригада выполнила задание на 3 ч раньше срока. За сколько часов каждая бригада выполнила задание?

261. Две бригады, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за 8 ч. Первая бригада, работая одна, могла бы выполнить эту работу на 12 ч быстрее, чем вторая бригада. За сколько часов могла бы выполнить всю работу первая бригада, если бы она работала одна?

262*. Два поезда выходят из двух городов навстречу друг другу и встречаются через 3,6 ч. За сколько часов каждый из поездов проходит это расстояние, если один из них тратит на весь путь на 3 ч больше другого?

263. Решите уравнение:

а) $x^4-5x^2+4=0$;

б) $y^4-6y^2+5=0$;

в) $x^4+17x^2+16=0$;

г) $x^4-3x^2-4=0$.

264. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $\left(x^2+2x\right)^2-18x^2-36x+45=0$;

б) $x+\sqrt{x}-20=0$.

265. Решите уравнение:

а) $25x^2 = 4x^4$; в) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$;

б) $x^3 + 5x^2 - 6x = 0$; г) $x^3 + 6x^2 = 9x + 54$.

266. Решите графически уравнение:

а) $x^3 = -x + 2$; в) $x^3 = -2x^2 + 3$;

б) $x^2 - 1 = \frac{6}{x}$; г) $x^2 - 2x = -\frac{3}{x}$.

267. Найдите с помощью графиков число корней уравнения:

а) $\sqrt{x} = -x^2 + 1$; в) $-x^2 + 8 = -x + 2$;

б) $-x^2 + 2x + 1 = \frac{2}{x}$; г) $x^3 = -\frac{5}{x}$.

268. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x - 2y = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 13x - 2y = 56, \\ 7x + 4y = 20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 5y = 9, \\ 5x + 3y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 8x - 7y = 21, \\ 5x - 3y = 20. \end{cases}$

269. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{y+1}{3} = 0, \\ \dfrac{y-2}{3} - \dfrac{x+3}{6} = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{4y-3x}{2} + \dfrac{3x-2y}{3} = \dfrac{x-y}{2}, \\ \dfrac{3x-2y}{3} - \dfrac{x-y}{5} = \dfrac{3y-6}{2}. \end{cases}$

270. Подберите значения k и b так, чтобы система уравнений $\begin{cases} y = kx + b, \\ y = \dfrac{1}{3}x - 2: \end{cases}$

а) не имела решений;
б) имела бесконечно много решений;
в) имела единственным решением пару чисел, в которой $y = -1$.

271. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точки:

а) $A(28;\ 0)$ и $B(0;\ 7)$; б) $M(-1;\ -5)$ и $N(5;\ 7)$.

272. Парабола $y = ax^2 + c$ проходит через точки $A(2;\ -1)$ и $B(3;\ -6)$. Найдите значения a и c.

273. Найдите два числа, сумма которых равна 3, а сумма их квадратов равна 29.

274. Два ученика должны были обработать по 120 деталей за определённый срок. Первый из них, обрабатывая на 2 детали в час больше второго, за 3 ч до срока обработал 136 деталей. За сколько часов первый ученик обработал 136 деталей?

275. Два комбайна, работая совместно, могут убрать урожай с участка за 20 ч. За сколько часов смог бы убрать урожай каждый комбайн, если известно, что второй комбайн убрал урожай с одной трети участка на 3 ч быстрее, чем первый с его половины?

276. Из одного пункта выехали два велосипедиста со скоростями 15 км/ч и 20 км/ч. Через час из этого же пункта выехал автобус, который обогнал первого велосипедиста и через 10 мин догнал второго. Найдите скорость автобуса.

277. Если некоторое двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 5 и в остатке 2. Найдите это число.

278. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2-y=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sqrt{x}-y=0, \\ x^3-y=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+1)^2-y=0, \\ xy=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-y=2, \\ xy=4. \end{cases}$

279. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x-y=1, \\ xy=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ x+y=-1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=2, \\ x+y=5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2-2xy=1, \\ x+y=3. \end{cases}$

280. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y-xy=1, \\ x+y+xy=9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=6, \\ \sqrt{xy}=8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^3-y^3=26; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{3}{16}. \end{cases}$

281. Не выполняя построения, выясните, пересекаются ли:

а) парабола $y=x^2-6x+8$ и прямая $y=4-x$;

б) прямая $y=\frac{1}{2}x+2$ и гипербола $y=\frac{6}{x}$;

в) прямая $y=2-x$ и окружность $x^2+y^2=4$.

Если пересекаются, то укажите координаты точек пересечения. Проиллюстрируйте решение с помощью графиков.

282. При каком значении p имеет решения система уравнений $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + 2y = 4, \\ 7x - 3y = p? \end{cases}$

283. Из села в город выехал грузовик, а из города в село одновременно с грузовиком выехал автобус. После встречи грузовик прибыл в город через 1 ч 30 мин, а автобус прибыл в село через 40 мин. Сколько часов был в пути грузовик и сколько автобус?

284. Дана несократимая дробь. Если к числителю этой дроби прибавить 2, а знаменатель дроби удвоить, то значение дроби не изменится. Если из знаменателя дроби вычесть числитель, то дробь станет целым числом. Найдите эту дробь.

285. Имеются два водных раствора кислоты разной концентрации объёмами 4 л и 6 л. Если их слить вместе, то получится 35%-й раствор. Если слить вместе одинаковые объёмы растворов, то получится 36%-й раствор. Сколько литров чистой кислоты содержится в каждом из данных растворов?

286. В первом сплаве 10% меди, а во втором – 30%. После того как их сплавили вместе, получили 200 г нового сплава, содержащего 25% меди. Найдите массу каждого сплава.

287. Арифметическая прогрессия состоит из восьми членов. Сумма членов, стоящих на нечётных местах, равна 56, а сумма членов, стоящих на чётных местах, равна 68. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

288. Три числа составляют арифметическую прогрессию, их сумма равна 21. Если первое число оставить без изменения, из второго числа вычесть 1, а к третьему прибавить 1, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите данные числа.

289. В арифметической прогрессии (a_n): $a_1 = 6$, $a_{21} = 52$. Найдите a_{10}.

290. Решите уравнение $7 + 10 + 13 + \ldots + x = 140$.

291. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 1.

292. Числа $x + y$, $3x + y$, $2x + 2y$ составляют арифметическую прогрессию, а числа $(y - x)^2$, $xy + 5$, $(y + 1)^2$ составляют геометрическую прогрессию, причем все эти числа положительны. Найдите x и y.

4. Неравенства

293. Пользуясь тем, что $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ и $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, оцените значение выражения:

а) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; б) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; в) $\sqrt{6}$.

294. Решите неравенство:

а) $3x - 7 \le 1 - x$;

б) $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x}{6} - \dfrac{x+2}{3} < 2$;

в) $4 + (2x + 3)(2x - 1) > (2x + 7)^2$;

г) $\dfrac{4x+11}{5} + \dfrac{10-x}{2} \le 3(x - 3)$.

295. Решите неравенство:

а) $(4-3x)\left(\sqrt{11}-4\right)>0$;

б) $\left(5-\sqrt{21}\right)(5x+2)<0$;

в) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{3+4x}>0$;

г) $\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{14}}{6x+2}<0$.

296. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}6x-3>2x-15,\\ 2x+1>3(x+1);\end{cases}$

б) $\begin{cases}2x+4>\dfrac{2x}{3}-2x,\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}>x-1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dfrac{3x-15}{10}+\dfrac{5x+1}{3}<\dfrac{5x-1}{5},\\ \dfrac{x-3}{2}-\dfrac{x-2}{3}<x-\dfrac{x-1}{2};\end{cases}$

г) $\begin{cases}2x(2x+2,5)>(2x-5)^2,\\ (x-2)(x+2)>(x-4)^2,\\ \dfrac{x-3}{2}>\dfrac{2-x}{4}+4.\end{cases}$

297. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases}3x-7<3-2x,\\ 6x+2>3x-10;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x+\dfrac{x+1}{3}>1-x,\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{x}{3}<2-\dfrac{x}{2}.\end{cases}$

298. Решите двойное неравенство:

а) $3<2x-1<7$;

б) $7\le 3x+1\le 10$;

в) $-1<2x+3<5$;

г) $-7\le 5-3x\le 17$.

299. Решите неравенство:

а) $|2x-5|>3$;

б) $|4x+6|\le 2$;

в) $|2x-3|<x+3$;

г) $|3x+1|>x+3$.

300. При каких значениях переменной x значения выражения $\dfrac{2x-1}{3}$ принадлежат промежутку $[1;\ 3]$?

301. Решите неравенство:

а) $x^2-10x+9>0$;

б) $x^2-9\le 0$;

в) $x^2-4x+4\le 0$;

г) $4x^2+17x-15<0$;

д) $5x^2-2x+1\ge 3x^2+3x+4$;

е) $(2x-1)^2+5>(3x-1)(x+2)$.

302. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-3}>0$;

б) $\dfrac{x^2-7x+10}{x-1}<0$;

в) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-3x-10}>0$;

г) $\dfrac{x^2-3x-2}{x+3}\le 1$.

303. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - x - 30 < 0, \\ x - 1 \geq 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 4x + 4 \geq 0, \\ 4x - x^2 \geq 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 2x - 48 \leq 0, \\ x^2 - 4 \leq 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - 2x + 2 > 0, \\ 4x - x^2 - 5 < 0. \end{cases}$

304. При каких значениях x квадратный трёхчлен $x^2 - 4x - 12$:

а) принимает отрицательные значения;
б) принимает неотрицательные значения?

305. При каких значениях c неравенство верно при любых значениях переменной x:

а) $3x^2 + (c+2)x + (8c+1) > 0$;

б) $(5-c)x^2 - 2(1-c)x + 2(1-c) < 0$?

306. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{10x - 4}$;

б) $\sqrt{8 - 0{,}2x}$;

в) $\sqrt{2x - x^2}$;

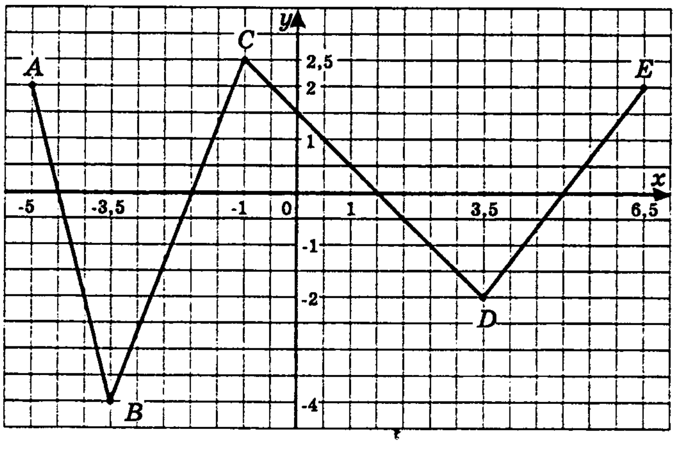
г) $\sqrt{-2 + x + x^2}$;

д) $\sqrt{15 - 6x} + \sqrt{4x - 1}$;

е) $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{7x - 12}$?

5. Функции

307. Ломаная $ABCDE$ является графиком функции $y = f(x)$.



Найдите значения аргумента, при которых:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) > 0$; в) $f(x) < 0$.

Напишите уравнение прямой, которой принадлежит отрезок BC.

308. Постройте график функции:

а) $y = -3x$;

б) $y = 4x - 1$;

в) $y = -2$;

г) $y = -2x + 3$;

д) $y = \dfrac{1}{3}x + 2$;

е) $y = \dfrac{-3 - x}{2}$.

309. Функция $y = f(x)$ задана формулой $y = 4 - 0{,}5x$. При каких значениях аргумента x:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) > 0$; в) $f(x) < 0$?

Постройте график этой функции.

310. Какие из линейных функций $y = 3 - 2x$, $y = 5x - 8$, $y = -10$, $y = -x + 99$, $y = 2x - 51$ являются:

а) убывающими;
б) возрастающими?

311. Каково взаимное расположение графиков функций:

а) $y = 6x + 15$ и $y = 6x - 1$;
б) $y = -2x + 9$ и $y = 10 - 2x$;
в) $y = -5x + 3$ и $y = 5x + 3$;
г) $y = 0{,}4x$ и $y = 0{,}4$?

В каждом случае изобразите графики схематически.

312. Постройте график функции $y = -x^2 + 4x + 5$. При каких значениях x значение y равно нулю; больше нуля; меньше нуля? В каком промежутке эта функция возрастает и в каком убывает? Найдите область значений этой функции.

313. Постройте график функции:

а) $y = 4 - x^2$;
б) $y = 0{,}5x^2 - 2$;
в) $y = -x^2 + 2x$;
г) $y = 3x^2 + 9x$;
д) $y = x^2 - 2x - 3$;
е) $y = 2x^2 - 5x - 3$.

В каждом случае укажите наименьшее (или наибольшее) значение функции.

314. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{2}{x}$; б) $y = -\dfrac{5}{x}$.

В каждом случае укажите значения x, при которых $y < 0$; $y > 0$.

315. Изобразите схематически график функции:

а) $y = kx + 2$ при $k > 0$;
б) $y = -5x + b$ при $b < 0$;
в) $y = \dfrac{a}{x}$ при $a < 0$;
г) $y = \dfrac{a}{x}$ при $a > 0$;
д) $y = ax^2 + 5$ при $a < 0$;
е) $y = ax^2 - 3$ при $a > 0$;
ж) $y = ax^2 + bx$ при $a < 0,\ b < 0$;
з) $y = ax^2 + bx$ при $a > 0,\ b < 0$.

316. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 0{,}5x - 1{,}5$ и $y = -5x + 4$;
б) $y = x + 5$ и $y = 2x^2 - 1$;
в) $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = -x^2 - 4x - 3$;
г) $y = \sqrt{x}$ и $y = x - 2$.

317. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x}$; б) $y = |2x - 3|$; в) $y = |x^2 - 3x + 2|$.

318. Постройте график функции и найдите область её значений:

а) $y = \begin{cases} x^2 - 1, \ -3 \le x \le 2, \\ 1 + x, \ 2 < x \le 4; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} x + 6, \ -5 \le x < -3 \\ x^2 + 2x, \ -3 \le x \le -1, \\ x^3, \ -1 < x \le 2; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -\dfrac{6}{x}, \ -6 \le x \le -1, \\ 5 - x, \ -1 < x \le 6; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} 1, \ -5 \le x < -3 \\ -0{,}5x - 0{,}5, \ -3 \le x \le 1, \\ -x^2, \ 1 < x \le 3. \end{cases}$

319. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству, и назовите какие-нибудь две пары значений x и y, удовлетворяющих неравенству:

а) $2y + 2 > x$; в) $y - x^2 < 2x - 2$; д) $x^2 + y^2 < 4$;

б) $yx \ge 8$; г) $5y - 5 < -x$; е) $x^2 + 2 \ge 4x - y$.

320. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств, и назовите какие-нибудь две пары значений x и y, удовлетворяющих системе неравенств:

а) $\begin{cases} 2x + y > 6, \\ y + 1 < 0{,}5x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 < 9, \\ y - 4 < -0{,}5x; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y \le x^3, \\ y + 3 \ge x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3y + 6 > x, \\ x + 6 < -y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 2y \le 3, \\ y \ge -\dfrac{4}{x}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y + x \ge 2, \\ y < x^2 - 1. \end{cases}$

321. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2}$. При каких значениях p прямая $y = p$ пересекает график функции в одной точке?

322. Постройте график функции $y = \dfrac{2 + x - x^2}{x + 1}$. При каких значениях аргумента функция принимает неотрицательные значения?

Итоговая проверочная работа

Вариант 1

Часть 1

1. Укажите число, равное 0,000054.

1) $5,4\cdot10^{-4}$; 2) $5,4\cdot10^{-5}$; 3) $5,4\cdot10^{-6}$; 4) $5,4\cdot10^{-7}$.

2. Цену на товар снизили на 25%. После этого товар стал стоить 825 р. Сколько рублей первоначально стоил товар?

1) 850; 2) 800; 3) 931,25; 4) 1100.

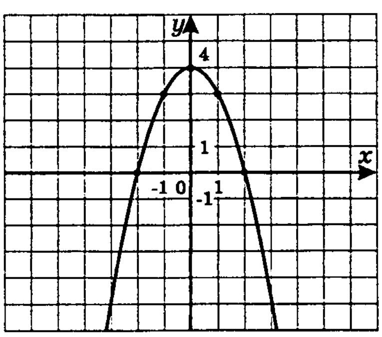
3. Расположите в порядке возрастания числа 7; $3\sqrt{5}$; $4\sqrt{3}$.

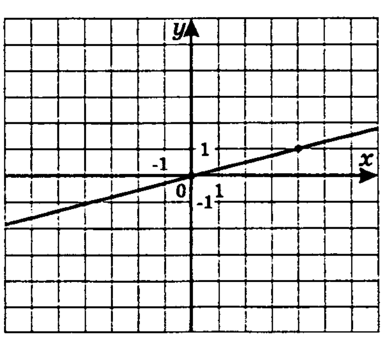
1) 7; $4\sqrt{3}$; $3\sqrt{5}$; 3) $4\sqrt{3}$; $3\sqrt{5}$; 7;
2) $3\sqrt{5}$; $4\sqrt{3}$; 7; 4) $3\sqrt{5}$; 7; $4\sqrt{3}$.

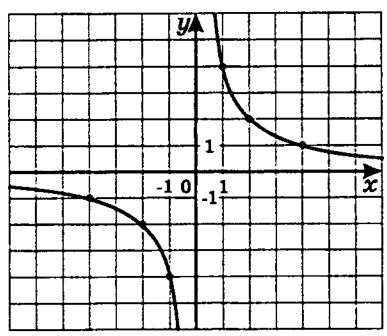
4. Установите соответствие между функциями

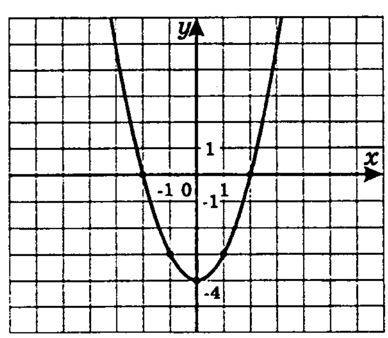
А) $y=\dfrac{4}{x}$; Б) $y=\dfrac{x}{4}$; В) $y=x^2-4$

и их графиками:

1)


2)


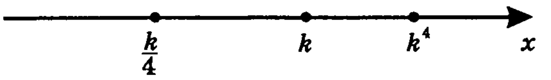
3)


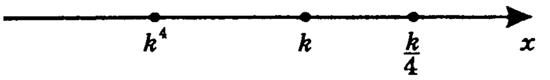
4)


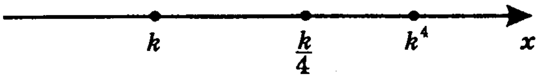
Ответ:

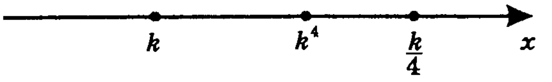
А	Б	В

5. Известно, что число k удовлетворяет неравенству $-1 < k < 0$. На каком рисунке точки с координатами k; $\frac{k}{4}$; k^4 расположены на координатной прямой в правильном порядке?

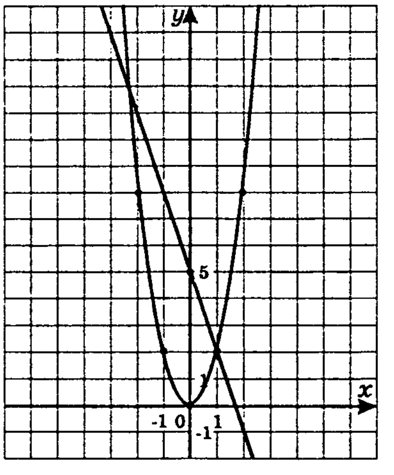
1)


2)


3)


4)


6. Используя графики функций $y = 2x^2$ и $y = -3x + 5$, найдите неотрицательный корень уравнения $2x^2 = -3x + 5$.



Ответ: ______________________.

7. Сократите дробь $\dfrac{4x - x^2}{20 - x - x^2}$.

Ответ: ______________________.

8. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{2 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{\sqrt{15} - 2}}$.

Ответ: ______________________.

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - y = -9, \\ 4x + 5y = 7. \end{cases}$

Ответ: ______________________.

10. В течение суток 25 июля делали несколько замеров температуры воздуха (в градусах Цельсия). В результате получили ряд чисел (°С): 14, 15, 17, 20, 24, 25, 23, 19, 17, 16. Найдите разность между средним арифметическим и медианой этого ряда чисел.

Ответ: ______________________.

Часть 2

11. Решите уравнение $(x+1)^2\left(x^2+2x+3\right)=0$.

12. Две трубы вместе могут заполнить бассейн за 12 ч. Если бы половину бассейна заполнила только первая труба, а вторую половину – только вторая, то бассейн был бы заполнен за 25 ч. За сколько часов может заполнить бассейн каждая труба, работая отдельно?

13. Найдите все такие значения k, при каждом из которых уравнение

$$6x^2-(3k+9)x+k^2-1=0$$

имеет два корня.

Запишите ответы в таблицу:

Часть 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Часть 2

11	12	13

Проверьте ответы (см. в конце пособия). Если сделали много ошибок – повторите попытку (решите вариант 2).

Вариант 2

Часть 1

1. Укажите число, равное 0,0000023.

1) $2{,}3 \cdot 10^{-8}$; 2) $2{,}3 \cdot 10^{-7}$; 3) $2{,}3 \cdot 10^{-6}$; 4) $2{,}3 \cdot 10^{-5}$.

2. Цену на товар повысили на 15%. После этого товар стал стоить 900 р. Сколько рублей первоначально стоил товар?

1) 1020; 2) 1035; 3) 1200; 4) 1050.

3. Расположите в порядке убывания числа $9;\ 5\sqrt{3};\ 4\sqrt{5}$.

1) $4\sqrt{5};\ 9;\ 5\sqrt{3}$; 3) $9;\ 5\sqrt{3};\ 4\sqrt{5}$;

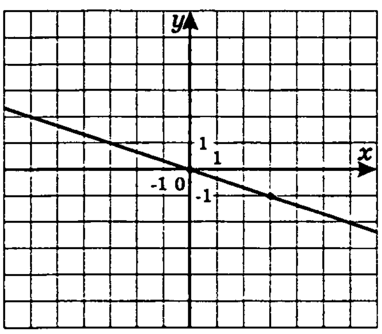
2) $4\sqrt{5};\ 5\sqrt{3};\ 9$; 4) $9;\ 4\sqrt{5};\ 5\sqrt{3}$.

4. Установите соответствие между функциями

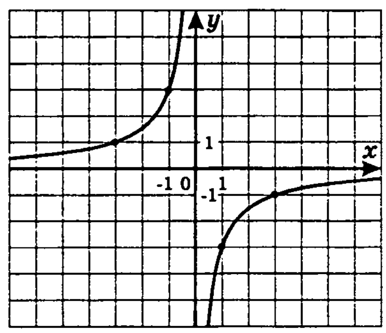
А) $y = 3 - x^2$; Б) $y = -\dfrac{x}{3}$; В) $y = -\dfrac{3}{x}$

и их графиками:

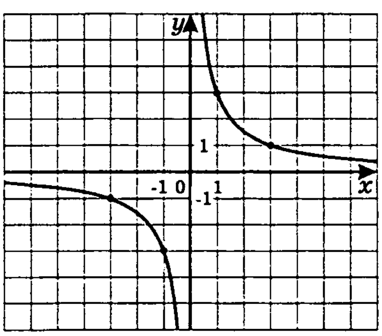
1)



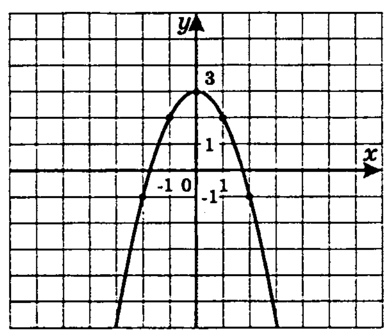
3)



2)



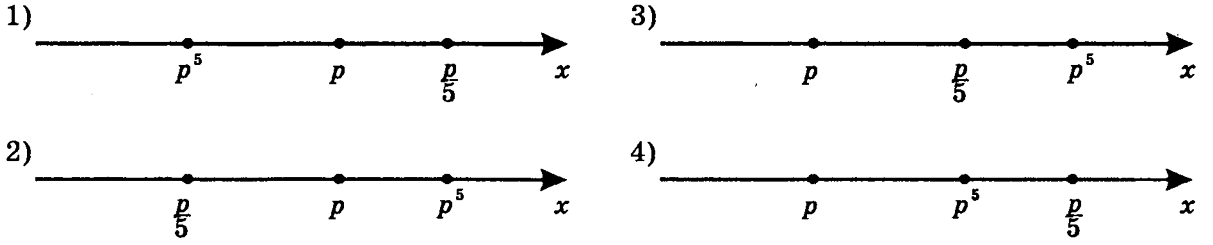
4)



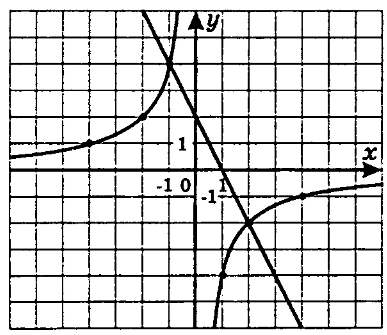
Ответ:

А	Б	В

5. Известно, что число p удовлетворяет неравенству $p < -1$. На каком рисунке точки с координатами p; $\frac{p}{5}$; p^5 расположены на координатной прямой в правильном порядке?



6. Используя графики функций $y = -\frac{4}{x}$ и $y = -2x + 2$, найдите неотрицательный корень уравнения $2x - 2 - \frac{4}{x} = 0$.



Ответ: ____________________.

7. Сократите дробь $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$.

Ответ: ____________________.

8. Упростите выражение $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5 + 3\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3\sqrt{5} - 5}}$.

Ответ: ____________________.

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 3y = -4, \\ 3x - 4y = 27. \end{cases}$

Ответ: ____________________.

10. В течение суток 10 августа делали несколько замеров температуры воздуха (в градусах Цельсия). В результате получили ряд чисел (°C): 13, 15, 16, 18, 21, 22, 19, 17, 14, 13. Найдите разность между средним арифметическим и медианой этого ряда чисел.

Ответ: ____________________.

Часть 2

11. Решите уравнение $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$.

12. Две бригады вместе могут выполнить некоторую работу за 6 дней. Для выполнения 40% всей работы второй бригаде потребуется на 2 дня больше, чем первой бригаде для выполнения этой же части работы. За сколько дней может выполнить всю работу каждая бригада, работая отдельно?

13. Найдите все такие целые значения k, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (k+1)x + 4 = 0$$

не имеет корней.

Запишите ответы в таблицу:

Часть 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Часть 2

11	12	13

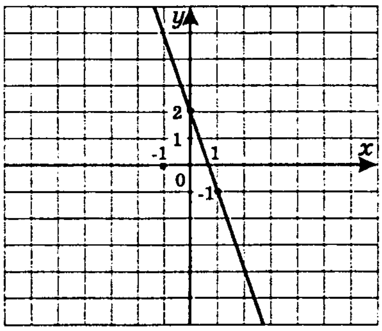
Проверьте ответы (см. в конце пособия).

ОТВЕТЫ

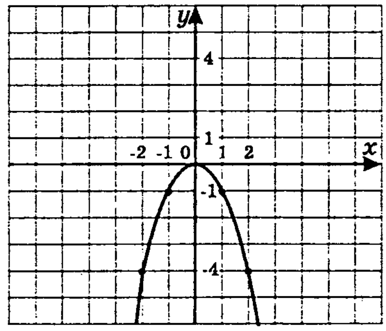
1.

А	Б	В	Г	Д	Е
4	1	2	5	3	6

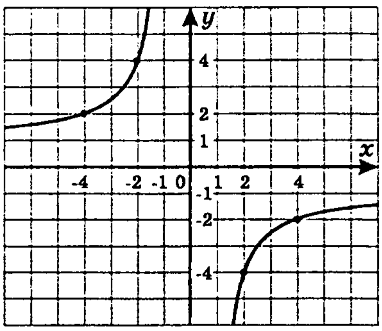
2. а)



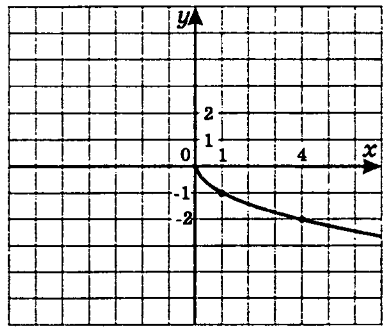
д)



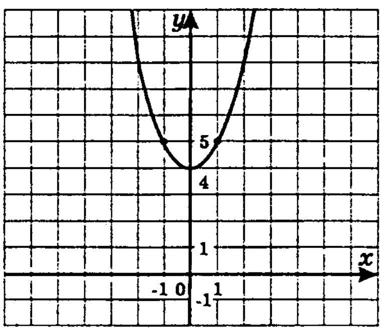
б)



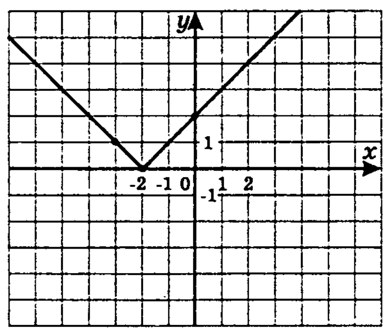
е)



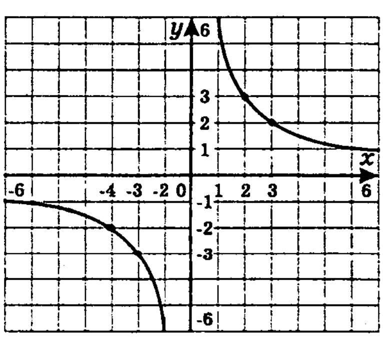
в)



ж) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$



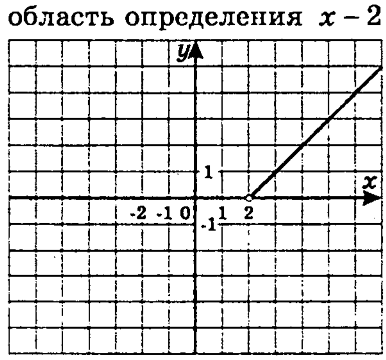
г)



з)

$$y = \frac{(x-2)^2}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2} = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x-2,$$

область определения $x - 2 > 0$, $x > 2$



3. а) 1; 1,5; б) −0,4; 1; в) 0; 2,5; г) решений нет; д) $\pm 2,5$; е) 0;
ж) 8; з) −1; 5; и) −0,5; к) 5; л) решений нет; м) −3; 5.

4. 1) $|x-2|+|x+3|$;
а) $x-2+x+3=2x+1$;
б) $-x+2-x-3=-2x-1$;

2) $|x+5|-|x-1|$;
а) $x+5-x+1=6$;
б) $x+5+x-1=2x+4$;
в) $-x-5+x-1=-6$.

5. а) два; б) одно; в) одно; г) два.

6. а) 15; б) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2}=\left|\sqrt{7}-2\right|+\left|\sqrt{7}-5\right|=\sqrt{7}-2-\sqrt{7}+5=3$;

в) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}=\left|1-\sqrt{5}\right|-\left|1+\sqrt{5}\right|=$

$=-\left(1-\sqrt{5}\right)-\left(1+\sqrt{5}\right)=-1+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}=-2$;

г) $7\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}-3-\left(\sqrt{2}+3\right)}{\left(\sqrt{2}+3\right)\left(\sqrt{2}-3\right)}\right)\cdot\left(\sqrt{\left(5-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{2}\right)=7\cdot\dfrac{\sqrt{2}-3-\sqrt{2}-3}{2-9}\cdot\left(\left|5-\sqrt{2}\right|+\sqrt{2}\right)=$

$=\dfrac{7\cdot(-6)\cdot\left(5-\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{-7}=6\cdot5=30$;

д) $\dfrac{4\cdot\left(\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{3}\right)^2}{5-3}=2\cdot\left(\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|+\sqrt{3}\right)^2=2\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^2=10.$

Проверочная работа

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	1	4	3	2	2	$12\sqrt{5}$;	−2; 2	$\dfrac{a-x}{a+x}$

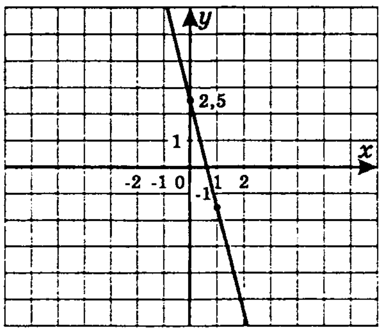
Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	1	3	2	3	3	$-16\sqrt{6}$;	−2; 2	$\dfrac{x+y}{x-y}$

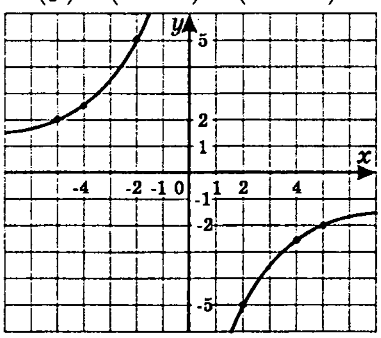
7. а) $D=(-\infty;+\infty)$; б) $D=(-\infty;+\infty)$; в) $D=(-\infty;6)\cup(6;+\infty)$;
г) $D=(-\infty;-2)\cup(-2;5)\cup(5;+\infty)$; д) $D=(-\infty;+\infty)$; е) $D=[4;+\infty)$;
ж) $|x|-2\ge 0$; $|x|\ge 2$; $x\le -2$ или $x\ge 2$. $D=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$;
з) $|3-x|-2x\ge 0$, $|3-x|\ge 2x$; $\left[\begin{array}{l}3-x\ge 2x,\\ 3-x\le -2x;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}-3x\ge -3,\\ x\le -3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\le 1,\\ x\le -3;\end{array}\right.$ $x\le 1$; $D=(-\infty;1]$.

8. а) $g(-3)=5$, $g(0)=1$, $g(1)=0$, $g(5)=-4$;
б) $g(x)=5$ при $x=-3$; $g(x)=0$ при $x=-5$ и $x=1$;
в) $y_{\text{наиб.}}=5$; $y_{\text{наим.}}=-4$;
г) $E(g)=[-4;5]$.

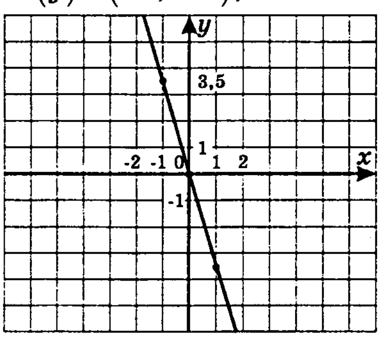
9. а) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;



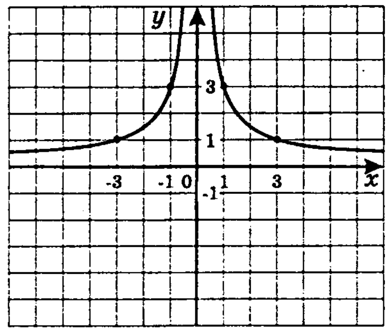
б) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;



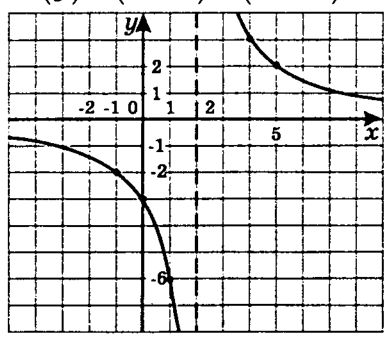
в) $D(y) = (-\infty; +\infty)$;



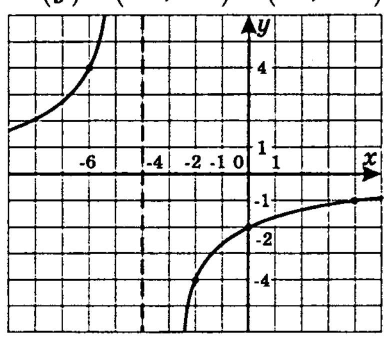
г) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;



д) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;



е) $D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$.



10. а) $x = 500$; б) $x = -3$ и $x = 5$; в) $x = -4$; г) нулей нет; д) $x = -2$; е) $x = 5$.

11. а) $D(y) = [-5; -2) \cup (-2; +\infty)$. Нули $x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

б) $\begin{cases} 15 - 6x \geq 0, \\ 2 - \sqrt{15 - 6x} \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -6x \geq -15, \\ \sqrt{15 - 6x} \neq 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq \dfrac{5}{2}, \\ 15 - 6x \neq 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 2,5, \\ x \neq \dfrac{11}{6}. \end{cases}$

Следовательно, $D(y) = \left(-\infty; \dfrac{11}{6}\right) \cup \left(\dfrac{11}{6}; 2,5\right]$.

Чтобы найти нули функции, решим уравнение $4x^2 + 36x = 0$ на области $D(y)$.

$4x(x+9) = 0$; $x = 0$, $x = -9$; $0 \in D(y)$, $-9 \in D(y)$

Нули функции: -9; 0.

в) Решается аналогично пункту б): $D(y) = \left(-\infty; \dfrac{14}{9}\right) \cup \left(\dfrac{14}{9}; 2\right]$.

Для нахождения нулей функции решим уравнение $4x^2 - 16x = 0$ на $D(y)$.

$4x(x-4) = 0$; $x = 0$, $x = 4$; $0 \in D(y)$, $4 \notin D(y)$.

Нулём функции является число 0.

12. а) $-8x + 16 = 0$, $x = 2$; $-8x + 16 > 0$, $x < 2$; $-8x + 16 < 0$, $x > 2$.

Ответ: $f(x) = 0$ при $x = 2$; $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 2)$; $f(x) < 0$ при $x \in (2; +\infty)$;

б) решается аналогично пункту а).

Ответ: $f(x)=0$ при $x=-\frac{4}{3}$; $f(x)>0$ при $x\in\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)$ и $f(x)<0$ при $x\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$.

13. а) возрастающие $y=9x-7$ и $y=x+1$;

б) убывающие $y=-4x+13$ и $y=-49x-50$;

в) не являются ни возрастающими, ни убывающими $y=5$ и $y=-10$.

14. а) возрастающая при $a+3>0$, $a>-3$;

б) убывающая при $a+3<0$, $a<-3$;

в) не является ни возрастающей, ни убывающей при $a-3=0$, $a=3$.

15. а) $h(x)=\frac{1}{x^2+4;}$ $h(-3)=\frac{1}{(-3)^2+4}=\frac{1}{13}$; $h(3)=\frac{1}{3^2+4}=\frac{1}{13}$; $h(-3)=h(3)$.

б) $h(x)=\frac{x}{x^2+4}$; $h(-3)=\frac{-3}{(-3)^2+4}=-\frac{3}{13}$; $h(3)=\frac{3}{3^2+4}=\frac{3}{13}$; $h(3)>h(-3)$;

$h(3)$ и $h(-3)$ – противоположные числа;

в) $h(x)=\frac{-x}{x^2+4}$; $h(-3)=\frac{-(-3)}{(-3)^2+4}=\frac{3}{13}$; $h(3)=\frac{-3}{3^2+4}=-\frac{3}{13}$; $h(-3)>h(3)$;

$h(3)$ и $h(-3)$ – противоположные числа

16. а) $D(y)=[0;+\infty)$, $y(x)$ – возрастающая, как сумма двух возрастающих функций;

б) $D(y)=(-\infty;0]$, $y(x)$ – убывающая, как сумма двух убывающих функций;

в) $D(y)=[0;+\infty)$. На этом промежутке функции $y=x^2$ и $y=2\sqrt{x}$ возрастают, следовательно, $y=x^2+2\sqrt{x}$ – возрастающая;

г) $y=x^3+\sqrt{-x}$; $D(y)=(-\infty;0]$; $y=\sqrt{-x}$ – убывающая; $y=x^3$ – возрастающая, следовательно, $y=x^3+\sqrt{-x}$ не является ни возрастающей, ни убывающей;

д) $y=-x^3-\sqrt{x}$; $D(y)=[0;+\infty)$; $y=-x^3$ – убывающая; $y=-\sqrt{x}$ – убывающая, следовательно, $y=-x^3-\sqrt{x}$ – убывающая.

17. а) $f\left(\sqrt{2}+1\right)=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2-3}{\sqrt{2}+1-1}=\frac{2+2\sqrt{2}+1-3}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2.$

б) Найдем $f(x-1)=\frac{(x-1)^2-3}{x-1-1}=\frac{x^2-2x+1-3}{x-2}=\frac{x^2-2x-2}{x-2}$.

Составим уравнение $f(x-1)=1$; т.е. $\frac{x^2-2x-2}{x-2}=1$;

$\begin{cases}x^2-2x-2=x-2,\\ x-2\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-3x=0,\\ x\neq 2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\ x=3,\\ x\neq 2.\end{cases}$

Ответ: 0; 3.

в) Область определения $x-1\neq 0$; $x\neq 1$, $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Чтобы найти нули функции, надо решить уравнение $f(x)=0$, т.е. $\frac{x^2-3}{x-1}=0$:

$\begin{cases}x^2-3=0,\\ x-1\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=3,\\ x\neq 1;\end{cases}$ $x=\pm\sqrt{3}$.

Нули функции $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$.

18. а) $y=-3x+9$:

$y(x)>0$, т.е. $-3x+9>0$; $-3x>-9$; $x<3$;

$y(x)<0$. т.е. $-3x+9<0$; $-3x<-9$; $x>3$;

б) $y=\dfrac{x+4}{\sqrt{5x+15}}$; $\sqrt{5x+15}>0$ при $5x+15>0$,

следовательно, $y(x)>0$ при $\begin{cases}x+4>0,\\5x+15>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-4,\\x>-3;\end{cases}$ $x>-3$;

$y(x)<0$ при $\begin{cases}x+4<0,\\5x+15>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<-4,\\x>-3;\end{cases}$ решений нет.

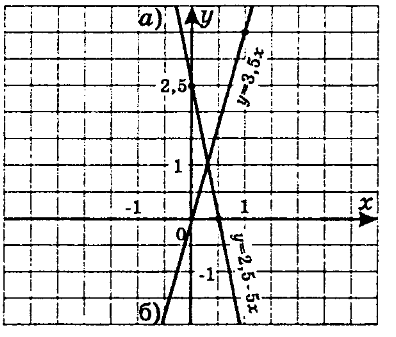
Значений x, при которых $y(x)<0$, нет.

в) $y=\dfrac{\sqrt{3x-18}}{x-1}$. Задание выполняется аналогично пункту а).

Ответ: $y(x)>0$ при $x>6$; значений x, при которых $y(x)<0$, нет.

19. а) $f(x)=2,5-5x$

$D(f)=E(f)=(-\infty;+\infty)$;

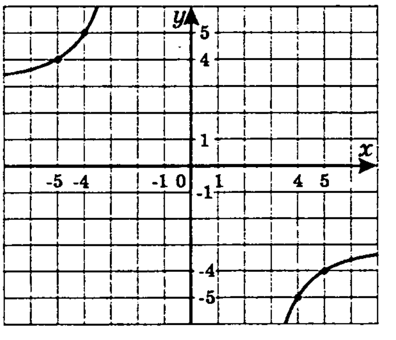


б) $f(x)=3,5x$,

$D(f)=E(f)=(-\infty;+\infty)$;

в) $f(x)=\dfrac{-20}{x}$;

$D(f)=E(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;



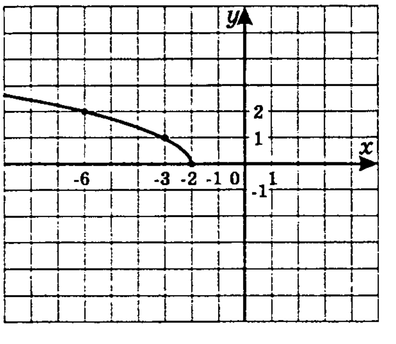
г) $f(x)=\sqrt{-x-2}$;

$D(f)$: $-x-2\ge 0$;

$-x\ge 2$;

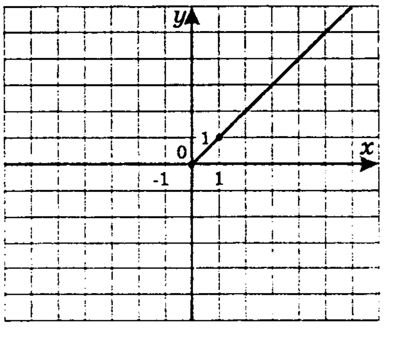
$x\le -2$;

$D(f)=(-\infty;-2]$, $E(f)=[0;+\infty)$;

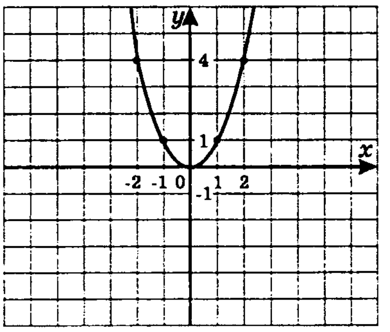


д) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$, где $x\ge 0$;

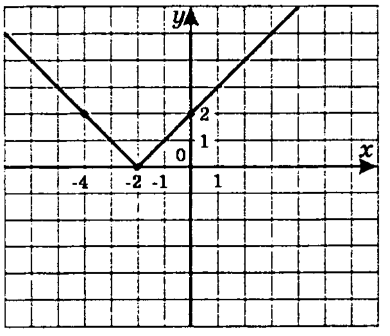
$D(y)=[0;+\infty)$, $E(y)=[0;+\infty)$;



е) $y = |x|^2 = x^2$;
$D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = [0; +\infty)$;



з) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$;
$D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [0; +\infty)$.



20. а) $-4;\ 6$; б) $-2;\ \frac{1}{3}$; в) $-2;\ 6$; г) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

21. а) $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$;

б) $6x^2 + 5x - 4 = 6\left(x + \frac{5}{6}x - \frac{4}{6}\right) = 6\left(x + 2\cdot\frac{5}{6\cdot 2}x - \frac{4}{6}\right) = 6\left(x^2 + 2\cdot\frac{5}{12}x + \left(\frac{5}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{12}\right)^2 - \frac{4}{6}\right) =$

$= 6\left(\left(x^2 + 2x\cdot\frac{5}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^2\right) - \frac{25}{144} - \frac{96}{144}\right) = 6\left(\left(x + \frac{5}{12}\right)^2 - \frac{121}{144}\right) = 6\left(x + \frac{5}{12}\right)^2 - \frac{121}{24}$;

в) $2x^2 - 13x + 6 = 2\left(x^2 - \frac{13}{2}x + 3\right) = 2\left(x^2 - 2\cdot\frac{13}{2\cdot 2}x + 3\right) =$

$= 2\left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{13}{4} + \left(\frac{13}{4}\right)^2 - \left(\frac{13}{4}\right)^2 + 3\right) = 2\left(\left(x^2 - 2x\cdot\frac{13}{4} + \left(\frac{13}{4}\right)^2\right) - \frac{169}{16} + 3\right) =$

$= 2\left(\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + \frac{-169+48}{16}\right) = 2\left(\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{121}{16}\right) = 2\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{121}{8}$.

22. Запишем квадратный трёхчлен в общем виде $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

По условию $\begin{cases} a + b + c = 0, \\ c = 5a; \end{cases}$ $\begin{cases} a + b + 5a = 0, \\ c = 5a; \end{cases}$ $\begin{cases} b = -6a, \\ c = 5a. \end{cases}$

Корни квадратного трёхчлена – это корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ или $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Подставим значения b и c в уравнение: $x^2 + \frac{-6a}{a}x + \frac{5a}{a} = 0$;

$x^2 - 6x + 5 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 5$.

Ответ: 1; 5.

23. Решается аналогично № 22. Корни $-\frac{5}{4};\ 1$.

24. а) $4x^2 - 32x + 28 = 4\left(x^2 - 8x + 7\right) = 4(x-1)(x-7)$;

б) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}(x+2)(x+1)$, так как

$\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6} = 0$; $x^2 + 3x + 2 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = -1$;

в) $x^2-15x+50=(x-10)(x-5)$;

г) $-y^2+18y-17=-(y-1)(y-17)=(1-y)(y-17)=(y-1)(17-y)$, так как $-y^2+18y-17=0$; $y^2-18y+17=0$; $y_1=1$; $y_2=17$;

д) $-2x^2+5x+3=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)=(-2x-1)(x-3)=(2x+1)(3-x)$, так как

$-2x^2+5x+3=0$, $2x^2-5x-3=0$, $D=25+24=49$;

$x=\frac{5\pm 7}{4}$; $x_1=-\frac{1}{2}$; $x_2=3$;

е) $10x^2+19x-2=10(x+2)(x-0{,}1)=(x+2)(10x-1)$, так как

$10x^2+19x-2=0$; $D=361+80=441$;

$x=\frac{-19\pm 21}{20}$; $x_1=-2$; $x_2=0{,}1$.

25. а) $\frac{2x^2-5x+2}{3x-6}=\frac{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x-2)}=\frac{2x-1}{3}$, так как

$2x^2-5x+2=0$; $D=25-16=9$;

$x=\frac{5\pm 3}{4}$; $x_1=2$; $x_2=\frac{1}{2}$;

б) $\frac{2}{x+2}$. Выполняется аналогично пункту а);

в) $\frac{3x^2-12}{3x^2-7x+2}=\frac{3\left(x^2-4\right)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)}=\frac{(x-2)(x+2)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)}=\frac{x+2}{x-\frac{1}{3}}=\frac{3(x+2)}{3x-1}$, так как

$3x^2-7x+2=0$, $D=49-24=25$;

$x=\frac{7\pm 5}{6}$; $x_1=2$; $x_2=\frac{1}{3}$;

г) $\frac{-(x+7)}{2x-1}=\frac{x+7}{1-2x}$;

д) $\frac{9x^3-9x^2+2x}{1-3x+y-3xy}=\frac{x\left(9x^2-9x+2\right)}{(1-3x)+(y-3xy)}=\frac{x\cdot 9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(1-3x)+y(1-3x)}=$

$=\frac{x(3x-1)(3x-2)}{(1-3x)(1+y)}=\frac{x\cdot(-1)(1-3x)(3x-2)}{(1-3x)(1+y)}=\frac{x(2-3x)}{1+y}$, так как

$9x^2-9x+2=0$; $D=81-72=9$;

$x=\frac{9\pm 3}{18}$; $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$.

26. а) $\frac{9a-4}{a+7}-\frac{44-16a}{(a+7)(a-2)}=\frac{(9a-4)(a-2)-(44-16a)}{(a+7)(a-2)}=$

$=\frac{9a^2-18a-4a+8-44+16a}{(a+7)(a-7)}=\frac{9a^2-6a-36}{(a+7)(a-2)}$.

Уравнение $9a^2-6a-36=0$ имеет иррациональные корни, следовательно, при разложении квадратного трёхчлена $9a^2-6a-36$ на множители дробь нельзя б дет сократить дальше.

б) -2.

Проверочная работа № 1

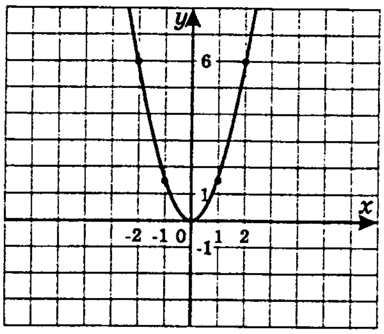
Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	4	3	2	2	$\dfrac{2x-3}{x-4}$	-2	$\dfrac{8a^2-31}{(a+5)(a-3)}$	x^2-4x+1	-2

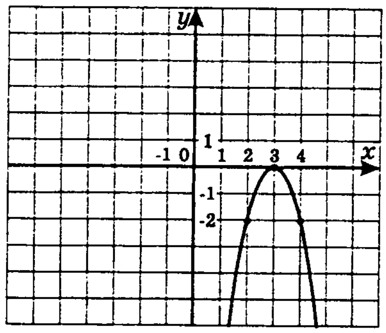
Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	1	1	2	$\dfrac{x-5}{3x-1}$	-2	$\dfrac{4}{x+1}$	x^2-6x+7	0; 3

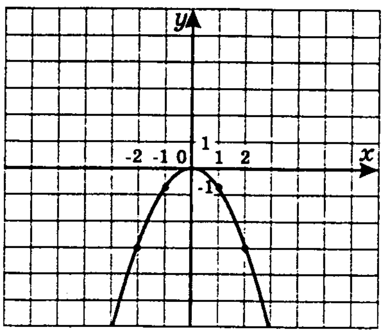
27. а)



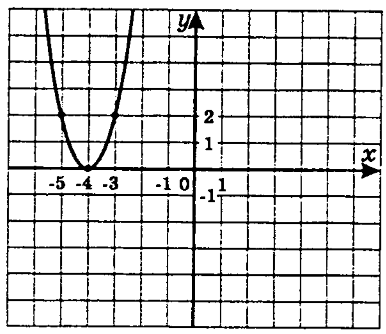
д)



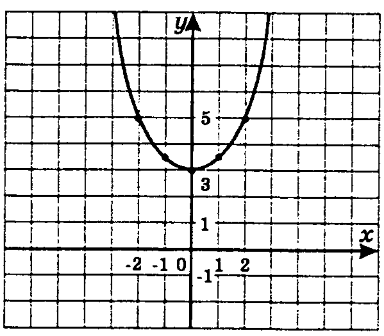
б)



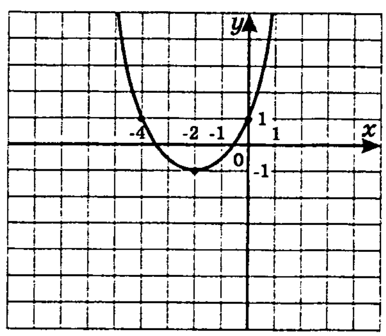
е)



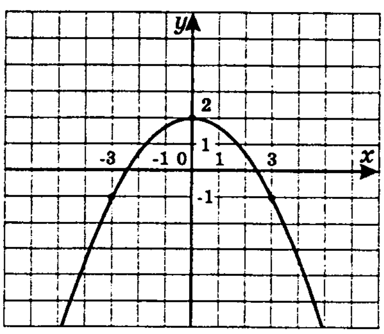
в)



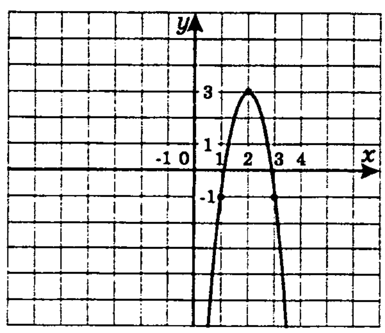
ж)



г)



з)



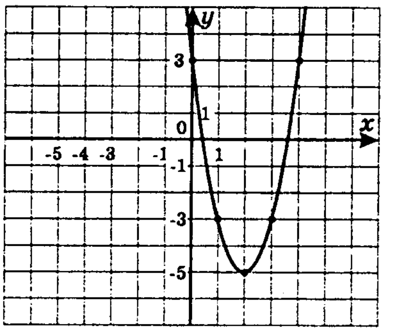
и) Найдем координаты вершины параболы: $x_в = -\frac{b}{2a}$, $x_в = \frac{8}{4} = 2$;

$y_в = y(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 3 = -5$.

Ветви параболы направлены вверх.

Проводим ось симметрии $x = 2$ через вершину (2; −5).

x	0	1	3	4
y	3	−3	−3	3



В пунктах к) и л) парабола строится аналогично пункту и).

28. Строим параболу аналогично № 27 и) по нескольким точкам.

а) $y(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 4 = 5$; $y(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^2 + 4 - 4 = -\frac{1}{3}$;

б) $y = 4$; $-\frac{1}{3}x^2 + 4x - 4 = 4$; $x^2 - 12x + 24 = 0$; $x = 6 \pm 2\sqrt{3}$;

$y = -1$; $-\frac{1}{3}x^2 + 4x - 4 = -1$; $x^2 - 12x + 9 = 0$; $x = 6 \pm 3\sqrt{3}$;

в) $y = 0$; $-\frac{1}{3}x^2 + 4x - 4 = 0$; $x^2 - 12x + 12 = 0$;

$D_1 = 36 - 12 = 24$; $x = 6 \pm 2\sqrt{6}$.

Нули функции $x_1 = 6 - 2\sqrt{6}$; $x_2 = 6 + 2\sqrt{6}$.

$y > 0$ при $x \in \left(6 - 2\sqrt{6}; 6 + 2\sqrt{6}\right)$ и $y < 0$ при $x \in \left(-\infty; 6 - 2\sqrt{6}\right) \cup \left(6 + 2\sqrt{6}; +\infty\right)$.

г) $x_в = \frac{-4}{-\frac{2}{3}} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$; $y_в = y(6) = -\frac{1}{3} \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 - 4 = 8$;

y возрастает при $x \in (-\infty; 6]$; y убывает при $x \in [6; +\infty)$ $y_{наиб.} = 8$, $y_{наим.}$ не существует.

29. а) $\begin{cases} 0^2 + p \cdot 0 + q = 8, \\ 4^2 + p \cdot 4 + q = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} q = 8, \\ 4p + q + 16 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} q = 8, \\ 4p + 8 + 16 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} q = 8, \\ p = -6. \end{cases}$

б) $x_в = -\frac{b}{2a}$; $x_в = \frac{-p}{2}$; $y_в = -5$; $\frac{-p}{2} = 2$, $p = -4$.

$y(2) = y_в = 4 + 2 \cdot 2 + q = -5, \Rightarrow q = -13$.

30. График – парабола, ветви которой направлены вверх, так как старший коэффициент $2 > 0$. График лежит выше оси абсцисс при $D < 0$.

$D = b^2 - 4ac$, $D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot a$ и $1 - 8a < 0$; $-8a < -1$; $a > \frac{1}{8}$.

Ответ: при $a > \frac{1}{8}$.

31. $y = ax^2 + bx + c$. Подставим координаты точек A, B и C, получим систему уравнений относительно a, b, c.

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \quad \begin{cases} 9a - 3b + c = -3, \\ a + b + c = -3, \\ 25a - 5b + c = 15. \end{cases}$$

Вычтем почленно из уравнения (1) уравнение (2), получим $8a - 4b = 0$. Так как $a \neq 0$, то $4b = 8a$, $b = 2a$.

Из (2): $c = -3 - b - a = -3 - a - 2a = -3 - 3a$.

Подставим значения b и c в (3) и получим $25a - 5 \cdot 2a - 3 - 3a = 15$; $12a = 18$;

$a = \dfrac{18}{12} = \dfrac{3}{2}$, тогда $b = 2a = 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 3$; $c = -3 - 3 \cdot \dfrac{3}{2} = -7,5$.

$y = \dfrac{3}{2}x^2 + 3x - 7,5$.

Ответ: $y = 1,5x^2 + 3x - 7,5$.

32. а) $y = x^2 - 4x + a$,

$y_{\text{наим.}} = 2$; $y_{\text{наим.}} = y(x_в) = y(2) = 4 - 8 + a = a - 4$,

$x_в = \dfrac{4}{2} = 2$, $a - 4 = 2$, $a = 6$.

$y = x^2 - 4x + 6$. Строим график по нескольким точкам (см. № 27(и)).

б) $y_{\text{наиб.}} = 3$, $x_в = \dfrac{-6}{-2} = 3$; $y(x_в) = y(3) = -9 + 18 + a = a + 9$;

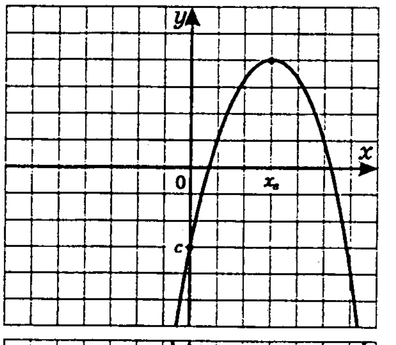
$a + 9 = 3$; $a = -6$.

$y = -x^2 + 6x - 6$. График строим по нескольким точкам (см. № 27(и)).

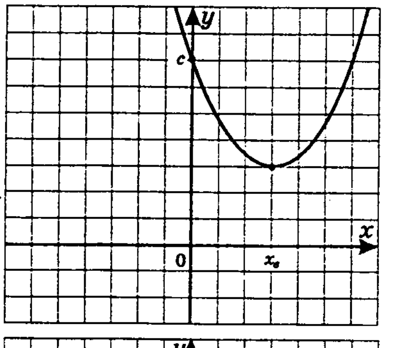
33. $x_в = -\dfrac{a-4}{2a} = \dfrac{4-a}{2a}$, составим уравнение $\dfrac{4-a}{2a} = 1$; $4 - a = 2a$; $3a = 4$; $a = \dfrac{4}{3}$.

34. а) $x_в = \dfrac{-b}{2a}$ при $a < 0$, $b > 0$ $-\dfrac{b}{2a} > 0$,

$x_в$ – справа от 0.



б) $-\dfrac{b}{2a} > 0$; $c > 0$, $D < 0$.

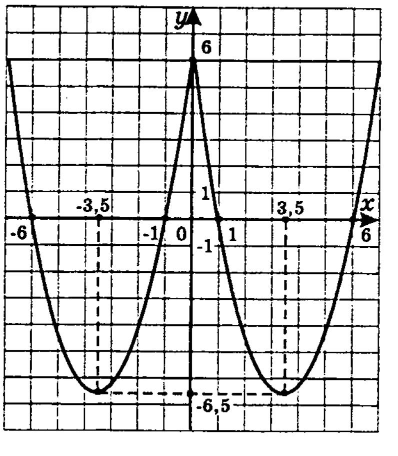


35. а) $y = x^2 - 7|x| + 6 = \begin{cases} x^2 - 7x + 6 \text{ при } x \geq 0 \\ x^2 + 7x + 6 \text{ при } x < 0 \end{cases}$

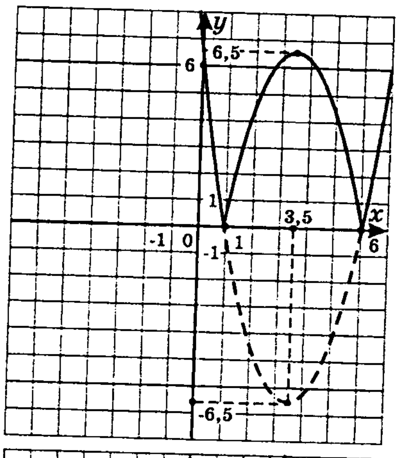
Построим график функции (см. рисунок).

Функция возрастает в промежутках $[-3,5; 0]$; $[3,5; +\infty)$.

Функция убывает в промежутках $(-\infty; -3,5]$; $[0; 3,5]$



б) $y = \left|x^2 - 7x + 6\right|$. Построим график $y = x^2 - 7x + 6$, а из него $y = \left|x^2 - 7x + 6\right|$.

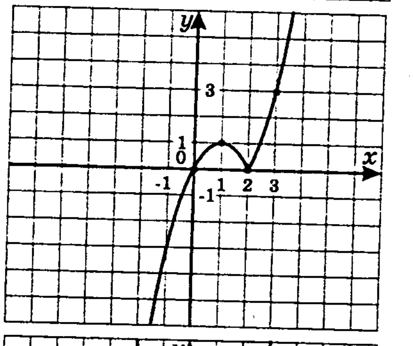


Функция возрастает в промежутках $[1;\ 3,5]$; $[6;\ +\infty)$.

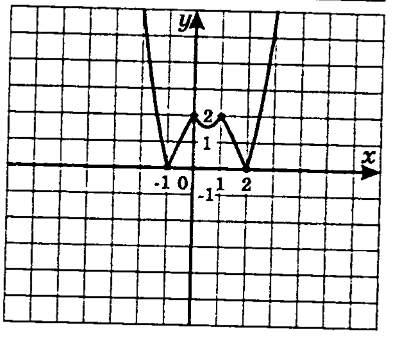
Функция убывает в промежутках $(-\infty;\ 1]$; $[3,5;\ 6]$.

36. а) $y = x\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x\sqrt{(x-2)^2} = x|x-2| =$

$$= \begin{cases} x^2 - 2x \text{ при } x \geq 2, \\ -x^2 + 2x \text{ при } x < 2; \end{cases}$$

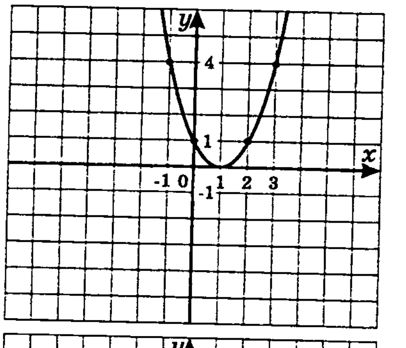


б) $y = \left|\left|x^2 - x\right| - 2\right| = \begin{cases} \left|x^2 - x - 2\right| \text{ при } x^2 - x \geq 0;\ x \leq 0;\ x \geq 1, \\ \left|-x^2 + x - 2\right| \text{ при } x^2 - x < 0;\ 0 < x < 1; \end{cases}$

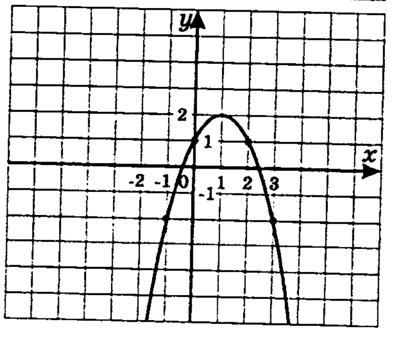


37. а) $f(x) = x^2 - 2x$,

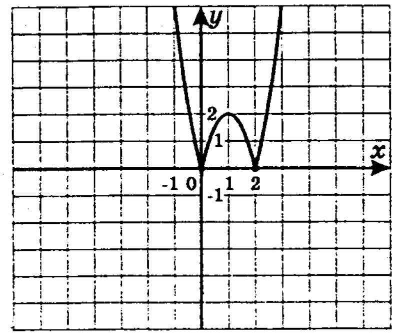
$y = f(x) + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$;



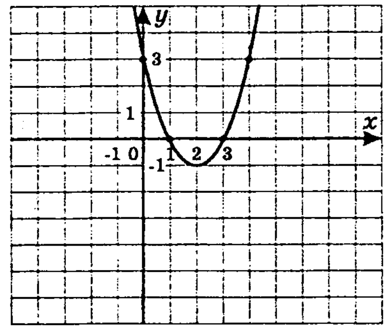
б) $y = -f(x) + 1 = -\left(x^2 - 2x\right) + 1 = -x^2 + 2x + 1$;



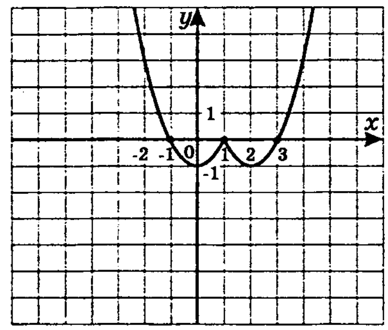
в) $y = |2f(x)| = \left|2\left(x^2 - 2x\right)\right| = \left|2x^2 - 4x\right|$;



г) $y = f(x-1) = (x-1)^2 - 2(x-1) =$
$= x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 = x^2 - 4x + 3$;



д) $y = f(|x-1|) = |x-1|^2 - 2|x-1| = (x-1)^2 - 2|x-1| =$
$= x^2 - 2x + 1 - 2|x-1| =$
$= \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \text{ при } x \geq 1, \\ x^2 - 1 \text{ при } x < 1. \end{cases}$



38. $y(2) > 0$; $y(-3) > 0$, так как $(-3)^{34} = 3^{34}$; $y(0) = 0$.

39. $y(-8) < 0$; $y(0) = 0$; $y(5) > 0$.

40. $f(x) = x^{12}$ при $x \geq 0$ возрастает.
а) $f(3,4) < f(4,5)$, так как $3,4 < 4,5$;
б) при $x \leq 0$ $f(x)$ убывает; $-4,7 > -6,2$, следовательно, $f(-4,7) < f(-6,2)$;
в) $f(-7) = f(7)$, т.к. $f(x) = x^{12}$ – четная; $f(7) > f(6)$, следовательно, $f(-7) > f(6)$;
г) $f(-27) = f(27)$, $27 < 30$, $f(27) < f(30)$, $f(-27) < f(30)$.

41. $f(x) = x^{33}$ возрастающая на всей числовой прямой.
а) $7,5 < 8,7$, следовательно, $f(7,5) < f(8,7)$;
б) $-4,3 > -5,6$, следовательно, $f(-4,3) > f(-5,6)$;
в) $-9 < 6$, следовательно, $f(-9) < f(6)$;
г) $-53 < 53$, следовательно, $f(-53) < f(53)$ и $f(-53) = -f(53)$.

42. Аналогично № 40 и 41.
а) $1,3^6 < 1,5^6$; в) $0,9^4 < 1$; д) $0,4^5 < 0,9^5$;
б) $0,8^6 > 0,7^6$; г) $(-3,2)^6 < (-3,6)^6$; е) $\left(-\frac{1}{3}\right)^7 < \left(-\frac{1}{4}\right)^7$.

43. а) в I и II; б) в I и III.

44. а) 3; б) 1; в) 3; г) $\frac{3}{2}$; д) $-0,5$; е) $-\frac{1}{3}$; ж) 2; з) $-\frac{3}{2}$; и) -2; к) $\frac{3}{2}$; л) $-0,1$.

45. а) имеет смысл; б) имеет смысл; в) не имеет смысла; г) имеет смысл; д) не имеет смысла; е) имеет смысл; ж) имеет смысл.

46. а) -3; б) -1; в) -4; г) $-4 \cdot (-3) = 12$; д) $-2 + 2 = 0$; е) 0; ж) 29; з) $-1 + 10 \cdot 0,3 = 2$; и) 10,5; к) -27; л) 20; м) 13; н) 2; о) -6.

47. а) $a \geq 0$; б) $a \leq 0$; в) a – любое число; г) $a \geq 0$; д) a – любое число.

48. а) 6; б) -5; в) ± 5; г) решений нет; д) $\sqrt[3]{9}$; е) $\sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7}$; ж) $\pm\sqrt[6]{11}$; з) 0; и) -3; к) ± 1;

л) решений нет; м) $\frac{1}{2}$; н) -2; о) 10; п) $\pm\sqrt[6]{5^2} = \pm\sqrt[3]{5}$; р) $\sqrt[5]{9}$; с) $\sqrt[7]{-6} = -\sqrt[7]{6}$; т) $\pm\sqrt[4]{18}$.

49. а) 6; б) 10; в) 0,6; г) 2,5; д) 1,5; е) $-1{,}5$; ж) 500; з) 2,7; и) $\frac{27}{4}$; к) $-\frac{5}{169}$.

50. а) $4\sqrt{x}$; б) $3\sqrt{2b}$; в) $6b\sqrt{b}$; г) $2c^2\sqrt{5}$; д) $3a^3\sqrt[3]{2a}$.

51. а) $\sqrt[3]{250}$; б) $\sqrt[5]{2}$; в) $-\sqrt[6]{3b^6}$; г) $\sqrt[4]{6a^4}$; д) $\sqrt[10]{4c^{12}}$ при $c \geq 0$ и $-\sqrt[10]{4c^{12}}$ при $c < 0$.

52. а) 5; б) 2; в) 0; г) 0; д) 0; е) 2.

53. а) $-\frac{2}{3}$; б) -14; в) 7; г) ± 2; д) 4^8.

54. а) $-\sqrt{2\sqrt[3]{3}} = -\sqrt[2]{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3}} = -\sqrt[6]{24}$; $-\sqrt[3]{5} = -\sqrt[6]{5^2} = -\sqrt[6]{25}$; $25 > 24$, $\sqrt[6]{25} > \sqrt[6]{24}$; $-\sqrt[6]{25} < -\sqrt[6]{24}$.

Ответ: $-\sqrt{2\sqrt[3]{3}} > -\sqrt[3]{5}$.

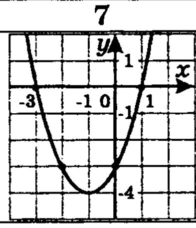
б) $-2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = -\sqrt[4]{48} = -\sqrt[16]{48^4}$; $-\sqrt[8]{6\sqrt{2}} = -\sqrt[8]{\sqrt{36 \cdot 2}} = -\sqrt[16]{72}$,

$48^4 > 72$, $\sqrt[16]{48^4} > \sqrt[16]{72}$, $-\sqrt[16]{48^4} < -\sqrt[16]{72}$.

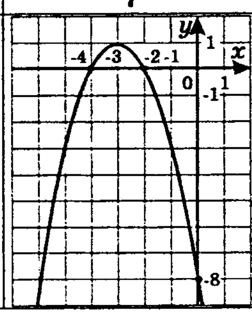
Ответ: $-2\sqrt[4]{3} < -\sqrt[8]{6\sqrt{2}}$.

Проверочная работа № 2

Вариант 1

1	2	3	4			5	6	7	8	9	10
			А	Б	В						
2	4	1	2	3	4	а) $y(-9) < y(9)$; б) $y(-20) < y(8)$	а) -8; б) 10,5		$a = 10$	$n = 5$	Нечётная

Вариант 2

1	2	3	4			5	6	7	8	9	10
			А	Б	В						
1	2	2	3	1	4	а) $y(-30) = y(30)$; б) $y(-28) > y(3)$	а) 2; б) $-4{,}5$		$a = 30$	$n = 4$	Чётная

55. а) 5; б) 6; в) 10; г) 2; д) 1; е) 5.

56. а) $-\frac{4}{3}$; б) -6; -1; 1; 6; в) 0; $\frac{1}{6}$; г) обозначить $x^2 - 5$ за y, тогда ответ -3; -2; 2; 3;

д) $-\sqrt{5}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$, обозначить $x^2 - 3$ за y.

е) Пусть $x^2 + 3x + 1 = y$, тогда $y(y+2) = -1$; $y^2 + 2y + 1 = 0$; $(y+1)^2 = 0$; $y = -1$,

тогда $x^2 + 3x + 1 = -1$, $x^2 + 3x + 2 = 0$, $x_1 = -2, x_2 = -1$;

ж) -3; 0; 3;

з) $(x^3 + 8) + (3x^2 + 6x) = 0$, $(x+2)(x^2 - 2x + 4) + 3x(x+2) = 0$, $(x+2)(x^2 - 2x + 4 + 3x) = 0$,

$x + 2 = 0$ или $x^2 + x + 4 = 0$,

$x = -2$; $D < 0$, решений нет.

Ответ: -2.

57. $x^3-4x^2=9x-36;\ x^2(x-4)-9(x-4)=0;\ (x-4)\left(x^2-9\right)=0;$

$(x-4)(x-3)(x+3)=0;\ x-4=0,\ x=4;\ x-3=0,\ x=3;\ x+3=0,\ x=-3.$

Ответ: $-3; 3; 4$.

58. Пусть x – меньшее целое число, тогда $x+1; x+2; x+3$ – последующие числа

$x(x+1)(x+2)(x+3)=120,\ (x(x+3))((x+1)(x+2))=120,\ \left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)=120;$

$x^2+3x=y,\ x^2+3x+2=y+2;\ y(y+2)=120,\ y^2+2y-120=0,\ y_1=-12, y_2=10,$

$x^2+3x=-12$ или $x^2+3x=10,$

$x^2+3x+12=0,$ $x^2+3x-10=0,$

решений нет; $x_1=-5; x_2=2.$

Ответ: $-5; -4; -3; -2$ или $2; 3; 4; 5$.

59. Пусть x меньшее нечётное число, тогда следующие нечетные числа $x+2; x+4; x+6$.

$x(x+2)(x+4)(x+6)=105,\ x(x+6)\cdot(x+2)(x+4)=105,\ \left(x^2+6x\right)\cdot\left(x^2+6x+8\right)=105;$

$x^2+6x=y,\ y(y+8)=105,\ y^2+8y-105=0,\ y_1=-15, y_2=7,$

$x^2+6x=-15$ или $x^2+6x=7,$

$x^2+6x+15=0,$ $x^2+6x-7=0,$

решений нет; $x_1=-7, x_2=1.$

Ответ: $-7; -5; -3; -1$ или $1; 3; 5; 7$.

60. а) $x^2-x=y$, тогда $x^2-x+1=y+1;\ x^2-x+2=y+2,\ x^2-x-2=y-2,$

$\frac{y}{y+1}-\frac{y+2}{y-2}=1;$ общий знаменатель $(y+1)(y-2),\ y\neq-1; y\neq2.$

$y(y-2)-(y+2)(y+1)=(y+1)(y-2),\ y^2-2y-y^2-2y-y-2=y^2+y-2y-2,$

$y^2+4y=0;\ y(y+4)=0,\ y=0$ или $y+4=0,\ y=-4.$

$x^2-x=0$ или $x^2-x=-4,$

$x(x-1)=0,$ $x^2-x+4=0,$

$x_1=0; x_2=1;$ $D<0$, решений нет.

Ответ: 0; 1.

б) $x+\frac{1}{x}=y,\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2;\ x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2;\ x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

$6\left(y^2-2\right)+5y-38=0,\ 6y^2+5y-50=0,$

$D=25+1200=1225,\ y=\frac{-5\pm35}{12},$

$y_1=-\frac{40}{12}=-\frac{10}{3};$ $y_2=\frac{30}{12}=\frac{5}{2}.$

$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$ или $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2};$

$3x^2+10x+3=0,$ $2x^2-5x+2=0,$

$D=25-9=16,$ $D=25-16=9,$

$x=\frac{-5\pm4}{3},$ $x=\frac{5\pm3}{4},$

$x_1=-3, x_2=-\frac{1}{3};$ $x_3=2; x_4=\frac{1}{2}.$

Ответ: $-3; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2$.

в) Пусть $\frac{x^2-3x-6}{x}=y$, тогда $\frac{8x}{x^2-3x-6}=8\cdot\frac{x}{x^2-3x-6}=8\cdot\frac{1}{y}=\frac{8}{y}$.

$y-\frac{8}{y}=-2,\ y^2+2y-8=0,\ y_1=-4, y_2=2$.

$\frac{x^2-3x-6}{x}=-4$ или $\frac{x^2-3x-6}{x}=2$,

$x_1=-3;\ x_2=2;$ $\quad$ $x_3=-1;\ x_4=6$.

Ответ: $-3;\ -1;\ 2;\ 6$.

61. а) $x^2+\left(\frac{x}{2x-1}\right)^2=2$. Перепишем левую часть, отняв и прибавив $2x\cdot\frac{x}{2x-1}$.

$x^2+2x\cdot\frac{x}{2x-1}+\left(\frac{x}{2x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{2x-1}=2;\ \left(x+\frac{x}{2x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{2x-1}=2;$

$\left(\frac{2x^2-x+x}{2x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{2x-1}-2=0;\ \left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{2x-1}-2=0;$

$\frac{2x^2}{2x-1}=y;\ y^2-y-2=0,\ y_1=2,\ y_2=-1$.

$\frac{2x^2}{2x-1}=2$ $\quad$ или $\quad$ $\frac{2x^2}{2x-1}=-1$,

$2x^2-4x+2=0,$ $\quad$ $2x^2+2x-1=0$,

$x^2-2x+1=0,$ $\quad$ $D_1=1+2=3$,

$(x-1)^2=0,\ x=1;$ $\quad$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $1;\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

б) Решается аналогично.

Ответ: $2;\ -1-\sqrt{3};\ -1+\sqrt{3}$.

62. а) $(-\infty;3]\cup[5;+\infty)$; б) $(-2;2)$; в) $\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{5}\right]$; г) $(-\infty;+\infty)$; д) $\frac{4}{3}$; е) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$;

ж) $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$; з) неравенство верно при $x^2-7x\ge 0$, $x\in(-\infty;0]\cup[7;+\infty)$.

63. $-6x^2+11x-5>0,\ 6x^2-11x+5<0;\ \frac{5}{6}<x<1$.

64. а) $1>2a-5a^2$; $5a^2-2a+1>0$, $D<0$, следовательно, $5a^2-2a+1>0$ при любом a.

б) $6a<a^2+10,\ a^2-6a+10>0,\ (a-3)^2+1>0$ верно при любом значении a.

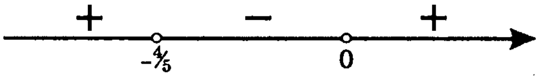
65. а) $(1;2]$; б) $[-5;-3]$.

66. Уравнение не имеет корней при $D<0$.

$D=(a+2)^2-4(-a^2+1)=a^2+4a+4+4a^2-4=5a^2+4a;$

$5a^2+4a<0;\ a(5a+4)<0;\ a(5a+4)=0;\ a_1=0;\ a_2=-\frac{4}{5}$

$a\in\left(-\frac{4}{5};0\right)$.



67. Уравнение имеет два корня при $D>0$.

$D=(a+2)^2-4(-a^2+1)=a^2+4a+4+4a^2-4=5a^2+4a$, $5a^2+4a>0$.

$a\in\left(-\infty;-\frac{4}{5}\right)\cup(0;+\infty)$

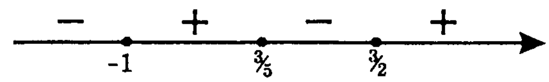
68. а) −6; −5; −4; −3; −2; −1; 0; 1; 2; б) 3; 4.

69. а) $(-\infty; -10) \cup (6; +\infty)$; б) $\left[-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{7}\right]$; в) $(-\infty; -2) \cup (1; 6)$; г) $[-10; 0] \cup [10; +\infty]$;

д) $\left(x^2+2x-3\right)^2-\left(x^2-3x\right)^2 \le 0$; $\left(x^2+2x-3-x^2+3x\right)\left(x^2+2x-3+x^2-3x\right) \le 0$;

$(5x-3)\left(2x^2-x-3\right) \le 0$

$5x-3=0$, $\quad 2x^2-x-3=0$,



$x_1=\dfrac{3}{5}$; $\quad D=1+24=25$,

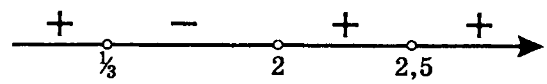
$x=\dfrac{1\pm 5}{4}$; $x_2=-1$; $x_3=\dfrac{3}{2}$;

$x \in (-\infty; -1] \cup \left[\dfrac{3}{5}; \dfrac{3}{2}\right]$;

е) −2; $\left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$;

ж) $1-3x=0$; $\quad 5-2x=0$; $\quad 2-x=0$;

$x=\dfrac{1}{3}$; $\quad x=\dfrac{5}{2}$; $\quad x=2$.

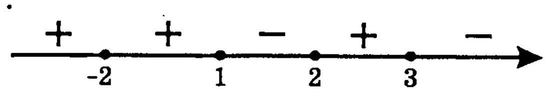


$x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup (2; 2{,}5) \cup (2{,}5; +\infty)$.

з) $x+2=0$; $\quad 1-x=0$; $\quad x-2=0$; $\quad x-3=0$;

$x=-2$; $\quad x=1$; $\quad x=2$; $\quad x=3$.

$x \in [1; 2] \cup [3; +\infty)$, $x=-2$.



Ответ: $[1; 2] \cup [3; +\infty)$, -2.

и) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$; 1;

к) $(-1; 0) \cup (0; 3)$;

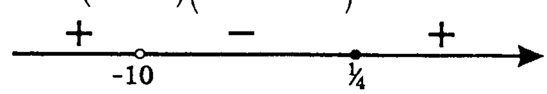
л) $\dfrac{x-3}{2x^2-7x+5}-1 \le 0$; $\dfrac{x-3-2x^2+7x-5}{2x^2-7x+5} \le 0$; $\dfrac{-2x^2+8x-8}{2x^2-7x+5} \le 0$;

$\dfrac{-2\left(x^2-4x+4\right)}{2x^2-7x+5} \le 0$; $\dfrac{(x-2)^2}{2x^2-7x+5} \ge 0$; $\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ 2x^2-7x+5>0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x<1;\ x>\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2{,}5; +\infty)$ и $x=2$.

м) $\dfrac{1}{x+10}-\dfrac{x}{x^2-2x+3} \ge 0$; $\dfrac{x^2-2x+3-x^2-10x}{(x+10)\left(x^2-2x+3\right)} \ge 0$; $\dfrac{-12x+3}{(x+10)\left(x^2-2x+3\right)} \ge 0$;

$x^2-2x+3>0$ при любом значении x;



$\dfrac{-12x+3}{x+10} \ge 0$; $\dfrac{-3(4x-1)}{x+10} \ge 0$; $\dfrac{4x-1}{x+10} \le 0$;

$x \in \left(-10; \dfrac{1}{4}\right]$.

н) $(-10; 5) \cup (13; 15) \cup (15; +\infty)$;

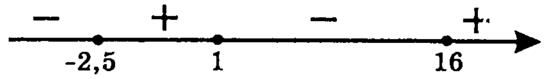
о) $(-\infty; -10) \cup (5; 13)$;

п) $[-6; 10]$;

р) $(-\infty; -6] \cup [20; +\infty)$; 7.

70. а) $(x-1)(2x+5)(x-16) \geq 0$;

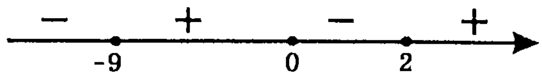
$x \in [-2,5;\ 1] \cup [16;\ +\infty)$.



б) $x(x+3)(-4)\cdot(x-2) \geq 0$;

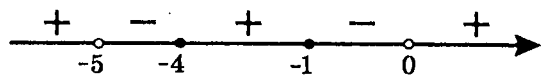
$x(x+9)(x-2) \leq 0$;

$x \in (-\infty;\ -9] \cup [0;\ 2]$.

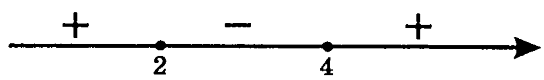


71. а) $\dfrac{4}{x(x+5)} + 1 \geq 0$; $\quad \dfrac{4+x^2+5x}{x(x+5)} \geq 0$; $\quad \dfrac{x^2+5x+4}{x(x+5)} \geq 0$;

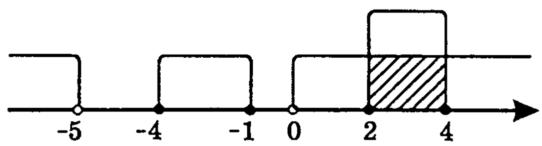
$x < -5$; $\quad -4 \leq x \leq -1$; $\quad x > 0$;



$x^2 - 6x + 8 \leq 0$, $\ 2 \leq x \leq 4$;



$\begin{cases} x < -5; \quad -4 \leq x \leq -1; \quad x > 0, \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

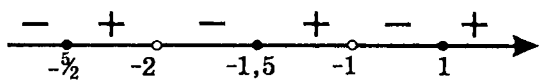


Ответ: $[2;\ 4]$.

б) Решим каждое неравенство, входящее в систему:

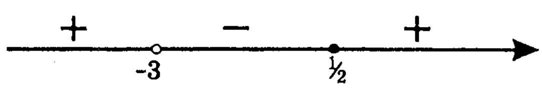
$\dfrac{4\left(x^2-3x+2\right)+7(4x+1)}{x^2-3x+2} \leq 0$; $\quad \dfrac{4x^2+16x+15}{x^2-3x+2} \leq 0$; $\quad \begin{cases} \left(4x^2+16x+15\right)\left(x^2-3x+2\right) \leq 0, \\ x^2-3x+2 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 4\left(x+\dfrac{5}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x-1)(x+2) \leq 0 \\ x \neq -1;\ x \neq -2. \end{cases}$



$x < -2,5$; $\ -2 < x \leq -1,5$ $\ -1 < x \leq 1$.

$2x^2 + 5x - 3 \leq 0$; $\ D = 25 + 24 = 49$;

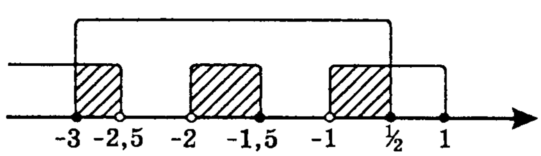


$x = \dfrac{-5 \pm 7}{4}$;

$x_1 = -3$; $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

$-3 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$

$\begin{cases} x < -2,5; \quad -2 < x \leq -1,5; \quad -1 < x \leq 1; \\ -3 \leq x \leq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$



Ответ: $[-3;\ -2,5) \cup (-2;\ -1,5] \cup \left(-1;\ \dfrac{1}{2}\right]$.

Проверочная работа № 3

Вариант 1

1			2	3	4	5	6	7
А	Б	В	2	1	4	1	$(-\infty; -6] \cup [3; +\infty)$	$(-\infty; -6) \cup (2; 5)$
3	4	2						

8	9	10
$(-\infty; -2]$	$(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$	$(-3; -2] \cup [1; 4]$

Вариант 2

1			2	3	4	5	6	7
А	Б	В	2	1	4	3	$[-5; 2]$	$(-9; 3) \cup (4; +\infty)$
3	4	1						

8	9	10
$(-\infty; -5) \cup (3; 5]$	$(-\infty; 0] \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$	$(-3; -1) \cup [2; 5)$

72. а) является; б) не является; в) является; г) не является.

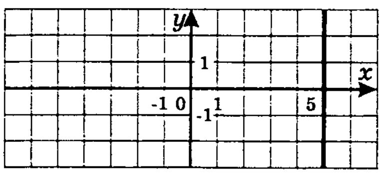
73. а) $(-5; -5); (1; -3); (-2; -4)$;

б) $y = 15$, решением является любая пара чисел $(x; 15)$, где x – любое число;

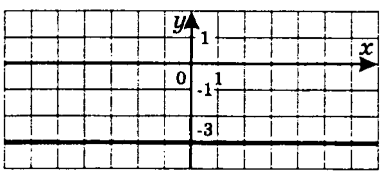
в) $(5; -2), (15; 0), (-4; -5)$;

г) $(-3; y)$, где y – любое число или $(x; y)$, где $x = y$.

74. а) $x = 5$, y – любое число



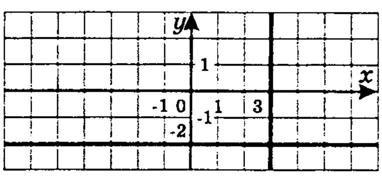
б) $y = -3$, x – любое число



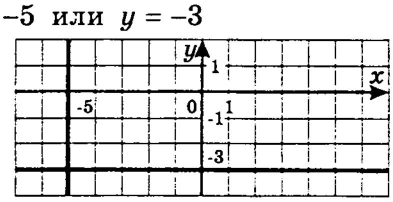
в) $x = 6$ – аналогично а)

г) $y = 2,5$ – аналогично б)

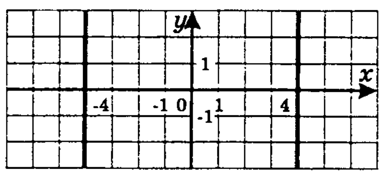
д) $x = 3$ или $y = -2$,



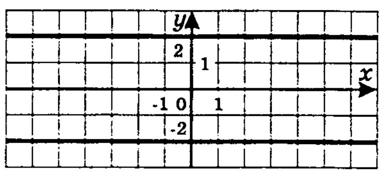
е) $x = -5$ или $y = -3$



ж) $|x| = 4$, $x = 4$ или $x = -4$



з) $|y| = 2$, $y = 2$ или $y = -2$



и) $y = \frac{8}{x}$ гипербола, расположенная в I и III четвертях;

к) $y = 2x^2 + 3$ – парабола, $y \geq 3$ расположена в I и II четвертях; ось y – ось симметрии;

л) окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 4;

м) окружность с центром в точке (2; 1) и радиусом, равным 3.

75. а) $x^2+y^2=14$; б) $x^2+y^2=25$; в) $x^2+y^2=16$.

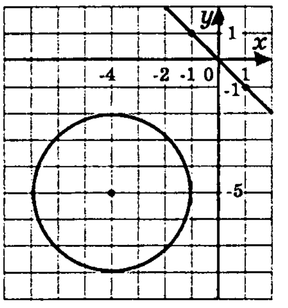
76. а) $(x+2)^2+(y-5)^2=25$; б) $(x+2)^2+(y-5)^2=169$; в) $(x+2)^2+(y-5)^2=2$.

77. а) не является; б) является.

78. а) (–3; –9) и (1; –1); б) (0; 10); (–6; –8); (6; –8);

в) $\begin{cases} x_1=-1{,}5\left(1+\sqrt{5}\right), \\ y_1=1-\sqrt{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=1{,}5\left(\sqrt{5}-1\right), \\ y_2=1+\sqrt{5}; \end{cases}$

г) Решений нет.



79. а) (1; 5) и (2; 3); б) (1; 2) и $\left(\frac{4}{11}; \frac{43}{14}\right)$; в) (2; 3) и (3; 2);

г) $\begin{cases} x-2=0,\ x=2, \\ y+3\neq 0,\ y\neq -3. \end{cases}$ Подставим $x=2$ во второе уравнение, получим $y^2=9,\ y=3$.

Ответ: (2; 3).

д) $\frac{x}{y}=a$, тогда $\frac{y}{x}=\frac{1}{a}$, первое уравнение принимает вид $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$; $2a^2-5a+2=0$,

$D=25-16=9$, $a=\frac{5\pm 3}{4}$; $a_1=2$; $a_2=\frac{1}{2}$.

$\frac{x}{y}=2$ или $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$,

$x=2y$; или $y=2x$. Подставим во второе уравнение

$4y^2+y^2=20$ или $x^2+4x^2=20$,

$y^2=4$, $x^2=4$,

$y=\pm 2$, $x=\pm 2$,

$x=\pm 4$; $y=\pm 4$.

Ответ: (4; 2); (–4; –2); (2; 4); (–2; –4).

е) $x=\pm 2$ или $y=\pm 3$

$y\neq -3$ $x\neq -2$

Ответ: (2; 3).

80. а) Пусть $\frac{1}{x+3y}=a$, тогда система принимает вид $\begin{cases} a+y=5, \\ ay=6. \end{cases}$ Решаем систему способом подстановки: $\begin{cases} a_1=3, \\ y_1=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} a_2=2, \\ y_2=3; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{x+3y}=2, \\ y=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{1}{x+3y}=3, \\ y=2; \end{cases}$ $\frac{1}{x+9}=2$ или $\frac{1}{x+6}=3$;

$x+9=\frac{1}{2}$ или $x+6=\frac{1}{3}$; $x=-8\frac{1}{2}$ или $x=-5\frac{2}{3}$.

Ответ: (–8,5; 3); $\left(-5\frac{2}{3}; 2\right)$.

б) $\begin{cases} xy+x-y=7, \\ xy(x-y)=6; \end{cases}$ $xy=a,\ x-y=b$; $\begin{cases} a+b=7, \\ ab=6. \end{cases}$ Решаем систему способом подстановки, получим: $\begin{cases} a_1=1, \\ b_1=6 \end{cases}$ или $\begin{cases} a_2=6, \\ b_2=1. \end{cases}$

Первоначальная система распадается на две $\begin{cases} xy = 1, \\ x - y = 6, \end{cases}$ или $\begin{cases} xy = 6, \\ x - y = 1. \end{cases}$

Последние системы решаем способом подстановки.

Ответ: $\left(3 - \sqrt{10}; -3 - \sqrt{10}\right)$ или $\left(3 + \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10}\right)$.

81. а) $(x+4)(y-1) = (x+4)(x+1)$,

$(x+4)(y-1-x-1) = 0$,

$(x+4)(y-x-2) = 0$,

$x = -4$ или $y = x + 2$;

1) $\begin{cases} x = -4, \\ 16 - y^2 + 12 + 8 = 0; \end{cases}$

$y^2 = 36$,

$y = \pm 6$;

2) $\begin{cases} y = x + 2, \\ x^2 - (x+2)^2 - 3x + 8 = 0; \end{cases}$

$-4x - 4 - 3x + 8 = 0$; $-7x = -4$;

$x = \dfrac{4}{7}$, $y = 2\dfrac{4}{7}$.

Ответ: (–4; –6); (–4; 6); $\left(\dfrac{4}{7}; 2\dfrac{4}{7}\right)$.

б) Решается аналогично а).

Ответ: $\left(1; -\dfrac{5}{4}\right); \left(-\dfrac{1}{4}; -2\dfrac{1}{2}\right)$.

82. а) Система распадается на две:

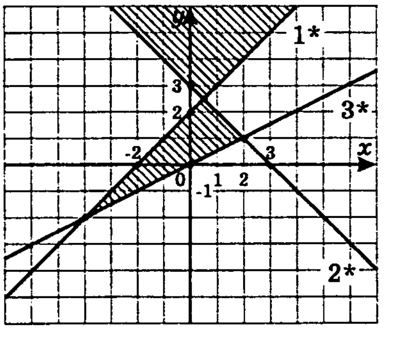
$\begin{cases} y - x - 2 \geq 0, \\ x + y - 3 \geq 0, \\ x - 2y \leq 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} y - x - 2 \leq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \\ x - 2y \leq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} y \geq x + 2, \\ y \geq -x + 3, \\ y \geq \dfrac{1}{2}x; \end{cases}$ или $\begin{cases} y \leq x + 2, \\ y \leq -x + 3, \\ y \geq \dfrac{1}{2}x. \end{cases}$

1* $y = x + 2$

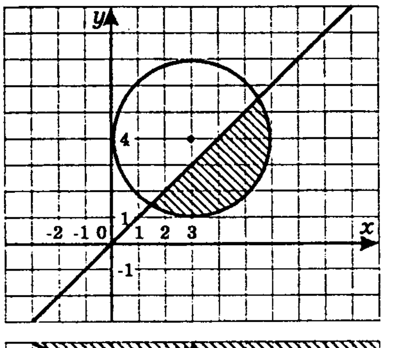
2* $y = -x + 3$

3* $y = \dfrac{1}{2}x$

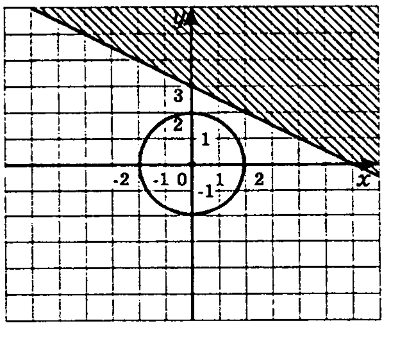


б) аналогично а);

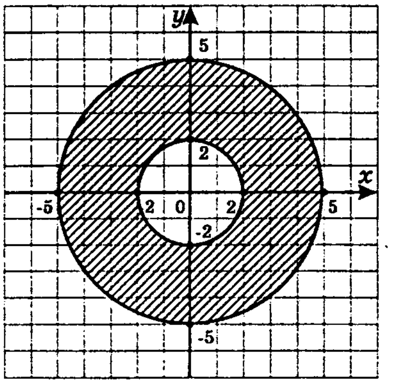
в) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 9, \\ y \leq x; \end{cases}$



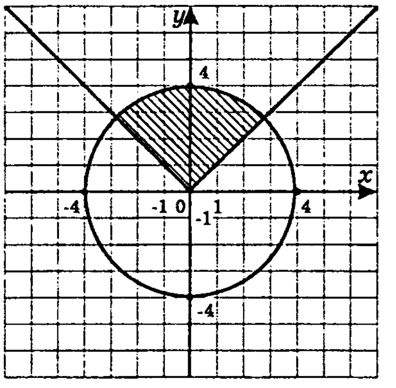
г) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4, \\ y \geq -\dfrac{1}{2}x + 3; \end{cases}$



д) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 25, \\ x^2 + y^2 \ge 4; \end{cases}$



е) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16; \\ y \ge x, \\ x \ge 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16; \\ y \le -x, \\ x < 0. \end{cases}$



Проверочная работа № 4

Вариант 1

1	2	3	4	5			6	7	8	9	10
				А	Б	В					
4	2	1	1	2	1	3	(3; 1); (5; −1)	$-2;\ -\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ 2$	(4; 5)	$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9; \\ x^2 + y^2 \ge 4 \end{cases}$	(−2; −3); (2; 3)

Вариант 2

1	2	3	4	5			6	7	8	9	10
				А	Б	В					
4	2	2	3	1	4	2	(1; −2); (−1; −4)	(1; 4); (−1; 4)	(−6; −3)	$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 \le 4; \\ y \le -2x \end{cases}$	(2; 3); (−2; −3)

83. 9, 27, 90, 225, 9000, $9n$.

84. а) a_{32}, a_{501}, a_{n+1}, a_{3n+1}, a_{5n+2}; б) a_{50}, a_{299}, a_{n-6}, a_{7n-1}, a_{8n-2}.

85. а) c_{26}, c_{27}, c_{28}, c_{29}; б) c_{n+1}, c_{n+2}, c_{n+3}, c_{n+4}, c_{n+5}, c_{n+6}; в) c_{n-2}, c_{n-1}; г) c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, c_{n+3}.

86. а) 2, 5, 8, 11, 14; б) 6, 9, 14, 21, 30; в) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$; г) −3, 3, −3, 3, −3;

д) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}$, 1, 3, 9; е) 2, 16, 128, 1024, 8192.

87. а) 23, 27, 31; б) 32, 25, 18; в) 32, 64, 128; г) 36, 49, 64; д) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$; е) $\frac{10}{11}, \frac{12}{13}, \frac{14}{15}$.

88. а) 6; б) 153; в) 3003.

89. а) 3, −2, −7, −12, −17; б) 64, 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$; в) 125, −25, 5, −1, $\frac{1}{5}$; г) 2, $\frac{1}{4}$, 16, $\frac{1}{256}$, 65536.

90. а) $a_n = 4n - 1$; б) $a_n = \frac{n}{n+1}$; в) $a_n = n^2$; г) $a_n = \frac{1}{n}$; д) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1}$; е) $a_n = \frac{1}{2(2n-1)}$.

91. 15 не принадлежит, 35 и 65 принадлежат последовательности.

92. 56 не принадлежит, 12 и 96 принадлежат последовательности.

93. 22.

94. а), б), г), д) являются, в), е) не являются арифметическими прогрессиями.
95. а) 5, 12, 19, 26; б) 40, 28, 16, 4; в) 1,4; 1,1; 0,8; 0,5; г) −2,7;−1,8;−0,9; 0.
96. а) $x_6 = x_1 + 5d$; б) $x_{31} = x_1 + 30d$; в) $x_{179} = x_1 + 178d$; г) $x_m = x_1 + d(m-1)$;
д) $x_{m+4} = x_1 + d(m+3)$; е) $x_{3m} = x_1 + d(3m-1)$.
97. а) 46; б) −57,7.
98. а) −11; $a_n = 1 - 0,6n$; б) −35,8; $a_n = 6,2 - 2,1n$.
99. а) 35; б) 269.
100. а) 3; б) −0,25.
101. 7,5; 7; 6,5; 6; 5,5; 5.
102. а) $a_1 = 4,\ d = 3$; б) $a_1 = 116,\ d = -4$.
103. а) нет; б) да.
104. а) начиная с a_5; б) $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$.
105. С 1–го по 4–й; −1,4.
106. а), в) д) е) являются, б), г) не являются арифметическими прогрессиями.
107. $a_1 = 2,\ d = 8$ или $a_1 = 10,\ d = -8$.
108. $a_1 + a_4 = 2a_1 + 3d,\ a_2 + a_3 = 2a_1 + 3d$.
109. а) 800; б) 364.
110. а) −153; б) 165,6.
111. а) 990; б) 24 950; в) $\frac{5n-1}{2}n$.
112. а) 7260; б) 22 110; в) 3366; г) 735.
113. 1440.
114. −445,5.
115. 10.
116.

№ п/п	a_1	d	n	a_n	S_n
1	7	4	9	39	207
2	−5	2	12	17	72
3	26	1,5	17	50	442
4	8	−7	10	−55	−235
5	5	6	12	71	456
6	10	3	8	31	164

117. $a_1 = 7,\ d = 5$.
118. 19.
119. 1408.
120. $a_1 = 1,\ d = 2$ или $a_1 = 5,\ d = -2$.
121. 48.
122. а) 55; б) 1275.
123. а) 35; б) 3.
124. 30°, 60°, 90°.
125. 12 см.
126. 12 см, 16 см, 20 см.
127. 8.
128. 180 раз.
129. 10 с.
130. 6 ч.
131. 5 ч.

Проверочная работа № 5 по теме «Арифметическая прогрессия»

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	3	1	−39	41,5; −1,5	−5; 6; 17; 28; 39	38	646

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	2	1	2	4	−198	58,6; −0,7	11; 7; 3; −1; −5; −9	31	705

132. б), г) д) е) являются, а), в) не являются геометрическими прогрессиями.
133. а) 2, 6, 18, 54, 162; б) –20, –10, –5, –2,5, –1,25; в) –48, 72, –108, 162, –324; г) $0,9;\ 0,9\sqrt{3};\ 2,7;\ 2,7\sqrt{3};\ 8,1$.
134. а) $1,\ \frac{1}{3}$; б) 13,5; 20,25; в) $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{3}$.
135. а) $c_7 = c_1q^6$; б) $c_{30} = c_1q^{29}$; в) $c_{159} = c_1q^{158}$; г) $c_m = c_1q^{m-1}$; д) $c_{m+5} = c_1q^{m+4}$; е) $c_{4m} = c_1q^{4m-1}$.
136. а) 0,5; б) $-11\frac{1}{9}$; в) $-8\sqrt{2}$; г) –2.
137. а) –48; $-3\cdot(-2)^{n-1}$; б) $-\frac{20}{27},\ -\frac{20}{3^{n-2}}$; в) 40; $0,064\cdot(-5)^{n-1}$; г) –0,00001; -10^{5-2n}.
138. а) –4; б) $\sqrt{3}$.
139. а) –5; 5; б) $-\frac{5}{9};\ \frac{5}{9}$.
140. а) $b_1 = 3,\ q = 2$; б) $b_1 = 8,\ q = 3$.
141. $9;\ -3;\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{9}$.
142. 2; 1; 0,5; 0,25.
143. $b_3 \cdot b_9 = b_1^2 \cdot q^{10}$, $b_5 \cdot b_7 = b_1^2 \cdot q^{10}$.
144. $b_{10} = x \cdot q^5$
145. 10 719,14 р.
146. 10 824 человек.
147. 307,2 м.
148. а) $121\frac{1}{3}$; б) 3937,5.
149. а) $234\frac{4}{9}$; б) –104,2.
150. а) $S_n = 2^n - 1$; б) $S_n = \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$; в) $S_n = \frac{x^n - 1}{x-1}$; г) $S_n = \frac{1-\left(-x^2\right)^n}{x^2+1}$.
151. 60.
152. а) $b_1 = 5,\ b_5 = 80$; б) $b_1 = 54,\ b_4 = 16$.
153. а) $n = 6$; б) $n = 5$.
154. $b_1 = 6,\ q = 2$; или $b_1 = -96,\ q = \frac{1}{2}$.
155. 31 или 11.
156. $\frac{1}{8}$.
157. 3; 6; 12; 18.
158. 1; 3; 5; 7.
159. 4; 20; 36 и 4; 12; 36.
160. 3; 6; 9 или 11; 6; 1.

Проверочная работа № 6 по теме «Геометрическая прогрессия»

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
321	4	2	3	1	$y_6 > y_8$	–2; 2	20; 80; 320	3	6

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
312	4	3	1	3	$b_5 > b_7$	–0,6; 0,6	6; 18; 54; 162	–3; 3	4

161. 15.
162. а) 48; б) 100.
163. 45.
164. а) 120; б) 24.
165. 60.
166. а) 24; б) 116.
167. 24.
168. 720.
169. а) 120; б) 720.
170. 96.
171. 20.
172. 60.
173. 190 136 080.
174. а) 24; б) $-\frac{4}{33}$.
175. а) 7; б) 5.
177. 120.
178. 300.
179. 35.
180. 15 504.
181. $\frac{31}{92} \approx 0,33$.
182. 0,9914.
183. 220.
184. а) невозможное событие; б) случайное событие; в) невозможное событие; г) достоверное событие.
185. 0,0265.
186. 0,8.
187. 0,96.
188. 0,4.
189. 0,2.
190. 0,25.
191. 0,375.
192. $\frac{1}{3}$
193. а) $\frac{1}{36}$; б) $\frac{1}{6}$.
194. 0,3.
195. а) 0,65; б) 0,15.
196. 0,0625.
197. 0,75.
198*. 0,8.

Проверочная работа № 7 по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей»

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	2	4	1	0,28	190	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	7

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	2	3	1	2	0,375	120	0,1	0,1875	10

199. а) $2\frac{1}{15}$; б) $8\frac{11}{20}$; в) $12\frac{1}{3}$; г) $10\frac{2}{3}$.
200. а) 2; б) −1; в) 5; г) 10; д) 18; е) 12,1.
201. а) 0,5; б) −2,5; в) −0,5; г) 1,55; д) −0,4; е) 0,59.

202. а) 4,05; б) 3,75; в) −1,2; г) 0,7.
203. а) −22,2; б) 116,75.
204. а) $-\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}$; $-\frac{2}{5}:0,9$; $0,5-\frac{5}{6}$; б) $-3,8\cdot 0,92$; $1,26-4\frac{2}{3}$; $-1,23:0,4$.
205. а) $-4\frac{1}{7}$; б) $-42\frac{2}{3}$.
206. а) 0,4; б) 17; в) 6; г) 16; д) −25,8; е) −34.
207. а) 50; б) 300.
208. 90%.
209. 35,2%.
210. а) 0,24; б) 0,3; в) 4%.
211. а) $18\sqrt{2}-20$; б) $1-4\sqrt{6}$; в) $120\sqrt{2}$; г) $2-14\sqrt{3}$; д) $85+60\sqrt{2}$; е) 123.
212. а) 2; б) 1.
213. а) 2; б) 7; в) 74; г) 1; д) 10; е) $\frac{2}{3}$.
214. а) $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{5}+2$; в) $2\sqrt{10}<3\sqrt{5}$; г) $\sqrt{6}+3>\sqrt{5}+\sqrt{10}$.
215. $a_1=-5$, $S_{15}=240$.
216. 64.
217. $-7\frac{31}{32}$.
218. $\frac{15}{32}$.
219. а) 2730; б) $\frac{1}{56}$; в) 40; г) 455.
220. а) $\frac{17!}{14!}>10^3$; б) $\frac{4!}{8!}<10^{-3}$.
221. $\frac{8}{99}$.
222. 24.
223. 45.
224. а) 720; б) 96.
225. 0,95.
226. 0,6.
227. $\frac{5}{24}$.
228. а) x; б) $y+8$; в) a^4-1; г) $224-20x$; д) −3; е) $80x^2y-40xy^2-4y^3$.
229. а) $(5x-9y)(5x+9y)$; б) $(a+b-2)(a+b+2)$; в) $y(5y-12x)$; г) $2a(a-1)(a+1)$;
д) $(a-b)^2(a+b)$; е) $10x^2y^2(x-2y)(x+2y)$.
231. а) $(4x-1)(16x^2+4x+1)$; б) $a(a-1)(a+1)$; в) $2x(4x^2-6x+3)$; г) $b(3ab-3a^2-b^2)$.
232. а) $(2x+3)(3x-1)$; б) $(3x+1)(2-x)$; в) $(x-2y)(x-3y)$; г) $(a-b)(2a+3b)$.
233. а) $-\frac{a}{b}$; б) $-\frac{3x}{2y}$; в) $\frac{b-a}{2(a+b)}$; г) $\frac{x+y}{x-y}$.
234. $\frac{x+1}{(y-1)^2}$; 1.
235. а) $\frac{20}{(a-4)(a+1)}$; б) $\frac{4}{a+1}$; в) 1,5; г) $\frac{x-2}{x^2+2x+4}$.
236. а) $\frac{a}{2b}$; б) $\frac{a^2-3a-18}{a^2}$; в) $\frac{3}{x(x+2y)}$; г) 0,4.

237. $x-1$; 9,5.

238. а) $a-1$; б) $a+5$; в) $\frac{1}{a+2}$; г) $b+3$; д) b; е) $x+7$.

239. а) 39; б) 54,25.

240. а) $48a$; б) $\frac{48y^5}{5x}$; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{1}{2^n}$.

241. а) $2\sqrt{3a}$; б) $5+\sqrt{5x}$; в) $4\sqrt{6ab}$; г) $c\sqrt{c}+7\sqrt{7}$.

242. а) $\frac{1}{\sqrt{b}}$; б) $x-2\sqrt{x}+4$; в) $\frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{b}}$; г) $4-\sqrt{a}$.

243. а) 3,5; б) 2; в) 4; г) 9.

244. 150 м.

245. 48 р.

246. 5 км/ч, 1 км/ч.

247. В 5 раз.

248. а) 0; 0,8; б) −0,2; 0,2; в) 2; 3,5; г) корней нет.

249. а) $(-\infty; -3]\cup[6; +\infty)$; б) $(-\infty; -1]\cup[1; +\infty)$.

250. а) $(-2; 6)$; б) $(-1; 0)$.

251. а) −3; −0,5; б) 1; 3,75; в) −2,8; 6; г) −2; $3\frac{1}{15}$.

252. 140 м.

253. 6; 8; 10 или −2; 0; 2.

254. 15 см.

255. 8 и 18.

256. а) 1; б) корней нет; в) −3; г) −9.

257. 3 км/ч.

258. 6 км/ч.

259. 34 км/ч, 24 км/ч.

260. 10 ч, 9 ч.

261. 12 ч, 24 ч.

262. 6 ч, 9 ч.

263. а) −2; −1; 1; 2; б) $-\sqrt{5}$; −1; 1; $\sqrt{5}$; в) корней нет; г) −2; 2.

264. а) − 5; −3; 1; 3; б) 1.

265. а) −2,5; 0; 2,5; б) −6; 0; 1; в) −2; 2; 3; г) −6; −3; 3.

266. а) 1; б) 2; в) 1; г) −1.

267. а) 1 корень; б) 3 корня; в) 2 корня; г) корней нет.

268. а) $(5; 3)$; б) $(2; -1)$; в) $(4; -2)$; г) $(7; 5)$.

269. а) $(9; 14)$; б) $(11; 6)$.

270. а) $k=\frac{1}{3}$, $b=10$; б) $k=\frac{1}{3}$, $b=-2$; в) $k=2$, $b=5$.

271. а) $y=-\frac{1}{4}x+28$; б) $y=2x-3$.

272. $a=-1$, $c=3$.

273. −2 и 5.

274. 3 ч.

275. 36 ч, 45 ч.

276. 60 км/ч.

277. 42.

278. а) $(-2; 2)$, $(-1; 1)$; б) $(1; 3)$; в) $(0; 0)$, $(1; 1)$; г) $(-1; -4)$, $(2; 2)$.

279. а) $(-2; -3)$, $(3; 2)$; б) $(3; 1)$, $(-1; -3)$; в) $(-3; 2)$; г) $(1; 2)$, $(2; 1)$.

280. а) $(1; 1)$, $(4; 1)$; б) $(3; 1)$, $(-1; -3)$; в) $(16; 4)$, $(4; 16)$; г) $(2; 4)$.

281. а) $(4; 0)$, $(1; 3)$; б) $(2; 3)$, $(-6; -1)$; в) $(0; 2)$, $(2; 0)$.

282. 17.

283. 2,5 ч, $1\frac{2}{3}$ ч.

284. $\frac{2}{3}$.

285. 1,64 л, 1,86 л.

286. 50 ч, 150 ч.

287. $a_1 = 5,\ d = 3$.

288. 3; 7; 11 или 12; 7; 2.

289. 26,7.

290. 28.

291. 1605.

292. $x = 1,\ y = 3$.

293. а) $3{,}1 < \sqrt{3} + \sqrt{2} < 3{,}3$; б) $0{,}2 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0{,}4$; в) $2{,}33 < \sqrt{6} < 2{,}7$.

294. а) $(-\infty;\ 2]$; б) $(-\infty;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -2)$; г) $[6;\ +\infty)$.

295. а) $\left(1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; б) $(-\infty;\ -0{,}4)$; в) $\left(-\frac{3}{4};\ +\infty\right)$; г) $\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

296. а) $(-3;\ -2)$; б) $(-1{,}2;\ 6)$; в) $(-1;\ 1)$; г) $(8;\ +\infty)$.

297. а) $-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1$; б) 1.

298. а) $(2;\ 4)$; б) $[2;\ 3]$; в) $(-2;\ 1)$; г) $[-4;\ 4]$.

299. а) $(-\infty;\ 1) \cup (4;\ +\infty)$; б) $[-2;\ -1]$; в) $(0;\ 6)$; г) $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$.

300. $[2;\ 5]$.

301. а) $(-\infty;\ 1) \cup (9;\ +\infty)$; б) $[-3;\ 3]$; в) 2; г) $(-5;\ 0{,}75)$; д) $(-\infty;\ -0{,}5] \cup [3;\ +\infty)$;
е) $(-\infty;\ 1) \cup (8;\ +\infty)$.

302. а) $(1;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 1) \cup (2;\ 5)$; в) $(-\infty;\ -3) \cup (-2;\ -1) \cup (5;\ +\infty)$;
г) $(-\infty;\ -3) \cup [-1;\ 5]$.

303. а) $[1;\ 6)$; б) $[0;\ 4]$; в) $[-2;\ 2]$; г) $(-\infty;\ +\infty)$.

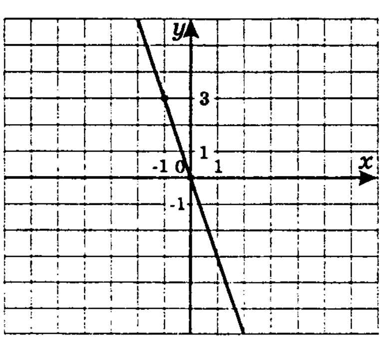
304. а) $(-2;\ 6)$; б) $(-\infty;\ -2] \cup [6;\ +\infty)$.

305. а) $(0;\ 28)$; б) $(9;\ +\infty)$.

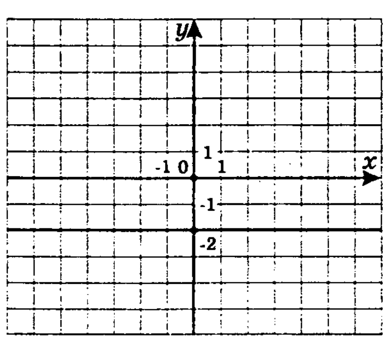
306. а) $[0{,}4;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 40]$; в) $[0;\ 2]$; г) $(-\infty;\ -2] \cup [1;\ +\infty)$; д) $[0{,}25;\ 2{,}5]$; е) $\left[1\frac{5}{7};\ +\infty\right)$.

307. а) $-4{,}5;\ -2;\ 1{,}5;\ 5$; б) $[-5;\ -4{,}5)$, $(-2;\ 1{,}5)$, $(5;\ 6{,}5]$; в) $(-4{,}5;\ -2)$; $(1{,}5;\ 5)$; $y = 2{,}5x + 5$.

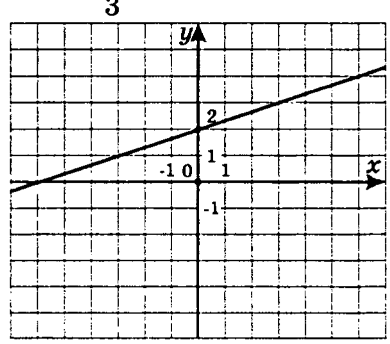
308. а) $y = -3x$



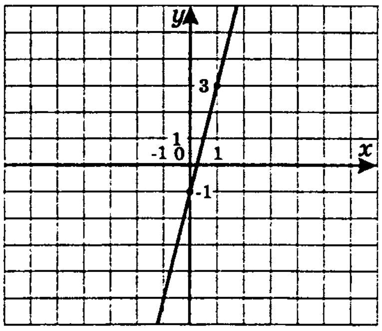
в) $y = -2$



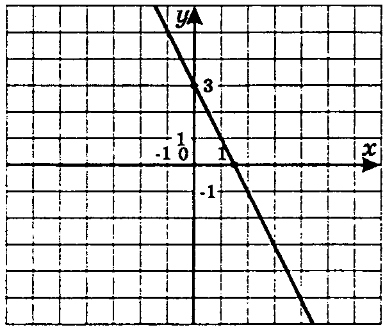
д) $y = \frac{1}{3}x + 2$



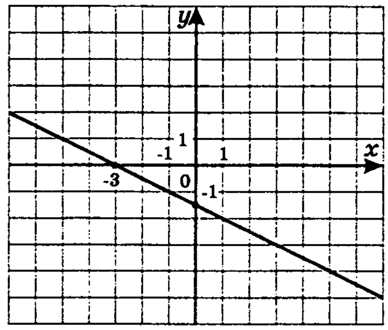
б) $y = 4x - 1$



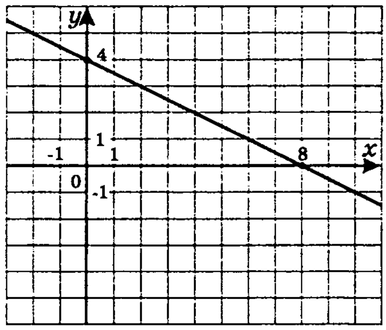
г) $y = -2x + 3$



е) $y = \dfrac{-3 - x}{2}$

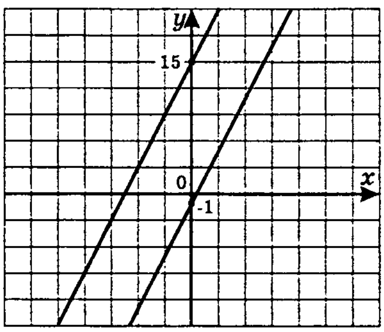


309. а) $x = 8$;
б) $x < 8$;
в) $x > 8$.

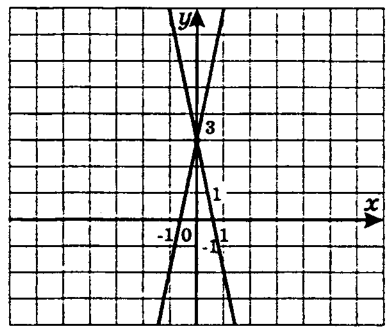


310. а) $y = 3 - 2x,\ y = -x + 99$ убывающие; б) $y = 5x - 8, y = 2x - 51$ возрастающие функции.

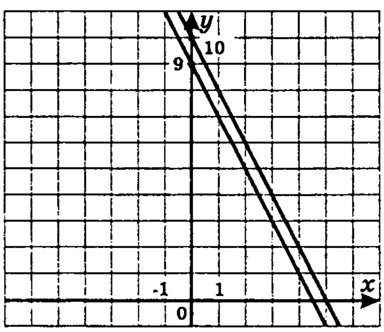
311. а) Графики функций $y = 6x + 15$ и $y = 6x - 1$ параллельны



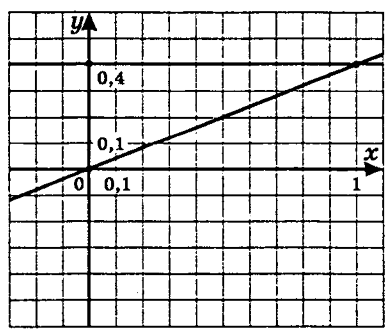
в) графики функций $y = -5x + 3$ и $y = 5x + 3$ пересекаются



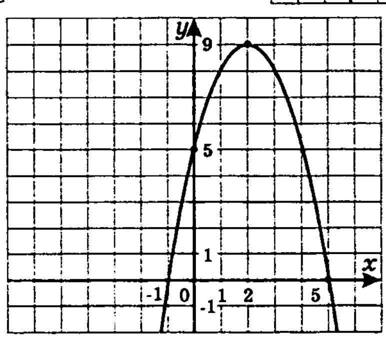
б) графики функций $y = -2x + 9$ и $y = 10 - 2x$ параллельны



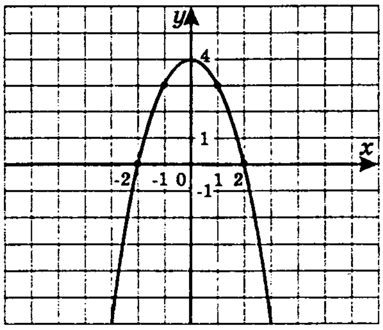
г) графики функций $y = 0,4x$ и $y = 0,4$ пересекаются



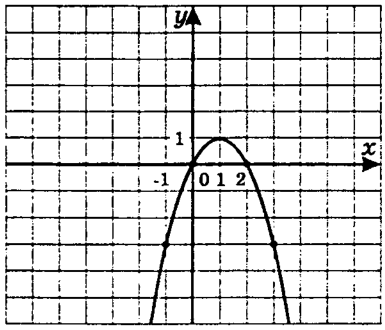
312. $y = 0$ при $x = -1$ и $x = 5$;
$y > 0$ при $-1 < x < 5$;
$y < 0$ при $x < -1$ и $x > 5$;
$E(y) = (-\infty;\ 9]$.



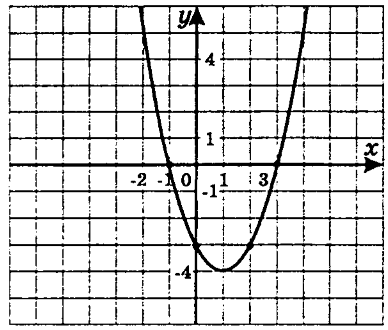
313. а) $y = 4 - x^2$, наибольшее значение $y = 4$



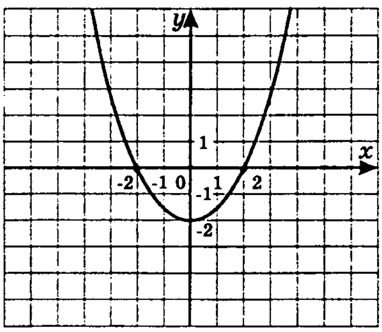
в) $y = -x^2 + 2x$ наибольшее значение $y = 1$



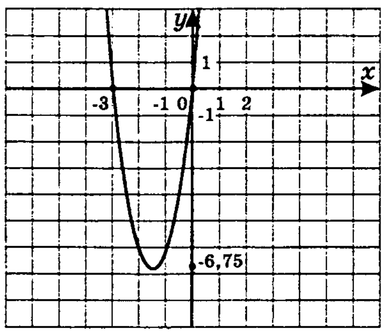
д) $y = x^2 - 2x - 3$, наименьшее значение $y = -4$



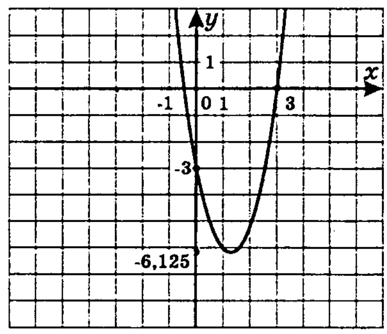
б) $y = 0,5x^2 - 2$ наименьшее значение $y = -2$



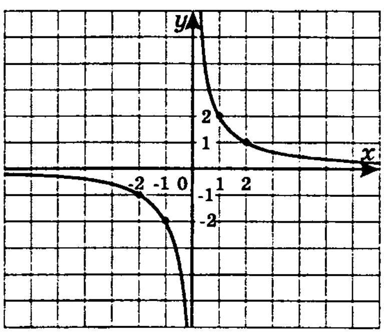
г) $y = 3x^2 + 9x$ наименьшее значение $y = -6,75$



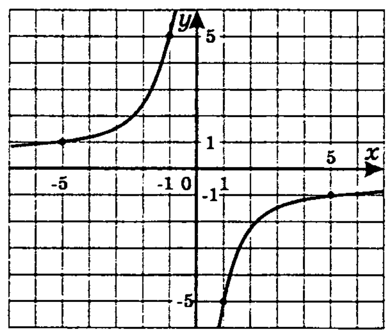
е) $y = 2x^2 - 5x - 3$ наименьшее значение $y = -6,125$



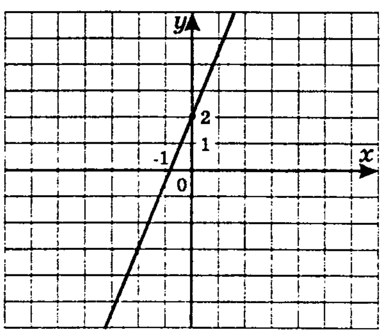
314. а) $y = \dfrac{2}{x}$; $y < 0$ при $x < 0$; $y > 0$ при $x > 0$.



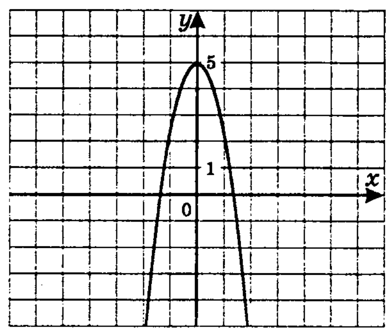
б) $y = -\dfrac{5}{x}$; $y < 0$ при $x > 0$; $y > 0$ при $x < 0$.



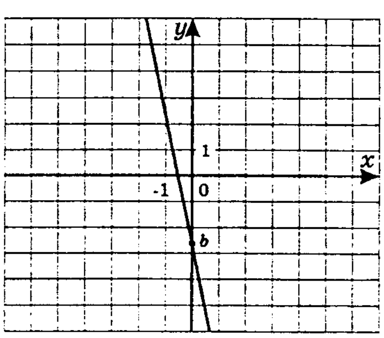
315. а) $y = kx + 2$ при $k > 0$



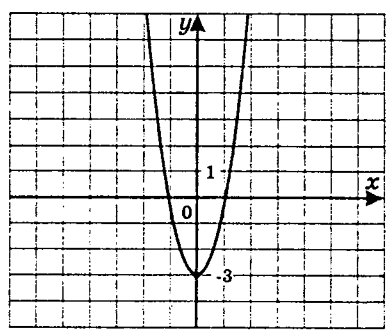
д) $y = ax^2 + 5$ при $a < 0$



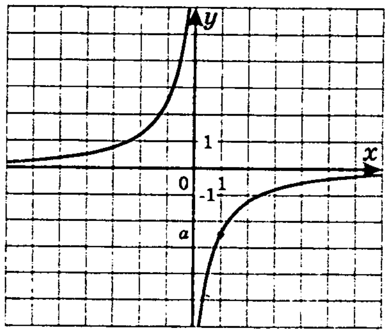
б) $y = -5x + b$ при $b < 0$



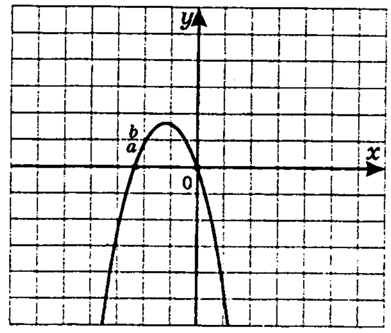
е) $y = ax^2 - 3$ при $a > 0$



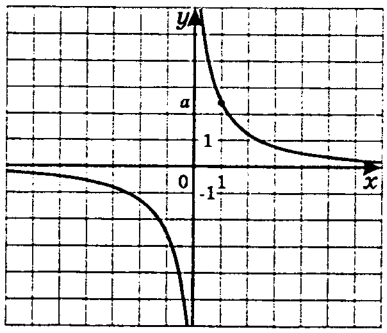
в) $y = \dfrac{a}{x}$ при $a < 0$



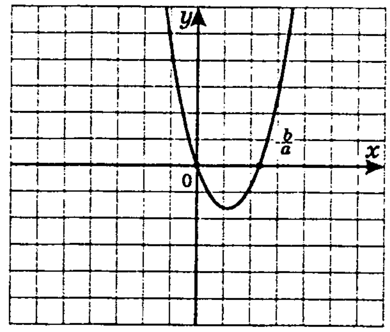
ж) $y = ax^2 + bx$ при $a < 0,\ b < 0$



г) $y = \dfrac{a}{x}$ при $a > 0$

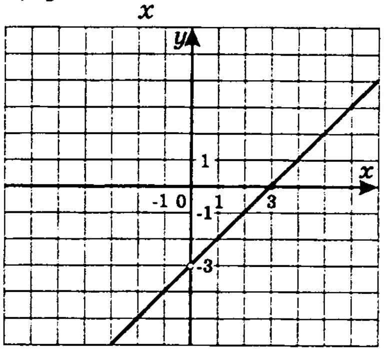


з) $y = ax^2 + bx$ при $a > 0,\ b < 0$

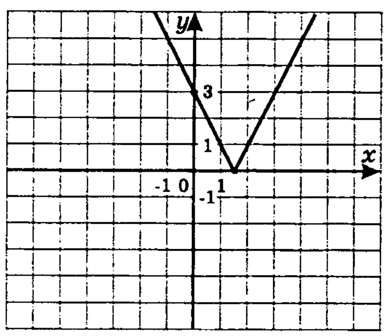


316. а) $(-1;\ 1)$; б) $(2;\ 8)$; $(-1,5;\ 4,5)$; в) $(0;\ -3)$; $(-3;\ 0)$; г) $(4;\ 2)$.

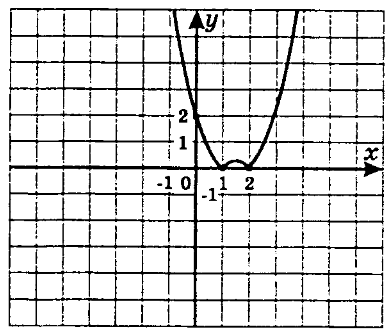
317. а) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x}$



б) $y = |2x - 3|$

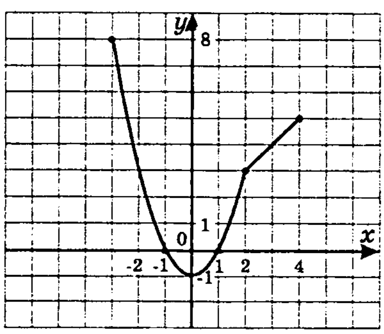


в) $y = |x^2 - 3x + 2|$



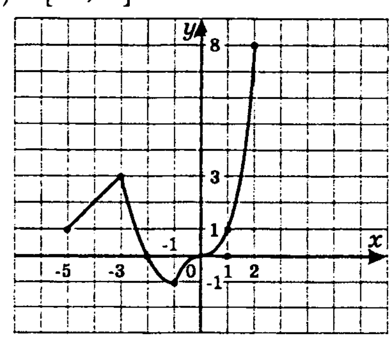
318. а) $y = \begin{cases} x^2 - 1, & -3 \le x \le 2, \\ 1 + x, & 2 < x \le 4; \end{cases}$

$E(y) = [-1;\ 8]$



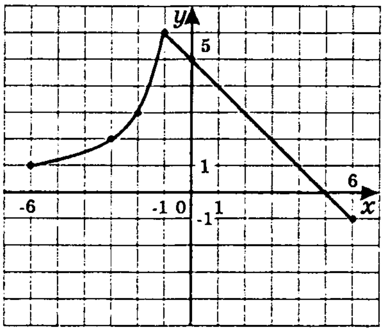
в) $y = \begin{cases} x + 6, & -5 \le x < -3 \\ x^2 + 2x, & -3 \le x \le -1, \\ x^3, & -1 < x \le 2; \end{cases}$

$E(y) = [-1;\ 8]$



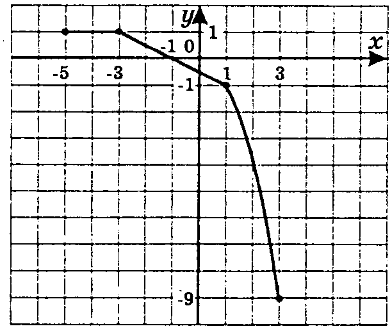
б) $y = \begin{cases} -\dfrac{6}{x}, & -6 \le x \le -1, \\ 5 - x, & -1 < x \le 6; \end{cases}$

$E(y) = [-1;\ 6]$



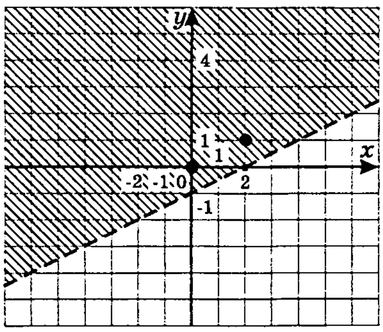
г) $y = \begin{cases} 1, & -5 \le x < -3 \\ -0,5x - 0,5, & -3 \le x \le 1, \\ -x^2, & 1 < x \le 3. \end{cases}$

$E(y) = [-9;\ 1]$



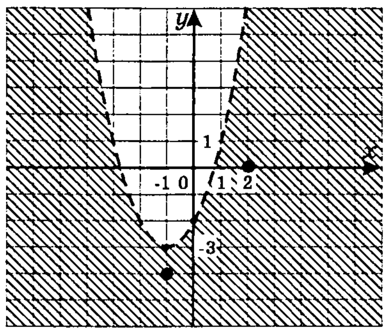
319. а) $2y + 2 > x$

$(0;\ 0)$, $(2;\ 1)$



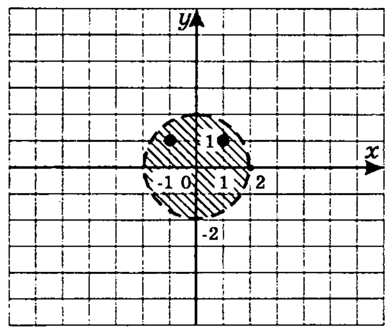
в) $y - x^2 < 2x - 2$

$(2;\ 0)$, $(-1;\ -4)$



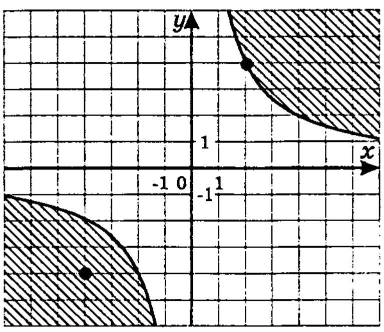
д) $x^2 + y^2 < 4$

$(1;\ 1)$, $(-1;\ 1)$



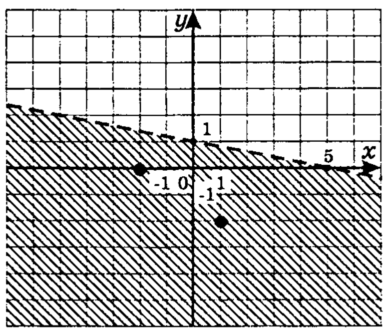
б) $yx \ge 8$

$(-4;\ -4)$, $(2;\ 4)$



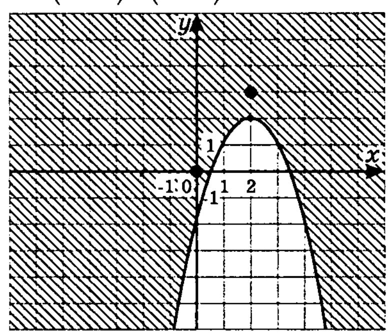
г) $5y - 5 < -x$

$(-2;\ 0)$, $(1;\ -2)$



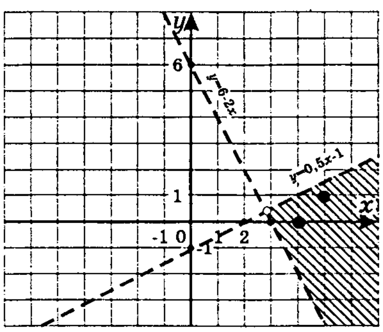
е) $x^2 + 2 \ge 4x - y$

$(0;\ 0)$, $(2;\ 3)$



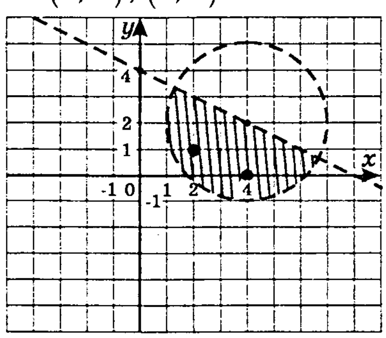
320. а) $\begin{cases} 2x + y > 6, \\ y + 1 < 0,5x; \end{cases}$

$(4;\ 0)$, $(5;\ 1)$



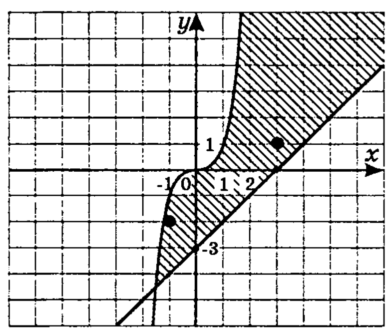
в) $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 < 9, \\ y - 4 < -0,5x; \end{cases}$

$(4;\ 0)$, $(2;\ 1)$



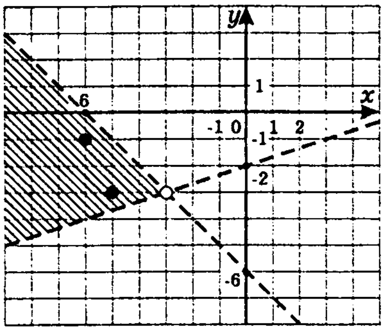
д) $\begin{cases} y \le x^3, \\ y + 3 \ge x; \end{cases}$

$(3;\ 1)$, $(-1;\ -2)$



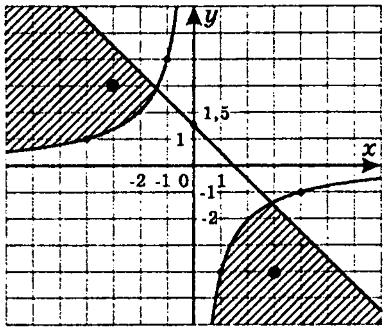
б) $\begin{cases} 3y + 6 > x, \\ x + 6 < -y; \end{cases}$

$(-6; -1)$, $(-5; -3)$



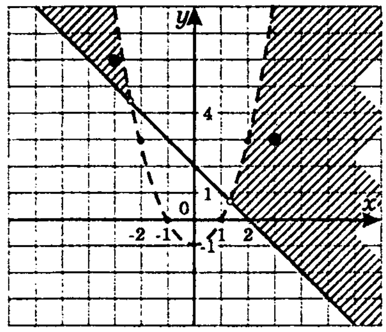
г) $\begin{cases} 2x + 2y \le 3, \\ y \ge -\dfrac{4}{x}; \end{cases}$

$(-3; 3)$, $(3; -4)$



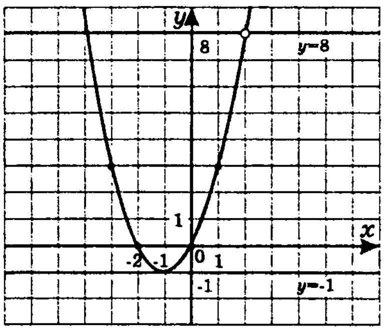
е) $\begin{cases} y + x \ge 2, \\ y < x^2 - 1; \end{cases}$

$(3; 3)$, $(-3; 6)$



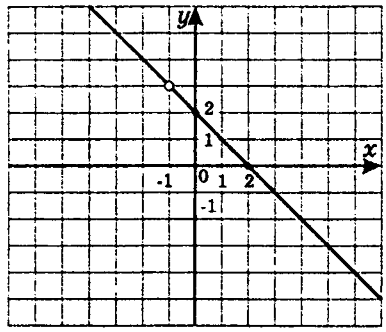
321. $y = x^2 + 2x$, $x \ne 2$

$p = -1$, $p = 8$.



322. $y = -x + 2$, $x \ne -1$

$y \ge 0$ при $x < -1$ и $-1 < x \le 2$



Итоговая проверочная работа

Вариант 1

Часть 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	2	324	3	1	$\dfrac{x}{x+5}$	3	$(-2; 3)$	1

Часть 2

11	12	13
$-3; 1; -1 \pm \sqrt{6}$	20; 30	$(-1,4; 5)$

Вариант 2

Часть 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	2	4	413	1	-1	$\dfrac{x-2}{x-3}$	2	$(5; -3)$	0,3

Часть 2

11	12	13
$-3; 2$	10; 15	$-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2$

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Таблица квадратов двузначных чисел

		Единицы									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Десятки	1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Формулы сокращённого умножения

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ – разность квадратов

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суммы

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб разности

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов

Литература

1. **Алгебра: учеб.** для 9 кл. общеобразоват. учреждений / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2011.
2. **Алгебра: сборник заданий для подготовки к гос. итоговой аттестации в 9 классе** / Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова и др. – М.: Просвещение, 2012.
3. Александрова В.Л., Высоцкий И.Р., Карташёва Г.Д., Крайнева Л.Б., Семенов А.В., Шестакова И.В. **Диагностические работы по математике. 5–9 класс** / Под редакцией И.В. Ященко и А.В. Семёнова. – М.: МЦНМО, 2012.
4. Александрова В.Л. **Математика. 5 класс. Практикум. Готовимся к ГИА**: [учебное пособие]. – М.: Интеллект–Центр, 2013.
5. Дудницын Ю.П. **Алгебра. Тематические тесты. 9 класс** / Ю.П. Дудницын, В.Л. Кронгауз. – М.: Просвещение, 2011.
6. Жохов В.И., Крайнева Л.Б. **Уроки алгебры в 9 классе**: книга для учителя. – М.: Просвещение 2010.
7. Карташёва Г.Д. **Алгебра. 8 класс. Практикум. Готовимся к ГИА**: [учебное пособие]. – М.: Интеллект–Центр, 2013.
8. Карташёва Г.Д., Крайнева Л.Б. **Алгебра. 9 класс. Контрольные работы в новом формате**: учебное пособие / под общей ред. А.В. Семёнова. – М.: Интеллект–Центр, 2011.
9. Кононов А.Я. **Задачи по алгебре**: пособие для учащихся 7–9 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 1996.
10. Крайнева Л.Б. **Алгебра. 7 класс. Практикум. Готовимся к ГИА**: [учебное пособие]. – М.: Интеллект–Центр, 2013.
11. Крайнева Л.Б. **Тестовые материалы для оценки качества обучения.** Алгебра. 9 класс: [учебное пособие]. – М.: Интеллект–Центр, 2012.
12. Лебединцева Е.А., Беленкова Е.Ю. **Алгебра 9 класс. Задания для обучения и развития учащихся.** – М.: Интеллект–Центр, 2010.
13. Макарычев Ю.Н. и др. **Дидактические материалы по алгебре** для 9 класса / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, Л.Б. Крайнева. – М.: Просвещение, 2010.
14. Макарычев Ю.Н. **Изучение алгебры в 7–9 классах**: кн. для учителя / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворова. – М.: Просвещение, 2009.
15. Миндюк Н.Г. **Алгебра. Рабочие программы.** Предметная линия учебников Ю.Н. Макарычева и др. 7–9 классы: пособие для учителей образоват. Учреждений. – М.: Просвещение, 2011.
16. Пичурин Л.Ф. **За страницами учебника алгебры.** – М.: Просвещение, 1991.
17. **Примерные программы по учебным предметам. Математика 5–9 классы.** / А.А. Кузнецов. – М.: Просвещение, 2011.
18. Семёнов А.В., и др. **Государственная итоговая аттестация выпускников 9 классов в новой форме. Математика 2013.** Учебное пособие / Под ред. И.В.Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. – М.: Интеллект–Центр, 2013.
19. Шестакова И.В. **Математика. 6 класс. Практикум. Готовимся к ГИА**: [учебное пособие]. – М.: Интеллект–Центр, 2013.

СОДЕРЖАНИЕ

Отпечатано с готовых диапозитивов в филиале ГУП МО «КТ» «Воскресенская типография» 140200, г. Воскресенск Московской области, ул. Вокзальная, д. 30
E-mail: vosprint@mail.ru тел.: 8 (49644) 2-45-42 Заказ 1360